FAİZ ORANLARININ VADE YAPISI
VE FAİZ ORANI MODELLERİ:
HEATH-JARROW-MORTON
YAKLAŞIMI ÇERÇEVESİNDE TAHVİL VE
FAİZ ORANINA DAYALI OPSİYON FİYATLAMASI

Arda SÜRMELİ

(Doktora Tezi)

Eskişehir, 2011

FAİZ ORANLARININ VADE YAPISI VE FAİZ ORANI MODELLERİ: HEATH-JARROW-MORTON YAKLAŞIMI ÇERÇEVESİNDE TAHVİL VE FAİZ ORANINA DAYALI OPSİYON FİYATLAMASI

Arda SÜRMELİ

DOKTORA TEZİ
İşletme Ana Bilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Nurhan AYDIN

Eskişehir
Anadolu Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü
Haziran 2011

<u>Jüri ve Enstitü Onayı</u>

Arda SÜRMELİ'nin ***"Faiz Oranlarının Vade Yapısı ve Faiz Oranı Modelleri: Heath-Jarrow-Morton Yaklaşımı Çerçevesinde Tahvil ve Faiz Oranına Dayalı Opsiyon Fiyatlaması"*** başlıklı tezi 03/06/2011 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca, ***İşletme*** Ana Bilim Dalında Doktora tezi olarak değerlendirilerek kabul edilmiştir.

İMZA

Üye (Tez Danışmanı) : Prof. Dr. Nurhan AYDIN

Üye : Prof. Dr. Mustafa ÖZER

Üye : Prof. Dr. Güven SEVİL

Üye : Prof. Dr. Niyazi BERK

Üye : Doç. Dr. Mehmet BAŞAR

Prof. Dr. Ramazan GEYLAN
Anadolu Üniversitesi
Sosyal Bilimler Enstitüsü Müdürü

Doktora Tez Özü

FAİZ ORANLARININ VADE YAPISI VE FAİZ ORANI MODELLERİ: HEATH-JARROW-MORTON YAKLAŞIMI ÇERÇEVESİNDE TAHVİL VE FAİZ ORANINA DAYALI OPSİYON FİYATLAMASI

Arda SÜRMELİ
İşletme Ana Bilim Dalı
Anadolu Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Mayıs 2011
Danışman: Prof. Dr. Nurhan AYDIN

Türev ürünler, organize bir piyasada ilk kez 1975 yılında işlem görmeye başlamışlardır. İlk işlem tarihinden günümüze kadar geçen sürede, türev ürün piyasalarında, özellikle faiz oranına dayalı türev ürün piyasalarında hızlı gelişmeler yaşanmıştır. Bu piyasalarda doğru fiyatlamanın ve risk yönetiminin gerçekleştirilebilmesi, sürdürülebilir bir finansal sistem için son derece önemlidir. Doğru fiyatlama ve risk yönetimi ise etkili ve sağlam temelli modellerin geliştirilmesine bağlıdır. Bu amaçla faiz oranlarının vade yapısını ve faiz oranlarına dayalı türev ürünlerin fiyatlamasını konu alan ilk çalışma 1977 tarihinde Oldrich A. Vasicek tarafından gerçekleştirilmiş, bu çalışmayı daha sonra birçok farklı çalışma izlemiş ve derin bir literatür oluşturulmuştur.

İzmir Vadeli İşlem ve Opsiyon Borsasının 2005 yılında işlerlik kazanmasının ardından işlem hacimlerinde yaşanan hızlı artışın etkisiyle ülkemizde de faiz oranına dayalı türev ürünlerin dinamiklerinin anlaşılması gün geçtikçe önem kazanmaktadır. Bu nedenle, bu çalışma kapsamında; faiz oranı, faiz oranlarının vade yapısı, volatilite yapıları ve aynı zamanda portföy ve risk yönetiminde bir araç olarak da kullanılabilecek fiyatlama modelleri üzerinde durulmuş; ülkemiz piyasalarında faiz oranına dayalı türev ürünlerin fiyatlaması için uygun olabilecek bir model belirlenmiş ve bu ürünlere ilişkin talebin oluşabilmesi için gerekli şartlar hakkında değerlendirmeler yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Faiz Oranlarının Vade Yapısı, Faiz Oranı Modelleri, Volatilite Yapıları, Faiz Oranı Opsiyonları, Fiyatlama

Abstract

TERM STRUCTURE OF INTEREST RATES AND INTEREST RATE MODELS: PRICING OF BONDS AND INTEREST RATE OPTIONS UNDER HEATH-JARROW-MORTON FRAMEWORK

Arda SÜRMELİ
Department of Business Administration
Anadolu University, Graduate School of Social Sciences, April 2011
Advisor: Prof. Dr. Nurhan AYDIN

Derivatives were first traded on regulated exchanges in 1975. Since then, there has been a significant growth in derivative markets particularly on interest rate derivatives. Accurate pricing and risk management that are contingent on effective and mathematically sound pricing models are crucial for a sustainable financial system. Thus, the term structure of interest rates and pricing of the derivatives based on interest rates have been studied by many researchers starting with Oldrich A. Vasicek in 1977 and a wide range of literature has been created since then.

In Turkey, understanding the dynamics of the interest rate derivatives has become more important day by day after the Turkish Derivatives Exchange (TurkDex) gained functionality in 2005 and trading volumes have showed a heavy increasing trend. As a consequence of this circumstance, the term structure of interest rates, volatility functions and interest rate derivative pricing that can also be used a portfolio management and risk management tool are studied in this dissertation. In addition to this an accurate pricing model was specified and required conditions for a plausible in demand market were examined.

Keywords: The Term Structure of Interest Rates, Interest Rate Models, Volatility Functions, Interest Rate Options, Pricing

Önsöz

Bu tezin tamamlanmasında pek çok kişiye teşekkür borçluyum.

Öncelikle beni akademik yaşantımın ilk gününden itibaren sürekli destekleyen ve yol gösteren danışmanım, değerli hocam Sayın Prof. Dr. Nurhan AYDIN'a,

Tez izleme toplantılarında görüş ve önerilerini benimle paylaşan Tez İzleme Komitesi Üyeleri Sayın Prof. Dr. Güven SEVİL'e ve Sayın Prof. Dr. Mustafa ÖZER'e,

Eğitim ve öğretim hayatım boyunca kutsal emeklerini benden esirgemeyen değerli öğretmenlerime,

Karşılığını hayatım boyunca ödeyemeyeceğim fedakârlıklarından dolayı sevgili annem Huriye SÜRMELİ'ye, babam Prof. Dr. Fevzi SÜRMELİ'ye, ağabeyim C. Onur SÜRMELİ'ye,

Ve son olarak geç saatlere kadar sürdürdüğüm çalışmalar boyunca benden desteğini esirgemeyen, zor anlarımda her zaman yanımda olan ve beni cesaretlendiren sevgili eşim Gözde HASSA SÜRMELİ'ye,

Sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Arda SÜRMELİ

Beni yetiştiren eşsiz insanlar;
annem Huriye Sürmeli ve
babam Prof. Dr. Fevzi Sürmeli'ye

Özgeçmiş

Arda SÜRMELİ
İşletme Ana Bilim Dalı
Doktora

Eğitim

Y.Ls. 2007 University of London, Birkbeck College, Financial Engineering

Y.Ls. 2004 Anadolu Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, İşletme Ana Bilim Dalı

Ls. 2002 Bilkent Üniversitesi, İşletme Fakültesi, İşletme Bölümü

Lise 1998 Eskişehir Anadolu Lisesi

İş

2002 Araştırma Görevlisi, Anadolu Üniversitesi, İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi

Yayınlar

Arda Sürmeli, "Kurumsal Risk Yönetimi", İşletme Finansı içinde, düzenleyen Murat Ertuğrul, 122-142. Eskişehir: Anadolu Üniversitesi Yayınları, Kasım 2010.

Arda Sürmeli, "Proje Risk Yönetimi", Proje Analizi ve Değerleme içinde, düzenleyen Adnan Sevim, 136-153. Eskişehir: Anadolu Üniversitesi Yayınları, Kasım 2010.

Adnan Sevim ve Arda Sürmeli, "İşletmelerde Kriz Yönetiminde Bir Erken Uyarı Sistemi: Kurumsal Kaynak Planlaması – ERP", Kriz Yönetimi içinde, düzenleyen Haluk Sümer ve Helmut Pernsteiner, 145-167. İstanbul: İstanbul Bilgi Üniversitesi Yayınları, 2009.

Nurhan Aydın, Arda Sürmeli ve Özlem Sayılır, "2000-2001 Economic Crisis and the Financial Performances of Domestic and Foreign Companies in Turkey", International Journal of Intercultural Information Management, 2009: 375-382.

Mehmet Başar, Arda Sürmeli vd., “Sosyal, Ekonomik ve Mali Göstergeler Doğrultusunda Eskişehir'de Seçilmiş Sektörlerin Analizi”, Eskişehir: Anadolu Üniversitesi Yayınları, 2008.

Deniz Taşçı, Arda Sürmeli vd., “Anadolu Üniversitesinin Eskişehir'e Etkileri ve Şehrin Üniversiteyi Algılayışı”, düzenleyen Fevzi Sürmeli, Eskişehir: Anadolu Üniversitesi Yayınları, 2008.

Nurhan Aydın, Arda Sürmeli ve Özlem Sayılır , “The Effects of 2000 and 2001 Crisis to the Financial Structure of the Firms with Foreign and Domestic Capital in Turkey”, International Business Law and Technology Conference, Copenhagen, 2006.

Ergun Kaya, Arda Sürmeli vd., “Build-Operate-Transfer (BOT) Implementations at Airports in Turkey”, TODAIE's Review of Public Administration, June 2007: 115-151.

Ergun Kaya, Arda Sürmeli vd., “Havaalanlarında Kamu-Özel İşbirliği Modelleri ve Türkiye'de Havalimanı Yolcu Terminallerinde Yap İşlet Devret Uygulamaları”, Ulusal Havacılık Sempozyumu ve Çalıştayı, İstanbul, 2005.

Kişisel Bilgiler

Doğum Yeri ve Yılı:	**Cinsiyet:**	**Yabancı Dil:**
Eskişehir, 04 Ocak 1980	Erkek	İngilizce

İçindekiler

Birinci Bölüm

Faiz Oranı, Faiz Oranlarının Vade Yapısı ve Faiz Oranına Dayalı Türev Ürünler

İkinci Bölüm

Faiz Oranı Modelleri

Üçüncü Bölüm

Getiri ve Forward Eğrilerinin Kalibrasyonu, Tahvil ve Faiz Oranına Dayalı Opsiyonların Fiyatlaması

Tablolar Listesi

Şekiller Listesi

Giriş

Dünya türev ürün piyasaları incelendiğinde; türev ürünlerin, her geçen gün piyasa katılımcılarının ihtiyaçlarına göre gelişmekte olduğu ve karmaşık bir hal aldığı söylenebilir. Türev ürünler, finansman ve risk yönetimi konularında yatırımcılara yeni fırsatlar ve esneklikler getirmektedir. Ancak bir diğer yandan, türev ürün sözleşmelerindeki dayanak varlık dinamiklerinin ve türev ürün fiyatlarının yanlış belirlenmesi sonucunda oluşan risk politikalarının da yanlış olacağı gerçeğiyle, türev ürünler ekonomik birimler için büyük tehditler ve darboğazlar da yaratabilmektedir.

Ocak 2010 itibariyle dünya türev ürün piyasalarının nominal büyüklüğü yaklaşık olarak 678 trilyon Amerikan Doları'na (USD) ulaşmıştır. Türev ürün piyasalarının ve türev ürünlere konu olan dayanak varlık piyasalarının sağlıklı işleyebilmesi, fırsatların kaçırılmaması ve yatırımcıların sağlıklı bir risk yönetimi gerçekleştirebilmeleri için dayanak varlık dinamiklerinin doğru olarak ortaya konması ve buna bağlı olarak türev ürünlerin doğru olarak fiyatlandırılması son derece önemli ve mutlak bir gerekliliktir. Dünya türev ürün piyasalarının dağılımı incelendiğinde; Ocak 2010 itibariyle faize dayalı türev ürün sözleşmelerinin, yaklaşık olarak 504 trilyon USD'lik bir büyüklüğe ulaştığı görülmektedir. Bu nedenle faiz oranının, faiz oranlarının vade yapısının ve faiz oranına dayalı türev ürün fiyatlarının doğru olarak ortaya konması, yatırımcıların finansal piyasa ve ürün tercihlerinde rasyonel karar alabilmeleri açısından son derece önemlidir.

Finansal piyasalarda yaşanan hızlı entegrasyon ve kaldıraç derecesi yüksek türev ürünlerin dünya piyasalarında ağırlık kazanması, gerek ulusal gerekse uluslararası piyasaların risk seviyelerinin oldukça artmasına ve piyasaların şoklara karşı olan hassasiyetinin tepki seviyeleri ve tepki süreleri açısından artmasına neden olmuştur. 1994 yılında Orange County vakasında tahvil opsiyonları işlemlerinde kaybedilen 2,4 milyar USD; 1995 yılında Barrings Bank vakasında endeks futures işlemlerinde kaybedilen 1,8 milyar USD; 1998 yılında Long Term Capital vakasında faiz oranı opsiyonları işlemlerinde kaybedilen 6 milyar USD; 2006 yılında Amaranth Advisors vakasında doğal gaz futures işlemlerinde kaybedilen 7 milyar USD; 2008 yılında

Société Général vakasında endeks futures işlemlerinde kaybedilen 7 milyar USD; 2008 yılında yaşanan finansal kriz sonucunda Bear Stearns'ın, Lehman Brothers'ın ve Merrill Lynch'in iflas ederek başka bankalara satılması; Goldman Sachs ve Morgan Stanley'in yatırım bankacılığı statüsünden mevduat bankacılığı statüsüne geçmesiyle safi yatırım bankacılığının fiilen sona ermesi gibi katastrofik sonuçlar, işlemlere konu olan dayanak varlık dinamiklerinin ve bu varlıklara dayalı türev ürün fiyatlarının doğru olarak belirlenememesinden kaynaklanmaktadır.

İzmir Vadeli İşlem ve Opsiyon Borsasının 2005 yılında işlerlik kazanmasıyla birlikte ilerleyen zamanlarda ülkemiz türev ürün piyasalarında yaşanacak gelişmelerin dünya türev ürün piyasalarında yaşanan gelişmelere benzer bir seyir izleyeceğini düşünmek mümkündür. Bu nedenle, bu çalışma kapsamında faiz oranı, faiz oranlarının vade yapısı, volatile yapısı ve aynı zamanda portföy ve risk yönetiminde bir araç olarak da kullanılabilecek fiyatlama üzerinde durulmuş, faiz oranına dayalı türev ürünlere ilişkin talebin oluşabilmesi için gerekli şartlar hakkında değerlendirmeler yapılmıştır.

Çalışmanın birinci bölümünde faiz oranı, faiz oranlarının vade yapısı ve faiz oranına dayalı türev ürünler hakkında temel bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde öncelikle iyi bir faiz oranı modelinde olması istenilen özellikler ile faiz oranı ve faiz oranlarının vade yapısına ilişkin ampirik bulgular açıklanmış; sonrasında ise faiz oranı modelleri literatüründe sıkça karşılaşılan ve farklı modeller geliştirmekte temel olarak kullanılan faiz oranı modelleri detaylıca işlenmiştir. Bu modellerin incelenmesi sırasında; literatürde genellikle karşılaşılanın aksine ve konuyla ilgili diğer araştırmacılara bir kaynak oluşturması ümidiyle, matematiksel hesaplamalar adım adım gerçekleştirilmeye çalışılmıştır.

Çalışmanın üçüncü ve son bölümünde İstanbul Menkul Kıymetler Borsası Tahvil ve Bono Piyasasında işlem gören hazine bonosu ve devlet tahvillerine ait 2 Ocak 2009 – 26 Şubat 2010 tarihleri arasındaki günlük kapanış fiyatları kullanılarak; farklı modeller ve farklı volatilite yapıları çerçevesinde; faiz oranları, faiz oranlarının vade yapısı belirlenmiş, tahvil ve faiz oranına dayalı opsiyon fiyatları hesaplanmıştır.

Birinci Bölüm

Faiz Oranı, Faiz Oranlarının Vade Yapısı ve Faiz Oranına Dayalı Türev Ürünler

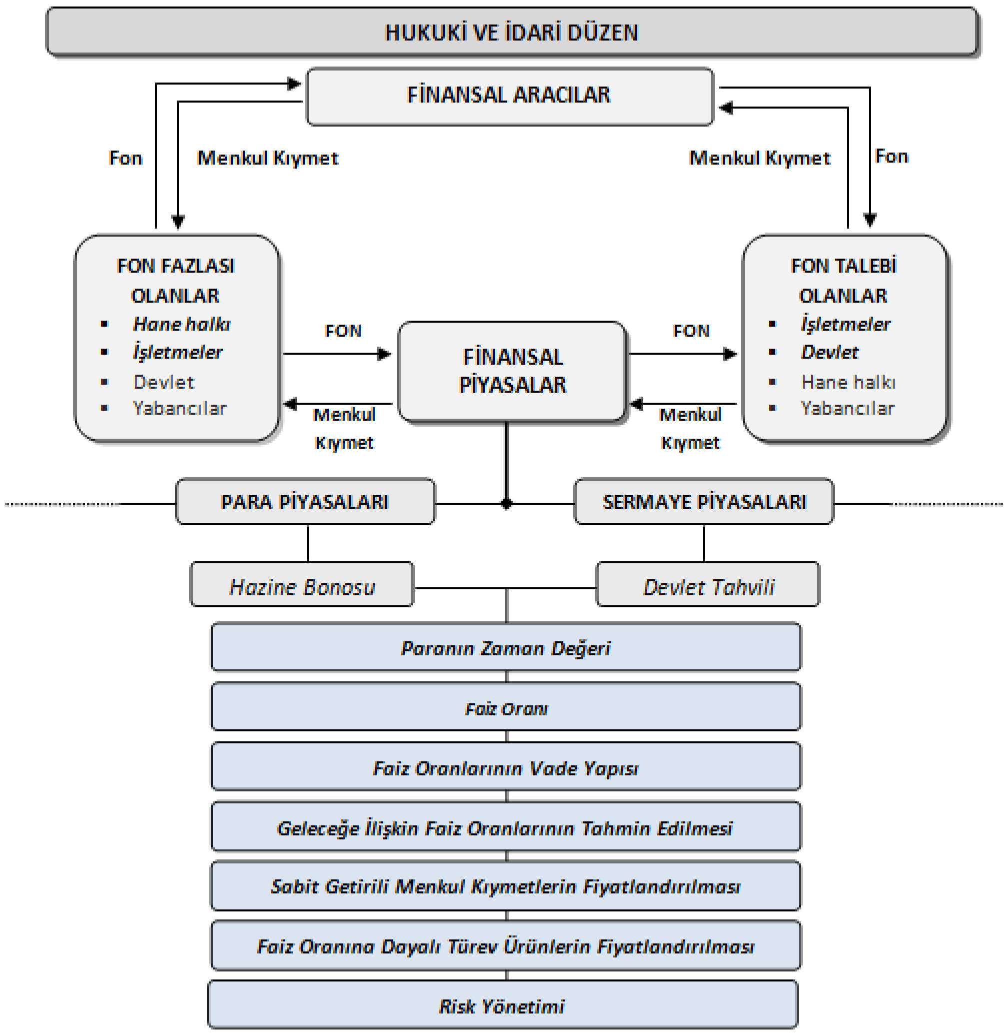
1. Faiz Oranı ve Faiz Oranlarının Vade Yapısı

1.1. Finansal Sistem ve Faiz Oranı

Sistem, farklı görevlere ve fonksiyonlara sahip ancak birbirlerine bağımlı ve aralarında iletişim olan öğe dizilerini, ortak bir amaca yarayacak şekilde aynı çatı altında toplayan bir bütündür. Birimlerin birinde veya birkaçında meydana gelen aksamalar, sistemin etkinlikten uzaklaşmasına neden olmaktadır (Sürmeli vd., 2007: 5). Bu tanım ve saptama finansal sistem için de geçerlidir. Bir ekonomide fon fazlası veya fon arzı olanlar genellikle hane halkı ve işletmeler (sonrasında devlet ve yabancılar); fon açığı veya fon talebi olanlar ise genellikle işletmeler ve devletler (sonrasında hane halkı ve yabancılar) olarak sayılabilir. Fon fazlası olanlar ile fon talebi olanları bir araya getiren ortamlar, finansal piyasalar olarak adlandırılmaktadır. Tarafların fon akımını; finansal piyasalarda yüz yüze gerçekleştirmeleri durumunda doğrudan finansman, finansal aracılar vasıtasıyla gerçekleştirmeleri durumunda dolaylı finansman söz konusudur. Gerek doğrudan finansman gerekse dolaylı finansman yoluyla fon arz edenler ile talep edenlerden, bunlar arasında fon akımlarını düzenleyen aracı kurumlardan, fon akımını sağlayan araçlardan ve bu süreci düzenleyen ve denetleyen hukuki ve idari kurallardan oluşan bütünsel yapı finansal sistem olarak tanımlanabilir (Aydın vd., 2007: 34). Finansal sistemin etkin bir şekilde işleyebilmesi için yukarıda açıklanan öğelerinin aksaksız çalışmasıyla birlikte arz ve talebi belirleyen faiz oranının da doğru belirlenmesi çok önemlidir. Çünkü faiz oranı; makroekonomik dengeyi sağlayan, para ve sermaye piyasaları arasındaki fon akımını, para talebini ve likidite tercihini etkileyen faktörlerin başında gelmektedir.

Faiz oranını önemli kılan bir diğer nokta paranın zaman değeridir. Yatırım kararlarında rasyonelliği sağlayabilmek için paranın zaman değeri ilkesinin göz ardı edilmemesi gerekmektedir. Paranın zaman değerine temel oluşturan faiz oranı ayrıca riske göre düzeltilmiş iskonto oranına da temel teşkil etmektedir. Çünkü enflasyon dışında;

likidite, geri ödememe ve vade gibi riskleri de dikkate alan faiz oranı beklentileri, yatırımcıların finansal piyasa ve finansal araç tercihlerinde rasyonel karar almalarında yararlanabilecekleri riske göre düzeltilmiş iskonto oranı için belirleyici olmaktadır. Bir diğer yandan, gün geçtikçe karmaşıklaşan yatırım alternatiflerine ilişkin etkin bir risk yönetimi için de geleceğe ilişkin faiz oranlarının doğru tahmin edilmesi büyük önem taşır. Bu çalışma kapsamıyla sınırlı olarak, faiz oranın finansal sistem içerisindeki etki alanı Şekil 1'de özetlenmeye çalışılmıştır.



Şekil 1. Finansal Sistem ve Faiz Oranı

1.2. Faiz Oranlarının Vade Yapısıyla İlgili Hipotezler

Faiz oranlarının vade yapısı, sabit getirili kupon ödemesiz bir menkul kıymetin, vadeye–kadar–getirisi ile vade tarihi arasındaki ilişkiyi ifade etmektedir. Söz konusu ilişkinin x-y koordinatları üzerindeki grafiksel gösterimi getiri eğrisi olarak ifade edilir. Getiri eğrilerinde meydana gelen değişimleri açıklayabilmek amacıyla farklı hipotezler geliştirilmiştir. Bu hipotezleri; Bekleyişler Hipotezi, Bölünmüş Piyasalar Hipotezi ve Likidite Tercihi Hipotezi olarak sıralamak mümkündür. Bu üç hipotezin temel varsayımları ve çıkarımları aşağıda özetlenmiştir (Martellini vd., 2006: 81-87; Sharpe vd., 1999: 120-130; Şıklar, 2008: 100-106).

1.2.1. Bekleyişler Hipotezi

Bekleyişler Hipotezine göre, ekonomik birimler, kısa ve uzun vade arasında herhangi bir farklılık gözetmemekte; sadece elde edilecek getiriyi maksimize etmeyi hedeflemektedirler. Buradan hareketle, uzun vadeli tahvil faiz oranı, vade içerisinde gerçekleşmesi beklenen kısa vadeli tahvil faiz oranlarının ortalamasıdır. Bekleyişler Hipotezi, faiz oranlarının vade yapısını, kısa vadeli faiz oranının gelecekte alabileceği farklı değerlere ve beklentilere bağlı olarak açıklamaktadır. Özellikle, forward faiz oranlarının tahmin edilmesinde kullanılabilir olması nedeniyle faiz oranlarının vade yapısını açıklamaya yönelik önemli bir teorik açılım olan Bekleyişler Hipotezi, kısa vadeli ve uzun vadeli faiz oranları arasındaki ilişkiyi aşağıdaki eşitlikle ifade etmektedir:

(1.2.1.1)

$$1+R(t,T)=\Big[\big(1+R(t,1)\big)\big(1+F^{e}(t,t+1,1)\big)\big(1+F^{e}(t,t+2,1\big)...\big(1+F^{e}(t,t+(T-1),1\big)\Big]^{1/T}$$

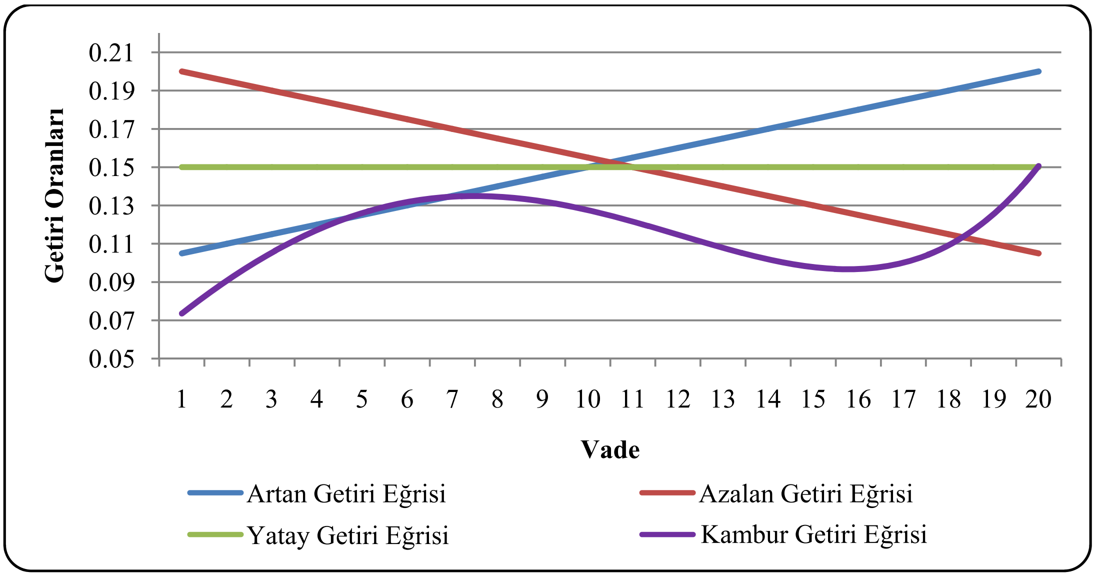
$R(t,T)$: (t) zamanında, (T) vadeli cari faiz oranı

$F^{e}(t,t+k,1)$: (t) zamanında, $(t+k)$ zamanından itibaren 1 dönem geçerli olması beklenen cari faiz oranı

Bekleyişler Hipotezine göre ekonomik birimler tarafından, gelecek dönemlere ilişkin kısa vadeli faiz oranlarında;

- Bir artış beklentisi egemense, getiri eğrisi artan bir seyir izleyecektir (eğim katsayısı pozitif olacaktır),
- Bir azalış beklentisi egemense, getiri eğrisi azalan bir seyir izleyecektir (eğim katsayısı negatif olacaktır),
- Hissedilebilir herhangi bir değişim beklenmiyorsa, getiri eğrisi yatay bir seyir izleyecektir (eğim katsayısı sıfır veya sıfıra yakın bir değer olacaktır),
- Öncesinde bir azalış, sonrasında bir artış veya öncesinde bir artış, sonrasında bir azalış beklentisi egemense getiri eğrisi kambur şeklinde dalgalı bir seyir izleyecektir (getiri eğrisinde en az bir ekstramum nokta bulunmakta ve eğim katsayısı işaret değiştirmektedir).

Yukarıda açıklanan farklı şekillerdeki getiri eğrileri Şekil 2'de gösterilmektedir.



Şekil 2. Getiri Eğrisi Formları

Bekleyişler Hipotezinin, kısa vadeli tahviller ile uzun vadeli tahviller arasındaki ayrımı belirten likidite primini ve yeniden yatırım oranı riskini dikkate almaması hipotezin geliştirilmeye açık bir yönüdür. Ayrıca, ekonomik bir ortamda, uzun vadeli beklentilerin ne ölçüde gerçekçi ve kullanılabilir olacağı da dikkat edilmesi gereken ayrı bir noktadır.

1.2.2. Bölünmüş Piyasalar Hipotezi

Bekleyişler Hipotezinin aksine, kısa vadeli tahviller ile uzun vadeli tahviller arasındaki ayrımı belirten ve likidite primini dikkate alan Bölünmüş Piyasalar Hipotezinde, farklı vadelere sahip tahviller arasında kesin bir farklılık bulunduğu varsayılmaktadır. Bu yaklaşıma göre piyasada, yükümlülüklerine bağlı olarak farklı yatırımcı kategorileri bulunmakta ve belirli bir kategorideki yatırımcı, sistematik olarak içinde bulunduğu piyasada işlem yapmaktadır. Bir örnekle açıklamak gerekirse, Bölünmüş Piyasalar Hipotezinde, ticari bankaların çoğunlukla kısa ve orta vadeli yükümlülükleri bulunması nedeniyle bu bankaların çoğunlukla kısa vadeli piyasalarda (para piyasalarında) işlem yaptıkları, sigorta şirketleri ve emeklilik fonlarının ise uzun vadeli yükümlülükleri bulunması nedeniyle uzun vadeli piyasalarda (sermaye piyasalarında) işlem yaptıkları varsayılmaktadır. Bu nedenle getiri eğrisinin şekli ilgili piyasalardaki arz ve talebe göre oluşacaktır. Kısa vadeli sabit getirili menkul kıymetlere olan talebin, uzun vadeli tahvillere olan talebe göre daha yüksek olması artan bir getiri eğrisini meydana getirecektir. Çünkü kısa vadeli sabit getirili menkul kıymetlere talebin yüksek olması bu menkul kıymetlerin fiyatlarının artmasına ve bu menkul kıymetlere ilişkin faiz oranlarının düşmesine yol açacaktır. Diğer yandan uzun vadeli tahvillere yoğun bir talebin olması durumunda uzun vadeli tahvillerin fiyatı artacak ve bu tahvillere ilişkin faiz oranları düşecek ve neticesinde azalan bir getiri eğrisi söz konusu olacaktır. Yatık bir getiri eğrisinden söz edebilmek içinse kısa ve uzun vadeli sabit getirili menkul kıymetlere olan talebin birbirlerine çok yakın olması gerekmektedir. Bu yaklaşımda kısa ve uzun vadeli piyasaların birbirinden tam olarak bağımsız hareket ettiklerinin varsayılması nedeniyle ve yatırımcıların tercihlerinde herhangi bir değişiklik yapmamaları durumunda getiri eğrisinde süreksizlik oluşabilir.

Bölünmüş Piyasalar Hipotezinin, vadeler arasında herhangi bir ikame ilişkisinin bulunmadığını, bir diğer ifadeyle kısa ve uzun vadeli piyasaların birbirlerinden bağımsız olduğunu varsayması hipotezin zayıf noktasıdır. Bu varsayımdan ötürü, günlük hayatta getiri eğrilerinde karşılaşılan paralel hareketler, bu yaklaşımda mümkün olmamaktadır. Ayrıca haberleşme ve bilgi teknolojilerindeki hızlı gelişmeler sonucunda farklı piyasaların birbirlerinden soyutlanması da mümkün gözükmemektedir.

1.2.3. Likidite Tercihi Hipotezi

Kısa vadeli sabit getirili menkul kıymetler ile uzun vadeli tahviller arasındaki ikame ilişkisinin ne tam olarak reddedildiği ne de tam olarak kabul edildiği Likidite Tercihi Hipotezi, Bekleyişler Hipotezi ile Bölünmüş Piyasalar Hipotezi arasında orta yolu bulan bir yaklaşımdır. Bu yaklaşımda ilk olarak belirtilmesi gereken nokta, yatırımcıların öncelikli tercihlerinin kısa vadeden yana olacağıdır. Ancak, belirli bir yatırım sürecinde, uzun vadeli bir tahvil, kısa vadeli menkul kıymete göre vade primi olarak adlandırılan ekstra bir getiri sağlıyorsa yatırımcıların uzun vadeli tahvilleri de talep etmeleri teşvik edilebilir. Tahvillere ilişkin vade süresinin uzamasıyla birlikte vade primlerinin azalan bir hızda artması beklenmektedir. Likidite Tercihi Hipotezine göre cari faiz oranı aşağıdaki eşitlikle ifade edilebilir.

(1.2.3.1) $1+R(t,T)=\left[\left(1+R(t,1)\right)\left(1+L_2\right)\left(1+L_3\right)...\left(1+L_T\right)\right]^{1/T}$

(1.2.3.2) $0<\sum_{j=2}^{j=2}L_j<\sum_{j=2}^{j=3}L_j<\sum_{j=2}^{j=4}L_j<...<\sum_{j=2}^{j=T}L_j$

(1.2.3.3) $L_2>L_3-L_2>L_4-L_3>...>L_T-L_{T-1}$

$R(t,T)$: (t) zamanında, (T) vadeli cari faiz oranı

L_j : (t) zamanında, (j) vadeli bir tahvile yatırım yapılabilmesi için piyasa tarafından istenen vade primi $(j=1,2,3,...,T)$

Bu yaklaşım, yatırımcıların likidite tercihlerini ve kısa vadedeki fiyat dalgalanmalarından korunma isteklerini eş zamanlı olarak dikkate alan bir yaklaşımdır. Yalın haliyle bu yaklaşımda, yatırımcıların uzayan vadeye bağlı olarak artan bir vade primi beklentisi içinde olmaları nedeniyle azalan getiri eğrilerini ve yeniden yatırım riskinin göz ardı edilmesi nedeniyle de kambur şeklinde dalgalı seyir izleyen getiri eğrilerini elde etmek mümkün değildir.

Yukarıda açıklanan üç temel hipoteze ilave olarak Bölünmüş Piyasalar Hipotezi ile Likidite Tercihi Hipotezinin karışımından elde edilen hibrit bir hipotezden de söz etmek mümkündür. Bölünmüş Piyasalar Hipotezinden daha gerçekçi varsayımlara sahip olan, faiz oranlarının vade yapısıyla ilgili bazı kaynaklarda değinilen ve 4. bir alternatif olarak değerlendirilen Tercih Edilmiş Ortam (*Preferred Habitat*) Hipotezi, likidite priminin uzayan vadeye bağlı olarak her zaman artmayabileceğini, kimi zaman da azalabileceğini savunarak Likidite Tercihi Hipotezini de bir ölçüde yumuşatmaktadır. Bu hipotez, getiri eğrisinin artan bir form alabileceği gibi azalan, kambur şeklinde dalgalı veya yatık bir formda da olabileceğini belirtmektedir. Bu hipoteze göre uzun vadeli piyasalar ile kısa vadeli piyasalarda arz ve talebin kesişmemesi bir diğer ifadeyle dengesizlik durumunda, fiyat ve yeniden yatırım riskini dengeleyecek bir prim karşılığında yatırımcılar içinde bulundukları piyasadan diğer piyasaya geçiş yapmaya razı olabilirler.

2. Faiz Oranına Dayalı Türev Ürünler

İkinci Dünya Savaşından sonra yürürlüğe giren Bretton Woods sisteminin 1971'de çökmesiyle birlikte finans dünyası, özellikle döviz kuru ve faiz oranı gibi temel finansal risklerle karşılaşmıştır. Ortaya çıkan bu finansal risklerden korunmak veya bu riskleri mümkün olduğunca azaltmak amacıyla finansal risk yönetimi gündeme gelmiş ve risk yönetiminde yararlanılacak yeni finansal araçlar geliştirilmiştir. Bu finansal araçlar arasında en önemlileri; futures, forward, opsiyon ve swap sözleşmeleri olarak sayılabilecek türev ürünlerdir. Türev ürünler; faiz oranı, yabancı para birimi, hisse senedi, borsa endeksi, kredi sözleşmeleri veya emtia gibi birçok finansal olan veya finansal olmayan varlıklar üzerine oluşturulabilir. Futures, forward, opsiyon ve swap sözleşmeleri finansal ürünlerin veya emtianın gelecekteki fiyat belirsizliğini (fiyat değişkenliğini) azaltmayı veya kontrol altına almayı amaçlar (Chambers, 1999: 2).

Türev ürün piyasaları, üç temel piyasa stratejisini gerçekleştirmek için kullanılmaktadır. Bunlar; koruma, spekülasyon ve arbitrajdır. Koruma amaçlı işlemler, türev ürün piyasalarının varoluş nedenini oluşturmaları dışında fiyat değişim riskini azaltır ve risk arzı sağlar. Spekülatif işlemler ise fiyat farklılıklarının ticaretinin yapılarak kazanç elde edilmesine olanak tanır, risk talebini ve likiditeyi artırır. Arbitraj işlemleri ise paralel piyasalarda fiyat istikrarı yaratarak paralel risklerin de istikrar içinde olmasını sağlar.

Bunların yanında türev ürünlerin bir diğer kullanım alanı geleceğe ilişkin beklentiler hakkında bilgi vermeleridir (İstanbul Menkul Kıymetler Borsası [İMKB] Vadeli İşlemler Piyasası Çalışma Müdürlüğü, 1995: 2-3).

Bu çalışma kapsamında özellikle geri ödememe riskinin bulunmadığı varsayılan devlet iç borçlanma senetlerinden (hazine bonosu ve devlet tahvili) elde edilen faiz oranı ve söz konusu borçlanma senetleri dolayısıyla faiz oranı üzerine oluşturulmuş türev ürünler ele alınacaktır.

Faiz oranına dayalı türev ürün sözleşmelerinin dünya piyasalarındaki gelişimi incelendiğinde oldukça hızlı bir ilerleme kaydedildiği söylenebilir. Dünya genelinde faiz oranına dayalı türev ürün sözleşmeleri ilk olarak 1975'te Chicago Ticaret Borsasında (Chicago Mercantile Exchange – CME), ülkemizde ise ilk olarak 2005'te İzmir Vadeli İşlem ve Opsiyon Borsasında (VOB) işlem görmüştür.

İlk işlem tarihinden günümüze kadar geçen sürede küresel türev piyasalarında çok hızlı bir büyüme yaşanmış ve 2010 Ocak itibariyle türev piyasaların toplam büyüklüğü yaklaşık olarak 678 trilyon USD'ye ulaşmıştır. Bu rakamın yaklaşık olarak yüzde 75'ini faiz oranına dayalı sözleşmeler; yüzde 7'sini yabancı para birimine dayalı sözleşmeler; yüzde 2'sini hisse senedine dayalı sözleşmeler oluşturmaktadır (Detaylar *Tablo1.*'de yer almaktadır).

Dünyada önde gelen türev piyasaları; CME, New York Vadeli İşlemler Borsası (New York Futures Exchange – NYFE), New York Ticaret Borsası (New York Mercantile Exchange – NYME), New York Pamuk Borsası (New York Cotton Exchange – NYCE), Almanya Vadeli İşlemler Borsası (Deutsche Termin Borse – DTB) ve İsviçre Opsiyon ve Finansal Vadeli İşlemler Borsası (Swiss Options and Futures Exchange – SOFFEX) ortaklığında kurulan EUREX, Paris, Amsterdam ve Brüksel Vadeli İşlemler Borsaları ortaklığında kurulmuş olan EURONEXT ile Londra Uluslararası Finansal Vadeli İşlemler ve Opsiyon Borsası (London International Financial Futures and Options Exchange – LIFFE) ortaklığında kurulan EURONEXT.LIFFE, Brezilya Ticari ve Vadeli İşlemler Borsası (Brazilian Mercantile and Futures Exchange - BM&F), Hong

Kong Vadeli işlemler Borsası (Hong Kong Futures Exchange – HKFE) ve Tokyo Uluslararası Finansal Vadeli İşlemler Borsası (Tokyo International Financial Futures Exchange – TIFFE) olarak sayılabilir.

Tablo 1. Ocak 2010 İtibariyle Küresel Tezgâh Üstü ve Organize Türev Piyasa Büyüklükleri

	Dolaşımdaki İtibari Değer	
	Milyar $	**%**
Faiz Oranına Dayalı Sözleşmeler	**504.256**	**75**
Tezgâh Üstü Piyasalar	*437.198*	*65*
Organize Piyasalar	*67.058*	*10*
Yabancı Para Birimine Dayalı Sözleşmeler	**49.086**	**7**
Tezgâh Üstü Piyasalar	*48.775*	*7*
Organize Piyasalar	*311*	*<1*
Hisse Senedine Dayalı Sözleşmeler	**12.388**	**2**
Tezgâh Üstü Piyasalar	*6.619*	*1*
Organize Piyasalar	*5.769*	*1*
Emtiaya Dayalı Sözleşmeler	**3.729**	**1**
Kredi Temerrüdüne Dayalı Sözleşmeler (CDS)	**36.046**	**5**
Diğer	**72.255**	**10**
TOPLAM	**677.760**	

Kaynak: (Monetary and Economic Department, Bank for International Settlements [BIS] 2010, A103-A126)

Ülkemiz açısından değerlendirildiğinde VOB'daki ilk işlem tarihi olan 2005 yılına ait yıllık işlem hacmi yaklaşık 3 milyar Türk Lirası (TL.) seviyesindeyken; işlem hacmi 2010 sonunda 432 milyar TL.'ye ulaşmıştır. VOB'da hisse senedi endeksine, dövize, emtiaya ve faiz oranına dayalı sözleşmelerin alım - satımı gerçekleştirilmektedir. VOB'da gerçekleşen toplam işlem hacminin yaklaşık olarak; yüzde 97,2'sini hisse senedi endeksine dayalı sözleşmeler, yüzde 2,6'sını dövize dayalı sözleşmeler, binde 1'ini emtiaya dayalı sözleşmeler ve on binde 1'ini faiz oranına dayalı sözleşmeler oluşturmaktadır (VOB, 2011).

İşlem hacimleri bakımından değerlendirildiğinde 2005-2010 döneminde yaklaşık olarak 144 katlık bir büyüme ile VOB önemli bir başarı elde etmiştir. Ancak; işlem adedi, işlem hacmi ve enstrüman çeşitliği bakımından VOB dünyanın önde gelen türev piyasalarının gerisindedir. Bununla birlikte, VOB'da gerçekleşen sözleşmelerin dayanak varlıklarına göre dağılımları incelendiğinde dünya genelinden oldukça farklı olduğu görülmektedir. Özellikle VOB'daki faiz oranına dayalı sözleşmelerin toplam vadeli işlemler piyasası içerisindeki payı dünya piyasalarındaki durum ile karşılaştırıldığında oldukça geridedir.

Faiz oranına dayalı türev ürün sözleşmeleri; forward faiz oranı sözleşmeleri, faiz oranı futures sözleşmeleri, faiz oranı swap sözleşmeleri, faiz oranı opsiyon sözleşmeleri (bono - tahvil opsiyon sözleşmeleri) ve faiz oranı swaption sözleşmeleri olarak sayılabilir.

Genellikle tezgâh üstü piyasalarda işlem gören forward faiz oranı sözleşmeleri, ileri bir vadede alınacak bir para piyasası pozisyonuna uygulanacak faiz oranını, sözleşmenin yapıldığı tarihte sabitleyen sözleşmelerdir. Forward faiz oranı sözleşmelerinde isteğe bağlı kullanım söz konusu değildir. Taraflar sözleşmenin şartlarını yerine getirmekle yükümlüdürler. Forward sözleşmelerinde; kâr veya zararın vade sonunda ortaya çıkması ve karşı taraf riskinin yüksek olması nedeniyle işlemler genellikle büyük finans kuruluşları arasında gerçekleşmektedir.

Faiz oranı futures sözleşmeleri, dayanak varlığın sabit getirili borçlanma enstrümanları olduğu vadeli sözleşmelerdir. Sözleşmeyi satın alan/satan taraf, sözleşmeye konu olan dayanak varlığı; belirlenen fiyattan, belirlenen miktarda ve belirlenen zamanda almakla/satmakla yükümlüdür. Faiz oranı futures sözleşmeleri organize piyasalarda işlem görmektedirler.

Swap sözleşmelerinde anlaşmayı yapan taraflar belirli bir zaman dilimi içerisinde nakit akışlarını takas ederler. Faiz oranı swap sözleşmesinde taraflar birbirlerine aynı para birimi üzerinden faiz ödemeleri yaparlar. Sözleşmenin başlangıç tarihi, bitiş tarihi ve ödemelerin yapılacağı tarihler belirlidir. Başlangıçta sözleşmenin değeri sıfırdır ve taraflar birbirlerine herhangi bir ödemede bulunmazlar. Ödemelerin yapıldığı güne kuruluş zamanı, uzlaşma tarihleri arasında kalan süreye ise uzlaşma süresi denilmektedir. Faiz oranı swap sözleşmelerinde taraflar arasında el değiştirmeyen bir anapara bulunur ve bu anapara tutarı ödemelerin ne kadar olacağının hesabında kullanılır (Yıldırak vd., 2008: 12).

Faiz oranı opsiyon sözleşmeleri, faiz ile ilgili menkul değerlere dayalı opsiyon sözleşmeleridir. Faiz oranı opsiyonları, sahibine herhangi bir tarihten itibaren belirli bir süre içinde, belirli bir faiz üzerinden borçlanma ya da borç verme hakkını vermektedir. Faiz oranı opsiyonları kendi içerisinde faiz tavanları (*interest rate caps*), faiz tabanları (*interest rate floors*) ve faiz kuşakları (*interest rate collars*) gibi sınıflara ayrılabilirler. Faiz oranı tavanları, dalgalı faiz oranının önceden belirlenmiş tavan faiz oranının üzerine çıkması durumunda sahibine bir güvence sağlayacak şekilde tasarlanmış opsiyon sözleşmeleridir. Dalgalı faiz oranının, tavan faiz oranının (*cap rate*) üzerine çıkması durumunda geçerli olacak faiz oranı önceden belirlenmiş tavan faiz oranıdır. Dalgalı faiz oranı, *tenor* olarak adlandırılan belirli dönemlerde referans endeks noktasına eşitlenir. Kullanımda referans endeks noktası olarak LIBOR (*London Interbank Offered Rate* – Londra Bankalararası Faiz Oranı) tercih edilmektedir. Faiz oranı tabanları ise dalgalı faiz oranının önceden belirlenmiş taban faiz oranının (*floor rate*) altına düşmesi durumunda sahibine bir güvence sağlayacak şekilde dizayn edilmiş opsiyon sözleşmeleridir. Faiz oranı kuşakları ise faiz oranı tavan ve faiz oranı taban opsiyon sözleşmelerinin birleşimidir. Faiz oranı kuşakları, dalgalı faiz oranının önceden belirlenmiş üst ve alt limitler (tavan faiz oranı ve taban faiz oranı) arasında olmasını sağlamaktadır (Hull, 2006: 619-621).

Faiz oranı opsiyonları, kamu borçlanma araçlarına ilişkin olabileceği gibi bu araçlar üzerine yazılmış futures sözleşmelerine de dayalı olabilir. Borsalarda en yaygın olarak ticareti yapılan faiz opsiyonları; hazine bonosu, devlet tahvili ve Eurodollar futures sözleşmeleri üzerine yazılan opsiyonlardır. Futures opsiyonları, belirli bir fiyattan belirli bir tarihte futures sözleşmelerinin alım satımını bir zorunluluk olarak değil, alım satım hakkını veren sözleşmelerdir. Benzer şekilde swaption veya swap opsiyon sözleşmeleri, şartları önceden belirlenmiş bir faiz oranı swap sözleşmesinin belirli bir tarihe kadar alım satım hakkını veren, tezgah üstü piyasalarda işlem gören opsiyon sözleşmeleridir.
Faiz oranında meydana gelen değişimlere ilişkin olarak korunma, spekülasyon veya arbitraj amaçlı kullanılabilecek temel türev ürünler yukarıda tanıtılmış ve özellikleri üzerinde kısaca durulmuştur. Faize dayalı türev ürünlerin getirisi tabi ki dayanak varlık olarak kabul ettiği faiz oranına ve faiz oranlarının vade yapısına bağlıdır. Bu nedenle faiz oranına dayalı türev ürün fiyatlamalarının gerçekçi; korunma işlemlerinin etkili ve

etkin olarak yapılabilmesi için gerekli öncelik faiz oranlarının ve faiz oranlarının vade yapısının iyi modellenmesidir. Çalışmanın ikinci bölümünde faiz oranlarının modellenmesi üzerinde durulacaktır.

İkinci Bölüm

Faiz Oranı Modelleri

Sınırlı miktardaki fonların rasyonel olarak değerlendirilebilmesi ve etkin bir risk yönetiminin gerçekleştirilebilmesi doğru finansal ürünlerin tercih edilmesine bağlıdır. Alternatif finansal ürünler arasından seçim yapılırken yatırımcıların dikkate almaları gereken kritik noktalar, mevcut faiz oranı ve gelecekteki faiz oranı beklentileridir. Bu nedenle faiz oranlarının gerçekçi ve doğru sonuçlar üretecek şekilde modellenmesi çok önemlidir. Faiz oranı modellerinin üç temel görevi; faiz oranında meydana gelen değişimleri açıklamak, faize dayalı türev ürünlere ait geçerli ve doğru fiyatların hesaplanmasına yardımcı olmak ve risk yönetiminde kullanılan bir araç olmaktır. Yaklaşık 30 yıldır yapılan birçok araştırmaya rağmen faiz oranı değişimlerinin tam olarak anlaşılamamasıyla birlikte günümüzde fiyatlama ve risk yönetimi konularında başarılı olmuş modeller bulunmaktadır.

1. Faiz Oranı Modellerinde Kullanılan Oranlar

Faiz oranlarının modellenmesinde amaca göre farklı getiri oranlarından yararlanılmaktadır. Literatürde sıkça kullanılan farklı oranlar aşağıda kısaca açıklanmaktadır.

1.1. Vadeye-Kadar-Getiri Oranı

Bir menkul kıymetten sağlanan nakit akışlarının (CF) şimdiki değerlerinin toplamını, menkul kıymetin cari piyasa fiyatına $(P_{t,T})$ eşitleyen getiri oranı, vadeye-kadar-getiri oranı (y) olarak tanımlanabilir (Aydın, 2009: 147).

(1.1.1) $$P_{t,T} = \left(\sum_{t=1}^{T} \frac{CF_t}{(1+y)^t} \right) + \frac{P_{T,T}}{(1+y)^t}$$

1.2. Swap Oranı

Kredi değerliliği farklı iki işletmenin, aynı tutarda ancak farklı faiz koşullarına sahip borçların gerektirdiği ödemeleri, belli bir süre değiştirmeleri anlamına gelen faiz swap sözleşmelerinin en sık karşılaşılan türü sade (*plain-vanilla*) ya da kupon swap işlemleridir. Taraflardan biri, dalgalı bir endekse dayalı olarak elde edeceği faize karşılık, sabit faiz yükünü kabul etmektedir. Piyasalarda en sık baz olarak kullanılan dalgalı endeks LIBOR'dur (Akgüç, 2010: 503). Farklı vadelere ilişkin piyasa swap oranı, ilgili vadeye ait alış ve teklif oranlarının aritmetik ortalaması olarak hesaplanmaktadır.

Sabit faiz oranının piyasadaki mevcut swap oranına eşit olduğu bir swap anlaşması düşünülürse bu swap anlaşmasının değeri doğal olarak sıfır olacaktır. Çünkü swap anlaşmasına taban oluşturan sabit faiz oranlı menkul kıymet değeri (B_{fx}), değişken faiz oranlı menkul kıymetin değerine (B_{fl}) eşit olacaktır. Bu eşitlikten $(B_{fx} = B_{fl})$ yararlanılarak, farklı vadelerdeki swap oranları elde edilebilir (Hull 2006, 160-161).

1.3. Getiri (İskonto) Oranı

$\left(P_{t,T}\right)$, vade sonunda $(t = T)$ 1 TL. nominal değere sahip bir menkul kıymetin, (t) zamanındaki piyasa fiyatı ise, (t) zamanındaki iskonto oranı $\left(R(t,T)\right)$ aşağıdaki eşitlik yardımıyla bulunabilir (Sharpe vd., 1999: 523).

(1.3.1) $$P_{t,T} = \frac{P_{T,T}}{\left(1 + R(t,T)\right)^{(T-t)}} \text{ , } P_{T,T} = 1$$

1.4. Forward Oranı

(t) zamanında, ilerideki (θ) tarihinden itibaren, vade sonuna $(t = T)$ kadar geçerli olan borç alma verme oranını belirten ve $F(t,\theta,T)$ olarak gösterilen forward oranı, (t) zamanında imzalan bir sözleşme ile, gelecek bir tarihten (θ) geçerli olmak üzere vade tarihine $(t = T)$ kadar hangi orandan borç alınıp verileceğini göstermektedir $(T > \theta)$ (Neftci, 2000: 420).

