

**GRAFİKSEL KARAR VERME TEKNİKLERİ  
VE  
BİR UYGULAMA DENEMESİ**

**Şenay LEZKİ**

**Doktora Tezi**

**Eskişehir 2009**

**GRAFİKSEL KARAR VERME TEKNİKLERİ  
VE  
BİR UYGULAMA DENEMESİ**

**Şenay LEZKİ**

**DOKTORA TEZİ  
Sayısal Yöntemler Anabilim Dalı  
Danışman: Prof. Dr. Hasan DURUCASU**

**Eskişehir  
Anadolu Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü  
Şubat 2009**

**DOKTORA TEZ ÖZÜ****GRAFİKSEL KARAR VERME TEKNİKLERİ****VE****BİR UYGULAMA DENEMESİ****Şenay LEZKİ****Sayısal Yöntemler Anabilim Dalı****Anadolu Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Şubat 2009****Danışman: Prof.Dr. Hasan DURUCASU**

Karar verme tekniklerinden grafiksel olanlarının ele alındığı bu çalışmada ilk olarak klasik grafiksel yaklaşımlardan karar ağacı ve etki diyagramı konuları ele alınmıştır.

Geleneksel grafiksel karar verme tekniklerinin aktarımından sonra, değerlendirme ağı, ardışık karar diyagramı ve ardışık değerlendirme ağı biçiminde sıralanan yeni grafiksel karar verme yaklaşımları matematiksel yapıları ile birlikte olabildiğince ayrıntılı bir biçimde incelenmiştir.

Bu çalışmada ele alınan grafiksel karar verme teknikleri, bir lojistik firmasının yeni araç alımı karar problemine uygulanmıştır.

**ABSTRACT****GRAPHICAL DECISION MAKING TECHNIQUES  
AND  
AN APPLICATION ESSAY**

In this study, the graphical decision making techniques are described starting with classical graphical approaches, such as decision tree and influence diagram.

The description of traditional graphical decision making techniques is followed by an investigation of general mathematical properties of modern/contemporary graphical techniques namely valuation network, sequential decision diagram and sequential valuation network approaches.

An application of the graphical decision making techniques reviewed in this study are applied to a real life business problem where a logistics firm must decide on a new vehicle.

**JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI**

**Şenay LEZKİ'nin "Grafiksel Karar Verme Teknikleri ve Bir Uygulama Denemesi"** başlıklı tezi **17 Nisan 2009** tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca, İşletme (**Sayısal Yöntemler**) Anabilim Dalında **Doktora** tezi olarak değerlendirilerek kabul edilmiştir.

**İmza**

<b>Üye (Tez Danışmanı)</b>	<b>: Prof. Dr. Hasan DURUCASU</b>	.....
<b>Üye</b>	<b>: Prof. Dr. Emel ŞIKLAR</b>	.....
<b>Üye</b>	<b>: Prof. Dr. A. Fuat YÜZER</b>	.....
<b>Üye</b>	<b>: Doç. Dr. Zeki ÇAKMAK</b>	.....
<b>Üye</b>	<b>: Yard. Doç. Dr. Fikret ER</b>	.....

**Prof. Dr. Ramazan GEYLAN**  
**Anadolu Üniversitesi**  
**Sosyal Bilimler Enstitüsü Müdürü**

## ÖZGEÇMİŞ

Şenay LEZKİ

Sayısal Yöntemler Anabilim Dalı

Doktora

### Eğitim

Yüksek Lisans	2002	Anadolu Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Sayısal Yöntemler Anabilim Dalı
Lisans	1998	Anadolu Üniversitesi, İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi, İşletme Bölümü
Lise	1991	Adana Çobanoğlu Ticaret Lisesi

### İş

1998-	Anadolu Üniversitesi, İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi, İşletme Bölümü
-------	--

### Kişisel Bilgiler

**Doğum Yeri ve Yılı:** Adana/1974      **Cinsiyet:** Bayan      **Yabancı Dil:** İngilizce

## İÇİNDEKİLER

### Sayfa

ÖZ .....	ii
ABSTRACT.....	iii
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI .....	iv
ÖZGEÇMİŞ.....	v
TABLolar LİSTESİ.....	xii
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	xiv
GİRİŞ .....	1

## BİRİNCİ BÖLÜM

### ANA ÇİZGİLERİYLE KARAR SÜRECİ

1. KARAR VERME, KARAR PROBLEMİ VE KARAR PROBLEMİNİN ÖĞELERİ .....	4
2. KARAR ORTAMLARI .....	5
3. SONUÇ MATRİSİ VE KARAR VERME ÖLÇÜTLERİ .....	6
4. KARAR VERMEDE BAYES KURALI.....	9
5. ARDIŞIK KARAR KAVRAMI .....	10

## İKİNCİ BÖLÜM

### KARAR PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜNDE KULLANILAN GELENEKSEL GRAFİKSEL TEKNİKLER

<b>1. KARAR AĞACI</b> .....	<b>12</b>
<b>1.1. Karar Ağacının Öğeleri</b> .....	<b>13</b>
<b>1.1.1. Karar Noktası</b> .....	<b>13</b>
<b>1.1.2. Şans Noktası</b> .....	<b>13</b>
<b>1.1.3. Bitiş Noktası</b> .....	<b>14</b>
<b>1.1.4. Dal</b> .....	<b>14</b>
<b>1.1.5. Sonuç (değeri)</b> .....	<b>14</b>
<b>1.1.6. Olasılık</b> .....	<b>14</b>
<b>1.2. Karar Ağacının Oluşturulması</b> .....	<b>15</b>
<b>1.3. Karar Ağacının Çözüm Süreci</b> .....	<b>15</b>
<b>1.4. Karar Ağacında Birleşme Durumu</b> .....	<b>23</b>
<b>2. ETKİ DİYAGRAMI</b> .....	<b>25</b>
<b>2.1. Etki Diyagramında İlişkisel Düzey</b> .....	<b>26</b>
<b>2.1.1. Karar Düğümü</b> .....	<b>26</b>
<b>2.1.2. Şans Düğümü</b> .....	<b>26</b>
<b>2.1.3. Değer (Fayda) Düğümü</b> .....	<b>27</b>
<b>2.1.4. Koşullu Yay</b> .....	<b>28</b>
<b>2.1.5. Bilgi Yay</b> .....	<b>28</b>
<b>2.2. Etki Diyagramında Fonksiyonel Düzey</b> .....	<b>30</b>
<b>2.3. Etki Diyagramlarında Sayısal Düzey</b> .....	<b>30</b>
<b>2.4. Etki Diyagramında Düğümler Arası İlişkiler</b> .....	<b>31</b>
<b>2.5. Etki Diyagramının Çözüm Süreci</b> .....	<b>32</b>
<b>2.6. Düğüm Terminolojisi</b> .....	<b>33</b>
<b>2.7. Etki Diyagramının Matematiksel Yapısı</b> .....	<b>37</b>
<b>2.8. Etki Diyagramı Çözüm Yaklaşımı</b> .....	<b>39</b>
<b>2.8.1. Düğüm Silme ve Yay Ters Çevirme</b> .....	<b>42</b>
<b>2.8.1.1. Düğüm Silme</b> .....	<b>42</b>
<b>2.8.1.2. Yay Ters Çevirme</b> .....	<b>47</b>



## ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

### KARAR PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜNDE YENİ GRAFİKSEL YAKLAŞIMLAR

<b>1. DEĞERLEME AĞI.....</b>	<b>51</b>
1.1. Grafikselsel Düzey .....	52
1.1. 1. Karar Dügümü.....	52
1.1. 2. Şans Dügümü .....	52
1.1. 3. Gösterge Dügümü.....	53
1.1. 4. Fayda Dügümü.....	54
1.1. 5. Olasılık Dügümü .....	54
1.1. 6. Bilgi Kısıtları.....	55
1.1. 7. İyi Tanımlanmış Bilgi Kısıtları.....	55
1.2. Bağımlılık Düzeyi.....	56
1.2.1. Çerçeveler.....	56
1.2.2. Düzenlemeler.....	56
1.2.3. Gösterge Değerlemeleri.....	57
1.2.4. Düzenlemelerin İzdüşümü .....	58
1.2.5. Gösterge Değerlemelerinin Marjinalizasyonu .....	58
1.2.6. Gösterge Değerlemelerinin Birleşimi.....	58
1.2.7. Etkin Çerçeveler .....	59
1.3. Sayısal Düzey .....	59
1.3.1. Fayda Değerlemeleri .....	59
1.3.2. Fayda Değerlemelerinin Birleşimi .....	60
1.3.3. Olasılık Değerlemeleri.....	60
1.3.4. Olasılık Değerlemelerinin Birleşimi.....	61
1.3.5. Olasılık Değerlemelerinin Marjinalizasyonu .....	61
1.3.6. Bölme İşlemi.....	61
1.3.7. Koşullu Olasılıklar.....	62
1.3.8. Gösterge Değerlemesi ve Olasılık Değerlemesinin Birleşimi.....	62
1.4. Değerleme Ağı Gösteriminin Anlamı ve Çözümü .....	63
1.4.1. Kanonik Değerleme Ağı Gösterimi.....	63
1.4.2. Fayda ve Olasılık Değerlemesinin Birleşimi .....	65

1.4.3. Fayda ve Gösterge Değerlemesinin Birleşimi .....	65
1.4.4. Fayda Değerlemelerinin Marjinalizasyonu.....	66
1.4.5. Karar Fonksiyonları.....	66
1.4.6. Strateji .....	67
1.4.7. Geçerli Silme Sırası .....	67
1.4.8. Değişkenlerin Alt Kümesinin Fayda Değerlemelerinden Marjinalleştirilmesi .....	68
1.4.9. Kanonik Değerleme Ağının Çözümü .....	68
1.4.10. İyi Tanımlanmış Değerleme Ağı Gösterimleri.....	69
1.4.11. İyi Tanımlanmış Olasılık Değerlemeleri .....	70
1.4.12. İyi Tanımlanmış Değerleme Ağı Gösterimi .....	71
1.4.13. Değerleme Ağı ile Karar Probleminin Çözümü .....	71
1.5. Füzyon Algoritması .....	72
1.5.1. Etkin Çerçvelerin Hesaplanması.....	72
1.5.2. Değerleme Ağının Çözümü .....	72
<b>2. ARDIŞIK KARAR DİYAGRAMI.....</b>	<b>76</b>
2.1. Grafikselsel Gösterim .....	77
2.2. Terminoloji, Notasyon ve Temel Özellikler .....	78
2.3. Döğüm Geçmişleri .....	80
2.4. Döğüm Fonksiyonları.....	81
2.4.1. Durum Uzayı Fonksiyonu.....	81
2.4.2. Olasılık Dağılım Fonksiyonu .....	82
2.4.3. Bir Sonraki Döğüm Fonksiyonu .....	82
2.4.4. Gerçekleşen Geri Dönüş Fonksiyonu ve Değer Fonksiyonu Ayrıştırması. 83	
2.5. Ardışık Karar Diyagramında Formülasyon .....	84
2.5.1. Minimal Geçmişler .....	84
2.5.2. Ardışık Diyagram ile Etki Diyagramının Uyumluluğu.....	85
2.5.3. Formülasyon Tablosunun Oluşturulması .....	86
2.6. Ardışık Karar Diyagramının Çözümü .....	88
2.6.1. İlgili Geçmişler ve Döğüm İşlem Sırası .....	89
2.6.2. Döğüm (İşlem) Sırası Algoritması .....	89
<b>3. ARDIŞIK DEĞERLEME AĞI .....</b>	<b>91</b>
3.1. Ardışık Değerleme Ağı Gösterimi.....	91
3.1.1. Grafikselsel Bölüm.....	93

3.1.2. Nitel Bölüm.....	95
3.1.2. Nicel Bölüm .....	96
3.2. Ardışık Değerleme Ağı Gösteriminin Çözümü .....	97
3.2.1. Birleştirme.....	97
3.2.2. Marjinalizasyon .....	100
3.2.3. Bölme İşlemi.....	101
3.2.4. Etiketleme.....	101
3.2.5. Füzyon Algoritması .....	102
3.2.6. Problemin Ayrıştırılması .....	103
3.2.6.1. Değişkenler .....	104
3.2.6.2. Fayda ve Gösterge Değerlemeleri .....	104
3.2.6.3. Olasılık Değerlemeleri.....	105

## DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

### BİR LOJİSTİK FİRMASININ ARAÇ EDİNME PROBLEMİNİN GRAFİKSEL KARAR TEKNİKLERİ YARDIMIYLA ÇÖZÜMÜ

1. KARAR PROBLEMİ.....	106
2. PROBLEMİN KARAR AĞACI ÇÖZÜMÜ .....	110
2.1. Problemin Karar Ağacı Gösterimi.....	110
2.2. Karar Ağacının Çözümü.....	115
3. PROBLEMİN ETKİ DİYAGRAMI ÇÖZÜMÜ .....	121
3.1. Problemin Etki Diyagramı Gösterimi.....	121
3.1.1. İlişkisel Düzey .....	122
3.1.2. Fonksiyonel Düzey .....	123
3.1.3. Sayısal Düzey .....	124
3.2. Etki Diyagramının Çözümü.....	126
4. PROBLEMİN DEĞERLEME AĞI ÇÖZÜMÜ.....	140
4.1. Problemin Değerleme Ağı Gösterimi.....	140
4.1.1. Grafikselsel Düzey .....	140
4.1.2. Bağımlılık Düzeyi.....	143
4.1.3. Sayısal Düzey .....	145
4.2. Değerleme Ağının Çözümü .....	146

<b>5. PROBLEMİN ARDIŞIK KARAR DİYAGRAMI ÇÖZÜMÜ .....</b>	<b>155</b>
<b>5.1. Problemin Ardışık Karar Diyagramı Gösterimi .....</b>	<b>155</b>
<b>5.1.1. Grafikselsel Gösterim .....</b>	<b>155</b>
<b>5.1.2. Formülasyon Tablosu.....</b>	<b>158</b>
<b>5.2. Ardışık Karar Diyagramının Çözümü .....</b>	<b>160</b>
<b>6. PROBLEMİN ARDIŞIK DEĞERLEME AĞI ÇÖZÜMÜ.....</b>	<b>164</b>
<b>6.1. Problemin Ardışık Değerleme Ağı Gösterimi.....</b>	<b>164</b>
<b>6.1.1. Grafikselsel Bölüm.....</b>	<b>165</b>
<b>6.1.2. Nitel Bölüm.....</b>	<b>168</b>
<b>6.1.3. Nicel Bölüm .....</b>	<b>169</b>
<b>6.2. Ardışık Değerleme Ağının Çözümü .....</b>	<b>170</b>
<b>6.2.1. Problemin Ayrıştırılması .....</b>	<b>170</b>
<b>6.2.2. Alt Problemlerin Çözümü.....</b>	<b>173</b>
<b>SONUÇ.....</b>	<b>180</b>
<b>EKLER.....</b>	<b>185</b>
<b>KAYNAKÇA.....</b>	<b>188</b>

## TABLOLAR LİSTESİ

Tablo 1. Sonuç Matrisinin Genel Gösterimi.....	6
Tablo 2. Etki Diyagramlarında Kullanılan Yönlendirilmiş Yay ve Anlamları .....	29
Tablo 3. Ardışık Karar Diyagramında Kullanılan Formülasyon Tablosu .....	86
Tablo 4. Değerleme Parçası Örneği.....	92
Tablo 5. Fayda Fonksiyonu Bileşenlerine Karşılık Gelen Fayda Değerleri.....	109
Tablo 6. Başlangıç ve Bayes Olasılıkları.....	110
Tablo 7. Fayda Değerleri Tablosu .....	113
Tablo 8. Olasılık Değerleri Tablosu .....	125
Tablo 9. Net Fayda Değerlerinin Belirlenmesi.....	125
Tablo 10. Fayda Değerleri Tablosu .....	126
Tablo 11. D Düğümünün Silinmesine İlişkin Hesaplamalar .....	128
Tablo 12. $F \rightarrow T$ Yayının Ters Çevrilmesine İlişkin Hesaplamalar.....	131
Tablo 13. F Düğümünün Silinmesine İlişkin Hesaplamalar .....	133
Tablo 14. MK Düğümünün Silinmesine İlişkin Hesaplamalar .....	136
Tablo 15. T ve TK Düğümlerinin Silinmesine İlişkin Hesaplamalar.....	138
Tablo 16. Değerleme Ağı Fayda Değerlemeleri Tablosu.....	145
Tablo 17. Değerleme Ağı Olasılık Değerlemeleri Tablosu.....	146
Tablo 18. D Düğümü ile İlgili Füzyon İşleminin Sayısal Hesaplamaları .....	147
Tablo 19. F Düğümü ile İlgili Füzyon İşleminin Sayısal Hesaplamaları (1) .....	149
Tablo 20. F Düğümü ile İlgili Füzyon İşleminin Sayısal Hesaplamaları (2) .....	150
Tablo 21. MK Düğümü ile İlgili Füzyon İşleminin Sayısal Hesaplamaları.....	152
Tablo 22. T Düğümü ile İlgili Füzyon İşleminin Sayısal Hesaplamaları.....	153
Tablo 23. TK Düğümü ile İlgili Füzyon İşleminin Sayısal Hesaplamaları.....	154
Tablo 24. Ardışık Karar Diyagramının Formülasyon Tablosu .....	159
Tablo 25. Olasılık Değerlemesi Parçaları.....	170
Tablo 26. Fayda Değerlemesi Parçaları.....	170
Tablo 27. Olasılık Değerlemesi $(\alpha \otimes \rho)/(\alpha \otimes \rho)^{\downarrow T}$ 'nin Sayısal Hesaplamaları .....	173
Tablo 28. Alt Problem 1'in Çözümüne İlişkin Hesaplamalar .....	175
Tablo 29. Alt Problem 2'nin Çözümüne İlişkin Hesaplamalar .....	175

Tablo 30. Alt Problem 3'ün Çözümüne İlişkin Hesaplamalar .....	175
Tablo 31. Alt Problem 4'ün Çözümüne İlişkin Hesaplamalar .....	176
Tablo 32. Alt Problem 5'in Çözümüne İlişkin Hesaplamalar .....	177
Tablo 33. Alt Problem 6'nın Çözümüne İlişkin Hesaplamalar .....	177
Tablo 34. Alt Problem 7'nin Çözümüne İlişkin Hesaplamalar .....	178
Tablo 35. Alt Problem 8'in Çözümüne İlişkin Hesaplamalar .....	178

## ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1. Tek Aşamalı Karar Problemine İlişkin Karar Ağacı .....	18
Şekil 2. Çok Aşamalı (Ardışık) Karar Problemine İlişkin Karar Ağacı.....	20
Şekil 3. Ardışık (Çok Aşamalı) Asimetrik Karar Problemine İlişkin Karar Ağacı.....	22
Şekil 4. Çok Aşamalı (Ardışık) Karar Probleminde Birleşme Durumunu Gösteren Karar Ağacı .....	24
Şekil 5. Karar Düğümü Sembolleri .....	26
Şekil 6. Şans Düğümü Sembolleri.....	27
Şekil 7. Deterministik Düğüm Sembolleri .....	27
Şekil 8. Değer Düğümü Sembolü.....	27
Şekil 9. Etki Diyagramının Üç Düzeyi.....	30
Şekil 10. Tek Aşamalı Etki Diyagramı.....	31
Şekil 11. Çok Aşamalı Etki Diyagramı .....	32
Şekil 12. $g$ Düğümü İçin Tanımlanan Bazı Öncel ve Ardıl Düğüm Kümeleri .....	35
Şekil 13. Etki Diyagramında Doğrudan Görünmeyen Etkiler.....	36
Şekil 14. Kısır Düğümlerin Silinmesi .....	43
Şekil 15. Şans Düğümünün Silinmesi .....	44
Şekil 16. Bir Karar Düğümünün Silinmesi.....	46
Şekil 17. Şans Düğümleri Arasındaki Yayın Ters Çevrilmesi .....	48
Şekil 18. Değerleme Ağının Grafik Düzeyi .....	53
Şekil 20. Ardışık Değerleme Ağı Tekniğinin Grafiksiz Bölümüne Örnek .....	94
Şekil 21. Problemin Karar Ağacı Gösterimi.....	114
Şekil 22. Şans Düğümüne Bağlanan Bitiş Dallarını İçin Beklenen Değerler .....	116
Şekil 23. Marka Karar Dallarını İçin Beklenen Değerler .....	118
Şekil 24. Problemin Karar Ağacı Çözümü .....	120
Şekil 25. Başlangıç Aşamasında Etki Diyagramı .....	122
Şekil 26. D Düğümünün Silinmesi Sonrasında Etki Diyagramı .....	129
Şekil 27. $F \rightarrow T$ Yayının Ters Çevrilmesi.....	130
Şekil 28. F Düğümünün Silinmesi Sonrasında Etki Diyagramı .....	135
Şekil 29. MK Düğümünün Silinmesi Sonrasında Etki Diyagramı .....	137
Şekil 30. T Düğümünün Silinmesi Sonrasında Etki Diyagramı .....	139

Şekil 31. TK Düğümünün Silinmesi Sonrasında Etki Diyagramı .....	139
Şekil 32. Problemin Değerleme Ağı ile Gösterimi .....	141
Şekil 33. D Düğümü ile İlgili Füzyon İşlemi Sonrası Değerleme Ağı .....	147
Şekil 34. F Düğümü ile İlgili Füzyon İşlemi Sonrası Değerleme Ağı .....	148
Şekil 35. MK Düğümü ile İlgili Füzyon İşlemi Sonrası Değerleme Ağı .....	151
Şekil 36. T Düğümü ile İlgili Füzyon İşlemi Sonrası Değerleme Ağı .....	153
Şekil 37. TK Düğümü ile İlgili Füzyon İşlemi Sonrası Değerleme Ağı .....	154
Şekil 38. Problemin Ardışık Karar Diyagramı Çözümüne ilişkin Etki Diyagramı .....	156
Şekil 39. Ardışık Karar Diyagramı .....	157
Şekil 40. Ardışık Karar Diyagramı ile Uyumlu Biçime Dönüştürülmüş Etki Diyagramı .....	158
Şekil 41. Problemin Ardışık Değerleme Ağı ile Gösterimi .....	166
Şekil 42. Ayrıştırılmış Ağaç .....	172



## GİRİŞ

Karar verme, belirli bir amacı gerçekleştirmek için, birden fazla davranış biçimi arasından amaca en uygun olanının belirlenme sürecidir. İşletmeler açısından ele alındığında karar verme, işletmenin amaçlarına erişmesini, dolayısıyla başarısını etkileyen önemli bir faktördür. İşletmelerde karar verme sorumluluğunu taşıyan yöneticiler, genellikle sezgisel olarak karar verme eğilimindedir. Yüksek rekabet ve belirsizlik ortamında sağlıklı karar verme konusunda sezgisel yaklaşımlar bilimsel olmadığından olumlu sonuçlar vermeyebilir. Bu nedenle karar vermede bilimsel yaklaşımın kullanılması, doğru kararların alınabilmesine önemli ölçüde katkı sağlayacaktır.

Karar analizi ya da karar kuramı çalışmalarında, karar verme, çözülmesi gereken bir problem olarak ele alınmakta ve bu nedenle *karar problemi* ifadesi de sıklıkla kullanılmaktadır. Bir karar probleminin çözülmesinde izlenen adımlar karar sürecini oluşturur. Karar süreci, problemin belirlenmesi, problemle ilişkili olarak karar vericinin kontrol edebildiği ve edemediği değişkenlerin belirlenmesi, problemin çözümüne ilişkin alternatiflerin ve bunlara ilişkin getirilerin ortaya konması, mümkünse kontrol edilemeyen değişkenlerle ilişkili olasılık değerlerinin belirlenmesi ve son olarak da uygun karar ölçütleri kullanılarak en iyi sonucu verecek alternatifin seçilmesi adımlarından oluşur.

Karar problemlerinde çözüm öncesinde geleneksel olarak iki yaklaşım kullanılmaktadır. Bunlardan ilki karar matrisi ya da strateji matrisi olarak da bilinen *sonuç matrisinin* kullanımınıdır. Sözü edilen bu yaklaşım bir tek kararın verildiği karar problemlerinde tercih edilmektedir. Problem sonuç matrisi ile ifade edildikten sonra çeşitli karar ölçütleri kullanılarak çözüme ulaşılır. Geleneksel diğer yaklaşımda ise karar problemi, *Karar Ağacı* adı verilen ve problemdeki bileşenlerin çeşitli geometrik sembollerle ifade edildiği bir grafik üzerinde gösterilmektedir. Karar Ağacı olarak ele alınan problem Karar Ağacına özgü bir teknik ile çözülür. Karar Ağacı tek bir karara ilişkin problemlerde olduğundan daha çok ardışık olarak birden fazla kararın verilmesini gerektiren problemlerin gösterimi ve çözümünde kullanılmaktadır. Sonuç matrisi ve Karar Ağacı gösterimlerinin temeli von Neumann ve Morgenstern'in 1953 yılındaki çalışmalarına dayanmaktadır. Karar Ağacına benzer bir biçimde, problemin bileşenlerini grafik biçiminde sunmayı sağlayan bir diğer yaklaşım *Etki Diyagramı* olarak adlandırılan tekniktir. Etki Diyagramı konusundaki 1976'da Miller ve diğerlerinin öncül çalışmaları, 1981'de Howard ve Matheson tarafından

olgunlaştırılmıştır. Zaman içinde bu konuda Howard ve Matheson'u izleyen diğer araştırmacılar tarafından da pek çok çalışma yapılmıştır. Bu nedenle Karar Ağacı ve Etki Diyagramı bilinen ve kabul gören geleneksel grafiksel yaklaşımlar olarak tanınmaktadır.

Karar problemlerinin grafiksel gösterimi için önerilen ve üzerinde çalışmalar sürdürülen daha yeni teknikler *Değerleme Ağı*, *Ardışık Karar Diyagramı* ve *Ardışık Değerleme Ağı* olarak sıralanabilir. Değerleme Ağının temelini oluşturan çalışmalar “Değerleme Tabanlı Sistemler Başlığı” altında ilk kez 1992 ve 1993 yıllarında Shenoy tarafından gerçekleştirilmiştir. 1996 yılında yine Shenoy tarafından yapılan bir çalışma ile Değerleme Ağı tekniği geliştirilmiştir. Ardışık Karar Diyagramı olarak adlandırılan teknik ise 1995 yılında Covaliu ve Oliver'in çalışması ile ortaya konmuştur. Temelleri Demirer ve Shenoy'un 1999'da yaptıkları çalışmaya dayanan en son grafiksel teknik ise Değerleme Ağı ve Ardışık Karar Diyagramı tekniklerinin bir karışımı olan Ardışık Değerleme Ağı tekniğidir.

Bu çalışmada, pek çok kaynakta sadece probleme dayalı olarak verilen grafiksel karar yöntemlerinin matematiksel yapısı ve özellikle ardışık ve asimetri özelliğine sahip karar problemlerinin gösterimi ve çözümünde söz konusu grafiksel tekniklerin üstün ve zayıf yönleri ortaya konmaya çalışılmıştır. Bununla amaçlanan, karar vericileri kararlarını bilimsel temele dayandırarak vermeye özendirilmenin yanı sıra bu tekniklerden hangisinin problemi tüm yönleriyle ortaya koyma ve çözümlenme konusunda en uygun olduğunun belirlenmesine destek sağlamaktır.

Çalışmanın birinci bölümünde karar ve karar problemi kavramlarının tanımları ile karar probleminin öğeleri tanıtılmıştır. Karar vericinin problemin öğelerine ilişkin bilgi düzeyini yansıtan karar ortamları, sonuç matrisi ve karar verme ölçütleri de bu bölümde yer almaktadır. Birinci bölüm kapsamında son olarak, karar analizinde önemli bir yeri olan Bayes teoremi ve ardışık karar kavramları açıklanmaya çalışılmıştır.

İkinci bölümde, karar problemlerinin çözümünde kullanılan geleneksel grafiksel teknikler olan Karar Ağacı ve Etki Diyagramı ayrıntılı olarak açıklanmıştır. Her bir tekniğin grafiksel gösteriminde kullanılan öğeler ve problemin çözüm süreci bölümün ayrıntılarını oluşturmaktadır.

Karar problemlerinin grafiksel gösterimi ve çözümünü için son yıllarda ortaya konan Değerleme Ağı, Ardışık Karar Diyagramı ve Ardışık Değerleme Ağı tekniklerinin tanıtımı üçüncü bölümün konusunu oluşturmaktadır.

Dördüncü ve son bölümde grafiksel karar verme teknikleri bir lojistik firmasının araç edinme problemine uygulanmıştır. Tekniklerin problemi grafiksel olarak sunma ve çözme sürecinin uygulamadaki üstün ve zayıf yönleri ortaya konmaya çalışılmıştır. Böylelikle, çalışmalarında grafiksel karar verme tekniklerine yer vereceklere ışık tutabilecek bütünleşik bir temel sağlanmaya çalışılmıştır.

## BİRİNCİ BÖLÜM

### ANA ÇİZGİLERİYLE KARAR SÜRECİ

Karar, karar verme ve karar vermeye ilişkin temel kavramlar bu bölümde ele alınacaktır.

#### 1. KARAR VERME, KARAR PROBLEMİ VE KARAR PROBLEMİNİN ÖĞELERİ

Herhangi bir konuda “karar verme” (ya da karar alma), belirli bir amaca ulaşabilmek için mümkün birden fazla davranış biçimi arasından amaca en uygun olanının seçimidir. Tek bir davranış biçimi bulunduğu anda seçim söz konusu olamayacağından “karar verme” sürecinden de söz edilemez. Bir diğer anlatımla karar verme, belirli bir amaca ulaşabilmek için var olan olanak ve koşullara göre uygulanabilecek çeşitli hareket biçimlerinden en uygun olanını seçmektir<sup>1</sup>. Sözü edilen biçimde, karar verme sürecini gerektiren bir problem *karar problemi* olarak algılanır<sup>2</sup>.

Genel olarak bir karar probleminde aşağıda sıralanan öğeler yer alır:

1. *Karar Verici (Karar Alıcı)* : Mevcut seçenekler arasından tercih yapan kişi veya grubu yansıtır. Karar sonucunun sorumluluğunu taşıyan gerçek veya tüzel kişidir.
2. *Amaç*: Karar vericinin seçtiği faaliyetler ile ulaşmak istediği sonuçtur.

---

<sup>1</sup> Alptekin Esin, **Yöneylem Araştırmasında Yararlanılan Karar Yöntemleri**, (Dördüncü Basım. Ankara: Gazi Kitabevi Tic.Ltd.Şti., 2003), s.314-315.

<sup>2</sup> Charalambos D. Aliprantis ve Subir K.Chakrabarti, **Games and Decision Making**, (USA:Oxford University Press, 2000), s.1.

3. *Karar Kriteri*: Karar vericinin, seçimini oluşturmada kullandığı değer ölçütüdür. Söz konusu ölçüt gelir, kâr ve faydanın en büyüklenmesi; maliyet, gider vb.'nin en küçüklenmesini kapsamaktadır.
4. *Seçenekler (Alternatifler-Stratejiler)*: Karar vericinin seçebileceği farklı alternatif faaliyetlerdir. Seçenekler, karar vericinin kontrolü altındaki kaynaklara bağlıdır. Karar problemlerinde karar vericinin kontrol edebildiği değişkenler karar değişkeni olarak yer alır<sup>3</sup>.
5. *Doğal Durumlar (Olaylar)*: Olay kavramı, herhangi bir faaliyetin meydana getireceği sonucu etkileyebilen çevresel faktörleri ifade etmek için kullanılır ve bu faktörler karar verici tarafından kontrol edilemez. Çevresel faktörler *doğal durumlar* olarak isimlendirilir<sup>4</sup>. Doğal durumlar belirli olasılık değerleri ile ortaya çıktıklarından karar problemlerinde rassal değişken olarak yer alır<sup>5</sup>.
6. *Sonuçlar*: Herhangi bir doğal durumda uygulanacak seçeneğin meydana getirdiği nicel değerlerdir<sup>6</sup>.

Karar ortamı, karar vericinin problem öğelerine ilişkin sahip olduğu bilgi derecesine bağlı olarak farklılaşır. Söz konusu bu ortamlar izleyen kısımda aktarılmıştır.

## 2. KARAR ORTAMLARI

Bir karar probleminde karara ilişkin tüm bileşenler ortaya çıktıktan sonra karar probleminin türüne karar verilmesi gerekir. Genel anlamıyla bir karar problemi, genellikle karar vericinin kontrolü altında olmayan değişkenlerin etkisi altında kalacaktır. Bir karar probleminde karar ortamları belirlilik, risk ve belirsizlik ortamları olmak üzere üç başlık altında incelenir.

*Belirlilik ortamında* karar verme durumunda, problemdeki tüm ayrıntılar kesin olarak bilinmektedir. Belirlilik ortamında karar vermeye çalışan bir karar verici, problemde yer alan tüm değişkenlerinin yapısına göre doğrusal programlama teknikleri kullanarak çözüm üretebilir.

<sup>3</sup> Jacek Malczewski, **GIS and Multicriteria Decision Analysis**, (USA:John Wiley&Sons, Inc., 1999), s.138.

<sup>4</sup> Joseph W. Newman, **Management Applications of Decision Theory**, (USA: Harper&Row Publishers, 1971), s.7.

<sup>5</sup> Malczewski, **a.g.e.**,s.139.

<sup>6</sup> Hülya Tütek ve Şevkinaz Gümüsoğlu, **Sayısal Yöntemler Yönetmel Yaklaşım**, (İkinci Basım. İstanbul:Beta Basım Yayım Dağıtım A.Ş., 1994), s.66.

Her seçeneğin farklı doğal durumlarda doğuracağı sonuçlar belirli olasılıklarla ortaya çıkıyorsa *risk ortamında* karar verme söz konusudur<sup>7</sup>. Bazı risk altında karar problemleri yöneylem araştırması başlığı altında toplanan teknikler yardımıyla çözümlenebilse de problemlerin kendi doğalarından kaynaklanan yapılarından dolayı farklı karar teknikleri yardımıyla çözümlenmeleri gerekebilir.

Doğal durumların mümkün sonuçları hakkında hiçbir olasılık ataması yapılmıyorsa karar ortamı *belirsizlik ortamıdır*<sup>8</sup>. Belirsizlik ortamında karar verme söz konusu olduğunda, öncelikle belirsizlik ortamı istatistiksel teknikler yardımıyla risk ortamına dönüştürülür, sonrasında risk ortamında karar verme teknikleri uygulanarak çözüme ulaşılır.

### 3. SONUÇ MATRİSİ\* VE KARAR VERME ÖLÇÜTLERİ

Bir karar probleminde,  $i = 1, \dots, m$  olmak üzere  $m$  tane karar alternatifi ve  $j = 1, \dots, n$  olmak üzere  $n$  tane farklı doğal durum bulunduğu her bir alternatif ve doğal durum ikilisi için kâr ya da zarar değerleri hesaplanarak bir matris üzerinde gösterilebilir. Bu matrise sonuç matrisi adı verilir<sup>9</sup>.

Tablo 1. Sonuç Matrisinin Genel Gösterimi

Alternatifler (Stratejiler)	Doğal Durumlar						
	$D_1$	$D_2$	$D_3$	.	.	.	$D_n$
$A_1$	$S_{11}$	$S_{12}$	$S_{13}$	.	.	.	$S_{1n}$
$A_2$	$S_{21}$	$S_{22}$	$S_{23}$	.	.	.	$S_{2n}$
$A_3$	$S_{31}$	$S_{32}$	$S_{33}$	.	.	.	$S_{3n}$
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
$A_m$	$S_{m1}$	$S_{m2}$	$S_{m3}$	.	.	.	$S_{mn}$

<sup>7</sup> Ahmet Öztürk, **Yöneylem Araştırması**, (Dokuzuncu Basım. Bursa:Ekin Kitabevi, 2004), s.16.

<sup>8</sup>Öztürk, **a.g.e.**, s.16.

\* İng. Payoff Matrix. (Çalışmanın izleyen kesimlerinde anahtar sözcük değerinde bulunan böylesi bazı kavramların İngilizcelerine, izleyen araştırmalarda yardımcı olmak amacıyla dipnotlarda yer verilecektir.)

<sup>9</sup> Simon French ve David Rios Insua, **Statistical Decision Theory**, (London: Oxford University Pres Inc., 2000), s.10-11.

Tablo 1’de  $A_1, A_2, \dots, A_m$  alternatifleri,  $D_1, D_2, \dots, D_n$  doğal durumları ve  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$  olmak üzere  $S_{ij}$ ’ler de  $i$  alternatifinin benimsenmesi ve  $j$  doğal durumunun ortaya çıkması ile elde edilecek sonucu (kâr ya da zarar değerlerini) gösterir.

Risk ortamında karar verme söz konusu olduğunda, sonuç matrisinde doğal durumların ortaya çıkma olasılıkları da yer alır. Dolayısıyla karar verici alternatiflere karşılık gelen doğal durumlar için ne kadar riske girebileceğinin de farkındadır. Burada unutulmaması gereken nokta, bütün doğal durumlar için bir olasılık değerinin bulunuyor olması gerekliliğidir. Matriste  $n$  tane doğal durum olduğundan  $n$  tane de  $P$  olasılık değerinin bulunması gerekir. Verilen olasılık değerlerinin en uygun şekilde belirlenmesi karar probleminin çözümünü yönlendirecektir. Doğru hesaplanmamış ya da atanmamış olasılıklar ile çalışıldığında yanlış sonuçlara ulaşılması kaçınılmazdır.

Karar vericilerin risk ortamında oluşturdukları sonuç matrisi için sıklıkla kullandıkları ölçüt *beklenen değer* ölçütü olarak adlandırılır<sup>10</sup>. Bu ölçütte sonuç matrisi kâr yapılı ise beklenen kazançların en büyüğüne, eğer sonuç matrisi maliyet yapılı ise beklenen maliyetlerin en küçüğüne karşılık gelen alternatif benimsenir. Bu ölçütün uygulanmasında beklenen değer her alternatif için ayrı ayrı hesaplanır. Beklenen değer ölçütü kullanıldığında  $i = 1, \dots, m$ , olmak üzere, her bir alternatifin beklenen değeri

$E[A_i] = \sum_{j=1}^n P_j S_{ij}$  biçiminde hesaplanır. Eğer problem kâr yapılı bir problem ise hesaplanan

beklenen değerlerden en yükseğine; eğer problem maliyet yapılı bir problem ise hesaplanan bu beklenen değerlerden en küçüğüne sahip olan alternatif seçilir.

Risk ortamında karar verme durumundaki bir karar vericinin kullanabileceği diğer bir matematiksel teknik ise *en büyük olasılık* ölçütü olarak adlandırılır. Bu teknikte karar verici ortaya çıkma olasılığı en yüksek olan doğal duruma göre hareket eder ve bu doğal durum altında kalan değişik alternatifleri inceleyerek, belirlenen amaca en uygun olan alternatifi seçer.

---

<sup>10</sup> Bernard W.Taylor, **Introduction to Management Science**, (Ninth Edition. USA: Prentice Hall, 2007), s. 524.

Karar vericinin doğal durumların ortaya çıkışlarıyla ilgili herhangi bir olasılık değerine sahip olmadığı belirsizlik ortamında karar verme söz konusu olduğunda, problemin çözümünde kullanılacak ilk ölçüt olarak Laplace'nin *eşit olasılıklı durumlar* ölçütüdür<sup>11</sup>. Eşit olasılıklı durumlar ölçütünde problem, bütün doğal durumların eşit olasılık ile ortaya çıkacağı varsayımı ile bir tür risk ortamına dönüştürülür. Dolayısıyla eğer  $m$  tane doğal durum söz konusuysa her bir doğal durumun ortaya çıkma olasılığı  $\frac{1}{m}$  ile hesaplanacaktır.

Problem risk ortamına dönüştürüldükten sonra risk ortamında kullanılan ölçütlerden herhangi biri kullanılabilir. Laplace eşit olasılıklı durumlar ölçütünün çözümü için risk ortamı ölçütlerinden beklenen değer ölçütünün kullanımını önermiştir.

Belirsizlik ortamında ele alınabilecek ikinci ölçüt *iyimserlik ölçütü* olarak adlandırılır. Bu ölçütte kâr yapılı problem için öncelikle her alternatife karşılık gelen doğal durumlardan en büyük sonuç değerine sahip alternatif seçilir, daha sonra da bu değerlerden en büyüğüne sahip olan alternatif, uygulanacak alternatif olarak belirlenir. Bu teknik maximax olarak adlandırılır<sup>12</sup>. Maliyet yapılı problemlerde ise öncelikle her alternatife karşılık gelen doğal durumlardan en küçük sonuç değerine sahip olan alternatif seçilir daha sonra da bu değerlerden en küçüğüne sahip olan alternatif uygulanacak alternatif olarak belirlenir. Bu teknik minimin olarak adlandırılır.

Belirsizlik ortamında kullanılan bir diğer ölçüt karar vericinin karamsar olduğu durumlarda kullanılan *kötümserlik ölçütü*dür. Kâr yapılı bir problemin çözümünde öncelikle her bir alternatifin karşısındaki doğal durum sonuçlarından en küçük değere sahip olanlar belirlenip, daha sonra bunlardan en büyük değere sahip olan alternatif uygulanmak üzere seçilir. Bu teknik maximin olarak adlandırılır. Aynı ölçüt maliyet yapılı bir probleme uygulandığında öncelikle her bir alternatifin karşısındaki doğal durum sonuçlarından en büyük değere sahip olanlar belirlenip, daha sonra bunlardan en küçük değere sahip olan alternatif uygulanmak üzere seçilir. Bu teknik minimax olarak adlandırılır<sup>13</sup>.

İyimserlik ve kötümserlik ölçütlerinin iki uç nokta olduğu kabul edilirse, bu uç noktaların bir ortası olarak Hurwicz'in karar verme ölçütü kullanılabilir. *Hurwicz karar ölçütüne*

<sup>11</sup> Jack Meredith, Scott Shafer ve Efraim Turban, **Quantitative Business Modeling**, (USA: South-Western Thomson Learning, 2002), s.231.

<sup>12</sup> Taylor, **a.g.e.**, s. 517.

<sup>13</sup> **Aynı**, s.518-519.



göre, karar verici 0 ile 1 arasında değer alan bir iyimserlik katsayısı ( $0 \leq \text{iyimserlik katsayısı} \leq 1$ ) belirler. Kötümserlik katsayısı da ( $1 - \text{iyimserlik katsayısı}$ ) biçiminde hesaplanır. Daha sonra problem kâr yapılı ise, her alternatif için en yüksek sonuç değeri ile iyimserlik katsayısı, en düşük sonuç değeri ile kötümserlik katsayısı çarpılarak çarpım sonuçları toplanır. Böylece her alternatif için hesaplanan değerlerden en yüksek değere sahip olan alternatif uygulanmak üzere seçilir. Problem maliyet yapılı ise, her alternatif için en düşük sonuç değeri ile iyimserlik katsayısı, en yüksek sonuç değeri ile kötümserlik katsayısı çarpılarak çarpım sonuçları toplanır. Böylece her alternatif için hesaplanan değerlerden en düşük değere sahip olan alternatif uygulanmak üzere seçilir.

Belirsizlik ortamında kullanılan bir diğer ölçüt ise *Savage (pişmanlık) ölçütü*dür. Bu ölçüt, karar verilip doğal durum ortaya çıktıktan sonra karar vericinin pişmanlık duyabileceği ve bir başka alternatifi tercih etmiş olmayı isteyebileceği düşüncesine dayanarak, karar vericinin en büyük pişmanlığını en küçüklemesi gerektiğini belirtmektedir. Pişmanlık, gerçek sonuç değeri ile doğal durumlardan hangisinin ortaya çıkacağıın bilinmesi durumundaki sonuç arasındaki farktır. Bu düşünce temelinde sonuç matrisi pişmanlık matrisine dönüştürülebilir. Bu dönüşüm, sonuç matrisindeki her değeri matrisin her sırasındaki en büyük değerden çıkararak elde edilir. Bir satırdaki en büyük değer “sıfır” pişmanlık (pişman olmama) olacaktır<sup>14</sup>.

#### 4. KARAR VERMEDE BAYES KURALI

Bir karar problemini çözerken karar vericinin elinde probleme ilişkin bazı ön (başlangıç) olasılık değerlerinin olduğu varsayalım. Bazen karar verici sahip olduğu olasılıkların geçerliliğinin tespit edebilmek amacıyla ek bilgiye başvurabilir. Bu ek bilgiden elde ettiği sonuçların ilk olasılıklarla birlikte değerlendirilmesi işlemi olasılıkların düzeltilmesi olarak ortaya çıkacaktır. Olasılık teorisinde bu işlem Bayes kuralı olarak adlandırılır<sup>15</sup>. Bayes kuralı matematiksel olarak aşağıdaki gibi tanımlanır.

<sup>14</sup> Tütek ve Gümüšoğlu, a.g.e., s.72.

<sup>15</sup> Necmi Gürsakal, **Bayesgil İstatistik**, (Bursa:Uludağ Üniversitesi Basımevi, 1992), s.13-17.

$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$  olası doğal durumları temsil ettiğinde, ilgili olasılık değerleri de  $P(\theta_i)$ ,  $i = 1, \dots, k$  biçiminde gösterildiğinde, örneklem ya da test bilgisini temsil eden  $x$  olayı için

$$P(\theta_i | x) = \frac{P(x | \theta_i)P(\theta_i)}{\sum_{i=1}^k P(x | \theta_j)P(\theta_j)}, \quad i = 1, \dots, k$$

yazılır. Yukarıdaki son ifadeden, Bayes kuralına göre örneklemden ya da herhangi bir testten elde edilen bilgiye dayanarak olasılıklar hakkında işlem yapılması söz konusudur<sup>16</sup>.  $P(\theta_i)$  'ler, örneklem ya da test sonucu bilinmeden önceki doğal durumların olasılıklarıdır.  $P(\theta_i | x)$  'ler belirli bir doğal durum ortaya çıktığında gözlemlenen örneklem ya da test sonuçlarının olasılıklarını ya da olabirliklerini\* temsil ettiklerinden, örneklem ya da test yürütüldükten sonraki doğal durumların olasılık değerleridir.  $P(\theta_i)$  'ler önsel (başlangıç),  $P(\theta_i | x)$  'ler de sonsal olasılık olarak adlandırılırlar. Bayes kuralının yukarıdaki ifadesinde  $P(x | \theta_i)$  olarak ortaya çıkan olasılıklar ise olabirlikler olarak adlandırılır<sup>17</sup>. Bayes kuralı karar problemlerinin grafiksel gösteriminde de sıklıkla kullanılır. Bayes kuralı özellikle ardışık karar verme problemlerinde, daha önceden bilinen olasılıkların ortaya çıkan yeni olasılıklarla harmanlanabilme şansı olduğundan çözüme faydalı olmaktadır.

## 5. ARDIŞIK KARAR KAVRAMI

Karar problemlerinin çoğu, bir tek kararın verilmesini gerektiren ve söz konusu kararın sonucuna bağlı olarak belirli bir katkının elde edildiği yapıdadır. Bu tür karar problemleri tek aşamalı karar problemi olarak tanınır. Buna karşın diğer pek çok karar problemi daha karmaşık bir yapı ortaya koyar. Karmaşık problemlerde öncelikle bir karar verilir ve bunun sonucu gözlenir, daha sonra ilk kararın sonuçları da göz önünde tutularak ikinci bir karar verilir, sonucu gözlenir ve bu şekilde devam edilerek son karara ulaşılır<sup>18</sup>. Söz edilen biçimde, birbirine bağlı birden fazla kararın gerekli olduğu karar problemlerinde, karar

<sup>16</sup> Emel İmir Şıklar, "Reklam Deneylerinin Düzenlenmesinde İstatistiksel Bir Yaklaşım: Modern Karar Kuramı", *Anadolu Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi*, Cilt:6 Sayı:2, (Kasım 1988) s.115-123.

\* İng. Likelihoods.

<sup>17</sup> Merih İpek, *İstatistiğe Giriş II*, (İstanbul: Beta Basım Yayım Dağıtım A.Ş., 2006), s.246-250.

<sup>18</sup> S.Christian Albright, Wayne L.Winston ve Christopher Zappe, *Data Analysis&Decision Making*, (Third Edition. USA:Thomson South-Western, 2006), s.311.

süreci, *ardışık karar verme*\* olarak adlandırılır. Kimi kaynaklarda bu tür karar problemleri için *çok aşamalı karar verme*\*\* ifadesinin de kullanıldığı görülebilmektedir.

Bir karar probleminin çözümünde iki yaklaşım izlenebilir. İlk yaklaşım, probleme ilişkin bir sonuç matrisi düzenleme ve çeşitli karar ölçütlerini kullanarak bir çözüm arama biçimindedir. Gerçekten de sonuç matrisi bir tek kararın verilmesini gerektiren problemlerin çözümü için kullanılan geleneksel yaklaşımdır. İkinci yaklaşım ise problemin grafiksel olarak ifade edilmesi ve sonrasında çeşitli tekniklerin kullanımı ile probleme çözüm üretilmesi biçimindedir. Herhangi bir problem grafiksel olarak gösterilebilmesine karşın, birden fazla karar noktası içeren problemlerde problemin sonuç matrisi olarak düzenlenmesi olanaksızdır<sup>19</sup>. Bu nedenle ardışık karar verme problemlerinde çözüm yaklaşımı olarak grafiksel teknikler kullanılır. Bu tekniklere ilişkin ayrıntılı bilgiye ikinci ve üçüncü bölümlerde yer verilmiştir.

---

\* İng. Sequential Decison Making.

\*\* İng. Multistage Decision Making.

<sup>19</sup> Tütek ve Gümüšođlu, **a.g.e.**, s.78.

## İKİNCİ BÖLÜM

### KARAR PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜNDE KULLANILAN GELENEKSEL GRAFİKSEL TEKNİKLER

Ardışık karar gerektiren problemlerin grafiksel gösteriminde çoğunlukla, *Karar Ağacı*\* tekniğinden yararlanır<sup>20</sup>. Karar Ağaçlarının yanı sıra, karar problemlerinin grafiksel gösterimi konusunda yaygın olarak kullanılan bir diğer yaklaşım *Etki Diyagramı*\*\* tekniğidir. Temelde Etki Diyagramları problemde yer alan değişken ve karar sayısı çoğaldığında, Karar Ağaçlarının azalan etkinliğini giderme amacıyla kullanılır. Gerçekten de Etki Diyagramları karar problemlerinin temel yapısını, ayrıntıya girmeksizin ana hatlarıyla gösterir<sup>21</sup>. İzleyen kesimde bu iki tekniğe ilişkin ayrıntılara yer verilmiştir.

#### 1. KARAR AĞACI

Karar Ağacı, olası tüm eylem seçeneklerini, bu eylem seçeneklerine etkisi olabilecek tüm olası faktörleri ve tüm bu faktörlere dayanan her bir olası sonucu, verilere bağlı olarak değerlendiren, çizgi, kare, daire gibi geometrik semboller kullanımı yoluyla karar vericiye problemi anlamada kolaylık sağlayan grafiksel bir teknik olarak tanımlanabilir<sup>22</sup>. Karar Ağacı, grafik gösterimi ile problemin tüm yönlerinin ayrıntılı olarak ortaya koymaktadır.

---

\* İng. Decision Tree.

<sup>20</sup> Finn V.Jensen, **Bayesian Networks and Decision Graphs**, (USA: Springer,2001), s.122.

\*\* İng. Influence Diagram.

<sup>21</sup> Robert T.Clemen, **Making Hard Decision**, (Second Edition. USA: Duxbury Press, 1996), s.67.

<sup>22</sup> H.Kemal Sezen, **Yöneylem Araştırması**, (Bursa: Ekin Kitabevi, 2004), s.4-5.

Herhangi bir karar problemi için kullanılabilen Karar Ağacı tekniği özellikle ardışık karar problemlerinin gösteriminde çok kullanışlıdır<sup>23</sup>.

### 1.1. Karar Ağacının Öğeleri

Karar Ağacı, *karar noktası*, *şans noktası*, *bitiş noktası*, *dal*, *sonuç* ve *olasılık* öğelerinden oluşur. Problemin çözüm sürecinde, *beklenen değerler* hesaplanarak Karar Ağacına eklenir. Aşağıda Karar Ağacını oluşturan bu öğelere ilişkin özelliklerin ana hatları verilmiştir.

#### 1.1.1. Karar Noktası\*

Karar değişkenini temsil eden karar noktası Karar Ağacı üzerinde kare biçimiyle gösterilir. Karar noktasında en az iki seçenek arasından bir seçim yapılarak karar verilir\*\*. Karar Ağacı, verilen bir ilk kararla başlatıldığından, Karar Ağacının genellikle sol yanında konumlandırılan ilk karar noktasına başlangıç ya da kök düğüm de denir.

#### 1.1.2. Şans Noktası\*\*\*

Rassal değişkeni (ya da şans değişkenini) gösteren şans noktası Karar Ağacı üzerinde daire biçimiyle gösterilir\*\*\*\*. Karar Ağacında belirli olasılıklarla belirli değerleri alabilen olayları temsil etmek için kullanılan öğedir Şans noktası en azından iki olası sonucu gösterir<sup>24</sup>.

<sup>23</sup> Albright, Winston ve Zappe, **a.g.e.**, s.311.

\* İng. Decision Point.

\*\* Karar noktası farklı kaynaklarda “karar düğümü”, “eylem düğümü” veya “karar çatalı” olarak da adlandırılabilir. Bu çalışmada *karar düğümü* ifadesinin kullanımı benimsenmiştir.

\*\*\* İng. Chance Point.

\*\*\*\* Şans noktası farklı kaynaklarda “şans düğümü” ya da “olay çatalı” olarak da adlandırılabilir. Bu çalışmada *şans düğümü* ifadesinin kullanımı tercih edilmiştir.

<sup>24</sup> Meredith, Shafer ve Turban, **a.g.e.**, s.243-244.

### 1.1.3. Bitiş Noktası\*

Bu noktayı varış düğümü olarak kabul eden dal için nihai sonucu belirten bitiş noktası Karar Ağacında kısa düşey bir çizgi ile gösterilir\*\*. Problemin kâr ya da zarar yapısına göre ortaya çıkabilecek olan toplam kâr ya da zarar bu nokta üzerinde belirtilir. Karar ya da şans dalından sonra bir bitiş noktası varsa, bitiş noktasına bağlanan dal, aynı zamanda bir bitiş dalı olur.

Karar vericinin bu noktaya ulaşırken izlediği yola senaryo adı verilir.

### 1.1.4. Dal\*\*\*

Karar Ağacı üzerinde düğümleri birbirine bağlayan çizgilere dal adı verilir<sup>25</sup>. Bir karar düğümünün sağından çıkan çizgiye *karar dalı* denirken, bir şans düğümünü sağından terk eden çizgi *şans dalı* olarak adlandırılır\*\*\*\*.

### 1.1.5. Sonuç (değeri)

Bitiş noktasında ortaya çıkan parasal tutardır. Net kâr ya da yatırımın geri dönüşü olarak da adlandırılabilen sonuç toplam gelirle maliyetler arasındaki farktır. Sonuç pozitif veya negatif olabilir. Pozitif sonuç net kâra, negatif sonuç net zarara eşdeğerdir.

### 1.1.6. Olasılık

Bir şans düğümünden birden fazla dal çıkar. Her bir şans dalının belirli bir ortaya çıkma olasılığı bulunmaktadır. Standart Karar Ağacı yaklaşımında şans dalları üzerinde yer

---

\* İng. End Point.

\*\* Bu nokta farklı kaynaklarda “yaprak düğüm”, “fayda düğümü” ya da “bitiş düğümü” olarak da isimlendirilebilmektedir. Bu çalışmada *bitiş düğümü* ifadesinin kullanımı benimsenmiştir. Bitiş düğümü için bazı kaynaklarda hiçbir simge bulunmazken, bazı kaynaklarda kesilmiş bir daldan esinlenilerek dikey kısa çizgiler, bazılarında dikdörtgen, bir kısmında üçgen ve bazılarında ise düzgün dörtgen (elmas) şekli yer alabilmektedir. Bu çalışmada bitiş düğümleri için dikey kısa çizgiler kullanılmıştır.

\*\*\* İng. Branch.

<sup>25</sup> Gilbert Gordon ve Israel Pressman, **Quantitative Decision-Making For Business** (Second Edition.USA.:Prentice Hall International,Inc.,1983), s.110.

\*\*\*\* Yukarıdan aşağıya doğru çizilebilen Karar Ağaçları da olabilmesine rağmen, Karar Ağaçlarının çiziminde genel yaklaşım olarak soldan sağa doğru bir yön izlenir. Bu çalışmada da bu genel yaklaşım benimsenmiştir.

verilen ondalıklı sayılar bu olasılıkları ifade eder. Bir şans düğümünün tüm çıktıklarına ilişkin olasılıkların toplamı 1 olmalıdır.

## 1.2. Karar Ağacının Oluşturulması

Karar Ağacı oluşturulurken, yatay doğrultuda soldan sağa doğru bir yön izlenir. İlk düğüm genellikle bir karar düğümüdür. Karar düğümü ağaca yerleştirildikten sonra, bu düğümüne ilişkin karar değişkeninin alabileceği tüm olası değerler, düğümünden sağ tarafa çıkan dallar (karar dalları) biçiminde çizime eklenir. Daha sonra, başlangıç kararından sonra ortaya çıkması beklenen olaylar veya kararlarla ilişkili bir şans düğümü veya bir diğer karar düğümü eklenir. Bir şans düğümünün sağ tarafında yer alan şans dallarına, doğal durumları kendilerine ait olasılıklarla birlikte eklenir. Ağacın çizimi bu şekilde soldan sağa doğru, sonuçlara ulaşılan bitiş düğümlerine kadar sürdürülür. Başlangıç düğümünden bitiş düğümüne giden bir yol izlendiğinde elde edilecek kazanç ya da yapılacak ödeme *sonuç* olarak dalın bitiş noktasına yazılır<sup>26</sup>. Bu nedenle Karar Ağacı, problemin tüm bileşenlerini tek bir grafik üzerinde gösterir.

## 1.3. Karar Ağacının Çözüm Süreci

Karar Ağacı ile gösterilen bir problemin çözümü için kullanılan analiz yöntemi *geriye doğru sonuç çıkarma\** ya da *geriye doğru katlama\*\** olarak adlandırılır<sup>27</sup>. Bu analiz yöntemi, başlangıç seçeneğinin değerlendirilmesi için, bu seçeneğin seçilmesi sonrasındaki tüm karar ve şans değişkenlerinin de dikkate alınması gerektiğini varsayar. Bu nedenle ağacın en sonunda yer alan karar ve şans düğümleri ilk adımda analiz edilir ve sonra sırasıyla bir önceki noktalar incelenir ve bu işlemler başlangıç düğümüne ulaşıncaya değin sürdürülür<sup>28</sup>. Kolayca anlaşılabilmesi gibi, Karar Ağacı oluşturulurken soldan sağa doğru bir akış izlenmekte iken çözüm sürecinde ise tersine işlemler sağdan sola doğru yürütülmektedir. Karar Ağacında şans ve karar düğümlerinin bulunduğu kesimler ayrı ayrı ele alınıp bu kesimlerde yapılanlar aşağıdaki biçimde özetlenebilir.

<sup>26</sup> Meredith, Shafer ve Turban, **a.g.e.**, s.244.

\* İng. Backward Induction.

\*\* İng. Folding-Back.

<sup>27</sup> Howard Raiffa, **Decision Anlysis Introductory Lectures on Choices Under Uncertainty**, (Second Editon:USA, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1970), s.21-23.

<sup>28</sup> Gordon ve Pressman, **a.g.e.**, s.114-115.

Şans düğümü kesimi: Bir şans düğümünden çıkan tüm doğal durumların beklenen değerleri hesaplanır. Bu amaçla her bir doğal durumunun olasılığı ile sonuç değeri çarpılıp her bir doğal durum için bulunan sonuç değerlerinin tümü toplanarak, o şans düğümüne ilişkin beklenen değer elde edilir. Bulunan değer şans düğümünün yanına beklenen değer olarak yazılır. Böylesi işlemler sonrasında hesaplanan beklenen değerler, bir sonraki dalın sonucu olarak kabul edilir.

Karar düğümü kesimi: Bir karar düğümünde, her bir karar seçeneği için verilen (ya da hesaplanan) sonuçlar karşılaştırılır ve içlerinden en iyisi (amaca en uygunu) seçilip diğerleri göz ardı edilir. Göz ardı edilen karar seçenekleri dal üzerine çizilen çift çizgi ( // sembolü) ile işaretlenir.

**Beklenen Değer\*:** Karar seçeneklerinin görelî faydalarının ölçümünün bir yoludur; düğüm sonuçlarının ve olasılık değerlerinin matematiksel bileşimidir. Beklenen değer tüm olasılıklar ve sonuç değerleri elde edildikten sonra hesaplanır. Hesaplamanın temelini, kök düğümünden çıkan her bir karar seçeneği için beklenen değer bulunması oluşturur. En iyi beklenen değere (kâr yapılı problemde en yüksek, maliyet yapılı problemde en düşük değere) sahip karar seçeneği en iyi seçim olarak benimsenir.

Beklenen değer hesaplanmasına öncelikle bitiş noktalarından başlanır ve bitiş noktalarından kök düğümüne doğru devam edilir. Beklenen değeri bulmanın en kolay yolu olarak, beklenen değeri önce her bir bitiş dalı, sonra her bir şans ve karar düğümü için hesaplama olduğu görülmüştür. Beklenen değer, bilinen tanımından hareketle hesaplanabilir. Bununla birlikte, Karar Ağacı tekniği uygulamalarında beklenen değer hesaplamaları genellikle aşağıda sıralanan kurallar uyarınca gerçekleştirilir.

- Bir karar düğümüne bağlanan bitiş dalı için beklenen değer (BD), sonuca eşittir.

$$BD = \text{Sonuç}$$

- Bir şans düğümüne bağlanan bitiş dalı için beklenen değer, bu dalın sonucu ile olasılığının çarpımıdır.

$$BD = \text{Sonuç} \times \text{Olasılık}$$

---

\* İng. Expected Value.



- Bir şans düğümü için beklenen değer, her bir şans dalının sonucu ile bunlara karşılık gelen olasılıklarının çarpımlarının toplamıdır.

$$BD = [ BD_{dal1} + BD_{dal2} + \dots + BD_{dalN} ]$$

- Bir karar düğümü için beklenen değer, karar düğümünde çıkan tüm karar dallarının beklenen değerleri içinde en büyük kazanç değerine (kâr yapılı problemlerde en yüksek değere, maliyet yapılı problemlerde en düşük değere) sahip olanıdır. (Hatırlanacağı gibi Karar Ağacı üzerinde ince çift çizgi ile işaretlenen daha düşük beklenen değerli dallar, benimsenmeyip göz ardı edilen dallardır).

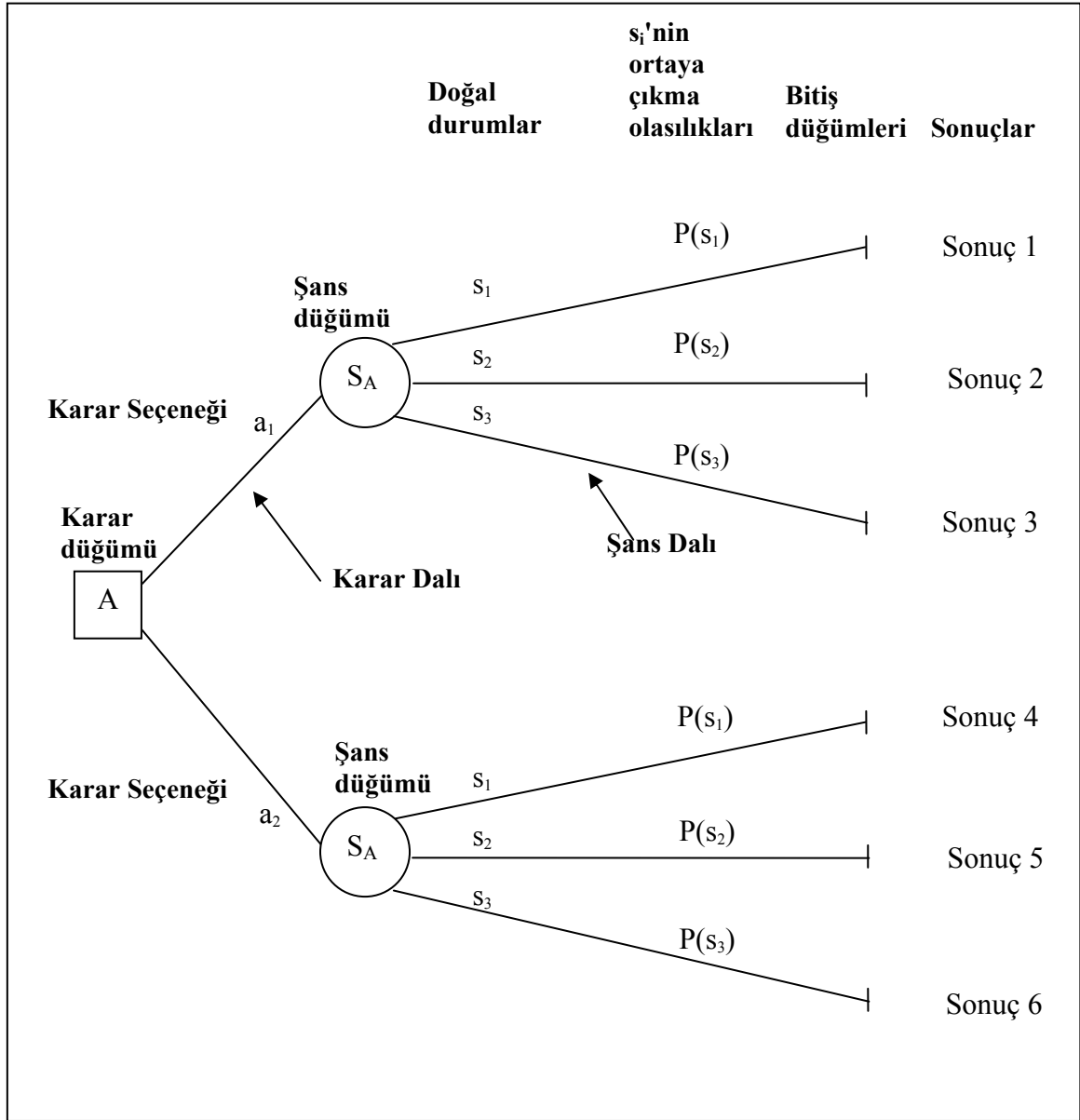
BD = Karar düğümünden çıkan tüm karar dalları arasından en yüksek beklenen değer

- Herhangi bir düğümün beklenen değeri, kök düğüm yönünde bağlantılı olduğu bir önceki düğümün sonuç değeridir.

Şekil 1’de tek bir kararın verildiği, tek aşamalı karar problemine ilişkin Karar Ağacı gösterimine yer verilmiştir. Söz konusu şekilde başlangıç düğümü bir karar düğümü olup, bu düğümde yer alan A karar değişkeni  $a_1$  ve  $a_2$  biçiminde iki karar seçeneğine sahiptir. A karar değişkeninin değer kümesi  $A = \{a_1, a_2\}$  biçiminde gösterilir ve karar değişkeninin durum uzayı olarak ifade edilir. Şans düğümünde yer alan  $S_A$  ifadesi ise şans değişkenini temsil etmektedir. Bilindiği gibi şans değişkenleri karar vericinin kontrolü altında olmadığı düşünülen değişkenler olup doğal durumlar olarak da ifade edilebilmektedir. Şekilde yer alan karar düğümünde, karar seçeneği  $a_1$  ile karar seçeneği  $a_2$  arasında bir seçim söz konusudur. Bu seçim sonrasında  $S_A$ ’nın olası (muhtemel)  $s_1$ ,  $s_2$  ve  $s_3$  değerlerinden birisi rassal olarak ortaya çıkacaktır. Böylesine bir rassal değişkenin alabileceği tüm değerlerin oluşturduğu küme örnek uzayı olarak tanımlanır<sup>29</sup>. Buna göre şans değişkeninin alabileceği değerleri gösteren örnek uzayı  $S_A = \{s_1, s_2, s_3\}$  biçiminde yazılır. Doğal durumlar  $s_1$ ,  $s_2$  ve  $s_3$  ile bu durumların ortaya çıkma olasılıkları olan  $P(s_1)$ ,  $P(s_2)$  ve  $P(s_3)$  şans dallarının üstünde gösterilmektedir. Öte yandan şans düğümünde yer alan dalların olasılıkları toplamının 1’e eşit olması gerektiği bilinmektedir;  $P(S_A) = P(s_1) + P(s_2) + \dots + P(s_n) = 1$  olarak yazılır. Şekil 1’den şans dallarının aynı zamanda birer bitiş dalı olduğu da kolayca görülmektedir. Son olarak, Karar Ağacında bitiş

<sup>29</sup> Gordon ve Pressman, **a.g.e.**, s.25

düğümünün sağına bu seçeneğin seçilmesi durumunda ortaya çıkabilecek sonuç değeri yerleştirilmektedir<sup>30</sup>.



Şekil 1. Tek Aşamalı Karar Problemine İlişkin Karar Ağacı

Şekil 2’de ise iki aşamalı bir karar problemine ilişkin Karar Ağacı gösterimine yer verilmiştir. Şekil 2’de A ve B karar düğümlerini,  $S_A$  ve  $S_B$  de şans düğümlerini göstermektedir (A ve B karar değişkenlerini temsil ederken  $S_A$  ve  $S_B$  de şans değişkenlerini temsil etmektedir). Karar Ağacının başlangıç düğümü (A) birinci karar noktasıdır. Bu noktada karar seçeneği  $a_1$  ile karar seçeneği  $a_2$  arasında bir seçim söz konusudur. Bu

<sup>30</sup> Meredith, Shafer ve Turban, a.g.e., s.244.

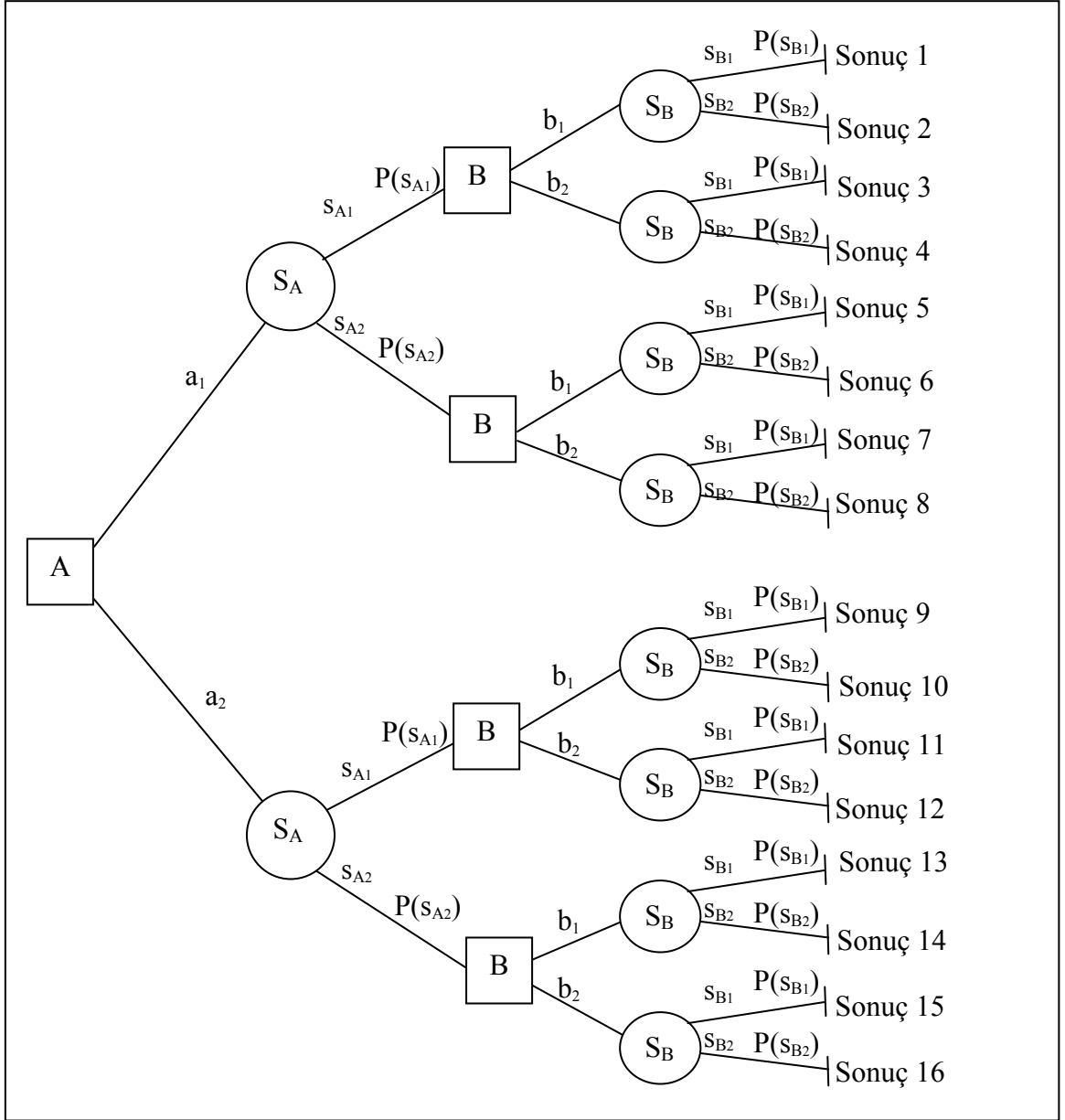
seçim, şans değişkeni  $S_A$ 'nın iki değerinden ( $s_{A_1}$  ve  $s_{A_2}$ 'den) birinin rassal olarak ortaya çıkmasını sağlar. Şans dallarının üzerinde yer alan  $P(s_{A_1})$  ve  $P(s_{A_2})$ ,  $s_{A_1}$  ve  $s_{A_2}$ 'nin ortaya çıkma olasılıklarını gösterir. Şans olayının rassal olarak ortaya çıkmasından sonra ikinci karar düğümü (B) aşamasına geçilir. İkinci karar, karar seçeneği  $b_1$  veya karar seçeneği  $b_2$  arasında bir seçim yapmak biçiminde olacaktır. Bu kararı,  $S_B$  şans düğümüne ilişkin şans dalları izlemektedir.  $s_{B_1}$  ve  $s_{B_2}$  şans değişkeni  $S_B$ 'nin alabileceği değerler olup, bu değerler şans dallarında, ortaya çıkma olasılıkları  $P(s_{B_1})$  ve  $P(s_{B_2})$  ile birlikte yer almaktadır. Şekil 2'den bu şans dallarının aynı zamanda birer bitiş dalı olduğu da görülebilmektedir. Son olarak, bitiş düğümlerinde sonuç değerleri yer almaktadır.

Yukarıdaki ifadelerden anlaşılacağı üzere A karar değişkeninin durum uzayı  $A = \{a_1, a_2\}$ , B karar değişkeninin durum uzayı  $B = \{b_1, b_2\}$ ,  $S_A$  şans değişkeninin örnek uzayı  $S_A = \{s_{A_1}, s_{A_2}\}$  ve  $S_B$  şans değişkeninin örnek uzayı  $S_B = \{s_{B_1}, s_{B_2}\}$  biçimindedir.

Herhangi bir karar problemi, tek aşamalı ya da çok aşamalı olmasına göre Şekil 1 veya Şekil 2'de verilenlere benzer şekilde bir Karar Ağacı olarak gösterilir. Gösterimin tamamlanmasının ardından, her bir bitiş değeri, şans ve karar düğümlerinin beklenen değerlerinin hesaplanması ile çözülebilir.

Şekil 2'de 16 adet bitiş dalı ve bu dalların geldiği yollara bağlı olarak 16 mümkün sonuç yer almaktadır. Örnek olarak;  $a_2 - s_{A_1} - b_1 - s_{B_2}$  yolu izlendiğinde bu yolun sonuç değeri sonuç 10 olarak görülmektedir. Diğer bir ifadeyle bu karar sürecinin sonucu Sonuç 10'dur. Böyle bir karar problemi için optimum (en iyi) çözüm, başlangıç karar düğümü için en iyi beklenen değeri veren karar seçenekleri kümesini seçmek biçiminde olacaktır<sup>31</sup>.

<sup>31</sup> Gordon ve Pressman, a.g.e., s.110-111.



Şekil 2. Çok Aşamalı (Ardışık) Karar Problemine İlişkin Karar Ağacı

Karar problemlerinin simetrik ve asimetrik olması söz konusudur.

- Karar Ağacında yer alan senaryo sayısı ile Karar Ağacındaki durum uzaylarıyla örnek uzaylarının kartezyen çarpımı\* kümesinin eleman sayısı birbirine eşit ve
- Karar ve şans değişkenlerinin ardışıklığı tüm senaryolarda aynı olduklarında karar problemine simetrik denir. Simetrik olmayan karar problemleri ise asimetrikdir<sup>32</sup>.

Bu koşullar göz önüne alındığında Şekil 1 ve Şekil 2’de verilen Karar Ağaçlarının simetrik karar problemlerine ilişkin ağaçlar olduğu kolayca görülebilir. Şekil 1’de;  $(A)a_1 - (S_A)s_1$ ,  $(A)a_1 - (S_A)s_2, \dots, (A)a_2 - (S_A)s_3$  biçiminde 6 senaryo bulunmaktadır. Öte yandan karar değişkeninin durum uzayı  $A = \{a_1, a_2\}$  ile şans değişkeninin örnek uzayı  $S = \{s_1, s_2, s_3\}$  kartezyen çarpımı  $A \times S = \{(a_1, s_1), (a_1, s_2), (a_1, s_3), (a_2, s_1), (a_2, s_2), (a_2, s_3)\}$  biçiminde olduğundan  $A \times S$  kümesinin eleman sayısı 6’dır. Buradan da a. koşulunun sağlandığı gözlenebilir. Diğer yandan, Şekil 1’deki Karar Ağacı gözlemlendiğinde A karar değişkenini  $S_A$  şans değişkeninin izlediği ve bu durumun tüm senaryolarda geçerli olduğu görülebileceğinden b. koşulu da sağlanmış olur.

Daha çok sayıda karar ve şans değişkeni ya da karar seçeneği ve doğal durum içeren karmaşık yapıları problemlerde, kartezyen çarpımı kümesinin elemanları açıkça belirtilmeksizin, doğrudan durum ve örnek uzaylarının eleman sayıları çarpılarak senaryo sayısı ile karşılaştırılacak değer elde edilebilir. Şekil 1’de A karar değişkeninin durum uzayı 2 elemanlı bir küme ve şans değişkeni S’nin örnek uzayı 3 elemanlı bir kümedir. İki kümenin kartezyen çarpımı sonucunda elde edilecek kümenin eleman sayısı  $= 2 \times 3 = 6$  olarak hesaplanabilir.

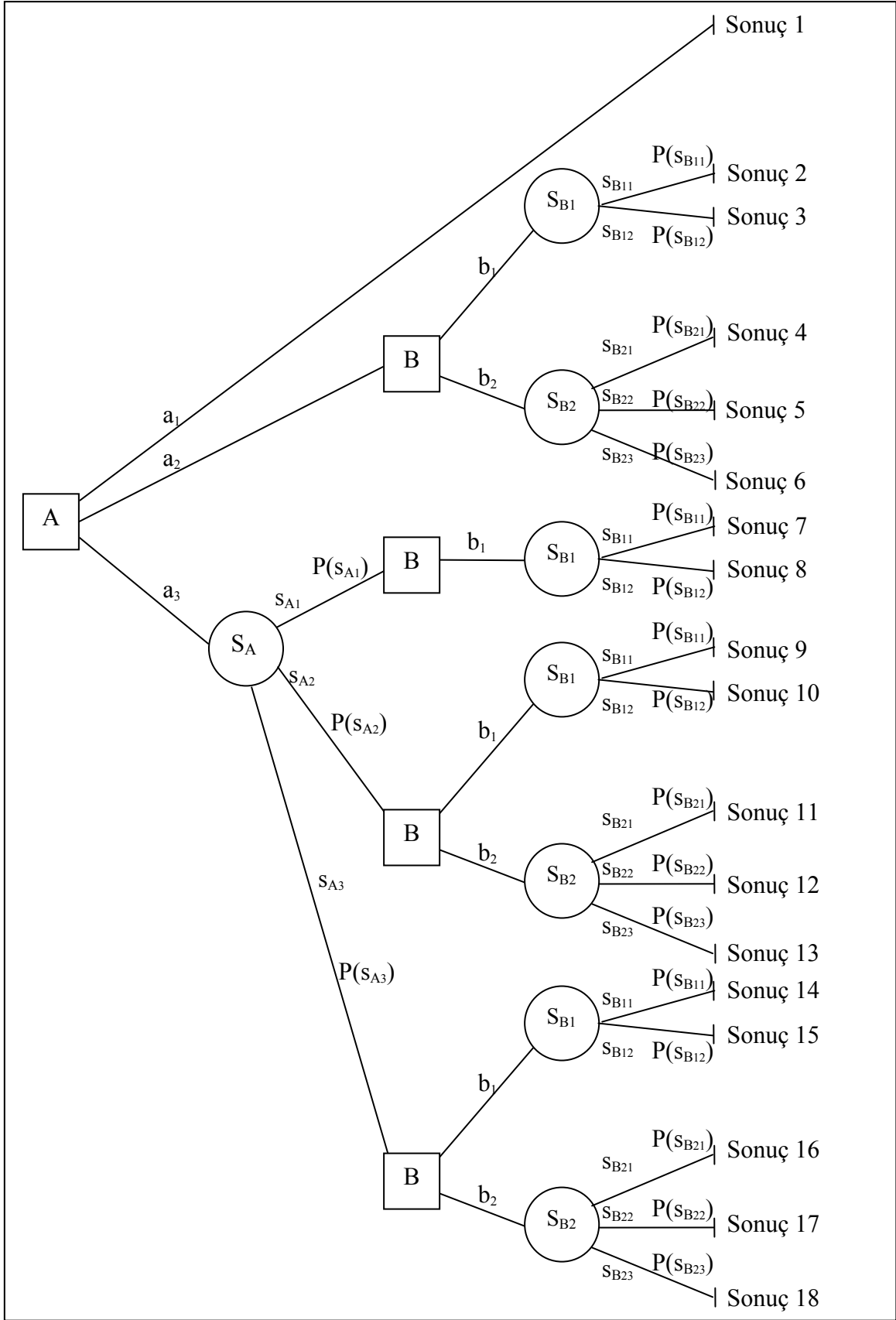
\* X ve Y gibi iki kümenin kartezyen çarpımı  $X \times Y$  biçiminde gösterilir. Bu çarpımın sonucu, birinci bileşeni X’in elemanı ve ikinci bileşeni Y’nin elemanı olan sıralı ikililerin tümünün oluşturduğu bir kümedir.

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \text{ ve } y \in Y\}$$

$X = \{x_1, x_2\}$   $Y = \{y_1, y_2\}$  kümeleri verildiğinde X ve Y kümelerinin kartezyen çarpımı;

$X \times Y = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_2, y_2)\}$  dir. Örneğin, standart oyun kartları dizisi {A, K, Q, J, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2} biçiminde sıralanan onüç elemanlı bir küme ve kart takımları {♠, ♥, ♦, ♣} biçimde sıralanabilen dört elemanlı bir kümedir. Bu iki kümenin kartezyen çarpımı, elemanları {(A, ♠), (K, ♠), ..., (2, ♠), (A, ♥), ..., (3, ♣), (2, ♣)} biçiminde sıralanan elliiki elemanlı oyun kartları kümesidir. Kartezyen çarpımı birinci kümenin eleman sayısı olan 13 ile ikinci kümenin eleman sayısı olan 4’ün çarpımı sonucu olan 52 elemana sahiptir.

<sup>32</sup> Riza Demirel ve Prakash P. Shenoy, “Sequential Valuation Networks for Asymmetric Decision Problems”, **European Journal of Operational Research**, Vol.169, Issue 1, (February 2006), s.287.



Şekil 3. Ardışık (Çok Aşamalı) Asimetrik Karar Problemine İlişkin Karar Ağacı

Şekil 3’de verilen Karar Ağacı ise, asimetrik bir karar problemine ilişkindir. Ağaçta başlangıç düğümünden bitiş düğümlerine giden toplam 18 yol (18 senaryo) yer almaktadır. A karar değişkeninin durum uzayı  $A = \{a_1, a_2, a_3\}$  biçiminde olup eleman sayısı 3’tür.  $S_A$  şans değişkeninin örnek uzayı  $S_A = \{s_{A_1}, s_{A_2}, s_{A_3}\}$  olarak yazılır ve eleman sayısı 3’tür. B karar değişkeninin durum uzayı  $B = \{b_1, b_2\}$  biçiminde olup eleman sayısı 2 dir.  $S_{B1}$  şans değişkeninin örnek uzayı  $S_{B1} = \{s_{B_{11}}, s_{B_{12}}\}$  olarak gösterilir ve eleman sayısı 2’dir ve son olarak  $S_{B2}$  şans değişkeninin örnek uzayı  $S_{B1} = \{s_{B_{11}}, s_{B_{12}}, s_{B_{13}}\}$  biçiminde olup eleman sayısı 3’tür. Karar değişkenleri ile şans değişkenlerinin durum uzayları ile örnek uzaylarının Kartezyen çarpımı sonucunda elde edilecek kümenin eleman sayısı  $= 3*3*2*2*3 = 108$  olacaktır. Kartezyen çarpımı sonucunda elde edilen kümenin eleman sayısı ile ağaçtaki senaryo sayısı eşit olmadığından ve her senaryoda yer alan değişkenlerin ardışıklığı aynı olmadığından bu karar probleminin asimetrik olduğu söylenir.

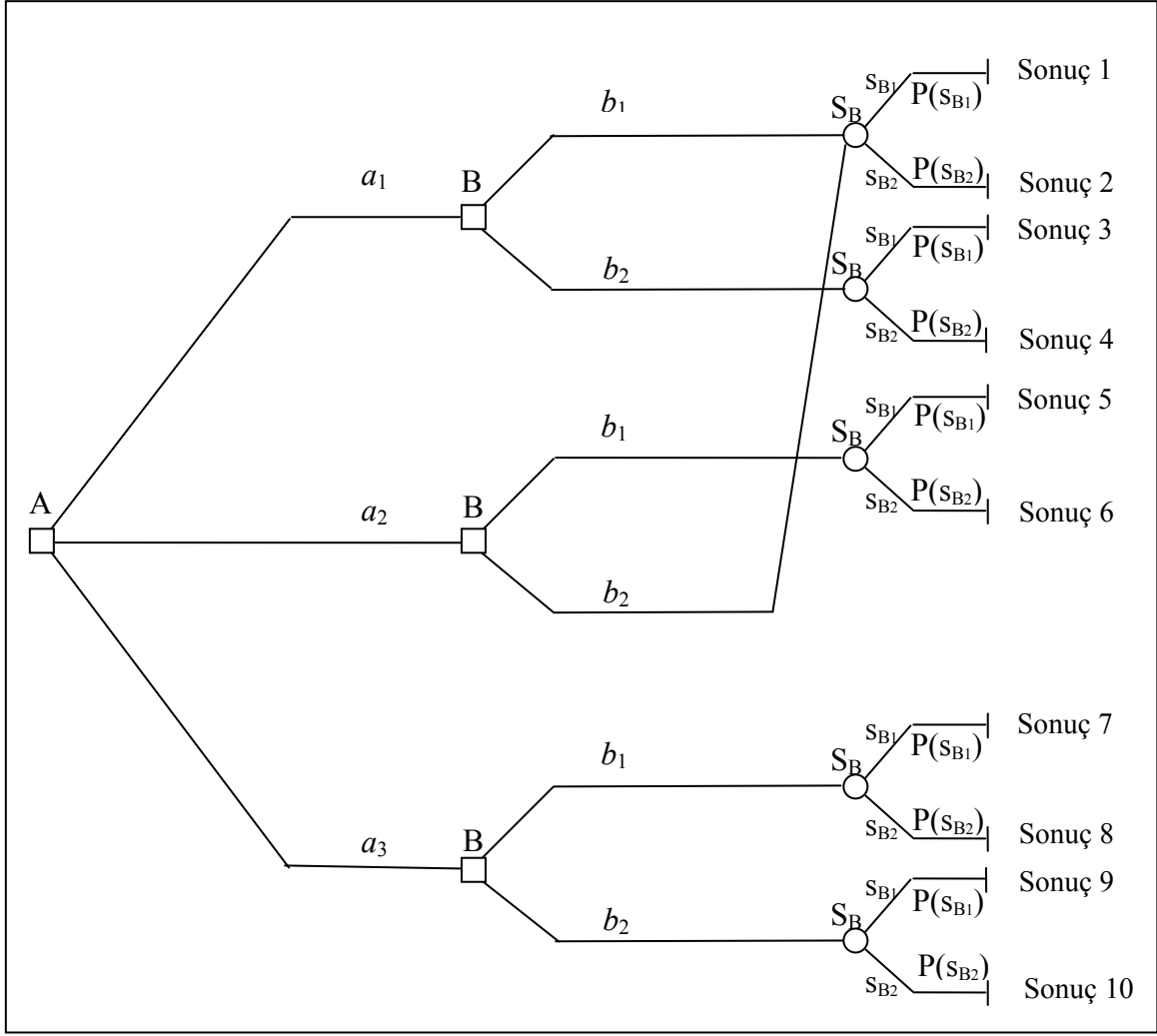
#### 1.4. Karar Ağacında Birleşme Durumu

Karar probleminde yer alan değişken sayısı arttıkça, doğal olarak Karar Ağacı da büyüyecektir. Karar Ağacı tekrarlanan alt ağaçlara sahip olduğunda, bu alt ağaçların bir kez gösterilmesi ve bu alt ağaca bağlı tüm senaryoların tek bir alt ağaçla bağlantılı kılınması yoluna gidilebilir. Bu son gösterim yaklaşımı *birleşme*\* olarak ifade edilir<sup>33</sup>. Bu duruma ilişkin bir gösterim Şekil 4’te verilmiştir.

---

\* İng. Coalesce.

<sup>33</sup> James E. Smith, Samuel Holtzman ve James E. Matheson, “Structuring Conditional Relationships in Influence Diagrams”, **Operations Research**, Vol.41, No.2, (March – April 1993), s.287



Şekil 4. Çok Aşamalı (Ardışık) Karar Probleminde Birleşme Durumunu Gösteren Karar Ağacı

Şekil 4'den görüldüğü gibi A ( $a_1$ )-B( $b_1$ ) senaryosu ile A( $a_2$ )-B( $b_2$ ) senaryosu aynı  $S_B$  alt ağacını paylaşmaktadır. Bu nedenle ilgili  $S_B$  alt ağacı bir kez gösterilmiştir.

Karar problemlerinin modellenmesi ve çözümü için kullanılan bir diğer grafiksel teknik *Etki (ya da ilgi) Diyagramı*\*dır. Bu tekniğe ilişkin ayrıntılar izleyen kesimde verilmiştir.

\* İng. Influence Diagram.



## 2. ETKİ DİYAGRAMI

Etki Diyagramı karar problemlerini, düğümlerin ve bu düğümleri birbirine bağlayan yönlü yayların birlikte oluşturduğu döngüsel olmayan, yönlendirilmiş grafik biçiminde sunar<sup>34</sup>.

Bu gösterimde problem, *ilişki(sel)*, *fonksiyon(el)* ve *sayı(sal)* biçiminde üç düzeyde sunulmakta ve hem belirlilik\* ortamındaki hem de olasılıklı\*\* problemlerin çözümünde uygulanabilmektedir.

Belirlilik durumunda *ilişki* bir değişkenin diğer değişkenlere bağlı olmasıdır. Örneğin; kâr, gelir ve maliyetle ilişkilidir. *Fonksiyonel* düzey ise, ilişkili değişkenler arasındaki ilişkiyi kâr=gelir-maliyet biçiminde matematiksel olarak formüle eder. *Sayısal* düzeyde ise, gelir ve maliyetin verilen sayısal değerlerinden hareketle kârın sayısal değeri belirlenir.

Olasılıklı durumda *ilişki* düzeyi ile mevcut bilgi ifade edilmektedir; bir değişken olasılıklı olarak belirli diğer değişkenlere bağlıdır ve olasılıklı olarak belirli diğer değişkenlerden bağımsızdır. *Fonksiyon* düzeyinde her bir değişkenin olasılık dağılımı bağlı oldukları değişkenlerin değerleri üzerine koşullu olarak atanır. Son olarak *sayı* düzeyinde, herhangi bir diğer değişkene bağlı olmayan tüm değişkenlere, koşullu olmayan dağılımlar atanır ve dolayısıyla tüm birleşik ve marjinal olasılık dağılımları belirlenir. Olasılıklı duruma örnek olarak; *ilişki* düzeyinde gelirin yaş ve eğitime bağlı olduğu ve eğitimin de yaşa bağlı olduğu ifade edilmiş olabilir. *Fonksiyon* düzeyinde yaş ve eğitim bilindiğinde, gelirin koşullu dağılımı ve yaş verildiğinde eğitimin dağılımı atanır. Son olarak *sayı* düzeyinde yaş üzerindeki koşullu olmayan dağılım atanır<sup>35</sup>.

Karar Ağaçlarının çok sayıda karar ve şans değişkeni içerdiği durumlarda, karmaşık bir yapıya dönüştüğü bir gerçektir. Anlaşılmaz bir ağaç biçimi ortaya koyma yerine, problemin genel yapısını özetleyen bir ifade tarzı ortaya koyma amacıyla, Etki Diyagramı Howard ve Matheson tarafından önerilmiş bir yaklaşımdır.

<sup>34</sup> Ronald A. Howard ve James E. Matheson, "Influence Diagrams", **Decision Analysis**, Vol.2, No.3, (September 2005), s.133.

\* İng. Deterministic.

\*\* İng. Probabilistic.

<sup>35</sup> Smith, Holtzman ve Matheson, **a.g.m.**, s.280.

## 2.1. Etki Diyagramında İlişkisel Düzey

*İlişkisel (ya da grafiksel) düzeyde*, problemde yer alan değişkenler çeşitli düğüm tipleriyle temsil edilir; problem düğümler ile düğümleri birbirine bağlayan yönlendirilmiş yaylardan oluşan döngüsüz bir grafik biçiminde sunulur<sup>36</sup>. Yönlendirilmiş yaylar ifadesi oklarla yönlendirilmiş doğrulara karşılık gelmektedir.

Etki Diyagramında ilişkisel düzeyde temel olarak 3 farklı tip düğüm ve 2 farklı tip de yay kullanılmaktadır.

Farklı düğüm tipleri, farklı tipteki değişkenlerin temsili için kullanılır. Etki Diyagramlarındaki her bir farklı düğüm tipinin gösterim biçimi ve temsil ettiği değişkenler aşağıda verilmiştir:

### 2.1.1. Karar Düğümü\*

Kare veya dikdörtgen ile temsil edilir (Şekil 5) ve karar vericinin kontrolü altında bulunan değişkenleri ve karar vericinin sahip olduğu karar alternatiflerinin modellenmesini temsil eder. Karar düğümleri, sahip olunan karar seçeneklerinin tanımını içerir.



Şekil 5. Karar Düğümü Sembolleri

### 2.1.2. Şans Düğümü\*\*

Daire ya da elips ile gösterilir (Şekil 6) ve rassal değişkenleri ve dolayısıyla karar probleminin içerdiği belirsizlikleri temsil eder. Genellikle koşullu olasılık dağılımlarıyla ölçümlenir.

<sup>36</sup> Michael Diehl ve Yacov Y.Haimmes, "Influence Diagrams With Multiple Objectives and Tradeoff Analysis", **IEEE Transaction on Systems, Man and Cybernetics-Part A:Systems and Humans**, Vol.34, No.3, (May 2004), s.294.

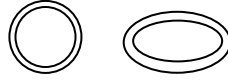
\* İng. Decision Node.

\*\* İng. Chance Node.



Şekil 6. Şans Düğümü Sembolleri

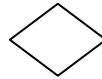
Özel bir belirsizliğe karşı gelen ve söz konusu bu belirsizliği diğer kimi belirsizliklerin çıktıları olan şans düğümü ise deterministik düğüm\* olarak bilinmektedir. Genellikle çift daire ya da elips ile gösterilir (Şekil 7), ya sabit değerleri ya da ait oldukları durumlardan matematiksel olarak hesaplanan değerleri temsil eder. Bir başka ifadeyle ait oldukları durum değerleri bilindiğinde deterministik düğümün değeri de belirlilik altında karar verme mantığıyla bilinmektedir. Deterministik düğümler, şans düğümlerine benzer bir ölçümlemeye sahiptir. Tek fark deterministik düğümlerin olasılık tabloları 0 ve 1'lerden oluşur.



Şekil 7. Deterministik Düğüm Sembolleri

### 2.1.3. Değer (Fayda) Düğümü\*\*

Düzgün dörtgen (elmas) biçimiyle gösterilir (Şekil 8), verilecek kararlar içinden en iyisini belirleyecek niceliği modeller ve genellikle sonucun (çıktının) beklenen faydasını temsil eder.



Şekil 8. Değer Düğümü Sembolü

İlişkisel düzeyde kullanılan diğer yardımcı araçlar yaylardır. Bilindiği gibi yaylar düğümler arasına çizilen yönlü doğrulardır. Yönlendirilmiş yay, grafikte yer alan farklı tipteki düğümler arasındaki ilişkiyi gösteren anahtardır. Düğümler arasında bir yayın olup olmaması problemin tüm akışını değiştirebilir<sup>37</sup>.

\* İng. Deterministic Node.

\*\* İng. Value-Utility Node.

<sup>37</sup> Howard ve Matheson, **a.g.m.** s.133.

Etki Diyagramlarında yöneldiği düğüm tipine göre farklı anlam taşıyan ve koşullu yay ya da bilgi yayı olarak adlandırılan iki farklı yay bulunmaktadır.

#### 2.1.4. Koşullu Yay\*

Şans düğümüne, deterministik düğümüne ya da değer düğümüne doğru yönlendirilmiş yaydır. Bir şans düğümüne doğru yönlendirilmiş yay, şans düğümünün olasılığının, düğüm girdisi üzerinde koşullu bağımlı olduğunu ifade eder<sup>38</sup>. Buna göre, bir şans düğümünde bir olayın ortaya çıkma olasılığı, bu şans düğümü öncesindeki karara veya başka bir şans düğümü çıktısına bağlı olacaktır. Dolayısıyla şans düğümünün sonucu bir önceki düğümün etkisi altında kalacaktır. Bir deterministik düğüm ya da değer düğümüne doğru yönlendirilen koşullu yay, girdi düğümünün çıktıları ile birlikte kısmi olarak düğümün değerini belirler. Bir değer düğümündeki sonucun elde edilebilmesinde, bu değer düğümünden hemen önce gelen şans ya da karar düğümü etkili olmaktadır.

#### 2.1.5. Bilgi Yayı\*\*

Bir karar düğümüne doğru yönlendirilmiş olan yaydır. Bir karar düğümünde karar verildiğinde, karar verici önceki kararın ya da belirsiz değişkenin sonuçlarını bilmektedir.

Etki Diyagramlarında yer alan farklı yay örnekleri Tablo 2’de özetlenmiştir.

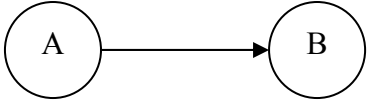
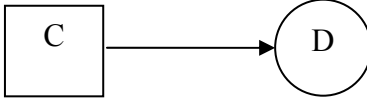
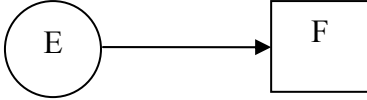
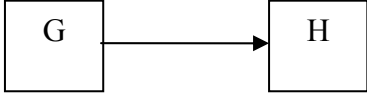
---

\* İng. Conditional Arc.

<sup>38</sup> Diehl ve Y.Haimes, **a.g.m**, s.294.

\*\* İng. Informational Arc.

Tablo 2. Etki Diyagramlarında Kullanılan Yönlendirilmiş Yay ve Anlamları

 <p>Şans değişkeni B'ye ilişkin olasılıklar, şans değişkeni A'nın çıktılarına bağlıdır. Başka bir ifade ile B'nin olasılığı koşulludur.</p>
 <p>Şans değişkeni D'ye ilişkin olasılıklar C karar değişkeninin çıktılarına bağlıdır.</p>
 <p>F kararı verildiğinde, karar verici şans değişkeni E'nin çıktısını bilmektedir.</p>
 <p>H kararı verildiğinde, karar verici G kararını bilmektedir.</p>

Tablo 2'nin incelenmesiyle görülebileceği gibi, bir şans değişkenini işaret eden yay, yayın sonunda bulunan şans değişkeni için koşullu bir olasılık dağılımının varlığını temsil etmektedir. Bir karar değişkenini işaret eden yay, bu karar değişkenine ait bir olay seçilmiş olduğunda bu zaman noktasında karar verici tarafından neyin bilindiğini belirtir. Son olarak değer düğümünü işaret eden yay ise fayda fonksiyonunun tanım kümesini belirtir<sup>39</sup>.

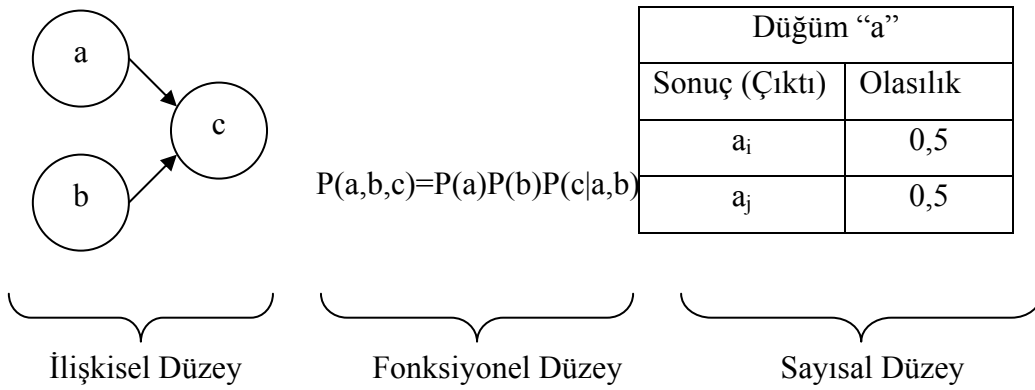
<sup>39</sup> Howard ve Matheson, **a.g.m.**, s.130.

## 2.2. Etki Diyagramında Fonksiyonel Düzey

*Fonksiyonel düzey*, her bir belirsiz şans düğümü ve her bir karar düğümü ile ilişkilendirilmiş karar seçenekleri kümesinin koşullu olasılık dağılımını tanımlar.

## 2.3. Etki Diyagramlarında Sayısal Düzey

*Sayısal düzeyde*, olasılık fonksiyonları ve fayda değerleri ile ilişkili olan gerçek sayılar belirlenir. Şekil 9 sadece şans düğümlerinin yer aldığı bir Etki Diyagramı için söz konusu üç düzeyi örneklemektedir<sup>40</sup>.



Şekil 9. Etki Diyagramının Üç Düzeyi

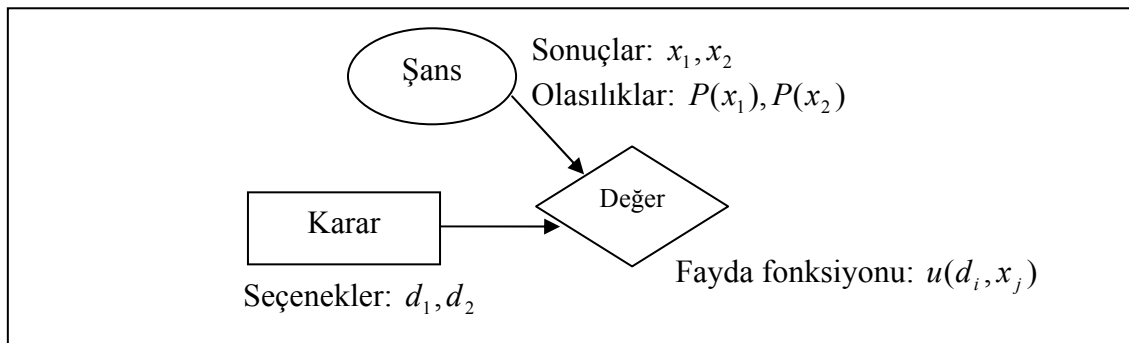
Her bir düğüm rassal bir değişken ile ilişkilendirilir ve tüm şans değişkenleri için birleşik olasılık dağılımı vardır. Bu birleşik dağılım, diyagramda yaylar yardımıyla gösterilen koşullu dağılım kümesine ayrıştırılabilir. Şekil 9'da  $a$  ve  $b$  düğümlerinde olduğu gibi, iki düğüm arasında yönlendirilmiş bir yay bulunmadığında bu düğümlerin bağımsız olduğu anlaşılır.  $(a,c)$  yayı,  $c$  rassal değişkeni için öngörülen dağılımın,  $a$  rassal değişkeninin değerine bağlı olduğu anlamını taşır. Şans düğümüne doğru yönlendirilmiş bir yay bulunmadığında, öngörülen dağılım koşullu olmayan (önsel) dağılımdır. Buna göre, Şekil 9'daki  $a$  ve  $b$  rassal değişkenleri koşullu olmayan dağılıma sahiptir<sup>41</sup>.

<sup>40</sup> Diehl ve Haimes, **a.g.m.**, s.293.

<sup>41</sup> Ross D. Shachter, "Evaluating Influence Diagrams", **Operation Research**, Vol.34, No.6, (November-December,1986), s.872.

## 2.4. Etki Diyagramında Dügümler Arası İlişkiler

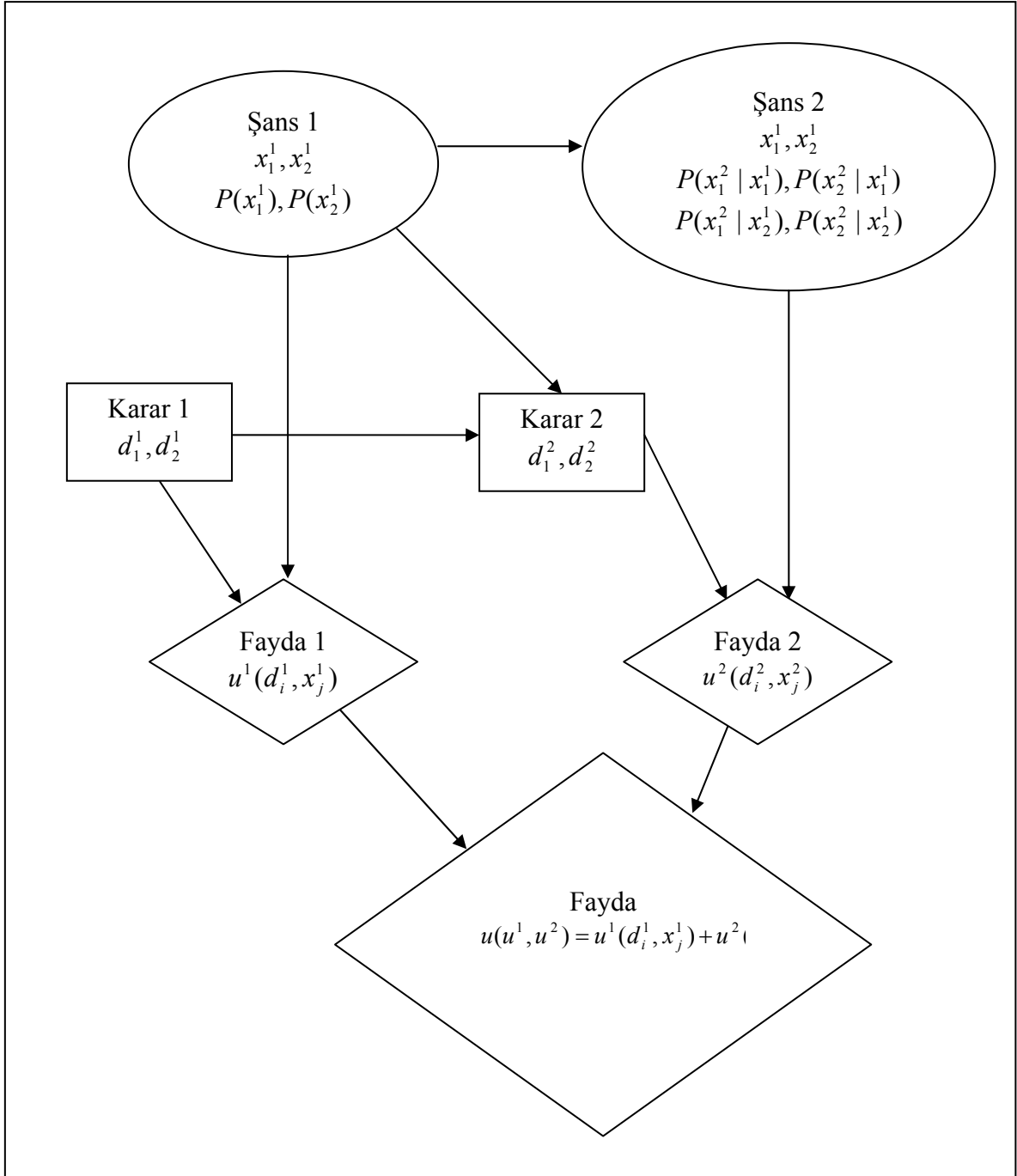
Şekil 10, şans, karar ve değer düğümlerinin yer aldığı, tek aşamalı basit bir karar durumunu yansıtmaktadır. Karar seçenekleri  $d_1$  ve  $d_2$  'dir. Şans düğümünün çıktıları da  $x_1$  ve  $x_2$  'dir. Yaylar, şans düğümünün diğer düğümlerden bağımsız olduğunu göstermektedirler. Bu nedenle yalnızca  $P(x_1), P(x_2)$  olasılıkları tayin edilmiştir. Fayda fonksiyonu  $u(d_i, x_j)$  karar ve şans düğümlerinin her ikisine birden bağlıdır.



Şekil 10. Tek Aşamalı Etki Diyagramı

Birden fazla kararın ardışık olarak verildiği çok aşamalı karar problemlerine ilişkin Etki Diyagramları ise, bu tip karar problemlerini tek aşamalı Etki Diyagramları zinciri olarak göstermektedir. Şekil 11 kararların ardışık aşamalarda alındığı durumu yansıtmaktadır. Burada Karar 1 ve Karar 2 olarak adlandırılmış iki karar aşaması ve her iki karar aşamasında  $d_1^i$  ve  $d_2^i$ ,  $i=1,2$  biçiminde iki karar seçeneğine yer verilmiştir. Karar seçenekleri gösterimindeki üst indisler karar aşamasını göstermektedir. Karar düğümleri arasındaki yayın yönü, kararların alınma sırasını gösterir. Birinci şans düğümünden çıkıp, ikinci karar düğümünü işaret eden yay, birinci şans düğümü çıktılarının ikinci karar aşamasında bilindiğini belirtmektedir. Birinci şans düğümünün bağımsız olmasına karşın ikinci şans düğümü birinci şans düğümünün çıktılarına bağlıdır. Bu nedenle  $P(x_i^2, x_j^1)$ ,  $i, j=1,2$  koşullu olasılıklarına, ihtiyaç duyulur. Her bir aşamada fayda,  $u^i()$ ,  $i=1,2$  biçiminde gösterilen her bir aşamadaki fayda karar ve şans çıktılarının fonksiyonudur. Bütünleşik (birleştirilmiş) fayda  $u()$  ise her bir aşamadaki faydaların toplamıdır<sup>42</sup>.

<sup>42</sup> Kai Virtanen, Tuomas Raivio ve Raimo P. Hämäläinen, "Modeling Pilot's Sequential Maneuvering Decisions by a Multistage Influence Diagram", **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, Vol.27, No.4, (July – August 2004), s.666.



Şekil 11. Çok Aşamalı Etki Diyagramı

## 2.5. Etki Diyagramının Çözüm Süreci

Etki Diyagramlarının çözümü için önerilen ilk çözüm yaklaşımı, Howard ve Matheson'un önerdiği; Etki Diyagramı gösterimini Karar Ağacı gösterimine dönüştürme ve Karar Ağacını bilinen tekniği ile çözme biçimindeki yaklaşımdır. Ancak bu yaklaşım, Karar Ağacı boyutunun problemdeki değişken sayısı arttıkça üstel olarak artması ve dolayısıyla



hesaplama etkinliğinin azalması sorununu beraberinde getirmektedir. Bu durumda problemi Etki Diyagramı ile çözümlenin Karar Ağacına bir üstünlüğü kalmamaktadır. Bu olumsuzluğu ortadan kaldırmaya yönelik olarak Olmsted ve Shachter tarafından gerçekleştirilen sonraki çalışmalarda Etki Diyagramını doğrudan çözmeye yönelik teknikler geliştirilmiştir<sup>43</sup>. Ross D.Shachter tarafından geliştirilen teknikte, beklenen faydayı gösteren tek bir düğüm kalıncaya dek Etki Diyagramındaki düğümler sırayla silinmekte ve beklenen fayda değeri hesaplanmaktadır. Çözüm süreci, Shachter 'ın *değer koruyan eksiltme*\* olarak adlandırdığı bir dizi dönüşümü içermektedir. Bu dönüşümler ilgili düğümlere ilişkin gerekli hesaplamalarla *düğüm silme* ve *yay ters çevirme* biçiminde gerçekleştirilmektedir. Bu dönüşümlere ilişkin bilgi düğüm silme ve yay ters çevirme başlığı altında izleyen kesimlerde verilecektir.

Etki Diyagramlarının çözüm sürecinde, düğümlerin öncelleri ve ardılları ile olan ilişkileri önem kazanmaktadır. Bu nedenle çözüm sürecine ilişkin dönüşümlerden önce düğümler, öncelik ve ardıllık ilişkilerine ilişkin bilgiye Düğüm Terminolojisi başlığı altında yer verilmiştir.

## 2.6. Düğüm Terminolojisi

Önceki kesimlerden Etki Diyagramının ilişkisel düzeyinde, birbiri ile ilişkili değişkenlerin farklı düğüm tipleri ile gösterildiği ve bu düğümlerin yönlendirilmiş doğrular olan yaylar ile birbirine bağlanmakta olduğu bilinmektedir. Bu bilgilerle Etki Diyagramının grafik yapısı

$$N = \{\text{Düğüm kümesi}\}$$

ve

$$A = \{\text{Yaylar kümesi}\}$$

olmak üzere

$$G = (N, A)$$

biçiminde ifade edilebilir.