(1.4.1) $$F(t,\theta,T) = \left[\frac{(1+R(t,T))^{T}}{(1+R(t,\theta))^{\theta}}\right]^{\frac{1}{T-\theta}} - 1$$

2. İyi Bir Faiz Oranı Modelinde Olması İstenilen Özellikler

Faiz oranı modelleri, faiz oranlarında günlük olarak yaşanan yükseliş ve düşüşleri doğru olarak tahmin etmek için değil; faiz oranlarında meydana gelen değişimlerin dağılım özelliklerini ortaya koymak amacıyla geliştirilmiştir. Faiz oranı modellerinden beklentiler, modelin faiz oranları ile ilgili olarak kesin bir nokta tahmini yapmasından ziyade faiz oranlarında meydana gelen değişimlerin; dağılım genişliği, dağılım şekli, belirli bir seviyeye ulaşma olasılığı gibi istatistiksel özelliklerini ortaya koymasıdır. Faiz oranlarının değişimine ait dağılım özellikleri bilindiği takdirde belirli varsayımlar altında, faize dayalı sözleşmelerin fiyatlaması, bu sözleşmelere ait beklenen getirinin iskonto edilmesiyle mümkün hale gelmekte ve risk yönetiminde bir araç olarak kullanılabilmektedir. Sözleşmelerin gelecek değerlerinin belirlenmesi ve bir sözleşmeyle ilgili olarak tolere edilebilecek seviyeden daha fazla kaybetme olasılığının hesaplanması amacıyla risk yönetiminde faiz oranı modellerine sıkça başvurulmaktadır.

Farklı modellerin performanslarını karşılaştırmak, belirli koşullar altında hangi modelin daha yüksek bir performans sergilediğini söylemek oldukça zordur. Zaman içerisinde piyasa koşullarında yaşanan büyük değişkenlikler, bu zorluğun temel nedeni olarak verilebilir. Belirli bir modele ilişkin geriye dönük yapılan testlerde yıllar itibarıyla elde edilen sonuçlar çok farklı olabilir. 2000-2001 döneminde yüksek performans sergileyen bir model, 2002-2003 döneminde düşük bir performans sergileyebilir. Modellerin test edilme sürecinde akla gelen ilk alternatif, tarihi verilerin kullanılması olabilir ancak bu öncelikli olarak tercih edilen bir yöntem değildir. Piyasalarda öncelik, fiyatlama (*pricing*) ve riskten korunma (*hedging*) süreçlerindedir. Bu süreçlerde model, mevcut piyasa verilerine uyarlanır. Modeldeki değişken parametreler (*floating parameters*), kullanılan modelin piyasadaki likit ürünlerin fiyatlarını oluşturacak şekilde belirlenir. Bu süreç kalibrasyon olarak tanımlanmaktadır. Daha sonra kalibre edilmiş modeller, kalibrasyonda kullanılmış ürünlere benzer ürünlerin fiyatlandırılmasında kullanılabileceği gibi diğer ürünlerin fiyatlandırılmasında da kullanılabilir. Kalibrasyon ve sonrasındaki fiyatlama ve riskten korunma sürecinde piyasadaki ürün çeşitliliği ve piyasa derinliği önem kazanmaktadır.

En yüksek performanslı modelin hangisi olduğunu söylemek mümkün olmasa da iyi bir modelin sahip olması gereken özellikler aşağıda sıralanmıştır (Brigo ve Mercurio, 2006: 54-55; James ve Webber, 2000: 73-77; Martellini vd., 2006: 64-71).

- Model, piyasadaki temel ürünleri doğru olarak fiyatlandırmalıdır.
- Modelin piyasa verilerine kalibrasyonu kolay olmalıdır.
- Sağlam ve uygun temelli (*robustness*) bir model olmalıdır. Sağlam ve uygun temelli bir model, faiz oranlarının düşük seviyelerde seyrettiği bir piyasada yüksek bir performans sergilediği gibi faiz oranlarının yüksek seviyelerde seyrettiği başka bir piyasada da aynı performansı göstermelidir. Aksi durumda sağlam ve uygun temele sahip bir modelden söz etmek mümkün değildir.
- Modelin yeni ürünlere uygulanabilmesi ve genişletilebilmesi (genellenebilmesi) mümkün olmalıdır.
- Değişken parametrelerin kararlı olması gerekmektedir. Bir diğer ifadeyle, her kalibrasyondan sonra elde edilen yeni parametre değerleriyle önceden hesaplanmış parametre değerleri arasında büyük farklılıklar olmamalı; değerler birbirine yakın olmalıdır. Kısa dönemde parametre değerleri arasında sapmalar olsa bile özellikle uzun döneme ait parametre değerleri istikrarlı (stabil) olmalıdır.

- Faiz oranlarında meydana gelen değişimlerin özelliklerini ortaya koymak amacıyla oluşturulan modelin dinamiklerine ait olasılık dağılımının özellikleri gerçeği yansıtmalıdır.
- Model, fiyatlandırmanın analitik olarak yapılmasına imkân sağlamalıdır.
- Modelde faiz oranları ortalama bir değere dönme eğilimi içerisinde hareket etmelidirler. Bir diğer ifadeyle model, ortalamaya dönme (*mean reverting*) özelliği taşımalıdır.
- Modelin volatilite yapısı gerçeğe uygun olmalı ve modeldeki faiz oranına ait varyans değeri çok büyük rakamlara ulaşmamalıdır. Bir başka ifadeyle, takvim zamanını belirten zaman indisi (t) ilerledikçe faiz oranının varyansı (σ^2), sabit bir sayıya (k) yakınsamalıdır $\left((t \to \infty) \text{ ise } (\sigma^2 \to k)\right)$.
- Fiyatlandırmanın yapılabilmesi için olasılık uzayı değişimleri mümkün olmalıdır.
- Model; binom ağaç, sonlu fark yöntemi, Monte - Carlo simülasyonu gibi nümerik çözümlemelere uygun olmalıdır.
- Model ile simüle edilen faiz oranlarının negatif çıkma olasılığı pozitif olmamalıdır $\left(P\{r(t) < 0\} \le 0\right)$.

Faiz oranlarının, faiz oranlarının vade yapısının ve getiri eğrilerinin global ölçekte sahip oldukları dinamiklere göre genellenebilmesi faiz oranlarının modellenmesi için önemlidir. Faiz oranında meydana gelen değişimlerin tam olarak açıklanamamasıyla birlikte değişimlerin anlaşılmasında araştırmacılara yardımcı olabilecek birçok önemli bulgu elde edilmiştir. Faiz oranlarının vade yapısı, getiri eğrilerine ve faiz oranına ilişkin elde edilmiş temel bulgular aşağıda açıklanmaktadır.

3. Faiz Oranı ve Faiz Oranlarının Vade Yapısına İlişkin Ampirik Bulgular

Geri ödememe ve likidite çerçevesinde eş risk düzeyinde bulunan ancak farklı vadelere sahip tahvillerin faiz oranlarında meydana gelen farklılaşmalar, faiz oranlarının vade yapısı olarak tanımlanabilir. Faiz oranlarının vade yapısı, esas olarak vadenin bir fonksiyonudur. Getiri eğrisi ise bu farklılıklardan yola çıkarak, faiz oranları ya da getiriler ile vadeler arasındaki ilişkiyi grafiksel olarak gösteren bir kavramdır (Erol, 1999: 74). Faiz oranlarının vade yapısı veya getiri eğrisi, hesaplamada kullanılması tercih edilen getiri oranına göre farklılık gösterebilir. Burada dikkat edilmesi gereken nokta, hangi eğrilerin doğrudan piyasadan elde edilen eğriler; hangi eğrilerin bir takım hesaplamalar sonucunda elde edilen zımni eğriler (*implied curves*) olduğunun bilinmesidir. Vadeye-kadar-getiri oranları ve swap oranları piyasa verileri iken, kupon ödemesiz menkul kıymetin getiri oranları (iskonto oranları) ve forward oranları piyasa verilerinden dolaylı olarak hesaplanan oranlardır.

Faiz oranlarını, vadenin bir fonksiyonu olarak gösteren grafik olarak tanımlanan getiri eğrisinin zaman içerisinde alabileceği şekiller, farklılık göstermekle birlikte dört temel form altında toplanabilir (Bakınız Şekil 2).

- Artan getiri eğrisi (*increasing yield curve*): Vadeler uzadıkça faiz oranlarının da arttığı, başka bir ifadeyle uzun vadeli faiz oranlarının, kısa vadeli faiz oranlarından yüksek olduğu eğrilerdir. Artan getiri eğrisinde eğim katsayısı pozitiftir.
- Azalan getiri eğrisi (*decreasing yield curve*): Vadeler uzadıkça faiz oranlarında düşüş görüldüğü, diğer bir ifadeyle uzun vadeli faiz oranlarının, kısa vadeli faiz oranlarından düşük olduğu eğrilerdir. Azalan getiri eğrisinde eğim katsayısı negatiftir.
- Yatay getiri eğrisi (*quasi-flat yield curve*): Vadeler değiştikçe faiz oranlarında hissedilebilir herhangi bir değişimin yaşanmadığı, eğim katsayısının sıfır veya sıfıra çok yakın olduğu, düz getiri eğrileridir. Bu tür eğriler, ekonomide bir belirsizlik sinyali olarak da algılanabilir.

- Kambur (dalgalı) getiri eğrisi (*humped yield curve*): Vadeye bağlı olarak eğim katsayısının işaret değiştirdiği başka bir ifadeyle, kısa vadelerde faiz oranlarında düşüşlerin (artışların), vadelerin uzamasıyla birlikte faiz oranlarında artışların (düşüşlerin) gözlemlendiği getiri eğrileridir.

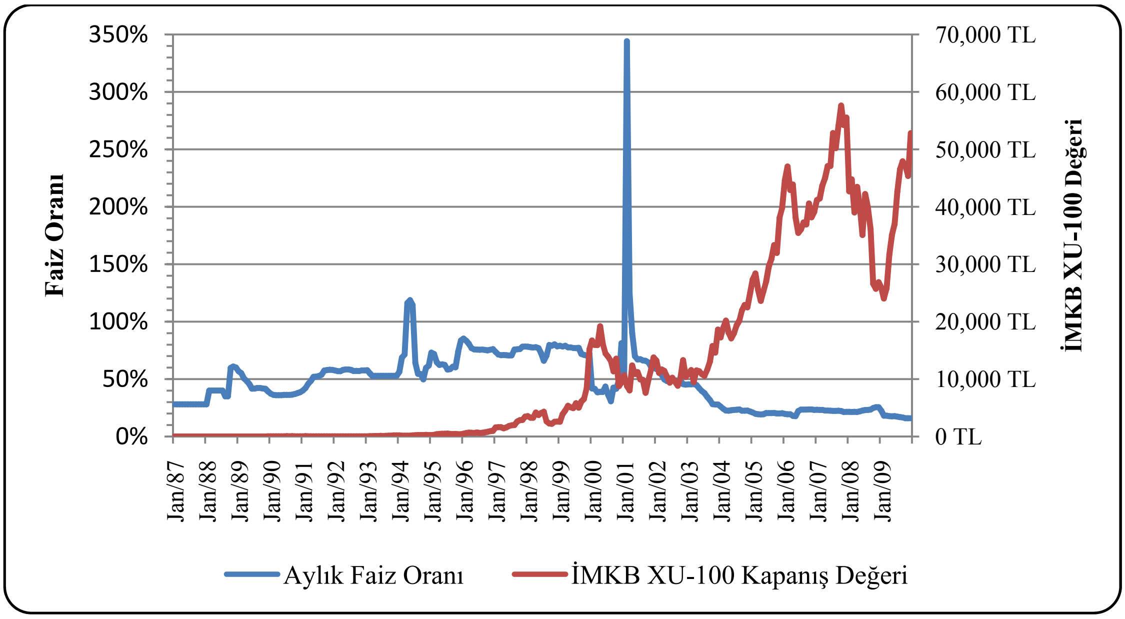
Faiz oranlarının vade yapısının zaman içerisinde nasıl değişiklikler gösterdiğini araştıran çalışmalarda faiz oranlarına ilişkin öne çıkan beş temel özellik bulunmaktadır. Bunlar faiz oranlarının; pozitiflik özelliği, ortalama değere dönme özelliği, faiz korelasyon özelliği, volatilite özelliği ve faiz oranı değişimlerinde etkili olan temel faktörlerdir.

3.1. Faiz Oranlarının Pozitif Olma Özelliği

Faiz oranları negatif değildir. Dış şoklar nedeniyle enflasyonun büyük bir hızla (üstel) arttığı ve büyümenin durabileceği kaygısıyla, nominal faiz oranlarının artırılamayacağı durumlarda reel faiz oranı negatif olabilir; ancak rasyonel bir ekonomide bir yatırımcının negatif nominal faiz oranlarından borç vermeyeceği gerçeğiyle nominal faiz oranlarının negatif olması beklenemez.

3.2. Faiz Oranlarının Ortalama Değere Dönme Özelliği

Faiz oranları ortalama bir değere dönme eğilimi içerisinde hareket ederler. Araştırmalar göstermiştir ki faiz oranları, yüksek seviyelere ulaştığı dönemlerde, daha da yükselmek yerine göreli olarak bir düşüş eğilimine girerken, çok alt seviyelere düştüğü dönemlerde de daha da düşmek yerine göreli olarak bir yükseliş trendine girmektedirler. Bu nedenle, faiz oranları modellenirken genellikle ortalamaya dönme sürecinden faydalanılmaktadır. Ülkemizden bir örnekle açıklamak gerekirse, Ocak 1985 – Aralık 2009 dönemindeki faiz oranları incelendiğinde faiz oranlarında belirli dönemlerde ani değişmelerin gerçekleşmesine rağmen; faiz oranlarının uzun dönemde ortalama bir değere doğru hareket ettiği görülmektedir. Ancak söz konusu dönem için İstanbul Menkul Kıymetler Borsası Ulusal 100 Endeksi (İMKB XU-100) incelendiğinde; faiz oranında yaşanan ortalama bir değere dönme eğiliminin aksine endeks değerinde düzenli bir yükseliş eğiliminin bulunduğunu söylemek mümkündür. Şekil 3'te bu durum gösterilmektedir.



Şekil 3. Ocak 1987 - Aralık 2009 Dönemine Ait Aylık Faiz Oranları ve İMKB XU-100 Değerleri

Leonard Ornstein ve George Eugene Uhlenbeck tarafından geliştirilen Ornstein-Uhlenbeck (O-U) diğer adıyla ortalamaya dönme süreci, stokastik bir süreç olan anlık faiz oranını (r_t) aşağıdaki stokastik diferansiyel denklem ile tanımlar.

(3.2.1) $dr_t = -\theta(r_t - \mu)dt + \sigma dW_t$

Yukarıdaki stokastik diferansiyel denklemde (θ), (μ) ve (σ) birer parametre iken; (W_t), Wiener süreci (*Wiener process*) veya Brownian hareketi (*Brownian motion*) olarak tanımlanan stokastik bir süreçtir. Brownian hareketi; suyun üzerinde düzensiz, asimetrik olarak hareket eden polenlerin hareketi, 1828 yılında bitki bilimci Robert Brown tarafından Brownian hareketi olarak tanımlanmış ve literatüre geçmiştir. Brown'a göre polen ile su molekülleri arasındaki etkileşim, polenin su üzerindeki rassal salınımına neden olmaktadır. Günümüzde Brownian hareketinin kullanım alanı mikroskobik parçacıkların, elektriksel devrelerde kullanılan ısıl gürültünün, hisse senedi hareketlerinin, envanter sistemlerinin ve kuyruk sistemlerinin modellenmesi gibi fizik, biyoloji, ekonomi ve işletme gibi bir çok değişik disiplini kapsamaktadır. Ancak, Brownian hareketini uygulamada ilk kullananlar L. Bachelier ve A. Einstein'dır. Bachelier ilk olarak 1900 yılında başarısız olarak nitelendirilmiş "*Theory of Speculation - Random Character of Stock Market Prices*" isimli doktora tezinde ve daha sonrasında 1906 ve 1913 yıllarında yapmış olduğu çalışmalarında Brownian hareketini ve martingalleri (*martingales*) kullanarak hisse senedi piyasalarında günümüzde hâlâ kullanılmakta olan rassal yürüyüşü modellemiştir. Ancak, eserindeki yaratıcılığın değeri, ölümünden 14 yıl sonrası olan 1960 yılına kadar anlaşılamamıştır. A. Einstein ise 1905 yılında Brownian hareketine olasılık hesabını uygulayarak bunun teorisini kurmuş ve Avogadro sayısının değerini hesaplayarak teorisini test etmiştir. Son olarak ise 1932 yılında N. Wiener, Brownian hareketinin fiziksel bir olay (*physical phenomenon*) olmasının yanı sıra kesin bir matematiksel gerçek olduğunu göstererek uygulama alanında kullanılabilecek birçok katkıda bulunmuştur. Bu nedenle Brownian hareketi, Wiener süreci olarak da adlandırılmaktadır. Wiener sürecine göre integral hesaplamaları yapıldığında geniş bir sınıftaki martingallerin ve difüzyon süreçlerinin ortak bir gösterimi mümkün hale gelmektedir. Bununla birlikte, kısmi diferansiyel denklemler teorisi çerçevesinde yukarıda bahsedilen süreçlerin ortak gösterimleri, türev ürünlerin fiyatlama aşamasında çok önemli olan geçiş olasılığını (*transition probabilities*) mümkün kılan ikinci dereceden parabolik denklemlere karşılık gelmektedir (Steele, 2003: 29; Karatzas ve Shreve, 1998: 47).

Olasılık teorisinde sonlu sayıda, sayılabilir sonsuz sayıda ya da sayılamayan sonsuz sayıda oluşan bir küme olan (Ω)'dan ve kendisinin alt kümelerinden oluşan $\sigma-$cebir özelliğine sahip $(\mathbb{F})$ kümesinden oluşan $<\Omega,\mathbb{F}>$ uzayına "dağılımlar uzayı" denir. $(\mathbb{F})$ üzerinde bir (P) küme fonksiyonu, bir diğer ifadeyle; olasılık fonksiyonu olarak tanımlanan (P), $\sigma-$toplamsallık özelliğine sahip bir ölçüm fonksiyonudur ve $(\Omega,\mathbb{F},P)$'ye "olasılık uzayı" denir (Şamilov, 2007: 69). $(\Omega,\mathbb{F},P)$ olasılık uzayında tanımlanmış $\{W(t), 0 \le t \le T\}$ stokastik süreç, aşağıdaki dört özelliği bünyesinde bulunduruyorsa standart Brownian hareketi olarak adlandırılmaktadır.

i. $W(0)=0$.

ii. $\left[0,T\right]$ aralığında eşleşme sürekli bir fonksiyondur $\left(t \to W(t)\right)$.

iii. $\left[0,T\right]$ aralığında fark değişiklikleri (*increments*) bağımsızdır.

$\left\{W(t_1)-W(t_0),W(t_2)-W(t_1),W(t_3)-W(t_2)...,W(t_k)-W(t_{k-1})\right\}$,

$\left(0 \le t_0 \le t_1 \le t_2 \le ... \le t_k \le T, \forall k\right)$

iv. $\left[0,T\right]$ aralığında farklar normal dağılıma sahiptirler.

$\left\{W(t)-W(s)\right\} \sim N(0,t-s), \forall s,t; 0 \le s \le t \le T$.

Faiz oranı dinamiklerinin modellenmesinde kullanılan O-U süreci, Brownian hareketinin tersine, varyansı sınırlı (*bounded*) ve durağan bir olasılık dağılımına (*stationary probability distribution*) olanak sağlayan bir süreçtir. O-U süreci kesikli zaman (*discrete time*) özelliğine sahip AR(1) sürecinin, sürekli zaman (*continuous time*) haline benzetilebilir.

Anlık faiz oranının (r_t) ve zamanın (t) bir fonksiyonu olarak tanımlanan $\left(f(\cdot)\right)$

(3.2.2) $f(r_t,t)=r_t e^{\theta t}$

ve anlık faiz oranındaki değişim (dr_t)

(3.2.3) $dr_t=-\theta(r_t-\mu)dt+\sigma dW_t$

olarak tanımlanırsa $df(r_t,t)$, Ito ön kuramı (*Ito's Lemma*) yardımıyla aşağıdaki gibi formüle edilebilir.

(3.2.4) $df(r_t,t)=\frac{\partial f}{\partial r}dr_t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}(dr_t)^2+\frac{\partial f}{\partial t}dt$

(3.2.5) $df(r_t,t)=e^{\theta t}dr_t+r_t\theta e^{\theta t}dt$

(3.2.6) $df(r_t,t) = e^{\theta t}\mu\theta dt + \sigma e^{\theta t} dW_t$

$df(r_t,t)$'nin 0 ile t arasında integrali alındığında,

(3.2.7) $\int_0^t df(r_t,t) = \int_0^t e^{\theta s}\mu\theta ds + \int_0^t \sigma e^{\theta s} dW_s$

(3.2.8) $r_t e^{\theta t} - r_0 = \mu(e^{\theta t} - 1) + \int_0^t \sigma e^{\theta s} dW_s$

(3.2.9) $r_t = r_0 e^{-\theta t} + \mu(1 - e^{\theta t}) + \int_0^t \sigma e^{\theta(s-t)} dW_s$

(r_0)'ın sabit olduğu kabul edildiğinde ve $(dW_t \sim N(0,dt))$ olduğu bilindiğine göre, (r_t)'nin beklenen değeri (birinci momenti),

(3.2.10) $E(r_t) = E[r_0 e^{-\theta t} + \mu(1 - e^{\theta t})] + E[\int_0^t \sigma e^{\theta(s-t)} dW_s]$

(3.2.11) $E(r_t) = r_0 e^{-\theta t} + \mu(1 - e^{\theta t})$

olacaktır.

(r_t)'nin kovaryansı (ikinci momenti) ise Ito isometry yardımı ile,

(3.2.12) $\mathrm{cov}(r_s, r_t) = E[(r_s - E(r_s))(r_t - E(r_t))]$

(3.2.13) $\mathrm{cov}(r_s, r_t,) = E[(\int_0^s \sigma e^{\theta(u-s)} dWu)(\int_0^t \sigma e^{\theta(v-t)} dWv)]$

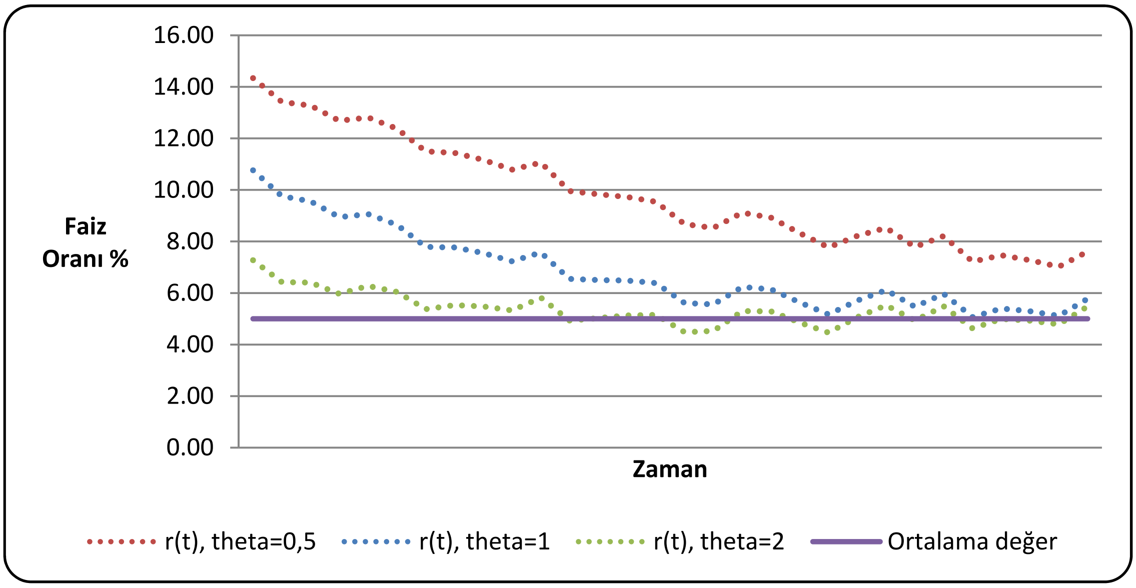
(3.2.14) $\mathrm{cov}(r_s, r_t,) = \sigma^2 e^{-\theta(s+t)} E(\int_0^s e^{\theta u} dWu \int_0^t \sigma e^{\theta v} dWv)$

(3.2.15) $\mathrm{cov}(r_s, r_t,) = \dfrac{\sigma^2 e^{-\theta(s+t)}}{2\theta}(e^{2\theta \min(s,t)} - 1)$

olarak bulunur.

O-U stokastik sürecinde "μ" uzun dönemdeki ortalama değeri, "θ" ortalama değere yakınsama şiddetini (düzeltme katsayısı) ve "σ" da bu yakınsama sürecinde yaşanan sapmaların büyüklüğünü göstermektedir. Bu süreçte θ'nın aldığı değerin, süreç üzerindeki etkisi Şekil 4'te görülebilir. θ'nın aldığı değer büyüdükçe sürecin uzun dönemdeki ortalama değere yakınsama şiddeti artmakta ve ortalama değere daha çabuk ulaşılmaktadır.

$\left(r_0 = 0,20;\ dt = 0,1;\ \mu = 5;\ \sigma = 0,9\right)$



Şekil 4. Ornstein-Uhlenbeck Sürecinde Theta Değeriyle Faiz Oranının Ortalama Değere Dönme Hızı Arasındaki İlişki

3.3. Faiz Oranları Arasındaki Korelasyon Özellikleri

Farklı vadelere ilişkin faiz oranlarında meydana gelen değişimler arasındaki korelasyon mükemmel (ρ=1) değildir. Kısa vadeler arasındaki korelasyon katsayısı bire oldukça yakın iken uzun vadeler söz konusu olduğunda faiz oranlarında meydana gelen değişimler arasındaki korelasyon düşmektedir. Bu analizlerin yapılmasında farklı vadelere sahip, sabit getirili menkul kıymetlerin fiyatlarından elde edilen faiz oranları kullanılabilir. Farklı vadelere sahip sabit getirili menkul kıymetlerden elde edilen faiz oranlarında meydana gelen değişimler incelendiğinde, aralarında pozitif bir korelasyon olduğu görülürken; vadeler arasındaki zaman farklılığının artmasıyla birlikte korelasyon katsayılarının düştüğü gözlenmektedir. Bu değerlendirmeyi destekleyen sonuçlar Tablo

2’de yer almaktadır. Tablo 2 incelendiğinde 2 aylık vadeye sahip menkul kıymetler ile 5 aylık vadeye sahip menkul kıymetlere ait faiz oranları arasındaki korelasyon 0,96 iken 2 aylık vadeye sahip menkul kıymetler ile 10 yıllık vadeye sahip menkul kıymetlere ait faiz oranları arasındaki korelasyon 0,72’ye düşmüştür.

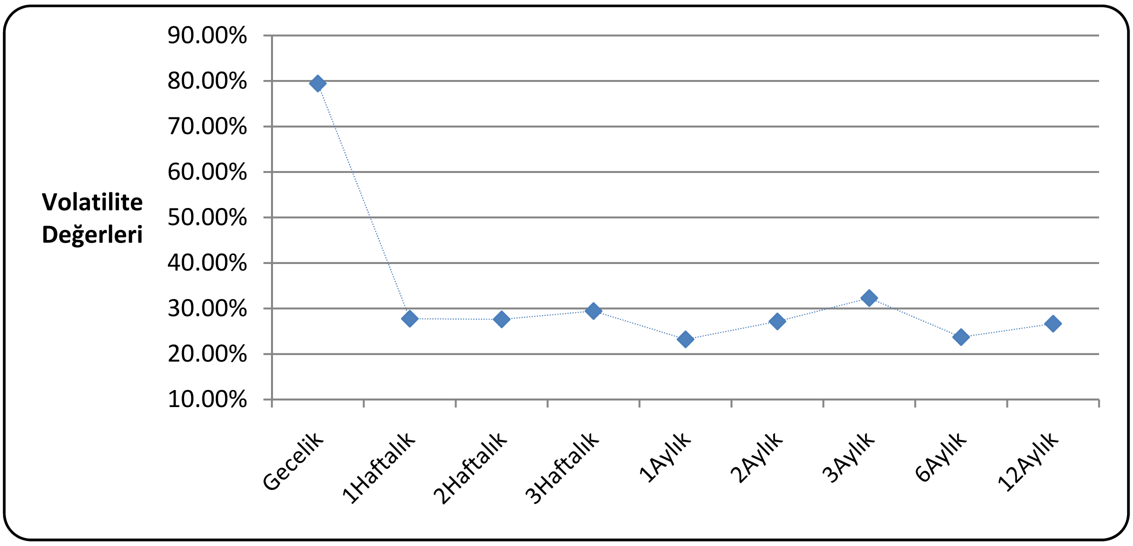
Yukarıdaki açıklamalar neticesinde kısa vadeli sabit getirili menkul kıymetlerin ve bunlara dayalı türev ürünlerin fiyatlamasında ve riskten korunma işlemlerinde kısa vadeli tek faktör modelleri kullanılabilir. Ancak uzun vadeli menkul kıymetlerin ve bunlara dayalı türev ürünlerin fiyatlamasında ve riskten korunma işlemlerinde çok faktörlü modeller daha başarılı sonuçlar vermektedir.

Tablo 2. Farklı Vadelere İlişkin Kupon Ödemesiz Sabit Getiri Menkul Kıymetlerin Getiri Oranlarının Korelasyon Matrisi

	2 Ay	**5 Ay**	**8 Ay**	**10 Ay**	**1 Yıl**	**3 Yıl**	**5 Yıl**	**7 Yıl**	**9 Yıl**	**10 Yıl**	**15 Yıl**	**18 Yıl**	**21 Yıl**
2 Ay	1,00												
5 Ay	0,96	1,00											
8 Ay	0,94	0,98	1,00										
10 Ay	0,92	0,97	0,98	1,00									
1 Yıl	0,91	0,96	0,98	0,99	1,00								
3 Yıl	0,86	0,93	0,95	0,96	0,97	1,00							
5 Yıl	0,79	0,86	0,89	0,91	0,92	0,96	1,00						
7 Yıl	0,75	0,82	0,85	0,87	0,89	0,94	0,98	1,00					
9 Yıl	0,74	0,81	0,84	0,86	0,88	0,93	0,97	0,98	1,00				
10 Yıl	0,72	0,79	0,82	0,84	0,86	0,91	0,96	0,97	0,99	1,00			
15 Yıl	0,65	0,72	0,75	0,77	0,79	0,85	0,92	0,95	0,96	0,97	1,00		
18 Yıl	0,64	0,70	0,73	0,75	0,77	0,83	0,90	0,93	0,95	0,96	0,98	1,00	
21 Yıl	0,61	0,67	0,70	0,72	0,74	0,81	0,88	0,91	0,93	0,94	0,98	0,99	1,00

3.4. Faiz Oranlarının Volatilite Özellikleri

Kısa vadeli oranlara ait volatilite, uzun vadeli oranlara ait volatiliteden yüksektir. Faiz oranlarının vade yapısına ilişkin volatilite fonksiyonu, genellikle azalan bir fonksiyondur. Vadenin uzamasıyla birlikte genellikle volatilitenin de azalması beklenmektedir. Ayrıca, faiz oranlarının seviyesi yükseldikçe volatilitenin de yükseldiği; faiz oranlarının seviyesi düştükçe volatilitenin de düştüğü bilinmektedir. Ocak 1990 – Ekim 2009 tarihleri arasında bankalararası para piyasasında farklı vadelere ait basit faiz oranlarının volatilite değerleri Şekil 5’te gösterilmiştir.



Şekil 5. Farklı Vadelere İlişkin Faiz Oranlarının Volatiliteleri

3.5. Faiz Oranı Değişimlerinde Etkili Olan Temel Faktör Sayıları

Temel Bileşenler Analizi (*Principal Component Analysis* - PCA), faiz oranlarının vade yapısındaki değişimlerini açıklamakta kullanılan güçlü bir yöntemdir. PCA'nın tercih edilmesindeki iki temel neden aşağıda verilmiştir (Alexander, 1996: 34, 179; James ve Webber, 2000: 459-463; Cuthbertson ve Nitzsche, 2001: 636-638) .

i. Farklı vadelere ilişkin faiz oranları arasında tam korelasyon olmasa da yüksek korelasyon bulunmaktadır. Getiri eğrisinin farklı noktalarında yer alan faiz oranları sınırlı sayıda faktörden (finansal ve ekonomik şoklar gibi) etkileneceklerdir. Farklı vadelere ilişkin faiz oranlarının bu şoklardan etkilenme şiddetleri faklı olsa da etkileniş yönleri benzerlik gösterecektir. Bir diğer ifadeyle; bir şok yaşandığında kısa vadelere ilişkin faiz oranları artarken uzun vadelere ilişkin faiz oranları azalmayacak, onlar da artacaktır. Ancak kısa vadelere ilişkin faiz oranları daha yüksek oranda artarken uzun vadelere ilişkin faiz oranlarındaki artış daha düşük seviyelerde kalacaktır. Farklı vadelere ilişkin faiz oranlarındaki değişimleri doğru açıklayabilmek için değişkenler arasındaki yüksek korelasyonu elimine etmek gerekmektedir. Çünkü yüksek korelasyona sahip değişkenler söz konusu olduğunda bir değişken, bir diğer değişken hakkında gereksiz bilgi (*redundant information*) verecektir. Bu nedenle, zaman içerisinde faiz oranlarında meydana gelen değişimlerin büyük bir kısmını açıklayan bağımsız değişkenleri ortaya koyabilmesi PCA'nın tercih edilmesindeki nedenlerden ilkidir. Bir diğer ifadeyle; PCA, aralarında korelasyon bulunan değişkenleri, aralarında doğrusal ilişki bulunmayan (birbirlerine ortogonal olan) ancak orijinal bilgiyi eksiksiz olarak tekrar üretebilen daha az sayıda değişkene çeviren bir yöntemdir.

ii. PCA'nın değişken sayısını azaltması ve pozitif matrisler oluşturması bir diğer güçlü noktasıdır. Çünkü bu iki özellik hesaplama kolaylığını ve hızını artırmaktadır. Hesaplama başına bir saniye tasarruf edilmesi bile çok önemlidir. Çünkü pratik kullanımda, beklenen değeri bulmak için Monte-Carlo simülasyonu yapılmakta ve simülasyon binlerce kez tekrar edilebilmektedir. Örneğin bir simülasyonda on bin tekrar yapıldığı varsayılırsa ve her tekrarda bir saniye tasarruf yapılırsa simülasyon süresi toplamda yaklaşık olarak 3 saat kısalacaktır.

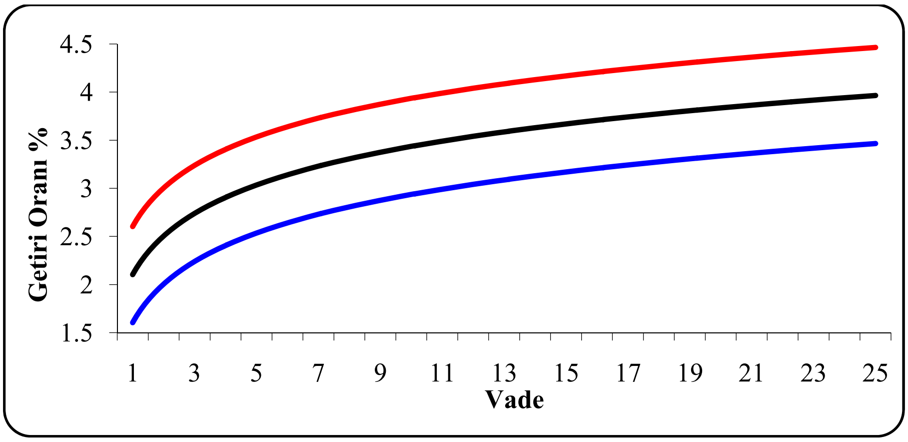
Ampirik çalışmalar göstermektedir ki getiri eğrisindeki varyasyonun %90'ı üç temel faktör tarafından açıklanabilmektedir. Bu üç temel faktör, getiri eğrisinde sırasıyla;

i. eğim katsayısının değişmeksizin getiri eğrisinin aşağıya veya yukarıya kayması (shift) olarak tanımlanabilecek paralel hareketlere (Şekil 6),

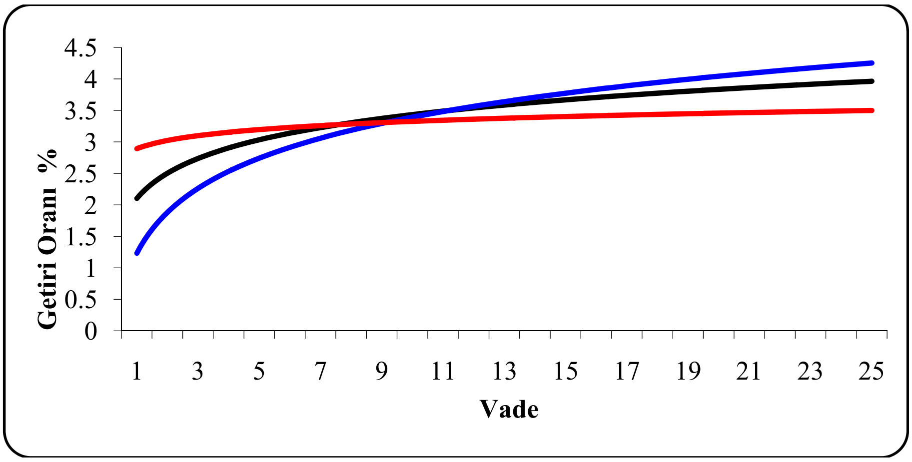
ii. eğim katsayının değişerek getiri eğrisinin yön değiştirmesi olarak tanımlanabilecek salınım (oscillation veya tilt) hareketlerine (Şekil 7) ve

iii. eğim katsayının birden fazla kez yön (işaret) değiştirerek getiri eğrisinin dalgalanma – bükülme (curvature) hareketlerine neden olmaktadır (Şekil 8).

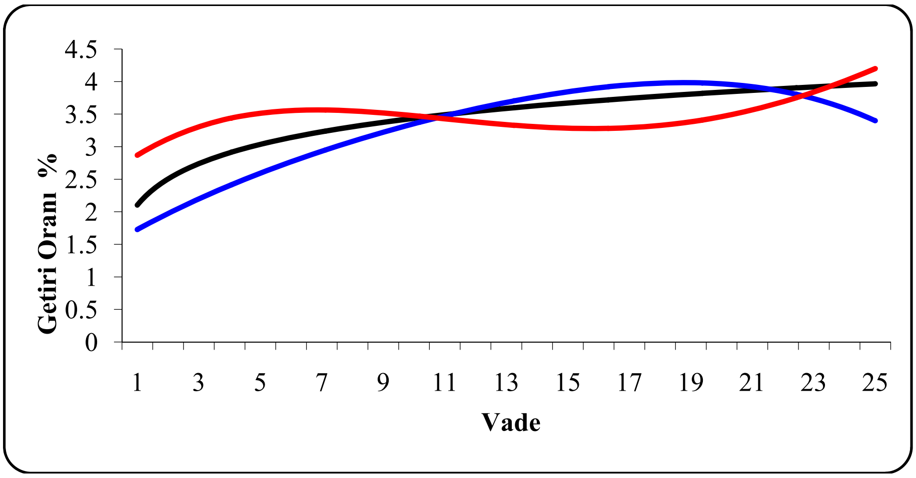
Vade yapısının değişimlerini PCA ile inceleyen çalışmalar hakkında özet bilgi Tablo 3'te verilmiştir.



Şekil 6. Getiri Eğrisinde Meydana Gelen Paralel Hareketler



Şekil 7. Getiri Eğrisinde Meydana Gelen Salınım Hareketi



Şekil 8. Getiri Eğrisinde Meydana Gelen Dalgalanma (Bükülme) Hareketi

Tablo 3. Literatürde PCA İle Yapılan Çalışmalar Sonucunda Bulunan Faktör Sayıları ve Faktörlerin Oranlardaki Değişimleri Açıklama Yüzdeleri

Yazarlar	**İncelenen Ülke/Ülkeler**	**İncelenen Dönem**	**Kullanılan Oran**	**Vade Aralıkları**	**Etkili Olan Faktör Sayısı**	**Faktörlerin Değişimleri Açıklama Yüzdesi (Sırasıyla)**
Litterman ve Scheinkman (1991)	ABD	1984-1988	Spot	6 ay - 18 yıl	3	88,04 - 8,38 - 1,97
Kanony ve Mokrane (1992)	Fransa	1989-1990	Spot	12 ay - 25 yıl	2	93,70 - 6,10
D'Ecclesia ve Zenios (1994)	İtalya	1988-1992	Spot	6 ay - 7 yıl	3	93,91 - 5,49 - 0,42
Karki ve Reyes (1994)	Almanya İsviçre ABD	1990-1994	Spot	3 ay - 10 yıl	3	97,00 - 1,00 - 1,00 97,00 - 1,00 - 1,00 97,00 - 1,00 - 1,00
Barber ve Copper (1996)	ABD	1985-1991	Spot	1 ay - 20 yıl	3	80,93 - 11,85 - 4,36
Bühler ve Zimmermann (1996)	Almanya İsviçre	1988-1996	Spot	1 ay - 10 yıl	3	71,00 - 18,00 - 4,00 75,00 - 16,00 - 3,00
Golub ve Tilman (1997)	ABD	1984-1995	Spot	3 ay - 30 yıl	3	92,80 - 4,80 - 1,27
Lekkos (2000)	Almanya İngiltere Japonya	1987-1995	1 Yıllık Forward	12 ay - 9 yıl	5	50,60 - 17,30 - 13,50 - 8,80 - 5,80 63,50 - 6,30 - 7,50 - 8,10 - 5,30 42,80 - 25,50 - 17,10 - 6,00 - 4,90
Martellini ve Priaulet (2000)	Fransa Belçika	1995-1998	Spot	1 ay - 10 yıl	3	66,64 - 20,52 - 6,96 62,00 - 27,00 - 6,00
Lardic, Priaulet ve Priaulet (2003)	Almanya İtalya İngiltere	1998-2000	Spot	1 ay - 30 yıl	3	61,00 - 23,00 - 6,00 59,00 - 24,00 - 7,00 60,00 - 24,00 - 9,00

Kaynak: (Martellini vd., 2006: 75; (Focardi ve Fabozzi, 2004: 633)

4. Kısa Vadeli Faiz Oranı Modelleri

Farklı faiz oranı modellerinde öncelikle ulaşılan ve ortak bir nokta olan vade yapısı denkleminin nasıl elde edileceği Vasicek (1977) modeli altında açıklanacaktır. Vade yapısı denkleminin elde edilmesinde araç olarak; banka hesabı, kupon ödemesiz tahviller ve arbitraj kullanılacaktır.

- **Banka Hesabı** (*Bank Account – Money Market Account*)**:** Risksiz bir yatırım imkânı olarak düşünülebilecek kısa vadeli bir banka hesabının, $(t, t>0)$ zamanındaki değeri B_t ile ifade edilir ve $(B_0 = 1)$ olarak kabul edilirse (bir diğer ifadeyle bugün banka hesabına 1 TL. yatırılırsa) banka hesabının "*dt*" olarak simgelenen sonsuz küçük bir zaman dilimi (*infinitesimal time interval*) içerisindeki değişimi aşağıdaki diferansiyel denkleme göre olacaktır.

  (4.1) $dB_t = r_t B_t dt$, $B_0 = 1$.

  Yukarıdaki denklemde anlık faiz oranı (r_t), zamanın pozitif bir fonksiyonudur. $(t=0)$ zamanında, banka hesabına yatırılmış 1 TL.'nin (t) zamanındaki değeri (B_t), aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

  (4.2) $B_t = e^{\left(\int_{s=0}^{s=t} r_s ds\right)}$

- **Kupon ödemesiz tahvil:** Nominal değeri 1 TL., vadesi (T) olan ve kupon ödemesi bulunmayan bir sabit getirili menkul kıymettir. Bu tahvilin (t) zamanındaki fiyatı ise $(P_{t,T})$ ile gösterilmektedir.

- **Arbitraj:** Denk getiri sağlayan varlıkların, aynı zamanda oluşan fiyat farklılıklarından yararlanmak üzere, varlığın fiyatının düşük olduğu piyasada alınıp, yüksek olduğu piyasada satılması ve fiyat farklılıklarından yararlanarak risksiz kazanç elde edilmesidir. Arbitrajcının, alım-satımı eşzamanlı gerçekleştirmesi nedeniyle arbitraj işlemi için bir yatırım yapılmamakta ve herhangi bir risk üstlenilmemektedir. Piyasalarda arbitrajın gerçekleştirilmesi teknik olarak mümkün olduğu için, farklı piyasalarda her varlık için tek fiyat oluşması beklenmekte ve bu süreç "Tek Fiyat Kanunu" olarak isimlendirilmektedir. Tek Fiyat Kanununa göre, aynı anda bir varlık için farklı yerlerde farklı fiyatlar oluşuyorsa, arbitrajcılar varlığı ucuz olan piyasadan alıp, pahalı olan piyasada satarak net bir yatırım yapmadan; risksiz ve pozitif bir getiri elde edeceklerdir. Arbitraj işlemleri, varlık fiyatının düşük olduğu piyasada meydana gelecek talep artışının etkisiyle fiyatın artmasına ve varlık fiyatının yüksek olduğu piyasada da meydana gelecek arz artışının etkisiyle fiyatın düşmesine neden olacaktır. Bu süreç, söz konusu varlığa ilişkin ayrı fiyatlar arasındaki fark ortadan kalkıp bir denge sağlanıncaya kadar devam edecek ve arbitraj imkânı ortadan kalkacaktır. Tek Fiyat Kanuna göre, sermaye piyasalarında aynı risk düzeyine sahip varlıkların birbirine denk veya ikame yatırımlar olduğu kabul edilmekte ve bu nedenle beklenen getirilerinin de eşit olması beklenmektedir. Aksi takdirde aynı risk düzeyine sahip varlıklar için farklı fiyatlar oluşması durumunda piyasada denge bozulmakta ve arbitraj olanakları doğmaktadır. Sonuç olarak piyasanın dengede olması, yatırımcıların ek bir yatırım yapmadan ve risk almadan pozitif bir getiri sağlama yani literatürdeki deyimiyle "bedava öğle yemeği" olanaklarının bulunmamasına bağlıdır.

4.1. Vasicek (1977) Modeli

Oldrich A. Vasicek, 1977 tarihli çalışmasında getiri eğrisinin dinamiklerini tanımlamayı hedeflemiştir. Kronolojik açıdan değerlendirildiğinde faiz oranı modelleri konusunda bir ilk olan bu araştırmada Vasicek, faiz oranlarının vade yapısına ilişkin genel bir form elde etmiştir. Vasicek, araştırmasında üç varsayım yapmıştır. Bu varsayımlar; anlık faiz oranının (*instantaneous interest rate*) sürekli bir Markov süreci olan dağılım (difüzyon) sürecine göre hareket etmesi, geri ödememe riski bulunmayan iskontolu bir tahvilin fiyatının vade süresince sadece ve sadece anlık faiz oranına bağlı olarak değişmesi ve işlem yapılan piyasanın etkin olması olarak sıralanabilir.

Vasicek (1977) araştırmasında yukarıda belirtilen varsayımlar ve arbitraj kuramı çerçevesinde, geri ödememe riski bulunmayan herhangi bir tahvilden beklenen artık getiri (*residual return*) oranının, tahvilin standart sapmasıyla ilişkili/orantılı olduğunu göstermiştir. Sonrasında, bu ilişkiden yararlanarak tahvil fiyatlamasında kullanılacak kısmi diferansiyel denklemleri elde etmiş ve bu denklemlerin çözümünü stokastik integraller ile göstermiştir. Daha sonrasında ise kullandığı değişkenler ve parametreler üzerinde ayrıntılı varsayımlar yaparak tek faktörlü, içsel (endojen) ve kısa vadeli bir denge modeli olarak nitelendirilen ve ismiyle anılan modeli oluşturmuştur.

Vasicek, araştırmasında Black – Scholes (1973) ve Merton'un (1973) opsiyon fiyatlamasında kullandıkları arbitraj kuramından esinlenmiştir. Black – Scholes (1973) ve Merton (1973), fiyatlandırmak istedikleri türev ürünün (opsiyonun) getirisini kopyalayacak risksiz bir portföy oluşturmuşlardır. Bu risksiz portföy, piyasada işlem gören ilgili dayanak varlık (hisse senedi) ile bu dayanak varlığa bağlı türev ürünün (opsiyonun) belirli oranlardaki birleşimlerinden oluşmaktadır. Ancak faize dayalı ürünler için yukarıda açıklanan mantık mümkün olmamaktadır. Çünkü tahvil fiyatı sadece anlık faiz oranına bağlıdır ve anlık faiz oranı, piyasada işlem gören, fiyatı belli olan ve alım satımı yapılan bir ürün değildir. Vasicek (1977) bu çalışmasında öncelikle alım satımı mümkün olmayan faiz oranı üzerinde çalışarak farklılıkları ortaya koymuş ve farklı vadelere sahip tahvillerden oluşan risksiz bir portföy oluşturmuştur. Bir risk unsuru olan faiz oranının alım satımı yapılan bir ürün olarak değerlendirilememesi nedeniyle, bir tahvili riskten korunaklı hale getirmek için farklı vadeye sahip en az bir tahvil daha kullanılmış ve bu aşamada riskin piyasa fiyatı (*market price of risk*) gündeme gelmiştir.

Vasicek (1977) modeliyle ilgili olarak öncelikle, gerekli notasyon tanıtılacak, daha sonra da faiz oranlarının vade yapısı denkleminin elde edilişi açıklanacaktır (Vasicek, 1977: 177-188).

Risksiz bir menkul kıymet olarak kabul edilen banka hesabında $\left(B_t\right)$, sonsuz küçük bir zaman dilimi $\left(dt\right)$ içerisinde meydana gelen değişim, (4.1.1)'deki fark denklemiyle formüle edilebilir.

(4.1.1) $dB_t = r_t B_t dt$

Banka hesabında, $\left[t, t+dt\right]$ zaman aralığında meydana gelen değişimin büyüklüğünü belirleyen anlık faiz oranının dinamikleri ise nesnel olasılık ölçümü (*objective probability measure*) bir diğer ifadeyle; P – olasılık ölçümü altında,

(4.1.2) $dr_t = \mu(t, r_t)dt + \sigma(t, r_t)dW_t$

stokastik diferansiyel denklemiyle modellenebilir. Piyasada her vadede kupon ödemesiz sabit getirili bir menkul kıymetin bulunduğu varsayımı altında, piyasada sonsuz sayıda menkul kıymet ile bu farklı vadelerdeki menkul kıymetlere ilave olarak risksiz bir menkul kıymetin bulunduğunu söylemek mümkün olur. Ancak, risksiz menkul kıymet, yani mevduat hesabı dışsal olarak (*exogenously*) elde edilmiştir. Diğer bir ifadeyle, risksiz menkul kıymet dayanak varlık, tahviller ise bu risksiz menkul kıymete dolayısıyla anlık faiz oranına bağlı birer türev ürün olarak nitelendirilebilir. Faiz oranlarının vade yapısında temel mantık, piyasada arbitraj imkânın olmaması için farklı vadelere sahip tahvillerin fiyat süreçleri arasında tutarlı bir ilişkinin olması gerekliliğidir.

Tahvil piyasasında risksiz menkul kıymet dışında ticareti yapılan dayanak varlık sayısı (V=0), piyasada etkili olan rassal değişken (risk unsuru) sayısından (R=1) küçük olduğu için piyasada arbitraj olanağı bulunmamaktadır (*arbitrage free market*). Ancak, piyasa eksik bir piyasadır (*incomplete market*). Buradan hareketle, yukarıda da açıklandığı üzere Black-Scholes’da olduğu gibi türev ürünün getirisini kopyalayacak (yineleyecek), türev ürününün dayanak varlığından (piyasada ticareti yapılan) ve türev ürünün kendisinden oluşan risksiz bir portföy oluşturulamayacaktır. Ancak bu, farklı vadelere sahip tahvillerin istedikleri fiyatı alabilecekleri anlamına da gelmemektedir.

Arbitraj imkânın önlenmesi için farklı vadelere sahip tahvillerin fiyatları arasında tutarlı bir ilişkinin olma zorunluluğundan yola çıkılarak, herhangi vadedeki bir tahvilin fiyatının referans (*benchmark*) olarak alınması ve diğer bütün vadelerdeki tahvillerin fiyatının, bu referans fiyat cinsinden saptanılması düşünülmüştür. Böylece, tahvil piyasasında risksiz menkul kıymet dışında, ticareti yapılan gösterge bir tahvilin ve piyasada etkili olan bir adet rassal değişkenin bulunması nedeniyle arbitraj olanağı yine söz konusu değilken piyasa tam piyasa (*complete market*) şeklini alacak ve nihayetinde de farklı vadelere sahip tahvillerden oluşan risksiz bir portföy yaratmak mümkün olacaktır. Bu portföyden yararlanılarak da tahvillerin fiyatlandırılmasında kullanılacak vade yapısı denklemi (*term structure equation*) elde edilecektir.