<sup>43</sup> Thomas D.Nielsen ve Finn V. Jensen, "Advances in Decision Graphs", <http://www.cs.aau.dk/~tdn/papers/nielsen-jensen-04-book.pdf> (Erişim tarihi: 02.06.2006)

\* İng. Value-Preserving Reduction.

Benzer biçimde düğümler kümesi ise,

$$V = \{\text{Değer düğümleri kümesi}\},$$

$$C = \{\text{Şans düğümleri kümesi}\}$$

ve

$$D = \{\text{Karar düğümleri kümesi}\}$$

olmak üzere

$$N = \{V, C, D\} \quad \text{olarak yazılabilir.}$$

Grafikteki yer alan yayların, işaret ettikleri düğüm tipine göre farklı anlamlar taşıdığı da bilinmektedir. Buna göre daha önce de ifade edildiği gibi iki tip yay tanımlanabilir:

*Koşullu yaylar:* Şans ya da değer düğümlerini işaret eden yaylardır. Koşullu olasılığı gösterirler. Nedenselliği ya da zaman önceliğini ifade etmezler.

*Bilgi yayları:* Karar düğümlerini işaret eden yaylardır. Zaman önceliğini ifade ederler.

Yukarıdaki hatırlatmalar doğrultusunda, Etki Diyagramlarındaki düğümler arasındaki öncelik, ardılık ilişkilerine yönelik olarak aşağıdaki açıklamalar yapılabilir:

- Bir düğümden diğer bir düğüme giden *yol\**, baştan sona kadar oklarla bağlanmış olan yönlü bir doğrudur.
- Bir düğümün *öncel kümesi\*\**, ilgili düğüme giden yoldaki tüm düğümler kümesidir.
  - *Doğrudan öncel kümesi*, ilgili düğüme doğru yönelmiş oklar yardımıyla doğrudan bağlantılı olan düğümler kümesidir.
  - *Dolaylı öncel kümesi*, ilgili düğümün öncel kümesi içinden doğrudan öncellerinin çıkarılmasıyla kalan düğümler kümesidir.
- Bir düğümün *ardıl kümesi\*\*\** ilgili düğümün bulunduğu yolda, ilgili düğümden sonraki düğümler kümesidir.
  - *Doğrudan ardıl kümesi*, doğrudan ilgili düğümden çıkan oklarla bağlantılı olan düğümler kümesidir.

---

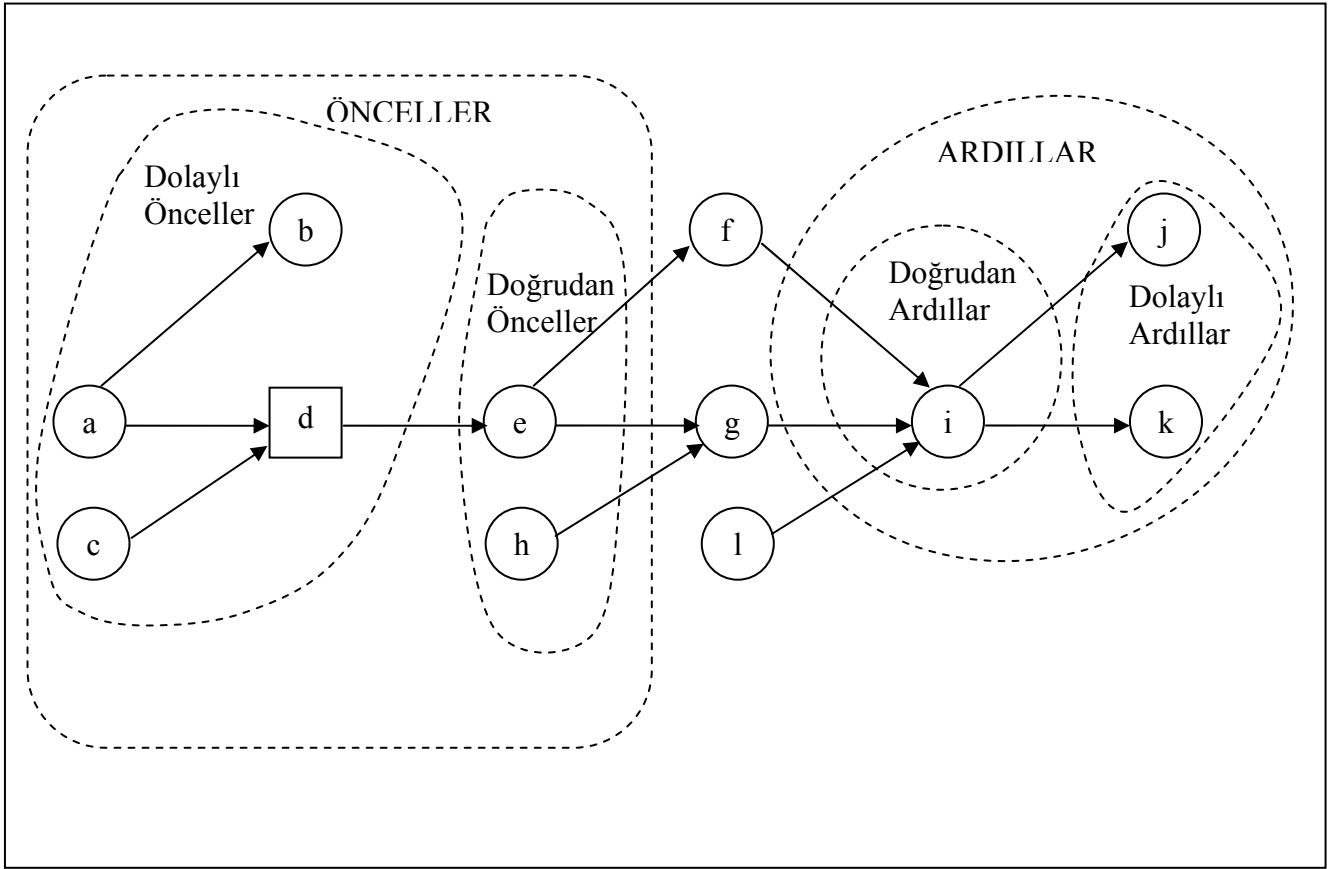
\* İng. Path.

\*\* İng. Predecessor Set.

\*\*\* İng. Successor Set.

- *Dolaylı ardıl kümesi*, ilgili düğümün bulunduğu yolda, ilgili düğümün ardıllar kümesi içinden doğrudan ardıllarının çıkarılması ile kalan ardıllar kümesidir<sup>44</sup>.
- Bir şans ya da karar düğümünün herhangi bir ardılı yoksa, bu düğüm *kısır düğüm*<sup>\*</sup> olarak adlandırılır<sup>45</sup>.

Şekil 12’de bu tanımlamalara ilişkin bir örnek görülmektedir.



Şekil 12. g Düğümü İçin Tanımlanan Bazı Öncel ve Ardıl Düğüm Kümeleri

Etki Diyagramlarında önemli noktalardan biri de, diyagram üzerinde doğrudan görünmeyen ve güç algılanabilen, olası diğer etkilerin olmasıdır. Diyagramda yer alan bir düğüme, diyagramda döngü oluşturacak biçimde ardıllarından gelen herhangi bir ok bulunamaz. Herhangi bir olasılıksal koşullandırma sırasını\*\* gösteremeyeceği için döngüye

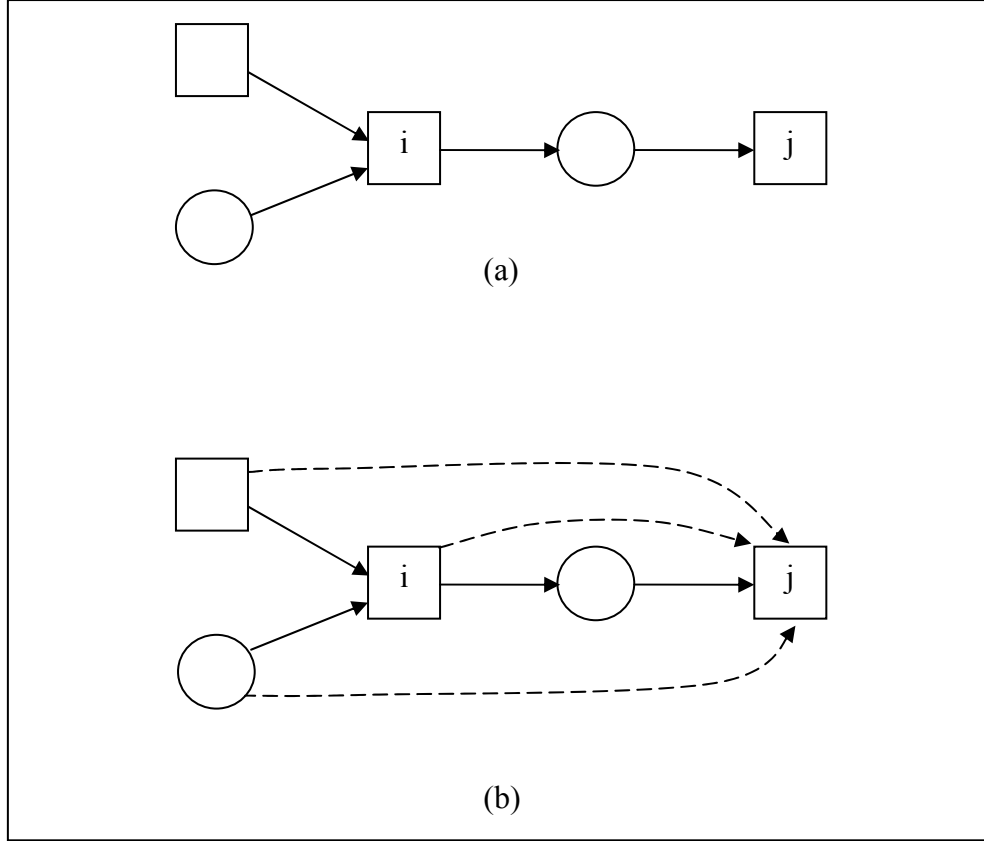
<sup>44</sup> Howard ve Matheson, **a.g.m.**, s.134.

\* İng. Barren Node.

<sup>45</sup> Clemen, **a.g.e.**, s.127.

\*\* İng. Probabilistic Conditioning Order.

izin verilmez. Bununla birlikte öncel düğümlerden uygun şekilde gelen ek oklara izin verilebilir<sup>46</sup>. Başka bir ifade ile  $i$  karar düğümü  $j$ 'nin önceli ise  $i$  ve  $i$ 'nin tüm bilgi öncelleri,  $j$  düğümünün bilgi öncelleri olmalıdır. Şekil 13 (a)'da yer alan Etki Diyagramındaki doğrudan görünmeyen etkiler, Şekil 13 (b)'de kesikli oklar biçiminde eklenen yaylar ile gösterilmiştir.



Şekil 13. Etki Diyagramında Doğrudan Görünmeyen Etkiler

Bir Etki Diyagramı ;

1. Yönlendirilmiş grafikte döngü bulunmadığında
2. Değer düğümünün ardıl düğümleri bulunmadığında ve
3. Tüm karar düğümlerini içeren yönlendirilmiş bir yol bulunduğunda

*kurallara uygun* \* bir diyagram olarak kabul edilir.

Bir Etki Diyagramının kurallara uygun bir Etki Diyagramı olmasını sağlayan üçüncü koşul, tüm kararların tam sıralanması gerektiği anlamını taşımaktadır. Herhangi bir karar verildiği

<sup>46</sup> Howard ve Matheson, **a.g.m.**, s.134.

\* İng. Regular.

sırada mevcut olan herhangi bilgi sonraki tüm kararlar için de mevcut olmalıdır<sup>47</sup>. Bu kural, doğrudan görünmeyen etkilere karşılık gelmektedir. Çözüm süreci öncesinde Etki Diyagramının kurallara uygun olup olmadığı kontrol edilmeli ve uygun değilse, uygun biçime getirilmelidir.

## 2.7. Etki Diyagramının Matematiksel Yapısı

Etki Diyagramlarının çözülebilmesi için genel bir notasyon oluşturulması gerekmektedir. Bu notasyon ve notasyonun ifade ettiği özellikler izleyen şekilde ele alınabilir.

$i$  düğümünün “doğrudan ardıllar” kümesi  $S(i)$ ,

$$S(i) = \{j \in N : (i, j) \in A\}$$

biçiminde yazılır. Benzer şekilde “doğrudan önceller” kümesi  $P(i)$ ,

$$P(i) = \{j \in N : (j, i) \in A\}$$

olarak yazılır. Şans ya da değer düğümü  $i$ 'nin doğrudan öncelleri *koşullu önceller*\* olarak adlandırılır ve  $C(i)$  ile gösterilir. Karar düğümü  $i$ 'nin doğrudan öncelleri ise  $I(i)$  ile gösterilen *bilgisel öncellerdir*\*\* . Buradan,

$$C(i) = \{\text{Şans ya da değer düğümü } i \text{'nin doğrudan öncelleri olan düğümler kümesi}\}$$

$$I(i) = \{\text{Karar düğümü } i \text{'nin doğrudan öncelleri olan düğümler kümesi}\}$$

olarak özetlenebilir.

Grafikteki her bir  $i$  düğümü ile ilişkilendirilmiş bir  $X_i$  değişkeni bulunur ve bu değişkenin alabileceği olası değerler kümesi  $\Omega_i$  ile gösterilir. Farklı düğüm tiplerine göre  $\Omega_i$ 'nin temsil ettiği küme için aşağıda verilenler geçerlidir:

- $i$  bir değer düğümü ise;  $X_i$  beklenen faydayı ve  $\Omega_i$  gerçek yolun bir alt kümesini gösterir.
- $i$  bir şans düğümü ise;  $X_i$  rassal değişkeni ve  $\Omega_i$ ,  $i$  rassal değişkeni için örnek uzayını temsil eder.

<sup>47</sup> Shachter, **a.g.m.**, s.875.

\* İng. Conditional Predecessors.

\*\* İng. Informational Predecessors.

- $i$  bir karar düğümü ise  $X_i$  alternatifi ve  $\Omega_i$ , bu alternatifin seçildiği alternatifler kümesini temsil eder.

Gösterim kolaylığı için uygun olduğu sürece tüm  $\Omega_i$  kümelerinin sonlu olduğu kabul edilir.  $\Omega_J$  ( $J = \{j_1, \dots, j_n\} \subset N$ ) terimi  $\Omega_{j_1} \times \dots \times \Omega_{j_n}$  biçiminde açık olarak yazılabilen vektör çarpım (çapraz çarpım) uzayını ifade etmektedir. Benzer biçimde  $(x_{j_1}, \dots, x_{j_n})$  bileşenli rassal vektör  $X_J$  olarak yazılabilir.

Etki Diyagramındaki her bir  $i$  düğümü ile birebir eşlenen değerler bulunmaktadır. Şans ve değer düğümleri için bu eşleştirme, değerlendirmenin başlayabilmesi öncesinde ele alınması gereken bir girdidir. Diyagrama dönüştürme işlemi sürdürülürken, karar düğümleri için eşleştirmeler yeniden tanımlanıp hesaplanır ve sürecin çıktısı olarak gösterilir.

Değer düğümü  $v \in V$ , fayda fonksiyonu ile ilişkilidir;

$$U : \Omega_{C(v)} \rightarrow \Omega_v.$$

Fayda fonksiyonu ise, değer düğümünün koşullu öncellerine ait değerlerin bir fonksiyonu olarak beklenen faydayı göstermektedir. Çözüm sürecinin sonunda değer düğümünün öncelleri olmayacaktır  $C(v) = \emptyset$  ve  $U(\cdot)$  beklenen en yüksek faydayı değerlendirir.

Koşullu öncelleri bilindiğinde her bir şans düğümü  $i$  için,  $\pi_i(x_i | x_{C(i)}) = P\{X_i = x_i | X_{C(i)} = x_{C(i)}\}$  biçiminde ifade edilen bir koşullu olasılık dağılımı  $\pi_i$  bulunur.

Eğer  $i$  düğümünün öncelleri yoksa  $\pi_i(x_i) = P\{X_i = x_i\}$  biçiminde ifade edilen  $\pi_i$ ,  $X_i$  için marjinal dağılımı (koşullu olmayan olasılık dağılımı) gösterir.

Her bir karar düğümü  $i$  için, çözüm sürecinde hesaplanan ve  $d_i^*$  ile gösterilen bir optimal politika bulunur. Karar verildiği sırada karar vericinin bilgi durumu bilindiğinde, optimal politika  $\Omega_{I(i)}$ 'den  $\Omega_i$ 'ye eşleştirilen en iyi alternatifleri gösterir<sup>48</sup>.

---

<sup>48</sup> Shachter, **a.g.m.**, s.874-875.

Bu açıklamalar ışığında Etki Diyagramı,  $N$  düğümleri ve  $A$  yaylarından oluşan kısaca  $G = (N, A)$  biçiminde özetlenebilen yönlendirilmiş bir çizgedir. Etki Diyagramındaki düğümler  $V$ ,  $C$  ve  $D$  biçiminde farklı kümelere ayrılır. Her  $i$  düğümüne,  $\Omega_i$  kümesi ve ait olduğu düğüm kümesine bağlı olarak  $U$ ,  $\pi_i$  ya da  $d_i^*$  eşleşmelerinden biri karşılık gelir.

## 2.8. Etki Diyagramı Çözüm Yaklaşımı

Etki Diyagramlarının çözümü için Shachter'ın geliştirdiği yaklaşımda yer alan adımlar aşağıdaki biçimde sıralanır:

1. Etki Diyagramının çözüme hazır olup olmadığı kontrol edilir. Bu amaçla öncelikle Etki Diyagramında yalnızca tek bir değer düğümü (ya da bir dizi değer düğümünün beslediği tek bir *süper* değer düğümü) bulunduğu ve diyagramda döngü olmadığından emin olunur<sup>49</sup>. Daha sonra, diyagramda kısır düğüm bulunup bulunmadığı araştırılır. Bu noktada Etki Diyagramında kısır düğümler bulunuyorsa diyagramdan silinmelidir.
2. Etki Diyagramında, doğrudan ardılı değer düğümü olan bir ya da daha fazla düğüm olduğunda izleyen adımlar uygulanır:
  - a) Doğrudan ardılı değer düğümü olan bir karar düğümü bulunuyorsa ve doğrudan ardılı değer düğümü olan diğer tüm düğümler de bu karar düğümünün doğrudan önceli ise karar düğümü optimal politika belirlenerek silinir. Kısır düğüm oluşursa kısır düğümler de silinir. 2. a) adımına dönlür.
  - b) Yalnızca değer düğümünün doğrudan önceli olan (değer düğümü dışında başkaca bir düğümü işaret etmeyen) herhangi bir şans düğümü bulunuyorsa beklenen değeri hesaplanarak diyagramdan silinir. 2. a) adımına dönlür.
  - c) Değer düğümünün doğrudan önceli olan ve herhangi bir karar düğümünün önceli olmayan şans düğümleri araştırılır, öyle ki bu şans düğümünü işaret eden bir ya da daha fazla yay ters çevrildiğinde (bir döngü oluşturmaksızın) şans düğümü yalnızca değer düğümünün doğrudan önceli durumuna gelir. Bu durumu sağlayan yaylar ters çevrilir, gerekiyorsa yay eklenir. 2. a) adımına dönlür.

<sup>49</sup> Clemen, a.g.e., s.127.

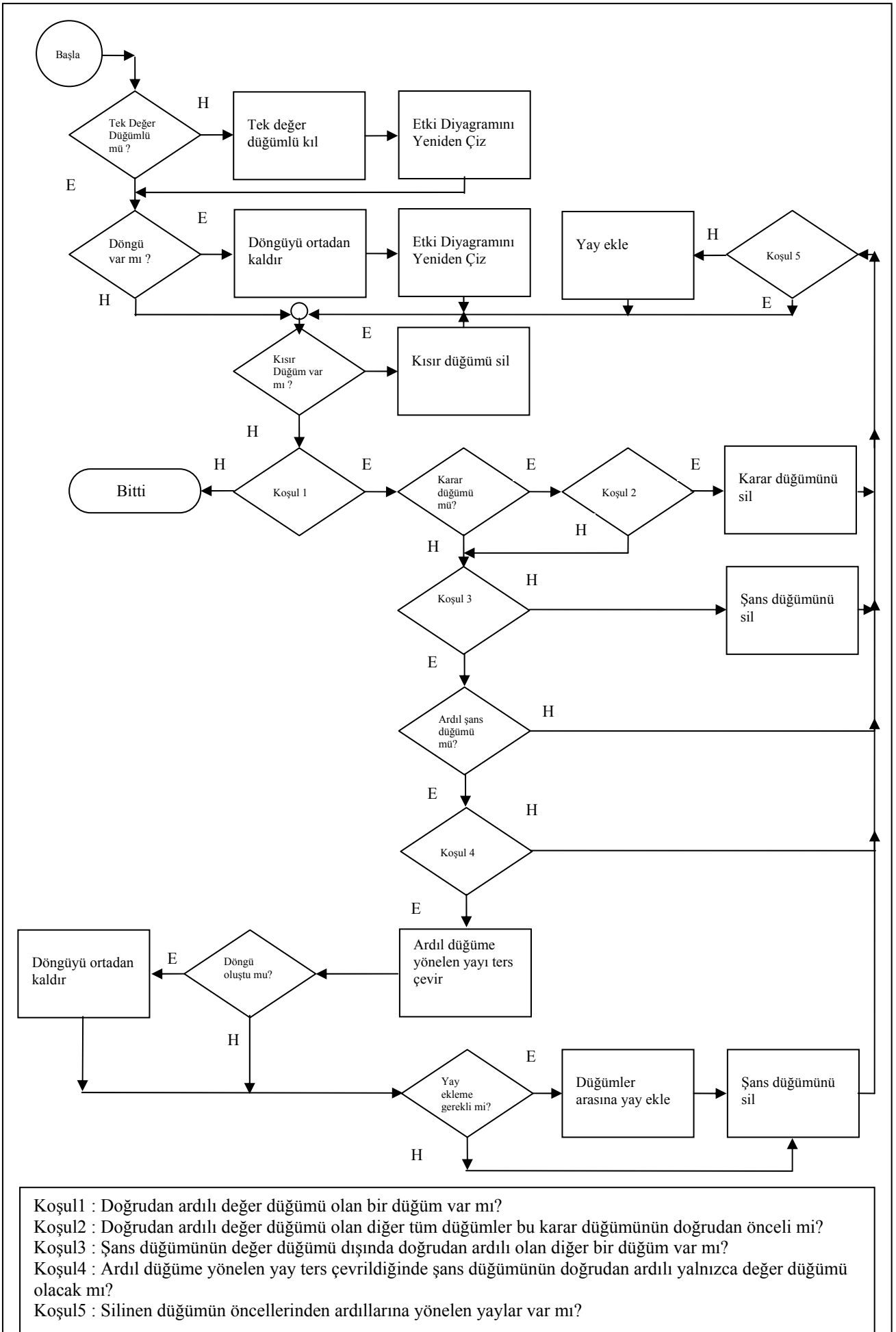
Herhangi tipte bir düğüm silindikten sonra, silinen düğümün öncellerinden silinen düğümün ardıllarına yönelen yaylar eklenir<sup>50</sup>.

Etki diyagramı çözüm yaklaşımının görselleştirilmiş biçimi izleyen sayfada verilmiştir.

---

<sup>50</sup> Douglas K. Owens, Ross D. Shachter ve Robert F. Nease, "Representation and Analysis of Medical Decision Problems with Influence Diagrams", **Medical Decision Making**, Vol.17 No.3, (July-September 1997)s.250-251.





Etki diyagramı çözüm yaklaşımında yararlanılan kimi işlemler izleyen kesimde ele alınacaktır.

### 2.8.1. Dügüm Silme ve Yay Ters Çevirme

Etki Diyagramını çözüm süreci, beklenen en yüksek değeri ya da optimal politikayı değiştirmeyen bir dizi dönüşümü içerir. Böylesi dönüşümler *değer koruyan eksiltme* olarak adlandırılabilir. Değer koruyan eksiltme yoluyla diyagramdan çıkarılan bir düğüm için, *silinen düğüm*\* ifadesi kullanılır. Bir düğüm diyagramdan silindiğinde, bu düğüm geçerli olan  $N$  kümesinden ve düğüme bağlı tüm yaylar da geçerli  $A$  kümesinden eksiltilecektir.

Eksiltme işleminin, *düğüm silme* ve *yay ters çevirme* biçiminde iki türü bulunmaktadır. Şans ve karar düğümlerinin silinmesine ilişkin dönüşümler Olmsted'in sonuçlarına dayanmaktadır, fakat bunlar gerçekte stokastik dinamik programlamanın temel adımlarıdır (Bellman 1957). Yay ters çevirmeye ilişkin dönüşümler ise Bayes teoremine dayalı olarak gerçekleştirilmektedir (Howard, Matheson ve Olmsted)<sup>51</sup>.

#### 2.8.1.1. Dügüm Silme

Düğüm silme başlığı altında sırasıyla kısır, şans ve karar düğümlerine ilişkin silme işlemleri ele alınacaktır.

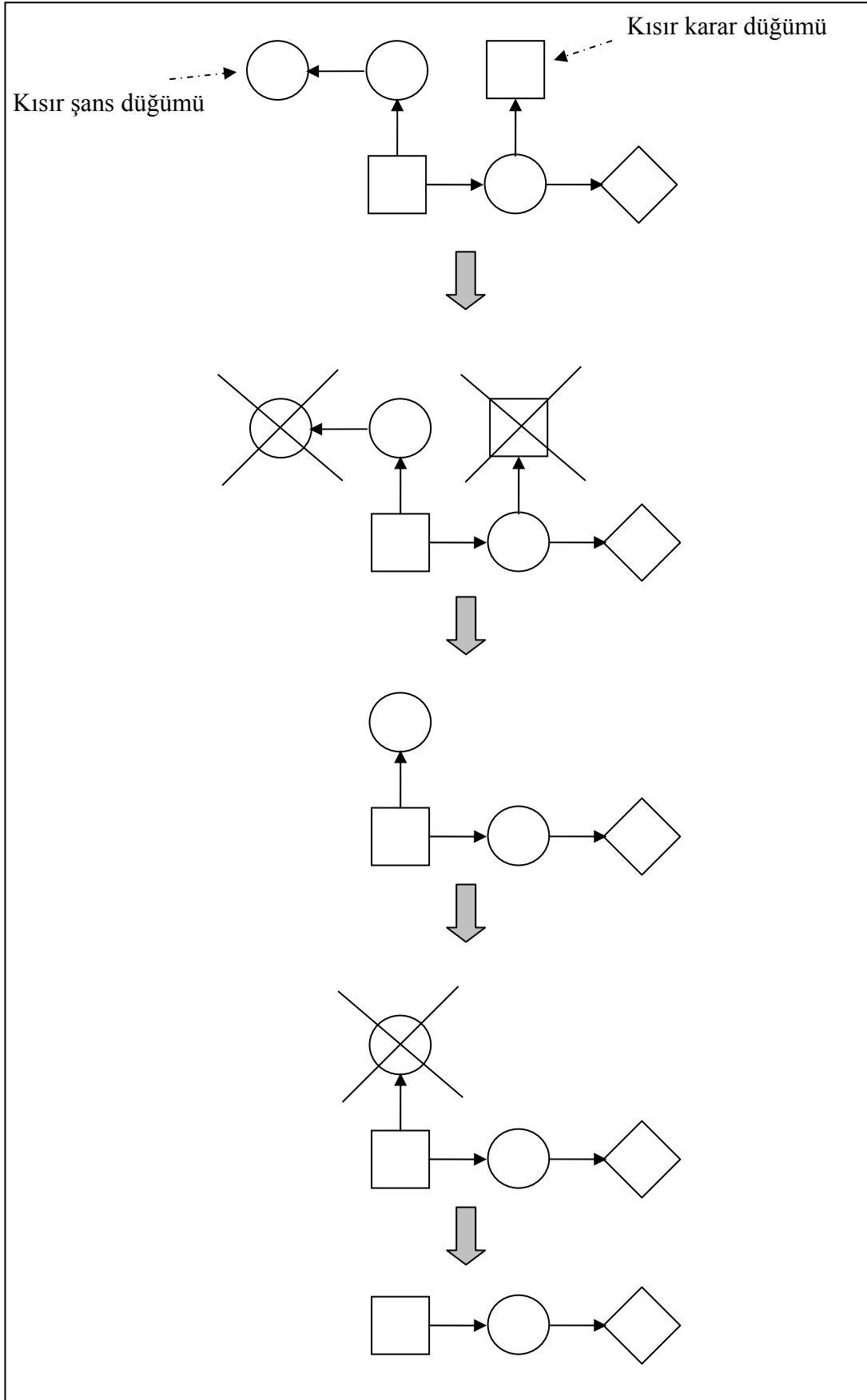
- **Kısır Dügüm Silme:** Kısır düğüme hangi değer atandığının ve diğer düğümlerden nasıl etkilendiğinin bir önemi olmadığından bu düğüm diyagramdan basitçe silinebilecektir. Algoritma kısır şans düğümleri için bir olasılık dağılımını bilme ihtiyacı göstermemekte ve bu nedenle bilinmeyen olasılık dağılımlarına sahip tüm şans düğümlerinin kısır düğümler haline geldiği eksik bir Etki Diyagramını değerlendirmek mümkün olabilmektedir. Eğer silinen kısır düğüm, bir karar düğümü ise, bu durumda o düğüme ilişkin karar değişkeninin herhangi bir alternatifi optimal olacaktır. Şekil 14'de görüldüğü gibi kısır bir düğüm silindiğinde diğer düğümler kısır düğümler haline gelebilecektir<sup>52</sup>.

---

\* İng. Removed Node.

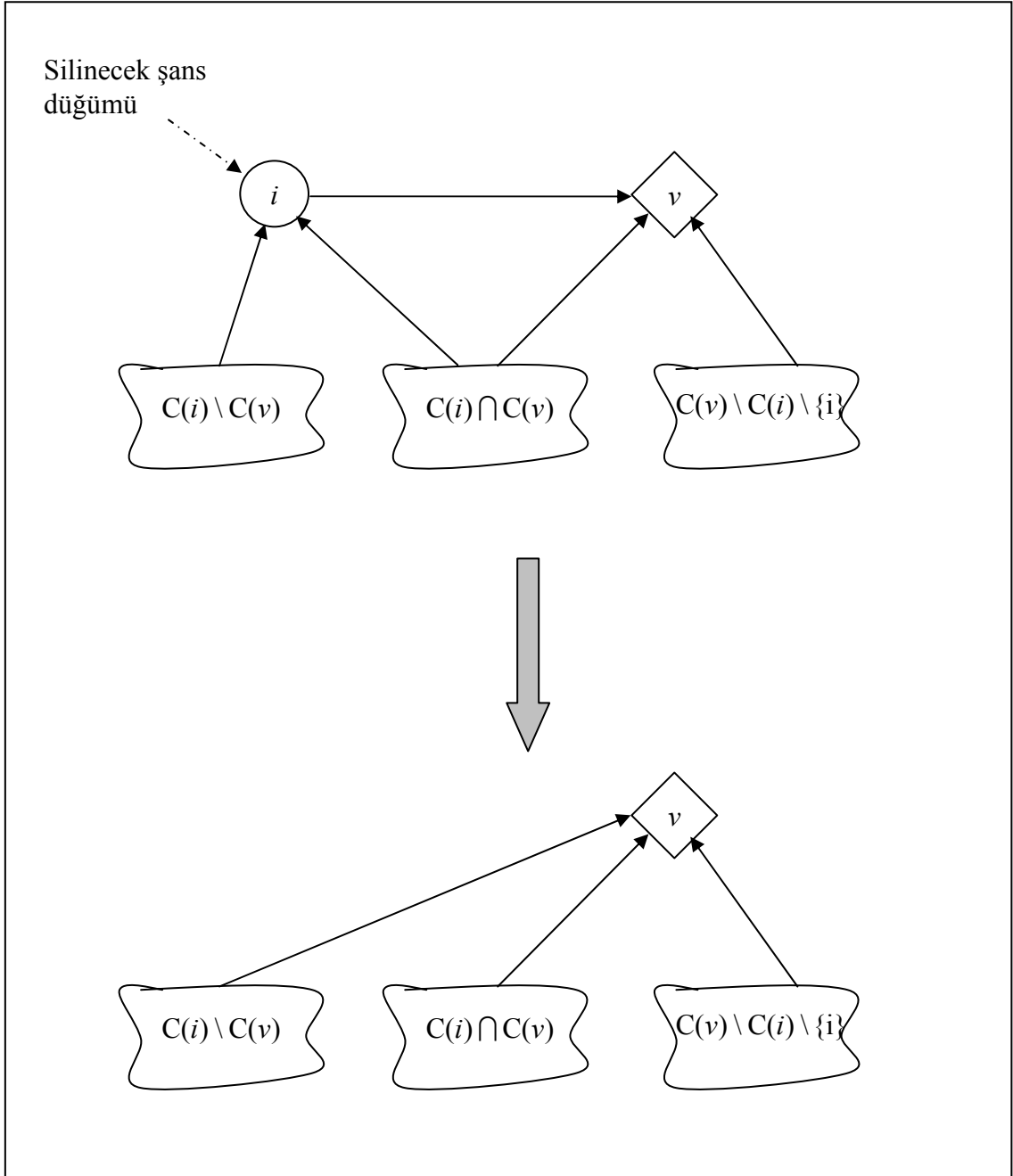
<sup>51</sup> Shachter, **a.g.m.**, s.876.

<sup>52</sup> **Aynı**, s.876.



Şekil 14. Kısır Düğümlerin Silinmesi

- **Şans Düzümü Silme Teoremi:** Etki Diyagramında yer alan  $i$  şans düzümü, değer düzümünün doğrudan önceli ise ve başka bir düzümün doğrudan önceli değilse koşullu beklenen değeri hesaplanarak silinebilir.  $i$  düzümünün silinmesi sonrasında değer düzümü  $v$ ,  $i$  düzümünün tüm koşullu öncellerini alır ve böylece süreç yeni kısır düzüm yaratmaz.



Şekil 15. Şans Düzümünün Silinmesi

**İspat:** Şekil 15 bu sürecin genel görüntüsünü yansıtmaktadır.  $i$  düğümünün silinmesi sonrasında değer düğümünün koşullu öncelleri  $C^{yeni}(v) \leftarrow C^{eski}(v) \cup C(i) \setminus \{i\}$  biçimine gelir. İfadelerde  $\setminus$  işleci eksiltme kümesini göstermektedir.  $A \setminus B = \{i \in A \mid i \notin B\}$

$X_i$ 'ye bağlı olan koşullu beklenti yalnızca değer düğümünü etkilediğinden,

her  $x_{C^{yeni}(v)} \in \Omega_{C^{yeni}(v)}$  için

$$\begin{aligned}
 U^{yeni}(x_{C^{yeni}(v)}) &\leftarrow E\{X_v \mid X_{C^{yeni}(v)} = x_{C^{yeni}(v)}\} \\
 &= E\{E\{X_v \mid X_i\} \mid X_{C^{yeni}(v)} = x_{C^{yeni}(v)}\} \\
 &= \sum_{x_i \in \Omega_i} E\{X_v \mid X_i = x_i, X_{C^{yeni}(v)} = x_{C^{yeni}(v)}\} \cdot P\{X_i = x_i \mid X_{C^{yeni}(v)} = x_{C^{yeni}(v)}\} \\
 &= \sum_{x_i \in \Omega_i} E\{X_v \mid X_{C^{eski}(v)} = x_{C^{eski}(v)}\} \cdot P\{X_i = x_i \mid X_{C(i)} = x_{C(i)}\} \\
 &= \sum_{x_i \in \Omega_i} U(x_{C^{eski}(v)}) \pi_i(x_i \mid x_{C(i)})
 \end{aligned}$$

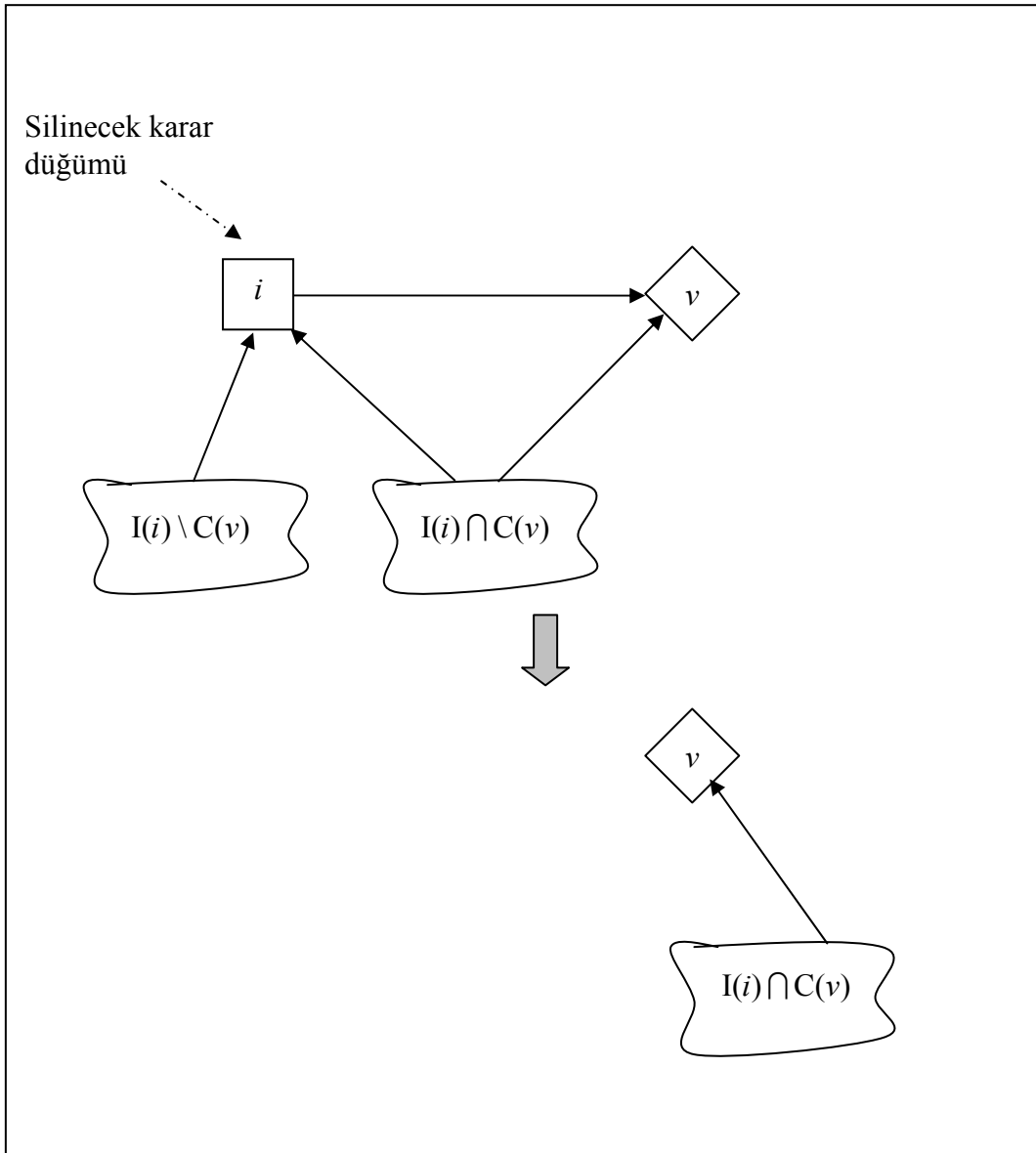
yazılır.

Karar düğümleri beklenen faydanın enbüyüklenmesiyle Etki Diyagramından silinebilir. Bununla birlikte sürecin, karar verme anında gözlemlenemeyen değer düğümünün herhangi bir koşullu öncelinin silinebilmesi için koşullu beklenen değeri kullanması gereklidir. Dolayısıyla herhangi bir  $i$  karar düğümü yalnızca, değer düğümünün tüm doğrudan öncelleri  $i$  düğümünün de doğrudan öncelleri olduğunda silinebilir.

- **Karar Düğümü Silme Teoremi:** Etki Diyagramında, tüm kısır düğümlerin silindiği,  $i$  karar düğümünün değer düğümünün koşullu önceli olduğu ve değer düğümünün diğer tüm koşullu öncellerinin  $i$  düğümünün bilgi öncelleri olduğu bilindiğinde,  $i$  düğümü en yüksek beklenen fayda ile bilgi öncellerinin değerlerine bağlı olarak silinecektir. Enbüyüklemeyi gerçekleştiren alternatif(ler) optimal politika olarak belirlenmelidir. Değer düğümü sözü edilen bu işlemler bütününden miras\* olarak yeni koşullu önceller almaz. Sonuçta,  $i$  düğümünün bazı bilgi öncellerinin kısır düğümler haline gelmesi olasıdır. Şekil 16 bu süreci yansıtmaktadır.

---

\* İng. Inherit.



Şekil 16. Bir Karar Düğümünün Silinmesi

**İspat:** İlk olarak değer düğümünün,  $i$  düğümünün tek ardılı olduğunun gösterilmesi gerekir. Durumun böyle olmadığı, bazı düğümlerin de ( $j \neq v$ ), aynı zamanda  $i$  düğümünün ardılları olduğu varsayalım. Diyagram kısır düğüm içermediğinden  $j$ 'den  $v$ 'ye yönlendirilmiş bir yol olmalıdır.  $k$  (büyük olasılıkla  $j$ ) yol üzerinde sondan bir önceki düğüm olsun. Bu oluşumda  $k$ ,  $i$ 'nin ardılı ve  $v$ 'nin koşullu öncelidir. Teoremdeki varsayımlar  $k$ 'nin aynı zamanda  $i$ 'nin bilgi önceli olmasını gerektirir ki bu bir döngünün ve bundan dolayı bir çelişkinin varlığı anlamına gelir.  $i$  düğümünün silinmesi sonrasında değer düğümünün koşullu öncelleri  $C^{\text{yeni}}(v) \leftarrow C^{\text{eski}}(v) \setminus \{i\}$  biçimine gelir.

$X_{I(i) \setminus C(v)}$  değişkenleri karar anında bilinmesine rağmen önemsizdir ve süreçte bir rol oynamamaktadır.

Varsayımlar,  $i$  düğümü ile ilgili karar verildiğinde beklenen faydanın yalnızca bilinen değişkenlere bağlı olmasını garanti etmektedir. Bu nedenle optimal beklenen fayda, ENB : En Büyük anlamında olmak üzere; tüm  $x_{C^{yeni}(v)} \in \Omega_{C^{yeni}(v)}$  için,

$$\begin{aligned} U^{yeni}(x_{C^{yeni}(v)}) &\leftarrow \text{ENB } E\{X_v \mid X_i = x_i, X_{I(i)} = x_{I(i)}\} \\ &= \text{ENB } E\{X_v \mid X_{C^{eski}(v)} = x_{C^{eski}(v)}\} \\ &= \text{ENB } U\{x_i, x_{C^{yeni}(v)}\} \end{aligned}$$

ve optimal politika

$$d_i^*(x_{C^{yeni}(v)}) \leftarrow \text{ENB } U(x_i, x_{C^{yeni}(v)}) \text{ dir.}$$

$d_i^*$  beklenen fayda değerini ifade eden optimal politikalar kümesi olarak düşünülür<sup>53</sup>. Son dönüşüm ise şans düğümleri arasındaki yay ters çevirme işlemidir. Bu işlem Bayes Teoreminin uygulanmasını da gerektirmektedir. Karar düğümüne bağlı bir yayın ters çevrilmesi söz konusu değildir.

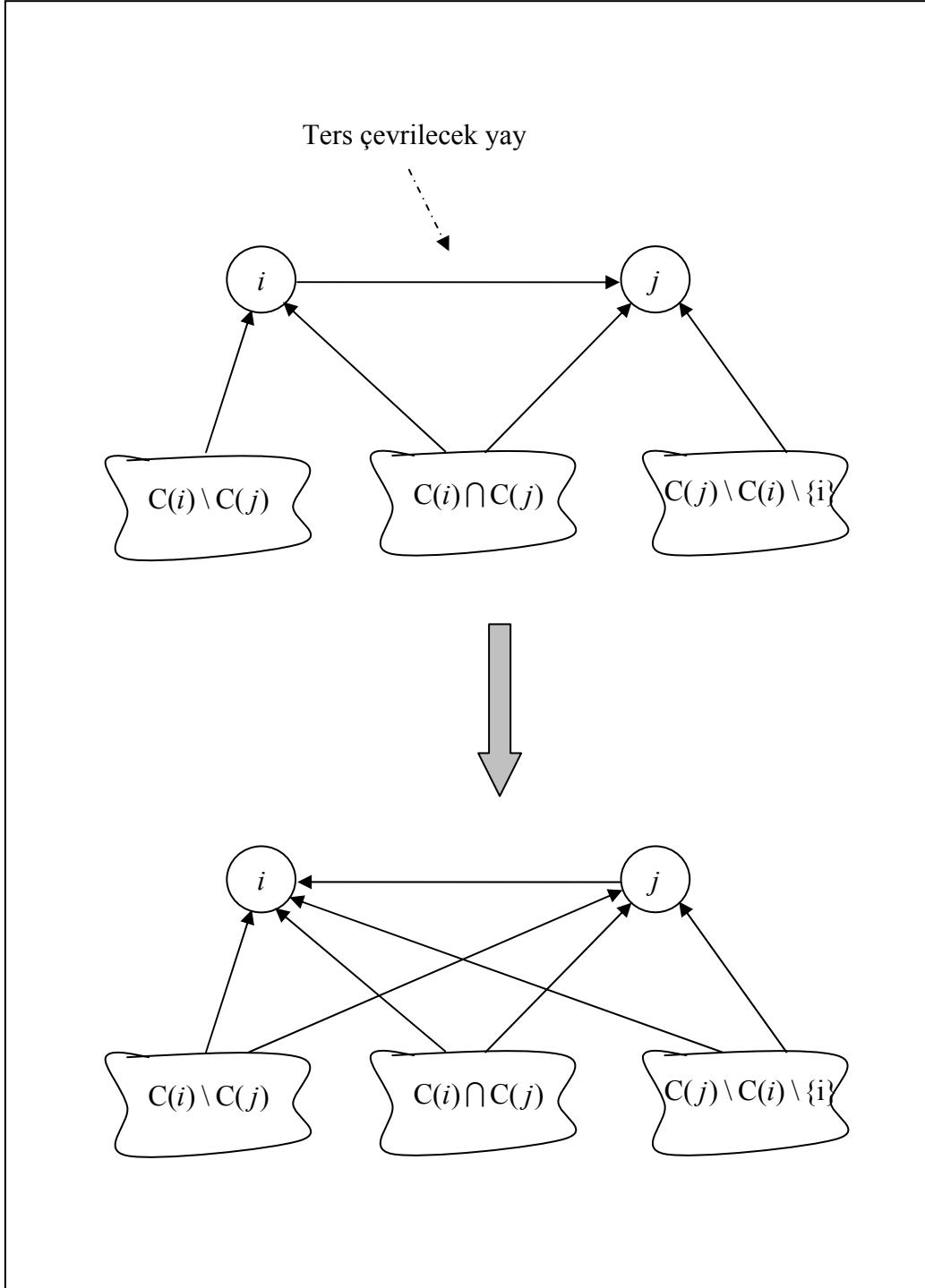
### 2.8.1.2. Yay Ters Çevirme

Yay ters çevirme işlemi, yay ters çevirme teoremine göre gerçekleştirilmektedir.

#### - Yay Ters Çevirme Teoremi:

$i$  ve  $j$  şans düğümleri arasında  $(i, j)$  yayı olduğu ve bir başka yönlendirilmiş  $(i, j)$  yolunun olmadığı bilindiğinde,  $(i, j)$  yayı  $(j, i)$  yayı ile değiştirilir. Daha sonra her iki düğüm birbirlerinin koşullu öncellerini alırlar. Şekil 17 yay ters çevirme sürecini örneklemektedir.

<sup>53</sup> Shachter, a.g.m, s.876-878.



Şekil 17. Şans Düğümleri Arasındaki Yayın Ters Çevrilmesi

**İspat:** Yay ters çevirme işleminden sonra her bir şans düğümünün koşullu öncelleri

$$C^{\text{yeni}}(j) \leftarrow C^{\text{eski}}(i) \cup C^{\text{eski}}(j) \setminus \{i\} \quad \text{ve}$$

$$C^{\text{yeni}}(i) \leftarrow C^{\text{yeni}}(j) \cup \{j\} \quad \text{biçimine gelir.}$$



Yay ters çevirme işlemi,  $(i, j)$  yayının yerini alan yeni  $(j, i)$  yayına ek olarak, eğer zaten yoksa, her bir düğümün koşullu öncellerinden diğer bir düğüme yaylar ekler ve böylece yayı ters çevirme işlemi öncesindeki bilgi durumlarının aynısını da beraberinde getirir. Herhangi yönlendirilmiş başka bir  $(i, j)$  yolunun olmama beklentisi, eklenen bu yaylarla birlikte bir döngü oluşmamasının gerek ve yeter koşuludur.

Koşullu beklenen değer yardımıyla,

$$\begin{aligned}
\pi_j^{yeni}(x_j | x_{C^{yeni}(j)}) &\leftarrow \mathbf{P}\{X_j = x_j | X_{C^{yeni}(j)} = x_{C^{yeni}(j)}\} \\
&= \mathbf{E}\{\mathbf{P}\{X_j = x_j | X_i\} | X_{C^{yeni}(j)} = x_{C^{yeni}(j)}\} \\
&= \sum_{x_i \in \Omega_i} \mathbf{P}\{X_j = x_j | X_i = x_i, X_{C^{yeni}(j)} = x_{C^{yeni}(j)}\} \cdot \mathbf{P}\{X_i = x_i | X_{C^{yeni}(j)} = x_{C^{yeni}(j)}\} \\
&= \sum_{x_i \in \Omega_i} \mathbf{P}\{X_j = x_j | X_{C^{eski}(j)} = x_{C^{eski}(j)}\} \cdot \mathbf{P}\{X_i = x_i | X_{C^{eski}(i)} = x_{C^{eski}(i)}\} \\
&= \sum_{x_i \in \Omega_i} \pi_j^{eski}(x_j | x_{C^{eski}(j)}) \pi_i^{eski}(x_i | x_{C^{eski}(i)}) \text{ yazılır.}
\end{aligned}$$

Ayrıca Bayes Teoreminin de uyarlanması ile

her  $x_i \in \Omega_i, x_j \in \Omega_j, x_{C^{yeni}(j)} \in \Omega_{C^{yeni}(j)}$  için,

$$\begin{aligned}
\pi_i^{yeni}(x_i | x_{C^{yeni}(i)}) &\leftarrow \mathbf{P}\{X_i = x_i | X_{C^{yeni}(i)} = x_{C^{yeni}(i)}\} \\
&= \frac{\mathbf{P}\{X_j = x_j, X_i = x_i | X_{C^{yeni}(j)} = x_{C^{yeni}(j)}\}}{\mathbf{P}\{X_j = x_j | X_{C^{yeni}(j)} = x_{C^{yeni}(j)}\}} \\
&= \mathbf{P}\{X_j = x_j | X_i = x_i, X_{C^{yeni}(j)} = x_{C^{yeni}(j)}\} \cdot \frac{\mathbf{P}\{X_i = x_i | X_{C^{yeni}(j)} = x_{C^{yeni}(j)}\}}{\mathbf{P}\{X_j = x_j | X_{C^{yeni}(j)} = x_{C^{yeni}(j)}\}} \\
&= \mathbf{P}\{X_j = x_j | X_{C^{eski}(j)} = x_{C^{eski}(j)}\} \cdot \frac{\mathbf{P}\{X_i = x_i | X_{C^{eski}(i)} = x_{C^{eski}(i)}\}}{\mathbf{P}\{X_j = x_j | X_{C^{yeni}(j)} = x_{C^{yeni}(j)}\}} \\
&= \frac{\pi_j^{eski}(x_j | x_{C^{eski}(j)}) \pi_i^{eski}(x_i | x_{C^{eski}(i)})}{\pi_j^{yeni}(x_j | x_{C^{yeni}(j)})}
\end{aligned}$$

yazılır<sup>54</sup>.

<sup>54</sup> Shachter, **a.g.e.**, s.876-878.

Yay ters çevirme işlemi izleyen şekilde özetlenebilir: Şans değişkeni  $i$ 'den şans değişkeni  $j$ 'ye giden bir yayı ters çevirmek için ilk olarak  $i$  ve  $j$  düğümleri ile ilişkilendirilmiş koşullu olasılık fonksiyonları çarpılır, daha sonra  $i$  rassal değişkeninin bu çarpımdaki payı (bu pay *marjinal* olarak adlandırılır) elde edilir ve bu marjinal  $j$  değişkeni ile ilişkilendirilir, son olarak çarpım değeri marjinal bölünür ve sonuç  $i$  değişkeni ile ilişkilendirilir. Grafıksel olarak  $i$ 'den  $j$ 'ye yönlendirilen yay ters çevrildiğinde  $i$  ve  $j$  düğümleri birbirlerinin doğrudan öncellerinin hepsini miras alırlar<sup>55</sup>.

---

<sup>55</sup> Prakash P. Shenoy, "A Comparison of Graphical Techniques for Decision Analysis", **European Journal of Operational Research**, Vol.78, Issue 1, (October 1994), s.11.

## ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

### KARAR PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜNDE YENİ GRAFİKSEL YAKLAŞIMLAR

Karar problemlerinin çözümü konusundaki çalışmalar geleneksel grafiksel tekniklerin yanı sıra şimdilerde *Değerleme Ağı* \* ve *Ardışık Karar Diyagramı* \*\* olarak adlandırılan teknikler üzerinde yoğunlaşmaktadır. Grafiksel teknikler konusundaki son çalışmalar ise sözü edilen son iki tekniğin bir karması olan *Ardışık Değerleme Ağı* \*\*\* tekniği üzerine odaklanmaktadır. İzleyen kesimde söz konusu bu teknikler ayrıntılı olarak incelenmiştir.

#### 1. DEĞERLEME AĞI

*Değerleme Ağı*, karar problemlerinin gösterimi ve çözümü için Shenoy tarafından önerilen grafiksel bir tekniktir. Değerleme Ağı tekniğinde problemin modellenmesi *grafiksel*, *bağımlılık* ve *sayısal* olmak üzere üç ayrı düzeyde belirlenir. Bu sınıflandırma Howard ve Matheson'un Etki Diyagramlarındaki ilişkisel, fonksiyonel ve sayısal sınıflandırmalarına benzetilebilir. Grafiksel ve bağımlılık düzeylerinde sembolik \*\*\*\* ve nitel bilgi yer alırken sayısal düzeyde nicel bilgi yer alır<sup>56</sup>.

---

\* İng. Valuation Network.

\*\* İng. Sequential Decision Diagram.

\*\*\* İng. Sequential Valuation Network.

\*\*\*\* İng. Symbolic. (Grafiklerdeki daire, kare, düzgün dörtgen gibi elemanları kastetmek üzere kullanılmıştır.)

<sup>56</sup> Prakash P. Shenoy, "Valuation Network Representation and Solution of Asymmetric Decision Problems", *European Journal of Operational Research*, Vol.121, (March 2000), s.582.

## 1.1. Grafiksel Düzey

Grafiksel düzey, problemin “Değerleme Ağı” adı verilen bir grafik yardımıyla gösterilmesidir. Değerleme Ağı oluşturulurken temel olarak *değişken* ve *değerleme* düğümü olmak üzere iki tip düğüm kullanılır. Buna ek olarak *değişkenler karar* ya da *şans* değişkeni ve *değerlemeler* de *gösterge*, *olasılık* ya da  *fayda* değerlemeleri olarak sınıflandırılır. Bu nedenle bir Değerleme Ağında karar, şans, gösterge, olasılık veya fayda olmak üzere beş farklı tip düğüm kullanılır<sup>57</sup>.

### 1.1. 1. Karar Düğümü

Karar değişkenini temsil eden karar düğümü grafiksel düzeyde kare (ya da dikdörtgen) ile gösterilir<sup>58</sup>. Değerleme Ağında karar değişkenleri değerleri olan alternatiflere ya da seçeneklere yer verilmez. Bir değişkenin değerler kümesi değişkenin *çerçevesi*\* olarak adlandırılır<sup>59</sup>. Karar değişkenlerinin çerçeveleri bağımlılık düzeyinde belirlenir.

Değerleme Ağının grafik düzeyi Şekil 18 yardımıyla örneklenmiştir. Buna göre Değerleme Ağında  $D_1$ ,  $D_2$  ve  $D_3$  biçiminde üç karar düğümü bulunduğu gözlenebilmektedir.

### 1.1. 2. Şans Düğümü

Şans düğümü rassal değişkenleri temsil eder ve daire ile gösterilir. Şans değişkeninin değerleri de Değerleme Ağında gösterilmez. Şans değişkenlerinin çerçeveleri ise Değerleme Ağı gösteriminin bağımlılık düzeyinde belirlenir<sup>60</sup>.