Nominal değeri 1 TL. ve vadesi (T) olan bir tahvilin $(t, t \leq T)$ zamanındaki fiyatını ifade eden $\left(P_{r_t,t;T}\right)$, anlık faiz oranı (r_t) ve zaman (t) değişkenleri ile vade (T) parametresinin bir fonksiyonu olarak kabul edilir. Anlık faiz oranında (dt) aralığında meydana gelen değişimler,

(4.1.3) $dr_t = \alpha(r_t,t)dt + \sigma(r_t,t)dW_t$

stokastik diferansiyel denklemiyle ifade edilirse, Ito ön kuramı ile tahvil fiyatındaki değişim $\left(dP_{r_t,t;T}\right)$,

(4.1.4) $$dP_{r_t,t;T} = \frac{\partial P_{r_t,t;T}}{\partial t}dt + \frac{\partial P_{r_t,t;T}}{\partial r_t}dr_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P_{r_t,t;T}}{\partial r_t^2}(dr_t)^2$$

(4.1.5) $$dP_{r_t,t;T} = \left(\frac{\partial P_{r_t,t;T}}{\partial t} + \alpha(r_t,t)\frac{\partial P_{r_t,t;T}}{\partial r_t} + \frac{1}{2}\sigma^2(r_t,t)\frac{\partial^2 P_{r_t,t;T}}{\partial r_t^2}\right)dt + \sigma(r_t,t)\frac{\partial P_{r_t,t;T}}{\partial r_t}dW_t$$

olarak bulunur. Takip etmede kolaylık sağlaması amacıyla,

(4.1.6) $$a_T = \frac{1}{P_{r_t,t;T}}\left(\frac{\partial P_{r_t,t;T}}{\partial t} + \alpha(r_t,t)\frac{\partial P_{r_t,t;T}}{\partial r_t} + \frac{1}{2}\sigma^2(r_t,t)\frac{\partial^2 P_{r_t,t;T}}{\partial r_t^2}\right)$$

(4.1.7) $$b_T = \frac{1}{P_{r_t,t;T}}\sigma(r_t,t)\frac{\partial P_{r_t,t;T}}{\partial r_t}$$

olarak belirlenirse,

(4.1.8) $$\frac{dP_{r_t,t;T}}{P_{r_t,t;T}} = a_T dt + b_T dW_t$$

şeklinde ifade edilebilir. Farklı vadelere (T_1 ve T_2, $T_1 < T_2$) sahip iki adet kupon ödemesiz tahvilden, sırasıyla $\left(\Delta_{\bullet,T1}\right)$ ve $\left(\Delta_{\bullet,T2}\right)$ ağırlıklarında oluşturulan bir portföyün (t) zamanındaki değeri (V_t),

(4.1.9) $V_t = \Delta_{t,T1}P_{r_t,t;T1} - \Delta_{t,T2}P_{r_t,t;T2}$

olacaktır. $\left[t, t+dt\right]$ zaman aralığında bu portföyün değerindeki değişim (dV_t),

(4.1.10) $dV_t = \Delta_{t,T1} dP_{r_t,t;T1} - \Delta_{t,T2} dP_{r_t,t;T_2}$

(4.1.11) $dV_t = (\Delta_{t,T1} a_{t,T1} P_{r_t,t;T_1} - \Delta_{t,T2} a_{t,T2} P_{r_t,t;T_2})dt + (\Delta_{t,T1} b_{t,T1} P_{r_t,t;T1} - \Delta_{t,T2} b_{t,T2} P_{r_t,t;T2})dW_t$

olacaktır. Bu portföyü risksiz bir portföy haline getirmek için risk unsurunu simgeleyen (dW_t) teriminin ortadan kalkması gerekmektedir. Bunun içinse,

(4.1.12) $(\Delta_{t,T1} b_{t,T1} P_{r_t,t;T_1} - \Delta_{t,T2} b_{t,T2} P_{r_t,t;T2})$

katsayısının, sıfır olması gerekmektedir. Buradan hareketle, risksiz bir portföy oluşturmak için portföyde kullanılması gereken ağırlık katsayıları,

(4.1.13) $\dfrac{\Delta_{t,T1}}{\Delta_{t,T2}} = \dfrac{b_{t,T2} P_{r_t,t;T_2}}{b_{t,T1} P_{r_t,t;T1}}$

eşitliği sonucunda

(4.1.14) $\Delta_{t,T1} = b_{t,T2} P_{r_t,t;T_2}$

ve

(4.1.15) $\Delta_{t,T2} = b_{t,T1} P_{r_t,t;T1}$

olarak belirlenebilir. Bu katsayılar (4.1.11) numaralı denklemde yerine koyulursa,

(4.1.16) $dV_t = (a_{t,T1} b_{t,T2} - a_{t,T2} b_{t,T1}) P_{r_t,t;T1} P_{r_t,t;T_2} dt$

eşitliği elde edilir. Risk unsuru taşımayan bir finansal varlığın, arbitraj kuralları çerçevesinde getiri oranının ancak risksiz faiz oranı (r_t) kadar olması gerekmektedir. Buradan hareketle,

(4.1.17) $(a_{t,T1} b_{t,T2} - a_{t,T2} b_{t,T1}) P_{r_t,t;T_1} P_{r_t,t;T_2} dt = r_t (b_{t,T2} - b_{t,T1}) P_{r_t,t;T_1} P_{r_t,t;T_2} dt$

olacaktır. Gerekli sadeleştirmeler ve düzenlemeler yapıldıktan sonra,

(4.1.18) $\dfrac{a_{t,T1} - r_t}{b_{t,T1}} = \dfrac{a_{t,T2} - r_t}{b_{t,T2}}$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikteki dikkat çekici olan en önemli nokta, eşitliğin iki tarafında yer alan stokastik süreçlerin, menkul kıymetlerin vadelerinden bağımsız olmasıdır. Bir diğer ifadeyle bu oran, vade seçiminden etkilenmemektedir. Bu nedenle arbitraj imkânının olmadığı bir piyasada tüm farklı vadeler (T' den bağımsız) için her zaman (bütün t' ler için) geçerli olan bir ilişki bulunmaktadır. Risksiz faiz oranının ve içinde bulunulan zamanın bir fonksiyonu olan bu ilişki lambda ($\lambda(r_t,t)$) ile ifade edilebilir.

(4.1.19) $\lambda(r_t,t)=\dfrac{a_t-r_t}{b_t}$

($\lambda(r_t,t)$) olarak ifade edilen oranda, (a_t), riskli bir tahvilin getirisini; (r_t), t zamanındaki risksiz faiz oranını; nihayetinde de (a_t-r_t), riskli bir tahvilin risk primini ifade etmektedir. Oranın payda kısmında yer alan (b_t) ise tahvilin volatilitesini simgelemektedir. Oran bir bütün olarak değerlendirildiğinde $\lambda(r_t,t)$ parametresinin, piyasada arbitraj imkanının oluşmaması için bir birim volatilite başına ne kadar artık getiri elde edilmesi gerektiğini gösteren bir katsayı olduğu söylenebilir. Farklı her vadedeki sabit getirili menkul kıymetler için geçerli ve eşit olan bu süreç, riskin piyasa fiyatı (market price of risk) olarak adlandırılmaktadır. Riskin piyasa fiyatı $\left(\lambda(r_t,t)\right)$,

(4.1.20) $a_t=r_t+\lambda(r_t,t)b_t$

eşitliğiyle[1] de ifade edilebilir. Bu eşitlikten yola çıkarak a_t ve b_t ifadelerinin orijinal değerleri tekrar kullanılır ve gerekli sadeleştirmeler ile düzenlemeler yapılırsa aşağıdaki vade yapısı denklemine ulaşmak mümkün olacaktır.

(4.1.21)

$$\frac{\partial P_{r_t,t;T}}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2(r_t,t)\frac{\partial^2 P_{r_t,t;T}}{\partial r_t^2}+\left(\alpha(r_t,t)-\lambda(r_t,t)\sigma(r_t,t)\right)\frac{\partial P_{r_t,t;T}}{\partial r_t}=r_tP_{r_t,t;T}$$

Anlık faiz oranının dinamikleri ve riskin piyasa fiyatının karakteristikleri belirlendikten sonra bu kısmi diferansiyel denkleminin, ($P_{r_t,T;T}=1$) sınır koşuluyla çözülmesi sonucunda tahvil fiyatları elde edilebilir.

---

[1] Tahvilden Beklenen Getiri Oranı = Risksiz Faiz Oranı + Riskin Piyasa Fiyatı * Tahvilin Volatilitesi

Tahvil fiyatlarının elde edilmesinden sonra vadeye-kadar-getiri oranı veya bir diğer ifadeyle, iç karlılık oranı $\left(R(t,T-t)\right)$ formülüyle de vade yapısı elde edilebilir $\left(\forall t \in [t;T]\right)$.

Vadeye-kadar-getiri oranının elde edilişi aşağıda gösterilmiştir.

(4.1.22) $P_{r_t,t;T} = e^{-R(t,T-t)(T-t)} P_{r_t,T;T}$, $P_{r_t,T;T} = 1$

(4.1.23) $\ln P_{r_t,t;T} = -R(t,T-t)(T-t)$

(4.1.24) $R(t,T-t) = -\dfrac{\ln P_{r_t,t;T}}{(T-t)}$

Vasicek (1977) modelinde riskin piyasa fiyatını ($\lambda(r_t,t)$), sabit bir sayı (λ) olarak kabul etmiş ve anlık faiz oranının dinamiklerini ise O-U ile bir başka ifadeyle ortalamaya dönme özelliği olan aşağıdaki stokastik diferansiyel denklemiyle tanımlamıştır.

(4.1.25) $dr_t = \alpha(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t$

Bu modelde zaman indisinden (t) bağımsız, birer sabit sayı olarak belirlenen (α), (θ) ve (σ) parametreleri sırasıyla anlık faiz oranının ortalama faiz oranına yakınsama hızını (şiddetini); uzun dönemdeki ortalama faiz oranını ve bu yakınsama sürecinde yaşanan sapmaların büyüklüğünü göstermektedir.

Vasicek'in riskin piyasa fiyatına ve anlık faiz oranı dinamiklerine ilişkin tercihleri sonucunda Vasicek (1977) modeline ilişkin spesifik vade yapısı denklemi aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

(4.1.26)

$$\frac{\partial P_{r_t,t;T}}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 P_{r_t,t;T}}{\partial r_t^2} + \alpha[(\theta - \frac{\lambda\sigma}{\alpha}) - r_t]\frac{\partial P_{r_t,t;T}}{\partial r_t} - r_t P_{r_t,t;T} = 0$$

Yukarıdaki kısmi diferansiyel denkleminin, $\left(P_{r_t,T;T} = 1\right)$ sınır koşuluyla çözülmesi sonucunda Vasicek modeli çerçevesinde tahvil fiyatları $\left(P_{r_t,t;T}\right)$ elde edilebilir. Bu denklemi analitik bir yaklaşımla olduğu gibi olasılık teorisinin araçlarından yararlanarak çözmek de mümkündür.

Vasicek (1977) modelindeki vade yapısı denkleminin analitik çözümü için *A(T;T)*=0 ve *B(T;T)*=0 sınır değerleriyle,

(4.1.27) $P_{r_t,t;T} = e^{A(t;T) - r_t B(t;T)}$

şeklinde ifade edilebilecek afine çözüm kümesinden yararlanılabilir. Bu durumda,

(4.1.28) $$\frac{\partial P_{r_t,t;T}}{\partial t} = \left(\frac{\partial A(t;T)}{\partial t} - r_t \frac{\partial B(t;T)}{\partial t}\right) e^{A(t;T) - r_t B(t;T)}$$

(4.1.29) $$\frac{\partial P_{r_t,t;T}}{\partial r_t} = -B(t;T) e^{A(t;T) - r_t B(t;T)}$$

(4.1.30) $$\frac{\partial^2 P_{r_t,t;T}}{\partial r_t^2} = B^2(t;T) e^{A(t;T) - r_t B(t;T)}$$

kısmi diferansiyelleri (4.1.26) numaralı eşitlikte yerine koyulur, gerekli sadeleştirmeler ve düzenlemeler yapılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

(4.1.31) $$\frac{\partial A(t;T)}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 B^2(t;T) - \alpha(\theta - \frac{\lambda\sigma}{\alpha})B(t;T) = r_t(\frac{\partial B(t;T)}{\partial t} - \alpha B(t;T) + 1)$$

Bu eşitlikte, *A(t;T)* ve *B(t;T)*, $\left(T\right)$ vade parametresinden bağımsız olarak sadece zamanın (t) fonksiyonlarıdır. Bu eşitliğin iki tarafının anlık faiz oranına (r_t) göre türevlerinin alınması sonucunda,

(4.1.32) $$\frac{\partial B(t;T)}{\partial t} - \alpha B(t;T) + 1 = 0$$

ve

(4.1.33) $$\frac{\partial A(t;T)}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 B^2(t;T) - \alpha(\theta - \frac{\lambda\sigma}{\alpha})B(t;T) = 0$$

eşitlikleri elde edilir. Yukarıdaki (4.1.32) numaralı birinci mertebeden adi diferansiyel denkleminin (*B(T;T)*=0) sınır değeri koşuluyla özel çözümü,

(4.1.34) $B(t;T)=\frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha(T-t)})$

olarak bulunur. Bu çözüm yukarıdaki (4.1.33) numaralı eşitlikte yerine koyulur ve elde edilen diferansiyel denklem *A(T;T)*=0 sınır değeri koşuluyla çözülürse,

(4.1.35)

$$A(t;T)=-(\theta-\frac{\lambda\sigma}{\alpha}-\frac{\sigma^2}{2\alpha^2})(T-t)+\frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha(T-t)})(\theta-\frac{\lambda\sigma}{\alpha}-\frac{\sigma^2}{\alpha^2})+\frac{\sigma^2}{4\alpha^3}(1-e^{-2\alpha(T-t)})$$

olarak bulunur. Daha sonra, (4.1.27) numaralı eşitlik kullanılarak, nominal değeri 1 TL., (T) vade tarihli bir tahvilin (t) zamanındaki fiyatı $(P_{r_t,t;T})$, Vasicek (1977) modeli için,

(4.1.36) $P_{r_t,t;T}=e^{-(\theta-\frac{\lambda\sigma}{\alpha}-\frac{\sigma^2}{2\alpha^2})(T-t)+\frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha(T-t)})(\theta-\frac{\lambda\sigma}{\alpha}-\frac{\sigma^2}{\alpha^2}-r_t)+\frac{\sigma^2}{4\alpha^3}(1-e^{-2\alpha(T-t)})}$

olarak bulunur.

Olasılıksal açıdan ele alındığında, Vasicek (1977) modelindeki vade yapısı denkleminin çözümü için Feynman-Kac teoremi kullanılabilir.

Feynman-Kac teoremine göre $P_{r,T;T}=F(r,T;T)=1$ sınır değeri ile (4.1.26) numaralı denklemin çözümü aşağıdaki gibi olacaktır.

(4.1.37) $P_{r,t;T}=\mathrm{E}\left(e^{(-\int_t^T\hat{r}_\tau d\tau)}F(\hat{r},T;T)\,|\,\hat{r}_t=r\right)$

Burada gözden kaçırılmaması gereken önemli bir nokta, faiz oranı dinamiklerini belirleyen stokastik sürecin riske göre düzeltilmiş (risk-adjusted) olmasıdır. Riske göre düzeltilmiş stokastik diferansiyel denklem aşağıda tanımlanmaktadır. Takip edebilmede kolaylık sağlanabilmesi amacıyla $(\theta^*=(\theta-\frac{\lambda\sigma}{\alpha}))$ kısaltması kullanılmıştır.

(4.1.38) $d\hat{r}_t = \alpha(\theta^* - \hat{r}_t)dt + \sigma dW_t$

Bu stokastik denklem incelendiğinde, bu denklemin daha önceden açıklamaları yapılmış olan O-U tipi stokastik süreç olduğunu söylemek mümkündür ve bu sürecin çözümü aşağıda açıklanmaktadır.

(4.1.39) $\hat{r}_t - \theta^* = y_t$

dönüşümü kullanılırsa,

(4.1.40) $d\hat{r}_t = dy_t$

olacak ve (4.1.38) numaralı eşitlik,

(4.1.41) $dy_t = -\alpha y_t dt + \sigma dW_t$

formunu alacaktır. Eşitlik ($e^{\alpha t}$) katsayısıyla çarpılırsa diferansiyel denklemin çözümü,

(4.1.42) $\int_t^T d(e^{\alpha s} y_t) = \int_t^T e^{\alpha s} \sigma dW_s$

(4.1.43) $\hat{r}_T = \theta^*(1 - e^{-\alpha(T-t)}) + \hat{r}_t e^{-\alpha(T-t)} + \int_t^T e^{-\alpha(T-s)} \sigma dW_s$

olarak bulunur. Bu durumda, (4.1.37) numaralı eşitlikte $F(\hat{r}, T; T) = 1$ sınır değeri kullanılır ve ($I_T = \int_t^T \hat{r}_\tau d\tau$) tanımlaması yapılırsa, nominal değeri 1 TL., vade tarihi (T) olan bir tahvilin (t) zamanındaki fiyatı $\left(P_{r_t, t; T}\right)$,

(4.1.44) $P_{r,t;T} = \mathrm{E}\left(e^{-I_T}\right)$

olacaktır.

(4.1.45) $I_T = \int_t^T \theta^*(1 - e^{-\alpha(\tau - t)}) d\tau + \int_t^T r e^{-\alpha(\tau - t)} d\tau + \sigma \int_t^T \int_t^T e^{-\alpha(\tau - s)} dW_s d\tau$

olarak tanımlanan eşitliğin sağ tarafındaki ilk iki integral vadeye (T) göre hesaplanır ve sondaki sıralı integralin sıralamasında ve sınırlarında gerekli değişiklikler yapılırsa öncelikle;

(4.1.46) $I_T = \theta^*(T-t) - \frac{\theta^*}{\alpha}(1-e^{-\alpha(T-t)}) + \frac{r}{\alpha}(1-e^{-\alpha(T-t)}) + \sigma\int_t^T dW_s \int_s^T e^{\alpha(s-\tau)}d\tau$

eşitliği, sonrasında ise

(4.1.47) $I_T = \theta^*(T-t) - \frac{\theta^*}{\alpha}(1-e^{-\alpha(T-t)}) + \frac{r}{\alpha}(1-e^{-\alpha(T-t)}) + \frac{\sigma}{\alpha}\int_t^T (1-e^{\alpha(s-T)})dW_s$

eşitliği elde edilir. (4.1.47) numaralı eşitlik bir deterministik ve bir de stokastikliği sağlayan Ito integrali olmak üzere toplam iki parçadan oluşmaktadır. Bu durumda Normal (Gauss) dağılıma sahip I_T'ye ait koşullu beklenen değer (μ_{I_T}),

(4.1.48) $\mu_{I_T} = \theta^*(T-t) - \frac{\theta^*}{\alpha}(1-e^{-\alpha(T-t)}) + \frac{r}{\alpha}(1-e^{-\alpha(T-t)})$

ve koşullu varyans ($\sigma^2_{I_T}$)

(4.1.49) $\sigma^2_{I_T} = E\left(\left(\frac{\sigma}{\alpha}\int_t^T (1-e^{\alpha(s-T)})dW_s\right)^2\right)$

(4.1.50) $\sigma^2_{I_T} = \frac{\sigma^2}{\alpha^2}E\left(\left(\int_t^T (1-e^{\alpha(s-T)})dW_s\right)^2\right)$

(4.1.51) $\sigma^2_{I_T} = \frac{\sigma^2}{\alpha^2}\int_t^T (1-2e^{\alpha(s-T)} + e^{2\alpha(s-T)})ds$

(4.1.52) $\sigma^2_{I_T} = \frac{\sigma^2}{\alpha^2}\int_t^T (1-2e^{\alpha(s-T)} + e^{2\alpha(s-T)})ds$

(4.1.53) $\sigma^2_{I_T} = \frac{\sigma^2}{\alpha^2}(T-t) - 2\frac{\sigma^2}{\alpha^3}(1-e^{-\alpha(T-t)}) + \frac{\sigma^2}{2\alpha^3}(1-e^{-2\alpha(T-t)})$

olarak hesaplanır. Koşullu beklenen değer ve varyansı bulduktan sonra (4.1.44) eşitliğinden ve $I_T \sim N(\mu_I, \sigma_I^2)$ varsayımından hareketle,

(4.1.54) $\mathrm{E}\left(e^{-I_T}\right) = e^{-\mu_I + \frac{\sigma_I^2}{2}}$

olacağı için, söz konusu tahvilin t zamanındaki fiyatı $\left(P_{r_t,t;T}\right)$, yukarıda da hesaplandığı gibi,

(4.1.55) $P_{r_t,t;T} = e^{-(\theta-\frac{\lambda\sigma}{\alpha}-\frac{\sigma^2}{2\alpha^2})(T-t)+\frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha(T-t)})(\theta-\frac{\lambda\sigma}{\alpha}-\frac{\sigma^2}{\alpha^2}-r_t)+\frac{\sigma^2}{4\alpha^3}(1-e^{-2\alpha(T-t)})}$

olacaktır.

Yukarıda detaylandırılan işlemler ile gerek analitik yaklaşım gerekse olasılıksal yaklaşım ile Vasicek (1977) modeli için tahvil fiyatları elde edilmiştir. Tahvil fiyatlarının elde edilmesinden sonra, getiri eğrisini çizebilmek için vadeye-kadar-getiri oranlarını elde etmek gerekmektedir. Vadeye-kadar-getiri oranları $\left(R(t,T-t)\right)$, (4.1.24) numaralı eşitlik yardımıyla kolaylıkla hesaplanabilir.

(4.1.56)

$$R(t,T-t) = (\theta-\frac{\lambda\sigma}{\alpha}-\frac{\sigma^2}{\alpha^2})+\frac{1}{\alpha(T-t)}\left(r-(\theta-\frac{\lambda\sigma}{\alpha}-\frac{\sigma^2}{\alpha^2})\right)(1-e^{-\alpha(T-t)})+\frac{\sigma^2}{4\alpha^3(T-t)}(1-e^{-2\alpha(T-t)})$$

Eğer söz konusu tahvilin vade tarihi çok ilerideki bir tarihe ilişkin ise ($T\rightarrow\infty$), bu tahvile ait vadeye-kadar-getiri oranları,

(4.1.57) $\lim_{T\rightarrow\infty} R(t,T-t) = R(t,\infty)$

(4.1.58) $R(t,\infty) = (\theta-\frac{\lambda\sigma}{\alpha}-\frac{\sigma^2}{\alpha^2})$

olarak hesaplanır ve kısaca $R(\infty)$ olarak ifade edilir. Vasicek (1977) modeli ile elde edilen getiri eğrisinin hangi formları, hangi durumda aldığını test etmek için (3.1.56)'da elde edilen getiri eğrisi kullanılabilir. Getiri eğrisinin şeklinde (eğim katsayısında), vadeye kalan zaman $\left(T-t\right)$ içerisinde anlık faiz oranına bağlı olarak meydana gelebilecek değişimler (4.1.61)'de formüle edilebilir.

(4.1.59) $R(\infty) = (\theta-\frac{\lambda\sigma}{\alpha}-\frac{\sigma^2}{\alpha^2})$

kısaltması kullanılır ve

(4.1.60) $\tau = (T-t)$

dönüşümü yapılırsa,

(4.1.61)

$$\frac{\delta R(t,\tau)}{\delta(\tau)} = \frac{1}{\alpha}(r - R(\infty))(-\frac{1}{\tau^2} + \frac{1}{\tau^2}e^{-\alpha\tau} + \frac{\alpha}{\tau}e^{-\alpha\tau}) + \frac{\sigma^2}{4\alpha^3}(-\frac{1}{\tau^2} + \frac{1}{\tau^2}e^{-2\alpha\tau} - \frac{2\alpha}{\tau}e^{-2\alpha\tau})$$

Bütün vadeye kalan zaman dilimleri ($\forall\tau$) içerisinde, monoton artan ve monoton azalan bir getiri eğrisi için sağlanması gereken koşullar sırasıyla,

(4.1.62) $\frac{\delta R(t,\tau)}{\delta(\tau)} \geq 0$

(4.1.63) $\frac{\delta R(t,\tau)}{\delta(\tau)} \leq 0$

eşitsizlikleridir. Bu gerekli koşullardan hareketle, monoton artan ve monoton azalan bir getiri eğrisi için anlık faiz oranının (*r(t)*) alabileceği değerler sırasıyla aşağıda verilmiştir.

(4.1.64) $r(t) \leq R(\infty) - \frac{\sigma^2}{4\alpha^2}$

(4.1.65) $r(t) \leq R(\infty) + \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}$

Kambur veya dalgalı bir seyir izleyen bir getiri eğrisi için anlık faiz oranının alabileceği değerler aşağıda verilmiştir.

(4.1.66) $R(\infty) - \frac{\sigma^2}{4\alpha^2} \leq r(t) \leq R(\infty) + \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}$

Vasicek (1977) modelinin artan, azalan ve kambur getiri eğrilerine olanak vermesi modelin kuvvetli yönlerindendir. Modelin, günümüzde hâlâ çekiciliğini korumasının temel nedenleri; anlık faiz oranındaki değişimleri modellemek için lineer bir denklem kullanıyor olması, anlık faiz oranı değişimlerinin normal dağılıma sahip olması, tahvil ve bu tahvillere dayalı opsiyon fiyatlarının analitik ve açık (*explicit*) çözümlerinin olması olarak sıralanabilir.

Diğer taraftan Vasicek (1977) modelinin en büyük eksikliği, faiz oranlarının negatif olma olasılığının bulunmasıdır. Modelin bir diğer zayıf noktası ise modelin endojen yapısından kaynaklanmaktadır (Brigo ve Mercurio, 2006: 55). Vasicek (1977) modelinde başlangıç getiri eğrisi, modelden bir çıktı olarak elde edilmekte daha sonra piyasada gözlemlenen getiri eğrisi kullanılarak kalibre edilmekte ve parametre (α, θ, σ) değerleri belirlenmektedir. Ancak bazı durumlarda, modeldeki parametreler hangi değerleri alırlarsa alsınlar, modelden elde edilen başlangıç getiri eğrisi, piyasadaki mevcut getiri eğrisini bire bir kopyalamayabilir. Bir diğer ifadeyle model, piyasadaki volatilite yapısını tam anlamıyla yansıtmayabilir.

4.2. Dothan (1978) Modeli

L. Uri Dothan tarafından, 1978 yılında yayınlanan çalışmada geri ödememe riski bulunmayan sabit getirili menkul kıymetlerin getiri eğrileri ve bu menkul kıymetlerin fiyatlandırmaları araştırılmıştır. Ancak; bu modelde anlık faiz oranı, Vasicek (1977) modelinden farklı olarak, geometrik Brownian hareketi kullanılarak modellenmiştir.

Dothan (1978) modelinde anlık faiz oranının dinamikleri nesnel olasılık ölçümü (P) altında,

(4.2.1) $d\hat{r}_t = \sigma \hat{r}_t dW_t$

stokastik diferansiyel denklemiyle modellenmiştir. Bu stokastik diferansiyel denklemde (t) içinde bulunulan zamanı; (σ) bir pozitif sabit sayıyı ve (W_t) stokastik süreci yaratan Brownian hareketini simgelemektedir. Bu modelde anlık faiz oranı ($\hat{r}_t$), lognormal bir dağılıma sahip olmakla birlikte kesinlikle pozitif bir değer almaktadır ($P(r>0)=1$). Vasicek (1977) modelinde karşılaşılan anlık faiz oranının eksi değerler alma olasılığının pozitif olma sorunu bu modelde söz konusu değildir.

Bu modelde de aynen Vasicek (1977) modelinde olduğu gibi farklı vadelere sahip iki menkul kıymet kullanılarak risksiz bir portföy oluşturulmuş, riskin piyasa fiyatı $(\lambda(r,t))$ bulunmuş ve (4.2.2)'deki vade yapısı denklemine ulaşılmıştır (Dothan, 1978: 59-69).

(4.2.2) $$\frac{\partial P_{\hat{r},t;T}}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \hat{r}^2 \frac{\partial^2 P_{\hat{r},t;T}}{\partial \hat{r}^2} - \sigma \hat{r} \lambda(\hat{r},t) \frac{\partial P_{\hat{r},t;T}}{\partial \hat{r}} - \hat{r} P_{\hat{r},t;T} = 0$$

Dothan'ın, riskin piyasa fiyatını sabit bir sayı olarak kabul etmesi reel olasılık ölçümü (P) altında (4.2.1)'de tanımlanan anlık faiz oranına ait dinamiklerin, riske göre düzeltilerek yeni bir olasılık ölçümü (Q) altında tekrar tanımlanmasını gerektirmektedir. Buna göre riske göre düzeltilmiş yeni dinamikler,

(4.2.3) $dr_t = ar_t dt + \sigma r_t dW_t^Q$

stokastik diferansiyel denklemiyle tanımlanabilir. (4.2.3) numaralı anlık faiz oranında (dt) zamanında meydana gelen değişimi ifade eden stokastik diferansiyel denklemin çözümü

(4.2.4) $r_t = r_s \exp\left\{\left(a - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t-s) + \sigma\left(W_t^Q - W_s^Q\right)\right\}$, ($t$>$s$)

olarak hesaplanır. Anlık faiz oranının (r_t), lognormal bir dağılıma sahip olması nedeniyle (s) zamanındaki bilgiye bağlı olarak koşullu beklenen değeri

(4.2.5) $E\{r_t \mid F_s\} = r_s \exp\left\{(a - \frac{1}{2}\sigma^2)(t-s)\right\} E^Q\{\exp(\sigma(W_t - W_s) \mid F_s\}$

(4.2.6) $E\{r_t \mid F_s\} = r_s \exp\left\{(a - \frac{1}{2}\sigma^2)(t-s)\right\} \exp\left\{\frac{1}{2}\sigma^2(t-s)\right\}$

(4.2.7) $E\{r_t \mid F_s\} = r_s \exp\{a(t-s)\}$

olarak, (s) zamanındaki bilgiye bağlı olarak koşullu varyansı ise

(4.2.8) $Var\{r_t \mid F_s\} = E(r_t^2 \mid F_s) - E^2(r_t^2 \mid F_s)$

(4.2.9)

$$Var\{r_t \mid F_s\} = \left[r_s^2 \exp\left\{2(a - \frac{1}{2}\sigma^2)(t-s)\right\} E^Q\{\exp(2\sigma(W_t - W_s) \mid F_s\}\right] - \left[r_s^2 \exp\{2a(t-s)\}\right]$$

(4.2.10) $Var\{r_t \mid F_s\} = \left[r_s^2 \exp\left\{2(a - \frac{1}{2}\sigma^2)(t-s) + (2\sigma^2(t-s)\right\}\right] - \left[r_s^2 \exp\{2a(t-s)\}\right]$

(4.2.11) $Var\{r_t \mid F_s\} = r_s^2 \exp\{2a(t-s)\}\left[\exp\{\sigma^2(t-s)\} - 1\right]$

olarak hesaplanır.

Dothan modelinin anlık faiz oranlarının kesinlikle pozitif olma özelliğinin yanı sıra bir diğer kuvvetli yönü, modelin lognormal dağılıma sahip diğer modeller içinde kupon ödemesiz iskonto tahvillerinin fiyatlandırılması için analitik bir formüle ulaşan tek model olmasıdır.

Dothan modelinde (4.2.2) numaralı eşitlikteki vade yapısı denklemi riskin piyasa fiyatının sabit olduğu varsayımı ve gerekli sınır değerleri dikkate alınarak çözüldüğünde nominal değeri 1 TL., vade tarihi (T) olan bir tahvilin (t) zamanındaki fiyatı için elde edilen analitik formül (4.2.12)'de verilmiştir (Brigo ve Mercurio, 2006: 63).

(4.2.12)
$$P_{r_t,t;T} = \frac{\left(\frac{2r(t)}{\sigma^2}\right)^{(\frac{1}{2}-a)}}{\pi^2}\int_0^\infty \sin\left(2\sqrt{\frac{2r(t)}{\sigma^2}}\sinh(y)\right)\int_0^\infty f(z)\sin(yz)\,dz\,dy + \frac{2}{\Gamma\left(2(\frac{1}{2}-a)\right)}\left(\frac{2r(t)}{\sigma^2}\right)^{(\frac{1}{2}-a)} K_{2(\frac{1}{2}-a)}\left(2\sqrt{\frac{2r(t)}{\sigma^2}}\right)$$

$$f(z) = \exp\left[\frac{-\sigma^2\left(4(\frac{1}{2}-a)^2+z^2\right)(T-t)}{8}\right] z\left|\Gamma\left(-(\frac{1}{2}-a)\right)+i\frac{z}{2}\right|^2 \cosh\frac{\pi z}{2}$$

Modelde kupon ödemesiz iskonto tahviller için analitik formül elde edilse de bu formülde hiperbolik fonksiyonlar içeren birleşik integrallerin olması, ikinci türden Bessel fonksiyonlarının olması ve kompleks sayılarla işlemlerin yer alması bu formülün kolay uygulanabilirliğini oldukça azaltmaktadır. Ayrıca, Dothan (1978) modelinde, Vasicek (1977) modelinin tersine kupon ödemesiz iskonto tahviller üzerine yazılmış bir opsiyonun değerini hesaplayan analitik bir formüle ulaşılamamıştır.

Dothan (1978) modelinde karşılaşılan bir diğer istenmeyen durum ise anlık faiz oranının lognormal dağılıma sahip olduğu diğer modellerde de karşımıza çıkan, banka hesabına yatırılan bir paranın görece kısa bir süre içerisinde sonsuz değere ulaşması ve buna bağlı olarak bu menkul kıymetler üzerine yazılmış olan türev ürünlerin değerlerinin sonsuz değer almasıdır. Bu nedenle Dothan (1978) ve lognormal dağılıma sahip diğer modellerde ((Black, Derman, Toy (1990), Black ve Karasinski (1991), Mercurio ve Moraleda (2000) ve Exponential Vasicek (2006)) anlık faiz oranın sürekli bir fonksiyon olarak modellenmesine karşın pratikte banka hesabında meydana gelen patlamayı önlemek ve uygulanabilirliği zor olabilecek analitik formüllerden kaçınmak amacıyla anlık faiz oranlarının kestiriminde ağaç yöntemleri tercih edilmektedir.

4.3. Cox – Ingersoll – Ross (1985) Modeli

John C. Cox, Jonathan E. Ingersoll ve Stephen A. Ross tarafından 1985 yılında yayınlanan ve CIR (1985) olarak adlandırılan modelde, araştırmacılar genel denge teorisinden yola çıkarak faiz oranının modellenmesi ve buna bağlı olarak geri ödememe riski bulunmayan tahvillerin ve bu tahviller üzerine yazılmış türev ürünlerin fiyatlandırılması üzerine çalışmışlardır.

Cox, Ingersoll ve Ross'a (CIR) göre; yatırımcıların gelecek hakkındaki beklentileri, risk tercihleri, tüketim tercihleri ve mevcut alternatif yatırımlar, faiz oranlarının vade yapısını etkileyen faktörlerdir. Bu varsayımlara bağlı olarak 1985 tarihli çalışmada anlık faiz oranının dinamiklerini belirleyen stokastik sürecin içsel (endojen) olarak hesaplanması ve tahvil fiyatlandırmasında yararlanılacak olan kısmi diferansiyel denklemin belirlenmesi için genel denge varlık fiyatlama modelinden yararlanılmıştır.

CIR, denge ekonomisini tanımlarken reel ekonomiyle finansal piyasaları birleştirmişlerdir. CIR'a göre içsel üretim özellikleri ve rassal olarak sürekli değişen teknoloji, yatırım fırsatlarını da sürekli ve rassal olarak değiştirmektedir. Bu nedenle, CIR, bu dinamik özelliği, statik ve tek dönemlik yaklaşımlarla modellemekten ziyade; sürekli zaman yaklaşımıyla modellemenin daha güvenilir olacağını belirtmişlerdir.

CIR'ın tanımladıkları ekonomide tüketim ve yatırım için tek bir tip reel ürün bulunmakta ve bütün değerler bu ürün cinsinden değerlendirilmektedir. Üretim alternatifleri, farklı n adet lineer etkinlikten oluşan bir kümedir. Farklı üretim etkinliklerinden beklenen getiri oranı vektörü (α) ve getiri oranlarının kovaryans matrisi (GG^T)'dir. (α) ve (G)'nin bileşenleri, zaman içerisinde sürekli rassal olarak değişen ve teknoloji durumunu gösteren k-boyutlu (Y) vektörünün fonksiyonlarıdır. (Y) vektöründeki değişim, gelecek zamandaki üretim alternatiflerini belirleyecektir. (Y) vektöründeki beklenen değişimler (μ) ve değişimlerin kovaryans matrisi $\left(SS^T\right)$ olarak tanımlanabilir. Bu ekonomi, (4.3.1)'de tanımlanmış amaç fonksiyonlarını maksimize etmek isteyen özdeş bireylerden oluşmaktadır. (4.3.1)'de tanımlanan amaç fonksiyonu, zaman içerisinde sürekli rassal olarak değişen ve teknoloji durumunu gösteren (Y) vektörünün (s) zamanındaki değerlerinden ve (s) zamanında yapılan tüketim miktarından $(C(s))$ oluşan Von Neumann – Morgenstern fayda fonksiyonudur.

(4.3.1) $\mathrm{E}\int_t^{t'} U\left[C(s), Y(s), s\right] ds$

CIR, öncelikle yukarıda genel hatları açıklanmış denge ekonomisinde, ürünlerin ve bu ürünlere bağlı türev ürünlerin fiyatlandırılmasında kullanılabilecek genel bir denkleme ulaşmıştır. Sonrasında kullandıkları genel fonksiyonlar üzerinde bir takım belirlemeler ve teknoloji değişimleri üzerine basitleştirici varsayımlar yaparak denge ekonomisi çerçevesinde tek faktörlü vade yapısı modeline ulaşmışlardır.

Vade yapısı denklemine ulaşmak için CIR, üç adet varsayımda bulunmuşlardır. Birinci varsayımda üretim alternatiflerinde zaman içerisinde meydana gelen değişimin tek bir değişken (Y) tarafından belirlendiği; ikinci varsayımda, üretim alternatiflerinden elde edilen getiri oranlarının ortalamalarının ve varyanslarının, (Y) değişkeni ile orantılı olduğu; üçüncü varsayımda ise (Y) değişkeninin (4.3.2)'deki stokastik süreci izlediği kabul edilmiştir.

(4.3.2) $dY_t = \left[\xi Y + \zeta\right] dt + v\sqrt{Y} d\underline{W}_t$

Bu stokastik süreçte (ξ) ve (ζ) birer sabit sayıyı $(\zeta \geq 0)$; (v) ise sabit sayılardan oluşan bir satır vektörü simgelemektedir. Teknoloji değişimleri ve tercihler hakkında yapılan varsayımlar dikkate alınarak yapılan hesaplamalar doğrultusunda anlık faiz oranının dinamikleri (4.3.3)'teki stokastik süreç ile tanımlanmıştır (Cox vd., 1985: 385-407).

(4.3.3) $dr_t = \kappa(\theta - r)dt + \sigma\sqrt{r} dW_t \qquad \kappa, \theta \geq 0$

Bu stokastik denklem; sürekli ve birinci dereceden otoregresif bir süreç olup, stokastik anlık faiz oranı, uzun dönem ortalaması (θ)'ya (κ) hızıyla yaklaşmaktadır. Bu stokastik sürece, ($2\kappa\theta \geq \sigma^2$) kısıtının konmasıyla birlikte anlık faiz oranının negatif olma olasılığı ortadan kaldırılmıştır. (4.3.3)'te tanımlanan stokastik süreç, anlık faiz oranlarının negatif seviyelere düşmesini engellemekle birlikte:

- Sıfır değerini alan anlık faiz oranının, sonraki zaman dilimlerinde tekrar pozitif değerler alabilmesine,
- Anlık faiz oranlarına ait mutlak varyans değerinin, anlık faiz oranlarının düzeyine göre artmasına veya azalmasına ve
- Anlık faiz oranlarının sürekli ve durağan bir dağılım göstermesine olanak sağlamaktadır.

Anlık faiz oranı dinamiklerinin (4.3.3)'teki şekliyle tanımlanması sonucunda CIR tarafından $\left(P_{r,T;T} = 1\right)$ sınır değeriyle elde edilen vade yapısı denklemi (4.3.4)'te verilmiştir.

(4.3.4)

$$\frac{\partial P_{r_t,t;T}}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 r_t \frac{\partial^2 P_{r_t,t;T}}{\partial r_t^2} + \left(\kappa(\theta - r_t) - \lambda r_t\right)\frac{\partial P_{r_t,t;T}}{\partial r_t} - r_t P_{r_t,t;T} = 0$$

CIR modelinde elde edilen vade yapısı denklemi incelendiğinde tahvil fiyatlarının tek bir stokastik değişkene, anlık faiz oranına, bağlı olduğu görülmektedir. Bu çıkarsamanın doğru olabilmesi için; bütün yatırımcıların sabit bir risk tercihine sahip oldukları, ekonomideki belirsizliğin tek bir değişken tarafından oluşturulduğu ve anlık faiz oranının bu tek değişkenin monoton bir fonksiyonu olduğu varsayımlarının yapıldığı unutulmamalıdır.

Tahvil fiyatlarının elde edilebilmesi için yukarıdaki vade yapısı denkleminin çözümü gerekmektedir. Vade yapısı denkleminin analitik çözümü için,

(4.3.5) $P_{r_t,t;T} = A(t;T)e^{-B(t;T)r_t}$

fiyatlama eşitliğinden yararlanılabilir. Bu durumda;

(4.3.6) $\dfrac{\partial P_{r_t,t;T}}{\partial r_t} = -A(t;T)B(t;T)e^{-B(t;T)r_t}$,

(4.3.7) $\dfrac{\partial^2 P_{r_t,t;T}}{\partial r_t^2} = A(t;T)B^2(t;T)e^{-B(t;T)r_t}$,

(4.3.8) $\dfrac{\partial P_{r_t,t;T}}{\partial t} = \left(\dfrac{\partial A(t;T)}{\partial t} - A(t;T)r_t \dfrac{\partial B(t;T)}{\partial t} \right) e^{-B(t;T)r_t}$

olarak hesaplanırsa (4.3.4)'teki vade yapısı denklemi,

(4.3.9)

$$r_t \left(\frac{1}{2}\sigma^2 A(t;T)B^2(t;T) + \kappa A(t;T)B(t;T) - A(t;T)\frac{\partial B(t;T)}{\partial t} + \lambda A(t;T)B(t;T) - A(t;T) \right) =$$

$$\kappa\theta A(t;T)B(t;T) - \frac{\partial A(t;T)}{\partial t}$$

şeklini alacaktır. (4.3.9) numaralı eşitlikte sol tarafın, anlık faiz oranına bağlı bir fonksiyon; sağ tarafın ise anlık faiz oranından bağımsız bir fonksiyon olması nedeniyle (4.3.10) ve (4.3.11)'deki denklemlerin sağlanması gerekmektedir.

(4.3.10) $\dfrac{\partial A(t;T)}{\partial t} - \kappa\theta A(t;T)B(t;T) = 0$

(4.3.11) $\left(\dfrac{\partial B(t;T)}{\partial t} - (\kappa + \lambda)B(t;T) - \dfrac{1}{2}\sigma^2 B^2(t;T) + 1 \right) = 0$

(4.3.11) incelendiğinde bu eşitliğin bir Riccati denklemi olduğu söylenebilir. Bu denklemin genel çözümü,

(4.3.12) $B(t;T) = \dfrac{v(t,T)}{u(t,T)}$

olarak gösterilebilir. (t) değişkeninden ve (T) parametresinden oluşan $(v(t,T))$ ve $(u(t,T))$ fonksiyonlarının çözümü ise (4.3.13) ve (4.3.14)'te verilmiştir.

(4.3.13) $\dfrac{\partial v(t,T)}{\partial t} + u(t,T) - \kappa v(t,T) = 0$

(4.3.14) $\dfrac{\partial u(t,T)}{\partial t} + \lambda u(t,T) + \dfrac{1}{2}\sigma^2 v(t,T) = 0$

(4.3.15) $\tau = T - t$

dönüşümü yapılırsa;

(4.3.16) $\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{d}{d\tau}$

olacak ve (4.3.13) ve (4.3.14) numaralı denklemler sırasıyla;

(4.3.17) $-\frac{d}{d\tau}v(\tau) + u(\tau) - \kappa v(\tau) = 0$

(4.3.18) $-\frac{d}{d\tau}u(\tau) + \lambda u(\tau) + \frac{1}{2}\sigma^2 v(\tau) = 0$

değerlerini alacaklardır. (4.3.17) öncelikle,

(4.3.19) $u(\tau) = \frac{d}{d\tau}v(\tau) + \kappa v(\tau)$

ve

(4.3.20) $\frac{d}{d\tau}u(\tau) = \frac{d^2}{d\tau^2}v(\tau) + \kappa\frac{d}{d\tau}v(\tau)$

olarak düzenlenir ve (4.3.18)'de yerine koyulur, gerekli düzeltmeler yapılırsa (4.3.21) elde edilir.

(4.3.21) $\frac{d^2}{d\tau^2}v(\tau) - (\lambda - \kappa)\frac{d}{d\tau}v(\tau) - \left(\lambda\kappa + \frac{1}{2}\sigma^2\right)v(\tau) = 0$

(τ) değişkenine göre birinci dereceden türev alma işlemi "*D*" operatörü olarak tanımlanırsa (4.3.21) aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

(4.3.22) $\left(D^2 - (\lambda - \kappa)D - (\lambda\kappa + \frac{1}{2}\sigma^2)\right)v(\tau) = 0$

İkinci dereceden bu denklemin kökleri, $\left(\gamma = \sqrt{(\lambda + \kappa)^2 + 2\sigma^2}\right)$ kısaltması yapılırsa $\left(\frac{(\lambda - \kappa) + \gamma}{2}\right)$ ve $\left(\frac{(\lambda - \kappa) - \gamma}{2}\right)$ olarak bulunur. Buradan hareketle $(v(\tau))$ fonksiyonunun genel çözümü,

(4.3.23) $v(\tau) = k_1 e^{\frac{(\lambda - \kappa + \gamma)}{2}\tau} + k_2 e^{\frac{(\lambda - \kappa - \gamma)}{2}\tau}$

olacaktır.

$\left(B_{T,T}=0\right)$ sınır değerinden, eşitlik (4.3.12)'den ve $\left(\tau=T-t\right)$ değişiminden hareketle $\left(B_{T;T}=0=\dfrac{v(0)}{u(0)}\right)$ ve $\left(v(0)=0\right)$ olacaktır. Bu durumda da $\left(k_1=-k_2\right)$ olması gerekecektir. $\left(k_1=1\right)$ olarak seçilirse $\left(v(\tau)\right)$ fonksiyonunun çözümü (4.3.24)'teki gibi olacaktır.

(4.3.24) $v(\tau)=e^{\frac{(\lambda-\kappa+\gamma)}{2}\tau}-e^{\frac{(\lambda-\kappa-\gamma)}{2}\tau}$

(4.3.24)'ün, (4.3.19)'da yerine koyulması sonucunda

(4.3.25) $u(\tau)=\left(\dfrac{(\lambda+\kappa+\gamma)}{2}\right)e^{\frac{(\lambda-\kappa+\gamma)}{2}\tau}-\left(\dfrac{(\lambda+\kappa-\gamma)}{2}\right)e^{\frac{(\lambda-\kappa-\gamma)}{2}\tau}$

olarak hesaplanır.

$\left(v(\tau)\right)$ ve $\left(u(\tau)\right)$ fonksiyonlarının hesaplanmasıyla birlikte, (4.3.12) denklemi kullanılır ve $\left(\tau=T-t\right)$ değişimi tekrar edilirse,

(4.3.26) $B_{t;T}=\dfrac{2(e^{\frac{(\lambda-\kappa+\gamma)(T-t)}{2}}-e^{\frac{(\lambda-\kappa-\gamma)(T-t)}{2}})}{(\lambda+\kappa+\gamma)e^{\frac{(\lambda-\kappa+\gamma)(T-t)}{2}}-(\lambda+\kappa-\gamma)e^{\frac{(\lambda-\kappa-\gamma)(T-t)}{2}}}$

(4.3.27) $B_{t;T}=\dfrac{2(e^{\gamma(T-t)}-1)}{(\lambda+\kappa+\gamma)(e^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma}$

olarak hesaplanır. Vade tarihinin $\left(T\right)$ sabit olduğu düşünülürse $A(t;T)$ fonksiyonu tek bir bağımsız değişkene sahip olacak; buradan hareketle (4.3.10) numaralı eşitliğin birinci dereceden adi diferansiyel denklem olduğu görülecektir. Bu denklemin çözümü ise (4.3.28) – (4.3.33) arasında açıklanmıştır.

(4.3.28) $\dfrac{dA(t;T)}{dt}=\kappa\theta A(t;T)B(t;T)$

(4.3.29) $\dfrac{dA(t;T)}{A(t;T)}=\kappa\theta B(t;T)dt$

(4.3.30) $\ln A(t;T)=-\kappa\theta\int_t^T B(s;T)ds$

$A(T;T)=0$; (κ) ve (θ) birer sabit sayıdır. (4.3.27)'de elde edilen sonuç, aşağıda yerine koyulursa;

(4.3.31) $A(t;T)=\exp\left(-2\kappa\theta\int_t^T \frac{(e^{\gamma(T-s)}-1)}{(\lambda+\kappa+\gamma)(e^{\gamma(T-s)}-1)+2\gamma}ds\right)$

elde edilir. Bu integralin çözümü için $\left(y=e^{\gamma(T-s)}\right)$ dönüşümü yapılırsa öncelikle $\left(dy=(-\gamma e^{\gamma(T-s)})ds\right)$ olacak ve $\left(ds=-\frac{dy}{\gamma e^{\gamma(T-s)}}=-\frac{dy}{\gamma y}\right)$ eşitlikleri elde edilecektir. Bu dönüşüm ve sonuçlar (4.3.31)'de yerine koyulursa,

(4.3.32) $A(t;T)=\exp\left(-2\kappa\theta\int_{e^{\gamma(T-t)}}^{1}\frac{-(y-1)}{(\lambda+\kappa+\gamma)(y-1)+2\gamma}\frac{1}{y}dy\right)$

elde edilecektir. (4.3.32) yeni sınır değerlerine göre hesaplanırsa $A(t;T)$ fonksiyonu (4.3.33)'teki değeri alacaktır.

(4.3.33) $A(t;T)=\left(\frac{2\gamma e^{\frac{(\lambda+\kappa+\gamma)(T-t)}{2}}}{(\lambda+\kappa+\gamma)(e^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma}\right)^{\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}}$

$A(t;T)$ ve $B(t;T)$ değerlerinin hesaplanması ve (4.3.5) numaralı eşitliğin kullanılması sonucunda CIR (1985) modeline göre vade tarihi (T), nominal değeri 1 TL. olan ve geri ödememe riski bulunmayan bir tahvilin (t) zamanındaki değeri (4.3.34)'te verilmiştir.

(4.3.34) $P_{r,t;T}=\left(\frac{2\gamma e^{\frac{(\lambda+\kappa+\gamma)(T-t)}{2}}}{(\lambda+\kappa+\gamma)(e^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma}\right)^{\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}} e^{-\left(\frac{2(e^{\gamma(T-t)}-1)}{(\lambda+\kappa+\gamma)(e^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma}\right)r}$

CIR (1985) modeli çerçevesinde tahvil fiyatlarının elde edilmesinden sonra, getiri eğrisini elde edebilmek için v a d e y e - k a d a r - g e t i r i oranlarını hesaplamak gerekmektedir. Nominal değeri 1 TL. olan iskontolu bir tahvilin (t) zamanındaki fiyat eşitliği $\left(P_{r,t;T}=e^{-(T-t)R(t,T-t)}\right)$ ve (4.3.5) numaralı eşitlik dikkate alındığında, v a d e y e - k a d a r - g e t i r i oranları ($R(t,T-t)$),

(4.3.35) $A(t;T)e^{-B(t;T)r}=e^{-(T-t)R(t,T-t)}$

(4.3.36) $\ln A(t;T) - B(t;T)r = -(T-t)R(t,T-t)$

(4.3.37) $R(t,T-t) = \dfrac{rB(t;T) - \ln A(t;T)}{(T-t)}$

olarak hesaplanır.

CIR (1985) modelinde getiri eğrisinin hangi durumlarda hangi formları aldığını test etmek için (4.3.37) numaralı eşitlik kullanılır. Öncelikle vade tarihinin çok ileri bir zamanda $(T \to \infty)$ olduğu varsayılırsa vadeye-kadar-getiri oranları,

(4.3.38) $R(t,\infty) = \lim\limits_{T\to\infty} \dfrac{rB(t;T) - \ln A(t;T)}{(T-t)}$

olarak ifade edilir. $A(t;T)$ fonksiyonunu tanımlayan (4.3.33) numaralı eşitlik hatırlanırsa, $\left(\lim\limits_{T\to\infty}\left(\ln A(t;T)\right)\right)$,

(4.3.39) $\ln A(t;T) = \dfrac{2\kappa\theta}{\sigma^2}\left(\ln(2\gamma e^{\frac{(\lambda+\kappa+\gamma)(T-t)}{2}}) - \ln[(\lambda+\kappa+\gamma)(e^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma]\right)$

(4.3.40) $\ln A(t;T) = \dfrac{2\kappa\theta}{\sigma^2}\left(\dfrac{(\lambda+\kappa+\gamma)(T-t)}{2} + \ln(2\gamma) - \ln[(\lambda+\kappa+\gamma)(e^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma]\right)$

(4.3.41) $\lim\limits_{T\to\infty}\left((\lambda+\kappa+\gamma)(e^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma\right) = (\lambda+\kappa+\gamma)e^{\gamma(T-t)}$

(4.3.42) $\lim\limits_{T\to\infty}\left(\dfrac{(\lambda+\kappa+\gamma)(T-t)}{2} + \ln(2\gamma)\right) = \dfrac{(\lambda+\kappa+\gamma)(T-t)}{2}$

(4.3.43) $\lim\limits_{T\to\infty}\left(\ln A(t;T)\right) = \lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{2\kappa\theta}{\sigma^2}\left(\dfrac{(\lambda+\kappa+\gamma)(T-t)}{2} - \ln\left((\lambda+\kappa+\gamma)e^{\gamma(T-t)}\right)\right)$

(4.3.44) $\lim\limits_{T\to\infty}\left(\ln A(t;T)\right) = \lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{\kappa\theta}{\sigma^2}\left((\lambda+\kappa+\gamma)(T-t) - 2\gamma(T-t)\right)$

(4.3.45) $\lim\limits_{T\to\infty}\left(\ln A(t;T)\right) = \lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{\kappa\theta}{\sigma^2}\left((\lambda+\kappa-\gamma)(T-t)\right)$ olacaktır.

$B(t;T)$ fonksiyonunu tanımlayan (4.3.27) numaralı eşitlik hatırlanırsa, $\left(\lim\limits_{T\to\infty} B(t;T)\right)$,

(4.3.46) $\lim\limits_{T\to\infty} B(t;T) = \lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{2(e^{\gamma(T-t)}-1)}{(\lambda+\kappa+\gamma)(e^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma} = \dfrac{2}{(\lambda+\kappa+\gamma)}$ olacaktır.

(4.3.38), (4.3.45) ve (4.3.46) numaralı eşitliklerden hareketle,

(4.3.47) $$R(t,\infty)=\lim_{T\to\infty}\frac{\dfrac{2r}{(\lambda+\kappa+\gamma)}-\dfrac{\kappa\theta}{\sigma^2}(\lambda+\kappa-\gamma)(T-t)}{(T-t)}$$

(4.3.48) $$R(t,\infty)=\lim_{T\to\infty}\left(\frac{2r}{(\lambda+\kappa+\gamma)(T-t)}-\frac{\kappa\theta}{\sigma^2}(\lambda+\kappa-\gamma)\right)$$

(4.3.49) $$R(t,\infty)=\lim_{T\to\infty}\left(\frac{2r}{(\lambda+\kappa+\gamma)(T-t)}-\frac{\kappa\theta}{\sigma^2}\frac{(\lambda+\kappa-\gamma)(\lambda+\kappa+\gamma)}{(\lambda+\kappa+\gamma)}\right)$$

(4.3.50) $$R(t,\infty)=\lim_{T\to\infty}\left(\frac{2r}{(\lambda+\kappa+\gamma)(T-t)}-\frac{\kappa\theta}{\sigma^2}\frac{-2\sigma^2}{(\lambda+\kappa+\gamma)}\right)$$

(4.3.51) $$R(t,\infty)=\lim_{T\to\infty}\left(\frac{2r}{(\lambda+\kappa+\gamma)(T-t)}+\frac{2\kappa\theta}{(\lambda+\kappa+\gamma)}\right)$$

(4.3.52) $R(t,\infty)=\dfrac{2\kappa\theta}{(\lambda+\kappa+\gamma)}$ olacaktır.

Vade tarihinin çok yakın bir zamanda $(t\to T)$ olduğu varsayımı altında ise vadeye-kadar-getiri oranları,

(4.3.53) $$R(t,T)=\lim_{t\to T}\frac{rB(t;T)-\ln A(t;T)}{(T-t)}$$

olarak ifade edilebilir. ($A(t;T)$) fonksiyonunu tanımlayan (4.3.33) numaralı eşitlik ve $\left(e^x=\sum_{n=0}^{n=\infty}\dfrac{x^n}{n!}\right)$ formülü hatırlanırsa öncelikle,

(4.3.54) $$e^{\frac{(\lambda+\kappa+\gamma)(T-t)}{2}}\approx\left(1+\frac{(\lambda+\kappa+\gamma)(T-t)}{2}+\frac{(\lambda+\kappa+\gamma)^2(T-t)^2}{8}+\ldots\right)$$

ve

(4.3.55) $$e^{\gamma(T-t)}\approx\left(1+\gamma(T-t)+\frac{\gamma^2(T-t)^2}{2}+\ldots\right)$$

yaklaşımları yapılabilir. Bu yaklaşımlarda $(t\to T)$ iken,

(4.3.56) $e^{\frac{(\lambda+\kappa+\gamma)(T-t)}{2}}=\left(1+\dfrac{(\lambda+\kappa+\gamma)(T-t)}{2}\right)$ ve

(4.3.57) $e^{\gamma(T-t)} = \left(1+\gamma(T-t)\right)$

olacaktır. Bu sonuçlardan hareketle,

(4.3.58) $$\lim_{t \to T} A(t;T) = \left[\frac{2\gamma\left(1+\dfrac{(\lambda+\kappa+\gamma)(T-t)}{2}\right)}{(\lambda+\kappa+\gamma)\gamma(T-t)+2\gamma} \right]^{\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}}$$

(4.3.59) $$\lim_{t \to T} A(t;T) = \left[\frac{2\gamma+\gamma(\lambda+\kappa+\gamma)(T-t)}{2\gamma+\gamma(\lambda+\kappa+\gamma)(T-t)} \right]^{\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}}$$

(4.3.60) $\lim_{t \to T} A(t;T) = 1$

olarak hesaplanır ve $B(t;T)$ fonksiyonunu tanımlayan (4.3.27) numaralı eşitlik hatırlanırsa,

(4.3.61) $$\lim_{t \to T} B(t;T) = \frac{2\gamma(T-t)}{\gamma(\lambda+\kappa+\gamma)(T-t)+2\gamma}$$

(4.3.62) $$\lim_{t \to T} B(t;T) = \frac{(T-t)}{1+\dfrac{(\lambda+\kappa+\gamma)(T-t)}{2}}$$

(4.3.63) $\lim_{t \to T} B(t;T) = (T-t)$

olarak hesaplanır. (4.3.53), (4.3.60) ve (4.3.63) numaralı eşitliklerden hareketle,

(4.3.64) $R(t,T) = r$

olacaktır. Vadeye kalan zamana $\left(T-t\right)$ ve anlık faiz oranının değerine bağlı olmak üzere, getiri eğrisinin şeklinde (eğim katsayısında) meydana gelebilecek değişimler (4.3.66)'daki gibi formüle edilebilir. Öncelikle,

(4.3.65) $\tau = (T-t)$

dönüşümü yapılırsa,

(4.3.66) $$\frac{\delta R(t,\tau)}{\delta(\tau)} = \left(\frac{2(e^{\gamma\tau}-1)}{(\lambda+\kappa+\gamma)(e^{\gamma\tau}-1)+2\gamma} r - \ln\left(\frac{2\gamma e^{\frac{(\lambda+\kappa+\gamma)\tau}{2}}}{(\lambda+\kappa+\gamma)(e^{\gamma\tau}-1)+2\gamma} \right)^{\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}} \right)(\frac{1}{\tau})$$

elde edilir. Bütün vadeye kalan zaman dilimleri ($\forall \tau$) içerisinde, monoton artan ve monoton azalan bir getiri eğrisi için sağlanması gereken koşullar sırasıyla,

(4.3.67) $$\frac{\delta R(t,\tau)}{\delta(\tau)} \geq 0$$

(4.3.68) $$\frac{\delta R(t,\tau)}{\delta(\tau)} \leq 0$$

eşitsizlikleridir. Bu gerekli koşullardan hareketle, monoton artan ve monoton azalan bir getiri eğrisi için anlık faiz oranının (r_t) alabileceği değerler sırasıyla aşağıda verilmiştir:

(4.3.69) $$r(t) \leq \frac{2\kappa\theta}{\lambda+\kappa+\gamma}$$

(4.3.70) $$r(t) \geq \frac{2\kappa\theta}{\lambda+\kappa}$$

Kambur veya dalgalı bir seyir izleyen bir getiri eğrisi için anlık faiz oranının alabileceği değerler ise,

(4.3.71) $$\frac{2\kappa\theta}{\lambda+\kappa+\gamma} \leq r(t) \leq \frac{2\kappa\theta}{\lambda+\kappa}$$

olarak hesaplanır.

CIR (1985) modelinin en dikkat çekici tarafı, Vasicek (1977) modelinde karşılaşılan "faiz oranlarının negatif olma olasılığının pozitif olma" sorununun ortadan kaldırılmış olmasıdır. CIR (1985) modelinin diğer olumlu özellikleri; modelde tahvil fiyatlarının ve bunlara dayalı opsiyon fiyatlarının kapalı formdaki analitik formüllerle hesaplanabiliyor olması ve modelin artan, azalan ve kambur getiri eğrilerine olanak vermesi olarak sıralanabilir.

CIR (1985) modelinin en büyük eksikliği Vasicek (1977), Dothan (1978) ve endojen yapıya sahip diğer modellerde olduğu gibi, modelin endojen yapısından kaynaklanmaktadır. Modelde, endojen yapıdaki modellerde olduğu gibi başlangıç getiri eğrisi, modelden bir çıktı olarak elde edilmekte; daha sonra piyasada gözlemlenen getiri eğrisi kullanılarak kalibre edilmekte ve parametre ($\lambda,\kappa,\gamma,\theta,\sigma$)

değerleri belirlenmektedir. Ancak bazı durumlarda, modeldeki parametreler hangi değerleri alırlarsa alsınlar, modelden elde edilen başlangıç getiri eğrisi, piyasadaki mevcut getiri eğrisini birebir kopyalamayabilir. Bir diğer ifadeyle; model, piyasadaki volatilite yapısını tam anlamıyla yansıtmayabilir. Endojen yapıdan kaynaklanan bu sorunu gidermek için ekzojen (dışsal) modeller gündeme gelmiştir. Ekzojen modeller aslında endojen modellerin modifiye edilmiş halleri olarak tanımlanabilir. Modifiye sürecindeki temel strateji, modelde yer alan parametrelerin zamana bağlı olarak oluşturulmasıdır. Diğer bir ifadeyle; ekzojen modellerde yer alan parametreler, içinde bulunulan zamanın bir fonksiyonu olarak tanımlanmaktadırlar (Brigo ve Mercurio, 2006: 55).

4.4. Hull – White (1990) Modeli

Vasicek (1977) ve diğer endojen modellerde[2] elde edilen başlangıç getiri eğrisinin, piyasada oluşan mevcut getiri eğrisine göre kalibre edilme sürecinde karşılaşılan zorluklar ve çözüm önerileri, John Hull ve Alan White tarafından 1990 yılında peşi sıra yayınlanan makalelerde gündeme gelmiştir. Hull – White (HW) (1990) olarak isimlendirilen bu model, Vasicek (1977) modelinin genişletilmiş bir uyarlaması olması nedeniyle "Genişletilmiş Vasicek Modeli" olarak da nitelendirilmektedir. Aslında kronolojik açıdan değerlendirildiğinde, ekzojen özelliğine sahip ilk model, Ho ve Lee tarafından 1986 yılında geliştirilmiştir. Ho – Lee (1986) tarafından binom ağaçları kullanılarak geliştirilen kesikli zaman ve sonrasındaki sürekli zaman modeli, Dybvig (1988) ve Jamshidian (1988) tarafından revize edilmiştir. Ancak bu modellerin, HW (1990) modeli kadar çok tutulmalarını engelleyen en büyük eksiklik, bu modellerdeki anlık faiz oranlarının, ortalama bir değere dönme eğilimi içerisinde olmamalarıdır (Musiela ve Rutkowski, 2005: 359-360) ve (Brigo ve Mercurio, 2006: 72-73).

Hull ve White, modelden elde edilen getiri eğrisiyle piyasadaki mevcut getiri eğrisinin birebir aynı olması amacıyla Vasicek (1977) modelindeki parametreleri, içinde bulunulan zamana göre değişik değerler alabilecek şekilde tanımlamışlardır. Söz konusu iki getiri eğrisinin tam olarak çakışabilmeleri, sonsuz sayıda denklemden

---

[2] Dothan (1978), Richard (1979), Brennan ve Schwartz (1979, 1982), Langetieg (1980), Courtadon (1982), Cox, Ingersoll ve Ross (1985), Longstaff (1989)

oluşan bir sistemin çözümüne bağlıdır. Bu denklem sisteminin genel çözümü ise ancak sistemde sonsuz sayıda parametrenin tanımlanmasıyla mümkündür. Tanımlanan bu sisteme sonsuz sayıda parametre ilave etmenin yollarından bir tanesi, sistemde yer alacak parametreleri zamana bağlı birer deterministik fonksiyon olarak tanımlamaktır.

Hull ve White, 1990 yılında yayınladıkları ilk makalelerinde, anlık faiz oranının dinamiklerini (4.4.1)'deki O–U tipi bir stokastik diferansiyel denklem ile tanımlamışlardır (Hull ve White, 1990: 573-592). Bu denklem Vasicek (1977) modelindeki denklemle benzer özellikler taşımasına karşın; modelde uzun dönemdeki ortalama faiz oranını gösteren $(\theta(t))$, söz konusu ortalama faiz oranına yakınsama şiddetini gösteren $(\alpha(t))$, bu yakınsama sürecinde yaşanan sapmaların büyüklüğünü gösteren $(\sigma(t))$ ve nihayetinde riskin piyasa fiyatını gösteren $(\lambda(r,t))$, zamana bağlı birer deterministik fonksiyon olarak tanımlanmıştır.

(4.4.1) $dr_t = \alpha(t)\left(\theta(t) - r_t\right)dt + \sigma(t)dW_t$

(4.4.1)'deki dinamiklerle tanımlanan bir modelden elde edilen getiri eğrisiyle piyasadaki mevcut getiri eğrisi birebir uyumlu olabilir. Ancak bu modelde, uzun dönemdeki ortalama faiz oranına yakınsama sürecinde yaşanan sapmaların büyüklüğünü gösteren (σ) parametresinin, zamanın bir fonksiyonu $(\sigma(t))$ olarak tanımlanması iki büyük risk içermektedir. Bu risklerden ilki, piyasada belirli bir dönem için gözlenen volatilitelerin tamamının anlamlı ve güvenilir olmayabileceği gerçeğidir. Örneğin; piyasaların likit olmadığı dönemlerde veya spekülatif hareketlerin yoğunluk kazandığı dönemlerde piyasada gözlemlenen volatilite değerleri bilgi verici ve güvenilir değildir. Bu konudaki ikinci risk ise Hull ve White tarafından teşhis edilmiştir. Hull ve White'a göre (4.4.1)'deki dinamiklerle modellenen geleceğe ilişkin anlık faiz oranlarının volatilite yapısı, piyasada gözlemlenen mevcut volatilite yapısıyla benzer karakteristik özelliklere sahip olmamaktadır (Hull ve White, 1995: 97-102). Bu nedenle HW (1990) modelindeki sigma $(\sigma(t))$ parametresi, zamanın bir fonksiyonu olarak tanımlanmak yerine, sabit bir sayı olarak tanımlanmış, dinamikler (4.4.2)'deki şekliyle revize edilerek fiyatlandırmanın doğru olarak yapılabilmesinde önemli bir kıstas olan durağan volatilite yapısı elde edilmiştir (Hull ve White, 1994: 34-37).

(4.4.2) $dr_t = \alpha\left(\theta(t) - r_t\right)dt + \sigma dW_t$

HW (1990) modelinde tahvil fiyatlarının tahmin edilmesinde kullanılacak olan formülün elde edilmesi için izlenmesi gereken süreç, Vasicek (1977) modelindeki süreçle aynıdır. Öncelikle vade yapısı denkleminin elde edilmesi gerekmektedir. (4.1.3) – (4.1.20) arasındaki işlemler referans alınırsa, genel vade yapısı denklemi (4.4.3)'teki gibi olacaktır.

(4.4.3) $\dfrac{\partial P_{r_t,t;T}}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\sigma^2(r_t,t)\dfrac{\partial^2 P_{r_t,t;T}}{\partial r_t^2}) + \left(\alpha(r_t,t) - \lambda(r_t,t)\sigma(r_t,t)\right)\dfrac{\partial P_{r_t,t;T}}{\partial r_t} = r_t P_{r_t,t;T}$

HW (1990) modeline ait vade yapısı denklemi ise, (4.4.2)'deki parametre tercihlerinin dikkate alınmasıyla hesaplanabilir. Bu durumda modele ilişkin vade yapısı denklemi (4.4.4)'teki gibi olacaktır:

(4.4.4) $\dfrac{\partial P_{r_t,t;T}}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\sigma^2\dfrac{\partial^2 P_{r_t,t;T}}{\partial r_t^2} + \alpha\left[\left(\theta(t) - \dfrac{\lambda(r_t,t)\sigma}{\alpha}\right) - r_t\right]\dfrac{\partial P_{r_t,t;T}}{\partial r_t} - r_t P_{r_t,t;T} = 0$

(4.4.4)'teki kısmi diferansiyel denklemin, $P(r_t, T; T) = 1$ sınır koşuluyla çözülmesi sonucunda tahvil fiyatları $\left(P_{r_t,t;T}\right)$ elde edilebilir. HW (1990) modeline ilişkin vade yapısı denkleminin analitik çözümü için *A(T;T)*=0 ve *B(T;T)*=0 sınır değerleriyle,

(4.4.5) $P_{r_t,t;T} = e^{A(t;T) - r_t B(t;T)}$

şeklinde ifade edilebilecek afine çözüm kümesinden yararlanılabilir. Bu durumda,

(4.4.6) $\dfrac{\partial P_{r_t,t;T}}{\partial t} = (\dfrac{\partial A(t;T)}{\partial t} - r_t\dfrac{\partial B(t;T)}{\partial t})e^{A(t;T) - r_t B(t;T)}$

(4.4.7) $\dfrac{\partial P_{r_t,t;T}}{\partial r_t} = -B(t;T)e^{A(t;T) - r_t B(t;T)}$

(4.4.8) $\dfrac{\partial^2 P_{r_t,t;T}}{\partial r_t^2} = B^2(t;T)e^{A(t;T) - r_t B(t;T)}$

olacaktır. (4.4.6) – (4.4.8)'deki kısmi diferansiyeller, (4.4.4)'te yerine koyulur, gerekli sadeleştirmeler ve düzenlemeler yapılırsa (4.4.9) elde edilir.

(4.4.9) $\frac{\partial A(t;T)}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 B^2(t;T)-\alpha(\theta(t)-\frac{\lambda(r_t,t)\sigma}{\alpha})B(t;T)=r_t(\frac{\partial B(t;T)}{\partial t}-\alpha B(t;T)+1)$

Bu eşitlikte *A(t;T)* ve *B(t;T)*, vade parametresinden (T) bağımsız olarak sadece içinde bulunulan zamanın (t) fonksiyonlarıdır. Bu eşitliğin iki tarafının, anlık faiz oranına (r_t) göre türevlerinin alınması sonucunda,

(4.4.10) $\frac{\partial A(t;T)}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 B^2(t;T)-\alpha\left(\theta(t)-\frac{\lambda(r_t,t)\sigma}{\alpha}\right)B(t;T)=0$

olur ve dolayısıyla,

(4.4.11) $\frac{\partial B(t;T)}{\partial t}-\alpha B(t;T)+1=0$

eşitliği elde edilir. (4.4.11) numaralı birinci dereceden adi diferansiyel denklemin *B(T;T)*=0 sınır değeri koşuluyla özel çözümü,

(4.4.12) $B(t;T)=\frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha(T-t)})$

olarak bulunur.

Takip etmede kolaylık yaratması amacıyla $\theta^*(t)=\left(\theta(t)-\frac{\lambda(r_t,t)\sigma}{\alpha}\right)$ kısaltması kullanılırsa, (4.4.10) numaralı diferansiyel denklemin *A(T;T)*=0 sınır değeri koşuluyla çözümü (4.4.13)'te verilmiştir.

(4.4.13) $A(t;T)=\int_t^T\left(\frac{\sigma^2}{2}B(\tau;T)^2-\theta^*(\tau)B(\tau;T)\right)d\tau$

(4.4.13) numaralı eşitliğin kesin çözümü için (α) ve (σ) sabit sayılarının ve zamanın bir fonksiyonu olan $(\theta^*(t))$ parametresinin tahmin edilmesi gerekmektedir. $(\theta^*(t))$ parametresinin tahmini bir diğer ifadeyle; model kalibrasyonunun tam olarak gerçekleştirilmesi aşağıda tanımlanan algoritmanın izlenmesiyle ve anlık faiz oranlarına ilişkin zaman serilerinin kullanılmasıyla mümkün olabilir. Kalibrasyonun tam olarak sağlanabilmesi için, içinde bulunulan zaman $(t=0)$ itibariyle HW (1990) modelinden elde edilen teorik fiyatlarla $(P^{HW}(r_0,0;T))$ piyasada gözlemlenen fiyatların $(P^{Mrkt}(r_0,0;T))$ birbirlerine eşit olması gerekmektedir. Burada gözden kaçırılmaması gereken nokta, içinde bulunulan zaman $\left(t=0\right)$ itibariyle anlık faiz oranının, piyasada gözlemlenebilen bir deterministik sabit sayı olmasıdır $\left(r_t = r_0, \forall T > 0\right)$. Buradan hareketle,

(4.4.14) $P^{HW}(r_0,0;T) = P^{Mrkt}(r_0,0;T)$

(4.4.15) $P^{HW}(r_0,0;T) = e^{A(0;T)-r_0B(0;T)}$

(4.4.16) $\ln P^{HW}(r_0,0;T) = A(0;T) - r_0B(0;T)$

(4.4.17) $A(0;T) = \ln P^{HW}(r_0,0;T) + r_0B(0;T)$

ilişkisi elde edilir. (4.4.13) ve (4.4.17) bir arada değerlendirildiğinde;

(4.4.18) $$-\int_0^T \theta^*(\tau)B(\tau;T)d\tau = \ln P^{HW}(r_0,0;T) + r_0B(0;T) - \frac{\sigma^2}{2}\int_0^T B(\tau;T)^2 d\tau$$

eşitliği elde edilir. (4.4.18)'de ($B(t;T) = \dfrac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha(T-t)})$) yerine koyulur ve eşitliğin sağ tarafındaki integral hesabı yapılırsa;

(4.4.19)

$$-\int_0^T \theta^*(\tau)B(\tau;T)d\tau = \ln P^{HW}(r_0,0;T) + \frac{r_0}{\alpha}(1-e^{-\alpha T}) - \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}\left(T + \frac{2}{\alpha}e^{-\alpha T} - \frac{1}{2\alpha}e^{-2\alpha T} - \frac{3}{2\alpha}\right)$$

sonucu elde edilir. (4.4.19) numaralı denklemin kesin çözümü için $\left(\theta^*(t)\right)$ parametresinin bulunması gerekmektedir. $\left(\theta^*(t)\right)$ parametresinin çözümü ise, (4.4.19) numaralı denklemin vadeye $\left(T\right)$ göre iki kez türevinin alınmasıyla gerçekleştirilebilir. Birinci adımda,

(4.4.20) $$\frac{\partial}{\partial T}\int_0^T \theta^*(\tau)B(\tau;T)d\tau = \theta^*(T)B(T;T) + \int_0^T \theta^*(\tau)\frac{B(\tau;T)}{\partial T}$$

(4.4.21) $$\frac{\partial}{\partial T}\int_0^T \theta^*(\tau)B(\tau;T)d\tau = \int_0^T \theta^*(\tau)e^{-\alpha(T-\tau)}d\tau$$

(4.4.22) $$\frac{\partial}{\partial T}\int_0^T \theta^*(\tau)B(\tau;T)d\tau = e^{-\alpha T}\int_0^T \theta^*(\tau)e^{\alpha\tau}d\tau$$

olarak bulunur. İkinci adımda ise,

$$\textbf{(4.4.23)}\ \frac{\partial^2}{\partial T^2}\int_0^T \theta^*(\tau)B(\tau;T)d\tau = \theta^*(T) - \alpha e^{-\alpha T}\int_0^T \theta^*(\tau)e^{\alpha\tau}d\tau$$

elde edilir. (4.4.23) numaralı eşitlik düzenlenirse,

$$\textbf{(4.4.24)}\ \theta^*(T) = \frac{\partial^2}{\partial T^2}\int_0^T \theta^*(\tau)B(\tau;T)d\tau + \alpha e^{-\alpha T}\int_0^T \theta^*(\tau)e^{\alpha\tau}d\tau$$

elde edilir. (4.4.22) ve (4.4.24) eşitliği kullanılırsa,

$$\textbf{(4.4.25)}\ \theta^*(T) = \frac{\partial^2}{\partial T^2}\int_0^T \theta^*(\tau)B(\tau;T)d\tau + \alpha\frac{\partial}{\partial T}\int_0^T \theta^*(\tau)B(\tau,T)d\tau$$

olarak bulunur. (4.4.19) numaralı eşitliğin sağ tarafı, (4.4.25)'te yerine koyulur ve hesaplamalar yapılırsa $\left(\theta^*(t)\right)$ parametresinin nihai çözümü,

$$\textbf{(4.4.26)}\ \theta^*(T) = -\frac{\partial^2}{\partial T^2}\ln P_{r_0,0;T} - \alpha\frac{\partial}{\partial T}\ln P_{r_0,0;T} + \frac{\sigma}{2\alpha}\left(1-e^{-2\alpha T}\right)$$

olacaktır. Elde edilen bu sonucun (4.4.13)'te yerine koyulmasıyla birlikte $A(t;T)$ elde edilecektir. Elde edilen $A(t;T)$, (4.4.12)'deki $B(t;T)$ ve $P_{r_0,t;T} = e^{A(t;T)-r_0B(t;T)}$ eşitlikleriyle beraber değerlendirildiğinde Hull – White (1990) modeli çerçevesinde nominal değeri 1 TL. ve vade tarihi (T) olan bir tahvilin, bugünkü fiyatı ($P_{r_0,t;T}$),

$$\textbf{(4.4.27)}\ P_{r_t,t;T} = \frac{P_{t_0,T}}{P_{t_0,t}}e^{\left(-\frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha(T-t)})(r_t+\frac{\partial}{\partial t}\ln P_{t_0,t})-\frac{\sigma}{4\alpha 3}(e^{-\alpha(T-t_0)}-e^{-\alpha(t-t_0)})(e^{2\alpha(t-t_0)}-1)\right)}$$

olacaktır (t_0 : model kalibrasyonunun gerçekleştirildiği zaman).

HW (1990) modeli kullanılarak elde edilen anlık faiz oranı dinamiklerinin normal dağılıma sahip olması, tahvil ve bunlara dayalı türev ürünlerin fiyatlandırılmasında analitik formüllerin ve uygulanabilir etkili sayısal yöntemlerin elde edilmesine olanak sağlamaktadır. Ancak modelin normal dağılıma sahip olması nedeniyle model tarafından yaratılan anlık faiz oranlarının negatif seviyelere düşme olasılığının pozitif olması ve anlık faiz oranı dinamiklerinin modellenmesi için tek bir risk faktörünün kullanılması modelin fiyatlandırma amacıyla kullanım çekiciliğini azaltmaktadır. Negatif anlık faiz oranları, normal dağılım varyanslarının modifiye edilmesiyle

(Genişletilmiş CIR Modeli) veya lognormal dağılıma sahip dinamiklerin[3] kullanılmasıyla ortadan kaldırılabilir (Hull ve White, 1990: 573-592; Black vd, 1990: 33-39).

HW (1990) modelinin günümüzde dahi en popüler modeller arasında yer almasının, modelden elde edilen getiri eğrisiyle piyasadaki mevcut getiri eğrisinin birebir aynı olması dışında iki temel nedeni daha vardır. İlk neden, modelin risk yönetimi amacıyla kullanımı sonucunda başarılı sonuçlar alınması; ikinci neden ise HW (1990) modelinde kullanılan anlık faiz oranı dinamiklerinin çeşitli modifikasyonlara imkân tanıması, bir diğer ifadeyle modelin başka modeller[4] geliştirilmesine sağlam bir temel oluşturuyor olmasıdır (Bingham ve Kiesel, 2004: 340-342; (Brigo ve Mercurio, 2006: 92-96).

4.5. Black – Derman – Toy (1990) Modeli

Fischer Black, Emanuel Derman ve Bill Toy, 1990 yılında yayınladıkları makalelerinde faiz oranlarını modellemek ve faiz oranlarına dayalı türev ürünleri fiyatlandırmak için kesikli zaman yapısı içerisinde binom ağaçlarından yararlanmışlardır. Black – Derman – Toy (BDT) (1990) olarak adlandırılan modelde faiz oranlarının ve faiz oranlarıyla ilişkili varlık fiyatlarının tahmin edilmesinde kullanılan tek değişken, kısa vadeli faiz oranıdır. BDT (1990) modelinde, piyasadaki mevcut vade yapısı ve bu vade yapısına ilişkin volatiliteler, geleceğe ilişkin olası kısa vadeli faiz oranlarından oluşan bir binom ağacının oluşturulmasında kullanılmıştır. Modelde tek değişken olarak kullanılan kısa vadeli faiz oranı, bir yıllık faiz oranı olarak tanımlanmıştır. Modelde farklı ve uzun vadelere ait faiz oranlarıyla bunlara ilişkin volatiliteler girdi olarak kullanılmış, model kalibrasyonu içinse söz konusu faiz oranlarına ve volatilitelere ait getiri ve volatilite eğrilerinden yararlanılmıştır. Modeldeki girdiler, getiri ve volatilite eğrileri değiştiğinde, geleceğe ilişkin kısa vadeli faiz oranlarına ait ortalamalar ve volatiliteler de değişmektedir. Geleceğe ilişkin kısa vadeli faiz oranlarının volatilitelerindeki değişim, faiz oranlarının ortalama bir değere dönme özelliğini de etkilemektedir.

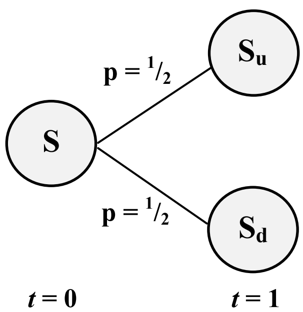
---

[3] Dothan (1978); Black, Derman ve Toy (1990); Black ve Karasinski (1991)

[4] Scott (1995); Dybvig (1997); Brigo ve Mercurio (1998 ve 2001a); Mercurio ve Moraleda (2000)

BDT (1990) modelinin varsayımları; farklı vadelere ilişkin kupon ödemesiz sabit getirili menkul kıymet (bono ve tahviller) getirilerinde meydana gelen değişimler arasındaki korelasyonun mükemmel olması, bir döneme ilişkin beklenen getiri oranının bütün menkul kıymetler için aynı olması, piyasada vergi ve işlem maliyetlerinin olmaması ve son olarak kısa vadeli faiz oranlarının lognormal dağılıma sahip olması olarak sıralanabilir (Black vd., 1990: 33-39). Kısa vadeli faiz oranlarının lognormal dağılıma sahip olduklarının varsayılması model kalibrasyonunda bir takım kolaylıklar getirmektedir. Öncelikle bu varsayım sayesinde faiz oranlarının negatif değerler alma ihtimali ortadan kaldırılmakta ve modelde bir girdi olarak kullanılan volatiliteler yüzdeyle ifade edilebilmektedir (Rebonato, 2000: 259).

Black, Derman ve Toy (BDT), binom ağaç yapısını kullandıkları modellerinde her düğümdeki kısa vadeli faiz oranını, model tarafından yaratılan vade yapısı ile piyasada gözlemlenen vade yapısını eşleştirdiklerinde elde etmektedirler. BDT, binom ağaç yapısıyla oluşturdukları modeli, piyasada gözlemlenen risksiz faiz oranını temel alarak kalibre etmelerinden dolayı modele dayanılarak yapılan fiyatlamalar, risksiz faiz oranından arındırılmış, risk yansız fiyatlamalar olmaktadır. Bununla birlikte modeldeki binom ağaç yapısında yukarı ve aşağı yönlü hareketlerin olasılıkları da birbirlerine eşittir. BDT (1990) modelinde, binom ağaç yapısındaki bir düğümde yer alan değer, bir sonraki zaman dilimine ait düğümde yer alan beklenen değerin iskonto edilmiş halidir. Bu iki açıklamadan hareketle, faiz oranına duyarlı bir menkul kıymetin bugünkü değeri (S) olarak kabul edilirse, bu menkul kıymetin bir yıl sonraki değeri; ($\frac{1}{2}$) olasılıkla artarak (S_u) veya ($\frac{1}{2}$) olasılıkla azalarak $\left(S_d\right)$ olabilir ve tek zaman adımlı binom ağaç yapısıyla Şekil 9'daki gibi ifade edilebilir.



Şekil 9. Tek Zaman Adımlı Binom Ağaç Yapısı

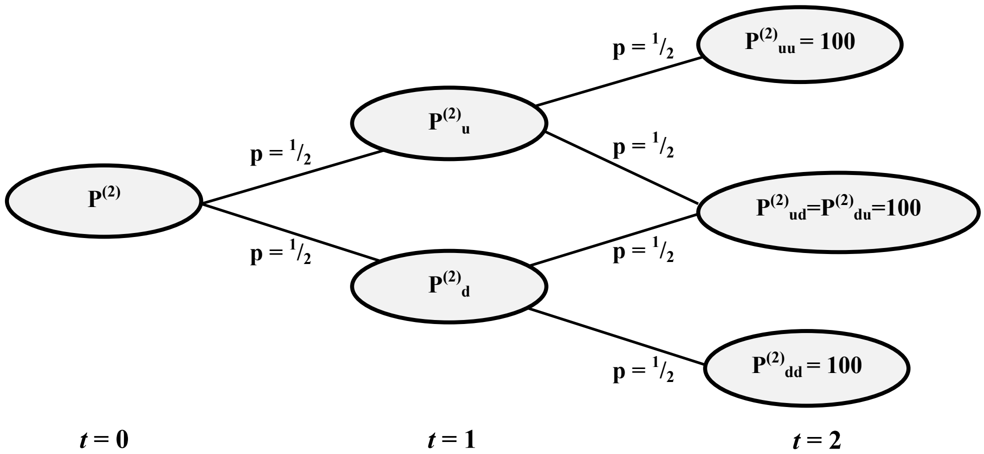
Bir dönem sonra, ilgili menkul kıymetin beklenen değeri $\left(\frac{1}{2}\left(S_u + S_d\right)\right)$; beklenen getiri oranı $\left(\frac{1}{2}\left(S_u + S_d\right)/S\right)$ olacaktır. Risksiz faiz oranın (r) olduğu ve bu risksiz faiz oranından borç verilebildiği kabul edilirse, BDT (1990) modelinin varsayımlarından birisi olarak belirtilen bir döneme ilişkin beklenen getiri oranının bütün menkul kıymetler için aynı olması nedeniyle de menkul kıymetin bugünkü değeri (S) aşağıdaki gibi formüle edilebilir.

(4.5.1) $$S = \frac{\frac{1}{2}S_u + \frac{1}{2}S_d}{1+r}$$

Yukarıda açıklanan yöntem ile kupon ödemesiz, herhangi bir vadeye ilişkin sabit getirili menkul kıymetin değeri, binom ağaç yapısındaki faiz oranları kullanılarak hesaplanabilir. Öncelikle vade tarihindeki nominal değer ve vade bitiminden bir dönem önceki düğümde bulunan ve söz konusu dönemdeki (vade tarihinden bir önceki düğüm ile vade bitimi arasındaki süre) kısa vadeli faiz oranını belirten oran kullanılarak menkul kıymetin vade bitiminden bir önceki döneme ilişkin değeri hesaplanır. Sonrasında ise bu yöntem tekrarlanarak menkul kıymetin istenilen düğümdeki değerini hesaplamak mümkündür. Bu süreçte etkin bir değerleme için her düğümdeki faiz oranlarının doğru olarak seçilmesi gerekmektedir. Teorik faiz oranlarının seçimi piyasadaki mevcut vade yapısına göre kalibre edilerek gerçekleştirilebilir. Genellikle piyasalarda getiri eğrisi hakkında bilgi verilirken kupon ödemesiz menkul kıymetlerin fiyatları yerine yıllık bazda getiri oranları kullanılmaktadır. Nominal değeri 100 TL. olan menkul kıymetin piyasa fiyatı (P) kullanılarak, (N) döneme ilişkin getiri oranı (y), (4.5.2) numaralı denklem yardımıyla elde edilebilir.

(4.5.2) $$P = \frac{100}{\left(1+y\right)^N}$$

Kalibrasyon işlemi her düğümde, önündeki gelecek döneme ait getiri oranının (kısa vadeli faiz oranının) bulunmasını içermektedir. Ancak burada dikkat edilmesi gereken nokta, her döneme ilişkin getiriler elde edildikten sonra oluşan vade yapısının, piyasadaki mevcut vade yapısını birebir kopyalamasıdır. BDT'nin bu kalibrasyon sürecinde kullandıkları prosedür aşağıda açıklanmaktadır (Black vd., 1990: 33-39). Farklı vadelere ($t = i, i = 1,2,...,N$) sahip kupon ödemesiz sabit getirili menkul kıymetlerin getiri oranı (y_i), ilgili getiri oranına ait volatilite değeri (σ_i) olarak tanımlanırsa piyasadaki mevcut ($t=0$) faiz oranı ve volatilite vade yapısı $\{(y_i,\sigma_i): i=1,2,...,N\}$ olarak belirtilebilir. Kolaylık sağlaması amacıyla Şekil 10'da gösterilen iki zaman adımlı binom ağaç yapısında iki düğüm arasındaki zaman aralığının bir yıl olduğu kabul edilmektedir.



Şekil 10. İki Zaman Adımlı Binom Ağaç Yapısı, Fiyat

($t=0$) için kısa vadeli faiz oranı (r_0), piyasada gözlemlenen bir yıllık getiri oranı (y_1) olarak kabul edilebilir ($r_0 = y_1$) ve iskonto için kullanılabilir. ($t=1$) zamanı için kısa vadeli faiz oranı (r_1), piyasada gözlemlenen iki yıllık getiri oranından (y_2) ve iki yıllık getiri oranına ait volatiliteden yararlanılarak hesaplanabilir. Nominal değeri 100 TL. olan kupon ödemesiz iki yıl vadeli bir tahvilin bugünkü değeri ($P_0^{(2)} = P^{(2)}$), (4.5.3) numaralı denklem yardımıyla hesaplanabilir.

(4.5.3) $P^{(2)} = \dfrac{100}{1+y_2}$

($t=1$) zamanında tahvilin, ($\frac{1}{2}$) olasılıkla kısa vadeli faiz oranında gerçekleşebilecek artış sonunda alacağı ($P_u^{(2)}$) veya ($\frac{1}{2}$) olasılıkla kısa vadeli faiz oranında gerçekleşebilecek azalış sonunda alacağı ($P_d^{(2)}$) değerleri sırasıyla (4.5.4) ve (4.5.5) numaralı denklemlerde belirtilmiştir. Burada da bir önceki adıma benzer şekilde, tahvilin ($t=1$) zamanındaki değerinin bulunması için modeldeki olası kısa vadeli faiz oranları (r_u) ve (r_d) kullanılarak tahvilin vade sonundaki değeri iskonto edilmektedir.

(4.5.4) $P_u^{(2)} = \dfrac{100}{1+r_u}$

(4.5.5) $P_d^{(2)} = \dfrac{100}{1+r_d}$

Son aşamada, nominal değeri 100 TL. olan iki yıl vadeli tahvilin bugünkü değeri $\left(P^{(2)}\right)$, vade sonundaki ($t=2$) değerin (nominal değerin) bir önceki döneme iskonto edilmesiyle hesaplanan ($t=1$) değerinin, bugüne ($t=0$) iskonto edilmesi sonucunda (4.5.6) numaralı denklemdeki gibi hesaplanabilir:

(4.5.6) $P^{(2)} = \dfrac{\frac{1}{2}\left(P_u^{(2)} + P_d^{(2)}\right)}{1+r_0}$

BDT, tam kalibrasyonun sağlanması için modeldeki volatilite yapıları ile piyasadaki volatilite yapılarını da eşleştirmektedirler. BDT, modeldeki iki yıllık getiri oranına ilişkin volatiliteyi (σ_2), ($t=1$) zamanındaki olası bir yıllık getiri oranlarının (r_u, r_d), birbirlerine olan oranlarının doğal logaritması şeklinde tanımlamış ve iki yıllık getiri oranına ilişkin volatiliteyi, (4.5.7)'deki gibi hesaplamıştır[5] (Black vd., 1990: 36).

(4.5.7) $\sigma_2 = \dfrac{\ln(r_u) - \ln(r_d)}{2}$

---

[5] (X) her dönem için $(t=1,2,...)$ iki farklı değer (x_1, x_2) alabilen bir rassal sayı olarak kabul edilsin. Her iki değerin gerçekleşme olasılıkları birbirlerine eşit $(1/2)$ ve genellemede herhangi bir kayıp yaratmayacak şekilde iki değer arasındaki kısıt $(x_1 \geq x_2)$ olarak kabul edilsin. Bu durumda (X) rassal değişkenine ait volatilite aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\text{var }(X) = \text{E }(X^2) - \text{E}^2(X)$$

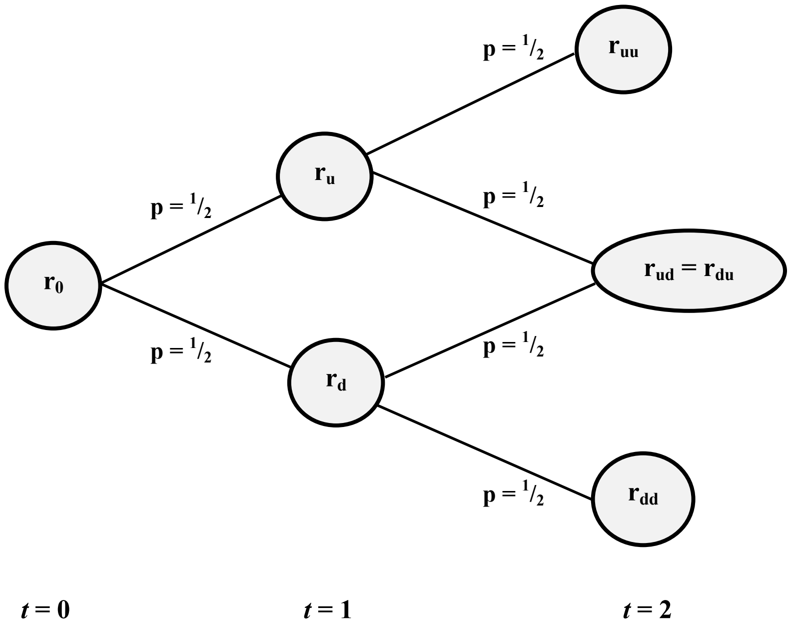
$$\text{var }(X) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 - \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2$$

$$\text{var }(X) = \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2$$

$$std\ (X) = \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)$$

$(t=1)$ zamanı için olası kısa vadeli faiz oranlarının (r_u, r_d) hesaplanması için (4.5.4), (4.5.5), (4.5.6) ve (4.5.7) numaralı denklemlerin eş çözümleri gerekmektedir.

$(t=1)$ zamanı için olası kısa vadeli faiz oranlarının bulunmasından sonra $(t=2)$ zamanı için olası kısa vadeli faiz oranlarının hesaplanabilmesi için $(t=0)$ zamanında piyasada gözlemlenen 3 yıllık getiri oranının ve buna ilişkin volatilitenin kullanılması gerekmektedir. Şekilden de görüleceği gibi $(t=2)$ zamanı için üç tane olası kısa vade faiz oranı bulunmaktadır.



Şekil 11. İki Zaman Adımlı Binom Ağaç Yapısı, Faiz Oranı

$(t=2)$ zamanı için üç tane olası kısa vade faiz oranı $(r_{uu}, r_{ud}=r_{du}, r_{dd})$ bulunmasına karşın sadece iki adet bilinen değer vardır (y_3: Üç yıllık getiri oranı ve σ_3: Üç yıllık getiri oranına ilişkin volatilite). Bu durumda kesin çözüme ulaşılmasının mümkün olmadığı düşünülse de dikkat edilmesi gereken iki nokta bulunmaktadır. Birincisi, model birleşen ağaç yapısına sahiptir. İkinci nokta ise modelde lognormal dağılıma sahip kısa vadeli faiz oranlarının volatilite fonksiyonlarının sadece zamana bağlı olduklarının varsayılmasıdır. Bu açıklamalar ve modeldeki volatilite fonksiyonu tercihi sonucunda (4.5.8) numaralı eşitlik aşağıdaki gibi yazılabilir:

(4.5.8) $\sigma_3 = \dfrac{\ln(r_{uu}) - \ln(r_{ud})}{2} = \dfrac{\ln(r_{ud}) - \ln(r_{dd})}{2}$

(4.5.8) numaralı eşitlikten hareketle ve (4.5.9 – 4.5.11) numaralı eşitlikler arasında gösterildiği gibi $(r_{ud} = r_{du})$ değişkeni, (r_{uu}) ve (r_{dd}) değişkenleri cinsinden yazılabilecek, iki adet bilinmeyene karşın iki adet bilinen değer elde edilecek ve sistemin kesin çözümü elde edilecektir.

(4.5.9) $$\frac{\ln(r_{uu}) - \ln(r_{ud})}{2} = \frac{\ln(r_{ud}) - \ln(r_{dd})}{2}$$

(4.5.10) $$\frac{r_{uu}}{r_{ud}} = \frac{r_{ud}}{r_{dd}}$$

(4.5.11) $$(r_{ud})^2 = r_{uu} r_{dd}$$

BDT, yukarıda açıklanan binom ağaç yapısını 30 yıl vadeye sahip devlet tahvillerinden hareketle, 60 farklı zaman dilimi kullanarak geliştirmiş ve bu modeli gerek kupon ödemesiz gerekse kupon ödemeli menkul kıymetler üzerine yazılmış Amerikan ve Avrupa tipi opsiyonların fiyatlandırılmasında ve risk yönetiminde başarılı bir şekilde kullanmışlardır. BDT (1990) modelinden elde edilen volatilite yapısı ile piyasada gözlemlenen volatilite yapısının tutarlı olması, lognormal dağılım nedeniyle faiz oranının negatif seviyeye düşmemesi ve kalibrasyonun diğer dağılımlara kıyasla daha kolay olması modelin kuvvetli yönleri olarak değerlendirilirken; modelde tek faktörün yer alması nedeniyle elde edilen vade yapısında salınım hareketinin mümkün olmaması ve faiz oranlarının volatilite yapısının sadece zamanın bir fonksiyonu olarak tanımlanması modelin zayıf yönleri olarak sayılabilir.

5. Heath – Jarrow – Morton (1992) Forward Oranı Yaklaşımı

Buraya kadar incelenen tek faktörlü kısa vadeli faiz oranı modellerinde açıklayıcı değişken olarak sadece anlık faiz oranı kullanılmıştır. İncelenen bu tek faktörlü, kısa vadeli faiz oranı modellerinin ortak güçlü yönleri;

- Anlık faiz oranına ait dinamiklerin stokastik diferansiyel denklemlerin çözümü olarak tanımlanması nedeniyle Markov teorisinden faydalanılmasının ve kısmi diferansiyel denklemlerle çalışılmasının mümkün olması,
- Bono ve tahvil gibi sabit getirili menkul kıymetlerin ve bu menkul kıymetler üzerine yazılmış türev ürünlerin fiyatlandırılmasında kullanılabilecek analitik formüllere ulaşılabilmesi olarak sayılabilir.

Diğer taraftan, buraya kadar açıklanan modellerin ortak zayıf yönleri ise;

- Bütün para piyasasının tek bir değişken tarafından şekillendirilmesinin gerçekçi bir varsayım olmayışı,
- Forward oranlarına ilişkin gerçekçi bir volatilite yapısının elde edilebilmesi için analitik açıdan baş edilmesi çok zor olabilecek karmaşık kısa vadeli faiz oranı modellerinin yaratılma gerekliliği ve
- Tek faktörlü kısa vadeli faiz oranı modellerindeki varsayımların serbestleştirilerek daha gerçekçi modeller kullanılması durumunda işlem karmaşıklığının ve yükünün çok artmasıdır.

Yukarıda belirtilen zayıf yönler nedeniyle farklı araştırmalarda iki değişkenli veya çok değişkenli alternatif modeller gündeme gelmiştir. Örneğin; kısa vadeli faiz oranıyla birlikte uzun vadeli faiz oranlarını da ikinci bir açıklayıcı değişken olarak kullanan modeller oluşturulmuştur. Hatta kısa vadeli faiz oranlarıyla uzun vadeli faiz oranları arasındaki farklı vadelere ilişkin faiz oranları da modellere üçüncü bir açıklayıcı değişken olarak ilave edilmiştir. Bu alternatifler, modelleri daha gerçekçi bir zemine taşısalar da söz konusu modellerde açıklayıcı değişkenler olarak kullanılan farklı vadelere ilişkin faiz oranları sınırlı sayıdadır. David Heath, Robert A. Jarrow ve Andrew Morton tarafından önerilen yaklaşım, yukarıda açıklanan spektrumun (vade çeşitliliği) son noktasıdır. Çünkü Heath, Jarrow ve Morton, sonsuz sayıda noktadan (vadeden) oluşan forward eğrisini açıklayıcı değişken olarak kullanmışlardır (Björk, 2004: 340) ve (Jarrow, 2002: 157-170).

Buraya kadar açıklanan kısa vadeli faiz oranı modelleri, Heath – Jarrow – Morton (HJM) yaklaşımının özel durumları olarak tanımlanabilir. Bu durumda, kronolojik açıdan değerlendirildiğinde bir terslik söz konusudur. Çünkü, öncelikle 1977 yılında Vasicek'le başlayan kısa vadeli faiz oranı modelleri, sonrasında 1986 yılında tek faktörlü, sabit volatilite ve kesik zaman yapılı özelliklere sahip basit bir HJM modeli olarak nitelendirilebilecek Ho – Lee (1986) modeli ve nihayetinde genelleştirilmiş çok faktörlü HJM modeli 1992 yılında gündeme gelmiştir.

HJM yaklaşımında forward oranları, stokastik diferansiyel denklemler aracılığıyla tanımlanmış; bono, tahvil ve bunlar üzerine yazılmış türev ürünlerin fiyatlandırılmasında aşağıdaki prosedür izlenmiştir (Heath vd., 1992: 77-105; Baxter ve Rennie, 2006: 158-164).

$\left(T > t\right)$ koşulu ile $\left(t\right)$ zamanında, $\left(T\right)$ tarihinden itibaren $\left(dt\right)$ süresince, bir diğer ifadeyle; $\left[T, T + dt\right]$ döneminde geçerli olan borç alma – verme oranı $\left(f_{t,T}\right)$ olarak ifade edilirse, *k* faktörlü HJM modelinde forward oran dinamikleri (5.1)'deki gibi tanımlanabilir (aşağıdaki stokastik denkleme ait dinamikler, takvim zamanına $\left(t\right)$ göre oluşmakta, vade tarihi $\left(T\right)$ denklemde bir parametre olarak yer almaktadır).

(5.1) $df_{t,T} = \alpha_{t,T} dt + \underline{\sigma}_{t,T} \underline{dW}_t$

$$\underline{\sigma}_{t,T} = (\sigma^1_{t,T}, \sigma^2_{t,T}, \sigma^3_{t,T}, \ldots, \sigma^k_{t,T})_{1xk}$$

$$\underline{W}_t = (W^1_t, W^2_t, W^3_t, \ldots, W^k_t)_{1xk}$$

Yukarıdaki stokastik diferansiyel denklemdeki $\left(\alpha_{t,T}\right)$ ve $\left(\underline{\sigma}_{t,T}\right)$ parametrelerinin (5.2) ve (5.3)'teki teknik sınırlılık koşullarına sahip süreçler oldukları ve $\left(W^i_s, 1 \le j \le k, s \le t\right)$ değişkeninin Brownian hareketi niteliklerine sahip, $\left(\mathbb{F}^{\underline{W}}_t\right)$ filtrasyonuna göre uyarlanmış olduğu varsayılmaktadır. Bu varsayımlar sayesinde hesaplamada kullanılacak olan stokastik integral iyi tanımlanmış olacak ve Ito Teoremi kullanılabilecektir.