Şekil 18’de verilen grafikte,  $R_1$ ,  $R_2$  ve  $R_3$  biçiminde üç şans düğümü bulunmaktadır.  $\mathcal{X}_D$ , tüm karar değişkenleri kümesi ve  $\mathcal{X}_R$ , tüm şans değişkenleri kümesini göstermek üzere;  $\mathcal{X} = \mathcal{X}_D \cup \mathcal{X}_R$  tüm değişkenler kümesini temsil etmek için kullanılmaktadır.

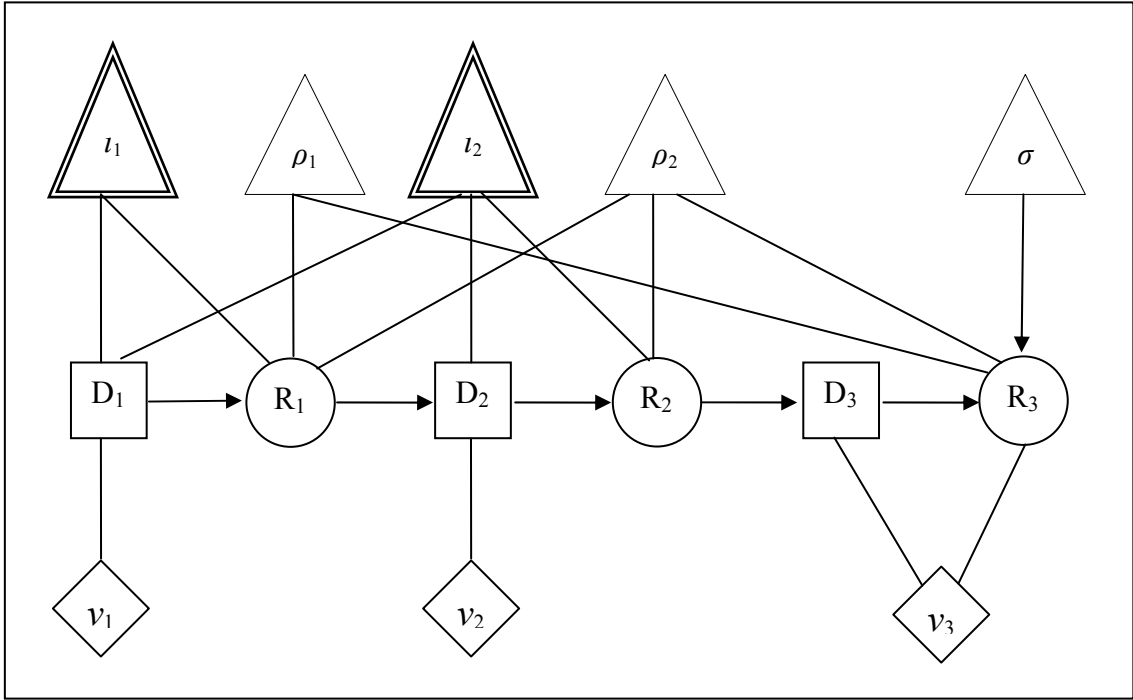
<sup>57</sup> Concha Bielza ve Prakash P.Shenoy, “A Comparison of Graphical Techniques for Asymmetric Decision Problems”, **Management Science**, Vol.45, No.11, (November 1999), s.1559.

<sup>58</sup> Shenoy, 2000, **a.g.m.**, s.584.

\* İng. Frame.

<sup>59</sup> Aynı, s.584.

<sup>60</sup> Aynı, s.584.



Şekil 18. Değerleme Ağının Grafik Düzeyi

### 1.1. 3. Gösterge Düğümü

Karar ve şans değişkenlerinin birleşik çerçevelerine ilişkin nitel kısıtlamalar olan gösterge değerlemeleri Değerleme Ağında gösterge düğümleriyle temsil edilir. Gösterge düğümü sınırları çift çizgili üçgen ile gösterilir. Grafikte yönsüz doğrularla gösterge düğümüne doğrudan birleştirilen düğümlere ilişkin değişkenler kümesi, gösterge değerlemelerinin tanım kümesini oluşturur. Buna göre Şekil 18’de  $I_1$  gösterge düğümünün tanım kümesi  $\{D_1, R_1\}$  dir.  $D_1$  karar düğümünün test yapıp yapmama kararını ve  $R_1$  şans düğümünün de olası test sonuçlarını temsil ettiği örneğinde  $I_1$  gösterge düğümü,  $D_1$ ’de test yapmama kararı verildiğinde, test uygulanmayacağı için  $R_1$ ’de ortaya çıkacak “sonuç yok” yapay durumu temsil edecektir.

Problemdeki asimetriyi göstermek için kullanılan gösterge değerlemesi Değerleme Ağı gösteriminin bağımlılık düzeyinde belirlenir<sup>61</sup>.

<sup>61</sup> Shenoy, 2000, a.g.m., s.584.

#### 1.1. 4. Fayda Dügümü

Fayda değerlemeleri birleşik fayda fonksiyonunun faktörlerini temsil eder ve Değerleme Ağında düzgün dörtgen biçimindeki fayda düğümleri ile temsil edilir. Bir fayda düğüme bir doğru yardımıyla bağlantılı kılınan değişkenler kümesi fayda değerlemesinin tanım kümesini oluşturur<sup>62</sup>. Fayda fonksiyonunun toplamsal ya da çarpımsal ayrıştırılmasına bağlı olarak faktörler toplanır ya da çarpılır (ya da ikisinin birleşimi olabilir). Fayda değerlemelerinin ayrıntıları sayısal düzeyde belirlenir.

Şekil 18’de verilen grafikte  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$  fayda düğümleri ile belirtilen üç toplamsal fayda değerlemesi bulunmaktadır.  $v_1$ ’ in tanım kümesi  $\{D_1\}$ ,  $v_2$ ’ nin tanım kümesi  $\{D_2\}$  ve  $v_3$ ’ ün tanım kümesi  $\{D_3, R_3\}$  tür. Burada  $v_1$ ,  $D_1$  karar düğümünde seçilen alternatifin sonucunu (kârı ya da zararı);  $v_2$  ise  $D_2$  karar düğümünde seçilen alternatifin sonucunu göstermektedir.  $v_3$  ise  $D_3$  karar düğümünde seçilen alternatifin ve bu karara bağlı olarak  $R_3$  şans düğümünde ortaya çıkan doğal durumun birlikte oluşturdukları sonucu göstermektedir.

#### 1.1. 5. Olasılık Dügümü

Olasılık değerlemeleri, problemdeki şans değişkenlerinin birleşik olasılık dağılımlarının çarpımsal faktörlerini gösterir ve üçgen biçimli olasılık düğümleri ile temsil edilir. Bir olasılık değerlemesi ile doğrudan birleştirilen tüm değişkenler kümesi, olasılık değerlemesinin tanım kümesini oluşturur. Olasılık değerlemesi koşullu ise bu durum olasılık değerlemesine ilişkin düğümden ilgili değişkenlere doğru “yönlendirilmiş doğrular” ile belirtilir. Şekil 18’de verilen Değerleme Ağında  $\sigma$ ,  $\rho_1$  ve  $\rho_2$  ile belirtilen üç olasılık değerlemesi bulunmaktadır.  $\sigma$ ’nın tanım kümesi  $\{R_3\}$ ,  $\rho_1$ ’ in tanım kümesi  $\{R_1, R_3\}$  ve  $\rho_2$ ’nin tanım kümesi  $\{R_1, R_2, R_3\}$  tür.  $\sigma$ ’dan  $R_3$ ’e doğru olan ok işareti  $\sigma$ ’nın  $\{R_3\}$  için koşullu olduğunu belirtir. Değerleme Ağında olasılık değerlemelerinin ayrıntıları sayısal düzeyde belirlenir.

<sup>62</sup> Demirer ve Shenoy, 2006, a.g.m., s.291.

### 1.1. 6. Bilgi Kısıtları

Değerleme Ağının grafiksel düzeyinde, karar ve şans düğüm çiftleri arasında yönlendirilmiş yaylar yer almaktadır. Yönlendirilmiş bu yaylar *bilgi kısıtlarını* temsil etmek için kullanılır. Bir başka ifadeyle, karar vericinin hangi noktada neyi bildiği karar ve şans değişkenleri arasındaki yönlü yaylar ( $\rightarrow$ ) ile belirtilir.  $R$  'nin bir şans değişkeni ve  $D$  'nin de bir karar değişkeni olduğu varsayıldığında  $R \rightarrow D$  yayı, karar vericinin  $D$  'nin çerçevesi içinden bir alternatifi seçtiğinde,  $R$  'nin gerçek değerini biliyor olması anlamındadır.  $D \rightarrow R$  yayı ise, karar vericinin  $D$  'nin çerçevesi içinden bir alternatifi seçtiğinde,  $R$  'nin gerçek değerini bilmiyor olması gerçeğini yansıtır<sup>63</sup>.

### 1.1. 7. İyi Tanımlanmış Bilgi Kısıtları

Eğer  $X \rightarrow Y$  ise ya da  $k \geq 1$  için  $X \rightarrow Z_1, Z_1 \rightarrow Z_2, \dots, Z_{k-1} \rightarrow Z_k, Z_k \rightarrow Y$  gibi  $Z_1, \dots, Z_k$  ortaya çıkıyorsa  $X$  'ten  $Y$  'ye “yönlendirilmiş bir yol” olduğu söylenir. Değerleme Ağının grafik düzeyinde, herhangi bir şans değişkeni  $R$  ile herhangi bir karar değişkeni  $D$  için ya  $R$  'den  $D$  'ye ya da  $D$  'den  $R$  'ye yönlendirilmiş bir yol bulunur. Fakat aynı anda hem  $D$  'den  $R$  'ye hem de  $R$  'den  $D$  'ye yönlendirilmiş bir yol olmaması beklenir. Eğer bu koşul sağlanıyorsa, bilgi kısıtları “iyi tanımlanmış bilgi kısıtları” olarak kabul edilir<sup>64</sup>.

Bilgi kısıtlarının en büyük faydası Değerleme Ağının çözüm aşaması boyunca silinecek düğümlerin silme sırasını göstermesidir. Buna göre,  $D$  'den  $R$  'ye yönlendirilmiş bir yol var ise  $R$ ,  $D$  'den önce silinmelidir. Bunun aksine  $R$  'den  $D$  'ye yönlendirilmiş bir yol var ise bu durumda  $D$ ,  $R$  'den önce silinmelidir. Eğer ne  $D$  'den  $R$  'ye ne de  $R$  'den  $D$  'ye yönlendirilmiş bir yol yoksa  $R$  'nin  $D$  'den önce silinip silinmediğine bağlı olarak karar problemi için farklı çözümler elde edilebilir. Diğer taraftan  $D$  'den  $R$  'ye yönlendirilmiş bir yol ve aynı zamanda  $R$  'den  $D$  'ye yönlendirilmiş bir yol varsa bu durumda geçerli silme sırası yoktur ve problemin çözülmesi mümkün değildir.

<sup>63</sup> <http://www.few.vu.nl/stagebureau/werkstuk/werkstukken/werkstuk-braun.doc> (Erişim tarihi: 12.09.2008)

<sup>64</sup> Shenoy, 2000, **a.g.m.**, s.585

## 1.2. Bağımlılık Düzeyi

Bağımlılık düzeyi de grafiksel düzey gibi sadece nitel (ya da sembolik) bilgi içerir. Bu anlamda Değerleme Ağının bağımlılık düzeyi, aritmetik işlemler içerebilen Etki Diyagramının fonksiyonel düzeyinden farklıdır. Bu düzeye ilişkin kavramlar aşağıda açıklanmaya çalışılmıştır.

### 1.2.1. Çerçeveseler

Her  $X$  değişkeni ile ilişkilendirilen çerçeve  $W_X$  olarak gösterilir. Tüm değişkenlerin sonlu sayıda çerçeveye sahip olduğu varsayılır. Bir karar değişkeninin çerçevesi, karar verici için mümkün alternatiflerden oluşur<sup>65</sup>. Bir şans değişkeninin çerçevesi şans değişkeninin alabileceği tüm değerlerdir.

### 1.2.2. Düzenlemeler\*

Değerleme Ağı çözüm sürecinde çoğunlukla değişkenler kümesi  $\mathcal{X}$ 'nin boş olmayan alt kümeleri üzerinde çalışılır.  $\mathcal{X}$ 'nin boş olmayan bir alt kümesi olarak  $h$  bilindiğinde ve  $W_h = \mathbf{X}\{W_X \mid X \in h\}$  gösterimi  $h$  içinde yer alan  $X$  değişkeni için  $W_X$ 'in kartezyen çarpımını gösterdiğinde,  $W_h$   $h$  birleşik değişkenine ilişkin mümkün değerler kümesi olarak düşünülebilir. Buna dayanarak  $W_h$ 'ye  $h$ 'nin çerçevesi denir. Dolayısıyla  $W_h$ 'nin elemanlarına da  $h$ 'nin düzenlemeleri olarak başvurulur. Bu yaklaşım  $h$ ,  $X$  gibi tek bir değişkenden oluştuğunda da geçerlidir. Bu nedenle  $W_X$ 'in elemanlarına  $X$ 'in düzenlemeleri denir. Düzenlemelerin gösterimi için  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  gibi küçük ve kalın harfler kullanılır. Ayrıca  $\mathbf{x}, \mathbf{g}$ 'nin bir düzenlemesi  $\mathbf{y}$  de  $h$ 'nin bir düzenlemesi iken  $g \cap h = \emptyset$  olduğunda  $g \cup h$  düzenlemesini göstermek için  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  yazımı kullanılır.

Bu yaklaşımı  $h$  değişkenler kümesinin bir tek değişkenden oluşmayıp boş olduğu duruma da genellemek mümkündür. Boş küme  $\emptyset$  nin tek bir düzenlemeden oluştuğu yaklaşımı benimsenerek bu düzenlemeyi göstermek için  $\blacklozenge$  sembolü kullanılır. Matematiksel olarak bu

<sup>65</sup> Shenoy, 1992, a.g.m., s.466.

\* İng. Configurations.



ifade  $W_{\diamond} = \{\diamond\}$  olarak gösterilir. Gösterimde tutarlılığın sağlanabilmesi için  $\mathbf{x}$ 'in bir düzenleme olduğunda  $\{\mathbf{x}, \diamond\} = \mathbf{x}$  olarak yazılabileceği benimsenir<sup>66</sup>.

### 1.2.3. Gösterge Değerlemeleri

Önceki kesimde gösterge değerlemeleri değişkenlerin birleşik çerçevelerine ilişkin nitel kısıtlamalar olarak tanımlanmıştı.  $s$ 'nin değişkenlerin bir alt kümesi olduğu varsayıldığında  $s$  için *gösterge değerlemesi*,  $\iota: W_s \rightarrow \{0,1\}$  halini alan bir fonksiyondur<sup>67</sup>. (Gösterge değerlemeleri problemdeki asimetriyi yansıtmak için yapay durumlara karşılık olarak kullanılır) Gösterge değerlemesi olarak sadece 0 ve 1 değerleri kabul edilir. Gösterge değerlemelerinin değerleri bir tür olasılık olarak ele alınabilir. Gösterge değerlemesini sunmanın etkili bir yolu, 1 değerine sahip çerçevenin elemanlarını tanımlamaktır. Bu durumda  $\Omega_i = \{\mathbf{x} \in W_s \mid \iota(\mathbf{x}) = 1\}$  ise  $\iota$ ,  $\Omega_i$  ile gösterilir. Burada  $\Omega_i \subseteq W_s$ 'dir. Teknik dili en aza indirmek için  $\Omega_i$ 'ya “ $s$  için gösterge değerlemesi” denir.

Kimi gösterge değerlemeleri şans değişkenlerinin tanım kümelerini kimileri de karar değişkenlerinin tanım kümelerini kısıtlar. Ek olarak bazı durumlarda kimi gösterge değerlemeleri hem karar hem de şans değişkenlerinin tanım kümelerini kısıtlayabilmektedir.

Gösterge değerlemeleri kavramı, çözüm tekniğinin hesaplama etkinliğinde can alıcı bir öneme sahiptir. Bir problemde gösterge değerlemelerini kullanarak, değişkenlerin altkümesi için *etkin çerçeve*\* tanımlanır.  $s$  için etkin çerçeve,  $s$  için çerçevenin bir alt kümesidir. Çözüm tekniğinin, artan hesaplama etkinliği kısmen, bütün çerçeveler üzerinde çalışmak yerine etkin çerçeveler üzerinde çalışmanın sonucunda ortaya çıkmaktadır<sup>68</sup>. İzleyen kesimde, değişkenlerin bir alt kümesi için etkin çerçeveyi tanımlamaya imkan sağlayacak bazı notasyon ve tanımlamalar ortaya konmuştur.

<sup>66</sup> Prakash P. Shenoy, “Binary Join Trees For Computing Marginals in The Shenoy-Shafer Architecture”, 1997, <https://kuscholarworks.ku.edu/dspace/bitstream/1808/172/1/IJAR97.pdf> (Erişim tarihi: 09.10.2008)

<sup>67</sup> Bielza ve Shenoy, **a.g.m.**, s.1560.

\* İng. Effective Frame.

<sup>68</sup> Shenoy, 2000, **a.g.m.**, s.587.

### 1.2.4. Düzenlemelerin İzdüşümü

Düzenlemelerin izdüşümü basitçe düzenlemeler içindeki fazla öğelerin çıkarılması ile elde edilir<sup>69</sup>. Örneğin,  $\{D_1, R_1, D_2, R_2\}$  biçimindeki değişkenlere ilişkin düzenleme  $\{t_3, r, b, \sim k\}$  biçiminde ise,  $\{t_3, r, b, \sim k\}$ 'nin  $\{D_1, R_1\}$ 'e izdüşümü  $\{t_3, r\}$ 'dir.  $\{t_3, r\}$  aynı zamanda  $\{D_1, R_1\}$ 'in bir düzenlemesidir.

$g$  ve  $h$ ,  $h \subseteq g$  olacak şekilde, değişkenler kümesi ise  $\mathbf{x}$   $g$ 'nin bir düzenlemesi olur. Bu durumda,  $\mathbf{x}^{\downarrow h}$  gösterimi  $\mathbf{x}$ 'ten  $h$ 'ye olan izdüşümünü ifade eder.  $\mathbf{x}^{\downarrow h}$  izdüşümü, daima  $h$ 'nin bir düzenlemesidir. Eğer  $h = g$  ve  $\mathbf{x}$ ,  $g$ 'nin bir düzenlemesi ise,  $\mathbf{x}^{\downarrow h} = \mathbf{x}$  olacaktır. Eğer  $h = \emptyset$  durumu söz konusu ise  $\mathbf{x}^{\downarrow h} = \diamond$  olur.

### 1.2.5. Gösterge Değerlemelerinin Marjinalizasyonu

$\Omega_{t_a}$ 'nın  $a$  için bir gösterge değerlemesi olduğu ve  $b \subseteq a$  olduğu varsayalım.  $\Omega_{t_a}^{\downarrow b}$  ile gösterilen  $\Omega_{t_a}$ 'nın  $b$  için marjinalizasyonu,  $b$  için aşağıda verildiği gibi bir gösterge değerlemesidir<sup>70</sup>:

$$\Omega_{t_a}^{\downarrow b} = \{\mathbf{x} \in W_b \mid (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Omega_{t_a} \text{ bazı } \mathbf{y} \in W_{a-b} \text{ için}\}.$$

### 1.2.6. Gösterge Değerlemelerinin Birleşimi

$\Omega_{t_a}$ ,  $a$  için ve  $\Omega_{t_b}$ ,  $b$  için bir gösterge değerlemesi olduğunda,  $\Omega_{t_a} \otimes \Omega_{t_b}$  biçiminde gösterilen  $\Omega_{t_a}$  ve  $\Omega_{t_b}$  birleşimi,  $a \cup b$  için bir gösterge değerlemesidir ve aşağıdaki gibi yazılır<sup>71</sup>:

$$\Omega_{t_a} \otimes \Omega_{t_b} = \{\mathbf{x} \in W_{a \cup b} \mid \mathbf{x}^{\downarrow a} \in \Omega_{t_a} \text{ ve } \mathbf{x}^{\downarrow b} \in \Omega_{t_b}\}.$$

<sup>69</sup> Prakash P. Shenoy, "Valuation-Based Systems for Bayesian Decision Analysis", **Operations Research**, Vol.40, No.3, (May-June 1992), s.469.

<sup>70</sup> Shenoy, 2000, **a.g.m.**, s.588.

<sup>71</sup> **Aynı**, s.588.

### 1.2.7. Etkin Çerçeveler

*Varsayım 1:* Herhangi bir problemde  $\Omega_{i_j}, s_j, j = 1, \dots, p$  için bir gösterge değerlemesi ise  $\{\Omega_{i_1}, \dots, \Omega_{i_p}\}$ 'nin gösterge değerlemeleri kümesidir.

*Varsayım 2:* Genelmeden herhangi bir kayıp vermeksizin  $s_1 \cup \dots \cup s_p = \neq$  dir.

(Eğer bir  $X$  değişkeni, bazı gösterge değerlemelerinin tanım kümesi içinde değilse,  $\{X\}$  için anlamsız gösterge değerlemesi  $\Omega_i$  kapsamındadır,  $\Omega_i = W_X$ ).

*Varsayım 3:*  $s$  değişkenlerin bir alt kümesidir.

Yukarıdaki varsayımlar ışığında  $s$  için etkin çerçeve  $\Omega_s$  ile gösterilir ve  $\Omega_s = (\otimes\{\Omega_{i_k} \mid s_k \cap s \neq \emptyset\})^{\downarrow s}$  olarak ifade edilir.

Söz konusu  $s$  için etkin çerçeve izleyen iki adım ile tanımlanır: Birinci adımda,  $s$ 'deki bir değişkeni kapsayan tanım kümesi içindeki gösterge değerlemeleri birleştirilir. İkinci adımda,  $s$  içinde olmayan değişkenleri çıkarma amacıyla birleştirme sonuçları marjinalize edilir.

Olasılık ve fayda değerlemelerindeki tüm sayısal bilgi yalnızca etkin çerçeveler için tanımlanır. Ayrıca, çözüm aşamasında, tüm sayısal hesaplamalar etkin çerçeveler üzerinde gerçekleştirilir. Gösterge değerlemelerinin marjinalizasyonu ve birleşimi tanımlamaları, etkin çerçeveleri gösterge değerlemeleri terimleriyle tanımlamaya da imkân tanır<sup>72</sup>.

## 1.3. Sayısal Düzey

Sayısal düzeyde, fayda ve olasılık değerlemelerinin ayrıntıları belirlenmektedir.

### 1.3.1. Fayda Değerlemeleri

$u \subseteq \neq$  olduğu varsayıldığında  $u$  için fayda değerlemesi olan  $v$ ,  $\mathbb{R}$  gerçekteki sayılar kümesi olmak üzere  $v: \Omega_u \rightarrow \mathbb{R}$  biçiminde bir fonksiyondur<sup>73</sup>.  $v$ 'nin değerleri faydalardır. Eğer  $v$ ,  $u$  için bir fayda değerlemesi ise,  $u$ ,  $v$ 'nin *tanım kümesidir*.

<sup>72</sup> Shenoy,2000, **a.g.m.**, s.588.

<sup>73</sup> Bielza ve Shenoy, **a.g.m.**, s.1560.

Her bir fayda değeri birleşik fayda değeri birleşiminin bir “faktörü”dür. Doğal olarak, birleşik fayda değeri birleşiminin tanımlanması için, fayda değerleri birleşiminin nasıl olduğunu belirlemek gerekir.

### 1.3.2. Fayda Değerlerinin Birleşimi

$h$  ve  $g$ ’nin  $\mathcal{X}$ ’in alt kümeleri olduğu,  $v_i$ ’nin  $h$  için fayda değeri,  $v_j$ ’nin  $g$  için fayda değeri olduğu varsayımları altında  $v_i \otimes v_j$  ile gösterilen  $v_i$  ve  $v_j$ ’nin birleşimi,  $h \cup g$  için,  $(v_i \otimes v_j)(\mathbf{x}) = v_i(\mathbf{x}^{\downarrow h}) + v_j(\mathbf{x}^{\downarrow g})$  biçiminde bir fayda değeri birleşimidir<sup>74</sup>. Burada tüm  $\mathbf{x} \in \Omega_{h \cup g}$  dir. Dolayısıyla fayda değerlerinin birleşimi faydaların tek tek toplanması ile elde edilir. Bu tanımlama  $v_i$  ve  $v_j$ ’nin kesin olarak  $v_i \otimes v_j$  nin toplamsal faktörleri olduğunu varsaymaktadır.  $v_i$  ve  $v_j$  çarpımsal faktörler olduğunda ise *birleşim* faydaların çarpımı olarak tanımlanacaktır<sup>75</sup>.

### 1.3.3. Olasılık Değerleri

$r \subseteq \mathcal{X}$  olduğu varsayıldığında  $r$  için bir *olasılık değeri* olan  $\rho$ ,  $\rho: \Omega_r \rightarrow [0,1]$  biçiminde bir fonksiyondur.  $\rho$ ’nun değeri olasılıklardır. Eğer  $\rho$ ,  $r$  için bir değeri ise  $r$ ,  $\rho$ ’nun *tanım kümesidir*.

Genel olarak her bir olasılık değeri, birleşik olasılık değeri birleşiminin bir “faktörü”dür. Bu nedenle, birleşik olasılık değeri tanımlayabilmek için, olasılık değerleri birleşiminin nasıl olduğunu belirlemek gerekir. Olasılık değeri birleşiminin özel bir türü olan koşullu olasılıkları tanımlama için de olasılık değerlerinin marjinalizasyonunun tanımlanması ve olasılık değerlerine bölünmesi gereklidir<sup>76</sup>.

<sup>74</sup> Shenoy,1992, a.g.m., s.469.

<sup>75</sup> Shenoy,2000, a.g.m., s.589.

<sup>76</sup> Aynı, s.589.

### 1.3.4. Olasılık Değerlemelerinin Birleşimi

Olasılık teorisi, olasılık değerlemelerinin *birleşimini* “olasılık değerlemelerini nokta çarpımı ile birleştirme” olarak tanımlar. Matematiksel olarak tanımlama izleyen biçimde gösterilebilir:  $h$  ve  $g$ ’nin  $\mathcal{X}$ ’nin alt kümeleri olduğu,  $\rho_i$ ’nin  $h$  için olasılık değerlemesi,  $\rho_j$ ’nin  $g$  için olasılık değerlemesi olduğu varsayıldığında  $\rho_i \otimes \rho_j$  veya  $\rho_j \otimes \rho_i$  ile gösterilen  $\rho_i$  ve  $\rho_j$ ’nin birleşimi,  $h \cup g$  için,  $\rho_i \otimes \rho_j(\mathbf{x}) = \rho_j \otimes \rho_i(\mathbf{x}) = \rho_i(\mathbf{x}^{\downarrow h})\rho_j(\mathbf{x}^{\downarrow g})$  biçiminde bir olasılık değerlemesidir. Burada  $\mathbf{x} \in \Omega_{h \cup g}$  dir<sup>77</sup>.

### 1.3.5. Olasılık Değerlemelerinin Marjinalizasyonu

Olasılık teorisi *marjinalizasyonu*, “bir olasılık fonksiyonunun tanım kümesinin azaltılması işlemi” olarak tanımlar.  $h$ ’nin  $\mathcal{X}$ ’in bir alt kümesi olduğu ve  $X$ ’i (karar ya da şans değişkeni) içerdiği,  $\rho$ ’nun da  $h$  için olasılık değerlemesi olduğu varsayıldığında  $\rho^{\downarrow(h-\{X\})}$  biçiminde gösterilen  $h-\{X\}$  için  $\rho$ ’nun *marjinali*,  $h-\{X\}$  için,  $\rho^{\downarrow(h-\{X\})}(\mathbf{c}) = \sum \rho(\mathbf{c}, \mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in W_X \ni (\mathbf{c}, \mathbf{x}) \in \Omega_h$  biçiminde bir olasılık değerlemesidir. Burada  $\mathbf{c} \in \Omega_{h-\{X\}}$  tir.

$\rho$ ’nun  $r$  için olasılık değerlemesi olduğu varsayıldığında yalnız ve yalnız  $\rho^{\downarrow \emptyset}(\diamond) = 1$  ise ( $\rho$ ’nun değerleri toplamı 1 ise)  $\rho$ ’nun  $r$  için *olasılık dağılımı* olduğu söylenir<sup>78</sup>.

### 1.3.6. Bölme İşlemi

Bölme işlemine koşullu olasılığı tanımlama amacıyla başvurulur.  $\alpha$ ’nın  $g$  için bir olasılık değerlemesi olduğu ve  $h \subseteq g$  olduğu varsayımı altında,  $\alpha^{\downarrow h}$  ile bölünen  $\alpha$  olarak adlandırılan ve  $g$  için bir olasılık değerlemesi olan  $\alpha / \alpha^{\downarrow h}$  bölümü  $\mathbf{r} \in \Omega_g$  olmak üzere  $\alpha / \alpha^{\downarrow h}(\mathbf{r}) = \alpha(\mathbf{r}) / \alpha^{\downarrow h}(\mathbf{r}^{\downarrow h})$  olarak tanımlanır.  $\alpha(\mathbf{r}) = \alpha^{\downarrow h}(\mathbf{r}^{\downarrow h}) = 0$  olduğunda  $\alpha / \alpha^{\downarrow h}(\mathbf{r}) = 0$  olduğu düşünülür. Diğer tüm hallerde, yukarıdaki tanımlamalardaki bölme,

<sup>77</sup> Shenoy,1992, **a.g.m.**, s.469.

<sup>78</sup> Shenoy,2000, **a.g.m.**, s.590.

iki gerçek sayının alışılmış bölmesi olarak yorumlanmalıdır. Bu nedenle tüm  $\mathbf{r} \in \Omega_g$  için,  $\alpha^{\downarrow h}(\mathbf{r}^{\downarrow h}) \geq \alpha(\mathbf{r}) \geq 0$  olduğundan  $\alpha / \alpha^{\downarrow h}(\mathbf{r})$ 'nin değerleri  $[0,1]$  aralığında yer alır<sup>79</sup>.

### 1.3.7. Koşullu Olasılıklar

Değişkenlerin birleşmemiş alt kümeleri  $a$  ve  $b$  olduğunda,  $\alpha$ 'nın  $a \cup b$  için bir olasılık dağılımı olduğu varsayıldığında  $\chi = \alpha / \alpha^{\downarrow b}$  ifadesi, “ $b$  bilindiğinde  $a$  için koşullu olasılık” olarak adlandırılır.  $a$   $\chi$ 'nin tanım kümesinin *başı* ve  $b$  ise  $\chi$ 'in *sonu* olarak adlandırılır.

$\chi = \alpha / \alpha^{\downarrow b}$ 'nin, “ $b$  bilindiğinde  $a$  için koşullu olasılık” olduğu varsayıldığında  $\chi^{\downarrow b}$  nin  $\alpha$ 'ya özdeş olduğu kolaylıkla görülür ve  $\alpha \otimes \chi^{\downarrow b} = \alpha$  yazılır. Aynı zamanda  $\chi / \chi^{\downarrow b} = \chi$  olduğu da kolaylıkla görülebilir. Daha sonra ayrıntıları verilecek olan füzyon algoritmasında gereksiz bölme işlemlerinden kaçınmak amacıyla *koşullu olasılıklara* ilişkin bu özelliklerden yararlanılır. Bir olasılık değerlemesi koşullu olduğunda, bu durum Değerleme Ağında, koşullu olasılık ile tanım kümesi arasına çizilen (tanım kümesine doğru yönelmiş) bir doğru ile belirtilir<sup>80</sup>.

### 1.3.8. Gösterge Değerlemesi ve Olasılık Değerlemesinin Birleşimi

$h$  ve  $g$ 'nin  $\mathcal{X}$ 'nin alt kümeleri olduğu,  $\iota$ 'nın  $h$  için bir gösterge değerlemesi olduğu ve  $\rho$ 'nun  $g$  için bir olasılık değerlemesi olduğu varsayıldığında  $\iota \otimes \rho$  veya  $\rho \otimes \iota$  ile gösterilen  $\iota$  ve  $\rho$ 'nun *birleşimi*,  $h \cup g$  için  $\iota \otimes \rho(\mathbf{x}) = \rho \otimes \iota(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}^{\downarrow g})$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega_{h \cup g}$  biçiminde ifade edilen bir olasılık değerlemesidir.

Bir gösterge değerlemesi ve bir olasılık değerlemesinin birleşimi işleminde, gösterge değerlemesinin değerleri etkin çerçevenin üzerinde yer aldığından ayrıca bir hesaplama gerekliliği yoktur. Yine de gösterge değerlemeleri,  $\rho$ 'nun tanım kümesinin  $g$  olduğu

<sup>79</sup> Shenoy,2000, **a.g.m.**, s.590.

<sup>80</sup> Aynı, s.590.

bilgisine dayanarak,  $l \otimes \rho$ 'nun tanım kümesinin de  $h \cup g$  olduğu biçiminde, *birleşim*'e tanım kümesi bilgisi ile katkı sağlarlar<sup>81</sup>.

Özet olarak, bir karar probleminin Değerleme Ağı gösterimi, karar değişkenleri, şans değişkenleri, gösterge değerlemeleri, olasılık değerlemeleri, fayda değerlemeleri ve bilgi kısıtlarından oluşur ve  $\Delta$  olarak

$$\Delta = \{\mathcal{X}_D, \mathcal{X}_R, \{l_1, \dots, l_p\}, \{v_1, \dots, v_m\}, \{\rho_1, \dots, \rho_n\}, \rightarrow\}.$$

ifade edilebilir.

İzleyen kesimde Değerleme Ağı anlamı ve çözümü aktarılacaktır.

#### 1.4. Değerleme Ağı Gösteriminin Anlamı ve Çözümü

Bu kesimde öncelikle fayda, gösterge ve olasılık değerlemeleri kavramları üzerinde durulacaktır. Daha sonra, *iyi tanımlanmış Değerleme Ağı*nın özellikleri ve Değerleme Ağı'nın çözümü ele alınacaktır.

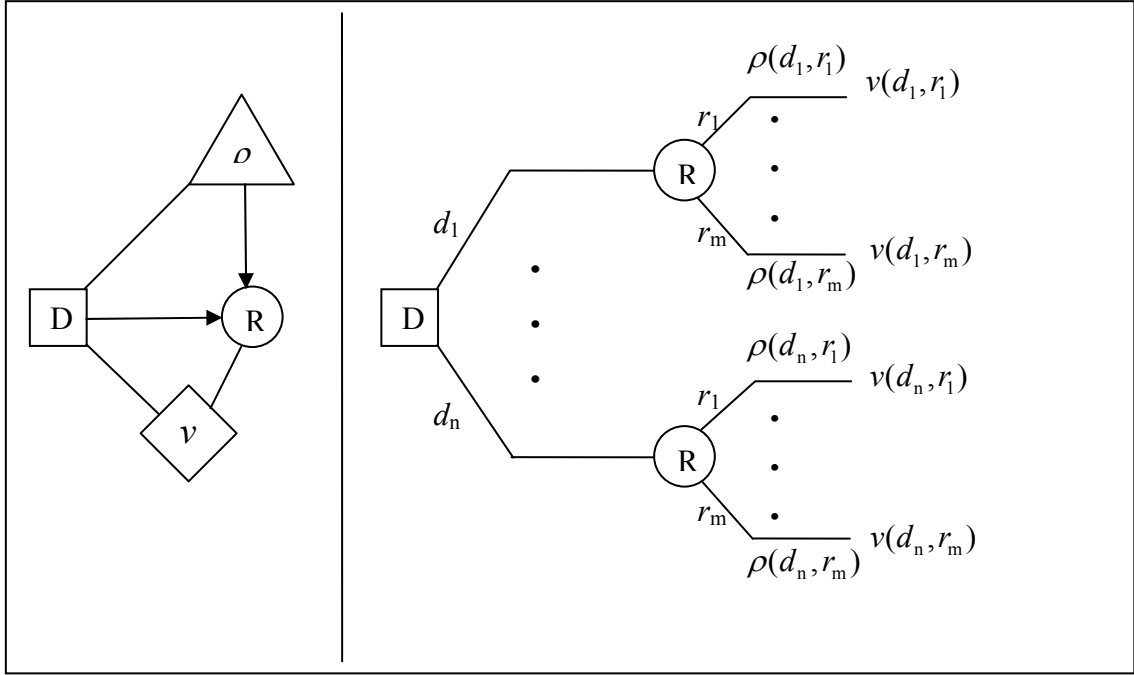
##### 1.4.1. Kanonik Değerleme Ağı Gösterimi

$\Delta_C = \{\{D\}, \{R\}, \{v\}, \{\rho\}, \rightarrow\}$  biçiminde gösterilebilen kanonik Değerleme Ağı, karar değişkeni  $D$ , şans değişkeni  $R$ , fayda değerlemesi  $v$ , olasılık değerlemesi  $\rho$  ve öncelik ilişkilerini gösteren oklardan ( $\rightarrow$ ) oluşur<sup>82</sup>. Karar değişkeninin sonlu çerçevesi  $W_D$ , şans değişkeninin sonlu çerçevesi ise  $W_R$  olarak gösterilir.  $\{D, R\}$  için bir fayda değerlemesi  $v$  iken,  $\rho$ ,  $\{D\}$  bilindiğinde  $\{R\}$  için bir koşullu olasılıktır ve  $D \rightarrow R$  olarak gösterilen bir öncelik ilişkisi mevcuttur.

Kanonik bir Değerleme Ağına ve buna karşılık gelen bir Karar Ağacına Şekil 19'da yer verilmiştir.

<sup>81</sup> Aynı, s.590.

<sup>82</sup> Shenoy, 1992, **a.g.m.**, s.472.



Şekil 19. Kanonik Değerleme Ağı ve Karşılığı Olan Karar Ağacı Gösterimi

Kanonik Değerleme Ağında  $W_D$ 'nin elemanları alternatifler (seçenekler),  $W_R$ 'nin elemanları ise doğal durumlardır.  $\{D\}$  bilindiğinde  $\{R\}$  için bir koşullu olasılık olan  $\rho$ ,  $\{R\}$  için olasılık dağılımı ailesidir ve her alternatif için  $\mathbf{d} \in W_D$  dir. Diğer bir ifadeyle şans değişkeni  $R$ 'nin olasılık dağılımı, karar verici tarafından seçilen  $\mathbf{d}$  alternatifi üzerinde koşulludur.  $D = \mathbf{d}$  bilindiğinde,  $\rho(\mathbf{d}, \mathbf{r})$  olasılığı,  $R = \mathbf{r}$ 'nin koşullu olasılığı olarak yorumlanabilir. Bu nedenle  $\{D\}$  bilindiğinde  $\{R\}$  için bir koşullu olasılık olan  $\rho$ ,

$$\text{tüm } \mathbf{d} \in W_D \text{ için } \rho^{\downarrow\{D\}}(\mathbf{d}) = 1 \quad (1)$$

biçimindedir.

$v$  fayda değerlemesi, koşullu fayda fonksiyonudur. Karar verici  $\mathbf{d}$  alternatifini seçerse ve doğal durum  $\mathbf{r}$  hakimse karar verici için fayda  $v(\mathbf{d}, \mathbf{r})$  olur.  $D \rightarrow R$  biçimindeki öncelik ilişkisinde ( $\rightarrow$ ) işareti doğal durumun gerçek değerinin yalnızca karar vericinin bir alternatifi seçmesinin ardından ortaya çıkacağını ifade etmektedir<sup>83</sup>. Kanonik karar

<sup>83</sup> Shenoy, 1992, **a.g.m.**, s.472-473.



probleminin çözümü konusunun ele alınması öncesinde anlama kolaylığı sağlayacağı düşünülen bazı kavramların tanımına yer verilmiştir.

#### 1.4.2. Fayda ve Olasılık Değerlemesinin Birleşimi

Önceki kesimde, iki fayda değerlemesinin birleşimi ve iki olasılık değerlemesinin birleşimi tanımlanmıştı. Bu kesimde bir fayda ile bir olasılık değerlemesinin birleşimi ve bir fayda ile bir gösterge değerlemesinin birleşimi tanımına yer verilecektir.

$h$  ve  $g$ 'nin  $\mathcal{X}$ 'nin alt kümeleri olduğu,  $v$ 'nin  $h$  için fayda değerlemesi ve  $\rho$ 'nun da  $g$  için olasılık değerlemesi olduğu varsayıldığında  $v \otimes \rho$  veya  $\rho \otimes v$  ile gösterilen  $v$  ve  $\rho$ 'nun birleşimi,  $h \cup g$  için,

$$v \otimes \rho(x) = \rho \otimes v(x) = v(\mathbf{x}^{\downarrow h})\rho(\mathbf{x}^{\downarrow g}), \quad \text{tüm } \mathbf{x} \in \Omega_{h \cup g} \quad (2)$$

biçiminde tanımlanan fayda değerlemesidir<sup>84</sup>.

#### 1.4.3. Fayda ve Gösterge Değerlemesinin Birleşimi

$h$  ve  $g$ 'nin  $\mathcal{X}$ 'nin alt kümeleri olduğu,  $v$ 'nin  $h$  için fayda değerlemesi ve  $\iota$ 'nın da  $g$  için bir gösterge değerlemesi olduğu varsayıldığında  $v \otimes \iota$  veya  $\iota \otimes v$  ile gösterilen  $v$  ve  $\iota$ 'nin birleşimi,  $h \cup g$  için

$$v \otimes \iota(\mathbf{x}) = \iota \otimes v(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x}^{\downarrow h}), \quad \text{tüm } \mathbf{x} \in \Omega_{h \cup g} \quad (3)$$

biçiminde tanımlanan fayda değerlemesidir.

Bir gösterge değerlemesi ile bir fayda değerlemesinin birleşiminde, gösterge değerlemesinin alacağı değerler etkin çerçevenin üzerinde yer aldığından ayrıca bir hesaplama gerek bulunmamaktadır. Bununla birlikte gösterge değerlemeleri *birleşim*

---

<sup>84</sup> Shenoy, 1992, **a.g.m.**, s.469.

için tanım kümesi bilgisine katkıda bulunur:  $v$ 'nin tanım kümesinin  $h$  olduğu bilgisine dayanarak,  $v \otimes \iota$ 'nin tanım kümesinin de  $h \cup g$  olduğu görülür.

#### 1.4.4. Fayda Değerlemelerinin Marjinalizasyonu

Önceki kesimde olasılık değerlemesi için tanımlanan marjinalizasyon, burada fayda değerlemeleri için tanımlanacaktır. Fayda değerlemelerinin marjinalizasyonunun tanımı, silinen değişkenin doğasına bağlıdır.  $h$ 'nin şans değişkeni  $R$ 'yi içerip  $\mathcal{X}$ 'nin bir alt kümesi ve  $\alpha$ 'nın ise  $h$  için bir fayda değerlemesi olduğu varsayıldığında  $\alpha^{\downarrow(h-\{R\})}$  ile gösterilen,  $h - \{R\}$  için  $\alpha$ 'nın marjinali,  $h - \{R\}$  için bir fayda değerlemesidir ve

$$\alpha^{\downarrow(h-\{R\})}(\mathbf{c}) = \sum \{\alpha(\mathbf{c}, \mathbf{r}) \mid \mathbf{r} \in \Omega_R \ni (\mathbf{c}, \mathbf{r}) \in \Omega_h\}, \quad \text{tüm } \mathbf{c} \in \Omega_{h-\{R\}} \text{ için} \quad (4)$$

olarak yazılır.

$h$ 'nin karar değişkeni  $D$ 'yi içeren  $\mathcal{X}$ 'nin bir alt kümesi olduğu ve  $\alpha$ 'nın da  $h$  için bir fayda değerlemesi olduğu varsayıldığında  $\alpha^{\downarrow(h-\{D\})}$  ile gösterilen  $h - \{D\}$  için  $\alpha$ 'nın marjinali,  $h - \{D\}$  için,

$$\alpha^{\downarrow(h-\{D\})}(\mathbf{c}) = \text{ENB} \sum \{\alpha(\mathbf{c}, \mathbf{d}) \mid \mathbf{d} \in \Omega_D \ni (\mathbf{c}, \mathbf{d}) \in \Omega_h\}, \quad \text{tüm } \mathbf{c} \in \Omega_{h-\{D\}} \text{ için.} \quad (5)$$

biçiminde bir fayda değerlemesidir<sup>85</sup>.

#### 1.4.5. Karar Fonksiyonları

$h$  için bir fayda değerlemesi olan  $\alpha$ 'dan karar değişkeni  $D$  marjinalize edildiğinde, üstü kapalı olarak bir karar fonksiyonu belirlenmiş olur.  $\alpha$ 'ya ilişkin  $D$  için karar fonksiyonu,  $\alpha^{\downarrow(h-\{D\})}(\mathbf{c}) = \alpha(\mathbf{c}, \mathbf{d})$  için  $\xi_D(\mathbf{c}) = \mathbf{d}$  eşitliğini sağlayacak  $\xi_D : \Omega_{h-\{D\}} \rightarrow \Omega_D$  biçiminde bir fonksiyondur.

<sup>85</sup> Shenoy, 2000, **a.g.m.**, s.593.

Sezgisel olarak, bir karar fonksiyonu,  $h - \{D\}$ 'de bulunan şans ve karar değişkenleri ile ilgili  $\mathbf{c}$  bilgisi temeli üzerinde  $D$ 'nin çerçevesinden seçilen bir  $\mathbf{d}$  alternatifi için kuraldır.

$\xi_D : \Omega_{h-\{D\}} \rightarrow \Omega_D$  biçimindeki bir karar fonksiyonu,  $h$  için bir gösterge değerlendirme olarak

$$\xi_D \text{ gösterimi ile tüm } (\mathbf{c}, \mathbf{d}) \in \Omega_h \text{ için } \xi(\mathbf{c}, \mathbf{d}) = \begin{cases} 1 & \text{eger } \xi_D(\mathbf{c}) = \mathbf{d} \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (6)$$

olarak kodlanabilir.

Gösterge değerlendirme  $\xi_D$ ,  $\alpha$  ile ilgili  $D$  için bir karar fonksiyonu olarak da adlandırılır<sup>86</sup>.

### 1.4.6. Strateji

$\sigma$  ile gösterilen bir *strateji*,  $\mathcal{X}_D$ 'de bulunan her bir değişken için,  $\sigma = \{\xi_D\}_{D \in \mathcal{X}-D}$  olacak şekilde, karar fonksiyonlarının toplamıdır<sup>87</sup>. Kanonik Değerleme Ağında, yalnızca bir karar değişkeni olduğu için, strateji bir karar fonksiyonudur. Ayrıca,  $D$  kararı alındığında  $R$ 'nin gerçek değeri bilinmediğinden,  $D$  için karar fonksiyonu olan  $\xi_D = \Omega_{\emptyset} \rightarrow \Omega_D$ ,  $\Omega_D$ 'de  $\mathbf{d} = \xi_D(\diamond)$  biçiminde bir düzenlemedir.

$\sigma = \{\xi_D\}_{D \in \mathcal{X}-D}$  nin bir strateji ve  $\mathbf{y}$ 'nin  $\mathcal{X}_R$ 'nin bir düzenlemesi olduğu varsayıldığında  $\sigma$  ve  $\mathbf{y}$  birlikte  $\mathcal{X}_D$ 'nin tek düzenlemesini belirler.  $\mathcal{X}_D$ 'nin bu tek düzenlemesi  $\mathbf{a}_{\sigma, \mathbf{y}}$  olarak gösterildiğinde tanımlanan  $\xi_D$  ile ilgili olarak,  $\mathbf{h}$   $\alpha$  değerinin tanım kümesi olduğunda  $\mathbf{a}_{\sigma, \mathbf{y}}^{\downarrow \{D\}} = \xi_D(\mathbf{y}^{\downarrow h-\{D\}})$  dir<sup>88</sup>.

### 1.4.7. Geçerli Silme Sırası

$\rightarrow$  işareti,  $\mathcal{X}$ 'de iyi tanımlanmış ikili ilişki üzerindeki bilgi kısıtlarını göstermektedir.  $g = \{X_1, \dots, X_k\}$ ,  $\mathcal{X}$ 'in alt kümesi olduğunda  $X_1 \rightarrow X_j$  gibi  $X_j \in g$  durumu mevcut değilse,  $X_1$ ,  $g$ 'nin *en düşük\** değeri olarak adlandırılır. Eğer yalnızca  $X_1$ ,  $g$  için en düşük

<sup>86</sup> Shenoy, 2000, **a.g.m.**, s.593.

<sup>87</sup> Shenoy, 1992, **a.g.m.**, s.472.

<sup>88</sup> Shenoy, 2000, **a.g.m.**, s.593.

\* İng. Minimal.

değer,  $X_2$ ,  $g - \{X_1\}$ 'deki en düşük değer, ..., ve  $X_{k-1}$ ,  $g - \{X_1, \dots, X_{k-2}\}$ 'deki en düşük değer ise,  $X_1 X_2 \dots X_k$ ,  $g$ 'deki değerlerin *geçerli silme sırası*\* olarak adlandırılır<sup>89</sup>.

#### 1.4.8. Değişkenlerin Alt Kümesinin Fayda Değerlemelerinden Marjinalleştirilmesi

$g$ ,  $h$ 'nin uygun bir alt kümesi olmak üzere  $g$  ve  $h$ ,  $\mathcal{X}$ 'nin boş olmayan alt kümeleri olsun.  $\alpha$ 'nın,  $h$  için bir fayda değerlemesi olduğu ve  $\rightarrow$  sembolünün  $\mathcal{X}$ 'deki ikili ilişkiyi gösteren bilgi kısıtları gösterimi olduğu varsayalım. İkili ilişki ( $\rightarrow$ )'ye göre  $g$  için  $\alpha$ 'nın marjinali,  $\alpha^{\downarrow g}$  ile gösterilir ve  $g$  için aşağıdaki gibi tanımlanan bir değerdir.

$$\alpha^{\downarrow g} = \left( \left( \left( \alpha^{\downarrow(h-\{X_1\})} \right)^{\downarrow(h-\{X_1, X_2\})} \right) \dots \right)^{\downarrow(h-\{X_1, X_2, \dots, X_k\})} \quad (7)$$

Son eşitlikte  $h - g = \{X_1, \dots, X_k\}$  olup,  $X_1, X_2, \dots, X_k$ ,  $h - g$ 'de bulunan değerlerin geçerli silme sırasıdır<sup>90</sup>.

#### 1.4.9. Kanonik Değerleme Ağının Çözümü

Beklenen faydayı enbüyükleme, kriterini kullanılarak kanonik Değerleme Ağı kolayca çözülür. Bu amaçla ilk olarak, nokta çarpımı ile  $\rho$  ve  $\nu$  birleştirilir. Elde edilen sonuç  $\{D, R\}$  için  $\rho \otimes \nu$  biçiminde bir fayda fonksiyonudur. Daha sonra  $R$ , toplama işlemi kullanılarak  $\rho \otimes \nu$ 'den marjinalize edilir. Bu işlemin sonucu  $D$  için,  $(\rho \otimes \nu)^{\downarrow\{D\}}$  biçiminde bir fayda değerlemesidir. Karar verici tarafından  $\mathbf{d}$  alternatifi seçildiyse, her bir  $(\rho \otimes \nu)^{\downarrow\{D\}}(\mathbf{d})$  değeri beklenen faydayı gösterir. Daha sonra  $D$ , enbüyükleme kullanılarak  $(\rho \otimes \nu)^{\downarrow\{D\}}$ 'den marjinalize edilir. Bunun sonucu da  $\emptyset$  için  $((\rho \otimes \nu)^{\downarrow\{D\}})^{\downarrow\emptyset}$  biçiminde bir fayda değerlemesidir.  $((\rho \otimes \nu)^{\downarrow\{D\}})^{\downarrow\emptyset}(\mathbf{d}^*)$  değeri beklenen en büyük faydadır ve optimal alternatif  $(\rho \otimes \nu)^{\downarrow\{D\}}(\mathbf{d}^*) = ((\rho \otimes \nu)^{\downarrow\{D\}})^{\downarrow\emptyset}(\mathbf{d}^*)$  olacak şekilde  $\mathbf{d}^* \in \mathcal{W}_D$ 'dir.

\* İng. Valid Deletion Sequence.

<sup>89</sup> Shenoy, 2000, **a.g.m.**, s.593.

<sup>90</sup> Aynı, s.593.

$R$ 'nin  $D$ 'den önce marjinalize edildiğine dikkat edilmelidir. Bu,  $D \rightarrow R$  öncelik ilişkisinin bir sonucudur. Karar verici mükemmel bilgiye sahip olduğunda bu durum,  $R \rightarrow D$  öncelik ilişkisi ile kanonik Değerleme Ağında gösterilecek,  $D$ ,  $R$ 'den önce marjinalize edilecek ve beklenen en büyük fayda  $((\rho \otimes v)^{\downarrow\{R\}})^{\downarrow\emptyset}(\diamond)$  biçiminde olacaktır.  $((\rho \otimes v)^{\downarrow\{R\}})^{\downarrow\emptyset}(\diamond) - ((\rho \otimes v)^{\downarrow\{D\}})^{\downarrow\emptyset}(\diamond)$  biçiminde gösterilen fark *mükemmel bilginin beklenen değeri*\* olarak adlandırılır<sup>91</sup>.

Özetle, optimal alternatif ile ilişkilendirilmiş beklenen en büyük fayda  $(\rho \otimes v)^{\downarrow\emptyset}(\diamond)$  ve alternatif  $\mathbf{d}^*$  sadece ve sadece  $(\rho \otimes v)^{\downarrow\{D\}}(\mathbf{d}^*) = (\rho \otimes v)^{\downarrow\emptyset}(\diamond)$  ise optimaldir.

#### 1.4.10. İyi Tanımlanmış Değerleme Ağı Gösterimleri

$\Delta = \{\mathcal{X}_D, \mathcal{X}_R, \{l_1, \dots, l_p\}, \{v_1, \dots, v_m\}, \{\rho_1, \dots, \rho_n\}, \rightarrow\}$  biçiminde yazılan Değerleme Ağı gösteriminin  $\Delta_C = \{\{D\}, \{R\}, \{v\}, \{\rho\}, \rightarrow\}$  biçiminde sadeleştirilmiş kanonik Değerleme Ağını temsil etmek için kullanılır.

$\Delta_C$ 'nin tanımlanabilmesi için,  $W_D$ ,  $W_R$ ,  $v$  ve  $\rho$ 'nun tanımlanması gerekir.  $\Delta$ 'nın her bir ayrı stratejisi  $\sigma$  için,  $W_D$  içinde ilgili  $\mathbf{d}_\sigma$  alternatifi vardır.  $\Delta$ 'daki her bir ayrı düzenleme  $\mathbf{y} \in \Omega_{\mathcal{X}_R}$  için  $W_R$ 'de ilgili  $\mathbf{r}_y$  düzenlemesi vardır.

$\{D, R\}$  için  $v$  fayda değerlemesini tanımlanabilmesi, bazı notasyonlarla mümkün olabilmektedir.  $\Delta$ 'da  $v_1 \otimes \dots \otimes v_m$  biçiminde birleşik fayda değerlemesi ve bu fayda değerlemesinin tanım kümelerinin tüm  $\mathcal{X}_D$ 'leri içerdiği varsayılınsın. Tipik olarak bu değerlerin tanım kümesi aynı zamanda bazı (ya da tüm) şans değişkenlerini de içerir. Birleşik fayda değerlemesinin tanım kümesindeki şans değişkenlerinin alt kümesi  $v$  ile gösterildiğinde,  $v_1 \otimes \dots \otimes v_m$ ,  $\mathcal{X}_D \cup v$  için bir fayda değerlemesi olacak şekilde  $v \subseteq \mathcal{X}_R$  olacaktır.  $\{D, R\}$  için  $v$  fayda değerlemesinin tanımı,  $\Delta$ 'nın tüm  $\sigma$  stratejisi için ve  $\mathbf{y} \in \Omega_{\mathcal{X}_R}$  düzenlemesi için

\* İng. Expected Value of Perfect Information.

<sup>91</sup> Shenoy, 2000, **a.g.m.**, s.594.

$$v(\mathbf{d}_\sigma, \mathbf{r}_y) = (v_1 \otimes \dots \otimes v_m)(\mathbf{a}_{\sigma,y}, \mathbf{y}^{\downarrow v}). \quad (8)$$

biçimindedir<sup>92</sup>.

Daha önce belirtildiği gibi  $\mathbf{a}_{\sigma,y}$ ,  $\sigma$  ve  $\mathbf{y}$  ile belirlenen  $\mathcal{X}_D$ 'nin tek düzenlemesidir.

#### 1.4.11. İyi Tanımlanmış Olasılık Değerlemeleri

$\iota_1 \otimes \dots \otimes \iota_p \otimes \rho_1 \otimes \dots \otimes \rho_n$  birleşik olasılık değerlemesi olsun ve bu olasılık değerlemesinin tanım kümesinin tüm  $\mathcal{X}_R$ 'leri içerdiği varsayalım.  $\iota_1 \otimes \dots \otimes \iota_p \otimes \rho_1 \otimes \dots \otimes \rho_n$ ,  $q \cup \mathcal{X}_R$  için bir olasılık değerlemesi olacak şekilde  $q$ ,  $q \subseteq \mathcal{X}_D$  biçiminde, birleşik olasılık değerlemesinin tanım kümesindeki karar değişkenlerinin bir alt kümesini gösterebilir. Burada dikkat edilmesi gereken nokta  $q$ 'nin boş da olabileceğidir.  $\{D, R\}$  için  $\rho$  olasılık değerlemesinin tanımı, tüm  $\sigma$  stratejileri ve  $\mathbf{y} \in \Omega_{\mathcal{X}_R}$  düzenlemeleri için aşağıdaki gibidir:

$$\rho(\mathbf{d}_\sigma, \mathbf{r}_y) = (\iota_1 \otimes \dots \otimes \iota_p \otimes \rho_1 \otimes \dots \otimes \rho_n)(\mathbf{a}_{\sigma,y}^{\downarrow q}, \mathbf{y}). \quad (9)$$

Eğer (1)'deki koşulu sağlıyorsa  $\rho$  bir koşullu olasılıktır.