(5.2) $$\mathrm{E}\left(\int_0^T \left|\alpha_{t,T}\right| dt\right) < \infty$$

(5.3) $$\int_0^T \mathrm{E}\left(\left|\underline{\sigma}_{t,T}\right|^2\right) dt < \infty$$

HJM yaklaşımının temel noktası, tahvil ve bono piyasasında arbitraj imkânının oluşmaması için forward oranlarının deterministik kısmının $\left(\alpha_{t,T}\right)$, bir diğer ifadeyle; eğilim kısmının serbestçe hareket edemeyeceği ve volatiliteler $\left(\underline{\sigma}_{t,T}\right)$ ile sağlaması gereken sayısal bir ilişkinin gerekli olduğunu belirtmesidir. Bu ilişki ilerleyen aşamalarda detaylandırılacaktır.

Faiz oranı modellemesinde forward oranlarıyla çalışmanın bir diğer önemli avantajı ise; nominal değeri 1 TL. olan, kupon ödemesiz, (T) vade tarihli bir tahvilin (t) zamanındaki fiyatının direkt olarak (5.4)'teki gibi yazılabilmesidir $\left(P_{T;T} = 1\right)$.

(5.4) $$P_{t;T} = e^{-\int_t^T f_{t,U} dU}$$

(5.4)'ten hareketle menkul kıymet fiyatları ve forward oranları arasında (5.6) numaralı eşitlikteki ilişkiyi kurmak mümkündür.

(5.5) $$\ln P_{t;T} = -\int_t^T f_{t,U} dU$$

(5.6) $$f_{t,T} = -\frac{\partial \ln P_{t;T}}{\partial T}$$

Burada $(t = 0)$ olarak seçilirse; $\left(f_{0,T}\right)$, $[T, T + dt]$ dönemi için geçerli, piyasada gözlemlenebilen, güncel anlık forward oranı olacaktır. Benzer şekilde; vade tarihi $(T = t)$ olarak seçilirse $\left(f_{t,t}\right)$, (t) zamanında $[t, t + dt]$ dönemi için geçerli ve piyasada gözlemlenebilen güncel anlık forward oranı bir diğer ifadeyle (t) zamanındaki anlık faiz oranı (r_t) olacaktır.

$\left[T, T+dt\right]$ dönemi için geçerli, (t) zamanındaki anlık forward oranını $\left(f_{t,T}\right)$ ve $\left[t, t+dt\right]$ dönemi için geçerli, (t) zamanındaki anlık forward oranını $\left(f_{t,t}\right)$ bulmak için (5.1)'deki forward oranı dinamikleri kullanılır.

(5.7) $$\int_0^t \left(d_s f_{s,T}\right) = \int_0^t \left(\alpha_{s,T} ds + \underline{\sigma}_{s,T} \underline{dW}_s\right)$$

(5.8) $$f_{t,T} = f_{0,T} + \int_0^t \left(\alpha_{s,T} ds\right) + \int_0^t \left(\underline{\sigma}_{s,T} \underline{dW}_s\right)$$

(5.9) $$f_{t,t} = r_t = f_{0,t} + \int_0^t \left(\alpha_{s,t} ds\right) + \int_0^t \left(\underline{\sigma}_{s,t} \underline{dW}_s\right)$$

$\left[t, t+dt\right]$ dönemi için geçerli, (t) zamanındaki anlık forward oranının $\left(f_{t,t}\right)$ bir diğer ifadeyle; anlık faiz oranının $\left(r_t\right)$, takvim zamanına (t) göre türevinin alınmasıyla birlikte anlık faiz oranı için (5.7) numaralı denklem elde edilir.

(5.10) $$dr_t = \left(\frac{\partial f_{0,t}}{\partial t} + \alpha_{t,t} + \int_0^t \frac{\partial \alpha_{s,t}}{\partial t} ds\right) dt + \underline{\sigma}_{t,t} \underline{dW}_t + \int_0^t \frac{\partial \underline{\sigma}_{s,t}}{\partial t} \underline{dW}_s$$

Bono ve tahvil fiyatlarını hesaplamak için kullanılan (5.4) numaralı denklem, bono ve tahvil fiyatlarındaki değişimi yansıtan (5.11) numaralı stokastik diferansiyel denklemini sağlamaktadır (Musiela ve Rutkowski, 2005: 383-394).

(5.11) $$d_t P_{t,T} = P_{t,T}\left(\left(r_t - \int_t^T \alpha_{t,U} dU + \frac{1}{2}\left|\int_t^T \underline{\sigma}_{t,U} dU\right|^2\right) dt - \int_t^T \underline{\sigma}_{t,U} dU \cdot \underline{dW}_t\right)$$

Yukarıda yapılan önermenin ispatı ise aşağıda (5.12) – (5.29) arasında verilmektedir.

(5.12) $$P_{t;T} = \mathrm{e}^{(I_t)}, I_t : -\int_t^T f_{t,U} dU$$

olarak kısaltılır ve (5.11) kullanılırsa,

(5.13) $$I_t = -\int_t^T f_{0,U} dU - \int_t^T \left(\int_0^t \left(\alpha_{s,U} ds\right)\right) dU - \int_t^T \left(\int_0^t \left(\underline{\sigma}_{s,U} \underline{dW}_s\right)\right) dU$$

elde edilir. Fubini Teoremi[6] kullanılarak (5.13)'teki integrallerin yerlerinin karşılıklı olarak değiştirilmesi ile (5.14) elde edilir[7].

(5.14) $$I_t = -\int_t^T f_{0,U}dU - \int_0^t \left(\int_t^T \left(\alpha_{s,U} dU \right) \right) ds - \int_0^t \left(\int_t^T \left(\underline{\sigma}_{s,U} dU \right) \right) \underline{dW}_s$$

(5.14) numaralı eşitlik, sınır değerlerinin değiştirilmesi sonucunda (5.15)'teki gibi yazılır.

(5.15) $$\begin{aligned} I_t = &-\int_0^T f_{0,U}dU - \int_0^t \left(\int_s^T \left(\alpha_{s,U} dU \right) \right) ds - \int_0^t \left(\int_s^T \left(\underline{\sigma}_{s,U} dU \right) \right) \underline{dW}_s + \\ &\int_0^t f_{0,U}dU - \int_0^t \left(\int_t^s \left(\alpha_{s,U} dU \right) \right) ds - \int_0^t \left(\int_t^s \left(\underline{\sigma}_{s,U} dU \right) \right) \underline{dW}_s \end{aligned}$$

(5.15) incelendiğinde ikinci satırda yer alan kısmın aslında ($\int_0^t r_s ds$)'e eşit olduğu gösterilir. Öncelikle parantez içindeki integrallerin üst ve alt sınırları yer değiştirilirse (5.16); sonrasında (5.16)'daki integrallerin yerleri karşılıklı olarak tekrar değiştirilirse (5.17) ve (5.18) elde edilir.

(5.16) $$\begin{aligned} &\int_0^t f_{0,U}dU - \int_0^t \left(\int_t^s \left(\alpha_{s,U} dU \right) \right) ds - \int_0^t \left(\int_t^s \left(\underline{\sigma}_{s,U} dU \right) \right) \underline{dW}_s = \\ &\int_0^t f_{0,U}dU + \int_0^t \left(\int_s^t \left(\alpha_{s,U} dU \right) \right) ds + \int_0^t \left(\int_s^t \left(\underline{\sigma}_{s,U} dU \right) \right) \underline{dW}_s \end{aligned}$$

(5.17) $$\begin{aligned} &\int_0^t f_{0,U}dU + \int_0^t \left(\int_s^t \left(\alpha_{s,U} dU \right) \right) ds + \int_0^t \left(\int_s^t \left(\underline{\sigma}_{s,U} dU \right) \right) \underline{dW}_s = \\ &\int_0^t f_{0,U}dU + \int_0^t \left(\int_0^U \left(\alpha_{s,U} ds \right) \right) dU + \int_0^t \left(\int_0^U \left(\underline{\sigma}_{s,U} \underline{dW}_s \right) \right) dU \end{aligned}$$

---

[6] Eğer fonksiyon *f*, $R = \{ (x,y) \mid a \le x \le b, c \le y \le d \}$ dikdörtgeninde sürekli ise $\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy$ olur. Daha genel olarak *f*, *R*'de sınırlı ve yalnızca sonlu sayıda düzgün eğri üzerinde süreksizse ve ardışık integraller varsa eşitlik yine de doğrudur (Stewart 2007, 850).

[7] Başlangıç forward eğrisi $\left(f_{0,T} \right)$, $\left(\alpha_{s,T} \right)$ ve $\left(\underline{\sigma}_{s,T} \right)$ katsayıları vadeye (T) göre türevlenebilir ve kısmi türevleri $\left(\frac{\partial f_{0,T}}{\partial T}, \frac{\partial \alpha_{t,T}}{\partial T}, \frac{\partial \underline{\sigma}_{t,T}}{\partial T} \right)$ ile sınırlıdırlar.

(5.18) $\int_0^t r_U dU = \int_0^t r_s ds$

(5.15)'in ilk satırında yer alan $\left(\int_0^T f_{0,U} dU\right)$ teriminin bir sabit sayı ve ikinci satırında yer alan kısmın da $\left(\int_0^t r_s ds\right)$'ye eşit olması nedeniyle (5.15) tekrar düzenlenirse öncelikle (5.19); sonrasında da (5.19)'un takvim zamanına (t) göre türevinin alınması sonucunda (5.20) elde edilir.

(5.19) $I_t = \left(Sabit\_Sayı\right)_T + \int_0^t \left(r_s - \int_s^T \left(\alpha_{s,U} dU\right)\right) ds - \int_0^t \left(\int_s^T \left(\underline{\sigma}_{s,U} dU\right)\right) \underline{dW}_s$

(5.20) $dI_t = \left(r_t - \int_t^T \left(\alpha_{t,U} dU\right)\right) dt - \int_t^T \left(\underline{\sigma}_{t,U} dU\right) \underline{dW}_t$

(5.4) ve (5.20) birlikte değerlendirilir ve çok boyutlu Ito Teoremi uygulanırsa öncelikle (5.28) ve sonrasında (5.29) elde edilerek (5.11) ispat edilir. Çok boyutlu Ito Teorimi çerçevesinde gerçekleştirilen hesaplamalar (5.21) – (5.27) numaralı eşitliklerde açıklanmaktadır (Baz ve Chacko, 2004: 222).

Stokastik bir süreç olarak tanımlanan anlık forward oranlarına bağlı bono ve tahvil fiyatlarında meydana gelen değişimleri hesaplamak için Ito kuramı kullanılacaktır. Hesaplamalarda takip edilebilirliği kolaylaştırmak amacıyla $\left(X_t = I_t;\ dX_t = a_t dt + \underline{b}_t \underline{dW}_t\right)$ ve $\left(f(t,x) = e^x\right)$ olarak kabul edilir. Bu durumda $f(t,x)$ fonksiyonunun (t, X_t) noktasındaki değişimi Taylor açılımı kullanılarak aşağıdaki gibi hesaplanır.

(5.21) $df(t,X_t) = f(t+dt, X_t + dX_t) - f(t,x)$

(5.22) $df(t,X_t) = \dfrac{\partial f(t,X_t)}{\partial t} dt + \dfrac{\partial f(t,X_t)}{\partial x} dX_t + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial^2 f(t,X_t)}{\partial x^2}\right)\left(dX_t\right)^2$

(5.23) $\left(dX_t\right)^2 = \left(a_t dt + \underline{b}_t \underline{dW}_t\right)^2$

(5.24) $\left(dX_t\right)^2 = \left(a_t dt + \sum_{j=1}^{k} b_t^j dW_t^j\right)^2$

(5.25)[8] $\left(dX_t\right)^2 = a_t^2\left(dt\right)^2 + 2\sum_{j=1}^{k} a_t b_t^j\left(dtdW_t^j\right) + \sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{k} b_t^j b_t^l dW_t^j dW_t^l$

(5.26) $\left(dX_t\right)^2 = \sum_{j=1}^{k}\left(b_t^j\right)^2\left(dW_t^j\right) = \left|\underline{b}_t\right|^2 dt$

(5.27) $df(t,X_t) = \left(\frac{\partial f(t,X_t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\left|\underline{b}_t\right|^2\frac{\partial^2 f(t,X_t)}{\partial x^2}\right)dt + \frac{\partial f(t,X_t)}{\partial x}dX_t$

(5.28) $dP_{t,T} = d(e^{I_t}) = e^{I_t}\left(\left(r_t - \int_t^T\left(\alpha_{t,U}dU\right) + \frac{1}{2}\left|\int_t^T\left(\underline{\sigma}_{t,U}dU\right)\right|^2\right)dt - \int_t^T\left(\underline{\sigma}_{t,U}dU\right)\underline{dW}_t\right)$

(5.29) $dP_{t,T} = d(e^{I_t}) = P_{t,T}\left(\left(r_t - \int_t^T\left(\alpha_{t,U}dU\right) + \frac{1}{2}\left|\int_t^T\left(\underline{\sigma}_{t,U}dU\right)\right|^2\right)dt - \int_t^T\left(\underline{\sigma}_{t,U}dU\right)\underline{dW}_t\right)$

Anlık faiz oranı dinamiklerini tanımlayan (5.10) numaralı denklem incelendiğinde; bu denklemin, kısa vadeli faiz oranı modelleri[9] çerçevesinde anlık faiz oranının dinamiklerini tanımlayan denklemlerden farklı olduğu söylenebilir. Farkı (5.10) numaralı denklemdeki son terim yaratmaktadır. Bu son terimin işlevi, anlık faiz oranının, içinde bulunduğumuz zaman $\left(t=0\right)$ ile ilerideki bir zaman $\left(t=t\right)$ arasında gerçekleşecek olan volatilite değerlerinin söz konusu dönem içerisindeki Brownian hareketine göre oluşacak rassal değerlerin toplamıyla ilişkili olmasına yol açmasıdır. Bir diğer ifadeyle; stokastik süreç içerisinde gerçekleşmiş tarihi veriler önem kazanmakta, bu da HJM yaklaşımında anlık faiz oranının Markov özelliği sergilememesine neden olmaktadır. Markov özelliğinin eksikliği sonucunda HJM yaklaşımında anlık faiz oranına ilişkin mevcut doğal durumun tanımlanabilmesi için sonsuz sayıda değişkene ihtiyaç duyulmaktadır. Bir diğer ifadeyle; HJM yaklaşımında anlık faiz oranına ilişkin dinamikleri modelleyen bir kısmi diferansiyel denklemin oluşturulabilmesi için sonsuz sayıda bağımsız değişkene ihtiyaç vardır ki

---

8 Ito kuramı ve Brownian hareketinde stokastik değişkenlerin birbirlerinden bağımsız ve benzer dağılıma (iid) sahip olmaları sonucunda; $\left(dt\right)^c = 0 \Rightarrow c > 1$, $\left(dW\right)^c = 0 \Rightarrow c > 2$, $\left(dtdW\right) = 0$ ve $\left(dW^j dW^l\right) = dt \Rightarrow j = l$ genellemelerine ulaşılabilir.

9 Tez kapsamında ele alınan Vasicek (1977), Dothan (1978), CIR (1985), HW (1990), BDT (1990) kısa vadeli faiz oranı modellerinin dışında; bu modelleri baz alarak geliştirilen diğer kısa vadeli faiz oranı modelleri, Richard (1978), Brennan ve Schwartz (1979), Langetieg (1980), Courtadon (1982), Torous (1985), Ahn ve Thompson (1988), Feldman (1989), Black ve Karasinski (1991), Longstaff ve Schwartz (1991) olarak sayılabilir.

bu da uygulanabilir bir durum değildir. Bu durumda, riske göre düzeltilmiş forward oranlarının tahmini için simülasyon veya ağaç yöntemi tercih edilmelidir (Wilmott, 2006: 611-613).

Bono veya tahvil fiyatlarının hesaplanmasında kullanılan (5.29) numaralı denklemin elde edilmesinden sonra sabit getirili menkul kıymetler üzerine yazılmış türev ürün fiyatlarının hesaplanabilmesi için öncelikle nesnel olasılık ölçümü (*P*) altında (5.10)'da tanımlanan anlık faiz oranına ait dinamiklerin, riske göre düzeltilerek yeni bir olasılık ölçümü (*Q*) altında tekrar tanımlanması gerekmektedir. Bu amaçla; (5.10)'daki stokastik kısmı ortadan kaldıracak, kendi kendini finanse eden[10] (*self-financing*) risksiz bir portföy oluşturulmalı ve iskonto edilmiş fiyatlar için bir eşdeğer martingale ölçüsü bulunmalıdır.

Risksiz bir portföy oluşturmak için farklı vadelere ilişkin sabit getirili menkul kıymetler (bono ve tahviller) ve risksiz bir yatırım aracı olarak kullanılabilecek kısa vadeli mevduat hesabı kullanılabilir. Bankaya kısa vadeli olarak yatırılan 1 TL. için vadeli mevduat hesabı ve dinamikleri sırasıyla (5.30) ve (5.31) numaralı denklemlerde verilmiştir.

(5.30) $B_t = e^{\int_0^t r_s ds}$

(5.31) $dB_t = r_t B_t dt$

Farklı vadelere $\left(T_1, T_2, T_3, ..., T_N\right)$ ilişkin sabit getirili menkul kıymetlerden $\left(P_{T_1}, P_{T_2}, P_{T_3}, ..., P_{T_N}\right)$ ve kısa vadeli mevduat hesabından $\left(B\right)$, sırasıyla $\left(\underline{\varphi}, \psi\right) = \left(\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3, ..., \varphi^N, \psi\right)$ uyumlaştırılmış süreçler kullanılarak oluşturulacak portföyün $\left(t; t < \min(T_1, T_2, T_3, ..., T_N)\right)$ zamanındaki değeri (5.32)'de verilmiştir.

---

[10] $V\left(\underline{\varphi}_t, \psi_t\right)$ olarak tanımlanan portföy değerinde riskli menkul kıymetlerden elde edilen bir nakit girişi olur ve elde edilen bu miktar risksiz menkul kıymete yatırılır, tersi durumda, riskli menkul kıymetlerden dolayı bir nakit çıkışı yaşanır ve bu kayıp risksiz menkul kıymetteki fonlardan finanse edilirse bir diğer ifadeyle portföyün vadesi dolana kadar ($t = T; T = \max(T_1, T_2, T_3, ..., T_N)$) yatırımcının portföyden para çekmesi veya portföye yeni fon enjekte etmesi söz konusu değilse bu tür portföyler kendi kendini finanse eden portföyler olarak tanımlanabilir (Merton 1992, 349-350).

(5.32) $V\left(\underline{\varphi_t},\psi_t\right)=\varphi_t^1 P_{t,T_1}+\varphi_t^2 P_{t,T_2}+\varphi_t^3 P_{t,T_3}+\ldots+\varphi_t^N P_{t,T_N}+\psi_t B_t$

Bu portföyün kendi kendini finanse eden bir portföy olabilmesi için gerekli olan koşul (5.33)'tür.

(5.33) $dV\left(\underline{\varphi_t},\psi_t\right)=\varphi_t^1 dP_{t,T_1}+\varphi_t^2 dP_{t,T_2}+\varphi_t^3 dP_{t,T_3}+\ldots+\varphi_t^N dP_{t,T_N}+\psi_t dB_t$

Uyarlanmış süreçler olarak tanımlanan $\left(\underline{\varphi},\psi\right)=\left(\varphi^1,\varphi^2,\varphi^3,\ldots,\varphi^N,\psi\right)$, $\left(P_{T_1},P_{T_2},P_{T_3},\ldots,P_{T_N},B_t\right)$ menkul kıymetleri için kendi kendini finanse eden bir portföy oluşturuyorsa, aynı süreçler vadeli mevduat hesabı kullanılarak iskonto edilmiş menkul kıymetler $\left(Z_{T_1},Z_{T_2},Z_{T_3},\ldots,Z_{T_N},1\right)$ için de kendi kendini finanse eden bir portföy oluşturur $\left(Z_{T_i}=\dfrac{P_{T_i}}{B_t}, i=1,2,3,\ldots,N\right)$. Bu durumda kısa vadeli mevduat hesabı $\left(B_t\right)$ kullanılarak iskonto edilmiş fiyatlarda meydana gelen değişimlerin $\left(dZ_{t,T}\right)$ dinamikleri, (5.34) – (5.36) arasındaki işlemler sonucunda (5.37)'deki gibi olacaktır.

(5.34) $dZ_{t,T}=d\left(\dfrac{P_{t,T}}{B_t}\right)=d\left(P_{t,T}\right)\dfrac{1}{B_t}+P_{t,T}d\left(\dfrac{1}{B_t}\right)+d\left(P_{t,T}\right)d\left(\dfrac{1}{B_t}\right)$

(5.35) $dZ_{t,T}=d\left(\dfrac{P_{t,T}}{B_t}\right)=d\left(P_{t,T}\right)\dfrac{1}{B_t}-P_{t,T}\dfrac{1}{B_t^2}dB_t-d\left(P_{t,T}\right)\dfrac{1}{B_t^2}dB_t$

(5.36)[11]

$$dZ_{t,T}=P_{t,T}\left(\left(r_t-\int_t^T\left(\alpha_{t,U}dU\right)+\frac{1}{2}\left|\int_t^T\left(\underline{\sigma}_{t,U}dU\right)\right|^2\right)dt-\int_t^T\left(\underline{\sigma}_{t,U}dU\right)\underline{dW}_t\right)\frac{1}{B_t}-\left(P_{t,T}\frac{1}{B_t^2}rB_t dt\right)$$

$$-\left(P_{t,T}\left(\left(r_t-\int_t^T\left(\alpha_{t,U}dU\right)+\frac{1}{2}\left|\int_t^T\left(\underline{\sigma}_{t,U}dU\right)\right|^2\right)dt-\int_t^T\left(\underline{\sigma}_{t,U}dU\right)\underline{dW}_t\right)\right)\left(P_{t,T}\frac{1}{B_t^2}rB_t dt\right)$$

(5.37) $dZ_{t,T}=Z_{t,T}\left(\left(-\int_t^T\left(\alpha_{t,U}dU\right)+\dfrac{1}{2}\left|\int_t^T\left(\underline{\sigma}_{t,U}dU\right)\right|^2\right)dt-\int_t^T\left(\underline{\sigma}_{t,U}dU\right)\underline{dW}_t\right)$

---

[11] Bu denklemde ikinci satırda yer alan işlemler yapıldığında ortaya çıkan çarpımlar, Ito kuramı nedeniyle göz ardı edilebilir büyüklükte olup, sıfır olarak kabul edilebilir $\left(\left(dt\right)^c=0\Rightarrow c>1,\ \left(dW\right)^c=0\Rightarrow c>2,\ \left(dtdW\right)=0\right)$.

İskonto edilmiş fiyatlar için bir eşdeğer martingale ölçüsü bulunması için (5.37) numaralı denklemdeki deterministik kısım yok edilmelidir. Bu amaç için Girsanov Teoremi[12] kullanılır. Girsanov Teorimine göre yeni bir olasılık uzayında yer alan Brownian hareketi ve değişimler sırasıyla (5.38) ve (5.39)'daki gibi tanımlanır.

(5.38) $\widehat{\underline{W}}_t = \underline{W}_t - \int_0^t \underline{\gamma}_s ds$

(5.39) $d\widehat{\underline{W}}_t = d\underline{W}_t - \underline{\gamma}_t dt$

Yeni tanımlanan rassal değişken (5.37)'de yerine koyulursa (5.40) elde edilir.

(5.40)

$$dZ_{t,T} = Z_{t,T}\left(\left(-\int_t^T\left(\alpha_{t,U}dU\right)+\frac{1}{2}\left|\int_t^T\left(\underline{\sigma}_{t,U}dU\right)\right|^2+\underline{\gamma}_t\int_t^T\left(\underline{\sigma}_{t,U}dU\right)\right)dt-\int_t^T\left(\underline{\sigma}_{t,U}dU\right)d\widehat{\underline{W}}_t\right)$$

(5.40) numaralı denklemdeki deterministik kısmın yok edilebilmesi için gerekli olan ilişki (5.41)'de belirtilmiştir $\left(t \le T\right)$.

(5.41) $\int_t^T\left(\alpha_{t,U}dU\right)=\frac{1}{2}\left|\int_t^T\left(\underline{\sigma}_{t,U}dU\right)\right|^2+\underline{\gamma}_t\int_t^T\left(\underline{\sigma}_{t,U}dU\right)$

Bu aşamada $\left(\underline{\gamma}_t\right)$ incelemeye alınan sabit getirili menkul kıymetlerin vadelerine bağlı olur. Ancak fiyat dinamikleri için eşdeğer martingale ölçüsü ve bütün vadeler için geçerli bir $\left(\underline{\gamma}_t\right)$ arıyorsak $\left(\underline{\gamma}_t\right)$'nin vadelerden bağımsız olması gerekmektedir. Bu amaçla (5.41) numaralı eşitliğin vadeye $\left(T\right)$ göre türevi (5.42)'deki gibi alınırsa; $\left(\alpha_{t,T}\right)$ üzerindeki koşul (5.43) numaralı eşitlikteki gibi ifade edilir.

---

[12] Girsanov Teorimine göre eğer $<\Omega, F>$ dağılımlar uzayındaki olasılık ölçümü $\left(Q\right)$, olasılık ölçümü $\left(P\right)$'ye göre mutlak sürekli ise, olasılık ölçümü $\left(P\right)$'ye göre martingale özelliğine sahip süreçler, olasılık ölçümü $\left(Q\right)$'ya göre de martingale özelliğine sahip olurlar. Girsanov Teoreminin matematiksel ifadesi $\mathrm{E}^Q\left(X\right)=\mathrm{E}^P\left(GX\right)=\int_\Omega X\left(w\right)G\left(w\right)P\left(w\right)$ olarak gösterilebilir (Revuz ve Yor, 1999: 325-327). Olasılık uzayının değiştirilmesi stokastik bir değişkenin ortalamasını değiştirmektedir. Bu nedenle; Girsanov Teoremi, ekonomi ve finans literatüründe "stokastik iskonto faktörü" veya "kernel fiyatlandırması" olarak da adlandırılmaktadır.

(5.42) $d\left(\int_t^T(\alpha_{t,U}dU)\right)=\left|\int_t^T(\underline{\sigma}_{t,U}dU)\right|d\left(\int_t^T(\underline{\sigma}_{t,U}dU)\right)+d\left(\underline{\gamma}_t\int_t^T(\underline{\sigma}_{t,U}dU)\right)$

(5.43) $\alpha_{t,T}=\int_t^T(\underline{\sigma}_{t,U}dU)\underline{\sigma}_{t,T}+\underline{\gamma}_t\underline{\sigma}_{t,T}$

Sonuç olarak bu bölümün başında da değinildiği gibi spesifik bir HJM modeli iki parametre grubunun tanımlanmasıyla elde edilir. Bunlardan ilki, farklı risk faktörlerine $(\underline{W}_t)$ ait volatilitelerdir $(\underline{\sigma}_t)$. Farklı volatilite tercihleri, farklı HJM modellerini doğurmaktadır. Örneğin, tek faktörlü bir HJM yaklaşımında;

- Volatilite yapısı $(\sigma(t,T))$, sabit bir sayı (σ) olarak tercih edilirse Ho – Lee (1986) modeliyle,
- Volatilite yapısı $(\sigma(t,T))$, (σ) ve (α) parametrelerinin zamandan bağımsız sabit bir sayı olmaları koşulu ile üstel azalan $\left(\sigma(t,T)=\sigma e^{-\alpha(T-t)}\right)$ bir yapı olarak tercih edilirse Vasicek (1977) modeliyle,
- Volatilite yapısı $(\sigma(t,T))$, $(\sigma(t,T)=\sigma(t,T))$ ve $(\alpha(t,T)=\alpha(t,T))$ parametrelerinin zamana bağlı deterministik fonksiyon olmaları koşulu ile üstel azalan $\left(\sigma(t,T)=\sigma(t,T)e^{-\int_t^T\alpha_s ds}\right)$ bir yapı olarak tercih edilirse, Genişletilmiş Vasicek olarak da adlandırılan HW (1990) modeliyle,
- Volatilite yapısı $(\sigma(t,T))$, faiz oranlarının negatif düzeylere düşmesini engelleyecek şekilde $\left(\sigma(t,T)=\sigma(t,T)\sqrt{r_t}\,\frac{\partial P}{\partial T}\right)$ seçilir, parametre zamandan bağımsız sabit bir sayı $(\sigma(t,T)=\sigma)$ olarak belirlenirse CIR (1985) modeliyle veya parametre zamana bağlı deterministik bir fonksiyon $(\sigma(t,T)=\sigma(t,T))$ olarak tercih edilirse Hull ve White tarafından 1990'da tanımlanmış olan Genişletilmiş CIR modeliyle benzer sonuçlar elde edilir (Ağca, 2002: 36-37; Baxter ve Rennie, 2006: 151-156).

Spesifik bir HJM modelinin oluşturulmasında tanımlanması gereken ikinci parametre ise riskin piyasa fiyatı olarak adlandırılabilecek $\left(\underline{\gamma}_t\right)$ vektörüdür. Riskin piyasa fiyatı, kısa vadeli mevduat hesabına yatırım yapmak yerine sabit getirili bir menkul kıymete yatırım yapma riski olarak tanımlanabilir. Riske göre düzeltilmiş veya eşdeğer martingale ölçüsü (Q) altında fiyat dinamikleri (5.44) numaralı denklemdeki gibi veya nesnel olasılık ölçümü (P) altında (5.45) numaralı denklemdeki gibi gösterilir.

(5.44) $dP_{t,T} = P_{t,T}\left(r_t dt - \int_t^T \underline{\sigma}_{t,U} dU d\underline{\widehat{W}}_t\right)$

(5.45) $dP_{t,T} = P_{t,T}\left(\left(r_t + \underline{\gamma}_t \int_t^T \underline{\sigma}_{t,U} dU\right) dt - \int_t^T \underline{\sigma}_{t,U} dU d\underline{W}_t\right)$

Bu iki denklemden çıkartılabilecek sonuç ise, yatırımcıların kısa vadeli mevduat hesabı yerine sabit getirili menkul kıymetlere yatırım yapmak için $\left(\underline{\gamma}_t \int_t^T \underline{\sigma}_{t,U} dU\right)$ tutarında ekstra bir getiri talep etmeleridir[13]. Toplam ekstra getiri miktarı içerisinde tek bir risk faktörüne ilişkin ekstra getiri miktarı, örneğin; *j*'inci risk faktörü için yatırımcının beklediği ekstra getiri, *j* risk faktörüne ait birim volatilite başına beklediği ekstra getiri olan $\left(\gamma_t\right)$ kadardır[14].

[13] *k* risk faktörlü modeller için geçerlidir.

[14] *j* risk faktörüne ait toplam volatilite miktarı $\left(\int_t^T \sigma_{t,U}^j dU\right)$ ve bu risk faktörüne ilişkin ekstra olarak istenilen toplam getiri miktarı $\left(\gamma_t^j \int_t^T \sigma_{t,U}^j dU\right)$ kadardır.

Üçüncü Bölüm

Getiri ve Forward Eğrilerinin Kalibrasyonu, Tahvil ve Faiz Oranına Dayalı Opsiyonların Fiyatlaması

1. Getiri ve Forward Eğrilerinin Kalibrasyonu

Faiz oranı modellerinden elde edilen teorik eğriler ile piyasada gözlemlenen gerçek eğrilerin birbirlerine eşleştirilme süreci kalibrasyon olarak tanımlanır. Faiz oranı modellerinin kalibrasyonunda iki temel adım bulunmaktadır. Bu adımlardan ilki, tercih edilen modele uygun başlangıç getiri eğrisinin veya başlangıç forward eğrisinin elde edilmesi; ikinci adım ise tercih edilen modeldeki volatilite yapılarının belirlenmesidir.

Bu çalışmadaki hesaplamalarda kullanılan girdiler; farklı vadelere ilişkin getiri ve forward oranları ve bu oranlara ait volatilitelerdir. Getiri ve forward oranları, İMKB Tahvil ve Bono Piyasasında işlem gören hazine bonosu ve devlet tahvillerine ait 2 Ocak 2009 – 26 Şubat 2010 tarihleri arasındaki günlük kapanış fiyatları kullanılarak elde edilmiştir. Bu çalışmanın sıçrama modellerini içermemesi nedeniyle sıçramaların gerçekleştiği günlerdeki fiyatlar dikkate alınmamış, bu değerler yerine bir önceki gün ile bir sonraki güne ait kapanış fiyatlarının ortalaması kullanılmıştır. Bu çalışmada toplam beş adet sıçrama, ortalama fiyat ile değiştirilmiştir.

1.1. Başlangıç Eğrilerinin Elde Edilmesi

Getiri ve forward eğrilerinin, bir anlam ifade edebilmesi ve oranlar ile vadeler arasında yorum yapmaya imkân tanıyacak şekilde olabilmesi için uzun vadelere ilişkin oranların da incelenen vade spektrumu içinde olması gerekmektedir. Bu nedenle getiri eğrileri için en iyi veri kaynağı, uzun vadeli sabit getirili menkul kıymetlerdir. Ancak, genellikle sabit getirili menkul kıymetlerde, vade iki yılın üzerine çıktığında kupon ödemeleri söz konusu olmaktadır. Bu nedenle faydalı olabilecek bir getiri eğrisinin oluşturulabilmesi için kupon ödemeli tahvillerden de yararlanmak gerekmektedir. Kupon ödemeli tahvillere ait fiyat bilgilerinin kullanılarak aynı vadelere sahip, yapay olarak oluşturulmuş kupon ödemesiz tahvillerin fiyatlarına ilişkin yapılan çıkarsamalara, düzeltilmiş kupon ödemeli tahviller (coupon bond stripping) denir.

Bu çalışmada kısa, orta ve uzun vadeye ait bilgileri yansıtabilecek bir getiri eğrisine ulaşabilmek için hazine bonoları, iskontolu devlet tahvilleri ve sabit faizli devlet tahvilleri kullanılmıştır. Geçerli dönem için (2 Ocak 2009 – 26 Şubat 2010) İMKB Tahvil ve Bono Piyasasında işlem gören kupon ödemesiz sabit getirili devlet borçlanma senetleri incelendiğinde en uzun vadeli senet, 11 Mayıs 2011 tarihli iskontolu devlet tahvilidir. Çalışmada kısa ve orta vadeye ilişkin bilgiler, toplam sekiz adet hazine bonosu ve iskontolu devlet tahvilinden elde edilirken uzun döneme ait bilgiler, üç adet sabit kupon ödemeli devlet tahvilinden (26 Eylül 2012, 28 Ağustos 2013 ve 6 Ağustos 2014 vadeli) elde edilmiştir. Düzeltilmiş kupon ödemeli tahvillere ait fiyat çıkarsamaları aşağıdaki teori ve algoritma kullanılarak elde edilmiştir (Jarrow, 2002: 176-177, 302-304; Das, 1994: 219-225; Choudhry, 2002: 73-93).

Farklı vadelere $\left(j=1,2,...,n\right)$ ilişkin kupon ödemeli tahvillerin piyasada gözlemlenen cari fiyatları $\left(B_j(0)\right)$ olarak gösterilsin. Kupon ödemesi $\left(C_j\right)$, anapara ödemesi $\left(L_j\right)$ ve vadesi $\left(T_j\right)$ olarak gösterilen kupon ödemeli tahvilden elde edilecek nakit girişleri, kupon ödemesiz tahvillerden oluşturulacak bir portföy ile kopya edilebilir. Aynı nakit akışını sağlayacak kopya portföy $\left(t=1,2,...,T-1\right)$ zamanlarında $\left(C\right)$ adet kupon ödemesiz tahvilden ve $\left(t=T\right)$ zamanında $\left(C+L\right)$ adet kupon ödemesiz tahvilden oluşacaktır. Bu kopya portföyün maliyeti aşağıdaki gibi olacaktır $\left(P_{0,T}:\ \text{Kupon Ödemesiz Tahvil}\right)$.

(1.1.1) $\sum_{t=1}^{T_j} C_j P_{0,t} + L_j P_{0,T_j}$

Arbitraj kanununa göre, aynı nakit girişlerini sağlayan bu kopya portföyün maliyeti ile kupon ödemeli tahvillerin piyasada gözlemlenen cari fiyatları $\left(B_j(0)\right)$ eşit olmak zorundadır.

(1.1.2) $B_j(0)=\sum_{t=1}^{T_j} C_j P_{0,t} + L_j P_{0,T_j}$

Yukarıdaki doğrusal denklem; tüm farklı vadeler $\left(j=1,2,...,n\right)$, tüm (t) 'ler ve her $\left(P_{0,t}\right)$ için çözülürse geçerli vadelere ilişkin yapay olarak oluşturulmuş kupon ödemesiz tahvillere ilişkin fiyatlar elde edilmiş olur. Bu doğrusal sistemin çözümünün üç farklı sonucu vardır. İlk olarak, piyasada arbitraj olanakları mevcutsa bu sistemin çözümü yoktur. İkinci olarak, arbitraj imkânının bulunmamasıyla birlikte yapay olarak oluşturulmuş kupon ödemesiz tahvillerin sayısı ile piyasadaki kupon ödemeli tahvillerin sayısı birbirine eşit ise bu sistemin tek bir çözümü vardır. Son olarak yine arbitraj imkânının bulunmamasıyla birlikte yapay olarak oluşturulmuş kupon ödemesiz tahvillerin sayısı, piyasadaki kupon ödemeli tahvillerin sayısından fazla ise bu sistemin birden çok çözümü vardır. Bu durumda fiyat çıkarsamalarını gerçekleştirebilmek için (1.1.2) numaralı eşitlikteki hata payını (1.1.3)'deki gibi minimize eden bir yaklaşım tercih edilir ve yapay olarak oluşturulmuş kupon ödemesiz tahvillere ait fiyat çıkarsamaları $\left(P_{0,t}\right)$ yapılır.

(1.1.3) $\min \sum_{j=1}^{n} \left[B_j(0) - \left(\sum_{t=1}^{T_j} C_j P_{0,t} + L_j P_{0,T_j} \right) \right]^2$

Bu çalışmada farklı vadelere sahip toplam sekiz adet hazine bonosu ve iskontolu devlet tahvili ile üç adet sabit faizli devlet tahvili kullanılarak kupon ödemesiz tahvillere ait fiyat çıkarsamaları Matlab'daki minimizasyon fonksiyonlarından yararlanılarak elde edilmiştir (Lesage, 1999: 268-287). Geçerli döneme ait elde edilen çıkarsamalara örnek oluşturması amacıyla 1 Şubat 2010 – 5 Şubat 2010 tarihleri için elde edilen bir kesit aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 4. Farklı Vadelere Sahip Kupon Ödemesiz Tahvillere İlişkin Fiyat Çıkarsamaları

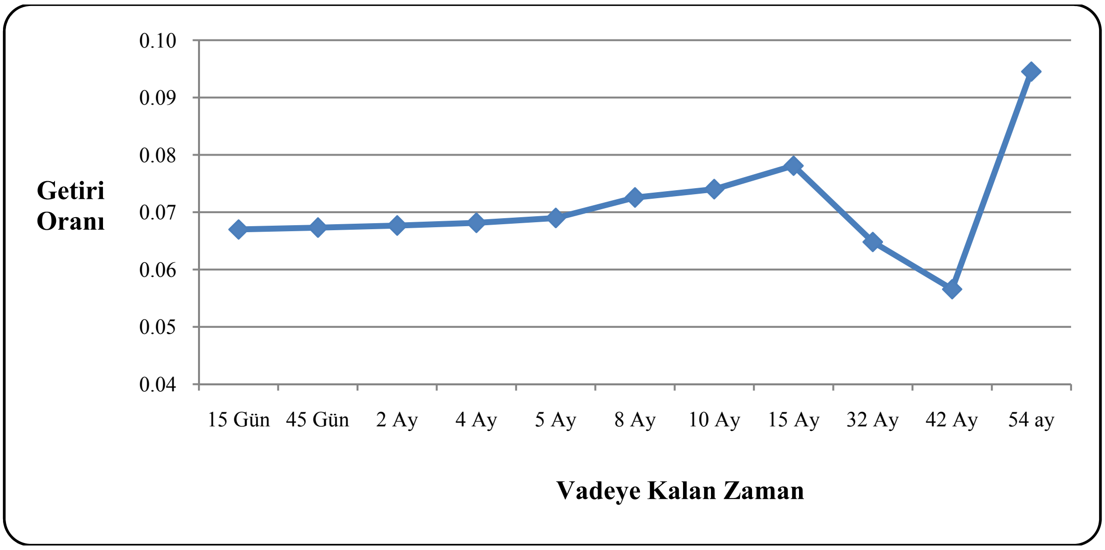
	15 Gün	**45 Gün**	**2 Ay**	**4 Ay**	**5 Ay**	**8 Ay**	**10 Ay**
	HB	**İDT**	**İDT**	**İDT**	**İDT**	**İDT**	**İDT**
İş Günü	**Fiyat**	**Fiyat**	**Fiyat**	**Fiyat**	**Fiyat**	**Fiyat**	**Fiyat**
01.02.2010	99,325	98,648	98,213	97,272	96,558	94,517	93,873
02.02.2010	99,341	98,666	98,235	97,294	96,622	94,556	93,936
03.02.2010	99,341	98,685	98,261	97,313	96,659	94,621	93,925
04.02.2010	99,384	98,709	98,279	97,331	96,615	94,593	93,907
05.02.2010	99,398	98,727	98,301	97,357	96,620	94,599	93,992
	15 Ay	**32 Ay**		**42 Ay**		**54 Ay**	
	İDT	**SFDT**		**SFDT**		**SFDT**	
İş Günü	**Fiyat**	**Fiyat**	**Düz. Fiyat**	**Fiyat**	**Düz. Fiyat**	**Fiyat**	**Düz. Fiyat**
01.02.2010	90,373	111,250	86,1135	119,000	82,9064	103,100	65,8933
02.02.2010	90,474	111,250	86,1268	119,000	82,9184	103,350	66,2837
03.02.2010	90,545	111,250	86,1401	119,000	82,9303	103,500	66,4878
04.02.2010	90,512	110,900	85,5931	118,900	82,8210	103,150	66,0055
05.02.2010	90,551	110,500	84,9575	118,200	81,7494	102,850	65,5886

HB: Hazine Bonosu, **İDT**: İskontolu Devlet Tahvili, **SFDT**: Sabit Faizli Devlet Tahvili, **Düz. Fiyat**: Düzeltilmiş Fiyat

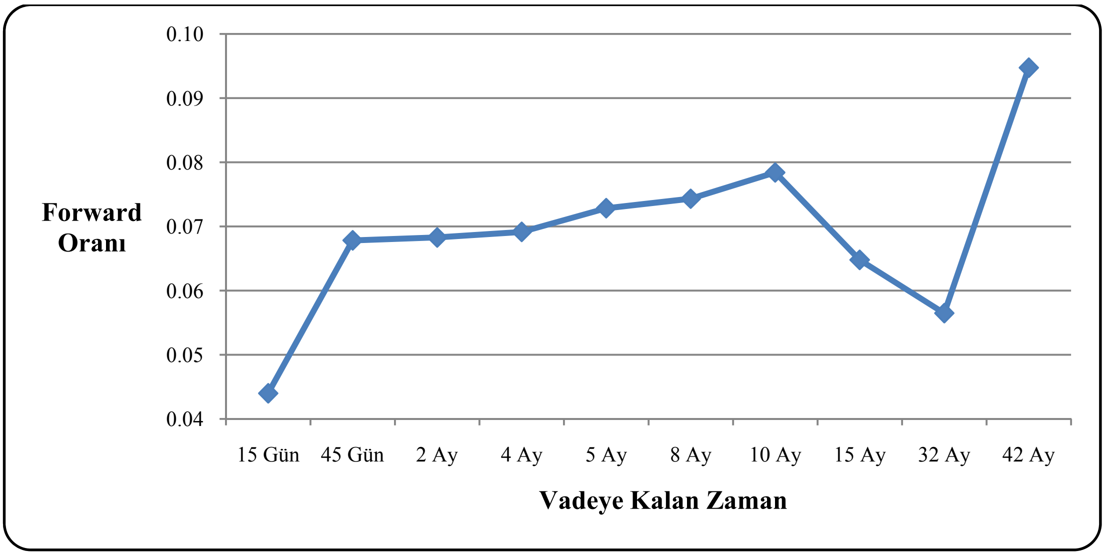
Elde edilen fiyatlardan öncelikle $(P_{t;T} = e^{-R_{t,T}(T-t)} P_{T;T})$ eşitliği kullanılarak getiri oranları ve başlangıç getiri eğrisi; sonrasında ise $(P_{t;T} = e^{-f_{t,T,U}(U-T)} P_{T;T})$ eşitliği kullanılarak forward oranları ve başlangıç forward eğrisi elde edilir. 26 Şubat 2010 tarihli getiri eğrisi ve forward eğrisi sırasıyla Şekil 12 ve Şekil 13'te verilmiştir.

Şekil 12'deki getiri eğrisi %5,66 ile %9,45 arasında değerler almaktadır. Kısa vadeli getiri oranları, öncelikle %6,70'ten başlayarak vadeye kalan zaman uzadıkça kademeli olarak hafif bir artış göstermiş; sonrasında orta – uzun vadede bir azalış yaşarak %5,66 seviyelerine düşmüş; nihayetinde uzun vadede tekrar bir artış yaşayarak %9,45 seviyelerine ulaşmıştır. Bu veriler değerlendirildiğinde 26 Şubat 2010 tarihli getiri eğrisinin kambur veya dalgalı bir forma sahip olduğu söylenebilir.

Şekil 13'teki forward eğrisi incelendiğinde de yaşanan dalgalanmaların ve formun getiri eğrisine benzer olduğu; forward oranlarının %4,40 ile %9,51 arasında değerler aldığı söylenebilir.



Şekil 12. 26 Şubat 2010 Tarihli Getiri Eğrisi



Şekil 13. 26 Şubat 2010 Tarihli Forward Eğrisi

1.2. Volatilite Yapılarının Belirlenmesi

Faiz oranı modellerinin kalibrasyonunda ikinci temel adım olan volatilite yapılarının doğru olarak belirlenmesi ve gerekli parametrelerin doğru olarak tahmin edilmesi modelin performansı için son derece önemlidir. Volatilite tahmini için iki farklı yaklaşım söz konusudur. Bunlardan ilki zımni veya dolaylı (implicit) volatilite tahmini iken ikincisi tarihi veriler kullanılarak yapılan volatilite tahminidir. Zımni volatilite tahmininde izlenen yöntem, tercih edilmiş bir modele ait fiyatlama formülüyle elde edilen teorik fiyatlarla, piyasada faize dayalı türev ürünlerin gözlemlenmiş fiyatlarını birbirine eşitleyen parametre değerlerinin hesaplanmasıdır.

Tarihi volatilite tahmininde ise getiri veya forward oranlarına ait zaman serileri kullanılarak volatilite fonksiyonları tahmin edilmeye çalışılmaktadır. Tarihi volatilite tahmini, zımni volatilite tahminine kıyasla iki noktada üstünlük sağlamaktadır. İlk nokta, zımni volatilite tahmininde kullanılacak modelin bir başka modele karşı üstün bir performans sergileyip sergilemeyeceğinin büyük bir belirsizlik olmasıdır. İkinci nokta ise zımni volatilite tahmininde kullanılan cari türev ürün fiyatının, bir sonraki dönem için de kullanılmasının yerel (local) bir yaklaşım olarak kabul edilmesidir. Yerel bir yaklaşımda gerçekleştirilen hesaplamalar, fiyatlarda meydana gelen değişimlerin sınırlı bir miktarını dikkate alabilmektedir. Ancak, tarihi verilere dayanılarak yapılan tahminler, global ölçekteki değişimleri dikkate aldıkları için elde edilen sonuçlar daha güçlü ve güvenilir olur (Buhler vd., 1999: 269-305). İki yaklaşım arasındaki bir diğer önemli faklılık ise zımni volatilite tahmini değişken sayısından bağımsız iken, tarihi volatilite yaklaşımında faiz oranlarında meydana gelen değişimlerin açıklanmasında değişken sayısının önem taşımasıdır.

Volatilite yapılarının tahmin edilmesinden önce, faiz oranı modellerinde sıkça başvurulan normal dağılım varsayımının uygulamada kabul edilebilirliğine bakmak yararlı olacaktır. Getiri ve forward oranlarında meydana gelen günlük değişimler Jarque – Bera normallik testi ile sınandığında elde edilen p – olasılık değerleri[15] sonucunda, incelenen zaman serilerinin normal dağılım gösterdiğini belirten H_0 hipotezi reddedilir. Ancak betimleyici istatistiklerin (Tablo 5 ve Tablo 6) incelenmesi ve oranlarda meydana gelen günlük değişimlere ait histogramların, normal dağılıma karşı sınanması (Şekil 14 ve Şekil 15) sonucunda normal dağılım varsayımının kabul edilmesinin mantık dışı ve zorlama olmayacağı görülmektedir.

[15] Getiri oranlarına ait 11 değişken ve forward oranlarına ait 9 değişkene ait p-olasılık değerleri %5'in altındadır (p-olasılık değerleri %0,001 ile %4,05 arasında değişmektedir). Sadece, forward oranlarında 4. Değişkene ait p-olasılık değeri %6,14'tür.

Tablo 5. Getiri Oranlarına Ait Günlük Değişim Değerlerinin Betimleyici İstatistikleri

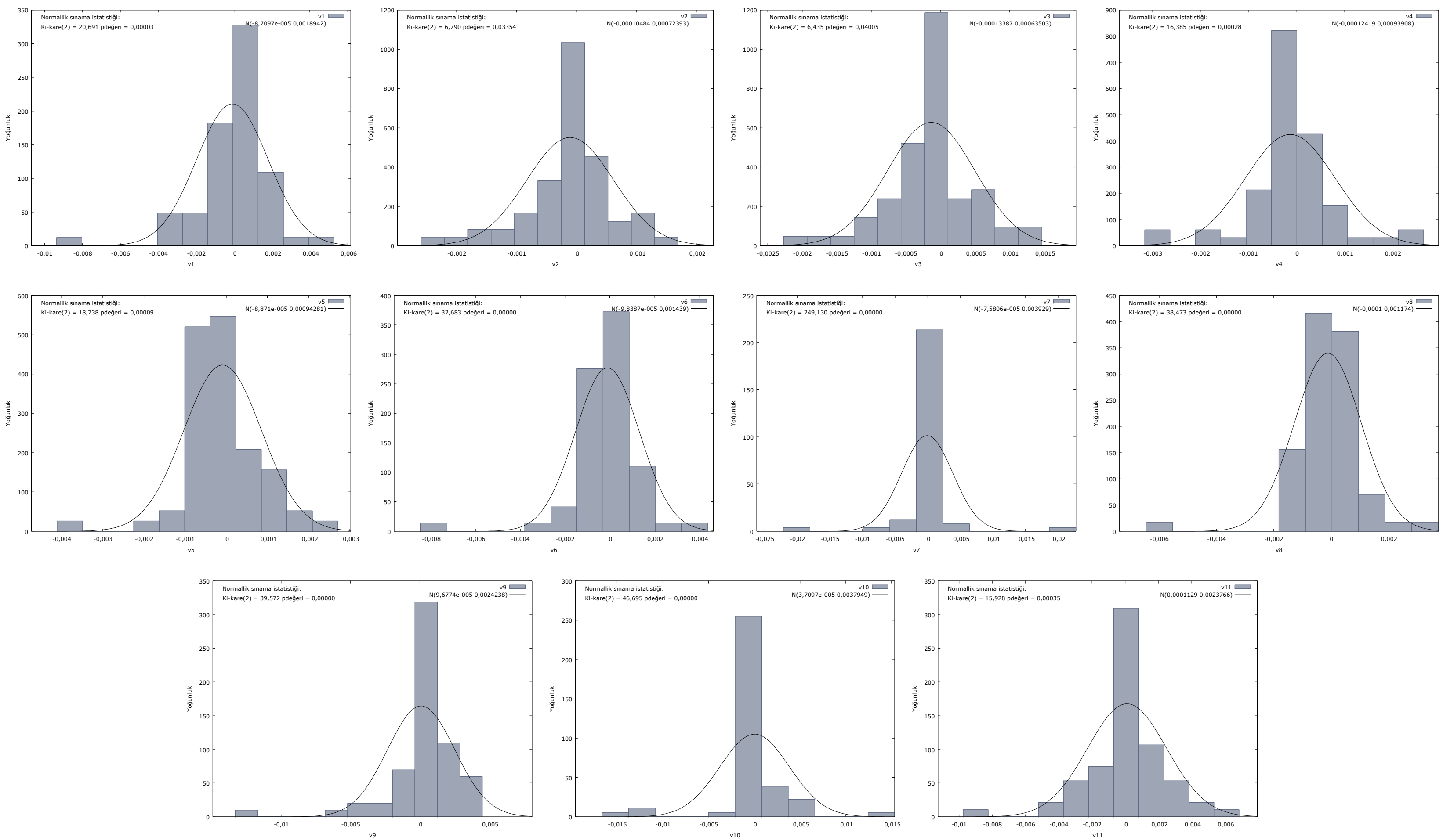
Getiri Oranlarına Ait Günlük Değişim Değerleri				
Değişken	**Ortalama**	**Standart Sapma**	**Çarpıklık**	**Basıklık**
GO_V1	0,0703	0,0034	0,3434	-1,3637
GO_V2	0,0710	0,0031	0,3864	-1,2374
GO_V3	0,0720	0,0030	0,1092	-1,1367
GO_V4	0,0726	0,0030	0,1491	-1,0679
GO_V5	0,0735	0,0035	0,4519	-1,0303
GO_V6	0,0771	0,0040	0,5237	-0,9743
GO_V7	0,0774	0,0053	-1,0785	5,5630
GO_V8	0,0827	0,0047	0,4707	-1,0107
GO_V9	0,0647	0,0092	0,8689	-0,4198
GO_V10	0,0566	0,0067	0,7127	0,6227
GO_V11	0,0934	0,0063	0,3993	-0,1533

GO_V1: Getiri Oranı, 1. Değişken, **GO_V2**: Getiri Oranı, 2. Değişken, vb.

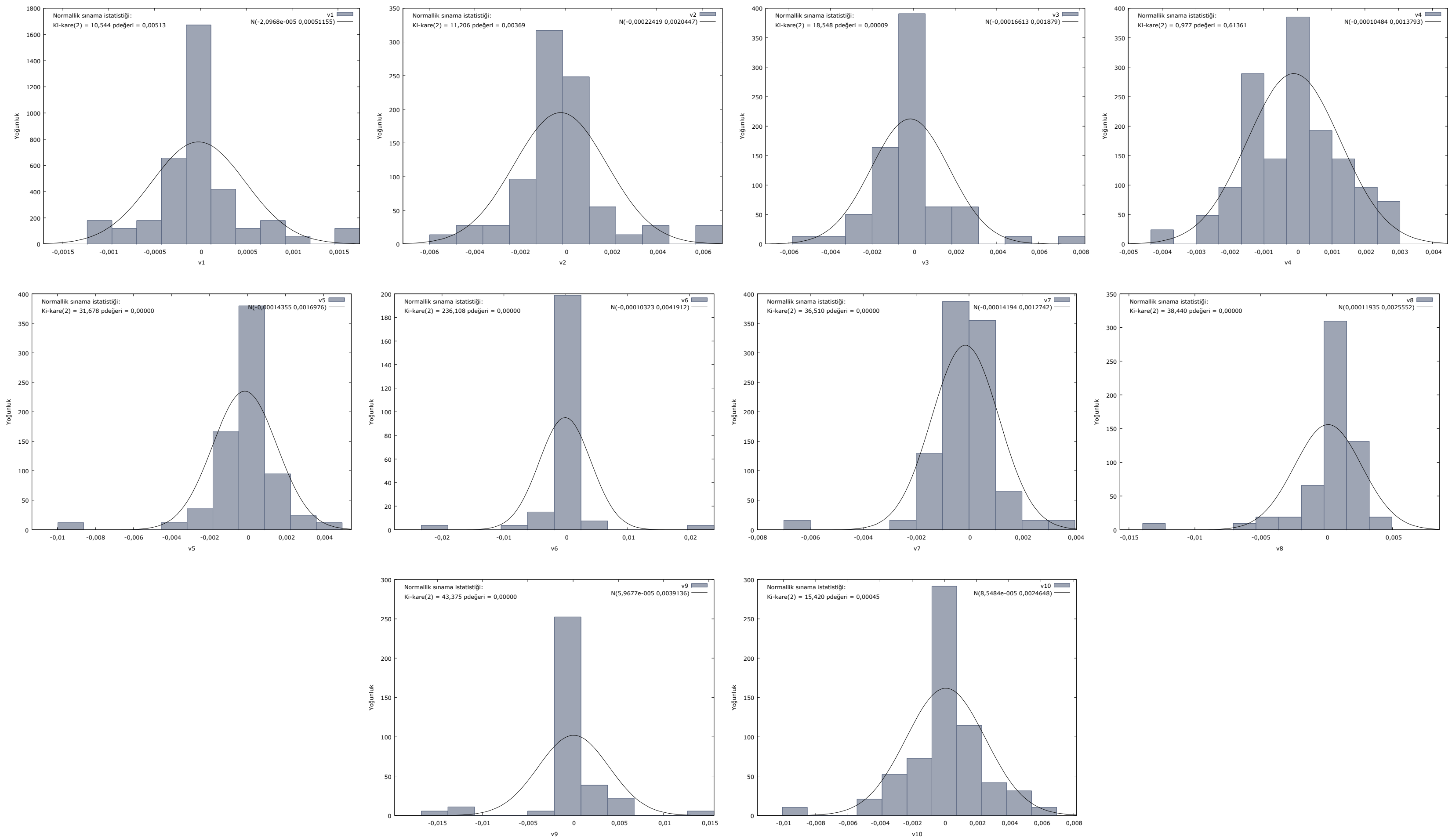
Tablo 6. Forward Oranlarına Ait Günlük Değişim Değerlerinin Betimleyici İstatistikleri

Forward Oranlarına Ait Günlük Değişim Değerleri				
Değişken	**Ortalama**	**Standart Sapma**	**Çarpıklık**	**Basıklık**
FO_V1	0,0000	0,0005	0,7462	2,4387
FO_V2	-0,0002	0,0020	0,7780	2,6473
FO_V3	-0,0002	0,0019	1,1673	4,8553
FO_V4	-0,0001	0,0014	-0,0740	0,3353
FO_V5	-0,0001	0,0017	-2,3763	13,7313
FO_V6	-0,0001	0,0042	0,1522	22,2429
FO_V7	-0,0001	0,0013	-1,6482	10,0497
FO_V8	0,0001	0,0026	-2,5313	11,4079
FO_V9	0,0001	0,0039	-1,3062	8,7772
FO_V10	0,0001	0,0025	-0,7892	3,3403

FO_V1: Forward Oranı, 1. Değişken, **FO_V2**: Forward Oranı, 2. Değişken, vb.



Şekil 14. Farklı 11 Vadeye İlişkin Getiri Oranlarında Meydana Gelen Günlük Değişimlere Ait Histogramlar



Şekil 15. Farklı 10 Vadeye İlişkin Forward Oranlarında Meydana Gelen Günlük Değişimlere Ait Histogramlar

Bu çalışmada tarihi veriler kullanılarak volatilite tahminlerinin elde edilmesi tercih edilecektir. Bu tercihin iki temel nedeni bulunmaktadır. Birinci neden VOB'da faize dayalı vadeli işlem sözleşmelerine ait işlem adetlerinin ve hacimlerinin oldukça düşük seviyelerde olmasından dolayı zımni volatilite tahmini için yanıltıcı sonuçlar doğabilmesidir. İkinci neden ise yukarıdaki paragrafta da açıklandığı gibi literatürde zaman serilerine dayanılarak elde edilen sonuçların daha tercih edilir olmasıdır.

Çoklu bağıntı problemine çözüm sunması nedeniyle tarihi volatilite tahmininde PCA sıkça tercih edilen bir yöntemdir. Hisse senedi ve döviz piyasalarında olduğu gibi birbirlerine benzer ancak farklı vadelere ilişkin sabit getirili menkul kıymetlere ait oranlar arasında da çoklu bağıntı problemi bulunmaktadır. Sabit getirili menkul kıymetlere ait oranlar, birbirleriyle yüksek korelasyona sahip birkaç temel bilgi kaynağı (veya belirsizlik kaynağı olarak da düşünülebilir) tarafından etkilenmektedir. Bağımsız değişkenler (belirsizlik kaynakları) arasındaki bu yüksek korelasyon, küçük sayılabilecek dalgalanmaların bağımlı değişkenler (getiri ve forward oranları) üzerinde, olduğundan büyük değişimler doğurmasına neden olabilmektedir (Getiri ve forward oranlarına ait korelasyon matrisleri sırasıyla Tablo 7 ve Tablo 8'de verilmiştir). Bu nedenle; çok değişkenli bir sistemde değişime neden olan, birbirleriyle doğrusal ilişki içerisinde olan söz konusu değişkenleri, birbirlerinden doğrusal olarak bağımsız olan, daha az sayıda temel değişkene çevirmek gerekmektedir. PCA bu amaca hizmet eden matematiksel bir yöntemdir (James ve Webber, 2000: 459-463; Rebonato, 1998: 51-54).

Tablo 7. Getiri Oranlarına Ait Korelasyon Matrisi

	15 Gün	**45 Gün**	**2 Ay**	**4 Ay**	**5 Ay**	**8 Ay**	**10 Ay**	**15 Ay**	**32 Ay**	**42 Ay**	**54 Ay**
15 Gün	1,00										
45 Gün	0,90	1,00									
2 Ay	0,88	0,98	1,00								
4 Ay	0,87	0,97	0,98	1,00							
5 Ay	0,88	0,98	0,97	0,97	1,00						
8 Ay	0,89	0,97	0,96	0,96	0,98	1,00					
10 Ay	0,80	0,87	0,87	0,86	0,87	0,87	1,00				
15 Ay	0,88	0,97	0,96	0,95	0,97	0,97	0,88	1,00			
32 Ay	0,69	0,77	0,72	0,72	0,80	0,81	0,71	0,85	1,00		
42 Ay	0,45	0,56	0,52	0,52	0,58	0,59	0,51	0,64	0,88	1,00	
54 Ay	0,45	0,52	0,46	0,46	0,58	0,61	0,50	0,59	0,87	0,83	1,00

Tablo 8. Forward Oranlarına Ait Korelasyon Matrisi

	45 Gün	2 Ay	4 Ay	5 Ay	8 Ay	10 Ay	15 Ay	32 Ay	42 Ay	54 Ay
45 Gün	1,00									
2 Ay	0,94	1,00								
4 Ay	0,89	0,95	1,00							
5 Ay	0,86	0,89	0,93	1,00						
8 Ay	0,80	0,85	0,91	0,97	1,00					
10 Ay	0,74	0,79	0,84	0,88	0,89	1,00				
15 Ay	0,82	0,87	0,91	0,96	0,97	0,90	1,00			
32 Ay	0,64	0,59	0,64	0,78	0,76	0,70	0,81	1,00		
42 Ay	0,48	0,43	0,45	0,55	0,52	0,48	0,58	0,87	1,00	
54 Ay	0,46	0,38	0,43	0,60	0,60	0,53	0,59	0,89	0,84	1,00

PCA uygulamasında da tercih edilen veriler açısından farklı yaklaşımlar benimsenebilir. Örneğin, PCA'da getiri veya forward oranları girdi olarak kullanılabileceği gibi bu oranlarda meydana gelen değişimler de analizde girdi olarak kullanılabilir. Kanony ve Mokrane, 1989 - 1990 yıllarını kapsayan ve Fransız piyasalarında işlem gören 1 – 25 yıl vadeli sabit getirili menkul kıymetlere ait getiri oranlarını kullandıkları 1992 tarihli çalışmalarında, 2 temel değişken bulmuşlar ve bu değişkenlerin faiz oranlarındaki değişimlerin %98,8'ini açıkladıklarını iddia etmişlerdir (Martellini vd., 2003: 115).

PCA'da varyans – kovaryans matrisinin ve korelasyon matrisinin girdi olarak kullanıldığı farklı çalışmalar da bulunmaktadır. Varyans – kovaryans matrisini tercih eden Barber ve Copper, 1985 - 1991 yıllarını ve Amerika Birleşik Devletleri piyasalarını kapsayan bir çalışma yapmışlardır. Çalışmalarında 1 ay – 20 yıl vadeli sabit getirili menkul kıymetlere ait aylık getiri oranlarını kullanmışlar ve faiz oranlarındaki değişimlerin %96,8'ini açıkladıklarını iddia ettikleri 3 temel değişken bulmuşlardır (Barber ve Copper 1996). Bühler ve Zimmerman ise korelasyon matrisini tercih etmişler, Almanya ve İsviçre piyasaları için 3'er temel değişken bulmuşlar ve sırasıyla faiz oranlarındaki değişimlerin %93 ve %94'ünü açıkladıklarını iddia etmişlerdir (Bühler ve Zimmerman, 1996: 55-67).

D'Ecclesia ve Zenios, İtalyan piyasalarında 1988 – 1992 yıllarını kapsayan bir çalışma yapmışlardır. Çalışmalarında, vadeleri 6 ay ile 7 yıl arasında değişen toplam 8 adet bono ve tahvil kullanmışlardır. Ancak, D'Ecclesia ve Zenios çalışmalarında

Barber ve Copper'dan (1996) farklı olarak PCA'da, aylık verileri değil; haftalık verileri girdi olarak kullanmışlar ve faiz oranlarındaki değişimlerin %99,8'ini açıkladıklarını iddia ettikleri 3 temel değişken bulmuşlardır (D'Ecclesia ve Zenios, 1994: 51-58).

Golub ve Tilman (1997) ise D'Ecclesia ve Zenios'dan (1994) farklı olarak PCA'da girdi olarak kullanılan sabit getirili menkul kıymet sayısını fazla tutmuş, vadeleri 3 ay ile 30 yıl arasında değişen toplam 10 adet borçlanma senedini hesaplamalarına dâhil etmiş ve faiz oranlarındaki değişimlerin %98,9'unu açıkladıklarını iddia ettikleri 3 temel değişken bulmuşlardır (Golub ve Tilman, 1997: 72-84).

Bu çalışmalardaki farklı tercihleri değerlendirmek amacıyla Lardic, Priaulet ve Priaulet (2003), gerek simülasyon yoluyla elde edilmiş verileri gerekse Belçika, Fransa, Almanya, İtalya ve Birleşik Krallık piyasalarına ait tarihi verileri kullanarak PCA'da en iyi sonuçları yaratan tercihleri saptamaya çalışmışlardır. Çalışma sonucunda;

- PCA'da kullanılan verilerin durağan olması, bir diğer ifadeyle; analizde faiz oranı seviyelerinden ziyade faiz oranı değişimlerinin kullanılması gerektiği,
- PCA'da normalleştirilmiş korelasyon matrisinin kullanılması gerektiği,
- PCA'da veri frekansının artmasıyla birlikte, sonuçların doğruluk seviyesinin arttığı,
- PCA'da değişken sayısının ve vade spektrumunun artmasıyla birlikte açıklanan değişim yüzdesinin arttığı sonuçlarına varılmıştır (Lardic vd., 2003: 327-349).

Yukarıda da açıklandığı üzere PCA'daki ana fikir, aralarında karşılıklı ilişkili bulunan çok sayıdaki değişkenli bir veri kümesinin boyutunu azaltmaktır. Bu boyut azaltma, temel bileşen adı verilen yeni bir değişken kümesine dönüşüm anlamına gelir. Temel bileşenlerin hesaplanması özdeğer – özvektör problemini yarı-kesin pozitif simetrik matris çözümüne indirger (Kırcı ve Kocaman) ve matematiksel ifadesi (1.2.1) – (1.2.9) arasındaki gibi özetlenebilir (Alexander, 2001: 145-146).

Durağan ve normalleştirilmiş, T satır ve k kolondan oluşan (X) veri matrisi olarak kabul edilirse, bu verilere ait korelasyon matrisi (V)

(1.2.1) $V = X'X / T$

olarak hesaplanır. (V), k satır ve k kolondan oluşan, yarı-kesin pozitif ve simetrik bir matristir. (V) korelasyon matrisinin yarı-kesin pozitif bir matris özelliği sayesinde bu matris aşağıdaki gibi temel bileşenlerine ayrılır.

(1.2.2) $VW = W\Lambda$

(W) matrisi, k adet özvektörün yer aldığı, k satır ve k kolondan oluşan kare bir matris iken; (Λ) matrisi, k adet özdeğerin yer aldığı, k satır ve k kolondan oluşan köşegen bir matristir. (W) kare matrisine ait özvektörlerin sıralaması, özdeğerlerin sıralamasına paralel olmaktadır. (Λ) köşegen matrisindeki özdeğerin sıralaması büyüklüklerine göredir. Bir diğer ifadeyle; en yüksek özdeğer, köşegende birinci sırada; en yüksek ikinci özdeğer, köşegende ikinci sırada yer almakta ve sıralama bu şekilde devam etmektedir. (W) matrisinde ise birinci kolonda yer alan özvektör, en yüksek değere sahip özdeğere; ikinci kolonda yer alan özvektör ise en yüksek ikinci özdeğere ilişkin olmakta ve sıralama bu şekilde devam etmektedir. O halde;

(1.2.3) $W = \left(w_{ij}\right)$, $i, j = 1, 2, ..., k$

ise (W) matrisinin m'inci kolonu, (w_m),

(1.2.4) $w_m = \left(w_{1m}, w_{2m}, ... w_{km}\right)'$

olarak ifade edilir ve $(k \times 1)$'lik (w_m) özvektörü, m'inci özdeğere (λ_m) ait özvektördür.

(X_i), (X) veri matrisinin i'inci kolonunu temsil ederse, m'inci temel bileşen, (P_m), aşağıdaki gibi ifade edilir.

(1.2.5) $P_m = w_{1m}X_1 + w_{2m}X_2 + ... + w_{km}X_k$

Bir diğer gösterim ile (P_m) matris formunda aşağıdaki gibi yazılır.

(1.2.6) $P_m = Xw_m$

Bu durumda bütün temel bileşenler, matris formunda aşağıdaki gibi yazılır.

(1.2.7) $P = XW$

(W) matrisi köşegen bir matris olduğu için $(W^{-1} = W')$ özelliği kullanılarak

(1.2.8) $P'P = W'X'XW = TW'W\Lambda = T\Lambda$

olarak yazılır. Her temel bileşen kendisiyle ilgili olan özdeğer tarafından belirlendiği için, (X) veri matrisinde meydana gelen toplam varyansın, *m*'inci temel bileşen tarafından açıklanan payı, *m*'inci özdeğerin, özdeğerlerin toplam değerine bölünmesiyle elde edilir. Burada dikkat edilmesi gereken nokta, özdeğerlerin toplamının, sistemdeki değişken sayısına yani *k*'ya eşit olmasıdır. Çünkü sistemdeki özdeğerlerin toplamı, özdeğer matrisinin (Λ) izine eşittir. Bununla birlikte özdeğer matrisinin (Λ) izi, korelasyon matrisinin (V) izine eşittir. Korelasyon matrisinin köşegeninde 1 rakamlarının yer alması ve köşegende, sistemdeki değişken sayısı kadar elemanın yer alması sonucunda toplamları *k*'ya eşittir. Yüksek korelasyona sahip bir sistemde birinci özdeğer, diğer özdeğerlerden oldukça büyük olacak ve buna bağlı olarak birinci temel bileşen, sistemdeki varyasyonun büyük bir kısmını açıklayacaktır.

Sonuç olarak veri matrisindeki her kolon bir diğer ifadeyle; her değişkene ait zaman serisi, temel bileşenlerin doğrusal bir kombinasyonu olarak ifade edilir. PCA'ya dayanan modellerin temelini de orijinal verilerin, temel bileşenlerle ifade edilmesi oluşturmaktadır. (X) veri matrisinin *i* kolonundaki orijinal verilerin temel bileşenlerle ifadesi aşağıda verilmiştir.

(1.2.9) $X_i = w_{i1}P_1 + w_{i2}P_2 + ... + w_{ik}P_k$

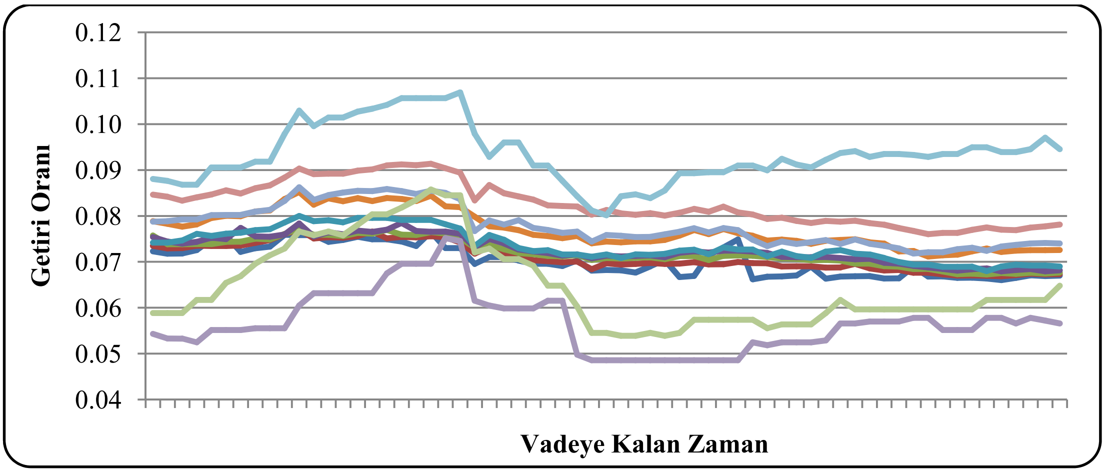
Literatürde orijinal verilerin, temel bileşenlerle ifade edilmesi için genellikle ilk birkaç temel bileşen kullanılmaktadır. Bu tercih, sistemdeki varyansın büyük bir kısmının, azaltılmış sayıda değişkenle açıklanmasına imkân tanıması nedeniyle hesaplamalarda büyük kolaylıklar sağlamaktadır. Ancak sistemdeki bütün temel değişkenlerin kullanılmasının tercih edilmesi de mümkündür. Çünkü temel bileşenlere ait kovaryans matrisi de köşegen bir matristir. Bir başka ifadeyle; temel bileşenler arasında doğrusal bir ilişki bulunmamaktadır.

PCA'da en iyi sonuçların alınabilmesi için analizde durağan verilerin kullanılması gerektiği yukarıda belirtilmişti. PCA'ya başlamadan önce analizde kullanacağımız getiri ve forward oranlarının, birim köklerinin olup olmadığı araştırılacaktır. Bu konuda literatürde Dickey – Fuller (1979), Philips ve Peron (1988) ve Elliot, Rotenberg ve Stock (1996) tarafından geliştirilen ADF – GLS yöntemleri bulunmaktadır. Dickey – Fuller testinin uzun bir dönemdir, birçok farklı uygulamalarda sağlam sonuçlar vermesi nedeniyle bu çalışmada Genişletilmiş Dickey – Fuller (ADF) testi kullanılacaktır (Greene, 2003: 645).

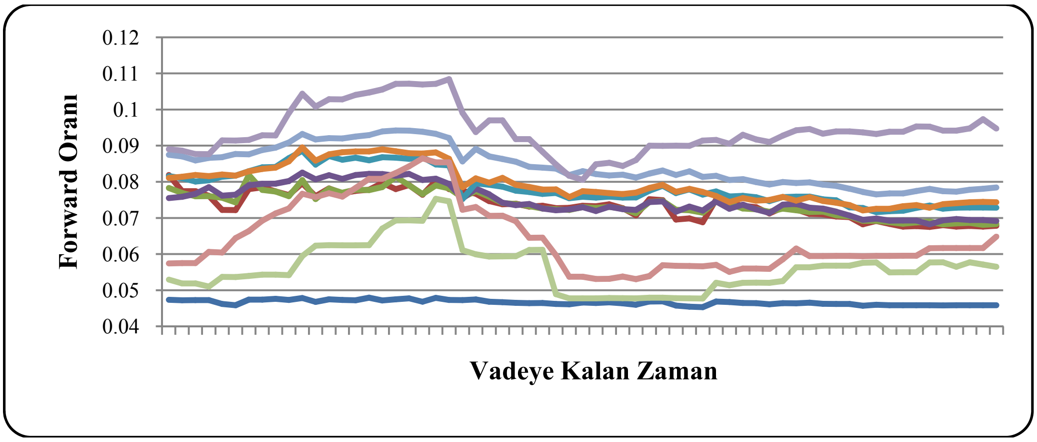
Dickey – Fuller (1979) testinde durağanlığın araştırılması amacıyla üç farklı regresyon denklemi kullanılabilir ve yöntem her formdaki eşitlik için hemen hemen aynıdır. Ancak burada dikkat edilmesi gereken nokta, kritik değerlerin tercih edilen regresyon denklemine ve örneklem sayısına göre değişmesi nedeniyle, test istatistiği ile tercih edilen regresyon denklemine ilişkin kritik değerlerin karşılaştırılması gerekliliğidir (Enders, 2004: 181-184). Bu çalışmadaki ADF testinde sabit sayılı rassal yürüyüş regresyon denklemi kullanılmıştır. Model ve sıfır hipotezi aşağıdaki gibi ifade edilir.

(1.2.10) $\Delta y_t = a_0 + \gamma y_{t-1} + \varepsilon_t$, $H_0 : \gamma = 0$, $\gamma = a_1 - 1$

Getiri ve forward oranlarına ait zaman serisi çizimleri sırasıyla Şekil 16 ve Şekil 17'de; test istatistikleri ve *p*-olasılık değerleri Tablo 9'da verilmiştir. ADF sonuçları, %95 güven aralığında ve sonsuz bir örneklem boyutu için değerlendirildiğinde getiri oranlarına ait 11 değişken ve forward oranlarına ait 10 değişken için, sıfır hipotezi reddedilememiş ve oranların durağan olmadığına karar verilmiştir.



Şekil 16. 11 Farklı Vadeye Ait Getiri Oranlarının Zaman Serisi Çizimleri



Şekil 17. Farklı Vadeye Ait Forward Oranlarının Zaman Serisi Çizimleri

Tablo 9. Getiri ve Forward Oranlarına Ait ADF Test İstatistikleri

		V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7	V8	V9	V10	V11
Getiri Oranı	Test istatistiği	-1,71	-0,38	-0,13	-0,22	-0,40	-0,55	-1,78	-0,51	-1,26	-1,80	-1,85
	p-olasılık değeri	0,43	0,91	0,94	0,93	0,91	0,88	0,39	0,89	0,65	0,38	0,36
Forward Oranı	Test istatistiği	-2,22	-1,50	-0,97	-0,46	-0,66	-0,71	-0,37	-1,29	-1,99	-1,81	
	p-olasılık değeri	0,18	0,54	0,77	0,90	0,86	0,84	0,91	0,63	0,29	0,37	
Kritik değer: -2,86 (Dickey ve Fuller 1981)												

Getiri ve forward oranlarına ait durağan bir zaman serisi elde etmek amacıyla verilerin birinci farkları alınmıştır. Gerek getiri oranlarının birinci farkları gerekse forward oranlarının birinci farkları kullanılarak tekrar edilmiş ADF test sonuçlarında elde edilen test istatistiklerinin hepsi kritik değerden küçüktür ve birim kök varlığını iddia eden sıfır hipotezi reddedilmiştir. Durağan veri setinin, başka bir ifadeyle; oranların günlük değişimlerini dikkate alan veri setinin normalleştirilmesinden sonra hesaplanan korelasyon matrislerine ilişkin özvektörler, bu özvektörlere ilişkin özdeğerler ve sistemdeki varyasyonun açıklanma yüzdeleri getiri ve forward oranları için sırasıyla Tablo 10 ve Tablo 11'de verilmiştir.

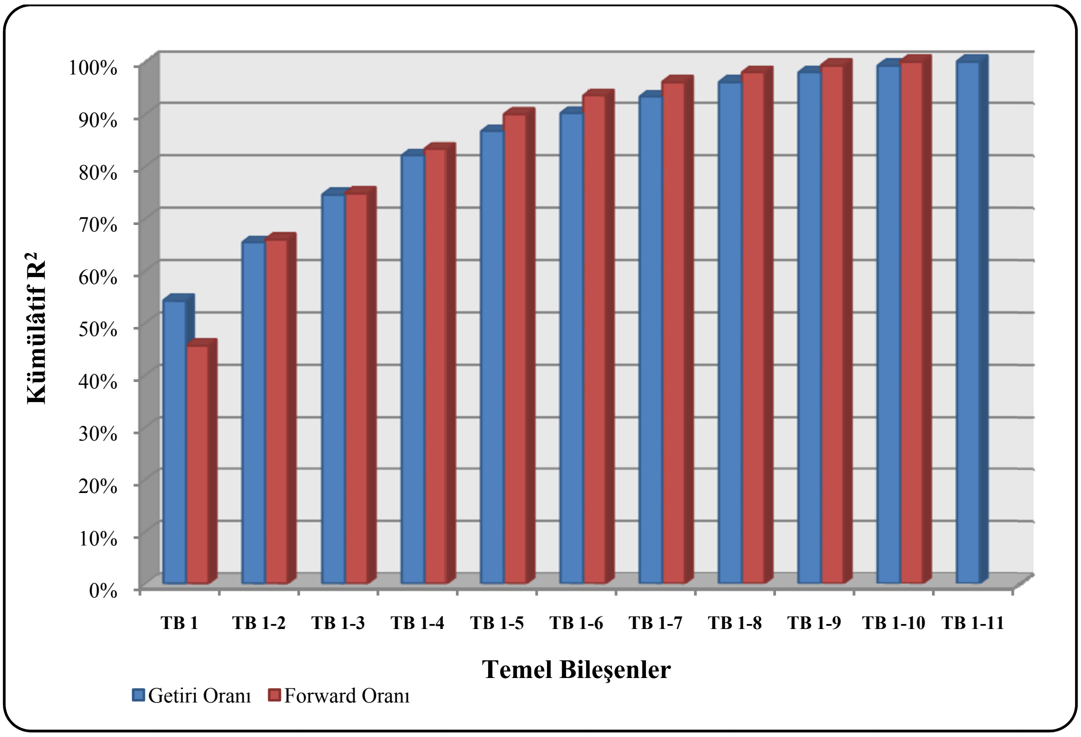
Tablo 10. Getiri Oranlarına Ait Özvektör ve Özdeğerler

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11
15 Gün	0,1225	-0,4895	0,6508	0,4050	0,2180	0,2312	0,0917	0,0425	-0,2037	0,0713	0,0048
45 Gün	0,3194	-0,2295	-0,2331	0,1120	0,2616	-0,5842	-0,3477	0,3293	-0,1254	0,3500	0,0341
2 Ay	0,3326	-0,1332	-0,1947	-0,1019	-0,2135	0,5078	-0,1809	0,6455	0,0035	-0,2646	-0,0203
4 Ay	0,2926	-0,0375	-0,3476	-0,1888	0,7039	0,3286	0,0867	-0,3335	-0,1578	-0,0970	0,0005
5 Ay	0,3323	-0,0826	-0,2525	0,0645	-0,4633	-0,0131	0,5008	-0,1567	-0,5151	0,2314	0,0756
8 Ay	0,2866	-0,1325	0,2970	-0,5984	-0,1854	0,1379	-0,2617	-0,2427	0,1936	0,4246	0,2353
10 Ay	0,3679	-0,0942	0,0354	0,0770	0,0318	-0,2645	0,3988	0,0161	0,5221	-0,3423	0,4780
15 Ay	0,3743	-0,0561	-0,0632	0,2226	-0,1367	0,0172	0,0047	-0,2332	0,4423	0,0922	-0,7250
32 Ay	0,3284	0,2503	0,1072	0,2757	-0,1897	-0,0641	-0,5452	-0,3712	-0,2541	-0,4173	0,1675
42 Ay	0,2001	0,6905	0,1069	0,3221	0,1470	0,2424	0,0734	0,1900	0,1096	0,4488	0,1807
54 ay	0,2660	0,3356	0,4282	-0,4241	0,1288	-0,2951	0,2222	0,2231	-0,2648	-0,2407	-0,3499
Özdeğer	5,9662	1,2235	1,0035	0,8228	0,5096	0,3840	0,3462	0,3072	0,2016	0,1437	0,0920
R^2	54,24%	11,12%	9,12%	7,48%	4,63%	3,49%	3,15%	2,79%	1,83%	1,31%	0,84%
Kümülâtif R^2	54,24%	65,36%	74,48%	81,96%	86,60%	90,09%	93,23%	96,03%	97,86%	99,17%	100,00%

Tablo 11. Forward Oranlarına Ait Özvektör ve Özdeğerler

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10
45 Gün	0,2949	0,4863	-0,0167	-0,0696	0,0617	0,2486	-0,3019	-0,0723	0,7105	0,0681
2 Ay	0,3061	0,4597	-0,0437	-0,1131	0,0959	0,2438	0,1679	0,6389	-0,4157	0,0484
4 Ay	0,3392	0,3436	-0,0134	-0,0260	0,1695	-0,6769	-0,2992	-0,2922	-0,3028	-0,1119
5 Ay	0,3934	0,1524	0,0271	0,2277	-0,2273	0,2797	0,5486	-0,5624	-0,1429	-0,0430
8 Ay	0,3864	-0,2503	0,1026	0,2936	-0,1157	-0,3545	0,1598	0,2504	0,2075	0,6488
10 Ay	0,1757	-0,1472	0,7502	-0,6065	-0,0583	0,0518	-0,0052	-0,0758	-0,0423	0,0563
15 Ay	0,3871	-0,2614	0,0883	0,1959	-0,3401	-0,0891	-0,0810	0,3090	0,1639	-0,6951
32 Ay	0,3379	-0,3502	-0,2314	0,0062	-0,0917	0,4109	-0,5981	-0,1416	-0,3303	0,2133
42 Ay	0,2110	-0,2018	-0,6001	-0,6521	-0,0630	-0,1557	0,2787	-0,0169	0,1512	-0,0202
54 ay	0,2465	-0,3081	0,0461	0,1100	0,8728	0,1135	0,1504	-0,0224	0,0818	-0,1597
Özdeğer	4,5661	2,0241	0,8874	0,8456	0,6624	0,3563	0,2661	0,1789	0,1382	0,0749
R^2	45,66%	20,24%	8,87%	8,46%	6,62%	3,56%	2,66%	1,79%	1,38%	0,75%
Kümülâtif R^2	45,66%	65,90%	74,78%	83,23%	89,86%	93,42%	96,08%	97,87%	99,25%	100,00%

Getiri ve forward oranlarının ilk üç temel bileşenlerine ait faktör ağırlıkları incelendiğinde ortak sonuçlar göze çarpmaktadır. Birinci temel bileşenler değerlendirildiğinde getiri ve forward oranlarına ait faktör ağırlıkları pozitif değerlere sahiptir. Bir başka ifadeyle, getiri ve forward oranlarının ağırlık katsayılarında işaret değişimi bulunmamaktadır. Bunun sonucu olarak, birinci temel bileşen, getiri ve forward eğrilerinde aşağı veya yukarı yönlü paralel değişimlere neden olmaktadır. Getiri oranlarına ait birinci temel bileşen, getiri oranlarındaki toplam varyasyonun %54,24'ünü, forward oranlarına ait birinci temel bileşen ise forward oranlarındaki toplam varyasyonun %45,66'sını açıklamaktadır. İkinci temel bileşenler incelendiğinde ise, ağırlık katsayılarının getiri oranları için pozitif değerlerden negatif değerlere ve forward oranları için negatif değerlerden pozitif değerlere geçtiğini görmekteyiz. Bir başka ifadeyle; eğim katsayısı işaret değiştirerek getiri ve forward eğrisinin yön değiştirmesine yol açmaktadır. Eğim katsayısındaki değişimleri yorumlamak amacıyla kullanılabilecek ikinci temel bileşenler; sırasıyla getiri oranlarındaki varyasyonun %11,12'sini, forward oranlarındaki varyasyonun %20,24'ünü açıklamaktadır. Getiri ve forward eğrilerindeki dalgalanma veya bükülme hareketlerine yol açan üçüncü temel bileşenlerin incelenmesi sonucunda bu bileşenlere ait faktör ağırlıklarının en az iki kez işaret değiştirdikleri söylenebilir. Eğrilere ait içbükey (konveks) formların açıklanmasında faydalı olan üçüncü temel bileşenler getiri oranlarındaki toplam varyasyonun %9,12'sini, forward oranlarındaki toplam varyasyonun %8,87'sini açıklamaktadır. Getiri ve forward oranlarına ait ilk üç temel bileşen birlikte ele alındığında; getiri oranlarına ait toplam varyasyonun %74,48'i, forward oranlarına ait toplam varyasyonun % 74,78'i açıklanmaktadır.



Şekil 18. Getiri ve Forward Oranlarına Ait Temel Bileşenlerin Getiri ve Forward Oranlarındaki Varyasyonu Açıklama Yüzdeleri

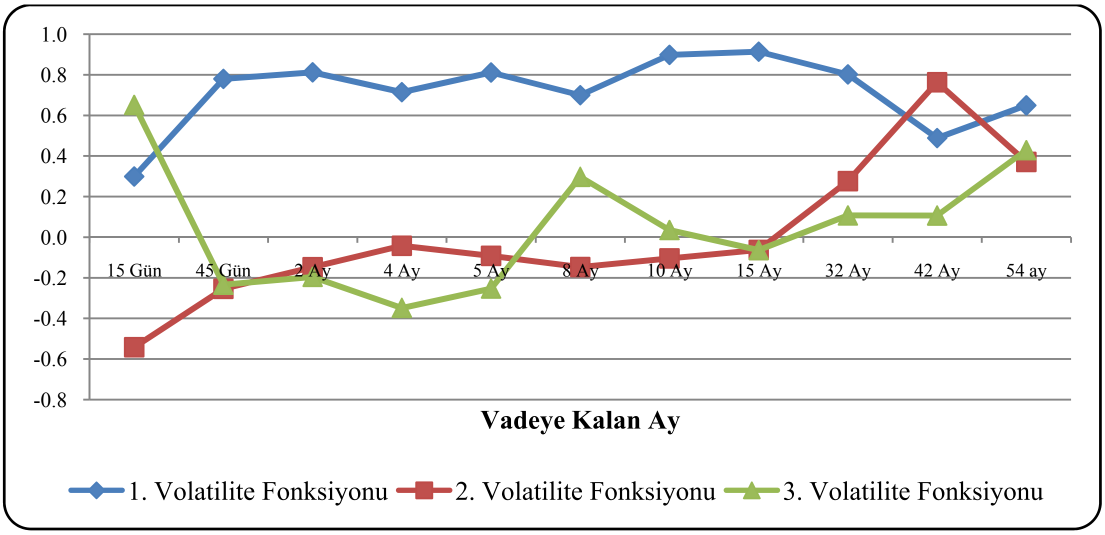
Şekil 18'de görüldüğü üzere, bu çalışmanın kapsadığı inceleme döneminde, İMKB Tahvil ve Bono Piyasasında işlem gören sabit getirili menkul kıymetlere ait getiri ve forward oranlarındaki toplam varyasyonun en az %90'ının açıklanabilmesi için kendileriyle ilgili ilk 6 temel bileşenin dikkate alınması gereklidir. Ancak 6 değişkenin dikkate alınması ağır bir işlem yükü getirecektir. Modellemeye dâhil edilecek değişken sayısının belirlenmesinde farklı yaklaşımlar söz konusudur. Yaklaşımların birinde, toplam varyasyonun açıklanması hedeflenen yüzdesine ulaşılıncaya kadar değişkenler modele teker teker dâhil edilebilir. Örneğin; getiri oranlarındaki toplam varyasyonun %75'ini açıklamayı hedefleyen bir model için 3 değişken; toplam varyasyonun %90'ını açıklamayı hedefleyen bir model için 6 değişken kullanılmalıdır. Bir diğer yaklaşım ise modeldeki değişkenlere ait özdeğerlerin dikkate alınarak belirlenmesidir. Bu yaklaşımda 1'den büyük özdeğerler modele dâhil edilmektedir (Hair vd., 1995). Örneğin; ikinci yaklaşım çerçevesinde; incelediğimiz veri seti için, getiri oranlarındaki değişimi açıklamak için üç değişken; forward oranlarındaki değişimi açıklamak için iki değişken kullanılmalıdır.

Belirli tanımlamalar ile kısa vadeli faiz oranlarını da ifade edebilen HJM yaklaşımı, hem modeldeki risk faktörü (bağımsız değişken) sayısı hem de faktörlere ait volatilite yapısı için geniş bir alternatif sunmaktadır. HJM yaklaşımı çerçevesinde modele dâhil edilen iki faktörün forward oranlarındaki varyasyonu açıklamak için yeterli olduğu belirtilmiştir (Angelini ve Herzel, 2005: 1093-1120). HJM yaklaşımında hedging işlemleri için çok faktörlü modeller gerekli olurken (özellikle swaption sözleşmeleri için); fiyatlama amacıyla iki faktörlü bir modelin yeterli olduğu, iki faktörlü bir model ile üç faktörlü bir model arasında açıklanan varyasyonun payı bakımından dikkat çekici bir farkın bulunmadığı belirtilmiştir (Driessen vd., 2003: 635-672). HJM yaklaşımının ampirik olarak değerlendirildiği bir çalışmada; kısa ve orta vadelerin söz konusu olması durumunda tek faktörlü bir modelin fiyatlama için yeterli olduğu ve modelde kullanılan faktör sayısından ziyade teorik volatilite yapısının piyasada gözlemlenen volatilite yapısına kalibre edilme sürecinde kullanılan parametre sayısının daha etkili olduğu belirtilmiştir (Amin ve Morton, 1994: 141-180). HJM yaklaşımı çerçevesinde 1989 – 1992 yılları arasında Birleşik Krallık piyasalarını kapsayan bir çalışmada forward oranlarındaki varyasyonun % 92'si tek faktör tarafından açıklanmıştır (Rebonato, 2000).

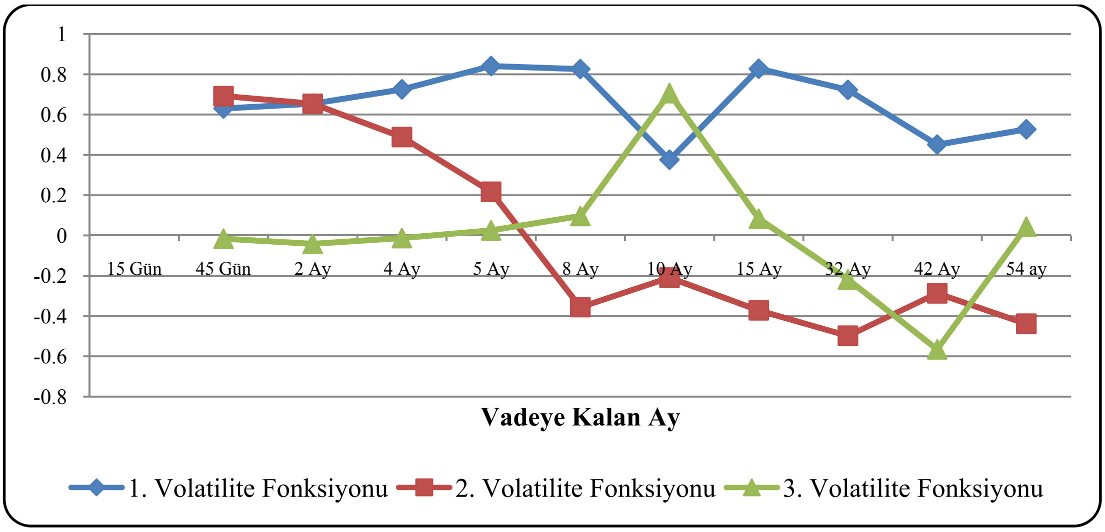
PCA'da kullanılan ayrıştırma sonucunda, ele alınan vadelere ilişkin getiri ve forward oranlarına ait volatilite tahminlerinin gerçekleştirilebilmesi, her temel bileşene ait faktör ağırlıkları ile her temel bileşene ait özdeğerin karekökünün çarpılmasıyla mümkün olmaktadır (Jarrow, 2002: 318). Örneğin; birinci temel bileşene ait faktör ağırlıklarının birinci temel bileşene ait özdeğerin karekökü ile çarpılması sonucunda modeldeki birinci risk kaynağının farklı vadelere ilişkin volatiliteleri elde edilmiş olacaktır. Bu çalışmada incelenen döneme ait getiri ve forward oranlarına ilişkin ilk üç faktörün farklı vadelere ait volatilite tahmin değerleri Tablo 12'de, grafiksel sunumları ise Şekil 19 ve Şekil 20'de verilmiştir.

Tablo 12. Farklı Vadelere Ait Getiri ve Forward Oranlarına İlişkin Volatilite Fonksiyonları

Volatilite Fonksiyonları						
Getiri Oranları			Vadeye Kalan Süre	Forward Oranları		
P3	P2	P1		P1	P2	P3
0,6519	-0,5414	0,2992	**15 Gün**			
-0,2335	-0,2539	0,7802	**45 Gün**	0,6302	0,6919	-0,0157
-0,1950	-0,1473	0,8124	**2 Ay**	0,6541	0,6540	-0,0412
-0,3482	-0,0415	0,7147	**4 Ay**	0,7248	0,4888	-0,0126
-0,2529	-0,0914	0,8117	**5 Ay**	0,8406	0,2168	0,0255
0,2975	-0,1466	0,7000	**8 Ay**	0,8257	-0,3561	0,0967
0,0355	-0,1042	0,8986	**10 Ay**	0,3754	-0,2094	0,7067
-0,0633	-0,0621	0,9143	**15 Ay**	0,8272	-0,3719	0,0832
0,1074	0,2769	0,8021	**32 Ay**	0,7220	-0,4982	-0,2180
0,1071	0,7638	0,4888	**42 Ay**	0,4509	-0,2871	-0,5653
0,4289	0,3712	0,6497	**54 ay**	0,5267	-0,4383	0,0434



Şekil 19. Farklı Vadelere Ait Getiri Oranlarına İlişkin Volatilite Fonksiyonları



Şekil 20. Farklı Vadelere Ait Forward Oranlarına İlişkin Volatilite Fonksiyonları

PCA ile hesaplanan volatilite değerleri piyasada gözlemlenebilen, bir diğer ifadeyle; alım satımı yapılan farklı vadelere sahip menkul kıymetlere ait volatilitelerdir. Tablo 12, Şekil 19 ve Şekil 20'de 54 aylık bir spektruma sahip getiri ve forward eğrisi için sadece 11 farklı vade kullanılmaktadır. Bu 11 vade dışındaki vadelere ilişkin volatilite değerleri eksiktir. Ancak modellerin teorik altyapısı ve uygulama açısından her ana ilişkin volatilite değerleri gerekmektedir. Bu eksik değerleri enterpolasyon ile türetmek mümkündür. Bu işlem için farklı alternatifler vardır. Ancak kübik eğri (cubic spline) yöntemi, eksik vadelere ilişkin düzgünleştirilmiş (iki kez türevi alınabilir) değerleri elde etmede diğer alternatiflere göre daha yüksek performans göstermektedir (Bliss, 1997: 197-231). Genel olarak; eldeki sınırlı sayıdaki gözlemden (başlangıç ve bitiş noktalarını bilmek şartıyla) yararlanarak istenilen ara gözlem değerlerini (ε_p) yaratmak ve üçüncü dereceden bir polinoma ait eğri $(s(\tau))$ elde etmek için kullanılan kübik eğri formülü aşağıda verilmiştir. $(s(\tau))$ eğrisi, (τ^i) ve $\left((\tau-\varepsilon_p)_+^3\right)$ fonksiyonlarının[16] lineer kombinasyonudur (James ve Webber, 2000: 434-436).

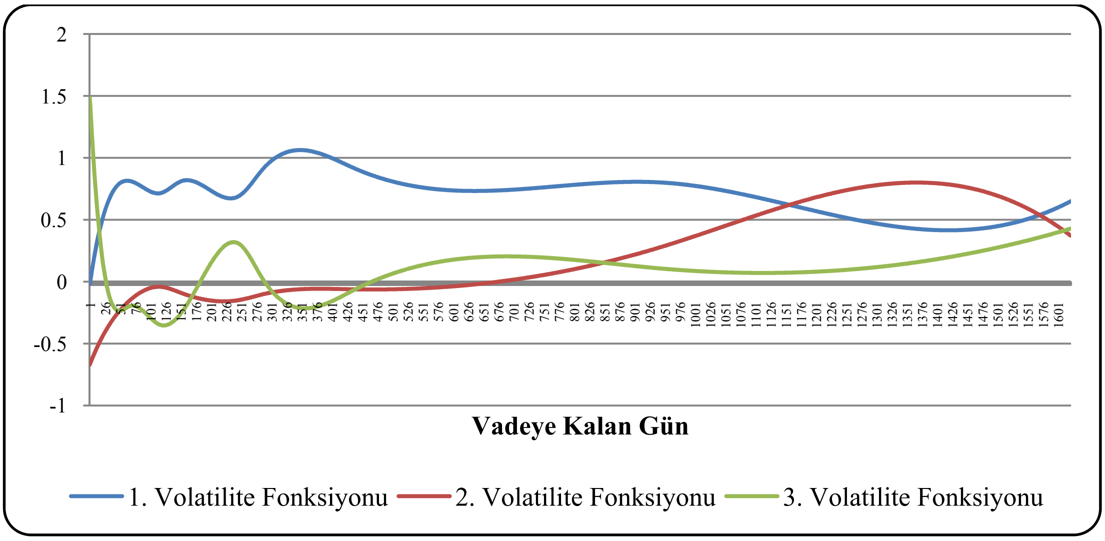
(1.2.11) [17] $s(\tau)=\sum_{i=0}^{3} a_i\tau^i+\frac{1}{3!}\sum_{p=1}^{n-1} b_p\left(\tau-\varepsilon_p\right)_+^3$

---

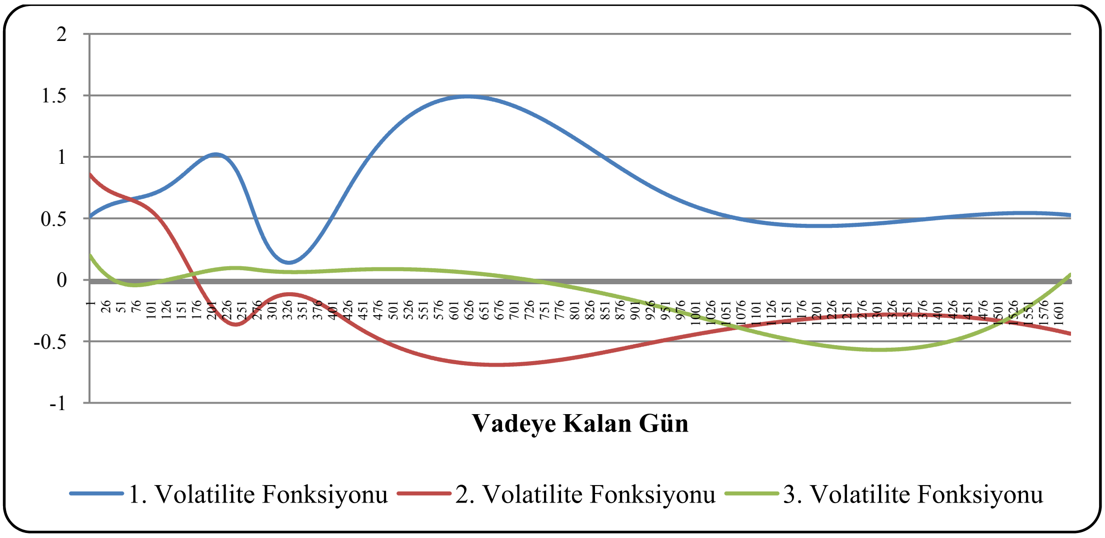
[16] $\left(\tau-\varepsilon_p\right)_+ = \max\left(\tau-\varepsilon_p,0\right)$

[17] $\left(a_0,a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3,...,b_{n-1}\right)$ parametre değerleridir.

Bu çalışmada 54 aylık (yaklaşık olarak 1622 günlük) bir spektruma sahip getiri ve forward eğrisinin her gününe ilişkin volatilite değerleri Matlab'da kübik eğri fonksiyonu kullanılarak türetilmiştir. 1622 gün için elde edilen veriler Şekil 21 ve Şekil 22'de gösterilmiştir. Elde edilen bu volatilite fonksiyonları kullanılarak HJM yaklaşımı çerçevesinde geleceğe ilişkin forward oranları tahmin edilebilir.



Şekil 21. Getiri Oranlarına Ait Volatilite Fonksiyonları Enterpolasyon Değerleri



Şekil 22. Forward Oranlarına Ait Volatilite Fonksiyonları Enterpolasyon Değerleri

Bu çalışmada HJM yaklaşımı çerçevesinde forward oranları kullanılarak volatilite yapıları belirlenecektir. Volatilite yapıları; sabit volatilite (Ho ve Lee, 1986: 1011-1029), sabit azalan volatilite (Au ve Thurston, 1995: 371-375), üstel azalan volatilite (Vasicek, 1977: 177-188) ve kambur volatilite (Mercurio ve Moraleda, 2000: 205-214) olmak üzere dört adet tek faktörlü model ve bir adet iki faktörlü volatilite yapılı model olmak üzere toplam beş farklı model çerçevesinde belirlenecektir.

Öncelikle, Ho ve Lee (1986) tarafından kesik zamanlı olarak önerilen, sonrasında Heath, Jarrow ve Morton tarafından sürekli zaman olarak yorumlanan tek faktörlü modelde; volatilite fonksiyonu $\left(\sigma(t;T)\right)$, içinde bulunulan zaman (t) değişkeninden ve vade tarihi (T) parametresinden bağımsız bir sabit sayı $\left(\sigma\right)$ olarak kabul edilmektedir. Doğrusal kesit regresyon analiziyle gözlemlenen volatilite değerleri, bir sabit sayı üzerine regres edilerek söz konusu sabit volatilite $\left(\sigma(t;T)=\widehat{\sigma}+\varepsilon\right)$ değeri bulunabilir.