Buna göre, her bir  $\sigma$  stratejisi için ancak ve ancak

$$\sum \{(\iota_1 \otimes \dots \otimes \iota_p \otimes \rho_1 \otimes \dots \otimes \rho_n)(\mathbf{a}_{\sigma,y}^{\downarrow q}, \mathbf{y}) \mid \mathbf{y} \in \Omega_{\mathcal{X}_R}\} = 1 \quad (10)$$

eşitliği sağlanıyorsa  $\{\iota_1, \dots, \iota_p, \rho_1, \dots, \rho_n\}$ 'nin  $\Delta$ 'da iyi tanımlanmış\* olduğu kabul edilir.

Genel olarak, bir gösterge ve olasılık değerlemeleri kümesinin iyi tanımlanıp tanımlanmadığının tespit edilmesi her bir  $\sigma$  stratejisi için (10) denkleminin doğrulanmasını gerektirir. Bu da çok fazla hesaplama içerir ve giderek artan sayıda strateji bulunur. Bununla birlikte, karar probleminde eğer hiçbir gösterge ya da olasılık değerlemesinin tanım kümelerinin hiçbirinin içinde bir karar değişkeni yer almadığında

<sup>92</sup> Shenoy, 2000, **a.g.m.**, s.594.

\* İng. Well Defined.

( $q = \emptyset$ ),  $l_1 \otimes \dots \otimes l_p \otimes \rho_1 \otimes \dots \otimes \rho_n$  nin olasılık dağılımı olup olmadığının kontrolünü basitleştirmek için (10) denklemini uygun şekilde sadeleştirilir.

#### 1.4.12. İyi Tanımlanmış Değerleme Ağı Gösterimi

$\Delta = \{\mathcal{X}_D, \mathcal{X}_R, \{l_1, \dots, l_p\}, \{v_1, \dots, v_m\}, \{\rho_1, \dots, \rho_n\}, \rightarrow\}$  'nin bir karar problemi olduğu varsayıldığında ancak ve ancak  $\{l_1, \dots, l_p, \rho_1, \dots, \rho_n\}$  ve  $\rightarrow$  iyi tanımlanmış ise  $\Delta$  'nin *iyi tanımlanmış* olduğu kabul edilir<sup>93</sup>.

Özetle, bir karar probleminin Değerleme Ağı gösterimi  $\Delta$  'da; fayda değerlemeleri  $\{v_1, \dots, v_m\}$  birleşik fayda fonksiyonu  $v$  'nin faktörlerini, gösterge ve olasılık değerlemeleri  $\{l_1, \dots, l_p, \rho_1, \dots, \rho_n\}$  ise birleşik olasılık dağılımı  $\rho$  'nun faktörlerini gösterir.

#### 1.4.13. Değerleme Ağı ile Karar Probleminin Çözümü

$\Delta = \{\mathcal{X}_D, \mathcal{X}_R, \{l_1, \dots, l_p\}, \{v_1, \dots, v_m\}, \{\rho_1, \dots, \rho_n\}, \rightarrow\}$ , iyi tanımlanmış bir Değerleme Ağı gösterimi ve  $\Delta_C = \{\{D\}, \{R\}, \{v\}, \{\rho\}, \rightarrow\}$  bu gösterimin kanonik Değerleme Ağı karşılığı olduğunda problemin çözümü için kanonik Değerleme Ağı  $\Delta_C$  'de iki hesaplama gerçekleştirilir:

- (1) Beklenen en büyük değer hesaplanır,  $(\rho \otimes v)^{\downarrow \emptyset} (\diamond)$ .
- (2) Optimal alternatif  $\mathbf{d}_{\sigma^*}$ ,  $(\rho \otimes v)^{\downarrow \{D\}} (\mathbf{d}_{\sigma^*}) = (\rho \otimes v)^{\downarrow \emptyset} (\diamond)$  olacak şekilde hesaplanır.

$\Delta$  ve  $\Delta_C$  arasındaki eşleşme bilindiğinden, karar probleminin  $\Delta$  çözümü için ise aşağıda belirtilen iki hesaplama gerçekleştirilir:

- (1)  $u^*$  ile gösterilen beklenen en büyük fayda,  $u^* = ((\otimes \{v_1, \dots, v_m\}) \otimes (\otimes \{l_1, \dots, l_p, \rho_1, \dots\}))^{\downarrow \emptyset} (\diamond)$  olarak hesaplanır.

<sup>93</sup> Shenoy, 1992, **a.g.m.**, s.472.

(2) En büyük beklenen fayda  $u^*$ 'ı veren optimal strateji  $\sigma^*$  hesaplanır.  $\Delta$ 'nın bir stratejisi olan  $\sigma^*$  ancak ve ancak  $(v \otimes \rho)^{\downarrow\{D\}}(\mathbf{d}_{\sigma^*}) = u^*$  ise, optimaldir.

$v$ ,  $\rho$  ve  $D$  kanonik Değerleme Ağı gösterimi  $\Delta_C$ 'ye eşdeğerdir<sup>94</sup>.

## 1.5. Füzyon Algoritması

Bu bölümde, karar problemlerinin Değerleme Ağı gösterimlerinin çözümünde kullanılan füzyon algoritması tanıtılacaktır<sup>95</sup>. Bu amaçla gerçekleştirilen tüm hesaplamalar yalnızca etkin çerçeveler üzerinde gerçekleştirilmektedir.

### 1.5.1. Etkin Çerçevelerin Hesaplanması

Bir gösterge değerlemesi, değerleri 0 ya da 1 olan bir fonksiyon olarak ele alındığında, gösterge değerlemelerinin marjinalizasyonu silinen değişkenlerin çerçevesi üzerinde Boolean toplamaya ve gösterge değerlemelerinin birleşimi Boolean çarpmaya eşittir. Marjinallerin hesaplanmasındaki Boolean toplama ve Boolean çarpma, bölgesel hesaplama izin vermektedir. Bu nedenle etkin çerçeveleri bulmak için bölgesel hesaplama kullanılabilir. Etkin çerçevelerin hesaplama işlemi Değerleme Ağı çözüm süreci boyunca yapılır. Bu hesaplama, olasılık ve fayda değerlemelerinin sayısal ayrıntıları belirlenmeden önce de yapılabilir. Daha önce belirtildiği gibi, olasılık ve fayda değerlemelerinin sayısal ayrıntıları yalnızca etkin çerçeveler için belirlenmektedir.

### 1.5.2. Değerleme Ağının Çözümü

Bir karar probleminin Değerleme Ağı ile çözümü için füzyon işlemi kullanılır. Füzyon işlemi ( $Fus$ ), silinen değişkenlerin tipine bağlı olarak farklılık gösterir.  $j$  fayda değerlemeleri  $v_1, \dots, v_j$ ,  $s$  gösterge değerlemeleri  $l_1, \dots, l_s$  ve  $k$  olasılık değerlemeleri  $\rho_1, \dots, \rho_k$ 'dan oluşan bir değerlemeler kümesi düşünülün.  $v_i$ ,  $g_i$  için bir fayda değerlemesi,  $l_i$ ,  $h_i$  için bir gösterge değerlemesi ve  $\rho_i$ ,  $r_i$  için bir olasılık değerlemesi

<sup>94</sup> Shenoy, 2000, **a.g.m.**, s.595.

<sup>95</sup> [http://fisher.osu.edu/~butler\\_267/DAPresent/SanAntonio/SA02-3.pdf](http://fisher.osu.edu/~butler_267/DAPresent/SanAntonio/SA02-3.pdf) (Erişim tarihi: 28.11.2007)



olduğunda,  $Fus_X = \{v_1, \dots, v_j, l_1, \dots, l_s, \rho_1, \dots, \rho_k\}$ ,  $\{v_1, \dots, v_j, l_1, \dots, l_s, \rho_1, \dots, \rho_k\}$  kümesinde  $X$ 'e ilişkin değerlemelerin füzyonundan sonraki değerlemeler toplamını gösterir.  $Fus_X = \{v_1, \dots, v_j, l_1, \dots, l_s, \rho_1, \dots, \rho_k\}$  iki farklı durumda aşağıda gibi tanımlanır.

*Durum 1:*  $D$ ,  $g_1 \cup \dots \cup g_j \cup h_1 \cup \dots \cup h_s \cup r_1 \cup \dots \cup r_k$ 'da bir karar değişkeni ise,  $Fus_D \{v_1, \dots, v_j, l_1, \dots, l_s, \rho_1, \dots, \rho_k\}$  aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$v = \otimes \{v_i \mid D \in g_i\}, \quad g = \cup \{g_i \mid D \in g_i\},$$

$$\rho = (\otimes \{l_i \mid D \in h_i\}) \otimes (\otimes \{\rho_i \mid D \in r_i\}),$$

$$r = (\cup \{h_i \mid D \in h_i\}) \cup (\cup \{r_i \mid D \in r_i\}) \text{ ve}$$

$\zeta_D$ ,  $v$  ile ilgili  $D$  için, karar fonksiyonunun gösterge değerlemesini temsil etmek üzere;

$$Fus_D \{v_1, \dots, v_j, l_1, \dots, l_s, \rho_1, \dots, \rho_k\} = \{v_i \mid D \notin g_i\} \cup \{v^{\downarrow(g-\{D\})}\} \cup \{l_i \mid D \notin h_i\} \cup \{\rho_i \mid D \notin r_i\} \cup \{(\rho \otimes \zeta_D)^{\downarrow((r \cup g)-\{D\})}\} \quad (11)$$

olarak yazılır.

Füzyon işleminden sonra, değerler kümesi ele alınarak izleyen biçimde değiştirilir. Tanım kümelerinde  $D$ 'yi içermeyen gösterge, fayda ve olasılık değerlemeleri değişmeden bırakılır. Tanım kümelerinde  $D$ 'yi içeren tüm fayda değerlemeleri birbirleriyle birleştirilir ve ortaya çıkan fayda değerlemesi  $v$ ,  $D$  tanım kümesinden çıkarılacak şekilde en büyükleme yardımıyla marjinalize edilir. “ $D$  için karar fonksiyonu” ile ilgili olarak yeni bir gösterge değerlemesi  $\zeta_D$  oluşturulur. Tanım kümelerinde  $D$ 'yi içeren tüm olasılık ve gösterge değerlemeleri birbirleriyle birleştirilir ve ortaya çıkan olasılık değerlemesi  $\zeta_D$  ile birleştirilir ve elde edilen sonuç  $D$  tanım kümesinden çıkarılacak şekilde marjinalize edilir.

(11) denkleminde,  $\zeta_D$ ,  $D$  için karar fonksiyonunun gösterge değerlemesi olduğundan,  $g \subseteq r$  ise, (11) denkleminde  $(\rho \otimes \zeta_D)^{\downarrow((r \cup g)-\{D\})}$ 'nin hesaplanması sırasında ne  $\zeta_D$ 'nin birleştirilmesine ne de  $D$ 'nin marjinalizasyonu işlemine ihtiyaç duyulur. (6) eşitliğindeki  $\zeta_D$ 'nin tanımı kullanılarak, aşağıdaki eşitlik yazılabilir,

$$\text{tüm } \mathbf{c} \in \Omega_{r-\{D\}} \text{ için, } (\rho \otimes \zeta_D)^{\downarrow((r \cup g)-\{D\})}(\mathbf{c}) = \rho(\mathbf{c}, \zeta_D(\mathbf{c}^{\downarrow(g-\{D\})})). \quad (12)$$

Eşitlikte  $\zeta_D$ ,  $v$ 'ye ilişkin  $D$  için karar fonksiyonudur. Bir başka ifadeyle,  $(\rho \otimes \zeta_D)^{\downarrow((r \cup g) - \{D\})}$ ,  $\rho$ 'nun,  $r$ 'den  $r - \{D\}$ 'ye bir izdüşümüdür.

(11) denkleminde, hiçbir olasılık ve gösterge değerlemesi tanım kümelerinde  $D$ 'yi içermediğinde, (11) denklemi

$$Fus_D \{v_1, \dots, v_j, l_1, \dots, l_s, \rho_1, \dots, \rho_k\} = \{v_i \mid D \notin g_i\} \cup \{v^{\downarrow(g - \{D\})}\} \cup \{l_1, \dots, l_s\} \cup \{\rho_1, \dots, \rho_k\} \quad (13)$$

olarak sadeleştirilir.

(13) denklemindeki  $v$  ve  $g$  (11) denkleminde tanımlandığı gibidir. Füzyondan sonra, değerler kümesi izleyen şekilde değişir. Tanım kümelerinde  $D$ 'yi içeren tüm fayda değerlemeleri birbirleriyle birleştirilir ve  $v$  biçiminde sonuçlanan fayda değerlemesi marjinalize edilir,  $D$  tanım kümesinden silinir. Tanım kümelerinde  $D$ 'yi içermeyen gösterge, fayda ve olasılık değerlemelerinde herhangi bir değişiklik olmaz.

*Durum 2:*  $R = g_1 \cup \dots \cup g_j \cup h_1 \cup \dots \cup h_s \cup r_1 \cup \dots \cup r_k$  da bir şans değişkeni ise,

$Fus_R \{v_1, \dots, v_j, l_1, \dots, l_s, \rho_1, \dots, \rho_k\}$  aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$v = \otimes \{v_i \mid R \in g_i\}, \quad g = \cup \{g_i \mid R \in g_i\},$$

$$\rho = (\otimes \{l_i \mid R \in h_i\}) \otimes (\otimes \{\rho_i \mid R \in r_i\}),$$

$$r = (\cup \{h_i \mid R \in h_i\}) \cup (\cup \{r_i \mid R \in r_i\}) \text{ olmak üzere}$$

$$Fus_R \{v_1, \dots, v_j, l_1, \dots, l_s, \rho_1, \dots, \rho_k\} = \{v_i \mid R \notin g_i\} \cup \{[v \otimes (\rho / \rho^{\downarrow(r - \{R\})})]^{\downarrow((g \cup r) - \{R\})}\} \cup \{l_i \mid R \notin h_i\} \cup \{\rho_i \mid R \notin r_i\} \cup \{\rho^{\downarrow(r - \{R\})}\} \quad (14)$$

biçiminde ifade edilir.

Bu durumda, füzyondan sonra, değerlerin kümesi izleyen şekilde değişir. Tanım kümelerinde  $R$ 'yi içermeyen gösterge, fayda ve olasılık değerlemeleri değişmeden kalır. Yeni bir olasılık değerlemesi olarak  $\rho^{\downarrow(r - \{R\})}$  oluşturulur. Son olarak, tanım kümeleri  $R$ 'yi içeren tüm gösterge ve olasılık değerlemeleri birleştirilir, sonuçta elde edilen olasılık değerlemesi, oluşturulan yeni olasılık değerlemesine bölünür, tanım kümeleri  $R$ 'yi içeren olasılık değerlemesi sonucu ile fayda değerlemeleri birleştirilir ve sonunda fayda

değerlemesi  $R$  tanım kümesinde olmayacak şekilde marjinalize edilir. Kimi durumlarda eşitlik (14) daha etkin hesaplamalara olanak verecek şekilde düzenlenebilir. Bu tür durumlardan üç tanesi aşağıda örneklenmiştir:

*Durum 2.1:* Kimi durumlarda,  $\rho^{\downarrow(r-\{R\})}$ , değerleri birbirine eşit olasılık değerlemesidir. Örnek olarak bu durumun ortaya çıkması için,  $g_1 \cup \dots \cup g_j \cup h_1 \cup \dots \cup h_s \cup r_1 \cup \dots \cup r_k$  ifadesinde içindeki  $R$  tek şans değişkeni ya da  $\rho$ ,  $r - \{R\}$  bilindiğinde  $R$  için bir koşullu olasılık ise meydana gelir. Bu tür durumlarda (14) eşitliği aşağıdaki biçimde sadeleştirilir.

$$Fus_R \{v_1, \dots, v_j, l_1, \dots, l_s, \rho_1, \dots, \rho_k\} = \{v_i \mid R \notin g_i\} \cup \{(v \otimes \rho)^{\downarrow((g \cup r) - \{R\})}\} \cup \{l_i \mid R \notin h_i\} \cup \{\rho_i \mid R \notin r_i\} \quad (15)$$

Eşitlikte yer alan  $v, \rho, g$  ve  $r$  (14) eşitliğinde tanımlandığı gibidir.

*Durum 2.2:* Fayda değerlemelerinin hiçbirinin  $R$ 'yi tanım kümelerinde içermediği varsayımı ikinci durumu oluşturmaktadır. Bu durumda (14) eşitliği izleyen biçimde sadeleştirilebilir<sup>96</sup>.

$$Fus_R \{v_1, \dots, v_j, l_1, \dots, l_s, \rho_1, \dots, \rho_k\} = \{v_1, \dots, v_j\} \cup \{l_i \mid R \notin h_i\} \cup \{\rho_i \mid R \notin r_i\} \cup \{\rho^{\downarrow(r-\{R\})}\}. \quad (16)$$

Eşitlikte  $\rho$  ve  $r$  (14) eşitliğinde tanımlandığı gibidir. Füzyondan sonra, fayda değerlemeleri ile tanım kümeleri  $R$ 'yi içermeyen gösterge ve olasılık değerlemeleri değişmeden kalır. Tanım kümeleri  $R$ 'yi içeren gösterge ve olasılık değerlemeleri birbirleriyle birleştirilir ve olasılık değerlemesi olarak sonuçlanıp  $R$  tanım kümesinden çıkarılacak şekilde marjinalize edilir.

*Durum 2.3:*  $R$ 'ni tüm  $j$  fayda değerlemelerinin tüm tanım kümelerinde yer aldığı varsayıldığında (14) eşitliği aşağıdaki gibi sadeleştirilir<sup>97</sup>.

$$Fus_R \{v_1, \dots, v_j, l_1, \dots, l_s, \rho_1, \dots, \rho_k\} = \{(v \otimes \rho)^{\downarrow((g \cup r) - \{R\})}\} \cup \{l_i \mid R \notin h_i\} \cup \{\rho_i \mid R \notin r_i\} \quad (17)$$

Eşitlikte yer alan  $v, \rho, g$  ve  $r$  yine (14) eşitliğinde tanımlandığı gibidir. Füzyon sonrası, değerler kümesinde gerçekleşen değişiklikler izleyen biçimde ifade edilebilir. Tüm fayda

<sup>96</sup> Shenoy, 1992, **a.g.m.**, s.475.

<sup>97</sup> Aynı, s.475.

değerlemeleri ve tanım kümeleri  $R$ 'yi içeren gösterge ve olasılık değerlemeleri birbirleriyle birleştirilir ve fayda değerlemesi olarak sonuçlanıp  $R$  tanım kümesinde olmayacak şekilde marjinalize edilir. Tanım kümeleri  $R$ 'yi içermeyen gösterge ve olasılık değerlemeleri değişmeden kalır.

Bu açıklamalardan sonra asıl teorem aşağıdaki biçimde ifade edilir:

**Füzyon Algoritması Teoremi :**  $\Delta = \{\mathcal{X}_D, \mathcal{X}_R, \{l_1, \dots, l_p\}, \{v_1, \dots, v_m\}, \{\rho_1, \dots, \rho_n\}, \rightarrow\}$  bir karar probleminin iyi tanımlanmış Değerleme Ağı gösterimi ve  $X_1, X_2 \dots X_k$  biçimindeki sıralama da  $\mathcal{X} = \mathcal{X}_D \cup \mathcal{X}_R$  içinde yer alan değişkenlerin geçerli silme sırası olduğunda;

$$\begin{aligned} & (\otimes(\otimes\{v_1, \dots, v_m\}) \otimes (\otimes\{l_1, \dots, l_p, \rho_1, \dots, \rho_n\})) \downarrow^{\otimes} (\diamond) = \\ & = (\otimes \text{Fus}_{X_k} \{ \dots \text{Fus}_{X_2} \{ \text{Fus}_{X_1} \{ v_1, \dots, v_m, l_1, \dots, l_p, \rho_1, \dots, \rho_n \} \} \} \} ) (\diamond)^{98} \end{aligned}$$

biçimindedir.

Teoremin ispatı ekte verilmiştir.

## 2. ARDIŞIK KARAR DİYAGRAMI

Karar problemlerinin grafik olarak ele alınması konusundaki diğer teknik *Ardışık Karar Diyagramı* (ya da kısaca *Ardışık Diyagram*) olarak adlandırılmıştır. Covaliu ve Oliver tarafından geliştirilen *Ardışık Karar Diyagramları* asimetrik yapıyı ve karar ardışıklığını Karar Ağaçları kadar etkili olarak ortaya koyarken grafiksel gösterimi Etki Diyagramları kadar öz olarak yansıtabilmektedir.

Bu teknikte asimetrik karar problemlerinin gösterimi, formülasyonu ve çözümü için Etki Diyagramı, *Ardışık Karar Diyagramı* ve formülasyon tablosundan oluşan birleşik bir yapı kullanılmaktadır.

<sup>98</sup> Shenoy, 2000, **a.g.m.**, s.595-597.

## 2.1. Grafiksel Gösterim

Ardışık Karar Diyagramı tekniğinde, karar probleminin gösterimi için, Etki Diyagramı ve Ardışık Karar Diyagramı gösterimlerinin her ikisi de birlikte kullanılmaktadır. Bir önceki bölümde aktarılan Etki Diyagramı tekniğinde, grafik gösterimden karar probleminin asimetrik yapısı kolayca algılanamazken, problemde yer alan değişkenler arasındaki bağımlılık ilişkileri net bir biçimde görülebilmektedir. Ardışık Karar Diyagramına, problemin asimetrik ve ardışık yapısı ile problemdeki bilgi akışını yansıtmak için başvurulur<sup>99</sup>. Etki Diyagramı gösterimine ise, problemdeki koşullu bağımsızlık varsayımları ile birleşik olasılık dağılımı yayılımının açığa çıkarılabilmesi amacıyla tamamlayıcı olarak yer verilmektedir<sup>100</sup>.

Ardışık Karar Diyagramı, karar problemindeki değişkenleri düğümler, değişkenlerin gerçekleşme sıralarını ise yönlendirilmiş yaylar ile gösteren döngüsüz bir grafik olarak tanımlanabilir. Ardışık Karar Diyagramı gösteriminde de değişkenleri temsil etmek için Etki Diyagramında kullanılan düğüm kümeleri kullanılır. Buna göre, karar değişkenleri kare ya da dikdörtgen, rassal değişkenler (şans değişkenleri) daire, deterministik değişkenler çift çizgili daire ve fayda değeri düzgün dörtgen ile temsil edilen düğümler biçiminde gösterilir. Düğümler arasındaki yaylar, yayın işaret ettiği düğümde ortaya çıkacak değerın yayın çıktığı düğüm sonrasında gerçekleşeceğini gösterir. Buna göre yaylar, değişkenlerin ortaya çıkma sırasını göstermektedir. Bir düğümden birden fazla yay çıkıyorsa, bu yaylar bir sonraki düğümün, bir önceki düğümde hangi değerin gerçekleşeceğini bağlı olarak değişeceğini gösterir. Bir önceki düğümde gerçekleşen değer bir sonraki düğümde ortaya çıkacak değeri değiştiriyorsa, yaylar üzerine bir sonraki düğümün hangi durumda ortaya çıkacağına ilişkin etiketler (açıklayıcı notlar) yerleştirilir. Bu anlamda Ardışık Karar Diyagramı Etki Diyagramı kadar özdür. Aynı zamanda, yaylar üzerindeki etiketler ile karar probleminde gerçekleşebilecek tüm senaryoları da açık olarak gösterebildiğinden, Karar Ağacı gösteriminin güçlü yanı olan tüm senaryoları açık olarak gösterme ve asimetriyi yansıtma özelliğini de taşımaktadır.

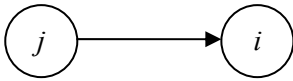
<sup>99</sup> [http://web.mit.edu/wsimmons/www/thesis/Simmons\\_PhD\\_Thesis.pdf](http://web.mit.edu/wsimmons/www/thesis/Simmons_PhD_Thesis.pdf) (Erişim tarihi: 15.11.2006)

<sup>100</sup> Thomas D.NIELSEN ve Finn V. JENSEN, "Advances in Decision Graphs", <http://www.cs.aau.dk/~tdn/papers/nielsen-jensen-04-book.pdf> (Erişim tarihi: 02.06.2006)

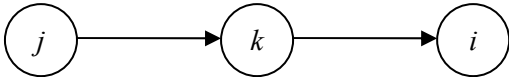
Ardışık Karar Diyagramında problemi grafiksel olarak modellemedeki ilk aşama, problemdeki amacın, belirsizlik kaynaklarının ve verilecek kararların belirlenmesidir. Etki Diyagramı ya da ardışık diyagramın çizilmesinde özellikle tercih edilen bir sıra yoktur. Karar vericinin tercihine bağlı olarak biri önce, diğeri sonra veya her ikisi birden eşzamanlı olarak çizilebilir. Grafiksel modeller yeterli olgunluğa erişinceye kadar yeniden gözden geçirilmeli ve bu amaçla model yeterli olana kadar diyagramlar arasında ileri-geri gidilebilmelidir<sup>101</sup>.

## 2.2. Terminoloji, Notasyon ve Temel Özellikler

Ardışık Karar Diyagramındaki düğüm kümesi  $N$  ile gösterilir.  $N$  kümesi sırasıyla karar, şans/deterministik ve değer düğümlerini temsil eden  $D$ ,  $C$  ve  $V$  kümelerinden oluşur. Her bir tip düğüm için  $i = 1, 2, \dots, N$  biçiminde tek bir düğüm indeksi kullanılır. Grafik,  $G = (N, A)$  biçiminde gösterilir, bu gösterimde  $N$  düğümleri  $A$  ise yönlü yayları temsil etmektedir.  $(j, i) \in A$  için  $\{j\}$  düğüm kümesi  $i$  düğümünün *doğrudan öncelleridir* ve  $P(i)$  ile gösterilir.



$j$ 'den  $i$ 'ye doğru yönlendirilmiş bir yol için  $\{j\}$  düğüm kümesi  $i$  düğümünün *öncelleridir* ve  $P'(i)$  ile gösterilir.



$P'(i) \supseteq P(i)$  olduğu açıktır.  $i$  düğümünün *doğrudan ardılları*  $S(i)$  ve *ardılları*  $S'(i)$  benzer biçimde tanımlanır. Ardılı olmayan bir düğüm *batık (gömülü) düğüm\** olarak, önceli olmayan bir düğüm ise *kaynak düğüm\*\** olarak ifade edilir. Benzer terminoloji Etki Diyagramında da kullanıldığından bir karışıklığı önlemek için aynı kavramları ifade etmek üzere Ardışık Karar Diyagramlarında  $S$  alt indisi, Etki Diyagramlarında  $I$  alt indisi kullanma yolu benimsenmiştir. Böylece Ardışık Karar Diyagramında  $P_S(i)$ ,  $i$  düğümünün doğrudan öncelini ifade ederken; Etki Diyagramında  $P_I(i)$ ,  $i$  düğümünün doğrudan öncelini ifade etmek için kullanılır.

<sup>101</sup> Zvi Covaliu ve Robert M. Oliver, "Representation and Solution of Decision Problems Using Sequential Decision Diagrams", **Management Science**, Vol.41, No.12, (December 1995), s.1864-1865.

\* İng. Sink Node.

\*\* İng. Source Node.

İzleyen özelliklere sahip yönlendirilmiş, döngüsüz bir grafik *uygun* bir Ardışık Karar Diyagramı olarak kabul edilir:

- 1) Tek batık düğüm değer düğümüdür ( $i = v$ )
- 2) Yalnızca tek bir kaynak düğüm vardır (*başlangıç düğümü* olarak adlandırılır,  $i = 1$ )
- 3) Tüm karar düğümlerini içeren yönlendirilmiş bir yol vardır.

Herhangi döngüsüz grafikte olduğu gibi ardışık diyagram da düğümlerin, kısmi sıralamasını gösterir<sup>102</sup>. Yönlendirilmiş bir yol üzerinde karar ve şans düğümlerinin öncelik ve sonralık sırasını belirten *kısmi sıralama*<sup>\*\*\*</sup> her iki diyagramda düğümler arasındaki okların yönü ile belirlenir. Etki Diyagramındaki kısmi sıralama  $<_1$  ile, Ardışık Karar Diyagramındaki kısmi sıralama  $<_s$  ile gösterildiğinde  $C$  bir şans düğümü,  $D$  bir karar düğümü iken,  $C <_1 D$  gösterimi, Etki Diyagramında şans düğümü  $C$ 'nin karar düğümü  $D$ 'den önce geldiğini ifade eder. Eğer  $C <_1 D$  iken  $C <_s D$  ise başka bir ifade ile her iki grafikte de değişken sıralaması aynı ise grafiklerin *uyumlu*<sup>\*</sup> olduğu söylenir<sup>103</sup>.

$(i, j)$  düğüm çiftini oluşturan düğümlerin sıralanması konusunda

- Sıralı  $i, j$ 'nin öncelidir ( $i \in P'(j)$ )
- Sıralı  $j, i$ 'nin öncelidir ( $j \in P'(i)$ )
- Sıralı değil, öncelikten söz edilemez

gibi üç farklı durum söz konusudur.

Herhangi bir  $S$  ardışık diyagramının ya da  $S$  ile aynı düğüm kümesine sahip  $I$  Etki Diyagramına ilişkin temel özellikler aşağıda verilmiştir.

- a)  $S$ 'deki karar düğümleri kümesi tümüyle sıralıdır ve söz konusu tümüyle sıralama  $I$  Etki Diyagramı tarafından paylaşılır.
- b)  $j$  karar düğümünün ardıl düğümleri ile etiketlenmiş tüm değişkenler  $D_j$  kararı verilmeden önce gözlenemez.

<sup>102</sup> Covaliu ve Oliver **a.g.m.**, s.1865.

<sup>\*\*\*</sup> İng. Partial Order.

<sup>\*</sup> İng. Compatible.

<sup>103</sup> Bielza ve Shenoy, **a.g.m.**, s.1565.

c)  $j$  karar düğümünün öncelleri içinde başlangıç düğümünden  $j$ 'ye uzanan yalnızca *bir* yönlendirilmiş yol üzerinde bulunanlar,  $D_j$  kararı verilmeden önce gerçekleşir ve gözlenir.

d)  $S$ 'deki  $j$  karar düğümünün tüm öncelleri,  $I$  Etki Diyagramındaki  $j$ 'nin de (doğrudan) önceli olmalıdır. Bu özellik matematiksel biçimde

$$i \in P'_S(j) \Rightarrow i \in P_I(j) \Rightarrow i \in P'_I(j), \quad \forall i \in C \cup D, j \in D \quad (18)$$

olarak yazılır<sup>104</sup>.

Yukarıda sıralanan ortak özellikler grafik üzerinde bilginin akışı ve iletimine ilişkin benzerlik ve farklılıkları göstermektedir.

### 2.3. Düğüm Geçmişleri\*

Ardışık Karar Diyagramında yer alan her bir düğüm bir *veri çerçevesi*\*\* ile ilişkilendirilip bir formülasyon tablosunda düzenlenmektedir. Bu bağlamda  $i$  düğümü için kullanılan bazı notasyon izleyen kesimde verilmiştir.

$i$  düğümünde ortaya çıkan değer  $r_i$ ,  $i$ 'nin durum uzayı  $\Omega_i$  olduğunda  $r_i \in \Omega_i$  biçimindedir.

$\Omega_i$  durum uzayının

- karar düğümü için olası alternatifler kümesini
- şans düğümü için ilgili rassal değişkenin örnek uzayını
- değer düğümü için değer fonksiyonunun değer aralığını

temsil ettiği unutulmamalıdır.  $\Omega_i$  durum uzayının alabileceği değerler konusunda herhangi bir kısıtlama bulunmayıp, bunlar kesikli, sürekli ya da karışık olabilmektedir.

Veri çerçevesi içinde, bir düğümüne ilişkin *düğüm fonksiyonları*\*\* yer alır. Düğüm fonksiyonları,  $i$  düğümüne yönlendirilmiş yoldaki değişkenlere ilişkin düğümlerin sırasına bağlıdır ve gerçekleşen değerlerle ilişkilidir<sup>105</sup>. Düğüm fonksiyonları düğüm tipine göre farklılık gösterir. Genel olarak düğüm fonksiyonu ilgili düğümüne nasıl ulaşıldığına

<sup>104</sup> Covaliu ve Oliver **a.g.m.**, s.1866.

\* İng. Node Histories.

\*\* İng. Frame of Data.

\*\* İng. Node Functions.

<sup>105</sup> **Aym**, s.1866.



bağlıdır<sup>106</sup> (örnek olarak şans düğümü için düğüm fonksiyonu koşullu olasılık dağılımıdır). Düğümlerin gerçekleşme sırası “*i* düğümündeki geçmiş”tir ve  $H_i$  ile gösterilir.  $H_i$ , 2 satırlı bir matristir. Bu matrisin 1. satırında *i* düğümüne giden yönlendirilmiş yoldaki düğüm sırası listelenir. Grafik gösterimde *i* düğümü *j* düğümünden önce ise  $H_i$ ’de de *i*, *j*’den önce yer alır. Düğüm sırası, başlangıç düğümü ile başlar ve *i* düğümünü hariç bırakır.  $H_i$ ’nin 1. satırındaki düğüm kümesi  $N(H_i)$  ile gösterilir. Matrisin 2. satırı ise, 1. satırda yer alan düğümlerin gerçekleşen değerlerini yansıtır.

Düğüm geçmişinin ardışık diyagramdaki yönlendirilmiş bir tek yolla ilişkili olmasına karşılık yönlendirilmiş yol pek çok düğüm geçmişi ile ilişkili olabilir. *i* düğümündeki geçmiş farklı genişliklerde olabilir ( $H_i$ ’nin sütun sayısı farklı olabilir). Uygulamada düğüm geçmişlerinin tek tip genişlikte gösterilmeleri daha uygun olup, bu gösterim herhangi bir geçmişte ( $H_i$ ) ortaya çıkabilecek tüm düğümlerin  $H_i$  satırında birleşik olarak listelenmesiyle gerçekleştirilir. *i* düğümüne giden belirli bir yolda yer almayan bir düğümle ilişkin değer için matrisin 2. (gerçekleşen değer) satırında “ – ” işaretine yer verilir. *i* düğümündeki geçmişlerin bu biçimde ifadesi standartlaştırılmış gösterimdir<sup>107</sup>. Çalışmanın izleyen kesimlerinde “geçmiş” kelimesi “standartlaştırılmış geçmiş”e karşılık kullanılacaktır.

## 2.4. Düğüm Fonksiyonları

Ardışık karar diyagramlarındaki düğüm fonksiyonları; *durum uzayı fonksiyonu*, *olasılık dağılım fonksiyonu*, *bir sonraki düğüm fonksiyonu* ve *gerçekleşen geri dönüş fonksiyonu* olarak sıralanır. Etki Diyagramlarında bu fonksiyonların bir karşılığı bulunmamaktadır.

### 2.4.1. Durum Uzayı Fonksiyonu\*

Ardışık Karar Diyagramında da *i* düğümünün alabileceği değerlerden oluşan küme *durum uzayı* olarak ifade edilir ve  $\Omega_i$  ile gösterilir. Fakat Etki Diyagramı için tanımlanan durum

<sup>106</sup> Bielza ve Shenoy, **a.g.m.**, s.1566.

<sup>107</sup> Covaliu ve Oliver **a.g.m.**, s.1866.

\* İng. State Space Function.

uzayından farklı olarak Ardışık Karar Diyagramının durum uzayı ( $\Omega_i$ ), geçmişe ( $H_i$ 'ye) bağlıdır. Bu nedenle geçmişin düğüm fonksiyonu olarak  $\Omega_i(H_i)$  biçiminde gösterilir.

Düğüm geçmişleri üzerindeki düğüm fonksiyonlarının bağımlılık düzeylerini sayısallaştırmak ve formülasyonda basitlik sağlamak amacıyla  $H_i$ 'deki *minimal düğüm* (ya da düğümlere karşılık gelen değişkenler) kümesi ve *minimal düğüm kümesi fonksiyonu* belirlenir.  $i$  düğümünün durum uzayı fonksiyonu için minimal düğüm kümesi  $M_{\Omega}(i)$  olarak gösterilir<sup>108</sup>.

#### 2.4.2. Olasılık Dağılım Fonksiyonu

Şans düğümü  $i \in C$  için,  $f_i(r_i | H_i)$  olarak gösterilen bir koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu tanımlanır. Durum uzayı fonksiyonunda olduğu gibi  $f_i$ ,  $H_i$  üzerinde koşullu ise,  $H_i$ 'deki düğümlerin (değişkenlerin) minimal düğüm kümesi belirlenir ki bu da  $M_f(i)$  ile gösterilen koşullu dağılımdır. Tanıma göre, koşullu dağılım  $M_f(i)$ , Etki Diyagramında şans düğümü  $i$ 'nin doğrudan öncelleri kümesi ile aynıdır ( $M_f(i) = P_i(i)$ )<sup>109</sup>.

#### 2.4.3. Bir Sonraki Düğüm Fonksiyonu\*

$i$  düğümünden sonra gerçekleşen düğüm  $n_i(H_i, r_i)$  olarak gösterilir ve “ $i$  düğümündeki bir sonraki düğüm fonksiyonu” olarak adlandırılır. Çoğu uygulamada “bir sonraki düğüm fonksiyonu” düğüm geçmişlerinden bağımsız olabilir. Bir sonraki düğüm fonksiyonları ardışık diyagramdan doğrudan okunabilir; nadiren  $n_i$ ,  $H_i$ 'ye bağlı olduğunda öncel durum uzaylarının ilgili alt kümeleri  $\Omega_i$ 'nin uygun alt kümeleri ile birlikte  $i$  düğümünden çıkan dallar üzerinde açıklayıcı notlar ile gösterilir. Daha önceden tanımlanan düğüm fonksiyonlarında yapıldığı gibi, bir sonraki düğüm fonksiyonu için de minimal düğüm kümesi  $M_n(i)$  tanımlanır.  $n_i$  geçmişe bağlı olduğunda  $M_n(i)$  ardışık diyagramın incelenmesiyle kolaylıkla belirlenebilir.

<sup>108</sup> Covaliu ve Oliver **a.g.m.**, s.1866.

<sup>109</sup> **Aym**, s.1867.

\* İng. Next Node Function.

İzleyen eşitlik  $i$  düğümünde gerçekleşen değer  $r_i$  olduğunda  $H_i$  (geçmiş) ile  $n_i(H_i, r_i)$  (bir sonraki düğümde elde edilen geçmiş) arasındaki ilişkiyi ifade etmektedir.

$$H_{n_i(H_i, r_i)} = \begin{bmatrix} i \\ H_i, r_i \end{bmatrix} \quad (19)$$

Eğer  $k$  düğümü  $i$  düğümünün önceli değil ancak  $n_i$  düğümünün önceli ise, (19) nolu ifadeye  $\begin{bmatrix} k \\ - \end{bmatrix}$  biçimindeki bir sütun kural olarak  $\begin{bmatrix} i \\ r_i \end{bmatrix}$  sütununun arkasına eklenir<sup>110</sup>.

#### 2.4.4. Gerçekleşen Geri Dönüş Fonksiyonu\* ve Değer Fonksiyonu Ayrıştırması\*\*

$i$  düğümünde gerçekleşen değer  $r_i$  olduğunda,  $i$  düğümünde *gerçekleşen geri dönüş*,  $i$  düğümünün getirisi (kazanç ya da ödeme) olarak tanımlanabilir. Genel olarak  $i$  düğümünde *gerçekleşen geri dönüş fonksiyonu* düğüm geçmişine bağlıdır. Bu nedenle  $v_i(H_i, r_i)$  biçiminde gösterilir ve “ $i$  düğümünde gerçekleşen geri dönüş fonksiyonu” olarak ifade edilir. Gerçekleşen geri dönüş fonksiyonu değer fonksiyonunun birimi ile ölçülür ve  $v_N(H_N, r_N) \equiv 0$  ile tanımlanır. (Değer düğümü, bir karar ya da şans değişkeni olmayıp, fayda fonksiyonunu ifade eden bir düğüm olduğu için, bu düğümde ortaya çıkan değer toplam fayda olacaktır. Bu nedenle tek başına değer düğümünün getirisi 0 olarak düşünülür.) Pek çok problemde gerçekleşen geri dönüşler doğal olarak ortaya çıkmaktadır.

$g$ , değer düğümündeki geçmişin ( $H_N$ ) deterministik bir fonksiyonunu gösteren amaç değer fonksiyonu olduğunda, karar vericinin tüm karar düğümlerinde fayda fonksiyonu olan  $u(g(H_N))$ 'nin enbüyüklenmesi karar probleminin amacını oluşturur.

Herhangi bir  $H_N$  geçmişi için

$$\sum_{\begin{bmatrix} i \\ r_i \end{bmatrix} \in H_N} v_i(H_i, r_i) = g(H_N) \quad (20)$$

<sup>110</sup> Covaliu ve Oliver **a.g.m.**, s.1867.

\* İng. Realization-Return Function.

\*\* İng. Value Function Decomposition.

yazılır. (20) ifadesinde verilen biçimde *gerçekleşen geri dönüş fonksiyonları*  $v_i(H_i, r_i)$  bulunduğunda  $g$  değer fonksiyonu toplamsal olarak ayrıştırılabilir.

Değer fonksiyonu ayrıştırılmaz olduğunda ise tüm gerçekleşen geri dönüş fonksiyonları 0 olarak tanımlanır. Eğer  $v_i$  geçmişe bağlı ise diğer düğüm fonksiyonlarında olduğu gibi  $i$ 'nin geçmişindeki düğümlerin minimal kümesi  $M_v(i)$  belirlenir<sup>111</sup>.

## 2.5. Ardışık Karar Diyagramında Formülasyon

Karar probleminin fonksiyonel ve sayısal verileri, omurgası geçmiş düğümlerden oluşan bir formülasyon tablosu olarak düzenlenir<sup>112</sup>. İzleyen kesimde formülasyon tablosunun ayrıntılarından önce minimal geçmişler ve ardışık diyagram ile Etki Diyagramının uyumluluğu konularına açıklık getirilmeye çalışılmıştır.

### 2.5.1. Minimal Geçmişler

Problemin çözümünde kullanılacak düğüm geçmişinin uzun olması daha fazla formülasyon ve alt çözüm içerir. Daha kısa geçmiş, üzerinde düşünülmesi gereken geçmiş sayısını azaltır ve bu suretle gerekli olan hesaplamalar kısalmır. Tüm geçmiş  $H_i$  içinden problemin formülasyonu ve çözümü için gerekli olan parçanın çekilmesiyle minimal geçmiş elde edilir<sup>113</sup>.

Gerçekten de karar düğümü  $i$  için, tüm geçmiş ( $H_i$  sütunu) içinden yalnızca  $\Omega_i$ ,  $n_i$  ve  $v_i$ 'yi etkileyen değişkenlerle (düğümlerle) ilgili geçmişler esastır.

Şans düğümü  $i$  için ise tüm geçmiş içinden yalnızca  $f_i$ ,  $n_i$  ya da  $v_i$ 'den birini etkileyen değişkenlerle ilgili geçmişlere ihtiyaç duyulur. (Bu durumda ilgili düğümler doğrudan  $f_i$  üzerinden düşünüldüğünden  $\Omega_i$ 'nin geçmiş bağımlılığı ele alınmak zorunda değildir.)

<sup>111</sup> Covaliu ve Oliver **a.g.m.**, s.1867.

<sup>112</sup> Rıza Demirer ve Prakash P.Shenoy, "Sequential Valuation Networks and Asymmetric Decision Problems", 1999, <http://citeseer.comp.nus.edu.sg/cache/papers/cs/8686/ftp:zSzzSzftp.bschoo.ukans.eduzSzhomezSzrdemirerzSzresearchzSzsvn.pdf/sequential-valuation-asymmetric-decision.pdf> (Erişim tarihi: 08.08.2007)

<sup>113</sup> Bielza ve Shenoy, **a.g.m.**, s.1566.

Son olarak bir değer düğümü için  $H_i$ 'nin elde tutulması gereken parçaları değer fonksiyonunun ayrıştırılabilirliğine bağlıdır. Eğer değer fonksiyonu ayrılabilir ise  $H_i$ 'den hiçbir bilgiye gerek yoktur ve bu durumda tüm geçmişler için  $r_N \equiv 0$ 'dır. Eğer  $g$  ayrıştırılmaz ise  $H_N$  sütununda yalnızca  $\Omega_N$ 'i etkileyen değişkenlerle ilişkili olanların bulunması gereklidir. Bunlar Etki Diyagramlarında değer düğümünün doğrudan öncellerine karşılık gelmekte ve  $M_\Omega(N) = P_I(N)$  biçiminde gösterilebilmektedir.

Yukarıdaki açıklamalar ışığında,  $i$  düğümündeki geçmiş

$$i \in D \text{ için } \bigcup_{h \in \{\Omega, n, v\}} M_h(i)$$

$$i \in C \text{ için } \bigcup_{h \in \{f, n, v\}} M_h(i) \quad (21)$$

$i \in N$  için  $g$  ayrıştırılmamışsa :  $\emptyset$

diğer durumlarda  $P_I(N)$

biçiminde gösterilen düğüm kümesine sahip ise *minimal* olarak ifade edilir ve  $H_i^m$  ile gösterilir.

$i$  düğümünün minimal geçmişindeki düğüm kümesi,  $M(i) \equiv N(H_i^m)$  ile gösterilir ve  $i$ 'deki *minimal düğüm kümesi* olarak ifade edilir. Bu, minimal geçmiş tanımı aracılığıyla Etki Diyagramları ile belirtilen koşullu bağımsızlığın açıkça kullanımına karşılık gelmektedir. Hem şans hem de değer düğümleri için minimal geçmiş tanımında doğrudan öncel kümesi  $P_I(i)$  kullanılır.

$H_i^m$  geçmişleri,  $H_i$  standartlaştırılmış geçmişlerinden, (21) ile verilen minimal düğüm kümesindeki düğümlerle ilişkilendirilmeyen sütunların gizlenmesiyle elde edilir<sup>114</sup>.

### 2.5.2. Ardışık Diyagram ile Etki Diyagramının Uyumluluğu

(18) numaralı ifade ile daha önce de belirtildiği üzere; aynı düğüm kümesini paylaşan Etki Diyagramı ve Ardışık Karar Diyagramı söz konusu olduğunda, her iki diyagramda da şans

<sup>114</sup> Covaliu ve Oliver **a.g.m.**, s.1868.

düğümü  $i$ , karar düğümü  $j$ 'den önce geliyorsa iki diyagramın uyumlu olduğu söylenir ve aşağıdaki biçimde gösterilebilir:

$$i \in P'_l(j) \Rightarrow i \in P'_s(j), \forall i \in C, j \in D$$

Eğer iki diyagram uyumlu değilse, bir başka ifade ile her iki diyagramda da şans ve karar düğümlerinin sıralanışı aynı değilse, problemin çözümü için bu iki diyagramın uyumlu hale getirilmesi gerekir. İki diyagramı uyumlu kılabilme için gerekiyorsa yay ters çevirme işlemi uygulanır. Bu amaçla, olabirlilik modeli aracılığıyla olasılıklı veri sağlanabildiğinde gerekli koşullu olasılıklar Bayes kuralının uygulanması ile hesaplanmak zorundadır. Etki Diyagramındaki yay ters çevirmeye dayanan algoritma Ardışık Karar Diyagramının formülasyonundan önce kullanılmalıdır<sup>115</sup>.

### 2.5.3. Formülasyon Tablosunun Oluşturulması

Formülasyon tablosu, ardışık diyagram ve Etki Diyagramındaki düğümlerin her birine ilişkin veri çerçevesini düzenler. Formülasyon tablosu, ardışık karar vermede büyük boyutlu problemlerin formülasyonu ve çözümüne yönelik cebirsel bir yaklaşım olarak ilk kez Kirkwood tarafından ortaya konmuştur<sup>116</sup>. Ardışık Karar Diyagramında kullanılan formülasyon tablosu da Kirkwood'un tablosundan oldukça esinlenmiştir. Tablonun ana yapısı Tablo 3'ten görüleceği gibi, sütunlar ile belirlenir.

Tablo 3. Ardışık Karar Diyagramında Kullanılan Formülasyon Tablosu

Düğüm Adı	Düğüm Tipi	Minimal Geçmişler $H_i^m$	Durum Uzayı Fonksiyonu $\Omega_i(H_i^m)$	Gerçekleşen Geri Dönüş Fonksiyonu $v_i(H_i^m, r_i)$	Olasılık Dağılım Fonksiyonu $f_i(r_i   H_i^m)$ $i \in C$	Bir Sonraki Düğüm Fonksiyonu $n_i(H_i^m, r_i)$ $i \neq N$
.						
.						
...						

<sup>115</sup> Covaliu ve Oliver **a.g.m.**, s.1869.

<sup>116</sup> Craig W. Kirkwood, "An Algebraic Approach to Formulating and Solving Large Models for Sequential Decisions Under Uncertainty", **Management Science**, Vol. 39, No.7, (July 1993), s.902-904.

Tablo 3'ün solundaki ilk iki sütun düğümleri, adları ve tipleriyle belirtmektedir. Üçüncü sütun minimal geçmişleri listelerken, sağdaki son dört sütun, dört düğüm fonksiyonuna yer vermektedir. Üçüncü sütunda tüm standartlaştırılmış geçmişlere yer verilirken, bunlar içindeki minimal geçmişler koyu renk ile belirtilmektedir. Dördüncü sütunda gerçekleştirmeler olarak yer alan değerler, farklı minimal geçmişler için kendini tekrarlıyorsa bu değerler yalnızca bir defa ilk minimal geçmiş için gösterilir<sup>117</sup>.

Formülasyon tablosunda Ardışık Karar Diyagramındaki her düğüm için bir satır bulunmaktadır. Ardışık Karar Diyagramında  $X <_s Y$  ilişkisi mevcut ise  $X$ 'e ilişkin satır  $Y$ 'ye ilişkin satırdan önce gelmektedir. Her satır, yukarıda belirtilen düğüm adı, düğüm tipi, standart geçmişler ve minimal geçmişler, durum uzayı, olasılık dağılımı (yalnızca şans düğümleri için) ve bir sonraki düğüm fonksiyonlarını içermektedir<sup>118</sup>.

Minimal geçmişlerin kullanımıyla hesaplama sayısında sağlanan azalma, sıkı bir şekilde problemin yapısına bağlı olduğundan değerlendirmenin genelleştirilmesi oldukça zordur.

Aşağıda, bir karar problemi için Etki ve Ardışık Diyagramlara dayalı olarak formülasyon tablosu oluşturmanın adımları verilmiştir:

- a) Ardışık Karar Diyagramında  $X <_s Y$  ilişkisi kullanılarak “Düğüm Adı” ve “Düğüm Tipi” sütunları doldurulur.
- b) Eğer değer fonksiyonu  $g$  ayrıştırılabilir ise ayrıştırılarak geri dönüş fonksiyonunun gerçekleşen değerleri ve  $M_v(i)$  minimal kümeleri belirlenmiş olur; burada  $r_N = 0$  ve  $H_N^m = \emptyset$  olarak ele alınır. Aksi durumda ise, Etki Diyagramı yardımıyla, minimal düğüm kümesi  $M(N) = P_l(N)$  belirlenir ve değer düğümü için *minimal geçmişler* kendisine ait sütuna yerleştirilir.
- c) Ardışık diyagramın rehberliğinde, tüm şans ve karar düğümleri için, minimal kümeleri  $M_\Omega(i)$  ve  $M_n(i)$  ile birlikte  $\Omega_i$  ve  $n_i$  düğüm fonksiyonları belirlenir. Etki Diyagramları kullanılarak tüm şans düğümü  $i$ 'ler için, minimal düğüm kümeleri  $M_f(i) = P_l(i)$  belirlenir.

<sup>117</sup> Covaliu ve Oliver **a.g.m.**, s.1869-1871.

<sup>118</sup> Bielza ve Shenoy, **a.g.m.**, s.1566.

- d) (21)'deki tanımlama ve (c)'deki veri kullanılarak, tüm şans ve karar düğümü  $i$ 'ler için minimal düğüm kümeleri  $M(i)$  belirlenir. *Minimal geçmişler* sütununun geri kalanı doldurulur.
- e) Kalan sütunlar doldurulur<sup>119</sup>.

## 2.6. Ardışık Karar Diyagramının Çözümü

Temel çözüm yöntemi, ardışık diyagrama dayalı olarak geriye doğru yineleme yöntemidir. Bu anlamda, problemin asimetrisi ile sağlanmış olan bazı hesaplama tasarruflarının avantajlarını doğal olarak almıştır. Standartlaştırılmış düğüm geçmişlerinin kullanımı, *birleşmenin olmadığı Karar Ağacındaki geriye doğru yuvarla yönteminden* daha etkin değildir (fakat bununla birlikte Etki Diyagramı modelinde verilen asimetrik bir problemin çözümünden daha etkindir).  $i \in D$  olmak üzere, optimal kararlar  $i$  düğümünde alınacaksa çalışmanın bundan sonraki kısımları için  $w_i(H_i) \equiv [u | H_i]$  ifadesi,  $H_i$  bilindiğinde  $i$  düğümündeki beklenen fayda olarak belirlenir. Değer düğümü için  $w_N(H_N) = u(g(H_N))$  olarak yazılır. Aşağıda  $g(H_N)$ 'nin olası ayrıştırması kullanılmaksızın  $w_i(H_i)$  için bir yinelemeli ilişki verilmiştir:

$$w_i(H_i) = \left\{ \begin{array}{ll} \text{ENB}_{r_i \in \Omega_i(H_i)} w_{n_i(H_i, r_i)} (H_{i>r_i}^i), & i \in D \\ \int_{r_i \in \Omega_i(H_i)} w_{n_i(H_i, r_i)} (H_{i>r_i}^i) dF_i(r_i | H_i), & i \in C \\ r_N = g(H_N), & i = N \end{array} \right. \quad (22)$$

((22)'de sürekli, kesikli ve karma olasılık dağılımlarına izin vermek amacıyla  $dF_i$  notasyonu kullanılmıştır.)

Minimal geçmişler, koşullu bağımsızlık ve değer fonksiyonu ayrıştırması gibi hesaplama etkinliği kaynaklarını kullandığından, (21)'de verilen tanımdan, (22)'de standartlaştırılmış geçmişler yerine minimal geçmişleri kullanmanın daha etkili olduğu görülebilir. Bununla birlikte herhangi bir sonraki düğüm  $n_i$  ( $n_i \in S(i)$ )'nin  $H_{n_i}^m$  minimal geçmişleri için  $w_i$  hesaplandığında, (22) ile özetlenen yineleme algoritmasında standartlaştırılmış geçmişler yerine yalnızca minimal geçmişlerin kullanımı elverişli değildir. Minimal kümesinde,  $i$

<sup>119</sup> Covaliu ve Oliver **a.g.m.**, s.1871.



düğümünün kendisini dışarıda bırakan  $M(i) \not\supseteq M(n_i) \setminus i$  bir ya da daha fazla bir sonraki düğüm  $n_i$  olduğunda minimal geçmişleri kullanmak yeterli olmamaktadır. Böyle bir durumda minimal  $H_{n_i}^m$  ile birlikte yineleme ilişkisinde kullanmak üzere  $[H_i^m, r_i]$   $w_{n_i}(H_{n_i}^m)$  benzersiz (tek bir değer olacak) şekilde seçilemez<sup>120</sup>. Bundan dolayı izleyen kesimde açıklanan biçimde *ilgili geçmişler\** belirlenir.

### 2.6.1. İlgili Geçmişler ve Düğüm İşlem Sırası \*

Minimal geçmişlerin yukarıda verilen sınırlılıkları ile, her  $i$  düğümünün, (22) numaralı ifade ile belirtilen yineleme çözümü için yeterli olacak en küçük geçmiş düğüm kümesi tanımlanır. Böylesi tanımlanan düğüm kümeleri kimi zaman ilgili *minimal düğüm kümelerinden* daha büyük olabilmelerine rağmen çoğunlukla *standartlaştırılmış düğüm kümelerinden* daha küçük olmaktadır.

Tüm düğümler için bu ilgili düğüm kümesinin belirlenme süreci; kendini yinelemedir:  $M(i)$  arttırıldığında  $n_i \in S(i)$  olan tüm düğümlerin minimal düğüm kümesi önceden arttırılmış olmalıdır, bir başka ifadeyle bu düğümlerin ilgili düğüm kümeleri belirlenmiş olmalıdır. Bu nedenle,  $S(N) \equiv \emptyset$  olduğu için, hiçbir zaman arttırılmaya ihtiyaç duymayan minimal düğüm kümesine sahip olan değer düğümü  $i = N$  ile işleme başlanır. Diğer düğümler benzer sırada ele alınır. İşlemler başlangıç düğümü ile sona erdirilir. İşleme uygun çok sayıda düğüm sırası bulunduğundan, işlem sırasına *düğüm işlem sırası* denir.

### 2.6.2. Düğüm (İşlem) Sırası Algoritması

Algoritma ardışık diyagram üzerinde kullanılır. Her adımda bir batık düğüm seçilir, bu düğüm ve bu düğüme yönelmiş olan yaylar silinir ve düğüm silme sırasını kaydederek tüm düğümler silinceye kadar bu işlem tekrarlanır. (Bir ardışık diyagramda her bir adımda mutlaka bir batık düğüm olacaktır: Başlangıçta tek bir değer düğümü vardır, her bir silme işleminden sonra elde kalan grafiğin döngüsüz olması gerektiğinden, grafik en azından bir tane batık düğüm içerecektir.)

<sup>120</sup> Covaliu ve Oliver **a.g.m.**, s.1871-1872.

\* İng. Relevant Histories.

\* İng. Node Processing Order.

$i$  düğümündeki *ilgili geçmiş* aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$i$  düğümündeki geçmiş

$i = N$  için  $M(N)$ ,

$$i \neq N \text{ için } M(i) \cup \{P'(i) \cap \left\{ \bigcup_{k \in S(i)} R(k) \right\}\} \quad (23)$$

düğüm kümelerine sahipse *ilgili geçmiş* olarak adlandırılır ve  $H_i^r$  ile gösterilir:

Burada  $R(k) \equiv N(H_k^r)$  dır ve  $k$ 'daki ilgili geçmiş kümesi ya da kısaca  $k$ 'daki *ilgili düğüm kümesidir*<sup>121</sup>.

$i$  düğümünün *ilgili geçmişi* belirlenirken aşağıdaki formül uyarınca hesaplama yapılır<sup>122</sup>:

$i$  düğümünün ilgili geçmişi =  $i$ 'nin minimal düğüm kümesi +  $i$ 'nin bir sonraki düğümünün minimal geçmişi içinde yer alan ve aynı zamanda  $i$ 'nin önceli olan düğümler

Değer düğümü dışında herhangi bir düğüm için, tanım yinelenir: tüm doğrudan ardılların *ilgili düğüm* kümelerine dayanarak minimal düğüm kümesi arttırılır.

Standartlaştırılmış, minimal ve ilgili düğüm kümeleri arasında

$$M(i) \subseteq R(i) \subseteq N(H_i^r), \quad \forall i \quad (24)$$

ilişkisi vardır.

Böylece (22)'de standart geçmişler yerine ilgili geçmişler kullanılabilir. Geriye doğru yineleme yaklaşımı düğümlere izleyen şekilde uygulanacaktır.  $i = N$  değer düğümünden başlanarak, tüm ilgili geçmişler ( $H_i^r$ ) için  $w_i(H_i^r)$  hesaplanır. Daha sonra  $i$  düğümünün doğrudan öncellerinin  $w_i(H_i^r)$  değerleri hesaplanır ve bu şekilde devam edilerek başlangıç düğümüne ( $i = 1$ ) ulaşılır. Açık olarak  $i$  düğümü gibi bir düğümün işleme sırası,  $i$  düğümünün doğrudan ardıllarının tamamının  $S(i)$  işlenmesi öncesinde olmaz. Düğüm

<sup>121</sup> Covaliu ve Oliver **a.g.m.**, s.1872-1873.

<sup>122</sup> Bielza ve Shenoy, **a.g.m.**, s.1566.

işlem sırası olarak tanımlanan böylesi bir sıra, *ilgili düğüm* kümesinin belirlenmesi için önceden saptanır. Düğüm işlem sırası birden fazla olduğunda  $w_i(H'_i)$ 'nin hesaplamalarının içerdiği iş (görev) miktarı seçilen düğüm işlem sırasından bağımsızdır. Eğer baştan sona optimal kararlar verildiyse  $w_1$  beklenen optimal faydadır. Her bir karar düğümündeki optimal alternatif(ler) çözüm süreci boyunca kaydedilmelidir, sonuçta oluşacak liste optimal politika olacaktır.

(22) numaralı ifadede standartlaştırılmış geçmişler yerine ilgili geçmişleri kullanmak problemin çözümündeki hesaplama yükünü önemli ölçüde azaltabilir<sup>123</sup>.

### 3. ARDIŞIK DEĞERLEME AĞI

Karar problemlerinin grafiksel gösterimi için Demirer ve Shenoy tarafından ortaya konulan *Ardışık Değerleme Ağı*, Covaliu ve Oliver'in Ardışık Karar Diyagramı ile Shenoy'un Değerleme Ağının bir bileşimidir. Ardışık Değerleme Ağı biçiminde gösterilen bir problemin çözümü, büyük boyutlu bir problemin daha küçük alt problemlere ayrıştırılması ve alt problemlerin çözümünde, Değerleme Ağının füzyon algoritmasının kullanılması düşüncesine dayanmaktadır.

#### 3.1. Ardışık Değerleme Ağı Gösterimi

Ardışık Değerleme Ağı tekniğinin grafiksel gösterimi, Ardışık Karar Diyagramı ve Değerleme Ağının grafiksel gösterimlerinin bileşiminden oluşmaktadır. Bu tekniğe ilişkin bazı notasyonlar aşağıda verilmiştir.

**Değerleme Parçaları:**  $\Omega_h$ ,  $h$ 'deki değişkenlerin durum uzaylarını ve  $R$  gerçek sayılar kümesini göstermek üzere,  $\alpha$ ,  $h$  için,  $\alpha : \Omega_h \rightarrow R$  biçiminde bir fayda değerlemesi olsun. Burada  $h$ ,  $\alpha$ 'nın tanım kümesidir.  $g \subseteq h$  ve  $\Gamma \subseteq \Omega_g$  olduğu varsayalım. Bu durumda tüm  $\mathbf{x}_g \in \Gamma$  için ve tüm  $\mathbf{x}_{h-g} \in \Omega_{h-g}$  için  $(\alpha | \Gamma)(\mathbf{x}_g, \mathbf{x}_{h-g}) = \alpha(\mathbf{x}_g, \mathbf{x}_{h-g})$  olacak şekilde,  $\alpha | \Gamma$ ,  $\alpha | \Gamma : \Gamma \times \Omega_{h-g} \rightarrow R$  biçiminde gösterilen bir fonksiyondur.  $\alpha | \Gamma$ ,  $\alpha$ 'nın  $\Gamma$  ile

<sup>123</sup> Covaliu ve Oliver **a.g.m.**, s.1872-1873.

*sınırlandırılması*\* olarak adlandırılır.  $\alpha | \Gamma$  'ya aynı zamanda  $\alpha$  'nın bir *parçası*\*\* olarak da başvurulur.  $\alpha | \Gamma$  'nin tanım kümesi de  $h$  olarak kabul edilir. Dikkat edilmelidir ki  $\alpha | \Omega_g = \alpha$  dır.

Çoğunlukla,  $\Gamma$ ,  $\Omega_g$  'nin  $\Gamma = \{x_g\}$  biçiminde tek elemanlı bir alt kümesidir. Bu durumda,  $\alpha | \Gamma$ ,  $\alpha | x_g$  olarak yazılır. Örnek olarak,  $\Omega_A = \{a_1, a_2\}$  ve  $\Omega_B = \{b_1, b_2, b_3\}$  iken  $\alpha$  'nın  $\{A, B\}$  için bir değerlendirme olduğu varsayalım. O zaman  $\alpha$  Tablo 4'ün sol tarafında gösterilen biçimde, bir tablo olarak temsil edilebilir.  $\alpha$  'nın  $a_1$  ile *sınırlandırılması* olan  $\alpha | a_1$ , Tablo 4'ün sağ tarafında gösterilmiştir. Uygulamada değerlendirme parçaları, tüm değerlendirme tanımları bitirilmeden belirlenecektir. Fayda değerlemeleri söz konusu ise belirlenmemiş değerler sıfır fayda olarak kabul edilebilirler (birleşik fayda fonksiyonunun toplamsal olarak faktörlere ayrıldığı varsayımı) ve olasılık değerlemeleri söz konusu ise, belirlenmemiş değerler sıfır olasılık olarak kabul edilebilir<sup>124</sup>.

Tablo 4. Değerleme Parçası Örneği

$\Omega_{\{A,B\}}$	$\alpha$	$\{a_1\} \times \Omega_B$	$\alpha   a_1$
$a_1, b_1$	$\alpha(a_1, b_1)$	$a_1, b_1$	$\alpha(a_1, b_1)$
$a_1, b_2$	$\alpha(a_1, b_2)$	$a_1, b_2$	$\alpha(a_1, b_2)$
$a_1, b_3$	$\alpha(a_1, b_3)$	$a_1, b_3$	$\alpha(a_1, b_3)$
$a_2, b_1$	$\alpha(a_2, b_1)$		
$a_2, b_2$	$\alpha(a_2, b_2)$		
$a_2, b_3$	$\alpha(a_2, b_3)$		

Ardışık Değerleme Ağı gösterimi; *grafiksel*, *nitel* ve *nicel* olmak üzere üç bölümden oluşur.

\* İng. Restricted.

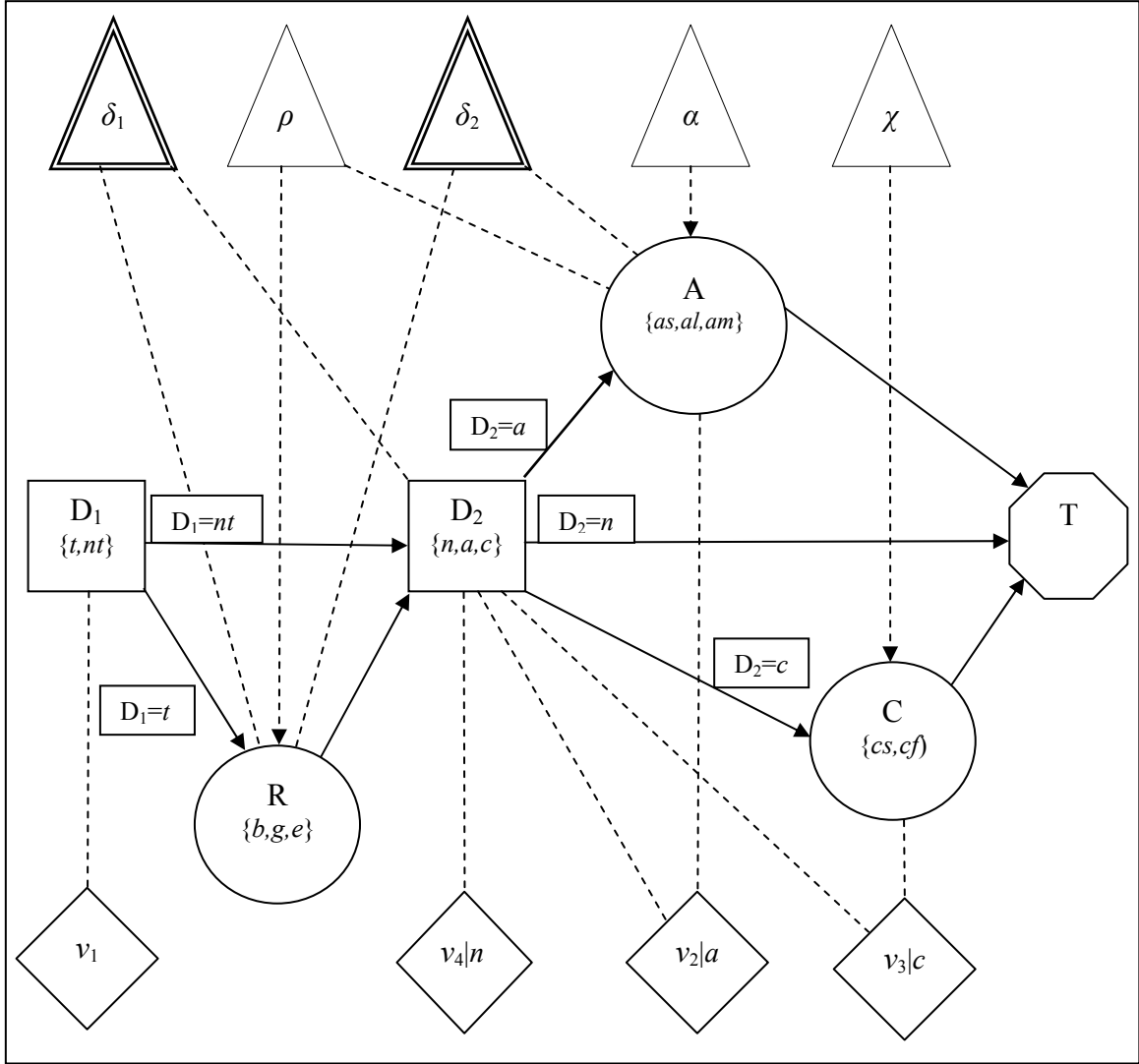
\*\* İng. Fragment.

<sup>124</sup> Demirer ve Shenoy, 2006, **a.g.m.**, s.293-294.

### 3.1.1. Grafiksel Bölüm

Grafiksel bölümde daha önce *Değerleme Ağının* grafiksel düzeyinde aktarılan şans, karar, gösterge, fayda ve olasılık düğümlerinin her biri Değerleme Ağında sözü edilen değişken ya da değerlemeyi temsil etmek üzere kullanılır. Ardışık Değerleme Ağında bu düğümlere ek olarak, terminal (uç) düğümü olarak adlandırılan yeni bir tip düğüm de grafiksel gösterimde yer alır. Terminal düğümü sekizgen sembolü ile gösterilir ve Karar Ağacının bitiş noktalarının (derli toplu) bir biçimi olarak düşünülebilir. Karar ve şans değişkenlerine ilişkin durum uzayları da düğümler üzerinde gösterilir. Karar değişkenleri üzerindeki kısıtlamalar *Ardışık Karar Diyagramında* olduğu gibi ilgili düğümler üzerine eklenen açıklayıcı notlar ile belirtilir. Durum uzayları içinde asimetriden kaynaklanan yapay durumlara yer verilmez. Bu kesimde Şekil 20'ye Ardışık Değerleme Ağının grafik bölümünü örneklemek için yer verilmiştir. Şekil 20'de verilen grafikte  $D_1$  ve  $D_2$  olmak üzere iki karar düğümü A, R ve C olmak üzere üç şans düğümü yer almaktadır<sup>125</sup>. Karar ve şans düğümlerinin durum uzayları sırasıyla  $\Omega_{D_1} = \{t, nt\}$ ,  $\Omega_{D_2} = \{a, c, n\}$ ,  $\Omega_A = \{as, al, am\}$ ,  $\Omega_R = \{b, g, e\}$  ve  $\Omega_C = \{cs, cf\}$  biçimindedir.

<sup>125</sup> Demirer ve Shenoy, 2006, **a.g.m.**, s.294.



Şekil 20. Ardışık Değerleme Ağı Tekniğinin Grafiksel Bölümüne Örnek

Karar, şans ve terminal düğümleri kümesinden oluşan alt grafik, tek bir kaynak düğümü olan ve terminal düğümünü batık düğüm kabul eden yönlendirilmiş bir grafikdir. Bu alt grafik, terminal düğümü ve yönlendirilmiş doğrulara ilişkin açıklamalardaki küçük farklılıklarla birlikte, *Ardışık Karar Diyagramının* grafiksel gösterimine benzer. Bu nedenle, kaynak düğümünden batık düğüme giden her bir yönlendirilmiş yol bir senaryo kümesini gösterir. Yönlendirilmiş grafik, yönlendirilmiş döngüler içerebilir, fakat bu yönlendirilmiş döngüler yönlü doğrular üzerindeki açıklamalarla ve gösterge değerlemelerindeki kısıtlarla kısımlı olmalıdır.

Ardışık Karar Diyagramlarında karar düğümleri üzerindeki tüm kısıtlar, karar değişkenlerinden çıkan yönlü yaylar üzerine eklenen açıklayıcı notlarda ifade edilmiştir.

Ardışık Değerleme Ağlarında ise böylesi kısıtları gösterge değerlemelerini kullanarak ifade edebilme esnekliği bulunur. Yaylar üzerindeki açıklayıcı notlar ise senaryolardaki değişkenlerin doğal sıralamasını (ardışıklığını) tanımlamada kullanılabilir. Grafik üzerinde gösterge, olasılık ve fayda değerlemelerini şans ve/veya karar düğümlerine bağlayan kesikli doğrular sırasıyla söz konusu değerlemelerin tanım kümelerini gösterir. Grafiğin bu kısmı *Değerleme Ağındaki benzer anlamlara sahiptir.*

### 3.1.2. Nitel Bölüm

Nitel bölümde, gösterge değerlemelerinin ayrıntıları belirlenir. Gösterge değerlemesi ise tanım kümesi ile birlikte, tanım kümesinde yer alan değişkenler için izin verilen tüm durumların listelenmesi ile belirtilir<sup>126</sup>.

Şekil 20’de verilen grafikten izlenebildiği gibi,  $\delta_1$  gösterge değerlemesi tanım kümesi olan  $\{R, D_2\}$  ile birlikte,  $D_2$  karar noktasında olan karar verici için mümkün olan seçenekler üzerinde bir kısıttır. Bu kısıt  $\Omega_{\{R, D_2\}}$ ’deki izin verilen tüm durumların listelenmesiyle belirlenebilir. İzin verilen durumlar problemin sözel ifadesi içinde belirtilen durumlardır. Örnek olarak Şekil 20’de grafiği verilen problemin ifadesinde  $D_2$ ’nin mümkün durumlarından  $a$ ’nın yalnızca  $R$  şans değişkeninin  $g$  ya da  $e$  olarak ortaya çıkması durumunda mümkün olacağı ifade edilmiş ise,  $\delta_1$  ile izin verilen durumlar  $\{(b, c), (b, n), (g, a), (g, c), (g, n), (e, a), (e, c), (e, n)\}$  dir. Benzer şekilde gösterge değerlemesi  $\delta_2$  tanım kümesi  $\{R, A\}$  ile birlikte durum uzayı  $\Omega_{\{R, A\}}$  da bir kısıt olarak kabul edilir. Problemin ifadesinde  $R$  şans değişkeninin  $b$  olması durumunda,  $A$  şans değişkeninin  $as$  olarak ortaya çıkma olasılığı sıfır olarak verilmişse  $\delta_2$  bu kısıtı ifade etmek üzere  $\{(b, al), (b, am), (g, as), (g, al), (g, am), (e, as), (e, al), (e, am)\}$  biçiminde  $(b, as)$  durumunu hariç bırakacaktır. Burada  $\delta_1 \subset \Omega_{\{R, D_2\}}$  ve  $\delta_2 \subset \Omega_{\{R, A\}}$  olduğu görülebilmektedir. Çözüm aşaması boyunca, bazı alt problemlerdeki hesaplamalar, alt problemle ilgili olan gösterge değerlemeleri ile kısıtlanmış ilgili durum uzayı üzerinde gerçekleştirilmektedir.

<sup>126</sup> Demirer ve Shenoy, 2006, **a.g.m.**, s.295.

### 3.1.2. Nicel Bölüm

Nicel bölümde, olasılık ve fayda değerlemelerinin sayısal ayrıntıları belirlenir. Sayısal belirlemeler, izleyen anlamlarda grafiksel ve nitel belirlemelerle tutarlı olmak zorundadır. Birincisi, her bir değerlemenin tanım kümesi grafiksel bölümde belirlenir. Örneğin Şekil 20'deki grafikte  $\chi$ 'nin tanım kümesi  $C$  dir. Bu nedenle,  $\Omega_C$ 'deki her bir durum için  $\chi$ 'nin değerinin belirlenmesi gerekir. İkincisi,  $\chi$  ile  $C$  arasındaki doğru  $C$ 'ye doğru yönlendirilmiş olduğundan,  $\chi$  olasılık değerlemesinin  $C$  için koşullu olasılık olduğu anlaşılmalıdır. Üçüncüsü, problemdeki gösterge değerlemelerinin tanım kümeleri üzerinde belirlenmiş olasılık ya da fayda değerlemeleri bulunduğu anda, olasılık ya da fayda değerlemelerinin alacakları değerler yalnızca gösterge değerlemeleri ile izin verilen durumlar için belirlenir. Örneğin, Şekil 20'de olasılık değerlemesi  $\rho$ 'nun tanım kümesi  $\{R, A\}$ 'dir.  $\delta_2$  gösterge değerlemesi de  $\rho$  ile aynı tanım kümesine sahip olduğundan,  $\delta_2$ 'deki durumlar için  $\rho$ 'nun durumlarını belirlemek yeterlidir. Bu nedenle,  $\rho$  bir değerlendirme parçası olarak kabul edilebilir. Aynı zamanda  $\rho$  ile  $R$  arasındaki doğru  $R$ 'ye yönlendirilmiş olduğundan  $\rho$ 'nun değerleri,  $\rho^{\downarrow A} = \iota_A$  koşulunu sağlamak zorundadır. Bu koşulda yer alan  $\iota_A$ , tanım kümesi  $\{A\}$  olan anlamsız olasılık değerlemesini gösterir. Başka bir ifadeyle değerleri bire eşit olan bir değerlemedir. Dördüncüsü, değişkenler arasındaki doğrular üzerinde bulunan açıklayıcı notlarla izin verilen durumlar için fayda ya da olasılık değerlemelerinin değerlerini belirlemek yeterlidir<sup>127</sup>. Örneğin, Şekil 20'de fayda değerlendirme parçası  $v_2|a$  ele alındığında bu değerlemenin tanım kümesi  $\{D_2, A\}$  dir. Bununla birlikte,  $D_2$ 'den  $A$ 'ya yönelen doğru üzerindeki açıklama notu,  $A$  değişkenini içeren tüm senaryolarda  $D_2 = a$  olduğunu ifade etmektedir. Bu nedenle  $\{a\} \times \Omega_A$  daki tüm durumlar için  $v_2$ 'yi belirlemek yeterlidir. Benzer şekilde,  $\{c\} \times \Omega_C$  için de  $v_3|c$ 'yi belirlemek yeterlidir.  $v_4|n$  fayda değeri ise yalnızca  $D_2 = n$  için belirlenir.  $D_2 = n$  olduğunda, bir sonraki düğümün terminal düğümü (uç düğüm)  $T$  olduğuna dikkat edilmelidir. Bu nedenle  $v_4|n$ , tanım kümesinde ne  $A$ 'yı ne de  $C$ 'yi kapsar. Ardışık Değerleme Ağı grafiği tanım kümesinin fayda değerlemelerinin hangi parçalarının tanımlanması gerektiğini gösterir. Tüm benzer fayda değerlendirme parçaları tamamıyla tanımlanmalıdır.

<sup>127</sup> Demirer ve Shenoy, 2006, a.g.m., s.295-296.



Ardışık Değerleme Ağının iyi tanımlanmış bir Değerleme Ağı olduğunun söylenebilmesi için aşağıdaki özellikleri sağlaması gerekir:

- a) Gösterge ve fayda değerlemeleri parçalarının Ardışık Değerleme Ağı grafiği ile tutarlı olması
- b) Tüm olasılık ve gösterge değerlemelerinin birleşimi, karar vericinin problemdeki tüm stratejileri için şans değişkenlerine bağlı birleşik olasılık dağılımlarının iyi tanımlanmış olarak ortaya çıkması

Literatürdeki diğer çözüm tekniklerinde olduğu gibi, Ardışık Değerleme Ağı çözüm tekniği de yalnızca problem tamamıyla belirlendiğinde doğru cevapları bulacak biçimde tasarlanmıştır. Şekil 20’de fayda değerlemeleri  $v_1, v_2 | a, v_3 | c, v_4 | n$ , birleşik fayda fonksiyonunun toplamsal faktörleridir. Olasılık değerlemeleri  $\rho, \alpha, \chi$  ve gösterge değerleri  $\delta_1, \delta_2$  birleşik olasılık dağılımları ailesinin çarpımsal faktörleridir. Olasılık değerlemelerinin koşullu olması, Ardışık Değerleme Ağı gösteriminin bir gerekliliği değildir. Ardışık Değerleme Ağının çözüm tekniği çarpımsal olarak ayrıştırılabilecek herhangi bir birleşik olasılık dağılım için uygulanabilir.

### 3.2. Ardışık Değerleme Ağı Gösteriminin Çözümü

Ardışık Değerleme Ağı çözüm tekniğindeki temel düşünce, problemi daha fazla alt probleme ayrıştırılamayana dek tekrarlı bir şekilde daha küçük alt problemlere ayırmadır. Alt problemlere ayırma işlemi tamamlandıktan sonra alt problemleri çözmek için Shenoy’un füzyon algoritması kullanılır. Alt problemlerin çözümü sonrası bu çözümler birleştirilir. Çözümde kullanılacak bazı notasyonlar izleyen kısımda verilmiştir.

#### 3.2.1. Birleştirme\*

$h_1$  için  $\psi_1$  ve  $h_2$  için  $\psi_2$  olmak üzere iki fayda değeri olduğunda, birleşik fayda fonksiyonunun toplamsal olarak ayrıştırılabildiği varsayımıyla fayda değerleri toplanarak birleştirilir. Bu durum,

---

\* İng. Combination.

tüm  $\mathbf{x} \in \Omega_{h_1 \cup h_2}$  için,  $(\psi_1 \otimes \psi_2)(\mathbf{x}) = \psi_1(\mathbf{x}^{\downarrow h_1}) + \psi_2(\mathbf{x}^{\downarrow h_2})$  olarak ifade edilir<sup>128</sup>.

Burada  $\mathbf{x}^{\downarrow h_1}$ ,  $\mathbf{x}$ 'in  $h_1$ 'in durumlarına izdüşümünü göstermektedir. Ardışık Değerleme Ağı çözüm tekniğinde, her bir alt problem alt problemle ilgili olan değerlendirme parçaları ile ilgilenir.

**Durum 1.** “Fayda parçalarının birleşimi”

$g_1 \subseteq h_1$ ,  $g_2 \subseteq h_2$  ve  $\psi_1 | \Gamma_1$ ,  $\psi_2 | \Gamma_2$  biçiminde iki fayda parçası olduğunda  $\Gamma$ ,  $((\Gamma_1 \times \Omega_{h_1 \cup h_2 - g_1}) \cup (\Gamma_2 \times \Omega_{h_1 \cup h_2 - g_2}))^{\downarrow g_1 \cup g_2}$  biçiminde tanımlanır.

Burada  $\Gamma_1 \subseteq \Omega_{g_1}$  ve  $\Gamma_2 \subseteq \Omega_{g_2}$  dir.

$\Gamma$  ile sınırlandırılmış fayda değerlemesi  $\psi$ ,  $(\psi | \Gamma)$ ;

$h_1 \cup h_2$  ve tüm  $\mathbf{y} \in \Gamma \times \Omega_{(h_1 \cup h_2) - (g_1 \cup g_2)}$  için

$\psi_1 | \Gamma_1$  ve  $\psi_2 | \Gamma_2$  'nin birleşimi  $(\psi_1 | \Gamma_1) \otimes (\psi_2 | \Gamma_2)$  cinsinden

$$\begin{aligned} (\psi | \Gamma)(\mathbf{y}) &= (\psi_1 | \Gamma_1)(\mathbf{y}^{\downarrow g_1}, \mathbf{y}^{\downarrow h_1 - g_1}) + (\psi_2 | \Gamma_2)(\mathbf{y}^{\downarrow g_2}, \mathbf{y}^{\downarrow h_2 - g_2}) \text{ eğer } \mathbf{y}^{\downarrow g_1} \in \Gamma_1 \text{ ve } \mathbf{y}^{\downarrow g_2} \in \Gamma_2 \text{ ise} \\ &= (\psi_1 | \Gamma_1)(\mathbf{y}^{\downarrow g_1}, \mathbf{y}^{\downarrow h_1 - g_1}) \text{ eğer } \mathbf{y}^{\downarrow g_1} \in \Gamma_1 \text{ ve } \mathbf{y}^{\downarrow g_2} \notin \Gamma_2 \end{aligned}$$

ise

$$= (\psi_2 | \Gamma_2)(\mathbf{y}^{\downarrow g_2}, \mathbf{y}^{\downarrow h_2 - g_2}) \text{ eğer } \mathbf{y}^{\downarrow g_1} \notin \Gamma_1 \text{ ve } \mathbf{y}^{\downarrow g_2} \in \Gamma_2$$

ise

olarak yazılır<sup>129</sup>.

Tüm değerlemelerin dikkate alındığı durum için;  $\psi_{h_1}$   $h_1$  için fayda değerlendirme,  $\psi_{h_2}$  de  $h_2$  için bir olasılık değerlendirme olduğunda  $\psi_{h_1} \otimes \psi_{h_2}$  ile ya da  $\psi_{h_2} \otimes \psi_{h_1}$  ile gösterilen  $\psi_{h_1}$  ve  $\psi_{h_2}$  'nin birleşimi  $h_1 \cup h_2$  için bir fayda değerlendirme ve tüm  $\mathbf{x} \in \Omega_{h_1 \cup h_2}$  için,

$$(\psi_{h_1} \otimes \psi_{h_2})(\mathbf{x}) = \psi_{h_1}(\mathbf{x}^{\downarrow h_1}) \psi_{h_2}(\mathbf{x}^{\downarrow h_2}) \text{ biçiminde tanımlanır}^{130}.$$

<sup>128</sup> Shenoy, 1992, **a.g.m.**, s.469.

<sup>129</sup> Demirer ve Shenoy, 2006, **a.g.m.**, s.297.

<sup>130</sup> Shenoy, 1992, **a.g.m.**, s.469.

**Durum 2.** “Bir fayda parçası ve bir olasılık parçasının birleşimi”

$g_1 \subseteq h_1$ ,  $g_2 \subseteq h_2$ ,  $\Gamma_1 \subseteq \Omega_{g_1}$  ve  $\Gamma_2 \subseteq \Omega_{g_2}$  iken  $\psi_1 | \Gamma_1$  fayda parçası,  $\psi_2 | \Gamma_2$  olasılık parçası olduğunda  $\Gamma$ ,  $((\Gamma_1 \times \Omega_{h_1 \cup h_2 - g_1}) \cap (\Gamma_2 \times \Omega_{h_1 \cup h_2 - g_2}))^{\downarrow g_1 \cup g_2}$  biçiminde tanımlanır.

$\Gamma$  ile sınırlandırılmış bir fayda değerlemesi  $\psi$ ,  $(\psi | \Gamma)$ ;

$h_1 \cup h_2$  ve tüm  $y \in \Gamma \times \Omega_{(h_1 \cup h_2) - (g_1 - g_2)}$  için

$\psi_1 | \Gamma_1$  ve  $\psi_2 | \Gamma_2$ ’nin birleşimi  $(\psi_1 | \Gamma_1) \otimes (\psi_2 | \Gamma_2)$  cinsinden,

$(\psi | \Gamma)(y) = (\psi_1 | \Gamma_1)(y^{\downarrow g_1}, y^{\downarrow h_1 - g_1})(\psi_2 | \Gamma_2)(y^{\downarrow g_2}, y^{\downarrow h_2 - g_2})$  eğer  $y^{\downarrow g_1} \in \Gamma_1$  ve  $y^{\downarrow g_2} \in \Gamma_2$  ise

olarak yazılır<sup>131</sup>.

Tüm değerlemelerin dikkate alındığı durum için;  $\psi_{h_1}$  ve  $\psi_{h_2}$  sırasıyla  $h_1$  ve  $h_2$  için birer olasılık değerlemesi olduğunda  $\psi_{h_1} \otimes \psi_{h_2}$  ile ya da  $\psi_{h_2} \otimes \psi_{h_1}$  ile gösterilen  $\psi_{h_1}$  ve  $\psi_{h_2}$ ’nin birleşimi  $h_1 \cup h_2$  için bir olasılık değerlemesidir ve

tüm  $x \in \Omega_{h_1 \cup h_2}$  için,  $(\psi_{h_1} \otimes \psi_{h_2})(x) = \psi_{h_1}(x^{\downarrow h_1}) \psi_{h_2}(x^{\downarrow h_2})$

olarak tanımlanır<sup>132</sup>.

**Durum 3.** “Olasılık parçalarının birleşimi”

$g_1 \subseteq h_1$ ,  $g_2 \subseteq h_2$ ,  $\Gamma_1 \subseteq \Omega_{g_1}$  ve  $\Gamma_2 \subseteq \Omega_{g_2}$  olmak üzere,  $\psi_1 | \Gamma_1$   $h_1$ ,  $\psi_2 | \Gamma_2$  de  $h_2$  için birer olasılık parçası olduklarında  $\Gamma$ ,  $((\Gamma_1 \times \Omega_{h_1 \cup h_2 - g_1}) \cap (\Gamma_2 \times \Omega_{h_1 \cup h_2 - g_2}))^{\downarrow g_1 \cup g_2}$ ’yi gösterir.

$\Gamma$  ile sınırlandırılmış bir olasılık değerlemesi  $\psi$ ,  $(\psi | \Gamma)$ ;

$h_1 \cup h_2$  ve tüm  $y \in \Gamma \times \Omega_{(h_1 \cup h_2) - (g_1 - g_2)}$  için,

$\psi_1 | \Gamma_1$  ve  $\psi_2 | \Gamma_2$ ’nin birleşimi  $(\psi_1 | \Gamma_1) \otimes (\psi_2 | \Gamma_2)$  cinsinden

$(\psi | \Gamma)(y) = (\psi_1 | \Gamma_1)(y^{\downarrow g_1}, y^{\downarrow h_1 - g_1})(\psi_2 | \Gamma_2)(y^{\downarrow g_2}, y^{\downarrow h_2 - g_2})$  eğer tüm  $y^{\downarrow g_1} \in \Gamma_1$  ve  $y^{\downarrow g_2} \in \Gamma_2$

ise olarak yazılır<sup>133</sup>.

<sup>131</sup> Demirer ve Shenoy, 2006, **a.g.m.**, s.297.

<sup>132</sup> Shenoy, 1992, **a.g.m.**, s.469.

<sup>133</sup> Demirer ve Shenoy, 2006, **a.g.m.**, s.297.

İki fayda değerlemesi birleşiminin bir fayda değerlemesi; iki olasılık değerlemesi birleşiminin bir olasılık değerlemesi ve bir fayda ve bir olasılık değerlemeleri birleşiminin bir fayda değerlemesi olduğuna dikkat edilmelidir.

Her karar problemi için tüm birleştirmelerin gerçekleştirilmesi bir zorunluluk değildir. Doğal olarak sadece, probleminin gerektirdiği birleştirme işlemleri yerine getirilir<sup>134</sup>.

### 3.2.2. Marjinalizasyon \*

$h$ 'nin değişkenlerin bir alt kümesi ve  $X \in h$  olduğunda marjinalizasyon işleci  $\downarrow h - \{X\}$ , tanım kümesi  $h$  olan bir değerlemeyi,  $X$  değişkenini çıkararak (eleyerek) tanım kümesi  $h - \{X\}$  olan bir değerlemeye indirger.  $\psi$  tanım kümesi  $h$  olan bir değerlendirme olduğunda  $\psi$ 'nin  $h - \{X\}$  için marjinali  $\psi^{\downarrow h - \{X\}}$  veya  $\psi^{-X}$  biçiminde gösterilir.  $\psi^{\downarrow h - \{X\}}$  biçimindeki ilk gösterim marjinalin tanım kümesine,  $\psi^{-X}$  biçimindeki ikinci gösterim ise çıkarılan değişkene dikkat çekme istendiğinde kullanılır. Marjinalizasyonun tanımı tanım kümesinden çıkarılan değişkenin tipine (karar ya da şans) bağlıdır<sup>135</sup>.

#### **Durum 1.** “Bir Şans Değişkeni Üzerinde Marjinalizasyon”

$h$ 'nin şans değişkeni  $C$ 'yi de içeren değişkenler alt kümesi olduğu ve  $\psi | \Gamma_g$ 'nin  $g \subseteq h$  iken  $\Gamma_g \subseteq \Omega_g$  ile sınırlandırılmış  $h$  tanım kümesine sahip bir değerlendirme olduğu varsayıldığında,  $h - \{C\}$  için  $\psi | \Gamma_g$  marjinali  $\psi | \Gamma_g^{-C}$  ile gösterilir.

Tanım kümesi  $h - \{C\}$  olan değerlendirme  $\psi | \Gamma_g^{-C}$  ;

tüm  $\mathbf{x} \in (\Gamma_g \times \Omega_{h-g})^{\downarrow h - \{C\}}$  için,  $(\mathbf{x}, \mathbf{c}) \in \Gamma_g \times \Omega_{h-g}$  olmak üzere  $\psi | \Gamma_g^{-C}(\mathbf{x}) = \sum \{\psi(\mathbf{x}, \mathbf{c}) \mid \mathbf{c} \in \Omega_C\}$ , olarak tanımlanır<sup>136</sup>.

<sup>134</sup> Ayni, s.297.

\* İng. Marginalization.

<sup>135</sup> Ayni, s.298.

<sup>136</sup> Demirer ve Shenoy, 2006, a.g.m.,s.298.

**Durum 2.** “Bir Karar Değişkeni Üzerinde Marjinalizasyon”

$h$ 'nin karar değişkeni  $D$ 'yi de içeren değişkenler alt kümesi olduğu ve  $\psi | \Gamma_g$ 'nin  $g \subseteq h$  iken  $\Gamma_g \subseteq \Omega_g$  ile sınırlandırılmış  $h$  tanım kümesine sahip bir fayda değerlemesi olduğu varsayıldığında,  $h - \{D\}$  için  $\psi | \Gamma_g$  marjinali  $\psi | \Gamma_g^{-D}$  ile gösterilir.

Tanım kümesi  $h - \{D\}$  olan fayda değerlemesi  $\psi | \Gamma_g^{-D}$ ;

tüm  $\mathbf{x} \in (\Gamma_g \times \Omega_{h-g})^{\downarrow h - \{D\}}$  için,  $(\mathbf{x}, \mathbf{d}) \in \Gamma_g \times \Omega_{h-g}$  olmak üzere  $\psi | \Gamma_g^{-D}(\mathbf{x}) = \text{ENB}\{\psi(\mathbf{x}, \mathbf{d}) \mid \mathbf{d} \in \Omega_D\}$ , olarak tanımlanır<sup>137</sup>.

Son tanımda belirtilen maksimizasyonun (ENB),  $D$ 'nin fayda parçasının içinde yer alan  $\mathbf{d}$  değerleri ile sınırlandırıldığına dikkat edilmelidir.

### 3.2.3. Bölme İşlemi

$h$  alt kümesi için  $\psi$ 'nin bir olasılık değerlemesi ve  $X \in h$  olduğunda  $\psi / \psi^{-X}$  işlemi,  $\psi^{-X}$  ile bölünen  $\psi$  olarak adlandırılır ve  $h$  için tanımlandığında

tüm  $\mathbf{x} \in \Omega_h$  için,  $(\psi / \psi^{-X})(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}) / \psi^{-X}(\mathbf{x}^{\downarrow h - \{X\}})$

biçimde bir değerlendirme olur.

$\psi^{-X}(\mathbf{x}^{\downarrow h - \{X\}}) = 0$  ise  $\psi(\mathbf{x}) = 0$  olur. Böylesi durumlarda,  $(\psi / \psi^{-X})(\mathbf{x}) = 0$  biçiminde basit bir tanım yapılabilir<sup>138</sup>.

### 3.2.4. Etiketleme\*

Daha düşük düzeyli alt problemlerin çözülüp sonuçlarının daha yüksek düzeyli bir alt probleme gönderilmesi biçiminde yineleme işlemlerini içeren algoritma *etiketleme* adını

<sup>137</sup> Aynı, s.298.

<sup>138</sup> Aynı, s.298.

\* İng. Tagging.

alır<sup>139</sup>.  $\psi$  tanım kümesi  $h$  olan bir fayda değerlemesi ve  $X \notin h$  olduğunda  $\psi$ 'nin  $X = x$  olacak şekilde etiketlenmesi işlemi  $\psi \otimes (\iota_X | x)$  olarak gösterilir. Burada  $\iota_X | x$  terimi  $X = x$  ile sınırlandırılmış  $\{X\}$  tanım kümesi için sıfır değerine sahip bir fayda değerlemesini ifade etmektedir. Bu işlem  $\psi$ 'nin değerlerini değiştirmeksizin,  $\psi$ 'nin tanım kümesini  $h$ 'den  $h \cup \{X\}$ 'e genişletir. Etiketleme yalnızca parçalara ayrılmış ağaçta, bir düğümden diğer bir düğüme geçen fayda değerlemeleri üzerinde uygulanır.

### 3.2.5. Füzyon Algoritması

Bu kesimde önceden gözden geçirilmiş olan füzyon algoritmasının Ardışık Değerleme Ağı kapsamında kullanımı ele alınacaktır.

**Füzyon:** Algoritma çözüm aşaması boyunca şans ve karar değişkenlerini teker teker silme temeline dayanmaktadır. Silme sırası problemde verilen bilgi kısıtları ile belirlenir. Herhangi bir iterasyonda yürütülecek işlem, o aşamada silinecek değişkenin tipine bağlı olarak değişir.  $\Pi = \{\pi_1, \dots, \pi_j\}$  fayda değerlemeleri ve  $P = \{\rho_1, \dots, \rho_k\}$  olasılık değerlemeleri kümesi olduğunda  $Fus_X\{\Pi, P\}$  fonksiyonu  $\Pi \cup P$  değerlemelerinin  $X$  değişkenine göre eritilmelerinden sonraki değerlemeleri gösterir. Füzyon algoritmasının uygulanması sırasında bir şans değişkeninin ya da bir karar değişkeninin marjinalize edilmesi gibi iki farklı durum ortaya çıkar.

Füzyon algoritması ile bir şans değişkeninin marjinalize edilmesi, Karar Ağacı çözümünde şans düğümünün beklenen değerinin bulunması işlemine karşılık gelir.

Bir karar değişkeninin marjinalize edilmesi ise Karar Ağacının çözümünde geriye katlama işlemine karşılık gelir.

#### **Durum 1. Karar Değişkeni $D$ için Füzyon**

$\Pi$  tanım kümelerinde  $D$  karar değişkenini içerecek şekilde oluşan fayda değerlemeleri olduğunda  $D$ 'ye ilişkin füzyon  $Fus_D\{\Pi\} = \{\pi^{-D}\}$  biçiminde bir fayda değerlemesidir. Son ifade  $\pi = \otimes\{\pi_i | i = 1, \dots, j\}$  dir. Bir gösterge değerlemesi  $\iota$  mevcutsa,  $\pi_i$ 'lerin birleşimi

<sup>139</sup> Demirer ve Shenoy, 2006, a.g.m.,s.298.

uygun durum uzayı üzerinde  $\iota$  ile sınırlandırılmış olarak gerçekleştirilir.  $D$ 'nin  $\pi$ 'den marjinalizasyonu da gösterge değeri  $\iota$  ile sınırlandırılmıştır<sup>140</sup>. Bundan dolayı uygulamada tanım kümelerinde  $D$ 'yi içeren tüm fayda değerlemeleri birleştirilir, daha sonra elde edilen  $\pi$  fayda değerlemesi, bu değerlemenin tanım kümesinden  $D$  silinecek şekilde marjinalize edilir. Bu işlemin Karar Ağacının çözümünde geriye katlama işlemiyle benzerliği açıktır.

### **Durum 2. Şans Değişkeni $C$ için füzyon**

$\Pi$ 'nin tanım kümelerinde  $C$  şans değişkenini içerecek şekilde oluşan fayda değerlemeleri ve  $P$ 'nin tanım kümelerinde  $C$  şans değişkenini içerecek şekilde oluşan olasılık değerlemeleri olduğunda  $C$ 'ye ilişkin füzyon,  $\pi = \otimes\{\pi_i \mid i = 1, \dots, j\}$  ve  $\rho = \otimes\{\rho_i \mid i = 1, \dots, k\}$  olmak üzere,  $Fus_C\{\Pi, P\} = \{(\pi \otimes \rho)^{-C}\}$  biçiminde tanımlanır.

$\pi_i$ 'lerin ve  $\rho_i$ 'lerin birleşimi, mevcut bir gösterge değeri  $\iota$  varsa,  $\iota$  ile sınırlandırılmış olarak uygun durum uzayında gerçekleştirilir.  $C$ 'nin  $\pi \otimes \rho$ 'dan marjinalizasyonu da gösterge değeri  $\iota$  ile sınırlandırılmıştır.

Bu durumda, tanım kümelerinde  $C$ 'yi içeren tüm olasılık ve fayda değerleri birleştirilmiş ve fayda değerlemesi olarak sonuçlanan  $\pi \otimes \rho$  tanım kümelerinden  $C$  silinecek biçimde marjinalize edilmiş olur<sup>141</sup>. Bu işlemin de Karar Ağacındaki şans düğümünün beklenen değerinin bulunması işlemine benzediği kolayca görülebilir.

### **3.2.6. Problemin Ayrıştırılması**

Ardışık Değerleme Ağının grafiksel gösteriminden başlanarak, karar problemi alt problemlere ayrıştırılır. Ardışık Değerleme Ağının grafiksel bölümünde, alt problemler kaynak düğümünden uç düğüme uzanan yönlendirilmiş yollar ve alt yolların tümü ayrı ayrı numaralandırılarak belirlenir.

<sup>140</sup> Demirer ve Shenoy, 2006, **a.g.m.**, s.299.

<sup>141</sup> **Aynı**, s.299.

Ayrıştırma işlemine ilk olarak alt problemin içinde yer alan değişkenlerin belirlenmesi ile başlanır. Daha sonra alt problemle ilişkili fayda, gösterge ve olasılık değerlemeleri tanımlanır.

### 3.2.6.1. Değişkenler

Başlangıç düğümü (kök düğüm) olarak  $S$  gibi bir düğüm olduğu varsayılır. Sonra Ardışık Değerleme Ağındaki  $S$  kök düğümünden çıkan yönlendirilmiş tüm yaylar belirlenir. Örneğin  $X$  gibi bir değişkene yönlendirilmiş her bir yay, kaynak düğümden  $X$  değişkenine giden yol üzerindeki  $S$  ve  $X$  değişkenlerinden oluşan yeni bir alt problem oluşturur. Alt problemlere açıklayıcı notlar eklenir. Bu işlemler tüm yollar ve alt yolların numaralandırılması tamamlanana kadar tekrarlanır. Alt problemlerin içerdiği değişkenlerin sırası önemlidir. Uç düğümün bir değişken olmadığından herhangi bir alt problemde bulunmayacağı bilinmelidir. Bu şekilde yönlendirilmiş alt ağaçlar *ayrıştırılmış ağaç\** olarak adlandırılır<sup>142</sup>. İzleyen aşamada, alt problemlere ilişkin fayda, gösterge ve olasılık değerlemeleri belirlenir. Alt problemler için fayda ve gösterge değerlemelerini belirlemede kullanılan yaklaşım olasılık değerlemelerini belirlemek için kullanılan yaklaşımdan oldukça farklıdır.

### 3.2.6.2. Fayda ve Gösterge Değerlemeleri

Alt problemlere ilişkin fayda ve gösterge değerlemelerinin belirlenmesi işlemlerine ayrıştırılmış ağacın  $S$  kök düğümünden başlanır. Ardışık Değerleme Ağı gösteriminde yer alan tüm fayda ve gösterge değerlemeleri parçaları ilgili olduğu alt problemle ilişkilendirilir. Bu amaçla tanım kümesi alt problemin değişkenler kümesi içinde yer alan tüm değerlendirme parçaları, ilgili alt problemle ilişkilendirilir. Her alt probleme eklenen açıklayıcı not bir diğer alt problem(ler)e yönlendirdiği için (kalan) diğer değerlemeler de benzer biçimde ilgili alt problemlerle ilişkilendirilir.

---

\* İng. Decomposition Tree.

<sup>142</sup> Demirer ve Shenoy, 2006, **a.g.m.**, s.300.



### 3.2.6.3. Olasılık Değerlemeleri

Problemdeki tüm şans değişkenleri için birleşik olasılık dağılımının faktörlerine ayrılabilirdi varsayılır.

Bir şans değişkeni  $C_m$  ile biten bir yaprak alt problemle ilişkilendirilmiş olasılık değerlemesinin tekrarlı bir şekilde hesaplanması işlemi izleyen biçimde gerçekleştirilir.  $\Gamma = \{C_1, \dots, C_m\}$  kaynak düğümden yaprak düğüme giden yol üzerinde, son değişkeni  $C_m$  olan şans değişkenlerini ve  $\Gamma$ 'deki şans değişkenleri için birleşik dağılımı  $(\pi_1 \otimes \dots \otimes \pi_k)^{\downarrow\Gamma}$  göstermek üzere  $P = \{\pi_1, \dots, \pi_k\}$  ifadesi de tanım kümesi  $h_1, \dots, h_k$  olan olasılık değerlemeleri kümesini gösterdiğinde son değişkeni  $C_m$  olan yaprak alt problemle ilişkilendirilmiş olasılık değerlemesi  $\pi^{\downarrow\Gamma} / \pi^{\downarrow\Gamma - \{C_m\}}$  ile belirtilir. (Burada  $\pi = \otimes \{\pi_j \mid C_m \in h_j\}$  dir.) Şans değişkenleri kümesi  $\Gamma - \{C_m\}$  ile ilişkilendirilmiş olasılık değerlemeleri kümesi  $\cup \{\pi_j \mid C_m \notin h_j\} \cup \{\pi^{\downarrow\Gamma - \{C_m\}}\}$  dir.  $(\otimes \{\pi_j \mid C_m \notin h_j\} \otimes \pi^{\downarrow\Gamma - \{C_m\}})^{\downarrow\Gamma - \{C_m\}}$ ,  $\Gamma - \{C_m\}$ 'deki şans değişkenleri için birleşik dağılımdır. Böylelikle, son değişkeni bir şans düğümü olan diğer alt problemler ile ilişkilendirilmiş olasılık değerlemeleri tekrarlı bir şekilde hesaplanabilir.  $\pi^{\downarrow\Gamma} / \pi^{\downarrow\Gamma - \{C_m\}}$ ,  $\Gamma - \{C_m\}$  deki değişkenler bilindiğinde  $C_m$  için koşullu olasılık dağılımıdır<sup>143</sup>.

Yukarıda sözü edilen bu yaklaşım, her bir olasılık değerinin koşullu olasılık olduğu Bayes ağ modeli özel durumunda, koşullu olasılıkların yay ters çevirme tekniği kullanılarak hesaplanmasına karşılık gelir. Bununla birlikte söz konusu son yaklaşım olasılık değerlemelerinin koşullu olduğu, koşullu olmadığı veya  $\Gamma$ 'nin tüm şans değişkenlerini içermediği durumlarda da kullanılabilir. Önerilen yaklaşımın sorunsuz bir şekilde çözüm üretebilmesi modelde tanımlanan olasılık değerlemelerinin tüm şans değişkenlerinin birleşik dağılımında faktör olarak yer almasına bağlıdır.

<sup>143</sup> Demirer ve Shenoy, 2006, **a.g.m.**, s.301.

## DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

### BİR LOJİSTİK FİRMASININ ARAÇ EDİNME PROBLEMİNİN GRAFİKSEL KARAR TEKNİKLERİ YARDIMIYLA ÇÖZÜMÜ

#### 1. KARAR PROBLEMİ

Bir lojistik firması araç filosunun bir bölümünü yenileme durumundadır. Bu amaçla kararını bilimsel destek yardımıyla vermek istemektedir. İlk aşamada mevcut filo içindeki araç çeşitliliği incelenip ihtiyacın hafif ticari araç kategorisinde yoğunlaştığı saptanmıştır. Öte yandan firma yeni araçların eldeki genel araç portföyüne uygun olmasını istemektedir. Dahası, araçları kasasız alıp firmaya özgü taşımacılık standartlarının sağlanması amacıyla araç kasalarının firma bünyesinde yapılması eğilimindedir. Bu nedenle şasi biçiminde tanımlanan araçlardan edinme firmanın önceliğinde bulunmaktadır. Geçmiş deneyimlere ilişkin kayıtlar incelendiğinde şasi araçların iki farklı tedarikçi firma tarafından sağlanabildiği görülmüştür. Bu bilgilerden hareketle kurulan iletişim sonrasında söz konusu iki tedarikçiden yalnızca birinin şasi seçeneği konusunda destek verebileceği ortaya çıkmıştır. Böylelikle mevcut filo içinde yer alan araçlardan yalnızca birinden (D) marka (model)den araç temin edilebileceği belirlenmiştir. Diğer yandan son yıllarda lojistik sektöründe küçük paket gönderim hacminin arttığı da bilinmektedir. Bu gerçekten hareketle firma yetkilileri, mevcut filo içinde yer almayan küçük boyutlu araç temini fikrini de göz önünde bulundurmaktadır. Ama bu tip araç filolarında mevcut olmadığından böylesi bir aracı zaman içinde deneyip aracın arıza eşliğinin kendilerince kabul edilebilir olduğunu görmek istemektedir. Bu amaçla piyasa araştırması yapıp deneme kullanımına

ücretsiz izin veren bir tedarikçi bulunmuştur. Bu tedarikçiden edinilen araç performansı 200000 km boyunca izlenmiş, gerekli bakımlar gerçekleştirilmiş ve bunlar kaydedilmiştir. Araç temini işlemi (F) modelinin 200000 km lik test süresinin bitimine kadar ertelenmiştir. Deneme kullanımı sonunda, filo içi şasi ve filo dışı küçük araç arasında tercih yapılması aşamasına gelinmiştir. Bu noktada, firmanın araç bakım sorumlusu deneme aracına ilişkin verilerin tek bir araca yönelik olduğu gerekçesiyle genellemenin sağlıklı olamayacağını savunup en azından 2 aracın daha denenmesini önermişse de bu öneri tedarikçi firma tarafından kabul görmemiştir.

Firma yetkililerinin probleme ilişkin olarak elde ettikleri istatistikler izleyen kesimde verilmiştir.

a) Geçmiş kayıtlara göre filo içi (D)'nin arıza olasılıkları, Day, "D'de arıza yok", Dav, "D'de arıza var" olmak üzere,

$$P(\text{Day}) = 0,86$$

$$P(\text{Dav}) = 0,14$$

biçimindedir.

b) Filo dışı (F)'ye ilişkin arıza olasılıkları;

b1) Denenen bir araç için (F)'nin arıza olasılıkları, Fay, Fka ve Fba sırasıyla "F'de arıza yok", "F'de küçük arıza" ve "F'de büyük arıza" durumlarını göstermek üzere,

$$P(\text{Fay}) = 0,68$$

$$P(\text{Fka}) = 0,20$$

$$P(\text{Fba}) = 0,12$$

olarak bulunmuştur.

b2) (F)'yi pazarlayan firma test araçlarının arıza yapma olasılıklarını Tay, Tka ve Tba sırasıyla "Test sonucunda arıza yok", "Test sonucunda küçük arıza var" ve "Test sonucunda büyük arıza var" durumlarını göstermek üzere,

$$P(\text{Tay}) = 0,80$$

$$P(\text{Tka}) = 0,15$$

$$P(\text{Tba}) = 0,05$$

olarak vermiştir.

Yukarıda sıralanan bu istatistiklere ek olarak, firma bakım atölyesi yetkilisi (F)nin 2.bir aracı için test yapma kararı vermeleri halinde, örnek arabanın istatistiklerinden yola çıkarak yeni test sonuçlarının olabirliklerini

$$P(Tka|Fay) = 0,15$$

$$P(Tay|Fay) = 0,85$$

$$P(Tba|Fka) = 0,24$$

$$P(Tka|Fka) = 0,60$$

$$P(Tay|Fka) = 0,16$$

$$P(Tba|Fba) = 0,85$$

$$P(Tka|Fba) = 0,10$$

$$P(Tay|Fba) = 0,05$$

olarak belirtmiştir.

Öte yandan test sürecinde büyük arıza ortaya çıktığında (F) marka aracın filoya katılımı gerçekleştirilmeyecektir.

(D) ve (F) marka araçların genel özellikleri farklı olduğundan lojistik firma yetkililerinin araç fiyatlarını karşılaştırma yoluyla sağlıklı bir çözüme ulaşmaları mümkün değildir. Bu nedenle, fayda fonksiyonunun araç fiyatından daha çok memnuniyet konusu üzerinde yoğunlaşmasının akılcı olacağı görüşü ağırlık kazanmıştır. Bu görüş doğrultusunda lojistik firması, araç edinmeden beklediği kazancı en yüksek memnuniyet olarak benimsemiştir. Bu amaçla bakım atölyesi yetkilileri (D) ve (F) marka araçların memnuniyeti için 0 ile 100 arasında değişen bir ölçek geliştirmiştir. Buna göre belirlenen fayda fonksiyonu bileşenleri ve bunların (D) ve (F) araçları için memnuniyet değerleri Tablo 5'te verilmiştir.

Tablo 5. Fayda Fonksiyonu Bileşenlerine Karşılık Gelen Fayda Değerleri

	MEMNUNİYET (FAYDA) DEĞERLERİ	
	(D)	(F)
Renk Seçimi	100	100
Lastik kullanımı	20	85
İyi niyet garantisi	40	90
Özel araç alım indirimi	20	80
Yıllık vergi	20	100
Km başına bakım	40	90
Şasi seçeneği	100	0
Yakıt maliyeti	25	75
Ek kasa yapımı	0	100

Tablodan memnuniyet arttıkça kazancın da arttığı düşünülerek 100'e yakın, memnuniyet azaldıkça kazancın düşeceği varsayımı ile 0'a yakın bir değer atanmış olduğu görülmektedir.