Au ve Thurston (1995) tarafından önerilen tek faktörlü modeldeki volatilite fonksiyonu $\left(\sigma(t;T)\right)$, içinde bulunulan zaman (t) değişkenine ve vade tarihi (T) parametresine, bir diğer ifadeyle; deterministik bir fonksiyon olan vadeye kalan zamana $(T-t)$ bağlıdır. Enterpolasyon ile elde edilen volatilite değerleri, (vadeye kalan zaman + 1) fonksiyonuyla çarpılır ve sonuçlar bir sabit sayı üzerine regres edilirse, bu yapıdaki sabit azalan volatilite $\left(\sigma(t;T)(1+T-t)=\widehat{\sigma}+\varepsilon\right)$ değerleri bulunabilir.

HJM yaklaşımında, parametre seçimlerine bağlı olarak kısa vadeli faiz oranı modellerinin elde edilebileceği yukarıdaki bölümlerde belirtilmişti. Bunun bir örneği olarak; HJM yaklaşımında volatilite yapısı, üstel azalan bir fonksiyon olarak belirlenirse kısa vadeli faiz oranı modeli olan Vasicek (1977) ile aynı sonuçlar elde edilir (Heath vd., 1990: 419-440). Üstel azalan volatilite;

(1.2.12) $\left(\sigma(t;T)=\sigma e^{-\lambda(T-t)}\right)$

iki sabit parametrenin (σ, λ) ve vadeye kalan zamanın bir fonksiyonu olarak tanımlanabilir. Bu fonksiyonun logaritması alınarak doğrusal olarak ifade edilmesi mümkündür.

(1.2.13) $\ln \sigma(t;T) = \ln(\sigma) - \lambda(T-t)$

Enterpolasyon ile elde edilen volatilite değerleri, (1.2.13) numaralı eşitliğin sağ tarafındaki doğrusal yapı üzerine (1.2.14)'teki gibi regres edilirse hesaplamalarda kullanılacak iki parametre (σ, λ) değeri elde edilir.

(1.2.14) $\ln \sigma(t;T) = \widehat{\alpha} + \widehat{\beta}(T-t) + \varepsilon$

Volatilite yapısı, 3 farklı parametre $(\sigma, \lambda, \gamma)$ ve vadeye kalan zaman değişkeninden oluşan üstel azalan bir fonksiyon olarak belirlenirse kambur volatilite yapısı $\left(\sigma(t;T) = \sigma\left(1+\gamma(T-t)\right)e^{-\lambda(T-t)}\right)$ elde edilebilir (Brigo ve Mercurio, 2006: 185). Bir önceki volatilite yapısında olduğu gibi kambur volatilite fonksiyonunun logaritması alınırsa;

(1.2.15) $\ln\left(\sigma(t;T)\right) = \ln\left(\sigma\right) - \lambda(T-t) + \ln\left(1+\gamma(T-t)\right)$

elde edilir. Bu eşitlikteki parametrelerin tahmin edilmesi için aşağıdaki doğrusal olmayan regresyon denklemi Marquardt yöntemi kullanılmıştır.

(1.2.16) $\ln\left(\sigma(t;T)\right) = \widehat{\alpha} + \widehat{\beta}(T-t) + \ln\left(1+\widehat{\gamma}(T-t)\right) + \varepsilon$

Tek faktörlü farklı volatilite yapılarına ilişkin regresyon sonuçları; sabit, sabit azalan, üstel azalan ve kambur volatiliteler için sırasıyla Tablo 13, Tablo 14, Tablo 15 ve Tablo 16'da verilmiştir. Tablolar, t-istatistik ve p-olasılık değerleri dikkate alınarak incelendiğinde hesaplanan katsayıların tamamının %5 anlamlılık düzeyinde anlamlı olduğu söylenebilir.

Tablo 13. Sabit Volatilite Yapısı, Regresyon Sonuçları

Sabit Volatilite Yapısı $\left(\sigma(t;T)=\sigma\right)$				
$\left(\sigma(t;T)=\widehat{\sigma}+\varepsilon\right)$				
	Katsayı	**Standart Hata**	**t - İstatistiği**	**p - Değeri**
Sigma_şapka	0,75729	0,00906	83,56301	0,00000

Tablo 14. Sabit Azalan Volatilite Yapısı, Regresyon Sonuçları

Sabit Azalan Volatilite Yapısı $\left(\sigma(t;T)=\sigma/(1+T-t)\right)$				
$\left(\sigma(t;T)(1+T-t)=\widehat{\sigma}+\varepsilon\right)$				
	Katsayı	**Standart Hata**	**t - İstatistiği**	**p - Değeri**
Sigma_şapka	2,29570	0,02638	87,01189	0,00000

Tablo 15. Üstel Azalan Volatilite Yapısı, Regresyon Sonuçları

Üstel Azalan Volatilite Yapısı[18] $\left(\sigma(t;T)=\sigma e^{-\lambda(T-t)}\right)$				
$\left(\ln\sigma(t;T)=\widehat{\alpha}+\widehat{\beta}(T-t)+\varepsilon\right)$				
	Katsayı	**Standart Hata**	**t - İstatistiği**	**p - Değeri**
Alpha_şapka	-0,18767	0,02440	-7,69173	0,00000
Beta_şapka	-0,09464	0,00951	-9,95589	0,00000

Tablo16. Kambur Volatilite Yapısı, Regresyon Sonuçları

Kambur Volatilite Yapısı[19] $\left(\sigma(t;T)=\sigma\left(1+\gamma(T-t)\right)e^{-\lambda(T-t)}\right)$				
$\ln\left(\sigma(t;T)\right)=\widehat{\alpha}+\widehat{\beta}(T-t)+\ln\left(1+\widehat{\gamma}(T-t)\right)+\varepsilon$				
	Katsayı	**Standart Hata**	**t - İstatistiği**	**p - Değeri**
Alpha_şapka	-0,17518	0,02584	-6,77941	0,00000
Beta_şapka	-0,09283	0,00896	-10,36049	0,00000
Gamma_şapka	0,00001564	0,00000279	5,605734	0,00000

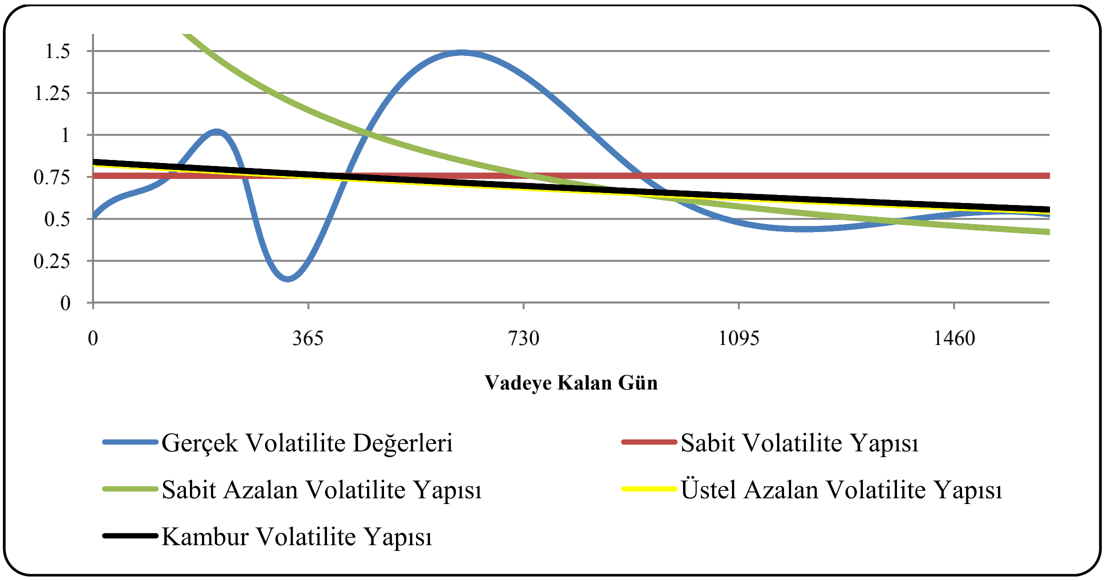
Farklı vadelere ilişkin gözlemlenen volatilite değerleri ile farklı volatilite yapılarına bağlı olarak hesaplanan tahmini volatilite eğrileri Şekil 23'te verilmiştir. Tahmini volatilite değerleri ile gözlemler arasındaki farklılıkların belirlenmesi amacıyla

---

[18] $\left(\widehat{\alpha}=\ln(\sigma)\rightarrow\sigma=e^{\widehat{\alpha}},\widehat{\beta}=-\lambda\rightarrow\lambda=-\widehat{\beta}\right)$

[19] $\left(\widehat{\alpha}=\ln(\sigma)\rightarrow\sigma=e^{\widehat{\alpha}},\widehat{\beta}=-\lambda\rightarrow\lambda=-\widehat{\beta},\gamma=\widehat{\gamma}\right)$

volatilite yapılarına ait ortalama hata kareleri toplamının kökü (RMSE) hesaplanmıştır. Farklı volatilite yapılarına ilişkin RMSE değerlerleri Tablo 17'de özetlenmiştir.



Şekil 23. Forward Oranları Volatilite Eğrileri

Şekil 23'teki gerçek volatilite eğrisi incelendiğinde kısa vadelere (1 yıldan kısa) ilişkin volatilite değerleri minimum 0,14 ile maksimum 1,02 değerleri arasında hareket etmekte ve ortalama 0,64 değerini almakta; orta uzunluktaki vadelere (1 yıl – 3 yıl arası) ilişkin volatilite değerleri minimum 0,25 ile maksimum 1,49 değerleri arasında hareket etmekte ve ortalama 1,01 değerini almakta ve son olarak uzun vadelere (3 yıldan uzun) ilişkin volatilite değerleri minimum 0,43 ile maksimum 1,54 değerleri arasında hareket etmekte ve ortalama 0,49 değerini almaktadır. Bu değerler dikkate alınırsa forward oranlarının, kısa dönemden orta uzunluktaki vadelere geçilirken öncelikle arttığını; sonrasında ise uzun vadelere geçildikçe tekrar azalarak göreli olarak düşük seviyelere geldiğini; kambur bir yapı oluşturduğunu söylemek mümkündür.

Tablo17. Volatilite Yapılarına İlişkin RMSE Değerleri

	RMSE
Sabit Volatilite Yapısı (Ho ve Lee, 1986)	0,3649
Sabit Azalan Volatilite Yapısı (Au ve Thurston, 1985)	0,5636
Üstel Azalan Volatilite Yapısı (Vasicek, 1977)	0,3596
Kambur Volatilite Yapısı (Mercurio ve Moraleda, 2000)	0,3572

Tablo 17'ye göre, en iyi performansı sergileyen tek faktörlü volatilite yapısı kambur volatilite yapısı iken en düşük performansı sergileyen volatilite yapısı sabit azalan volatilite yapısıdır. Üstel azalan volatilite yapısı, kambur volatilite yapısına çok yakın bir performans sergilemesine karşın, üstel azalan volatilite yapısının performansı kambur volatilite yapısının performansına göre %0,7 daha düşüktür. Sabit azalan volatilite ve sabit volatilite yapılarının performansları, kambur volatilite yapısının performansına göre sırasıyla %58 ve %22 daha düşüktür.

Kambur volatilite yapısındaki üstel azalış katsayısı (λ), vade uzadıkça volatilite değerini aşağıya çekmektedir. Bu durum üstel azalan volatilite yapısı için de geçerlidir. Ancak kambur volatilite yapısında bulunan doğrusal artış katsayısı (γ), vade uzadıkça volatilite değerini üstel azalış katsayısına göre daha düşük bir şiddette yukarıya doğru çekmektedir. Bu iki parametrenin etkileşimi kambur bir yapıya olanak tanımaktadır. Ancak doğrusal artış katsayısı 0,00001564 gibi çok küçük bir değer olduğu için Şekil 23'teki kambur volatilite yapısına ait eğri ile üstel azalan volatilite yapısına ait eğri arasındaki farklılık görsel olarak açık değildir. Ancak, RMSE değerleri dikkate alındığında kambur volatilite yapısının performansı daha yüksektir.

Tek faktörlü model çerçevesinde kambur volatilite yapısına ilişkin hesaplanan değerler Tablo 18'de verilmiştir. İki faktörlü model çerçevesinde ise farklı vadeler için hesaplanan birinci ve ikinci volatilite değerleri Tablo 19'da verilmiştir. İki faktörlü modele ait birinci ve ikinci volatilite fonksiyonları olarak yukarıda açıklanan PCA ve kübik eğri yöntemiyle yapılan enterpolasyon sonucunda elde edilen değerler kullanılmıştır (Jarrow, 2002: 308-309).

Tablo 18. Tek Faktörlü Model Çerçevesinde Kambur Volatilite Yapısıyla Farklı Vadeler İçin Elde Edilen Volatilite Değerleri

t	**σ**	***t***	***σ***	***t***	***σ***	***t***	***σ***	***t***	***σ***	***t***	***σ***	***t***	***σ***	***t***	***σ***	***t***	***σ***	***t***	***σ***	***t***	***σ***	***t***	***σ***
1	0,83909	**31**	0,83272	**61**	0,82639	**91**	0,82011	**121**	0,81387	**151**	0,80769	**181**	0,80155	**211**	0,78942	**241**	0,78342	**271**	0,06810	**301**	0,77746	**331**	0,77155
2	0,83888	**32**	0,83250	**62**	0,82618	**92**	0,81990	**122**	0,81367	**152**	0,80748	**182**	0,80135	**212**	0,78921	**242**	0,78322	**272**	0,07282	**302**	0,77726	**332**	0,77136
3	0,83867	**33**	0,83229	**63**	0,82597	**93**	0,81969	**123**	0,81346	**153**	0,80728	**183**	0,80114	**213**	0,78901	**243**	0,78302	**273**	0,07083	**303**	0,77707	**333**	0,77116
4	0,83845	**34**	0,83208	**64**	0,82576	**94**	0,81948	**124**	0,81325	**154**	0,80707	**184**	0,80094	**214**	0,78881	**244**	0,78282	**274**	0,07055	**304**	0,77687	**334**	0,77097
5	0,83824	**35**	0,83187	**65**	0,82555	**95**	0,81927	**125**	0,81305	**155**	0,80687	**185**	0,80074	**215**	0,78861	**245**	0,78262	**275**	0,06976	**305**	0,77667	**335**	0,77077
6	0,83803	**36**	0,83166	**66**	0,82534	**96**	0,81907	**126**	0,81284	**156**	0,80666	**186**	0,80053	**216**	0,78841	**246**	0,78242	**276**	0,06976	**306**	0,77647	**336**	0,77057
7	0,83781	**37**	0,83145	**67**	0,82513	**97**	0,81886	**127**	0,81263	**157**	0,80646	**187**	0,80033	**217**	0,78821	**247**	0,78222	**277**	0,06704	**307**	0,77628	**337**	0,77038
8	0,83760	**38**	0,83123	**68**	0,82492	**98**	0,81865	**128**	0,81243	**158**	0,80625	**188**	0,80013	**218**	0,78801	**248**	0,78202	**278**	0,06625	**308**	0,77608	**338**	0,77018
9	0,83739	**39**	0,83102	**69**	0,82471	**99**	0,81844	**129**	0,81222	**159**	0,80605	**189**	0,79992	**219**	0,78781	**249**	0,78182	**279**	0,06945	**309**	0,77588	**339**	0,76999
10	0,83717	**40**	0,83081	**70**	0,82450	**100**	0,81823	**130**	0,81201	**160**	0,80584	**190**	0,79972	**220**	0,78761	**250**	0,78163	**280**	0,06638	**310**	0,77569	**340**	0,76979
11	0,83696	**41**	0,83060	**71**	0,82429	**101**	0,81802	**131**	0,81181	**161**	0,80564	**191**	0,79952	**221**	0,78741	**251**	0,78143	**281**	0,06174	**311**	0,77549	**341**	0,76959
12	0,83675	**42**	0,83039	**72**	0,82408	**102**	0,81782	**132**	0,81160	**162**	0,80543	**192**	0,79931	**222**	0,78721	**252**	0,78123	**282**	0,07223	**312**	0,77529	**342**	0,76940
13	0,83654	**43**	0,83018	**73**	0,82387	**103**	0,81761	**133**	0,81140	**163**	0,80523	**193**	0,79911	**223**	0,78701	**253**	0,78103	**283**	0,07036	**313**	0,77509	**343**	0,76920
14	0,83632	**44**	0,82997	**74**	0,82366	**104**	0,81740	**134**	0,81119	**164**	0,80502	**194**	0,79891	**224**	0,78681	**254**	0,78083	**284**	0,06672	**314**	0,77490	**344**	0,76901
15	0,83611	**45**	0,82976	**75**	0,82345	**105**	0,81719	**135**	0,81098	**165**	0,80482	**195**	0,79870	**225**	0,78661	**255**	0,78063	**285**	0,06575	**315**	0,77470	**345**	0,76881
16	0,83590	**46**	0,82955	**76**	0,82324	**106**	0,81699	**136**	0,81078	**166**	0,80461	**196**	0,79850	**226**	0,78641	**256**	0,78043	**286**	0,06659	**316**	0,77450	**346**	0,76862
17	0,83569	**47**	0,82933	**77**	0,82303	**107**	0,81678	**137**	0,81057	**167**	0,80441	**197**	0,79830	**227**	0,78621	**257**	0,78024	**287**	0,07030	**317**	0,77431	**347**	0,76842
18	0,83547	**48**	0,82912	**78**	0,82282	**108**	0,81657	**138**	0,81036	**168**	0,80421	**198**	0,79809	**228**	0,78601	**258**	0,78004	**288**	0,06635	**318**	0,77411	**348**	0,76823
19	0,83526	**49**	0,82891	**79**	0,82261	**109**	0,81636	**139**	0,81016	**169**	0,80400	**199**	0,79789	**229**	0,78581	**259**	0,77984	**289**	0,06955	**319**	0,77391	**349**	0,76803
20	0,83505	**50**	0,82870	**80**	0,82240	**110**	0,81615	**140**	0,80995	**170**	0,80380	**200**	0,79769	**230**	0,78561	**260**	0,77964	**290**	0,06695	**320**	0,77372	**350**	0,76784
21	0,83484	**51**	0,82849	**81**	0,82220	**111**	0,81595	**141**	0,80975	**171**	0,80359	**201**	0,79749	**231**	0,78541	**261**	0,77944	**291**	0,07026	**321**	0,77352	**351**	0,76764
22	0,83462	**52**	0,82828	**82**	0,82199	**112**	0,81574	**142**	0,80954	**172**	0,80339	**202**	0,79728	**232**	0,78521	**262**	0,77924	**292**	0,06701	**322**	0,77332	**352**	0,76744
23	0,83441	**53**	0,82807	**83**	0,82178	**113**	0,81553	**143**	0,80933	**173**	0,80318	**203**	0,79708	**233**	0,78501	**263**	0,77905	**293**	0,07073	**323**	0,77313	**353**	0,76725
24	0,83420	**54**	0,82786	**84**	0,82157	**114**	0,81532	**144**	0,80913	**174**	0,80298	**204**	0,79688	**234**	0,78481	**264**	0,77885	**294**	0,07131	**324**	0,77293	**354**	0,76705
25	0,83399	**55**	0,82765	**85**	0,82136	**115**	0,81512	**145**	0,80892	**175**	0,80278	**205**	0,79667	**235**	0,78461	**265**	0,77865	**295**	0,07250	**325**	0,77273	**355**	0,76686
26	0,83378	**56**	0,82744	**86**	0,82115	**116**	0,81491	**146**	0,80872	**176**	0,80257	**206**	0,79647	**236**	0,78441	**266**	0,77845	**296**	0,06882	**326**	0,77254	**356**	0,76666
27	0,83356	**57**	0,82723	**87**	0,82094	**117**	0,81470	**147**	0,80851	**177**	0,80237	**207**	0,79627	**237**	0,78421	**267**	0,77825	**297**	0,06763	**327**	0,77234	**357**	0,76647
28	0,83335	**58**	0,82702	**88**	0,82073	**118**	0,81450	**148**	0,80831	**178**	0,80216	**208**	0,79607	**238**	0,78401	**268**	0,77806	**298**	0,07074	**328**	0,77214	**358**	0,76627
29	0,83314	**59**	0,82681	**89**	0,82052	**119**	0,81429	**149**	0,80810	**179**	0,80196	**209**	0,79586	**239**	0,78381	**269**	0,77786	**299**	0,06634	**329**	0,77195	**359**	0,76608
30	0,83293	**60**	0,82660	**90**	0,82032	**120**	0,81408	**150**	0,80790	**180**	0,80176	**210**	0,79566	**240**	0,78362	**270**	0,77766	**300**	0,06819	**330**	0,77175	**360**	0,76589

Tablo 19. İki Faktörlü Model Çerçevesinde Farklı Vadeler İçin Elde Edilen Volatilite Değerleri

t	σ_1	σ_2	t	σ_1	σ_2	t	σ_1	σ_2	t	σ_1	σ_2	t	σ_1	σ_2	t	σ_1	σ_2	t	σ_1	σ_2	t	σ_1	σ_2	t	σ_1	σ_2	t	σ_1	σ_2	t	σ_1	σ_2	t	σ_1	σ_2
1	0,52	0,86	**31**	0,60	0,73	**61**	0,65	0,67	**91**	0,68	0,60	**121**	0,73	0,46	**151**	0,84	0,23	**181**	0,96	-0,04	**211**	1,02	-0,27	**241**	0,91	-0,36	**271**	0,56	-0,28	**301**	0,23	-0,15	**331**	0,14	-0,12
2	0,52	0,85	**32**	0,61	0,73	**62**	0,65	0,66	**92**	0,68	0,60	**122**	0,74	0,46	**152**	0,84	0,22	**182**	0,96	-0,05	**212**	1,02	-0,27	**242**	0,90	-0,36	**272**	0,54	-0,27	**302**	0,23	-0,15	**332**	0,14	-0,12
3	0,52	0,84	**33**	0,61	0,72	**63**	0,65	0,66	**93**	0,68	0,59	**123**	0,74	0,45	**153**	0,84	0,21	**183**	0,97	-0,06	**213**	1,02	-0,28	**243**	0,89	-0,36	**273**	0,53	-0,27	**303**	0,22	-0,15	**333**	0,14	-0,12
4	0,53	0,84	**34**	0,61	0,72	**64**	0,65	0,66	**94**	0,68	0,59	**124**	0,74	0,44	**154**	0,85	0,20	**184**	0,97	-0,07	**214**	1,02	-0,28	**244**	0,88	-0,36	**274**	0,51	-0,26	**304**	0,21	-0,15	**334**	0,14	-0,12
5	0,53	0,83	**35**	0,61	0,72	**65**	0,65	0,66	**95**	0,68	0,59	**125**	0,75	0,44	**155**	0,85	0,19	**185**	0,98	-0,08	**215**	1,02	-0,29	**245**	0,87	-0,36	**275**	0,50	-0,26	**305**	0,21	-0,14	**335**	0,14	-0,12
6	0,53	0,83	**36**	0,61	0,72	**66**	0,65	0,66	**96**	0,69	0,58	**126**	0,75	0,43	**156**	0,86	0,18	**186**	0,98	-0,09	**216**	1,02	-0,29	**246**	0,87	-0,36	**276**	0,49	-0,25	**306**	0,20	-0,14	**336**	0,14	-0,12
7	0,54	0,82	**37**	0,61	0,71	**67**	0,65	0,66	**97**	0,69	0,58	**127**	0,75	0,42	**157**	0,86	0,17	**187**	0,98	-0,10	**217**	1,01	-0,30	**247**	0,86	-0,36	**277**	0,47	-0,25	**307**	0,20	-0,14	**337**	0,15	-0,12
8	0,54	0,82	**38**	0,62	0,71	**68**	0,65	0,65	**98**	0,69	0,58	**128**	0,75	0,42	**158**	0,87	0,16	**188**	0,98	-0,10	**218**	1,01	-0,30	**248**	0,85	-0,36	**278**	0,46	-0,24	**308**	0,19	-0,14	**338**	0,15	-0,12
9	0,55	0,81	**39**	0,62	0,71	**69**	0,66	0,65	**99**	0,69	0,57	**129**	0,76	0,41	**159**	0,87	0,15	**189**	0,99	-0,11	**219**	1,01	-0,31	**249**	0,84	-0,36	**279**	0,45	-0,24	**309**	0,19	-0,14	**339**	0,15	-0,12
10	0,55	0,81	**40**	0,62	0,71	**70**	0,66	0,65	**100**	0,69	0,57	**130**	0,76	0,40	**160**	0,87	0,14	**190**	0,99	-0,12	**220**	1,01	-0,31	**250**	0,83	-0,36	**280**	0,44	-0,23	**310**	0,18	-0,13	**340**	0,15	-0,12
11	0,55	0,80	**41**	0,62	0,70	**71**	0,66	0,65	**101**	0,69	0,57	**131**	0,76	0,39	**161**	0,88	0,14	**191**	0,99	-0,13	**221**	1,01	-0,32	**251**	0,81	-0,35	**281**	0,42	-0,23	**311**	0,18	-0,13	**341**	0,15	-0,12
12	0,56	0,80	**42**	0,62	0,70	**72**	0,66	0,65	**102**	0,69	0,56	**132**	0,77	0,39	**162**	0,88	0,13	**192**	1,00	-0,14	**222**	1,00	-0,32	**252**	0,80	-0,35	**282**	0,41	-0,22	**312**	0,17	-0,13	**342**	0,15	-0,12
13	0,56	0,79	**43**	0,62	0,70	**73**	0,66	0,64	**103**	0,70	0,56	**133**	0,77	0,38	**163**	0,89	0,12	**193**	1,00	-0,14	**223**	1,00	-0,32	**253**	0,79	-0,35	**283**	0,40	-0,22	**313**	0,17	-0,13	**343**	0,16	-0,12
14	0,56	0,79	**44**	0,63	0,70	**74**	0,66	0,64	**104**	0,70	0,55	**134**	0,77	0,37	**164**	0,89	0,11	**194**	1,00	-0,15	**224**	1,00	-0,33	**254**	0,78	-0,35	**284**	0,39	-0,21	**314**	0,17	-0,13	**344**	0,16	-0,12
15	0,56	0,78	**45**	0,63	0,70	**75**	0,66	0,64	**105**	0,70	0,55	**135**	0,78	0,36	**165**	0,90	0,10	**195**	1,00	-0,16	**225**	1,00	-0,33	**255**	0,77	-0,34	**285**	0,38	-0,21	**315**	0,16	-0,13	**345**	0,16	-0,12
16	0,57	0,78	**46**	0,63	0,69	**76**	0,66	0,64	**106**	0,70	0,55	**136**	0,78	0,35	**166**	0,90	0,09	**196**	1,01	-0,17	**226**	0,99	-0,34	**256**	0,76	-0,34	**286**	0,36	-0,21	**316**	0,16	-0,13	**346**	0,16	-0,12
17	0,57	0,78	**47**	0,63	0,69	**77**	0,66	0,64	**107**	0,70	0,54	**137**	0,78	0,35	**167**	0,90	0,08	**197**	1,01	-0,17	**227**	0,99	-0,34	**257**	0,74	-0,34	**287**	0,35	-0,20	**317**	0,16	-0,12	**347**	0,17	-0,13
18	0,57	0,77	**48**	0,63	0,69	**78**	0,66	0,63	**108**	0,71	0,54	**138**	0,79	0,34	**168**	0,91	0,07	**198**	1,01	-0,18	**228**	0,98	-0,34	**258**	0,73	-0,33	**288**	0,34	-0,20	**318**	0,15	-0,12	**348**	0,17	-0,13
19	0,58	0,77	**49**	0,63	0,69	**79**	0,67	0,63	**109**	0,71	0,53	**139**	0,79	0,33	**169**	0,91	0,06	**199**	1,01	-0,19	**229**	0,98	-0,34	**259**	0,72	-0,33	**289**	0,33	-0,19	**319**	0,15	-0,12	**349**	0,17	-0,13
20	0,58	0,76	**50**	0,63	0,69	**80**	0,67	0,63	**110**	0,71	0,53	**140**	0,79	0,32	**170**	0,92	0,05	**200**	1,01	-0,20	**230**	0,98	-0,35	**260**	0,71	-0,33	**290**	0,32	-0,19	**320**	0,15	-0,12	**350**	0,18	-0,13
21	0,58	0,76	**51**	0,64	0,68	**81**	0,67	0,63	**111**	0,71	0,52	**141**	0,80	0,31	**171**	0,92	0,04	**201**	1,01	-0,20	**231**	0,97	-0,35	**261**	0,69	-0,32	**291**	0,31	-0,19	**321**	0,15	-0,12	**351**	0,18	-0,13
22	0,58	0,76	**52**	0,64	0,68	**82**	0,67	0,62	**112**	0,71	0,52	**142**	0,80	0,30	**172**	0,93	0,04	**202**	1,02	-0,21	**232**	0,97	-0,35	**262**	0,68	-0,32	**292**	0,30	-0,18	**322**	0,15	-0,12	**352**	0,19	-0,13
23	0,59	0,75	**53**	0,64	0,68	**83**	0,67	0,62	**113**	0,72	0,51	**143**	0,81	0,30	**173**	0,93	0,03	**203**	1,02	-0,22	**233**	0,96	-0,35	**263**	0,67	-0,31	**293**	0,29	-0,18	**323**	0,14	-0,12	**353**	0,19	-0,13
24	0,59	0,75	**54**	0,64	0,68	**84**	0,67	0,62	**114**	0,72	0,51	**144**	0,81	0,29	**174**	0,93	0,02	**204**	1,02	-0,22	**234**	0,96	-0,36	**264**	0,65	-0,31	**294**	0,29	-0,17	**324**	0,14	-0,12	**354**	0,19	-0,13
25	0,59	0,75	**55**	0,64	0,68	**85**	0,67	0,62	**115**	0,72	0,50	**145**	0,81	0,28	**175**	0,94	0,01	**205**	1,02	-0,23	**235**	0,95	-0,36	**265**	0,64	-0,30	**295**	0,28	-0,17	**325**	0,14	-0,12	**355**	0,20	-0,14
26	0,59	0,74	**56**	0,64	0,68	**86**	0,67	0,61	**116**	0,72	0,49	**146**	0,82	0,27	**176**	0,94	0,00	**206**	1,02	-0,24	**236**	0,94	-0,36	**266**	0,62	-0,30	**296**	0,27	-0,17	**326**	0,14	-0,12	**356**	0,20	-0,14
27	0,60	0,74	**57**	0,64	0,67	**87**	0,67	0,61	**117**	0,72	0,49	**147**	0,82	0,26	**177**	0,95	-0,01	**207**	1,02	-0,24	**237**	0,94	-0,36	**267**	0,61	-0,30	**297**	0,26	-0,17	**327**	0,14	-0,12	**357**	0,21	-0,14
28	0,60	0,74	**58**	0,64	0,67	**88**	0,68	0,61	**118**	0,73	0,48	**148**	0,82	0,25	**178**	0,95	-0,02	**208**	1,02	-0,25	**238**	0,93	-0,36	**268**	0,60	-0,29	**298**	0,25	-0,16	**328**	0,14	-0,12	**358**	0,21	-0,14
29	0,60	0,73	**59**	0,64	0,67	**89**	0,68	0,61	**119**	0,73	0,48	**149**	0,83	0,24	**179**	0,95	-0,03	**209**	1,02	-0,26	**239**	0,92	-0,36	**269**	0,58	-0,29	**299**	0,25	-0,16	**329**	0,14	-0,12	**359**	0,22	-0,14
30	0,60	0,73	**60**	0,65	0,67	**90**	0,68	0,60	**120**	0,73	0,47	**150**	0,83	0,23	**180**	0,96	-0,04	**210**	1,02	-0,26	**240**	0,92	-0,36	**270**	0,57	-0,28	**300**	0,24	-0,16	**330**	0,14	-0,12	**360**	0,22	-0,14

2. Heath – Jarrow – Morton Yaklaşımının Kesikli Hale Getirilmesi Ve Fiyatlama

Üçüncü bölümün ilk başlığı altında, faiz oranı modellerinde girdi olarak kullanılan başlangıç eğrilerinin ve volatilite yapılarının kalibrasyonu gerçekleştirilmiştir. Çalışmanın bu aşamasında, ikinci bölümde sürekli zaman yaklaşımıyla anlatılan teorik modellerin kesikli zamanda nasıl uygulanabileceği ve bu uygulamaya bağlı olarak öncelikle; tahvil fiyatlaması ve sonrasında da faiz oranına dayalı opsiyonların fiyatlaması açıklanacaktır.

Markov özelliğinin eksikliği sonucunda HJM yaklaşımında riske göre düzeltilmiş forward oranlarının tahmini ve anlık faiz oranına ilişkin mevcut doğal durumun tanımlanabilmesi için simülasyon yönteminin kullanılması gerekmektedir. Forward oranlarına ait dinamiklerin simüle edilebilmesi, başka bir ifadeyle; sayısal hesaplamalar ve bilgisayar uygulamalarının gerçekleştirilebilmesi için forward oranlarına ait dinamiklerin kesikli forma dönüştürülmesi (diskritizasyon) gerekmektedir. Diskritizasyon genel olarak; sürekli diferansiyel denklemlerin, kesik zamanlı fark denklemlerine dönüştürülmesi olarak tanımlanabilir (Duffy, 2006: 334). Bu çalışmada forward oranlarına ait dinamiklerin diskritizasyonu için Euler yöntemi kullanılacaktır. Euler yöntemi, başlangıç değeriyle verilen noktadan başlanmasını ve akış alanının gösterdiği yönde ilerlenmesini söyler. İlerlemenin başlamasından kısa bir süre sonra durulur; yeni konumdaki eğime bakılır ve bu yönde tekrar ilerlemeye, durmaya ve akış alanına göre yön değiştirmeye devam edilir. İlerlemenin başlaması ile sona ermesi arasındaki mesafe, adım aralığı olarak adlandırılır. Euler yöntemi[20], bir başlangıç değer probleminin kesin çözümünü değil, yaklaştırımlarını verir. Ancak, adım aralıkları küçültülerek kesin çözüme daha yakın yaklaştırımlar elde edilir (Stewart, 2007: 517) ve (Maeda, 1995: 58-61).

İkinci bölümde sürekli zamanda açıklanan HJM yaklaşımındaki formüller ile karıştırılmaması için bu başlık altındaki notasyonlar şapkalı olarak kullanılacaktır.

---

[20] $\frac{du}{dt} = f(u)$ skalar adi diferansiyel denklem ise, bu süreç Euler diskritizasyonu ile $\frac{x_{n+1} - x_n}{x_t} = f(x_n) \rightarrow x_{n+1} = x_n + \Delta t f(x_n)$ olarak tanımlanabilir.

Diskritize forward oranı $\left(\widehat{f}_{t_i,t_j}\right)$, $\left(i \le j\right)$ koşuluyla, $\left(t_i\right)$ zamanında, $\left(t_j\right)$ tarihinden itibaren bir adım aralığı boyunca geçerli olan borç alma - verme oranı olarak kabul edilirse, nominal değeri 1 TL. olan, kupon ödemesiz $\left(t_j\right)$ vade tarihli bir tahvilin $\left(t_i\right)$ zamanındaki fiyatı (2.1)'de verilmiştir.

(2.1) $$\widehat{P}_{t_i,t_j} = e^{-\sum_{l=i}^{l=j-1} \widehat{f}_{t_i,t_l}[t_{l+1}-t_l]}$$

Takip etmede ve hesaplamalarda kolaylık sağlaması amacıyla vade tarihi eşit M sayıda adım aralığına $\left(t_0 < t_1 < ... < t_M\right)$ bölünebilir, içinde bulunulan zaman şimdiki zamana $\left(t_0 = 0\right)$ sabitlenebilir ve adım aralıkları ile vade tarihleri birbirlerine denk gelecek şekilde belirlenebilir.

Tek faktörlü HJM modelinde forward oranı (2.2)'deki gibi diskritize edilebilir (Hull ve White, 1994: 7-16; Jarrow, 2002: 61-80; Bingham ve Kiesel, 2004: 346-348; Glasserman, 2004: 155-160). Forward oranının kesikli zamandaki bu sunumu, sürekli zamanda ikinci bölümünde yer alan (5.8) numaralı eşitliğe denk gelmektedir.

(2.2) $$\widehat{f}_{t_i,t_j} = \widehat{f}_{t_{i-1},t_j} + \widehat{\mu}_{t_{i-1},t_j}[t_i - t_{i-1}] + \widehat{\sigma}_{t_{i-1},t_j}\sqrt{t_i - t_{i-1}}Z_i$$

$$Z \sim N(0,1),\ i = 1,...,M\ ,\ j = i,...,M$$

HJM yaklaşımında, anlık faiz oranlarının (sürekli zamandaki notasyonu ile $\left(f_{t,t}\right)$, kesikli zamandaki notasyonu ile $\left(\widehat{f}_{t_i,t_i}\right)$) martingale özelliğine sahip olmadığı belirtilmişti. Ancak fiyatlamanın gerçekleştirilebilmesi için martingale özelliğinin sağlanması gerekmektedir. Bu gereklilik ise HJM yaklaşımının temel noktasını gündeme getirmektedir. Bu temel nokta, tahvil ve bono piyasasında arbitraj imkânının oluşmaması; başka bir ifadeyle, fiyatların dolayısıyla indirgenmiş fiyatların martingale özelliğine sahip olabilmeleri için forward oranlarının deterministik kısmının serbestçe hareket edemeyeceği ve deterministik kısmın volatiliteler ile sağlaması gereken sayısal bir ilişkinin gerekliliğidir.

Bu durumda (2.3)'te belirtilen indirgenmiş fiyatın, tüm zaman (t_i) ve tüm vadeler (t_j) için martingale olabilmesi için (2.4) numaralı eşitliğin sağlanması gerekmektedir.

$$\textbf{(2.3)}\quad \widehat{P}_{t_i,t_j} e^{-\sum_{k=0}^{k=i-1} \widehat{f}_{t_k,t_k}[t_{k+1}-t_k]}$$

$$\textbf{(2.4)}\quad \mathrm{E}\left[\widehat{P}_{t_i,t_j} e^{-\sum_{k=0}^{k=i-1} \widehat{f}_{t_k,t_k}[t_{k+1}-t_k]} \mid Z_1,\ldots Z_{i-1} \right] = \widehat{P}_{t_{i-1},t_j} e^{-\sum_{k=0}^{k=i-2} \widehat{f}_{t_k,t_k}[t_{k+1}-t_k]}$$

(2.1) numaralı eşitlik, (2.4) numaralı koşullu beklenen değerde kullanılır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa (2.5) elde edilir.

$$\textbf{(2.5)}\quad \mathrm{E}\left[e^{-\sum_{l=i}^{l=j-1} \widehat{f}_{t_i,t_l}[t_{l+1}-t_l]} \mid Z_1,\ldots Z_{i-1} \right] = e^{-\sum_{l=i}^{l=j-1} \widehat{f}_{t_{i-1},t_l}[t_{l+1}-t_l]}$$

(2.2) numaralı eşitlik, (2.5) numaralı koşullu beklenen değerde yerine koyulursa (2.6), (2.6) numaralı eşitliğin iki tarafında yer alan terimler sadeleştirilir ve deterministik kısım, koşullu beklenen değerin dışına alınırsa (2.7) elde edilir.

$$\textbf{(2.6)}\quad \mathrm{E}\left[e^{-\sum_{l=i}^{l=j-1} \left(\widehat{f}_{t_{i-1},t_l} + \widehat{\mu}_{t_{i-1},t_l}[t_i-t_{i-1}] + \widehat{\sigma}_{t_{i-1},t_l}\sqrt{t_i-t_{i-1}}Z_i\right)[t_{l+1}-t_l]} \mid Z_1,\ldots Z_{i-1} \right] = e^{-\sum_{l=i}^{l=j-1} \widehat{f}_{t_{i-1},t_l}[t_{l+1}-t_l]}$$

$$\textbf{(2.7)}\quad \mathrm{E}\left[e^{-\sum_{l=i}^{l=j-1} \widehat{\sigma}_{t_{i-1},t_l}\sqrt{t_i-t_{i-1}}[t_{l+1}-t_l]Z_i} \mid Z_1,\ldots Z_{i-1} \right] = e^{\sum_{l=i}^{l=j-1} \widehat{\mu}_{t_{i-1},t_l}[t_i-t_{i-1}][t_{l+1}-t_l]}$$

(2.7) numaralı eşitliğin sol tarafındaki koşullu beklenen değer, söz konusu stokastik değişkenin dağılımı $\left(Z \sim N(0,1)\right)$ göz önüne alındığında (2.8)'e eşit olacaktır.

$$\textbf{(2.8)}\quad e^{\frac{1}{2}\left(\sum_{l=i}^{l=j-1} \widehat{\sigma}_{t_{i-1},t_l}[t_{l+1}-t_l]\right)^2 [t_i-t_{i-1}]}$$

(2.7) ve (2.8) birlikte değerlendirildiğinde, yukarıda belirtilen eşitliğin gerçekleşmesi için gerekli koşul (2.9)'dur.

$$\textbf{(2.9)}\quad \frac{1}{2}\left(\sum_{l=i}^{l=j-1}\widehat{\sigma}_{t_{i-1},t_l}[t_{l+1}-t_l]\right)^2 = \sum_{l=i}^{l=j-1}\widehat{\mu}_{t_{i-1},t_l}[t_{l+1}-t_l]$$

Bir diğer ifadeyle tek risk faktörlü HJM yaklaşımı çerçevesinde (2.9)'da belirtilen, forward oranlarının deterministik kısmı ile volatilitelerin sağlaması gereken sayısal ilişki (2.10) numaralı eşitlikteki gibi daha açık olarak ifade edilir.

$$\textbf{(2.10)}\quad \widehat{\mu}_{t_{i-1},t_j}[t_{j+1}-t_j]=\frac{1}{2}\left(\sum_{l=i}^{l=j}\widehat{\sigma}_{t_{i-1},t_l}[t_{l+1}-t_l]\right)^2-\frac{1}{2}\left(\sum_{l=i}^{l=j-1}\widehat{\sigma}_{t_{i-1},t_l}[t_{l+1}-t_l]\right)^2$$

(2.10)'daki ilişkiyi çok faktörlü HJM modelleri için de genellemek mümkündür. Örneğin "d" risk faktörlü bir model için (2.10)'daki ilişki revize edilirse (2.11) elde edilir.

$$\textbf{(2.11)}\quad \widehat{\mu_k}_{\,t_{i-1},t_j}[t_{j+1}-t_j]=\frac{1}{2}\left(\sum_{l=i}^{l=j}\widehat{\sigma_k}_{\,t_{i-1},t_l}[t_{l+1}-t_l]\right)^2-\frac{1}{2}\left(\sum_{l=i}^{l=j-1}\widehat{\sigma_k}_{\,t_{i-1},t_l}[t_{l+1}-t_l]\right)^2$$

$$\left(k=1,...,d\right)$$

"d" risk faktörlü modelde, birleşik deterministik kısım $\left(\underline{\widehat{\mu}}_{t_{i-1},t_j}\right)$, her risk faktörüne ait deterministik kısımların toplanmasıyla (2.12)'deki gibi elde edilir.

$$\textbf{(2.12)}\quad \underline{\widehat{\mu}}_{t_{i-1},t_j}=\sum_{k=1}^{k=d}\widehat{\mu_k}_{\,t_{i-1},t_j}$$

"d" risk faktörlü bir HJM modelinde forward oranları (2.13)'teki gibi diskritize edilir.

$$\textbf{(2.13)}\quad \widehat{f}_{t_i,t_j}=\widehat{f}_{t_{i-1},t_j}+\underline{\widehat{\mu}}_{t_{i-1},t_j}[t_i-t_{i-1}]+\sum_{k=1}^{d}\widehat{\sigma_k}_{\,t_{i-1},t_j}\sqrt{t_i-t_{i-1}}Z_{ik}$$

$$j=i,...,M\ ,\ i=1,...,M\ ,\ Z_i=(Z_{i1},...Z_{id})\sim N(0,I)$$

(2.2) veya (2.13) numaralı eşitliklerdeki $\left(t_i\right)$ ve $\left(t_j\right)$ değerleri birbirlerine eşit olarak $\left(j=i\right)$ belirlenirse diskritize spot faiz oranı $\left(\widehat{r}_{t_i}=\widehat{f}_{t_i,t_i}\right)$ süreci de belirlenecektir $\left(\widehat{r}_{t_0}=\widehat{f}_{t_0,t_0},\widehat{r}_{t_1}=\widehat{f}_{t_1,t_1},...,\widehat{r}_{t_M}=\widehat{f}_{t_M,t_M}\right)$. Bu durumda, tahvil fiyatlamasında kullanılacak iskonto oranı $\left(\widehat{D}\right)$ farklı her vade için (2.14)'teki gibi bulunur.

(2.14) $\left(\widehat{D}_{t_j} = e^{-\sum_{i=0}^{j-1} \widehat{r}_{t_i}[t_{i+1}-t_i]} \right)$

İskonto oranı, birbirinden bağımsız ve farklı denemelerde "*n*" sefer yaratılırsa büyük sayılar yasası gereğince bu denemelerin ortalaması, beklenen iskonto oranına bire eşit olasılıkla (hemen hemen kesin) (2.15)'teki gibi yakınsayacaktır.

(2.15) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \widehat{D^i}_{t_j} \longrightarrow E\left(\widehat{D}_{t_j}\right) = \widehat{P}_{t_0,t_j}$

Tahvil fiyatlamasında, farklı vadeler arasındaki arbitraj imkânının ortadan kaldırılması amacıyla bir eşdeğer martingale ölçüsü kullanılmalıdır. Genellikle Forward Ölçüsü (Forward Measure) olarak adlandırılan bu ölçü; $\left(T = t_j\right)$ vadeli tahvilin $\left(t = t_i\right)$ zamanındaki fiyatının, forward ölçüsüyle ilgili olan $\left(T_M\right)$ vadeli tahvilin $\left(t\right)$ zamanındaki fiyatıyla iskonto edilmesiyle elde edilen süreci $\left(\frac{\widehat{P}_{t_i,t_j}}{\widehat{P}_{t_i,t_M}}\right)$, martingale özelliğine kavuşturan ölçü olarak kabul edilir. $\left(\frac{\widehat{P}_{t_i,t_j}}{\widehat{P}_{t_i,t_M}}\right)$ olarak gösterilen sürecin, her $\left(j\right)$ vadesi ve her $\left(i\right)$ zamanında martingale özelliğine sahip olabilmesi için gereken koşul (2.16) numaralı eşitlikte verilmiştir.

(2.16) $\frac{\widehat{P}_{t_i,t_j}}{\widehat{P}_{t_i,t_M}} = e^{\sum_{l=j}^{M-1} \widehat{f}_{t_i,t_l}[t_{l+1}-t_l]}$

Bu koşul sonucunda, HJM yaklaşımı çerçevesinde arbitraj imkânının oluşmaması için; diskritize edilmiş forward oranlarının, deterministik kısmı ile volatilitelerin sağlaması gereken sayısal ilişki (2.17) numaralı eşitlikte verilmiştir.

(2.17) $\widehat{\mu}_{t_{i-1},t_j}[t_{j+1}-t_j] = \frac{1}{2}\left(\sum_{l=j+1}^{M-1} \widehat{\sigma}_{t_{i-1},t_l}[t_{l+1}-t_l]\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\sum_{l=j}^{M-1} \widehat{\sigma}_{t_{i-1},t_l}[t_{l+1}-t_l]\right)^2$

HJM yaklaşımı çerçevesinde, forward oranlarının arbitraj imkânını ortadan kaldıran forward ölçüsü altında diskritize edilmesinden sonra sayısal hesaplamalar bilgisayar ortamında gerçekleştirilebilir. Ancak bu aşamada kullanılacak algoritmanın sağlam temelli olabilmesi için iki temel noktaya dikkat etmek gerekmektedir.

Forward oranlarının dinamiklerini tanımlayan diskritize modelde $\left(\widehat{f}_{t_i,t_j}\right)$, alt indislerin takibi ve sıralaması doğru yapılmalıdır. Birinci alt indis (t_i), içinde bulunulan zamanı; ikinci alt indis (t_j), forward oranın geçerli olmaya başlayacağı vade tarihini göstermektedir. Modeldeki zaman ve vade spektrumunun $(t_0 < t_1 < ... < t_M)$ aralığını kapsadığı hatırlanırsa, simülasyon kapsamında $(\mathrm{M} \ \mathrm{x} \ \mathrm{M})$ boyutundaki bir matriste forward oranlarını ve dolayısıyla forward oranlarına ait alt indisleri takip etmek gerekecektir. Ancak fiyatlama için sadece anlık faiz oranlarına $\left(\hat{r}_{t_i}\right)$, bir diğer ifadeyle alt indisleri eşdeğer olan forward oranlarına $\left(\widehat{f}_{t_i,t_i}\right)$ ihtiyaç duyulmaktadır. Bu nedenle, simülasyon kapsamında sadece anlık forward oranlarının yer aldığı $(1 \mathrm{x} \mathrm{M})$ boyutundaki bir vektörün takip edilmesi yeterli olacaktır. $(0 = t_0 < t_1 < ... < t_M)$ zaman ve vade aralığı değerlendirildiğinde modeldeki en uzun vadeli tahvil, (t_M) vadeli olacaktır. (2.1) numaralı denklem $\left(\widehat{P}_{t_i,t_j} = e^{-\sum_{l=i}^{l=j-1} \widehat{f}_{t_i,t_l}[t_{l+1}-t_l]}\right)$ dikkate alınırsa, model ile ilgili son forward oranı, $[t_{M-1}, t_M]$ aralığı için geçerli olan (t_{M-1}) vadeli forward oranı olacaktır. Bu da forward oranlarına ilişkin başlangıç eğrisi ile tutarlı olacaktır. Çünkü forward başlangıç eğrisi de $\left(\widehat{f}_{t_i,t_j}, \widehat{f}_{0,t_1}, ..., \widehat{f}_{0,t_{M-1}}\right)$ olmak üzere M bileşenden oluşan $(1 \mathrm{x} \mathrm{M})$ boyutlu bir vektördür. Simülasyon başlangıcında bu vektörü $(f_1, f_2, ...f_M)$ olarak ifade etmek alt indislerin takibini kolaylaştıracaktır. Bu amaçla simülasyon kapsamında kullanılan en küçük alt indisin 1 olarak seçilmesi simülasyon sürecindeki birinci kritik noktadır.

İkinci kritik nokta ise, simülasyonda forward oranlarına ait mutlak vade yerine göreli vade (vadeye kalan zaman) kullanılmasıdır. Çünkü; simülasyon geliştikçe, bir başka ifadeyle; içinde bulunulan zamanı gösteren birinci alt indis (t_i) ilerledikçe fiyatlamada kullanılması anlamlı olacak forward oranı sayısı da azalacaktır. (t_i) zamanında anlamlı olan forward oranları sadece; $\left(\widehat{f}_{t_i,t_i}, \widehat{f}_{t_i,t_{i+1}}, ..., \widehat{f}_{t_i,t_{M-1}}\right)$ olacaktır. İhtiyaç duyulmayan forward oranlarından kurtulmak ve hesaplamalarda kullanılacak vektörün boyutunu kısaltabilmek amacıyla; zaman ve vade spektrumunda mutlak vade yerine göreli vade kullanılarak, (t_i) zamanında, ihtiyaç duyulan $(M-i)$ sayıdaki forward oranına ilişkin vektör, $(f_1, f_2, ...f_{M-1})$ olarak ifade edilmelidir. Bu durumda, (t_i) zamanında (f_j), $\left(\widehat{f}_{t_i,t_{i+j-1}}\right)$ forward oranını ifade edecektir. Sonuç olarak (f_1) her zaman anlık faiz oranına, bir diğer ifadeyle (t_i) zamanındaki anlık forward oranına eşit olacaktır $\left(\widehat{r}_{t_i} = \widehat{f}_{t_i,t_i}\right)$.

Bu iki kritik nokta dikkate alınır ve *d* risk faktörlü $(k = 1,...,d)$ bir modelde, forward oranı dinamiklerini oluşturan deterministik kısım $\left(\widehat{\mu_k}_{t_{i-1},t_j}\right)$, (m_j) olarak; ve stokastik kısım $\left(\widehat{\sigma_k}_{t_{i-1},t_j}\right)$, (s_j) olarak ifade edilirse, (2.13) numaralı eşitlikte (t_{i-1}) ve (t_i) zamanlarına ilişkin forward oranları arasındaki ilişkiyi gösteren dinamikler, (t_{i-1}) zamanından (t_i) zamanına geçişi simüle edebilmesi amacıyla (2.18) gibi modellenir.