Arıza durumlarının memnuniyet derecesini negatif yönde etkilediği kabul edilerek, 0 ile 100 arasında değişen ölçek arıza durumları için negatif yönde kullanılmıştır. Buna göre firma bakım atölyesi yetkilileri (D) için arıza durumunun memnuniyet derecesinin 50 birim düşüreceğini, (F) için küçük arıza durumunun memnuniyet derecesini 40 birim, büyük arıza durumunun ise 75 birim düşüreceğini belirtmişlerdir.

Son olarak ikinci bir test aracının ücretsiz olarak verilmemesi ve test yapma kararı verildiğinde araç alımı için beklenen sürenin uzaması gerekçelerinden dolayı test yapma kararının fayda değeri üzerinde 100 birim negatif etki yaratacağı kabul edilmiştir.

Bu verilerden hareketle lojistik firması faydasını en yüksek kılmak amacıyla, test aracı alıp almama (test yapma\test yapmama) ve hangi marka araç alması gerektiğine karar vermek durumundadır.

İzleyen kesimde, ardışık iki kararın söz konusu olduğu bu problem, çalışmada ele alınan grafiksel teknikler yardımıyla çözülmüş ve en yüksek faydayı sağlayacak karar

alternatifleri belirlenmiştir. Sayısal hesaplamalar için Microsoft Excel programından yararlanılmış ve bu hesaplamalar tablolar biçiminde çözüm sürecine eklenmiştir.

## 2. PROBLEMİN KARAR AĞACI ÇÖZÜMÜ

Lojistik firmasının araç temini kararı, Karar Ağacı yardımıyla alınmak istendiğinde problem öncelikle Karar Ağacı ile gösterilip daha sonra çözülecektir.

### 2.1. Problemin Karar Ağacı Gösterimi

(D) ve (F) marka araçların arıza yapma olasılıkları, F aracı için test yapılması durumunda Test sonuçlarının olasılıkları, Excel programında Tablo 6'da verilen biçimde düzenlenmiştir. F aracı için test yapılması durumunda ek bilgi elde edileceğinden, test yapıldıktan sonra F marka araca ilişkin olasılıklar Bayes kuralı kullanılarak yeniden hesaplanmış ve hesaplama sonucunda elde edilen olasılık değerleri de Tablo 6'da verilmiştir.

Tablo 6. Başlangıç ve Bayes Olasılıkları

Başlangıç Olasılıkları		F için Test Olabilirlikleri		Bayes Olasılıkları	
<b>F için Olasılıklar</b>		P(Tba Fay)	0	P(Fay Tka)	0,44
P(Fay)	0,68	P(Tka Fay)	0,15	P(Fay Tay)	0,94
P(Fka)	0,20	P(Tay Fay)	0,85	P(Fka Tba)	0,32
P(Fba)	0,12	P(Tba Fka)	0,24	P(Fka Tka)	0,51
<b>D için Olasılıklar</b>		P(Tka Fka)	0,60	P(Fka Tay)	0,05
P(Day)	0,86	P(Tay Fka)	0,16	P(Fba Tka)	0,68
P(Dav)	0,14	P(Tba Fba)	0,85	P(Fba Tay)	0,05
<b>F için Test Sonuçlarının Olasılıkları</b>		P(Tka Fba)	0,10	P(Fba Tay)	0,01
P(Tay)	0,80	P(Tay Fba)	0,05		
P(Tka)	0,15				
P(Tba)	0,05				

Bayes olasılıkların hesaplanması için daha önce belirtilen

$$P(\theta_i | x) = \frac{P(x | \theta_i)P(\theta_i)}{\sum_{i=1}^k P(x | \theta_j)P(\theta_j)}$$

formülü kullanılmıştır.

Buna göre Tablo 6'da verilen Bayes olasılıkları aşağıdaki biçimde elde edilmiştir:

$$P(\text{Fay} | \text{Tka}) = \frac{P(\text{Tka} | \text{Fay}) * P(\text{Fay})}{P(\text{Tka} | \text{Fay}) * P(\text{Fay}) + P(\text{Tka} | \text{Fka}) * P(\text{Fka}) + P(\text{Tka} | \text{Fba}) * P(\text{Fba})}$$

$$P(\text{Fay} | \text{Tka}) = \frac{0,15 * 0,68}{0,15 * 0,68 + 0,60 * 0,20 * 0,10 * 0,12}$$

$$P(\text{Fay} | \text{Tka}) = 0,44$$

$$P(\text{Fay} | \text{Tay}) = \frac{P(\text{Tay} | \text{Fay}) * P(\text{Fay})}{P(\text{Tay} | \text{Fay}) * P(\text{Fay}) + P(\text{Tay} | \text{Fka}) * P(\text{Fka}) + P(\text{Tay} | \text{Fba}) * P(\text{Fba})}$$

$$P(\text{Fay} | \text{Tay}) = \frac{0,85 * 0,68}{0,85 * 0,68 + 0,16 * 0,20 * 0,05 * 0,12}$$

$$P(\text{Fay} | \text{Tay}) = 0,94$$

$$P(\text{Fka} | \text{Tba}) = \frac{P(\text{Tba} | \text{Fka}) * P(\text{Fka})}{P(\text{Tba} | \text{Fka}) * P(\text{Fka}) + P(\text{Tba} | \text{Fba}) * P(\text{Fba}) + P(\text{Tba} | \text{Fay}) * P(\text{Fay})}$$

$$P(\text{Fka} | \text{Tba}) = \frac{0,24 * 0,20}{0,24 * 0,20 + 0,85 * 0,12 * 0 * 0,68}$$

$$P(\text{Fka} | \text{Tba}) = 0,32$$

$$P(\text{Fka} | \text{Tka}) = \frac{P(\text{Tka} | \text{Fka}) * P(\text{Fka})}{P(\text{Tka} | \text{Fka}) * P(\text{Fka}) + P(\text{Tka} | \text{Fba}) * P(\text{Fba}) + P(\text{Tka} | \text{Fay}) * P(\text{Fay})}$$

$$P(\text{Fka} | \text{Tka}) = \frac{0,60 * 0,20}{0,60 * 0,20 + 0,10 * 0,12 * 0,15 * 0,68}$$

$$P(\text{Fka} | \text{Tka}) = 0,51$$

$$P(\text{Fka} | \text{Tay}) = \frac{P(\text{Tay} | \text{Fka}) * P(\text{Fka})}{P(\text{Tay} | \text{Fka}) * P(\text{Fka}) + P(\text{Tay} | \text{Fba}) * P(\text{Fba}) + P(\text{Tay} | \text{Fay}) * P(\text{Fay})}$$

$$P(\text{Fka} | \text{Tay}) = \frac{0,16 * 0,20}{0,16 * 0,20 + 0,05 * 0,12 * 0,85 * 0,68}$$

$$P(\text{Fka} | \text{Tay}) = 0,05$$

$$P(\text{Fba} | \text{Tba}) = \frac{P(\text{Tba} | \text{Fba}) * P(\text{Fba})}{P(\text{Tba} | \text{Fba}) * P(\text{Fba}) + P(\text{Tba} | \text{Fka}) * P(\text{Fka}) + P(\text{Tba} | \text{Fay}) * P(\text{Fay})}$$

$$P(\text{Fba} | \text{Tba}) = \frac{0,85 * 0,12}{0,85 * 0,12 + 0,24 * 0,20 * 0 * 0,68}$$

$$P(\text{Fba} | \text{Tba}) = 0,68$$

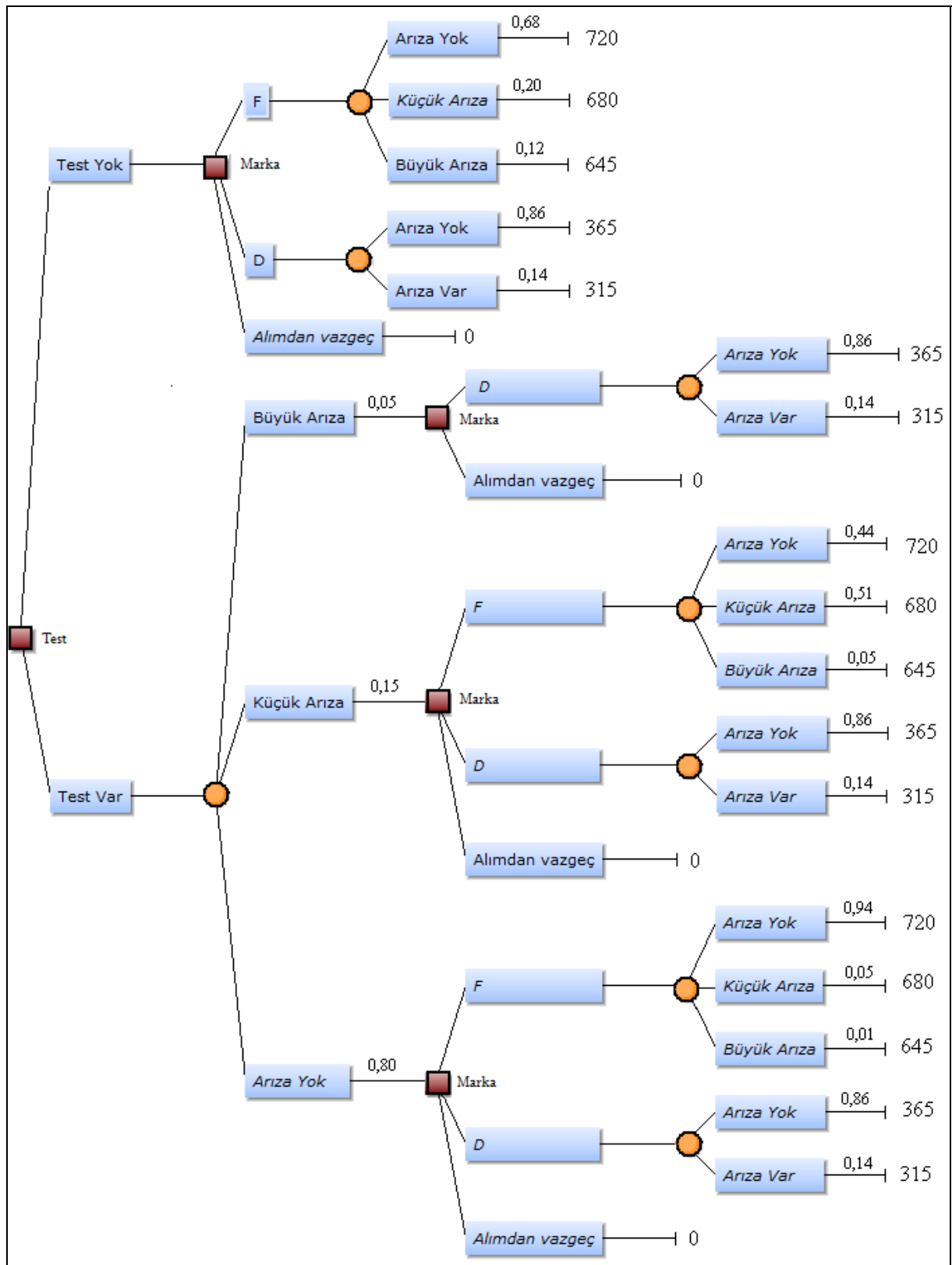
$$P(\text{Fba} | \text{Tka}) = \frac{P(\text{Tka} | \text{Fba}) * P(\text{Fba})}{P(\text{Tka} | \text{Fba}) * P(\text{Fba}) + P(\text{Tka} | \text{Fka}) * P(\text{Fka}) + P(\text{Tka} | \text{Fay}) * P(\text{Fay})}$$

$$P(\text{Fba} | \text{Tka}) = \frac{0,10 * 0,12}{0,10 * 0,12 + 0,60 * 0,20 * 0,15 * 0,68}$$

$$P(\text{Fba} | \text{Tka}) = 0,05$$







Şekil 21. Problemin Karar Ağacı Gösterimi

## 2.2. Karar Ağacının Çözümü

Bilindiği gibi problemin çözümünde öncelikle, bitiş noktalarından geriye doğru beklenen değerler hesaplanmaktadır. Bu amaçla Şekil 21’de verilen Karar Ağacında bir şans düğümüne bağlanan bitiş dalları için beklenen değerler; her bir şans dalının sonucu ile bunlara karşılık gelen olasılıklarının çarpımlarının toplamı biçiminde hesaplanmıştır. İlgili şans düğümleri Şekil 22’de verildiği biçimde harfler ile temsil edildiğinde her bir şans düğümünün beklenen değeri aşağıdaki eşitlikler yardımıyla hesaplanmıştır.

$$A \text{ şans düğümü} = (720*0,68)+(680*0,2)+(645*0,12) = 703$$

$$B \text{ şans düğümü} = (365*0,86)+(315*0,14) = 358$$

$$C \text{ şans düğümü} = (365*0,86)+(315*0,14) = 358$$

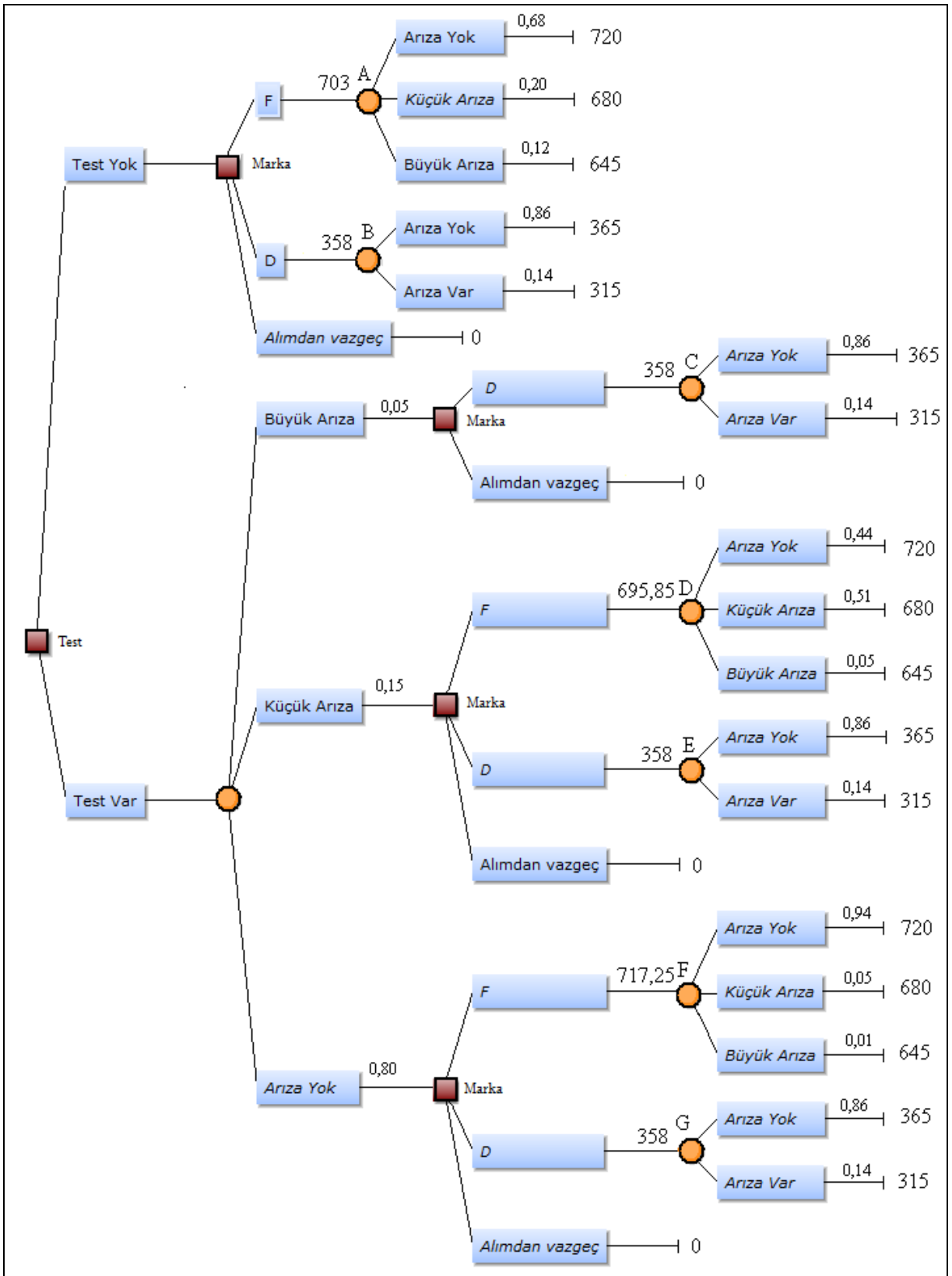
$$D \text{ şans düğümü} = (720*0,44)+(680*0,51)+(645*0,05) = 695,85$$

$$E \text{ şans düğümü} = (365*0,86)+(315*0,14) = 358$$

$$F \text{ şans düğümü} = (720*0,94)+(680*0,05)+(645*0,01) = 717,25$$

$$G \text{ şans düğümü} = (365*0,86)+(315*0,14) = 358$$

Şekil 22’den gibi hesaplanan beklenen değerlerin ağaç üzerinde ilgili şans düğümlerinin yanına eklendiği görülmektedir.



Şekil 22. Şans Düğümüne Bağlanan Bitiş Dalları İçin Beklenen Değerler

Çözüm süreci beklenen değerlerin geriye doğru hesaplanması yolu ile sürdürüleceğinden bir sonraki adımda beklenen değerleri hesaplanacak olan düğümler marka karar düğümleri olarak karşımıza çıkmaktadır.

Karar düğümü için beklenen değer, karar düğümünden çıkan tüm karar dallarının beklenen değerleri içinde en büyük fayda değerine sahip olan olduğu göz önünde tutularak Şekil 23'deki H, I, J, K karar düğümlerinin beklenen değerleri,

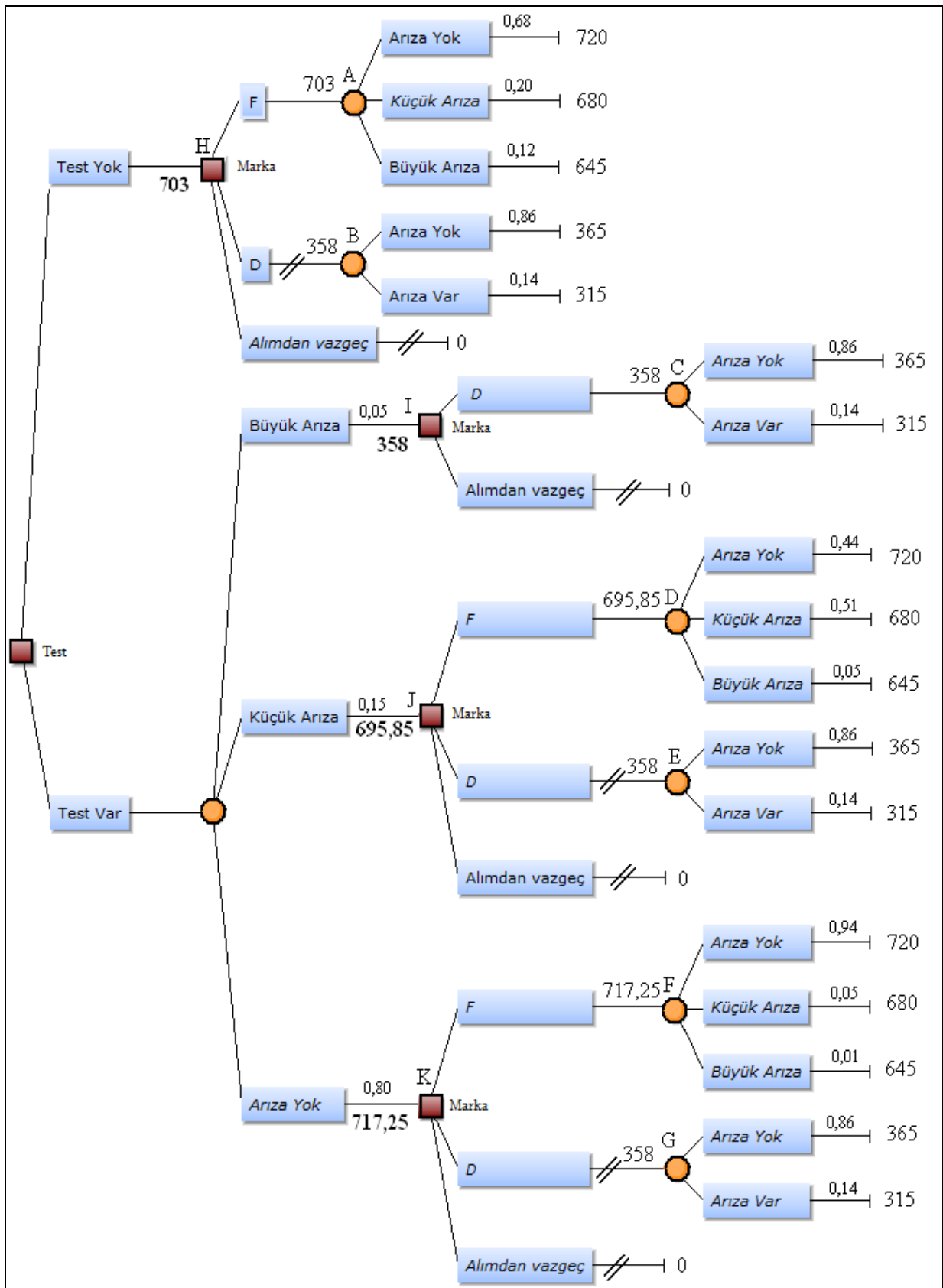
H karar düğümünde beklenen değer:  $ENB[703; 358; 0] = 703$

I karar düğümünde beklenen değer:  $ENB[358; 0] = 358$

J karar düğümünde beklenen değer:  $ENB[695,85; 358; 0] = 695,85$

K karar düğümünde beklenen değer:  $ENB[717,25; 358; 0] = 717,25$

olarak bulunmuştur. Şekil 23'de en yüksek fayda değerine sahip olmayan dallar, üzeri çift çizgi ile işaretlenerek göz ardı edilmiştir.



Şekil 23. Marka Karar Dallarını İçin Beklenen Değerler

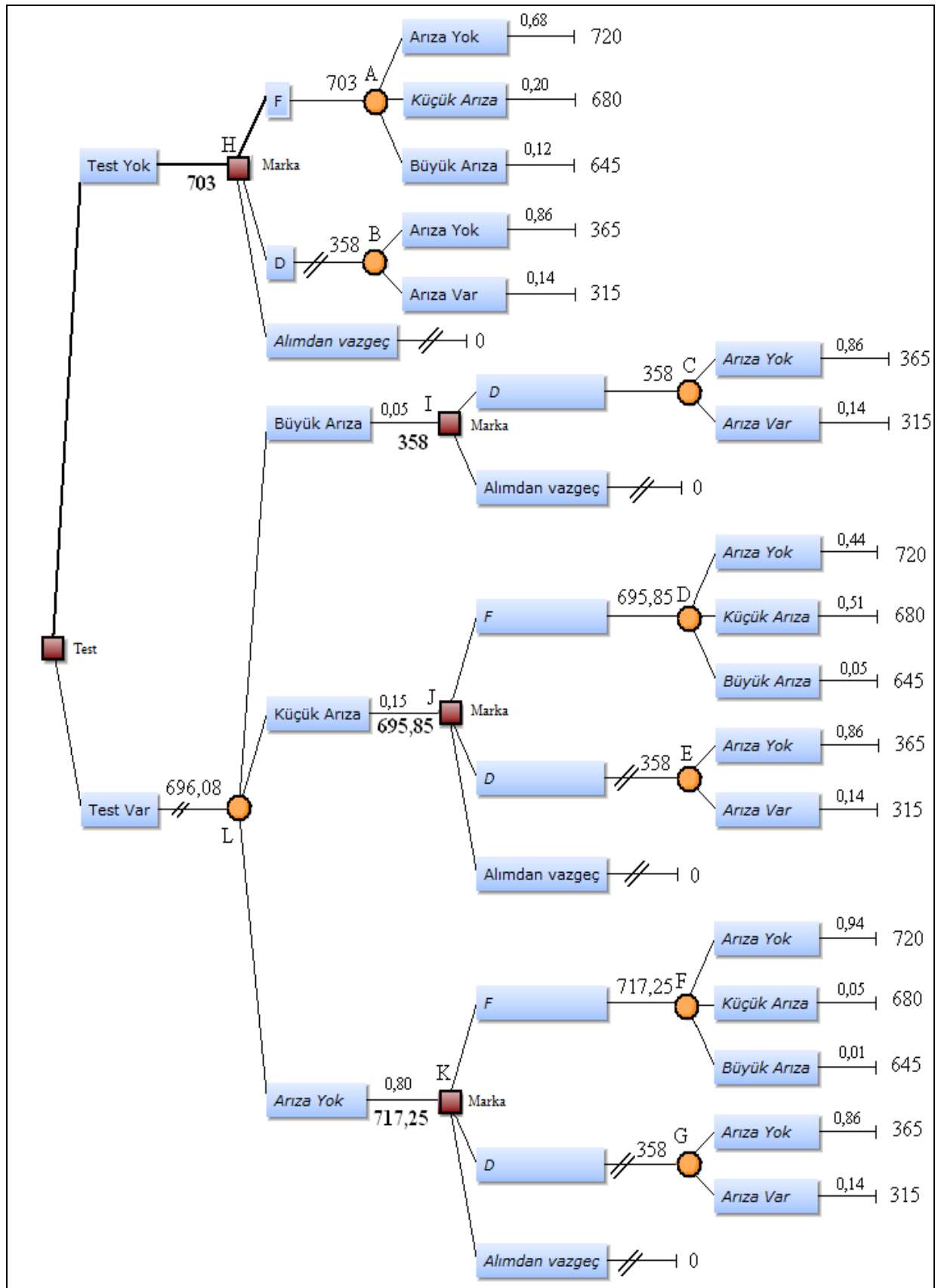
Geriye doğru çözümün bir sonraki adımı, Şekil 24'teki L şans düğümünün beklenen değerinin hesaplanmasıdır. L şans düğümünün beklenen değeri şans düğümünden çıkan şans dallarının olasılıkları ile (önceki adımda hesaplanan) bu dalların sonuna yerleştirilen beklenen değerlerin çarpımlarının toplamı olarak hesaplanır. Buna göre,

L şans düğümünde beklenen değer  $= (358 * 0,05) + (695,85 * 0,15) + (717,25 * 0,8) = 696,08$  olarak bulunur.

Problemin çözümündeki son adım, test kararı düğümünün beklenen değerinin hesaplanmasıdır.

Test kararı düğümünün beklenen değeri  $ENB[703; 696,08] = 703$  olarak belirlenmiş ve grafikte benimsenmeyen karar dalı göz ardı edildiğinin belirtilmesi için çift çizgi ile işaretlenmiştir.

Böylelikle problemin Karar Ağacı çözümü tamamlanmış olmaktadır. En yüksek beklenen fayda **703** olarak bulunmuş ve bu faydayı sağlayan kararlar **test yapmamak** ve **F markasını almak** biçiminde belirlenmiştir. Çözüm sürecinde en iyi olarak belirlenmiş karar dalları Şekil 24'te verilen biçimde kalın olarak vurgulanmıştır.



Şekil 24. Problemin Karar Ağacı Çözümü



Problemin modelleme ve çözüm sürecinden izlenebildiği gibi, Karar Ağacı karar probleminin yapısını tüm ayrıntılarıyla ve kronolojik olarak göstermektedir. Bu açıdan karar probleminin anlaşılmasını ve çözümünü kolaylaştırır. Asimetrik yapıli problemlerde, asimetriyi göstermek için doğrudan senaryoları kullandığından, modele yapay durumlar ve değişkenler eklenmesine gerek kalmamaktadır. Eğer bir değişken senaryo ile ilgili değilse, Karar Ağacı gösterimi bu değişkeni içermeyecektir.

Bu güçlü yanlarına karşın karar probleminde yer alan değişken sayısı arttığında Karar Ağacının boyutunun da buna bağlı olarak büyüyeceği ve gösterimi karmaşıklaştıracağı açıktır. Karar Ağacının boyutu büyüdüğünde, bu olumsuzluğu ortadan kaldırma amacıyla ortak senaryoları birleştirme işlemi uygulanabilirse de bu işlemin kolaylıkla gerçekleştirilemeyeceğine dikkat edilmelidir. Çünkü bu işlem birleşmemiş ağacın tamamını oluşturmayı ve sonrasında tekrarlanan alt ağaçların belirlenerek birleştirilmesini gerektirir. Bu da Karar Ağacı gösteriminin temel darboğazı olarak kabul edilip Karar Ağacı tekniğini, küçük karar problemlerinin gösterimi için kullanmakla sınırlandırır. Problemde yer alan bazı olasılıkların yeniden hesaplanabilmesine olanak sağlayan ek bilgi olduğunda, olasılıklar Karar Ağacı oluşturulmadan önce Bayes kuralı ile yeniden hesaplanır. Olasılıklar üzerinde bu şekilde ön işlem yapılması ayrı bir hesaplama gayreti gerektirir.

### **3. PROBLEMİN ETKİ DİYAGRAMI ÇÖZÜMÜ**

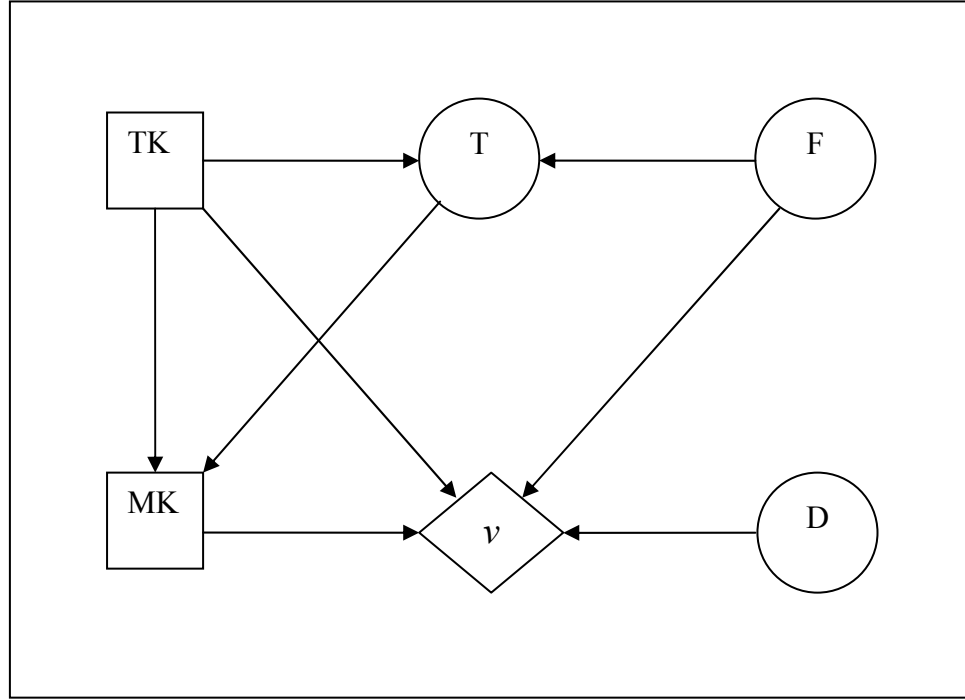
Lojistik firmasının karar problemi, Etki Diyagramı yardımıyla çözülmek istendiğinde problem öncelikle Etki Diyagramı ile gösterilip daha sonra çözülecektir.

#### **3.1. Problemin Etki Diyagramı Gösterimi**

Bilindiği gibi, problemin Etki Diyagramı ile gösterimi ilişkisel, fonksiyonel ve sayısal olmak üzere üç farklı düzeyde ele alınmaktadır.

### 3.1.1. İlişkisel Düzey

Problemde yer alan karar değişkenleri, şans değişkenleri ve fayda değerine ilişkin düğümler ve bu düğümler arasındaki ilişkileri gösteren yaylardan oluşan grafik Etki Diyagramının ilişkisel düzeyi olarak Şekil 25'te verilmiştir.



Şekil 25. Başlangıç Aşamasında Etki Diyagramı

Şekil 25'te TK karar düğümü test kararını, MK karar düğümü marka kararını temsil etmektedir.  $TK \rightarrow MK$  yayı ise MK karar noktasında TK kararının bilindiği göstermektedir.

Şekil 25'te T, F ve D biçiminde üç şans düğümü yer almaktadır. T düğümü F marka araç için gerçekleştirilecek Test sonuçlarını, F düğümü F marka aracın arıza durumlarını, D düğümü ise D marka aracın arıza durumların temsil etmektedir.  $F \rightarrow T$  yayı, T'nin ortaya çıkma olasılıklarının F'nin durumuna bağlı olduğunu, diğer bir ifade ile T'nin olasılıklarının koşullu olduğunu belirtmektedir.  $TK \rightarrow T$  yayı T'ye ilişkin olasılıkların TK'nın çıktılara bağlı olduğu belirtmektedir.  $T \rightarrow MK$  yayı ise, MK kararı verildiğinde T'nin çıktısının bilindiğini göstermektedir. D şans düğümün önceli olan diğer bir şans düğümünün bulunmaması, D'nin olasılıklarının koşullu olmadığını göstermektedir. Değer

(fayda) düğümü  $v$ 'ye yönlendirilen oklar,  $v$  düğümünün tanım kümesini belirlediğinden,  $T$  düğümü dışındaki tüm düğümler faydayı etkilemektedir.

### 3.1.2. Fonksiyonel Düzey

Bu düzeyde her bir karar düğümü için alternatifler ile her bir şans düğümü için olasılık dağılımları ve olabirlikler belirlenmektedir. Probleme ilişkin söz konusu parametreler aşağıda listelenmiştir.

TK karar düğümüne ilişkin alternatifler:

- $\sim t$ : test yapmama kararı
- $t$ : test yapma kararı

MK karar düğümüne ilişkin alternatifler:

- $h$ : hiçbir araç almama kararı
- $d$ : D marka araç alma kararı
- $f$ : F marka araç alma kararı

F şans düğümü için olasılık dağılımları:

- $P(\text{Fay})$ : F marka aracın arıza yapmama olasılığı
- $P(\text{Fka})$ : F marka aracın küçük arıza yapma olasılığı
- $P(\text{Fba})$ : F marka aracın büyük arıza yapma olasılığı

D şans düğümü için olasılık dağılımları:

- $P(\text{Day})$ : D marka aracın arıza yapmama olasılığı
- $P(\text{Dav})$ : D marka aracın arıza yapma olasılığı

T şans düğümü için olasılık dağılımları:

- $P(\text{Tay})$ : F aracı için test yapıldığında test sonucunda arıza olmama olasılığı
- $P(\text{Tka})$ : F aracı için test yapıldığında test sonucunda küçük arıza olma olasılığı
- $P(\text{Tba})$ : F aracı için test yapıldığında test sonucunda büyük arıza olma olasılığı

T şans düğümü için olabirlikler:

$P(T_{ba}|F_{ay})$  : Gerçekte arıza yapması beklenmeyen F aracı için test sonucunun “büyük arıza” olması olasılığı.

$P(T_{ka}|F_{ay})$  : Gerçekte arıza yapması beklenmeyen F aracı için test sonucunun “küçük arıza” olması olasılığı.

$P(T_{ay}|F_{ay})$  : Gerçekte arıza yapması beklenmeyen F aracı için test sonucunun “arıza yok” olması olasılığı.

$P(T_{ba}|F_{ka})$  : Gerçekte küçük arıza yapması beklenen F aracı için test sonucunun “büyük arıza” olması olasılığı.

$P(T_{ka}|F_{ka})$  : Gerçekte küçük arıza yapması beklenen F aracı için test sonucunun “küçük arıza” olması olasılığı.

$P(T_{ay}|F_{ka})$  : Gerçekte küçük arıza yapması beklenen F aracı için test sonucunun “arıza yok” olması olasılığı.

$P(T_{ba}|F_{ba})$  : Gerçekte büyük arıza yapması beklenen F aracı için test sonucunun “büyük arıza” olması olasılığı.

$P(T_{ka}|F_{ba})$  : Gerçekte büyük arıza yapması beklenen F aracı için test sonucunun “küçük arıza” olması olasılığı.

$P(T_{ay}|F_{ba})$  : Gerçekte büyük arıza yapması beklenen F aracı için test sonucunun “arıza yok” olması olasılığı.

### 3.1.3. Sayısal Düzey

Sayısal düzeyin olasılık dağılımları ve fayda değerlerine ilişkin sayısal belirlemelerin gerçekleştirildiği düzey olduğu bilinmektedir. Probleme ilişkin olasılık dağılımlarının sayısal değerleri Tablo 8’de verilmiştir.

Tablo 8. Olasılık Değerleri Tablosu

F için Olasılıklar		F için Test Olasılıkları	
P(Fay)	0,68	P(Tba Fay)	0
P(Fka)	0,20	P(Tka Fay)	0,15
P(Fba)	0,12	P(Tay Fay)	0,85
D için Olasılıklar		P(Tba Fka)	0,24
P(Day)	0,86	P(Tka Fka)	0,60
P(Dav)	0,14	P(Tay Fka)	0,16
F için Test Sonuçlarının Olasılıkları		P(Tba Fba)	0,85
P(Tay)	0,80	P(Tka Fba)	0,10
P(Tka)	0,15	P(Tay Fba)	0,05
P(Tba)	0,05		

Tablo 9 ise arıza durumlarına ve test yapıp yapmama durumuna göre F ve D marka araçların net faydalarını göstermektedir.

Tablo 9. Net Fayda Değerlerinin Belirlenmesi

Fayda Değerleri			Net Fayda Değerleri		
	F	D	Test yapılmadığında ~t	Test yapıldığında t	
İstenen renge boyama	100	100			
Lastik kullanımı	85	20			
İyi niyet garantisi	90	40			
Özel araç alım indirimi	80	20			
Yıllık vergi	100	20			
Km başına bakım	90	40			
Şasi seçeneği	0	100			
Yakıt maliyeti	75	25			
Ek kasa yapımı	100	0			
Toplam fayda değeri	720	365			
Küçük arıza	-40				
Büyük arıza	-75	-50			
Test maliyeti	-100				

Tablo 9’da hesaplanan net fayda değerleri çözüm aşamasına girdi olacak biçimde Tablo 10’da düzenlenmiştir.

Tablo 10. Fayda Değerleri Tablosu

		Fayda Değerleri Tablosu					
		Day	Dav	Fay	Fka	Fba	H
TK	MK						
t	d	265	215	0	0	0	0
t	f	0	0	620	580	545	0
t	h	0	0	0	0	0	-100
~t	d	365	315	0	0	0	0
~t	f	0	0	720	680	645	0
~t	h	0	0	0	0	0	0

### 3.2. Etki Diyagramının Çözümü

Problemin Etki Diyagramı çözümü, çalışmanın ikinci bölümünde 2.8. Etki Diyagramı Çözüm Algoritması başlığı ile verilen algoritma adımları uygulanarak elde edilir.

Etki Diyagramı çözüm algoritmasının 1. adımındaki, Etki Diyagramının tek bir değer düğümü içermesi ve Etki Diyagramında döngü bulunmaması koşulları sağlandığından problemin Etki Diyagramı çözümüne başlanabileceği görülmektedir. Problemin Etki Diyagramında ardılı olmayan herhangi bir şans ya da karar düğümü (kısır düğüm) bulunmadığından algoritmanın 2. adımı uyarınca işlemler sürdürülür. Diyagramda, doğrudan ardılı değer düğümü olan MK düğümü bulunmasına karşın doğrudan ardılı değer düğümü olan TK, F ve D düğümleri MK karar düğümünün doğrudan önceli olmadıklarından MK düğümünün bu aşamada silinmeyeceği görülmektedir. Benzer özellikler TK düğümü için de geçerli olduğundan TK karar düğümü de bu aşamada silinmeden diyagramda bırakılacaktır. Diğer bir anlatımla algoritmanın 2. a) adımındaki koşulu sağlayan bir karar düğümü bulunmadığından 2. b) adımına geçilecektir. 2. b)’de belirtilen biçimde yalnızca değer düğümünün doğrudan önceli olan D şans düğümü, beklenen değeri hesaplanarak diyagramdan silinecektir. D düğümünde beklenen değer hesaplanması, Karar Ağacında şans düğümleri için beklenen değer hesaplamasına benzemektedir. D düğümünün silinmesine ilişkin hesaplamalar, D düğümünün silinmesini izleyen aşamalarda geçerli olacak fayda değerinin hesaplanmasına yöneliktir. Bu nedenle Etki Diyagramından bir şans düğümü silindiğinde değer düğümünün tanım kümesinde olan

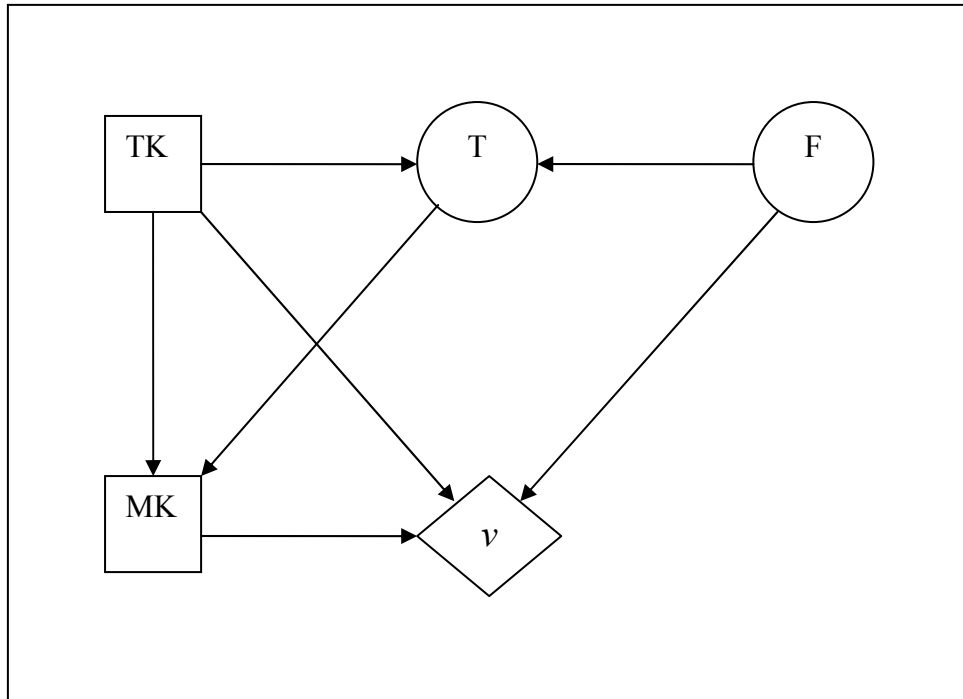
tüm düğümler dikkate alınarak hesaplama yapılmaktadır. Değer düğümünün tanım kümesinde yer alan düğümler Tablo 11’de  $\theta_{\{TK, MK, F, D\}}$  ile belirtilip bu düğümlerin alabilecekleri farklı durumlar tablonun ilk sütununda sıralanmıştır. Tablo 10’dan hareketle, birinci sütundaki durumlara bağlı olarak ortaya çıkan fayda değerleri tablonun ikinci sütununda ( $\nu$ ) başlığı altında düzenlenmiştir. Buna göre örneğin, ( $\nu$ ) sütununda yer alan ilk değer, TK karar noktasında t (test yap) kararı, MK karar noktasında d (D marka aracı al) kararı verildiğinde D marka araçta Day (D’de arıza yok) durumunun ortaya çıkması sonucunda elde edilecek fayda değerinin 265 olduğunu göstermektedir. Bu satırda ilk sütunda yer alan Fay durumu MK karar noktasında d seçilmiş olduğundan dikkate alınmamaktadır. Benzer biçimde ilk sütunda yer alan t f Fay Day durumlarının ortaya çıkması durumunda elde edilecek 620 değeri; TK karar noktasında t (test yap) kararı, MK karar noktasında f (F marka aracı al) kararı verildiğinde F marka araçta Fay (F’de arıza yok) durumunun ortaya çıkması sonucunda elde edilecek fayda değeridir. Burada da Day durumu dikkate alınmamıştır.  $\sigma$  ile tanımlanan sütunda yer alan değerler silinecek düğümün olasılıklarıdır. Bu sütunda yer alan olasılık değerleri Tablo 8 yardımıyla düzenlenmiştir.  $\nu * \sigma$  sütunu  $\nu$  sütununda yer alan değerler ile  $\sigma$  sütununda yer alan değerlerin çarpım sonuçlarıdır. Tablo 11’in son sütununda yer alan değerler ise, D düğümünün silinmesi sonrasında kalan TK, MK ve F düğümlerinin birlikte ortaya çıkaracağı fayda değerleridir. Buna göre son sütunda yer alan ilk değer (258), TK karar noktasında t, MK karar noktasında d seçimi yapıldığında Fay durumunda ortaya çıkacak fayda değeridir. Bu sütunda bulunan fayda değerleri F düğümünün silinmesi aşamasında kullanılacak fayda değerleri olarak  $\nu_1$  ile gösterilmiştir. Tablonun diğer satırları, ortaya çıkabilecek tüm durumlar için benzer işlemlerin gerçekleştirilmesiyle oluşturulmuştur.

Tablo 11. D Dügümünün Silinmesine İlişkin Hesaplamalar

$\theta_{(TK, MK, F, D)}$				P(D)		$\nu * \sigma$	$(\nu * \sigma)^{\downarrow_{(TK, MK, F)}} = \nu_1$
TK	MK	F	D	$\nu$	$\sigma$		
t	d	Fay	Day	265	0,86	227,90	258
t	d	Fay	Dav	215	0,14	30,10	
t	d	Fka	Day	265	0,86	227,90	258
t	d	Fka	Dav	215	0,14	30,10	
t	d	Fba	Day	265	0,86	227,90	258
t	d	Fba	Dav	215	0,14	30,10	
t	f	Fay	Day	620	0,86	533,20	620
t	f	Fay	Dav	620	0,14	86,80	
t	f	Fka	Day	580	0,86	498,80	580
t	f	Fka	Dav	580	0,14	81,20	
t	f	Fba	Day	545	0,86	468,70	545
t	f	Fba	Dav	545	0,14	76,30	
t	h	Fay	Day	-100	0,86	-86	-100
t	h	Fay	Dav	-100	0,14	-14	
t	h	Fka	Day	-100	0,86	-86	-100
t	h	Fka	Dav	-100	0,14	-14	
t	h	Fba	Day	-100	0,86	-86	-100
t	h	Fba	Dav	-100	0,14	-14	
~t	d	Fay	Day	365	0,86	313,90	358
~t	d	Fay	Dav	315	0,14	44,10	
~t	d	Fka	Day	365	0,86	313,90	358
~t	d	Fka	Dav	315	0,14	44,10	
~t	d	Fba	Day	365	0,86	313,90	358
~t	d	Fba	Dav	315	0,14	44,10	
~t	f	Fay	Day	720	0,86	619,20	720
~t	f	Fay	Dav	720	0,14	100,80	
~t	f	Fka	Day	680	0,86	584,80	680
~t	f	Fka	Dav	680	0,14	95,20	
~t	f	Fba	Day	645	0,86	554,70	645
~t	f	Fba	Dav	645	0,14	90,30	
~t	h	Fay	Day	0	0,86	0	0
~t	h	Fay	Dav	0	0,14	0	
~t	h	Fka	Day	0	0,86	0	0
~t	h	Fka	Dav	0	0,14	0	
~t	h	Fba	Day	0	0,86	0	0
~t	h	Fba	Dav	0	0,14	0	

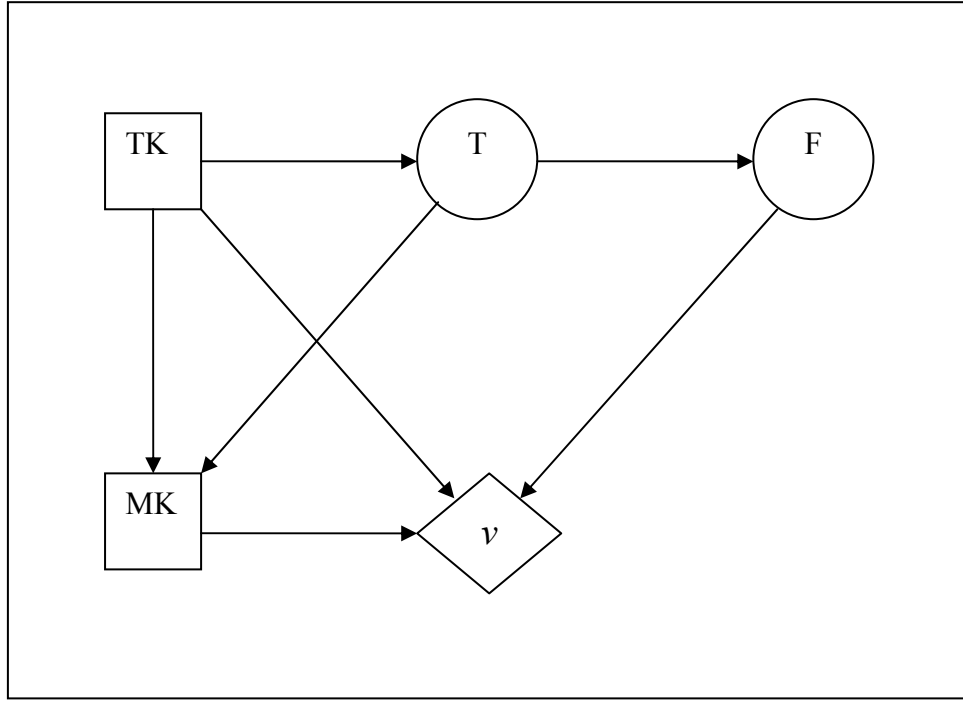


D düğümünün silinmesi sonrasında Etki Diyagramı Şekil 26'da verilen biçime dönüşmüştür. Sonraki aşamada hangi düğümün silineceği kararı için algoritmanın 2. adımına dönülmelidir. 2. a)'daki koşul bir önceki aşamada açıklanan nedenlerle, bu aşamada da karşılanmadığı için 2. b) adımına geçilecektir. Problemimizde F şans düğümü değer düğümünün doğrudan önceli olmasına rağmen T şans düğümünün de doğrudan önceli olduğundan algoritmanın 2. b) adımındaki koşul sağlanamamaktadır. Bu nedenle algoritmanın 2. c) adımına geçilecek ve 2. c)'deki koşulu sağlayan  $F \rightarrow T$  yayı ters çevrilecektir.



Şekil 26. D Düğümünün Silinmesi Sonrasında Etki Diyagramı

$F \rightarrow T$  yayının ters çevrilmesi sonrasındaki Etki Diyagramı Şekil 27'de verilmiştir.



Şekil 27.  $F \rightarrow T$  Yayının Ters Çevrilmesi

Yay ters çevirme aşamasında gerçekleştirilen hesaplamalar Karar Ağacı tekniğinde olasılıkların Bayes kuralı ile yeniden hesaplanması işlemine karşılık gelmektedir.  $F \rightarrow T$  yayı T düğümünün olasılıklarının F düğümüne bağlı olarak koşullu olduğunu belirtirken, yay ters çevrildikten sonra  $T \rightarrow F$  yayı F düğümünün olasılıklarının T düğümüne bağlı olarak koşullu olduğunu belirtir. Dolayısıyla  $F \rightarrow T$  yayının ters çevrilmesi aşamasındaki hesaplamalar sonucunda  $P(F|T)$  olasılığı bulunur.

$F \rightarrow T$  yayının ters çevrilmesine ilişkin hesaplamalar Tablo 12’de verilmiştir. Tablonun ilk sütununda TK, T ve F düğümleri birlikte ele alındığında ortaya çıkabilecek tüm durumlar listelenmiştir. Bu aşamada söz konusu üç düğümün ele alınma nedeni, Şekil 27’den izlenebileceği gibi F’nin olasılığının T’de ortaya çıkan duruma, T’nin olasılığının da TK’da ortaya çıkan duruma bağlı olmasıdır. İkinci sütunda yer alan değerler ilk satırdan izlenebileceği üzere,  $P(F)$ ’dir. Bu aşamada yapılan hesaplamalar sonucunda yukarıda belirtildiği gibi  $P(F|T)$  olasılığı başka bir ifade ile  $P(F)$ ’nin yeni olasılıkları belirlendiği için ikinci sütunda yer alan olasılık değerleri  $\delta$  ile, son sütunda yer alan yeni olasılık değerleri  $\delta_1$  ile gösterilmiştir.  $\delta$  değerleri sayısal düzeyde oluşturulan Tablo 8’den elde edilmiştir.

Tablo 12. F → T Yayının Ters Çevrilmesine İlişkin Hesaplamalar

$\theta_{(TK,I,F)}$			P(F)	P(T F)	P(T,F)		P(F T)
TK	T	F	$\delta$	$\pi$	$\delta*\pi$	$(\delta*\pi)^{\downarrow(T)}=\pi_1$	$\delta*\pi / (\delta*\pi)^{\downarrow(T)}=\delta_1$
t	Tay	Fay	0,68	0,85	0,578	0,616	0,94
t	Tay	Fka	0,20	0,16	0,032		0,05
t	Tay	Fba	0,12	0,05	0,006		0,01
t	Tka	Fay	0,68	0,15	0,102	0,234	0,44
t	Tka	Fka	0,20	0,60	0,12		0,51
t	Tka	Fba	0,12	0,10	0,012		0,05
t	Tba	Fay	0,68	0	0	0,15	0,00
t	Tba	Fka	0,20	0,24	0,048		0,32
t	Tba	Fba	0,12	0,85	0,102		0,68
t	Tsy	Fay	0,68	0	0	0	0
t	Tsy	Fka	0,20	0	0		0
t	Tsy	Fba	0,12	0	0		0
~t	Tay	Fay	0,68	0	0	0	0
~t	Tay	Fka	0,20	0	0		0
~t	Tay	Fba	0,12	0	0		0
~t	Tka	Fay	0,68	0	0	0	0
~t	Tka	Fka	0,20	0	0		0
~t	Tka	Fba	0,12	0	0		0
~t	Tba	Fay	0,68	0	0	0	0
~t	Tba	Fka	0,20	0	0		0
~t	Tba	Fba	0,12	0	0		0
~t	Tsy	Fay	0,68	1	0,68	1	0,68
~t	Tsy	Fka	0,20	1	0,2		0,20
~t	Tsy	Fba	0,12	1	0,12		0,12

Benzer şekilde  $\pi$  ile gösterilen olasılık değerleri de Tablo 8’de düzenlenen  $P(T|F)$  olasılıklarıdır. İzleyen sütunda  $P(T,F)$  ile gösterilen T ve F’nin birleşik olasılığı  $\delta*\pi$  biçiminde hesaplanmıştır. Buna göre  $\delta*\pi$  sütunundaki ilk değer, TK noktasında t kararı verildiğinde T düğümünde Tay, F düğümünde Fay durumlarının birlikte ortaya çıkma olasılığıdır. Bu birleşik olasılık içinde T’nin payını (T’nin marjinal olasılığını) gösteren  $(\delta*\pi)^{\downarrow T} = \pi_1$  sütunu T’nin farklı durumları için  $P(T,F)$  birleşik olasılıklarının toplamı biçiminde hesaplanmıştır. Buna göre 0,616 değeri, önceki sütunda yer alan ilk üç değer toplamıdır. Son sütundaki değerler ise  $\delta*\pi / (\delta*\pi)^{\downarrow T}$  biçiminde birleşik olasılık değerlerinin marjinal olasılık değerine bölünmesi ile elde edilmiştir.

$F \rightarrow T$  yayının ters çevrilmesi sonrası Şekil 27’de verilen biçime dönüşen diyagramda F düğümü, yalnızca değer düğümünün doğrudan önceli biçimine geldiği için algoritma adımlarından 2. b) uyarınca beklenen değeri hesaplanarak silinecektir. F düğümünün silinmesine ilişkin hesaplamalar D düğümünün silinmesinde gerçekleştirilen hesaplamalarla paralellik göstermektedir ve hesaplama ayrıntıları Tablo 13’te verilmiştir. Buna göre, Şekil 27’den değer düğümünün tanım kümesinde TK, MK, ve F düğümlerinin olduğu görülmektedir. MK kararı verildiğinde T’nin sonucu da biliniyor olacağından, Tablo 13’ün ilk sütununda söz konusu dört düğümün birlikte alabileceği durumlar sıralanmıştır. İkinci sütunda yer alan  $v_1$  değerleri Tablo 11’de bulunan fayda değerleridir. Buna göre  $v_1$  sütununun ilk değeri (258) TK karar noktasında t, MK karar noktasında d seçimi yapıldığında Fay durumunda ortaya çıkacak fayda değeri olup Tablo 11’den elde edilmiştir.  $\delta_1$  sütununda yer alan değerler ise  $P(F|T)$  olasılığı olup Tablo 12’nin son sütununda yer alan olasılık değerleridir.