(2.18) $f_j \leftarrow f_{j+1} + m_j\left[t_i - t_{i-1}\right] + \sum_{k=1}^{d} s_{j\ k}\sqrt{t_i - t_{i-1}}Z_{ik}\ ,\ j = 1,...,M-i$

$$m_j = \widehat{\mu}_{t_{i-1},t_{i+j-1}}\ ,\ s_{j\ k} = \widehat{\sigma_k}_{t_{i-1},t_{i+j-1}}$$

Takip etmede kolaylık sağlaması ve hesaplamalarda çift tekrarı önlemesi amacıyla, simülasyon süresince sabit kalacak adım aralıkları $\left[t_i - t_{i-1}\right]$,

(2.19) $h_i = t_i - t_{i-1}\ ,\ i = 1,...,M$

olarak ifade edilebilir. HJM simülasyonunda kullanılan algoritma; öncelikle sabit adım aralıklarında forward oranlarının deterministik bölümünün hesaplanması ve sonrasında bir döngü içerisinde her adım aralığında forward eğrisinin güncellenmesi olmak üzere iki aşamadan oluşmaktadır. Deterministik bölüm (2.20) numaralı eşitlikteki gibi hesaplanabilir $\left(\widehat{\mu}_{k\ t_{i-1},t_j} = \left[B_{next} - B_{prev}\right]\right)$. Şekil 24 forward oranlarının deterministik bölümün hesaplanmasında kullanılan algoritmayı göstermektedir $\left(A_{next\ k} = \sum_{l=i}^{j} \widehat{\sigma}_{k\ t_{i-1},t_l} h_{l+1}\right)$ (Glasserman, 2004: 155-160).

$$\textbf{(2.20)}\ \widehat{\mu}_{k\ t_{i-1},t_j} = \frac{1}{2h_j}\left[\sum_{k=1}^{d}\left(\sum_{l=i}^{l=j}\widehat{\sigma}_{k\ t_{i-1},t_l} h_{l+1}\right)^2 - \sum_{k=1}^{d}\left(\sum_{l=i}^{l=j-1}\widehat{\sigma}_{k\ t_{i-1},t_l} h_{l+1}\right)^2\right]$$

Volatilite yapısının belirlenmesiyle birlikte (*i-1*)'inci adımdaki forward oranlarına bağlı olarak forward oranlarının deterministik kısmının hesaplanmasından sonra (*i*)'inci adımdaki forward oranları güncellenmelidir. Şekil 25'teki algoritma, forward oranlarının deterministik kısmının hesaplanmasından sonra anlık forward oranlarının güncellenmesini gerçekleştirmekte, bir diğer ifadeyle; gelecekte elde edilecek nakit akışlarının bugünkü değerlerini hesaplamada kullanılacak olan iskonto oranlarının simüle edilmesini sağlamaktadır (Glasserman, 2004: 162-163; Jarrow, 2002: 293-296; London, 2004: 585, 598-605).

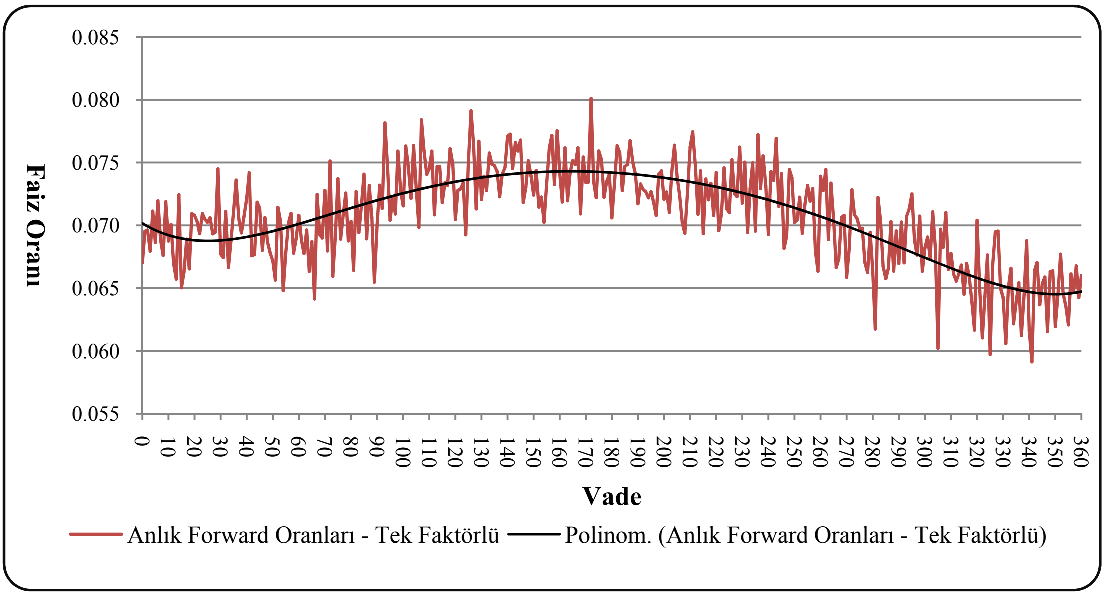
$$
\begin{aligned}
&\textit{Inputs}:\\
&s_{j\ k},\quad j=1,\dots,M-i,\quad k=1,\dots,d\\
&h_1,\dots,h_M\quad \left(h_l = t_l - t_{l-1}\right)\\
&A_{prev\ k} \leftarrow 0,\ k=1,\dots,d\\
&\textit{for}\quad j=1,\dots,M-i\\
&\quad B_{next} \leftarrow 0\\
&\quad \textit{for}\quad k=1,\dots,d\\
&\qquad A_{next\ k} \leftarrow A_{prev\ k} + s_{jk} * h_{i+j}\\
&\qquad B_{next} \leftarrow B_{next} + A_{next\ k} * A_{next\ k}\\
&\qquad A_{prev\ k} \leftarrow A_{next\ k}\\
&\quad \textit{end}\\
&\quad m_j \leftarrow \left(B_{next} - B_{prev}\right)/\left(2h_{i+j}\right)\\
&\quad B_{prev} \leftarrow B_{next}\\
&\textit{end}\\
&\textit{return}\quad m_1,\dots m_{M-i}
\end{aligned}
$$

Şekil 24. I. Aşama: Forward Oranlarının Deterministik Bölümünün Hesaplanmasında Kullanılan Algoritma
Kaynak: Glasserman, 2004: 162.

$$
\begin{aligned}
&\textit{Inputs}:\\
&\textit{Başlangıç eğrisi}\quad \left(f_1,\dots,f_M\right),\\
&\textit{Adım aralıkları}\quad \left(h_1,\dots,h_M\right)\\
&D \leftarrow 1,\ P \leftarrow 0,\ C \leftarrow 0.\\
&\textit{for}\quad i=1,\dots M-1\\
&\quad D \leftarrow D * \exp\left(-f_1 * h_i\right)\\
&\quad \textit{evaluate}\quad s_{j\ k},\ j=1,\dots,M-i,\ k=1,\dots,d\\
&\quad \textit{evaluate}\quad m_1,\dots,m_{M-1}\quad \left(\textit{Şekil 23 yardımıyla}\right)\\
&\quad \textit{generate}\quad Z_1,\dots,Z_d \sim N(0,1)\\
&\quad \textit{for}\quad j=1,\dots,M-i\\
&\qquad S \leftarrow 0\\
&\qquad \textit{for}\quad k=1,\dots,d\quad S \leftarrow S + s_{j\ k} * Z_k\\
&\qquad f_j \leftarrow f_{j+1} + m_j * h_i + S * \sqrt{h_i}\\
&\quad \textit{end}\\
&\quad P \leftarrow \textit{cashflow at}\ t_i\\
&\quad C \leftarrow C + D * P\\
&\textit{end}\\
&\textit{return}\ C.
\end{aligned}
$$

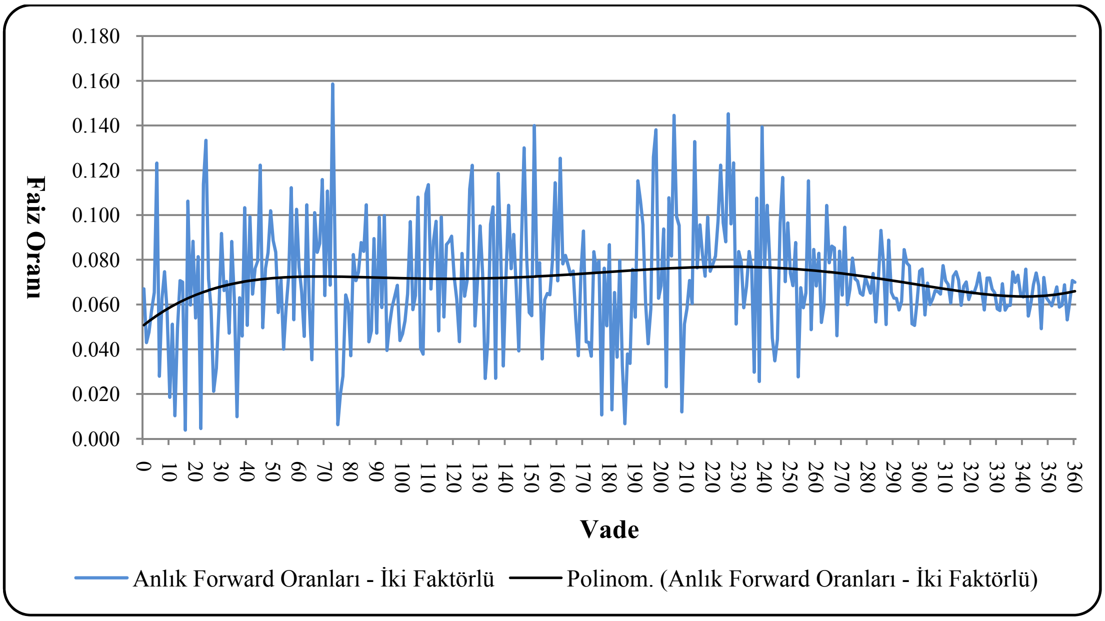
Şekil 25. II. Aşama: Forward Oranlarının Güncellenmesinde ve İskonto Oranlarının Hesaplanmasında Kullanılan Algoritma
Kaynak: Glasserman, 2004: 163.

Tek faktörlü model çerçevesinde, adım aralıkları bir gün olarak belirlenmiş, 26 Şubat 2010 tarihinden itibaren, 1 yıl (360 gün) ileriye yönelik olmak üzere bin kez tekrar edilmiş simülasyon sonuçlarından elde edilen getiri eğrisi Şekil 26'da gösterilmiştir.



Şekil 26. Tek Faktörlü Modelle Simüle Edilen Anlık Forward (Spot Faiz) Oranları

İki faktörlü model çerçevesinde ise adım aralıkları yine birer gün olarak belirlenmiş, 26 Şubat 2010 tarihinden itibaren, 1 yıl (360 gün) ileriye yönelik olmak üzere bin kez tekrar edilmiş simülasyon sonuçlarından elde edilen getiri eğrisi Şekil 27'de gösterilmiştir.



Şekil 27. İki Faktörlü Modelle Simüle Edilen Anlık Forward (Spot Faiz Oranları)

Tek risk faktörlü ve iki risk faktörlü model ile yapılan simülasyonlar sonucunda elde edilen anlık forward oranları değerlendirildiğinde, tek faktörlü modele ilişkin anlık forward oranlarının ortalaması 0,0706; standart sapması 0,0038; minimum noktası 0,0591 ve maksimum noktası 0,0801 iken iki faktörlü modele ilişkin anlık forward oranlarının ortalaması 0,0708; standart sapması 0,0256; minimum noktası 0,0039 ve maksimum noktası 0,1585'tir. İki modele ilişkin anlık forward oranlarının standart sapma değerleri incelendiğinde, iki faktörlü modeldeki oynaklığın tek faktörlü modele kıyasla yaklaşık olarak 6,7 kat daha fazla olduğu söylenebilir. Bununla birlikte, iki faktörlü modelde anlık forward oranları neredeyse sıfır haddine düşmekte, sonrasında ise yaklaşık 41 kat artış göstererek 0,1585 seviyelerine gelmektedir. Ayrıca söz konusu farklı iki modelden elde edilen oranların yaklaşık olarak dokuzuncu aydan sonra birbirine yakınsamasıyla birlikte; simülasyon sonucunda elde edilen 30'uncu, 60'ıncı, 90'ıncı ve 180'inci gün tahminleri, piyasada gerçekleşen getiri oranları ile karşılaştırıldığında tek faktörlü modelin RMSE değerinin (0,000012) iki faktörlü modelin RMSE değerinden (0,00066) daha düşük olduğu hesaplanmıştır.

Sonuç olarak, tek risk faktörlü (üç parametreli volatilite yapısı) modelin, iki faktörlü (tek parametreli volatilite yapısı) modele göre üstün bir performans gösterdiği ve bu nedenle tek risk faktörlü model sonucunda elde edilen iskonto oranlarının tahvil ve tahvile dayalı opsiyonların fiyatlanmasında tercih edilebileceği söylenebilir. Tek risk faktörlü model sonucunda 26 Şubat 2010 tarihinden itibaren gelecek 360 güne ilişkin elde edilen anlık faiz oranları Tablo 20'de verilmiştir.

Tablo 20. Tek Faktörlü Modelle Simüle Edilen Anlık Forward (Spot Faiz) Oranları

t	r_t	***t***	r_t	***t***	r_t	***t***	r_t	***t***	r_t	***t***	r_t	***t***	r_t	***t***	r_t	***t***	r_t	***t***	r_t	***t***	r_t	***t***	r_t
1	0,06953	31	0,06741	61	0,06883	91	0,07319	121	0,07278	151	0,07438	181	0,07328	211	0,07745	241	0,07428	271	0,06810	301	0,06907	331	0,06058
2	0,06962	32	0,07110	62	0,06775	92	0,07135	122	0,07289	152	0,07145	182	0,07634	212	0,07468	242	0,07358	272	0,07282	302	0,06739	332	0,06508
3	0,06794	33	0,06664	63	0,06962	93	0,07815	123	0,07338	153	0,07225	183	0,07581	213	0,07088	243	0,07692	273	0,07083	303	0,07107	333	0,06657
4	0,07113	34	0,06878	64	0,06633	94	0,07468	124	0,06924	154	0,07024	184	0,07276	214	0,07434	244	0,07150	274	0,07055	304	0,06828	334	0,06216
5	0,06863	35	0,07108	65	0,06870	95	0,07042	125	0,07496	155	0,07324	185	0,07469	215	0,06933	245	0,07411	275	0,06976	305	0,06021	335	0,06396
6	0,07194	36	0,07360	66	0,06413	96	0,07222	126	0,07911	156	0,07615	186	0,07483	216	0,07369	246	0,06816	276	0,06976	306	0,06968	336	0,06542
7	0,06882	37	0,07050	67	0,07247	97	0,07089	127	0,07639	157	0,07716	187	0,07674	217	0,07204	247	0,06915	277	0,06704	307	0,06824	337	0,06121
8	0,06760	38	0,06939	68	0,06927	98	0,07591	128	0,07130	158	0,07324	188	0,07507	218	0,07334	248	0,07444	278	0,06625	308	0,07101	338	0,06446
9	0,07188	39	0,07068	69	0,06899	99	0,07274	129	0,07670	159	0,07753	189	0,07409	219	0,07079	249	0,07378	279	0,06945	309	0,06648	339	0,06878
10	0,06875	40	0,07212	70	0,07278	100	0,07155	130	0,07205	160	0,07419	190	0,07172	220	0,07419	250	0,07023	280	0,06638	310	0,06776	340	0,06163
11	0,07007	41	0,07419	71	0,06795	101	0,07631	131	0,07391	161	0,07185	191	0,07329	221	0,06958	251	0,07040	281	0,06174	311	0,06609	341	0,05912
12	0,06696	42	0,06758	72	0,07511	102	0,07469	132	0,07276	162	0,07617	192	0,07284	222	0,07095	252	0,07223	282	0,07223	312	0,06554	342	0,06636
13	0,06571	43	0,06766	73	0,06594	103	0,07213	133	0,07575	163	0,07195	193	0,07266	223	0,07457	253	0,06935	283	0,07036	313	0,06614	343	0,06704
14	0,07242	44	0,07184	74	0,06913	104	0,07635	134	0,07488	164	0,07419	194	0,07218	224	0,07132	254	0,07164	284	0,06672	314	0,06684	344	0,06367
15	0,06502	45	0,07139	75	0,07371	105	0,07302	135	0,07474	165	0,07514	195	0,07268	225	0,07100	255	0,07316	285	0,06575	315	0,06451	345	0,06538
16	0,06629	46	0,06801	76	0,06890	106	0,06983	136	0,07429	166	0,07484	196	0,07182	226	0,07521	256	0,07193	286	0,06659	316	0,06696	346	0,06588
17	0,06890	47	0,07062	77	0,07080	107	0,07841	137	0,07227	167	0,07616	197	0,07078	227	0,07252	257	0,07292	287	0,07030	317	0,06591	347	0,06155
18	0,06652	48	0,06867	78	0,07257	108	0,07595	138	0,07409	168	0,07092	198	0,07407	228	0,07227	258	0,06790	288	0,06635	318	0,06387	348	0,06630
19	0,07094	49	0,06784	79	0,06876	109	0,07406	139	0,07460	169	0,07543	199	0,07434	229	0,07623	259	0,06635	289	0,06955	319	0,06164	349	0,06638
20	0,07079	50	0,06719	80	0,07032	110	0,07451	140	0,07709	170	0,07341	200	0,07206	230	0,07176	260	0,07390	290	0,06695	320	0,07041	350	0,06193
21	0,07030	51	0,06563	81	0,06641	111	0,07591	141	0,07726	171	0,07343	201	0,07265	231	0,07503	261	0,07276	291	0,07026	321	0,06483	351	0,06457
22	0,06933	52	0,07144	82	0,07268	112	0,07083	142	0,07452	172	0,08011	202	0,07103	232	0,06943	262	0,07444	292	0,06701	322	0,06104	352	0,06770
23	0,07093	53	0,07027	83	0,06942	113	0,07469	143	0,07659	173	0,07349	203	0,07435	233	0,07293	263	0,06886	293	0,07073	323	0,06433	353	0,06458
24	0,07047	54	0,06480	84	0,07158	114	0,07468	144	0,07592	174	0,07220	204	0,07637	234	0,07498	264	0,07336	294	0,07131	324	0,06764	354	0,06355
25	0,07024	55	0,06779	85	0,07408	115	0,07181	145	0,07678	175	0,07592	205	0,07382	235	0,06954	265	0,07042	295	0,07250	325	0,05971	355	0,06206
26	0,07060	56	0,07017	86	0,06892	116	0,07339	146	0,07182	176	0,07521	206	0,07231	236	0,07722	266	0,06664	296	0,06882	326	0,06690	356	0,06612
27	0,06932	57	0,07095	87	0,07317	117	0,07317	147	0,07302	177	0,07223	207	0,07020	237	0,07292	267	0,06735	297	0,06763	327	0,06947	357	0,06468
28	0,06946	58	0,06777	88	0,07062	118	0,07610	148	0,07515	178	0,07348	208	0,06937	238	0,07553	268	0,07064	298	0,07074	328	0,06954	358	0,06677
29	0,07449	59	0,06893	89	0,06547	119	0,07487	149	0,07392	179	0,07409	209	0,07273	239	0,07313	269	0,07079	299	0,06634	329	0,06496	359	0,06424
30	0,06771	60	0,07080	90	0,07005	120	0,07045	150	0,07240	180	0,07059	210	0,07623	240	0,06926	270	0,06585	300	0,06819	330	0,06424	360	0,06600

Tahvil fiyatlamasında iskonto amacıyla kullanılacak anlık faiz oranlarının farklı her vade için hesaplanmasından sonra, nominal değeri 100 TL. olan, kupon ödemesiz ve 21 Şubat 2011 (T) vade tarihli bir tahvilin 26 Şubat 2010 (t) tarihindeki beklenen fiyatı $\left(P_{t,T} = E\left(D_{t_j}\right) \ . \ P(T,T)\right)$ eşitliğinden hareketle;

(2.21) $P_{t,T} = e^{-\sum_{i=1}^{360} r(t_i)}.100 = e^{-(0,070835)}.100 = 93,16156 \ \text{TL.}$

olacaktır. Yukarıda hesaplanan tahvil fiyatına (S) ve volatilite değerlerine (σ) bağlı olarak; risksiz faiz oranı $\left(r_{f_t}\right)$ yüzde 6 olarak kabul edilirse, söz konusu tahvili dayanak varlık olarak kabul eden, vadesine 60 gün kalmış ve uygulama fiyatı (K) olan Avrupa tipi tahvil alım opsiyonun fiyatı $\left(C_{t,T}\right)$, (2.22) ve Avrupa tipi tahvil satım opsiyonun fiyatı $\left(P_{t,T}\right)$, (2.23) numaralı formüller yardımıyla hesaplanır (Black, 1976: 167-179).

(2.22) $C_{t,T} = e^{-r_{f_t} T}\left[S\ N\left(d_1\right) - K\ N\left(d_2\right)\right],\ d_1 = \dfrac{\ln\left(S/K\right) + \left(\sigma^2/2\right)T}{\sigma\sqrt{T}},\ d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$

(2.23) $P_{t,T} = e^{-r_{f_t} T}\left[K\ N\left(-d_2\right) - S\ N\left(-d_1\right)\right],\ d_1 = \dfrac{\ln\left(S/K\right) + \left(\sigma^2/2\right)T}{\sigma\sqrt{T}},\ d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$

Bu durumda opsiyon sözleşmesinin vade tarihinde, söz konusu dayanak tahvili 94,16156 TL.'den alma hakkı veren alım opsiyonunun primi 11,960 TL., iken söz konusu dayanak tahvili satma hakkı veren satım opsiyonunun primi 12,9260 TL. olacaktır.

Benzer şekilde diğer bütün değişkenlerin sabit kalması ve sadece uygulama fiyatının 92,16156 TL. olması durumunda alım opsiyonunun primi 12,7935 TL. ve satım opsiyonunun primi 11,8034 TL. olacaktır.

3. Sonuç ve Değerlendirmeler

Bretton Woods sisteminin 1971'de çökmesiyle birlikte finans dünyasında, özellikle döviz kuru ve faiz oranı gibi finansal riskler ortaya çıkmış ve bu risklerden korunmak amacıyla finansal risk yönetimi ve bu çerçevede yeni finansal araçlar gündeme gelmiştir. Bu finansal araçlar arasında en önemlileri; futures, forward, opsiyon ve swap sözleşmeleri olarak sayılabilecek türev ürünlerdir. Kuruluş hedefi, koruma amaçlı işlemlerin gerçekleştirilmesi olan türev ürün piyasalarında, bu piyasa araçlarına has yüksek kaldıraç özelliği vasıtasıyla yüksek getirilerin elde edilmesine olanak sağlayan spekülatif işlemler ile arbitraj işlemleri de başlamış ve sonuç olarak türev ürün piyasalarında çok hızlı bir büyüme yaşanmıştır.

Günümüzde dünya türev ürün piyasalarında yapılan işlemlerin yaklaşık olarak %75'i faiz oranına dayalı sözleşmelere dayanmaktadır. Faize dayalı türev ürünlerin getirisi tabi ki dayanak varlık olarak kabul ettiği faiz oranına ve dolayısıyla faiz oranlarının vade yapısına bağlıdır. Bu nedenle faiz oranına dayalı türev ürün fiyatlamalarının gerçekçi, korunma işlemlerinin etkili ve etkin olarak yapılabilmesi için gerekli öncelik; faiz oranlarının vade yapısının ve faiz oranlarının iyi modellenmesidir. Bir faiz oranı modelinden beklenen, belirli varsayımlar altında, faiz oranlarında meydana gelen değişimlerin; dağılım genişliği, dağılım şekli, belirli bir seviyeye ulaşma olasılığı gibi istatistiksel özelliklerini ortaya koymasıdır. Hangi modelin daha yüksek performansa sahip olduğunu söylemek oldukça zor olsa da iyi bir modelde bulunması gereken bazı temel nitelikler vardır. Bunlar; modelin sağlam, uygun ve gerçekçi bir temele sahip olması; tutarlı ve uygulanabilir olması ve genellenebilmesidir.

Faiz oranı modelleriyle ilgili ilk çalışma 1977 yılında Oldrich A. Vasicek ile başlamış ve sonrasında geniş bir literatür oluşmuştur. Literatür incelendiğinde birçok farklı model görülebilir. Bu modelleri benimsedikleri varsayımlara ve sahip oldukları özelliklere göre farklı kategoriler altında sınıflandırmak mümkündür. Literatürde sıkça başvurulan kategoriler, kısa vadeli faiz oranı modellerine karşılık forward oranı modelleri; tek risk faktörlü faiz oranı modellerine karşılık iki veya çok risk faktörlü faiz oranı modelleri; kesik zamanlı faiz oranı modellerine karşılık sürekli zaman faiz oranı modelleri; denge faiz oranı modellerine karşılık arbitraj faiz oranı modelleri;

afine faiz oranı modellerine karşılık afine olmayan faiz oranı modelleri olarak sıralanabilir.

Vasicek (1977) modeli, sürekli zamanda modellenmiş, afine çözüm kümesi olan, tek risk faktörü içeren, kısa vadeli bir denge faiz oranı modelidir. Daha sonra geliştirilen birçok modele rağmen Vasicek (1977) modelinin güncelliğini korumasındaki temel nedenler; modelde anlık faiz oranındaki değişimlerin modellenmesinde doğrusal bir denklemin kullanılıyor olması, modeldeki anlık faiz oranı değişimlerinin normal dağılıma sahip olması ve modelin tahvil ve bu tahvillere dayalı opsiyon fiyatlarının analitik ve açık (*explicit*) çözümlerini sunmasıdır. Vasicek (1977) modelinin artan, azalan ve kambur getiri eğrilerine olanak vermesi modelin kuvvetli bir diğer yanıdır. Ancak bu modelin en büyük eksiklikleri, anlık faiz oranlarının sıfırın altına düşme olasılığının pozitif olması ve modelin endojen yapısıdır.

Kronolojik olarak Vasicek (1977) modelinden sonra geliştirilen bir diğer tek risk faktörlü model Dothan (1978) modelidir. Bu modelde anlık faiz oranı değişimlerinin modellenmesi için geometrik Brownian hareketinin tercih edilmesi sebebiyle anlık faiz oranlarının sıfırın altına düşme olasılığı ortadan kalkmıştır. Dothan (1978) modelinde kupon ödemesiz iskonto tahvillerin fiyatlandırılması için Vasicek (1977) modelinde olduğu gibi analitik bir formül elde edilse de bu tahviller üzerine yazılmış opsiyonların fiyatlandırılması için kullanılabilecek analitik bir formül elde edilememiştir. Ayrıca, modelin oldukça karmaşık fonksiyonlara sahip olması modelin uygulanabilirliğini azaltmakta ve modelin endojen yapısı devam etmektedir.

Bir diğer tek risk faktörlü, kısa vadeli faiz oranı modeli, 1985 tarihli CIR modelidir. CIR (1985) modelinin en dikkat çekici özelliği, Vasicek (1977) modelinde karşılaşılan “faiz oranlarının negatif olma olasılığının pozitif olma” sorununun ortadan kaldırılmış olmasıdır. CIR (1985) modelinin diğer olumlu özellikleri; modelde tahvil fiyatlarının ve bunlara dayalı opsiyon fiyatlarının kapalı formdaki analitik formüllerle hesaplanabiliyor olması, modelin artan, azalan ve kambur getiri eğrilerine olanak vermesi ve Dothan (1978) modeline kıyasla daha basit ve uygulanabilir olmasıdır. Diğer yandan CIR (1985) modelinde de Vasicek (1977) ve Dothan (1978) modellerinde olduğu gibi modelin endojen yapısı kalibrasyon problemlerine neden olabilmektedir.

Faiz oranı modellemelerinde endojen yapıdan kaynaklanan kalibrasyon sorunlarını gidermek için ekzojen modeller gündeme gelmiştir. Ekzojen modellerdeki temel strateji, modelde yer alan parametrelerin, endojen yapıdaki modellerde olduğu gibi zamandan bağımsız olarak belirlenmeleri yerine; zamana bağlı olarak oluşturulmalarıdır.

Vasicek (1977), Dothan (1978), Richard (1979), Brennan ve Schwartz (1979, 1982), Langetieg (1980), Courtadon (1982), Cox, Ingersoll ve Ross (1985), Longstaff (1989) gibi endojen yapıya sahip modellerde yaşanan başlangıç getiri eğrisinin piyasadaki mevcut getiri eğrisine kalibre edilme sorunu, Hull ve White tarafından 1990 tarihli çalışmalarında çözülmüştür. Aslında kronolojik açıdan değerlendirildiğinde, ekzojen özelliğine sahip ilk model, Ho ve Lee tarafından 1986 yılında geliştirilmiştir. Ho – Lee (1986) tarafından binom ağaçları kullanılarak geliştirilen kesikli zaman ve sonrasındaki sürekli zaman modeli, Dybvig (1988) ve Jamshidian (1988) tarafından revize edilmiştir. Ancak bu modellerin, HW (1990) modeli kadar tutulmalarını engelleyen en büyük eksiklik, bu modellerdeki anlık faiz oranlarının, ortalama bir değere dönme eğilimi içerisinde olmamalarıdır. HW (1990) modelinde anlık faiz oranı dinamiklerinin normal dağılıma sahip olması, tahvil ve bunlara dayalı türev ürünlerin fiyatlandırılmasında analitik formüllerin elde edilmesi, modelin kuvvetli yönleridir. Diğer taraftan; modelin normal dağılıma sahip olması nedeniyle model tarafından yaratılan anlık faiz oranlarının negatif seviyelere düşme olasılığının pozitif olması ve anlık faiz oranı dinamiklerinin modellenmesi için tek bir risk faktörünün kullanılması, modelin geliştirmeye açık yönleridir. HW (1990) modelinin günümüzde dahi en popüler modeller arasında yer almasının, modelden elde edilen getiri eğrisiyle piyasadaki mevcut getiri eğrisinin bire bir aynı olmasının dışında iki temel nedeni daha vardır. İlk neden, modelin risk yönetimi amacıyla kullanımı sonucunda başarılı sonuçlar alınması; ikinci neden ise HW (1990) modelinde kullanılan anlık faiz oranı dinamiklerinin çeşitli modifikasyonlara imkân tanıması, bir diğer ifadeyle modelin başka modeller geliştirilmesine sağlam bir temel oluşturuyor olmasıdır.

Ho – Lee (1986) modeli dışında yukarıda açıklanan modellerin ortak özelliklerinden biri hepsinin sürekli zaman yaklaşımı içerisinde oluşturulmasıdır. Black, Derman ve Toy (BDT) faiz oranlarını modellemek ve faiz oranlarına dayalı türev ürünleri fiyatlandırmak için kesikli zaman yapısı içerisinde binom ağaçlarından yararlanmışlardır. Yukarıdaki modellerde olduğu gibi BDT (1990) modelinde de faiz oranlarının ve faiz oranlarıyla ilişkili varlık fiyatlarının tahmin edilmesinde kullanılan tek değişken, kısa vadeli faiz oranıdır. Kısa vadeli faiz oranlarının lognormal dağılıma sahip olduklarının varsayılması, model kalibrasyonunda kolaylıklar getirmekte ve faiz oranlarının sürekli pozitif değerler almasına olanak sağlamaktadır. BDT (1990) modelinin bir diğer kuvvetli özelliği Avrupa tipi opsiyonlara ilave olarak Amerikan tipi opsiyonların fiyatlandırılmasında da kullanılabilmesidir. Ancak; modelde tek risk faktörün yer alması nedeniyle modelden elde edilen vade yapısında salınım hareketinin mümkün olmaması ve faiz oranlarının volatilite yapısının sadece zamanın bir fonksiyonu olarak tanımlanması modelin zayıf yönleri olarak sayılabilir.

Buraya kadar özetlenen tek faktörlü kısa vadeli faiz oranı modellerinde açıklayıcı değişken olarak sadece anlık faiz oranı kullanılmıştır. Tek faktörlü modellerin göreli olarak daha yalın ve uygulanabilir olması bu modellerin en kuvvetli özelliğidir. Ancak; bütün para piyasasının tek bir değişken tarafından şekillendirilmesinin gerçekçi bir varsayım olmayışı, iki veya daha çok sayıdaki değişkenin yer aldığı modellerin ortaya koyulmasına öncülük etmiştir. Bu yaklaşımı benimseyen Fong ve Vasicek (1991), Longstaff ve Schwartz (1992), Chen (1996) ve Balduzzi (1996) gibi farklı modellerde, kısa vadeli faiz oranıyla birlikte; uzun vadeli faiz oranları, kısa vadeli faiz oranlarıyla uzun vadeli faiz oranları arasındaki farklı vadelere ilişkin faiz oranları, kısa vadeli faiz oranlarının ortalaması veya kısa vadeli faiz oranlarına ilişkin volatilite değerleri ikinci ve üçüncü açıklayıcı değişken olarak kullanılmıştır. Bu alternatifler, modelleri daha gerçekçi bir zemine taşısalar da söz konusu modellerde açıklayıcı değişkenler olarak kullanılan farklı vadelere ilişkin faiz oranları sınırlı sayıdadır. Heath, Jarrow ve Morton tarafından önerilen yaklaşım, sonsuz sayıda vadeden oluşan forward eğrisini açıklayıcı değişken olarak kullanmıştır. HJM yaklaşımının en kuvvetli özelliği, esnek bir yapıya sahip olmasıdır. Çünkü, yukarıda açıklanan tek risk faktörlü faiz oranı modelleri, HJM yaklaşımının özel durumlarıdır.

Faiz oranlarının modellenmesinde HJM yaklaşımı çerçevesinde değişik volatilite yapılarına sahip tek risk faktörlü HJM modeli ile iki risk faktörlü HJM modeli kullanılmıştır. Faiz oranı modellerinin kalibrasyonunda, tercih edilen modele uygun başlangıç getiri eğrisinin veya başlangıç forward eğrisinin elde edilmesi ve tercih edilen modeldeki volatilite yapılarının belirlenmesi olmak üzere iki adım bulunmaktadır.

Bu çalışma kapsamında geri ödememe riskinin bulunmadığı devlet iç borçlanma senetlerinin ve bu senetler üzerine yazılmış olan opsiyonların fiyatlandırılması üzerinde durulmuştur. Bu amaçla, çalışmada İMKB Tahvil ve Bono Piyasasında işlem gören hazine bonosu ve devlet tahvillerine ait 2 Ocak 2009 – 26 Şubat 2010 tarihleri arasındaki günlük kapanış fiyatları kullanılarak elde edilen getiri ve forward oranları kullanılmıştır. Kısa ve orta vadeye ilişkin oranlar, toplam sekiz adet hazine bonosu ve iskontolu devlet tahvilinden elde edilirken; uzun döneme ait oranlar, üç adet sabit kupon ödemeli devlet tahvilinden elde edilmiştir. Bu menkul kıymetlerden elde edilen 26 Şubat 2010 tarihli getiri eğrisi kambur bir yapıya; forward eğrisi de getiri eğrisine kıyasla dalgalanmaların daha hafif olmasıyla birlikte benzer şekilde kambur bir yapıya sahiptir. Başlangıç eğrilerinin hesaplanmasından sonra kalibrasyon sürecindeki ikinci adım olan volatilite yapıları belirlenmiştir.

Volatilite yapılarının belirlenmesi amacıyla PCA yöntemi kullanılmıştır. Öncelikle getiri ve forward oranlarındaki günlük değişimleri dikkate alan veri seti normalleştirilmiştir. Veri setinin normalleştirilmesinden sonra hesaplanan korelasyon matrislerine ilişkin özvektörler, bu özvektörlere ilişkin özdeğerler incelendiğinde; ilk üç faktörün dikkate alınması durumunda getiri oranlarındaki değişimin %74,48'i, forward oranlarına ait değişimin %74,78'i açıklanmaktadır. ABD, Almanya, Fransa, İngiltere, İsviçre, İtalya ve Japonya piyasalarında yapılan araştırmalarda elde edilen sonuçlara göre ilk üç faktör, oranlara ilişkin toplam varyasyonun %90'ını açıklamaktadır. Buradan hareketle ilk üç faktörün toplam varyasyonu açıklama performansı, yukarıda belirtilen yabancı piyasalardaki duruma kıyasla yaklaşık olarak %15 düşüktür. Bu farklılığın temel nedeni, İMKB Tahvil ve Bono Piyasasındaki volatilitenin daha yüksek olmasıdır.

Bu çalışmada volatilite yapıları HJM yaklaşımı çerçevesinde forward oranlarının kullanılmasıyla belirlenmiştir. Volatilite yapıları; sabit volatilite (Ho ve Lee, 1986), sabit azalan volatilite (Au ve Thurston 1995), üstel azalan volatilite (Vasicek 1977) ve kambur volatilite (Mercurio ve Moraleda 2000) olmak üzere dört adet tek risk faktörlü HJM modeli ve bir adet iki risk faktörlü HJM modeli olmak üzere toplam beş farklı model çerçevesinde oluşturulmuştur. Tek risk faktörlü alternatifler değerlendirildiğinde en iyi performansı sergileyen volatilite yapısı kambur volatilite yapısı iken en düşük performansı sergileyen volatilite yapısı sabit azalan volatilite yapısıdır.

Volatilite yapılarının belirlenmesinden ve forward oranlarına ait dinamiklerin Euler yöntemi ile diskritize edilmesinden sonra 26 Şubat 2010 tarihinden itibaren 1 yıl (360 gün) ileriye yönelik olmak üzere forward oranlarının simülasyonu gerçekleştirilmiştir. Tek faktörlü model ve iki faktörlü model ile yapılan simülasyonlar sonucunda elde edilen anlık forward oranları değerlendirildiğinde, tek risk faktörlü modele ilişkin anlık forward oranlarının ortalaması 0,0706; standart sapması 0,0038; minimum noktası 0,0591 ve maksimum noktası 0,0801 iken iki risk faktörlü modele ilişkin anlık forward oranlarının ortalaması 0,0708; standart sapması 0,0256; minimum noktası 0,0039 ve maksimum noktası 0,1585'tir. İki modele ilişkin anlık forward oranlarının standart sapma değerleri incelendiğinde, iki risk faktörlü modeldeki oynaklığın tek risk faktörlü modele kıyasla yaklaşık olarak 6,7 kat daha fazla olduğu söylenebilir. Ayrıca, iki risk faktörlü modelde anlık forward oranları neredeyse sıfır haddine düşmekte, sonrasında ise yaklaşık 41 kat artış göstererek 0,1585 seviyelerine gelmektedir. Bunlarla birlikte; söz konusu farklı iki modelden elde edilen oranların yaklaşık olarak dokuzuncu aydan sonra birbirine yakınsadığı görülmüştür.

Simülasyonlar sonucunda elde edilen 30'uncu, 60'ıncı, 90'ıncı ve 180'inci gün tahminleri, piyasada gerçekleşen getiri oranları ile karşılaştırıldığında tek faktörlü modelin RMSE değerinin (0,000012) iki faktörlü modelin RMSE değerinden (0,00066) daha düşük olduğu hesaplanmıştır. Sonuç olarak; tek risk faktörlü model, iki faktörlü modele göre üstün bir performans göstermiştir. Bir diğer ifadeyle; modellemede kullanılan risk faktörü sayısından ziyade volatilite yapısını şekillendiren parametre sayılarının, performansı belirleyen özellik olarak öne çıktığı söylenebilir.

Buradan hareketle, tek risk faktörlü kambur volatilite yapılı HJM modeliyle gerçekleştirilen simülasyon sonucunda elde edilen iskonto oranları, tahvil ve tahvile dayalı opsiyonların fiyatlandırılmasında kullanılmıştır. Bir yıllık vade için kullanılacak iskonto oranı %7,08 olarak hesaplanırken; farklı koşullar için hesaplanan tahvil alım ve satım opsiyonlarının fiyatının, dayanak varlığın nominal değerine oranı yaklaşık %12 olarak bulunmuştur. %12 oldukça yüksek bir seviyedir. Gerek korunma gerekse spekülatif amaçlarla bu opsiyonlara olan talebin artması için, incelenen dönem içerisinde %12 civarında olan bu oranının, dünya standartlarında kabul edilebilir seviyeler olarak belirlenen %3 dolaylarına inmesi gerekmektedir. Bu seviyenin yakalanabilmesi için en önemli değişken, volatilite olarak karşımıza çıkmaktadır. İncelen dönem için %82 olarak hesaplanan volatilite değerinin, %30 ve daha alt düzeylere düşmesiyle birlikte tahvil opsiyonları piyasada cazip hale gelecektir.

Bu çalışma kapsamında; faiz oranının sürekli bir fonksiyon olarak kabul edilmesi ve sadece geri ödememe riski bulunmayan devlet borçlanma senetlerinin dikkate alınması iki temel kısıt oluşturmaktadır. Mevcut koşullar altında sıçrama modellerinin ele alınmasıyla birinci kısıt ortadan kaldırılabilir. İlerleyen dönemlerde İ.M.K.B. Tahvil ve Bono Piyasasında özel sektör borçlanma senetlerinin yoğunluk kazanmasıyla birlikte bu tahvillerin de hesaplamalara dahil edilmesi söz konusu ikinci kısıtı da ortadan kaldırılabilir.

Bundan sonraki çalışmalarda, burada incelenen modellerin risk yönetiminde (riske maruz değer, durasyon, konveksite gibi hesaplamalarda) ve portföy yönetiminde bir araç olarak kullanıldığı araştırmalar gerçekleştirilebilir. Ayrıca, kısa vadeli faiz oranı modellerine ve HJM yaklaşımına ilave olarak bu çalışma kapsamında ele alınmayan LIBOR Piyasa Modeli ve Swap Piyasa Modeli gelecek çalışmalara konu edilebilir.

Kaynakça

Ağca, Ş. (2002). *The Performance of Alternative Interest Rate Risk Measures and Immunization Strategies Under Heath - Jarrow - Morton Framework.* Blacksburg, VA: PhD Thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University.

Akçay, B., Kayahan, C. ve Yürükoğlu, Ö. Ö. (2009). *Türev Ürünler ve Risk Yönetimi.* İstanbul: Scala Yayıncılık.

Akgüç, Ö. (2010). *Finansal Yönetim.* İstanbul: Avcıol Basın Yayın.

Alexander, C. (2001). *Market Models: A Guide to Financial Data Analysis.* West Sussex: John Wiley & Sons.

Alexander, C. (Dü.). (1996). *The Handbook of Risk Management and Analysis.* West Suuusex: John Wiley & Sons.

Amin, K. I. ve Morton, A. J. (1994). Implied Volatility Functions in Arbitrage Free Term Structure Models. *Journal of Financial Economics , 35* (2), 141-180.

Angelini, F. ve Herzel, S. (2005). Consistent Calibration of HJM Models to Cap Implied Volatilities. *Journal of Futures Markets , 11* (25), 1093-1120.

Au, K. T. ve Thurston, D. C. (1995). A New Class of Duration Measures. *Economics Letters , 47* (3-4), 371-375.

Aydın, N. (2009). *Finans Matematiği.* Ankara: Detay Yayıncılık.

Aydın, N., Başar, M. ve Çoşkun, M. (2007). *Finansal Yönetim* (2. Basım). Eskişehir: Genç Copy.

Bank for International Settlements [BIS]. (2009). *Semiannual OTC derivatives statistics.*

Barber, J. R. ve Copper, M. L. (1996, Fall). Immunization Using Principal Component Analysis. *Journal of Portfolio Management* , s. 99-105.

Baxter, M. ve Rennie, A. (2006). *Financial Calculus and Introduction to Derivative Pricing.* Cambridge: Cambridge University Press.

Baz, J. ve Chacko, G. (2004). *Financial Derivatives Pricing, Applications and Mathematics.* Cambridge: Cambridge University Press.

Bingham, N. H. ve Kiesel, R. (2004). *Risk-Neutral Valuation Pricing and Hedging of Financial Derivatives.* New Jersey: Springer.

Björk, T. (2004). *Arbitrage Theory in Continuous Time.* New York: Oxford University PRess.

Black, F. (1976). The Pricing of Commodity Contracts. *Journal of Financial Economics , 3*, s. 167-179.

Black, F., Derman, E. ve Toy, W. (1990). A One-Factor Model of Interest Rates and Its Application to Treasury Bond Options. *Financial Analysts Journal , 1* (46), 33-39.

Bliss, R. (1997). Testing Term Structure Estimation Methods. *Advances in Futures and Options Research , 9*, 197-231.

Brigo, D. ve Mercurio, F. (2006). *Interest Rate Models - Theory and Practice With Smile, Inflation and Credit.* Heidelberg: Springer - Verlag.

Buhler, T., Homburg, U. M., Walter, U. ve Weber, T. (1999, Şubat). An Emprical Comparision of Forward Rate and Spot Rate Models for Valuing Interest Rate Options. *The Journal of Finance , 54* (1), s. 269-305.

Bühler, A. ve Zimmerman, H. (1996, Aralık). A Statistical Analysis of the Term Structure of Interest Rates in Switzerland and Germany. *Journal of Fixed Income , 6* (3), s. 55-67.

Chambers, N. R. (1999). *Türev Piyasalar.* İstanbul: Avcıol Basım Yayım.

Choudhry, M. (2002). An Introductory Guide to Analyzing and Interpreting the Yield Curve. F. J. Fabozzi içinde, *Interest Rate, Term Structure, and Valuation Modeling* (s. 73-93). New Jersey: John Wiley & Sons.

Cox, J. C., Ingersoll, J. E. ve Ross, S. A. (1985, Mart). A Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica , 53* (2), s. 385-407.

Cuthbertson, K.. ve Nitzsche, D. (2001). *Financial Engineering Derivatives and Risk Management.* West Sussex: John Wiley & Sons.

Das, S. (1994). Calculating Zero Coupon Rates. S. Das içinde, *Swap and Derivative Financing* (s. 219-225). New York: Irwin Professional Publishing.

D'Ecclesia, R. L. ve Zenios, S. A. (1994, Eylül). Risk Factor Analysis and Portfolio Immunization in the Italian Bond Market. *Journal of Fixed Income , 4* (2), s. 51-58.

Dickey, D. ve Fuller, W. A. (1981, Temmuz). Likelihood Ratio Statistics for Autoregressive Time Series with a Unit Root. *Econometrica* (49), s. 1057-1072.

Dothan, U. L. (1978, Mart). On the Term Structure of Interest Rates. *Journal of Financial Economics , 6* (1), s. 59-69.

Driessen, J., Klaassen, P. ve Melenberg, B. (2003). The Performance of Multi Factor Term Structure Models for Pricing and edging Cap and Swaptions. *Journal of Financial and Quantitative Analysis , 38* (3), 635-672.

Duffy, D. J. (2006). *Finite Differences Methods in Financial Engineering: A Partial Differential Equation Approach.* West Sussex: John Wiley & Sons, Ltd.

Enders, W. (2004). *Applied Econometric Time Series.* New Jersey: John Wiley & Sons.

Erol, Ü. (1999). *Vadel İşlem Piyasalar: Teori ve Pratik.* İstanbul: İMKB Yayınları.

Focardi, S. M. ve Fabozzi, F. J. (2004). *The Mathematics of Financial Modeling and Investment Management.* New Jersey: John Wiley & Sons.

Glasserman, P. (2004). *Monte Carlo Methods in Financial Engineering.* New York: Springer - Verlag.

Golub, B. W. ve Tilman, L. M. (1997, Summer). Measuring Yield Curve Risk Using Principal Component Analysis, Value at Risk, and Key Rate Durations. *Journal of Portfolio Management* , s. 72-84.

Greene, W. H. (2003). *Econometric Analysis* (5. Baskı). New Jersey: Prentice Hall.

Hair, J. F., Andersen, R. E., Tatham, R. L. ve Black, W. C. (1995). *Multivariate Data Analysis* (4. Baskı b.). New Jersey: Englewood.

Heath, D., Jarrow, R. ve Morton, A. (1990). Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A Discrete Time Approximation. *Journal of Financial and Quantitative Analysis , 25* (4), 419-440.

Heath, D., Jarrow, R. ve Morton, A. (1992). Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claim Valuation. *Econometrica , 60* (1), s. 77-105.

Ho, Y. S. T. ve Lee, S. (1986). Term Structure and Pricing Interest Rate Contingent Claims. *The Journal of Finance, 41 (5),* s. 1011-1029.

Hull, J. (2006). *Options, Futures and Other Derivatives* (6. Baskı). New Jersey: Pearson Prentice Hall.

Hull, J. ve White, A. (1995, September). A Note on the Models of Hull and White for Pricing Options on the Term Structure: Response. *The Journal of Fixed Income , 5*, s. 97-102.

Hull, J. ve White, A. (1994). Branching Out. *Risk* (7), s. 34-37.

Hull, J. ve White, A. (1994). Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models: Single Factor Models. *Journal of Derivatives , 2* (1), s. 7-16.

Hull, J. ve White, A. (1990). Pricing Interest Rate Derivative Securities. *Review of Financial Studies , 3* (4), s. 573-592.

İstanbul Menkul Kıymetler Borsası (İMKB), Vadeli İşlemler Piyasası Çalışma Müdürlüğü. (1995). *Faiz Oranına Dayalı Vadeli İşlemler.* İstanbul: Oto Basımevi.

James, J. ve Webber, N. (2000). *Interest Rate Modelling.* West Sussex: John Wiley & Sons.

Jarrow, R. A. (2002). *Modeling Fixed-Income Securities and Interest Rate Options.* Stanford: Stanford University Press.

Karatzas, I. ve Shreve, S. (1998). *Methods of Mathematical Finance.* (I. Karatzas, & M. Yor, Dü) New York: Springer - Verlag.

Kırcı, M. ve Kocaman, B. *Gömülü Kulak Tanıma Sistemi.* Nisan 23, 2010 tarihinde CPU Turkey 2008: http://www.cputurkey.com/members/profile.aspx?id=150 adresinden alındı

Lardic, S., Priaulet, P. ve Priaulet, S. (2003). PCA of the Yield Curve Dynamics: Questions of Methodologies. *Journal of Bond Trading and Management , 1*, s. 327-349.

Lesage, J. P. (1999). *Applied Econometrics Using Matlab.* Toledo: Citeseer.

London, J. (2004). *Modeling Derivatives in C++.* New Jersey: John Wiley & Sons.

Maeda, Y. (1995). Euler's Discretization revisited. *Proceedings of the Japan Academy, Mathematical Sciences , 71* (3), s. 58-61.

Martellini, L., Priaulet, P. ve Priaulet, S. (2006). *Fixed - Income Securities Valuation, Risk Management and Portfolio Strategies.* West Sussex: John Wiley & Sons.

Martellini, L., Priaulet, P. ve Priaulet, S. (2003). The Euro Benchmark Yield Curve: Principal Component Analysis of Yield Curve Dynamics. F. J. Fabozzi içinde, *Professional Perspectives on Fixed Income Portfolio Management* (s. 103-131). New Jersey: John Wiley & Sons.

Mercurio, F. ve Moraleda, J. M. (2000). An Analytically Tractable Interest Rate Model with Humped Volatility. *European Journal of Operational Research , 120* (1), 205-214.

Merton, R. C. (1992). *Continuous-time Finance.* Malden: Blackwell Publishing Ltd.

Monetary and Economic Department, Bank for International Settlements [BIS]. (2010). *OTC Derivatives Market Activity.* BIS Quaterly Review.

Monetary and Economic Department, BIS. (2010). *Exchange Traded Derivatives.* Bank for International Settlements.

Musiela, M. ve Rutkowski, M. (2005). *Martingale Methods in Financial Modelling* (2. Baskı). Berlin: Springer.

Musiela, M. ve Rutkowski, M. (2005). *Stochastic Modelling and Applied Probability: Martingale Methods in Financial Modelling* (İkinci Baskı). New York: Springer.

Neftci, S. N. (2000). *An Introducion to the Mathematics of Financial Derivatives.* San Diego: Elsevier Science.

Rebonato, R. (2000). *Interest-rate Option Models.* West Sussex: John Wiley and Sons.

Rebonato, R. (1998). *Interest Rate Option Models.* Chicherster: John Wiley & Sons.

Revuz, D. ve Yor, M. (1999). *Continuous Martingales and Brownian Motion.* New York: Springer.

Sharpe, W. F., Alexander, G. J. ve Bailey, J. V. (1999). *Investments.* New Jersey: Prentice Hall.

Steele, M. (2003). *Stochastic Calculus and Financial Applications.* (I. Karatzas ve M. Yor, Dü) New York: Springer Verlag.

Stewart, J. (2007). *Kalkülüs Kavram ve Kapsam.* (Çev: Ş. Alpay, T. Ergenç, B. Korkmaz, ve Z. Nurlu). Ankara: TÜrkiye Bilimler Akademisi.

Sürmeli, F., Erdoğan, M., Erdoğan, N., Banar, K.., Kaya, E. ve Sevim, A. (2007). *Muhasebe Bilgi Sistemi.* (Dü: F. Sürmeli) Eskişehir: T.C. Anadolu Üniversitesi Yayınları.

Şamilov, A. (2007). *Ölçüm Teorisi, Olasılık ve Lebesgue İntegrali.* Eskişehir: T.C. Anadolu Üniversitesi Yayınları.

Şıklar, İ. (2008). *Finansal Ekonomi.* Eskişehir: Anadolu Üniversitesi Yayınları.

Vasicek, O. (1977). An Equilibrium Characterization of the Term Structure. *Journal of Financial Economics , 5* (2), 177-188.

VOB. (2011, Şubat). *Yıllık Bülten 2010.* Şubat 7, 2011 tarihinde Vadeli İşlem ve Opsiyon Borsası: http://www.vob.org.tr/VOBPortalTur/detailsPage.aspx?tabid=614 adresinden alındı

Wilmott, P. (2006). *Paul Wilmott On Quantitative Finance* (Cilt 2). West Sussex: Jon Wiley & Sons.

Yıldırak, K., Çalışkan, N. ve Çetinkaya, Ş. (2008). *Türev Ürün Fiyatlama Teknikleri.* İstanbul: Literatür Yayıncılık.