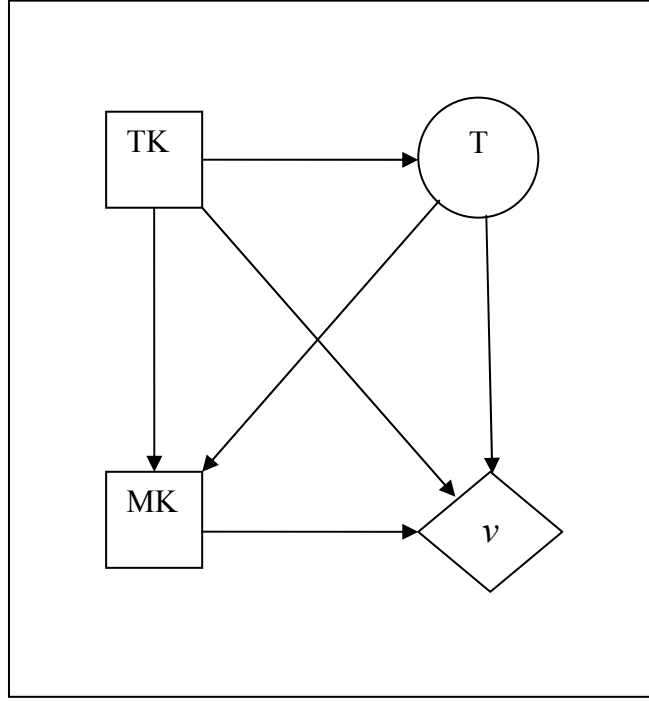
$v_1 * \delta_1$  sütunu  $v_1$  sütununda yer alan değerler ile  $\delta_1$  sütununda yer alan değerlerin çarpım sonuçları olup birinci sütunda verilen durumların beklenen değerlerini göstermektedir. Son sütundaki sayılar ise, F düğümünün silinmesi sonrasında kalan TK, T ve MK düğümlerinin birlikte ortaya çıkaracağı fayda değerleridir. Buna göre son sütunda yer alan ilk değer (258), TK karar düğümünde t kararı verildiğinde, T şans düğümünde Tay durumu ortaya çıktığında ve MK karar düğümünde d seçimi yapıldığında ortaya çıkacak fayda değeridir. Bu sütunda bulunan fayda değerleri, bir sonraki aşamaya taşınacak fayda değerleri olarak  $v_2$  ile gösterilmiştir. Tablonun diğer satırları ortaya çıkabilecek tüm durumlar için benzer işlemlerin gerçekleştirilmesiyle oluşturulmuştur.

Tablo 13. F Düğümünün Silinmesine İlişkin Hesaplamalar

$\theta_{(TK,I,MK,F)}$				P(F T)			
TK	T	MK	F	$\nu_1$	$\delta_1$	$\nu_1 * \delta_1$	$(\nu_1 * \delta_1)^{\downarrow_{(TK,MK)}} = \nu_2$
t	Tay	d	Fay	258	0,94	242,084	258
t	Tay	d	Fka	258	0,05	13,4026	
t	Tay	d	Fba	258	0,01	2,51299	
t	Tka	d	Fay	258	0,44	112,462	258
t	Tka	d	Fka	258	0,51	132,308	
t	Tka	d	Fba	258	0,05	13,2308	
t	Tba	d	Fay	258	0,00	0	258
t	Tba	d	Fka	258	0,32	82,56	
t	Tba	d	Fba	258	0,68	175,44	
t	Tsy	d	Fay	258	0	0	0
t	Tsy	d	Fka	258	0	0	
t	Tsy	d	Fba	258	0	0	
t	Tay	f	Fay	620	0,94	581,753	617,2
t	Tay	f	Fka	580	0,05	30,1299	
t	Tay	f	Fba	545	0,01	5,30844	
t	Tka	f	Fay	620	0,44	270,256	595,6
t	Tka	f	Fka	580	0,51	297,436	
t	Tka	f	Fba	545	0,05	27,9487	
t	Tba	f	Fay	620	0,00	0	556,2
t	Tba	f	Fka	580	0,32	185,6	
t	Tba	f	Fba	545	0,68	370,6	
t	Tsy	f	Fay	620	0	0	0
t	Tsy	f	Fka	580	0	0	
t	Tsy	f	Fba	545	0	0	
t	Tay	h	Fay	-100	0,94	-93,831	-100
t	Tay	h	Fka	-100	0,05	-5,1948	
t	Tay	h	Fba	-100	0,01	-0,974	
t	Tka	h	Fay	-100	0,44	-43,59	-100
t	Tka	h	Fka	-100	0,51	-51,282	
t	Tka	h	Fba	-100	0,05	-5,1282	
t	Tba	h	Fay	-100	0	0	-100
t	Tba	h	Fka	-100	0,32	-32	
t	Tba	h	Fba	-100	0,68	-68	
t	Tsy	h	Fay	-100	0	0	0
t	Tsy	h	Fka	-100	0	0	
t	Tsy	h	Fba	-100	0	0	

~t	Tay	d	Fay	358	0	0	0
~t	Tay	d	Fka	358	0	0	0
~t	Tay	d	Fba	358	0	0	0
~t	Tka	d	Fay	358	0	0	0
~t	Tka	d	Fka	358	0	0	0
~t	Tka	d	Fba	358	0	0	0
~t	Tba	d	Fay	358	0	0	0
~t	Tba	d	Fka	358	0	0	0
~t	Tba	d	Fba	358	0	0	0
~t	Tsy	d	Fay	358	0,68	243,44	358
~t	Tsy	d	Fka	358	0,20	71,6	0
~t	Tsy	d	Fba	358	0,12	42,96	0
~t	Tay	f	Fay	720	0	0	0
~t	Tay	f	Fka	680	0	0	0
~t	Tay	f	Fba	645	0	0	0
~t	Tka	f	Fay	720	0	0	0
~t	Tka	f	Fka	680	0	0	0
~t	Tka	f	Fba	645	0	0	0
~t	Tba	f	Fay	720	0	0	0
~t	Tba	f	Fka	680	0	0	0
~t	Tba	f	Fba	645	0	0	0
~t	Tsy	f	Fay	720	0,68	489,6	703
~t	Tsy	f	Fka	680	0,20	136	0
~t	Tsy	f	Fba	645	0,12	77,4	0
~t	Tay	h	Fay	0	0	0	0
~t	Tay	h	Fka	0	0	0	0
~t	Tay	h	Fba	0	0	0	0
~t	Tka	h	Fay	0	0	0	0
~t	Tka	h	Fka	0	0	0	0
~t	Tka	h	Fba	0	0	0	0
~t	Tba	h	Fay	0	0	0	0
~t	Tba	h	Fka	0	0	0	0
~t	Tba	h	Fba	0	0	0	0
~t	Tsy	h	Fay	0	0,68	0	0
~t	Tsy	h	Fka	0	0,20	0	0
~t	Tsy	h	Fba	0	0,12	0	0

F düğümünün silinmesi sonrasındaki Etki Diyagramı Şekil 28’de verilen biçime dönüşmüştür.



Şekil 28. F Düğümünün Silinmesi Sonrasında Etki Diyagramı

Şekil 28’den izlenebileceği gibi, MK karar düğümü değer düğümünün doğrudan öncelidir. Değer düğümünün doğrudan önceli olan diğer tüm düğümler de (TK ve T ) aynı zamanda MK düğümünün doğrudan önceli olduğundan, bu aşamada algoritmanın 2. a) adımı uyarınca MK karar düğümünün silinmesi gerektiği açıkça görülmektedir.

Bir karar düğümünün silinmesi aşamasında, farklı alternatifler arasından en iyi sonucu veren alternatif seçilerek optimal politika belirlenir ve karar düğümü silinir. Buna göre tablo 14’ün ilk sütunu değer düğümünün tanım kümesini oluşturan TK, T ve MK düğümlerinin birlikte alabileceği durumları göstermektedir.  $v_2$  sütunu birinci sütunda yer alan durumlara göre ortaya çıkacak fayda değeri olup bir önceki aşamada hesaplanan ve Tablo 13’te yer alan değerlerdir. MK düğümü silindiğinde TK ve T düğümlerinin farklı durumlarında ortaya çıkacak değerleri gösteren bir sonraki sütun,  $v_2$  sütununda TK, T ve MK düğümlerinin birlikte oluşturduğu fayda değerleri içinden en yüksek değerin seçilmesi biçiminde belirlenmiş ve yeni fayda değeri olarak  $v_3$  ile gösterilmiştir. Buna göre  $v_3$  sütunundaki ilk değer, TK karar düğümünde t kararı verildiğinde T düğümünde Tay

durumu ortaya çıktığında MK karar noktasında en yüksek faydayı sağlayan seçeneğin 617,192 fayda değeri ile f seçeneği olacağını belirtmektedir. Bu seçim sonucu optimal politika başlığı ile son sütunda yer almaktadır.

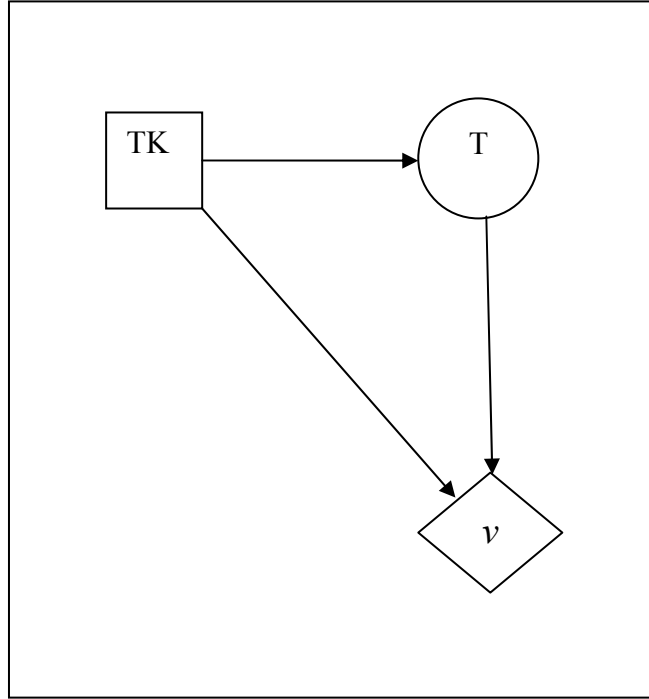
Tablo 14. MK Düğümünün Silinmesine İlişkin Hesaplamalar

$\theta_{\{TK,T,MK\}}$					Optimal politika
TK	T	MK	$v_2$	$(v_2)^{\downarrow\{TK,T\}} \Rightarrow v_3$	$\Psi_{MK}$
t	Tay	d	258	617,19	Test yap (t),
t	Tay	f	617,192		Test sonucu (Tay) olursa
t	Tay	h	-100		f modelini al
t	Tka	d	258	595,64	Test yap (t),
t	Tka	f	595,641		Test sonucu (Tka) olursa
t	Tka	h	-100		f modelini al
t	Tba	d	258	556,20	Test yap (t),
t	Tba	f	556,2		Test sonucu (Tba) olursa
t	Tba	h	-100		f modelini al
t	Tsy	d	0	0	Test yap (t),
t	Tsy	f	0		(Tsy) durumu ortaya
t	Tsy	h	0		çıkamadığından yapay durum
~t	Tay	d	0	0	Test yapma (~t),
~t	Tay	f	0		(Tay) durumu ortaya
~t	Tay	h	0		çıkamadığından yapay durum
~t	Tka	d	0	0	Test yapma (~t),
~t	Tka	f	0		(Tka) durumu ortaya
~t	Tka	h	0		çıkamadığından yapay durum
~t	Tba	d	0	0	Test yapma (~t),
~t	Tba	f	0		(Tba) durumu ortaya
~t	Tba	h	0		çıkamadığından yapay durum
~t	Tsy	d	358	703,00	Test yapma (~t),
~t	Tsy	f	703		Test sonucu (Tsy) olur
~t	Tsy	h	0		f modelini al

Bu noktada dikkat edilmesi gereken, Test yap (t), Test sonucu (Tba) olursa f modelini al biçiminde ifade edilen optimal politikayı veren seçeneğin, problemimizdeki kısıtlama nedeniyle seçilemeyeceğidir.  $v_3$  sütunundaki değerler bir sonraki aşamanın fayda değerlerini oluşturduğundan, sonraki aşamada bu noktaya dikkat edilmesi gerekmektedir.



MK düğümünün silinmesi sonrasında elde edilen Etki Diyagramı Şekil 29’da verilmiştir.



Şekil 29. MK Düğümünün Silinmesi Sonrasında Etki Diyagramı

Bu aşamada öncelikle algoritmanın 2. b) adımına uygun olarak T düğümü silinmelidir. T düğümünün silinmesi sonrasında, değer düğümü dışında tek düğüm olarak kalan TK karar düğümü silinecektir.

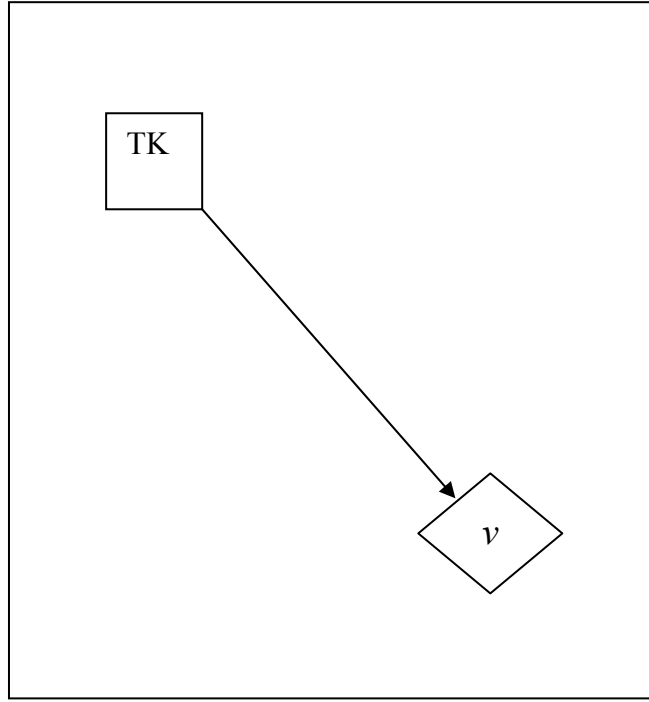
T düğümü daha önce silinen şans düğümlerinde yapıla geldiği biçimde, beklenen değeri belirlenerek silinecektir. Bu amaçla oluşturulan Tablo 15’in ilk sütunu, daha önceki aşamalarda olduğu gibi, değer düğümünün tanım kümesindeki düğümler olarak TK ve T düğümlerinin birlikte alabileceği durumları listelemektedir. Söz konusu iki düğümün farklı durumlarına göre ortaya çıkan fayda değerleri Tablo 14 yardımıyla  $v_3$  sütununda düzenlenmiştir. Tablo 14’te t, Tba durumunda ortaya çıkacak en büyük fayda değeri 556,20 olmasına rağmen önceki aşamada belirtildiği üzere, problemimizdeki kısıtlamadan dolayı t, Tba durumunda D markasının fayda değeri (258) Tablo 15’e taşınmıştır. P(T) olasılık değerlerini yansıtan  $\alpha$  sütunu Tablo 8 yardımıyla düzenlenmiştir.

Tablo 15. T ve TK Dügümlerinin Silinmesine İlişkin Hesaplamalar

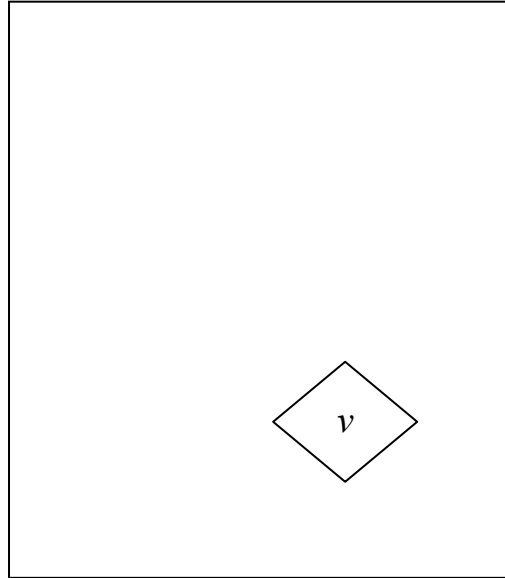
$\theta_{(TK,T)}$			P(T)			Optimal politika
TK	T	$\nu_3$	$\alpha$	$\nu_3 * \alpha$	$(\nu_3 * \alpha)^{I(TK, MK)} = \nu_4$	$\Psi_{TK}$
t	Tay	617,19	0,80	493,7532	596,00	Test yap (t) test sonucu ne çıkarsa çıksın en iyi fayda f modelini almak
t	Tka	595,64	0,15	89,34615		
t	Tba	258	0,05	12,9		
t	Tsy	0	0	0		
~t	Tay	0	0	0	703	Test yapma (~t), f modelini al
~t	Tka	0	0	0		
~t	Tba	0	0	0		
~t	Tsy	703,00	1	703		

Tablonun  $(\nu_3 * \alpha)$  sütununda T düğümünün her bir durumuna ilişkin olasılık değerleri ile TK ve T düğümlerinin birlikte alabilecekleri durumlarda ortaya çıkacak fayda değerlerinin çarpım sonuçları bulunmuştur. Bir sonraki sütunda  $\nu_4$  ile ifade edilen fayda değeri T düğümünün silinmesi sonrasında TK düğümünün fayda değerini yansıtmaktadır. Bu nedenle TK düğümünün silinmesine ilişkin ayrı bir tablonun hazırlanmasına gerek kalmaksızın  $\nu_4$  sütunundaki değerler karşılaştırılıp en yüksek faydayı sağlayan alternatif son sütunda belirlenmiştir. Buna göre optimal politika **test yapmamak (~t)**, ve **f modelini almak (f)** biçimindedir. Bu uygulandığında elde edilecek fayda değeri **703** olarak ortaya çıkacaktır.

T düğümünün silinmesi sonrasındaki Etki Diyagramı ile TK düğümünün silinmesi sonrasındaki Etki Diyagramı sırasıyla Şekil 30 ve Şekil 31'den izlenebilir.



Şekil 30. T Düğümünün Silinmesi Sonrasında Etki Diyagramı



Şekil 31. TK Düğümünün Silinmesi Sonrasında Etki Diyagramı

Görüldüğü üzere Etki Diyagramı gösterimi, Karar Ağacı gösterimine göre karar probleminin yapısını grafiksel olarak daha öz biçimde sunabilmektedir. Bu anlamda Karar Ağacının boyuta ilişkin zayıflığını giderecek bir tekniktir. Öte yandan değişkenler arasında Karar Ağacı gösteriminden açıkça izlenemeyen bağımlılık ve bağımsızlık ilişkilerini açık bir şekilde gösterebilmektedir. Gösterimdeki bu üstünlüğüne rağmen çözüm sürecinde simetrik karar problemleri için kullanışlı olup yüksek asimetri özelliği gösteren problemlerin çözümünde kullanışlı değildir. Bunun nedeni çözüm sürecinde ortaya çıkabilecek tüm durumların dikkate alınması ve asimetriyi gösterebilmek için probleme yapay durumlar eklemesidir. Yapay durumlar ve bu durumlara ilişkin olasılık ve fayda fonksiyonları kullanılarak problem simetrikleştirilmekte ve daha sonra çözülmektedir. Ancak bu yapıldığında problemin yapısı karmaşıklaşmaktadır. Bu da çözüm için gerekli olan zaman ve çaba artışına neden olmaktadır. Zaman içinde asimetrik karar problemlerini simetrikleştirmeden, Etki Diyagramı ile modelleyip çözmeye yönelik çalışmalar gerçekleştirilmiştir. Bu çalışmalarda önerilen açılımlar salt Etki Diyagramı olmayıp, Etki Diyagramı ve Karar Ağacının bir karışımı niteliğindedir.

#### **4. PROBLEMİN DEĞERLEME AĞI ÇÖZÜMÜ**

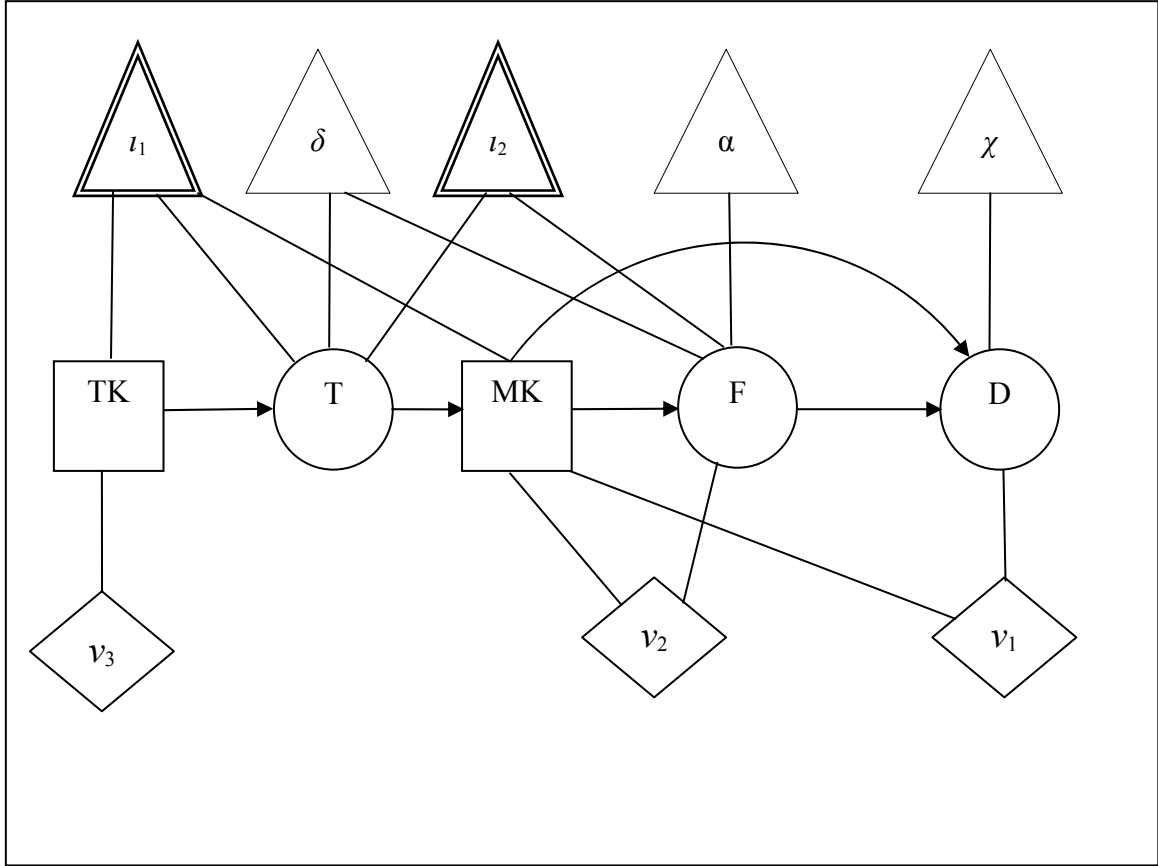
Problemin Değerleme Ağı çözümünde de önceki grafiksel tekniklerde olduğu gibi problem öncelikle Değerleme Ağı ile gösterilip daha sonra çözülecektir.

##### **4.1. Problemin Değerleme Ağı Gösterimi**

Problemin Değerleme Ağı ile gösterimi de grafiksel, bağımlılık ve sayısal olmak üzere üç düzey biçiminde düzenlenmektedir.

##### **4.1.1. Grafiksel Düzey**

Bu düzeyde problem “*Değerleme Ağı*” adı verilen bir grafik yardımıyla betimlenmektedir. Araç edinme problemine ilişkin Değerleme Ağı Şekil 32’de verilmiştir.



Şekil 32. Problemin Değerleme Ağı ile Gösterimi

Şekil 32’de yer alan Değerleme Ağındaki düğümlerin temsil ettiği değişken ve değerlemeler izleyen kısımda açıklanmıştır:

**Karar düğümleri:** Grafikte, karar değişkenlerini temsil etmek üzere TK ve MK ile gösterilen iki karar düğümü bulunmaktadır.

TK: Test kararını

MK: Marka kararını

temsil etmektedir.

**Şans düğümleri:** Şekil 32’de verilen Değerleme Ağında rassal değişkenleri temsil etmek üzere, T, F ve D ile temsil edilen üç şans düğümü yer almaktadır.

T: Testin olası sonuçlarını

F: F marka aracın olası arıza durumlarını

D: D marka aracın olası arıza durumlarını

temsil etmektedir.

Bilindiği gibi değişkenlerin farklı durumlarda alacağı değerler *çerçeve* olarak adlandırılmakta ve grafik üzerinde gösterilmeyip bir sonraki inceleme düzeyi olan bağımlılıkta belirlenmektedir.

**Gösterge düğümleri:** Grafikte gösterge değerlemelerini temsil eden  $\iota_1$  ve  $\iota_2$  biçiminde iki gösterge düğümü bulunmaktadır. Yönsüz doğrularla gösterge düğümüne doğrudan birleştirilen düğümler, gösterge değerlemelerinin tanım kümesini oluşturduğundan Şekil 32'den izlenebildiği gibi  $\iota_1$  düğümünün tanım kümesi  $\{TK, T, MK\}$  iken  $\iota_2$  gösterge düğümünün tanım kümesi  $\{T, F\}$ 'dir.

Gösterge düğümleri karar ve şans değişkenlerinin birleşik çerçevelerine ilişkin nitel kısıtlamaları temsil ettiklerinden,

$\iota_1$  gösterge değerlemesinin temsil ettiği nitel kısıtlama: Test sonuçları yalnızca “Test yapılınsın” kararı verildiğinde elde edilebilir ve MK düğümündeki seçenekler TK düğümündeki seçeneklere ve test sonuçlarına bağlıdır.

$\iota_2$  gösterge değerlemesinin temsil ettiği nitel kısıtlama: F marka araçta gerçekte “arıza yok” iken, test sonucunun “büyük arıza” olması olasılığı 0'dır.

**Olasılık Düğümleri:** Problemdaki şans değişkenlerinin olasılık dağılımlarını göstermektedir. Şekil 32'de  $\delta$ ,  $\alpha$  ve  $\chi$  ile temsil edilen üç olasılık düğümü bulunmaktadır. Olasılık düğümlerinden şans düğümlerine çizilen doğrular olasılık düğümlerinin tanım kümelerini belirtmektedir. Söz konusu doğruların yönlü olmasının olasılığın koşullu olduğunu gösterdiği de bilinmektedir. Şekil 32'de değişkenler ile olasılık düğümleri arasına çizilen tüm doğrular yönsüz olduğundan ilgili olasılıkların koşullu olasılık olmadıkları açıktır.  $\delta$  olasılık düğümünün tanım kümesinin  $\{T, F\}$ ,  $\alpha$  olasılık düğümünün tanım kümesinin  $\{F\}$  ve  $\chi$  olasılık düğümünün tanım kümesinin  $\{D\}$  olduğu Şekil 32'den anlaşılmaktadır.

**Fayda Dügümleri:** Değerleme Ağında fayda değerlemelerini temsil eden  $v_1$ ,  $v_2$  ve  $v_3$  biçiminde üç fayda düğümü yer almaktadır.  $v_1$ 'in tanım kümesi  $\{MK, D\}$ ,  $v_2$ 'nin tanım kümesi  $\{MK, F\}$  ve  $v_3$ 'ün tanım kümesi  $\{TK\}$ 'dir.

**Bilgi Kısıtları:** Karar ve şans düğüm çiftleri arasındaki yönlü yaylar bilgi kısıtları olarak karar vericinin hangi noktada neyi bildiğini yansıttığına göre  $TK \rightarrow T$  yayı, karar vericinin TK'nın çerçevesinden bir alternatif seçtiğinde T'nin gerçek değerini bilmediğini gösterir.  $T \rightarrow MK$  yayı ise, karar vericinin MK çerçevesi içinden bir alternatif seçtiğinde T'nin gerçek değerini biliyor olacağını göstermektedir. Değerleme Ağındaki diğer karar ve şans düğümleri arasındaki yönlü yaylar da benzer şekilde yorumlanır.

Bilindiği gibi, bilgi kısıtları çözüm aşaması boyunca silinecek değişkenlerin silinme sırasının belirlenmesinde de kullanılmaktadır. Daha önce de belirtildiği gibi, karar düğümünden şans düğümüne yönlendirilmiş bir yol var ise şans düğümü karar düğümünden önce silinmelidir. Tersine şans düğümünden karar düğümüne yönlendirilmiş yol var olduğunda karar düğümü şans düğümünden önce silinmelidir.

#### 4.1.2. Bağımlılık Düzeyi

Bağımlılık düzeyinde tüm değişkenlerin çerçeveleri ile gösterge değerlemelerinin ayrıntıları belirlenmektedir.

Olasılık ve fayda değerlemelerindeki tüm sayısal bilgi yalnızca etkin çerçeveler için tanımlanacağından ve çözüm aşamasında tüm sayısal hesaplamalar etkin çerçeveler üzerinde gerçekleştirileceğinden bağımlılık düzeyinde değişkenlerin etkin çerçeveleri belirlenecektir. Buna göre karar ve şans değişkenlerinin etkin çerçeveleri;

TK karar düğümü için,

$\sim t$ : test yapmama kararı

$t$ : test yapma kararı

olmak üzere

$$\Omega_{TK} = \{\sim t, t\};$$

MK karar düğümü için,

h: hiçbir araç almama kararı

d: D marka araç alma kararı

f : F marka araç alma kararı

olmak üzere  $\Omega_{MK} = \{h, d, f\}$  ;

T şans düğümü için,

Tsy: Test sonucunun elde edilmemesi durumu

Tba: Test sonucunda büyük arıza gözlenmesi durumu

Tka: Test sonucunda küçük arıza gözlenmesi durumu

Tay: Test sonucunda arıza gözlenmeme (arıza yok) durumu

olmak üzere  $\Omega_T = \{Tsy, Tba, Tka, Tay\}$  ;

F şans düğümü için,

Fay: F marka araç alındığında, aracın arıza yapmama durumu

Fka: F marka araç alındığında, aracın küçük arıza yapma durumu

Fba: F marka araç alındığında, aracın büyük arıza yapma durumu

olmak üzere  $\Omega_F = \{Fay, Fka, Fba\}$  ;

D şans düğümü için,

Day: D marka araç alındığında, aracın arıza yapmama durumu

Dav: D marka araç alındığında, aracın arıza yapma durumu

olmak üzere  $\Omega_D = \{Day, Dav\}$

biçimdedir.

Gösterge değerlemelerinin ayrıntıları;

$t_1$  için

$\Omega_{t_1} = \{(\sim t, Tsy, h), (\sim t, Tsy, d), (\sim t, Tsy, f), (t, Tba, h), (t, Tba, d), (t, Tka, h), (t, Tka, d), (t, Tka, f), (t, Tay, h), (t, Tay, d), (t, Tay, f)\}$  ;

ve  $t_2$  için

$\Omega_{t_2} = \{(Fay, Tsy), (Fay, Tka), (Fay, Tay), (Fka, Tsy), (Fka, Tba), (Fka, Tka), (Fka, Tay), (Fba, Tsy), (Fba, Tba), (Fba, Tka), (Fba, Tay)\}$

olarak belirlenir.



$\iota_1$  gösterge değerlemesinin test yapılması ve test sonucunda “büyük arıza” olması durumunda F marka aracın alınmayacağı koşulunun problemde yarattığı asimetriyi yansıtmak üzere (t, Tba, f) durumunu içermediği görülmektedir.

$\iota_2$  gösterge değerlemesi ise F marka araçta gerçekte “arıza yok” iken, test sonucunun “büyük arıza” olması olasılığının 0 olduğunu yansıtmak üzere (Fay, Tba) durumunu içermemektedir.

#### 4.1.3. Sayısal Düzey

Bilindiği gibi sayısal düzeyde fayda ve olasılık değerlemelerinin sayısal ayrıntıları belirlenmektedir. Problemde yer alan fayda değerlemelerine ilişkin ayrıntılar Tablo 16’da olasılık değerlemelerine ilişkin ayrıntılar ise Tablo 17’de verilmiştir.

Tablo 16. Değerleme Ağı Fayda Değerlemeleri Tablosu

$\Omega_{\{MK,D\}}$		$\nu_1$	$\Omega_{\{MK,F\}}$		$\nu_2$
MK	D		MK	F	
h	Day	0	h	Fay	0
h	Dav	0	h	Fka	0
d	Day	365	h	Fba	0
d	Dav	315	d	Fay	0
f	Day	0	d	Fka	0
f	Dav	0	d	Fba	0
			f	Fay	720
			f	Fka	680
			f	Fba	645

$\Omega_{\{TK\}}$		$\nu_3$
TK		
~t		0
t		-100

Tablo 17. Değerleme Ağı Olasılık Değerlemeleri Tablosu

$\Omega_{(D)}$	$\chi$
D	
Day	0,86
Dav	0,14

$\Omega_{(F)}$	$\alpha$
F	
Fay	0,68
Fka	0,20
Fba	0,12

$\Omega_{(F,T)}$		$\delta$
F	T	
Fay	Tsy	1
Fay	Tka	0,15
Fay	Tay	0,85
Fka	Tsy	1
Fka	Tba	0,24
Fka	Tka	0,60
Fka	Tay	0,16
Fba	Tsy	1
Fba	Tba	0,85
Fba	Tka	0,10
Fba	Tay	0,05

#### 4.2. Değerleme Ağı'nın Çözümü

Değerleme Ağı'nın çözümünde kullanılan füzyon algoritmasında bir değişken, değişkenle ilgili tüm değerlendirme (fayda, olasılık, gösterge) kümeleri üzerinde füzyon (eritme) işleminin uygulanması ile silinmektedir. Daha önceden belirtildiği biçimde tüm hesaplamalar etkin çerçeve üzerinde gerçekleştirilmektedir.

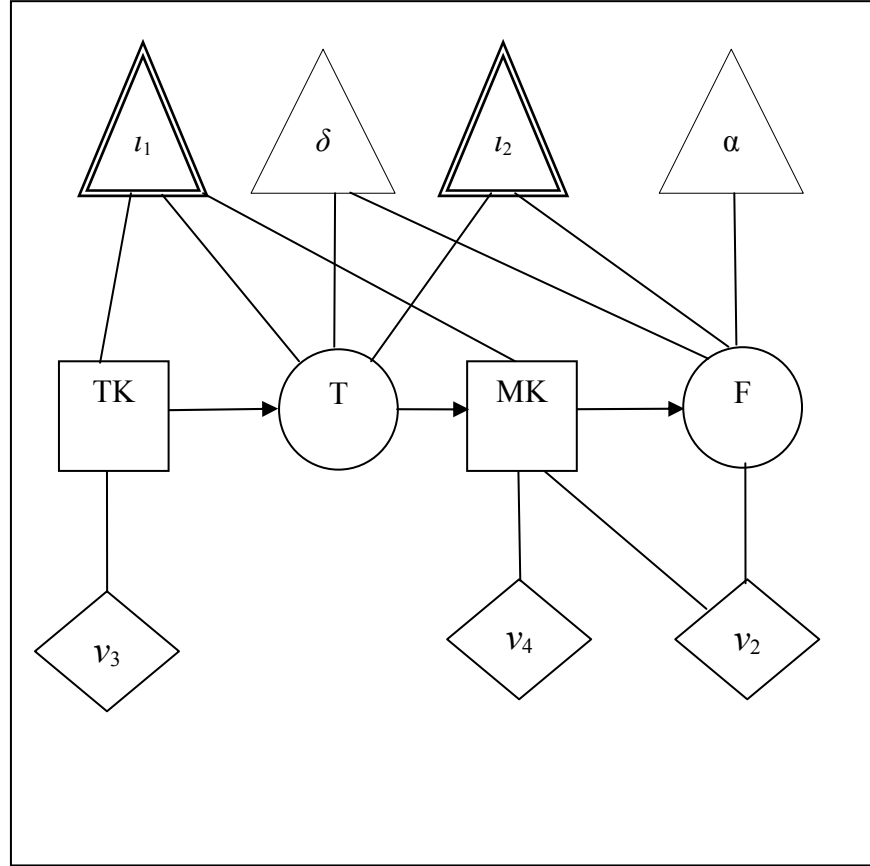
Bilgi kısıtlarına göre, Şekil 32'de verilen Değerleme Ağındaki değişkenlerin silinme sırası D, F, MK, T ve TK biçimindedir.

Problemdeki karar ve şans değişkenleri ile ilgili füzyon işlemleri aşağıda verilmiştir.

**D düğümü ile ilgili füzyon:** İlk olarak  $\{l_1, l_2, v_2, v_3, (v_1 \otimes \chi)^{\downarrow MK}, \alpha, \delta\}$  değerlemeleri içinden D düğümü ile ilgili olan değerlemeler eritilecektir. Bu amaçla  $\chi^{\downarrow \emptyset}$  1'e özdeş olduğu için

$Fus_D = \{l_1, l_2, v_1, v_2, v_3, \chi, \alpha, \delta\} = \{l_1, l_2, v_2, v_3, (v_1 \otimes \chi)^{\downarrow MK}, \alpha, l_1\}$  olarak yazılır.

$v_4, (v_1 \otimes \chi)^{\downarrow MK}$ 'yi göstermek üzere, D düğümü ile ilgili füzyon sonucu grafiksel olarak Şekil 33'te verilmektedir.



Şekil 33. D Düzümü ile İlgili Füzyon İşlemi Sonrası Değerleme Ağı

Füzyon işlemine ilişkin sayısal hesaplamalar ise Tablo 18'den izlenebilir.

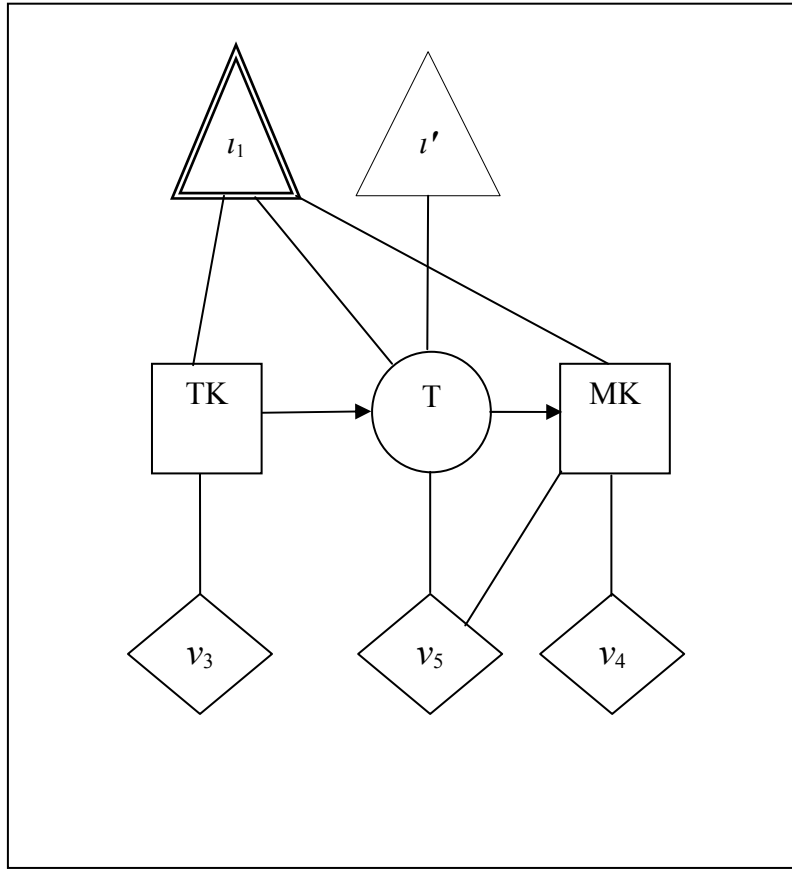
Tablo 18. D Düzümü ile İlgili Füzyon İşleminin Sayısal Hesaplamaları

$\Omega_{(MK,D)}$					
MK	D	$v_1$	$\chi$	$v_1 \otimes \chi$	$(v_1 \otimes \chi)^{I(MK)} = v_4$
h	Day	0	0,86	0	0
h	Dav	0	0,14	0	
d	Day	365	0,86	313,9	358
d	Dav	315	0,14	44,1	
f	Day	0	0,86	0	0
f	Dav	0	0,14	0	

**F düğümü ile ilgili füzyon:**  $\{l_1, l_2, v_2, v_3, v_4, \alpha, \delta\}$  değerlemeleri içinden F düğümü ile ilgili olan değerlemeler eritilecektir. Füzyon formülü,

$F_{us_F} = \{l_1, l_2, v_2, v_3, v_4, \alpha, \delta\} = \{l_1, v_3, v_4, (v_2 \otimes (\alpha \otimes \delta \otimes l_2) / (\alpha \otimes \delta \otimes l_2))^{\downarrow T} \}^{\downarrow \{MK, T\}}, (\alpha \otimes \delta \otimes l_2)^{\downarrow T}$  olarak yazılır.

$v_5, (v_2 \otimes (\alpha \otimes \delta \otimes l_2) / (\alpha \otimes \delta \otimes l_2))^{\downarrow T} \}^{\downarrow \{MK, T\}}$ 'yi,  $l'$ ,  $(\alpha \otimes \delta \otimes l_2)^{\downarrow T}$ 'yi göstermek üzere, F düğümü ile ilgili füzyonun sonucu grafiksel olarak Şekil 34'te verildiği gibidir.



Şekil 34. F Düğümü ile İlgili Füzyon İşlemi Sonrası Değerleme Ağı

$l' = (\alpha \otimes \delta \otimes l_2)^{\downarrow T}$  olduğundan  $v_5 = (v_2 \otimes (\alpha \otimes \delta \otimes l_2) / l')^{\downarrow \{MK, T\}}$  olarak yazılır.

F düğümü ile ilgili füzyon işlemine ilişkin sayısal hesaplamalar Tablo 19 ve Tablo 20'de verilmiştir.

Tablo 19. F Düzümü ile İlgili Füzyon İşleminin Sayısal Hesaplamaları (1)

$\Omega_{(T,F)}$						
T	F	$\alpha$	$\delta \otimes \mathbf{1}_2 = \mathbf{1}$	$\alpha \otimes \mathbf{1}$	$(\alpha \otimes \mathbf{1})^{\mathbf{1T}=\mathbf{1}}$	$(\alpha \otimes \mathbf{1})/(\alpha \otimes \mathbf{1})^{\mathbf{1T}}$
Tsy	Fay	0,68	1	0,68	1	0,68
Tsy	Fka	0,20	1	0,2		0,2
Tsy	Fba	0,12	1	0,12		0,12
Tba	Fka	0,20	0,24	0,048	0,15	0,32
Tba	Fba	0,12	0,85	0,102		0,68
Tka	Fay	0,68	0,15	0,102	0,234	0,44
Tka	Fka	0,20	0,60	0,12		0,51
Tka	Fba	0,12	0,10	0,012		0,05
Tay	Fay	0,68	0,85	0,578	0,616	0,94
Tay	Fka	0,20	0,16	0,032		0,05
Tay	Fba	0,12	0,05	0,006		0,01

Tablo 20. F Düzümü ile İlgili Füzyon İşleminin Sayısal Hesaplamaları (2)

$\Omega_{\{T,MK,F\}}$						
T	MK	F	$v_2$	$(\alpha \otimes \mathbf{1})/(\alpha \otimes \mathbf{1})^{\downarrow T}$	$v_2 \otimes (\alpha \otimes \mathbf{1})/(\alpha \otimes \mathbf{1})^{\downarrow T} = v'$	$(v')^{\downarrow \{T,MK\}} = v_5$
Tsy	h	Fay	0	0,68	0	0
Tsy	h	Fka	0	0,2	0	
Tsy	h	Fba	0	0,12	0	
Tsy	d	Fay	0	0,68	0	0
Tsy	d	Fka	0	0,2	0	
Tsy	d	Fba	0	0,12	0	
Tsy	f	Fay	720	0,68	489,6	703
Tsy	f	Fka	680	0,2	136	
Tsy	f	Fba	645	0,12	77,4	
Tba	h	Fka	0	0,32	0	0
Tba	h	Fba	0	0,68	0	
Tba	d	Fka	0	0,32	0	0
Tba	d	Fba	0	0,68	0	
Tka	h	Fay	0	0,44	0	0
Tka	h	Fka	0	0,51	0	
Tka	h	Fba	0	0,05	0	
Tka	d	Fay	0	0,44	0	0
Tka	d	Fka	0	0,51	0	
Tka	d	Fba	0	0,05	0	
Tka	f	Fay	720	0,44	313,85	695,64
Tka	f	Fka	680	0,51	348,72	
Tka	f	Fba	645	0,05	33,08	
Tay	h	Fay	0	0,94	0	0
Tay	h	Fka	0	0,05	0	
Tay	h	Fba	0	0,01	0	
Tay	d	Fay	0	0,94	0	0
Tay	d	Fka	0	0,05	0	
Tay	d	Fba	0	0,01	0	
Tay	f	Fay	720	0,94	675,58	717,19
Tay	f	Fka	680	0,05	35,32	
Tay	f	Fba	645	0,01	6,28	

Tüm hesaplamaların etkin çerçeveler üzerinde gerçekleştirildiğinden, MK düğümüne ilişkin füzyon öncesinde  $\{T, MK, F\}$  'nin etkin çerçevesinin belirlenmesi gerekmektedir.

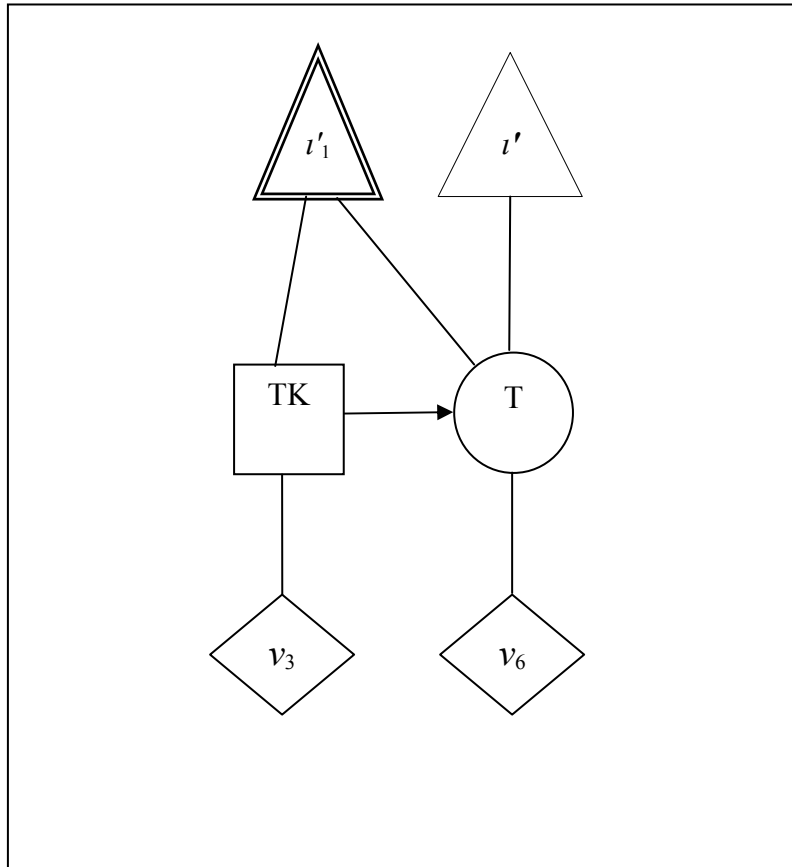
$\{T, MK, F\}$  'nin etkin çerçevesi  $\iota_1^{\downarrow \{T, MK\}} \otimes \iota_2$  olarak hesaplanır.

Etkin çerçeve üzerinde çalışmanın yararı,  $T = Tba$ ,  $MK = f$ ,  $F = Fay$  vb. gibi mümkün olmayan senaryolar için fayda hesaplaması yapılmaması biçiminde özetlenebilir.

**MK düğümü ile ilgili füzyon:**  $\{l_1, v_3, v_4, v_5, l'\}$  değerlemeleri içinden MK düğümü ile ilgili olan değerlemeler eritilecektir. MK düğümü ile ilgili füzyon

$Fus_{MK} = \{l_1, v_3, v_4, v_5, l'\} = \{(l_1 \otimes \xi_{MK})^{\downarrow\{TK, T\}}, v_3, (v_4 \otimes v_5)^{\downarrow T}, l'\}$  biçiminde formüle edilir ve MK için karar fonksiyonunun gösterge değerlemesi  $\xi_{MK}$  ile gösterilir.  $\xi_{MK}$  değeri  $(v_4 \otimes v_5)^{\downarrow\{T\}}$ 'nin hesaplanması sırasında bulunmuştur.

$v_6, (v_4 \otimes v_5)^{\downarrow T}$ 'yi ve  $l_1' \{l_1 \otimes \xi_{MK}\}^{\downarrow\{TK, T\}}$ 'yi göstermek üzere, MK düğümü ile ilgili füzyon sonucu grafiksel olarak Şekil 35'te verildiği gibidir.



Şekil 35. MK Düğümü ile İlgili Füzyon İşlemi Sonrası Değerleme Ağı

MK düğümü ile ilgili füzyon işlemine ilişkin sayısal hesaplamalar da Tablo 21’de verilmiştir.

Tablo 21. MK Düğümü ile İlgili Füzyon İşleminin Sayısal Hesaplamaları

$\Omega_{(T,MK)}$						
T	MK	$v_4$	$v_5$	$v_4 \otimes v_5$	$(v_4 \otimes v_5)^{\downarrow T=v}$	$\Psi_{MK}$
Tsy	h	0	0	0	703	f
Tsy	d	358	0	358		
Tsy	f	0	703	703		
Tba	h	0	0	0	358	d
Tba	d	358	0	358		
Tka	h	0	0	0	695,64	f
Tka	d	358	0	358		
Tka	f	0	695,64	695,641		
Tay	h	0	0	0	717,19	f
Tay	d	358	0	358		
Tay	f	0	717,19	717,1916		

$i_1'$  ilişkin hesaplamalar sembolik olarak izleyen biçimde gösterilebilir. MK için karar fonksiyonunun etkin çerçevesi  $\Omega_{\xi_{MK}}$ ,

$\Omega_{\xi_{MK}} = \{(Tsy, d), (Tba, d), (Tka, d), (Tay, f)\}$  biçimindedir.

$i_1$  daha önce tanımlanmakla birlikte,  $i_2 \otimes \xi_{MK}$  'nin etkin çerçevesi,

$\Omega_{i_2 \otimes \xi_{MK}} = \{(\sim t, Tsy, d), (t, Tba, d), (t, Tka, d), (t, Tay, f)\}$  olarak yazılır.

Son olarak  $i_1' = (i_1 \otimes \xi_{MK})^{\downarrow \{TK, T\}}$  'nin etkin çerçevesi,

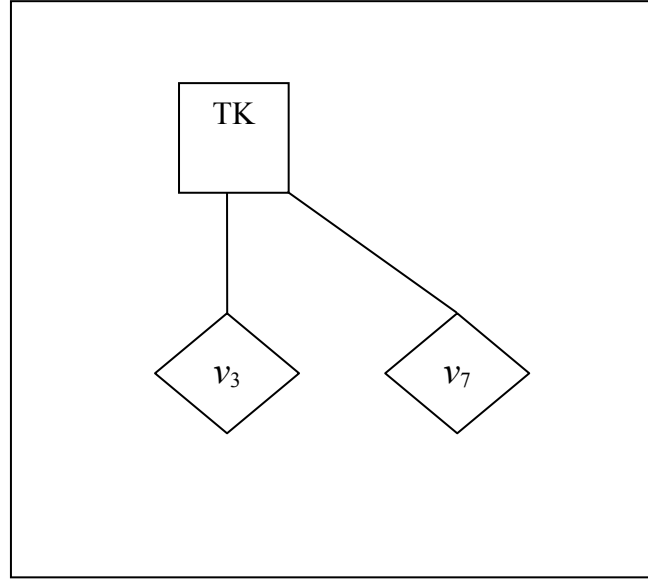
$\Omega_{i_1'} = \{(\sim t, Tsy), (t, Tba), (t, Tka), (t, Tay)\}$  biçimindedir.

**T düğümü ile ilgili füzyon:**  $\{i_1', v_3, v_6, i_1'\}$  değerlemeleri içinden T düğümü ile ilgili olan değerlemeler eritilir. Tek şans düğümü olarak kaldığı için füzyon formülü,

$Fus_T = \{i_1', v_3, v_6, i_1'\} = \{v_3 (i_1' \otimes i_1' \otimes v_6)^{\downarrow TK}\}$  olarak yazılır.

$v_7, (i_1' \otimes i_1' \otimes v_6)^{\downarrow TK}$  yı göstermek üzere, T düğümü ile ilgili füzyon sonucu grafiksel olarak Şekil 36’da verildiği gibidir.





Şekil 36. T Düzümü ile İlgili Füzyon İşlemi Sonrası Değerleme Ağı

T düğümü ile ilgili füzyon işlemine ilişkin sayısal hesaplamalar Tablo 22’de verilmiştir.

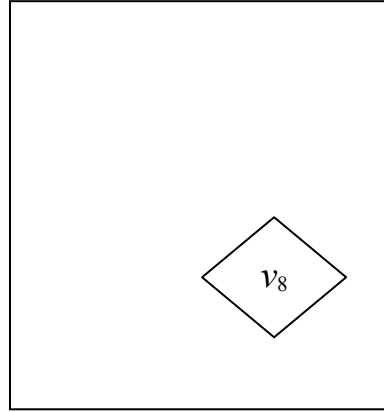
Tablo 22. T Düzümü ile İlgili Füzyon İşleminin Sayısal Hesaplamaları

$\Omega_{(TK,T)}$					
TK	T	$i'_1 \otimes i'$	$v_6$	$i'_1 \otimes i' \otimes v_6$	$(i'_1 \otimes i' \otimes v_6)^{I^T} = v_7$
$\sim t$	Tsy	1	703	703	703
t	Tba	0,05	358	17,9	696
t	Tka	0,15	695,64	104,35	
t	Tay	0,80	717,19	573,75	

**TK düğümü ile ilgili füzyon:** TK düğümü ile ilgili olan  $\{v_3, v_7\}$  değerlemeleri eritilir. TK bir karar düğümü olduğu için füzyon formülü,

$$Fus_{TK} = \{(v_3 \otimes v_7)^{\downarrow \emptyset}\} \text{ olarak yazılır.}$$

$v_8$ ,  $(v_3 \otimes v_7)^{\downarrow \emptyset}$  yi göstermek üzere, TK düğümü ile ilgili füzyon sonucu grafiksel olarak Şekil 37’de verildiği gibidir.



Şekil 37. TK Düğümü ile İlgili Füzyon İşlemi Sonrası Değerleme Ağı

TK düğümü ile ilgili füzyon işlemine ilişkin sayısal hesaplamalar Tablo 23’de verilmiştir.

Tablo 23. TK Düğümü ile İlgili Füzyon İşleminin Sayısal Hesaplamaları

$\Omega_{TK}$					
TK	$v_7$	$v_3$	$v_7 \otimes v_3$	$(v_7 \otimes v_3)^{1\oplus} (\oplus)$	$\Psi_{TK}(\oplus)$
$\sim t$	703	0	703	703	$\sim t$
t	696	-100	596,00		

MK karar düğümü için Tablo 21 ve TK karar düğümü için Tablo 23 incelendiğinde optimal politikanın **test yapmamak** ( $\sim t$ ), ve **F marka aracı almak** (f) biçiminde olduğu görülmektedir. Bu politika uygulandığında elde edilecek fayda değeri **703** olarak ortaya çıkacaktır.

Görüldüğü üzere Değerleme Ağı, problemin gösterimi için Etki Diyagramı ile benzerlik gösteren öz bir grafik kullanır ve değişkenler arasındaki bağımlılık ilişkilerini olasılık modelinde gösterir. Karar Ağacı ve Etki Diyagramında olduğu gibi olasılıklar için ön işlem yapılması gerekmez, her olasılık modeli doğrudan gösterilebilir. Bunun için gerekli olan tek şey her bir şans değişkeni için birleşik olasılık dağılımının faktörlere ayrılmasıdır. Problemdeki asimetri gösterge değerlemeleri yardımıyla yansıtılır. Gösterge değerlemeleri asimetriyi parça parça ve tekrarlama olmaksızın yansıtır. Gösterge değerlemeleri aynı zamanda etkin çerçevelerin tanımlanmasında kullanılır ve etkin çerçeve, ilgili olduğu değişkenlere ilişkin tüm asimetri bilgisini içerir. Bu özellik gösterimi basitleştirme katkısı

sağlar. Tüm hesaplamaların etkin çerçeveler üzerinde gerçekleştirilmesi ise çözüm tekniğinin etkinliğine katkı sağlar.

Değerleme Ağının çözüm aşamasında kullanılan füzyon algoritması bölgesel hesaplama yaptığından daha az hesaplama içermektedir ve bu nedenle Etki Diyagramlarının yayı ters çevirme tekniğinden daha etkindir. Problem simetrik olduğunda Karar Ağacının geriye doğru katlama tekniğinden de daha etkin olacaktır. Ancak problem asimetrik olduğunda çözüm aşamasında asimetriyi yansıtabilmek için yapay durumlar kullanma ihtiyacı gösterir.

Öte yandan Değerleme Ağında koşullu olasılıklar Etki Diyagramında olduğu gibi kolay anlaşılabilir değildir. Etki Diyagramından daha fazla düğüm içermesi değişken sayısı arttıkça buna bağlı olasılık ve gösterge düğümlerini de arttırabileceğinden gösterimin anlaşılmasını da güçleştirebilir.

## **5. PROBLEMİN ARDIŞIK KARAR DİYAGRAMI ÇÖZÜMÜ**

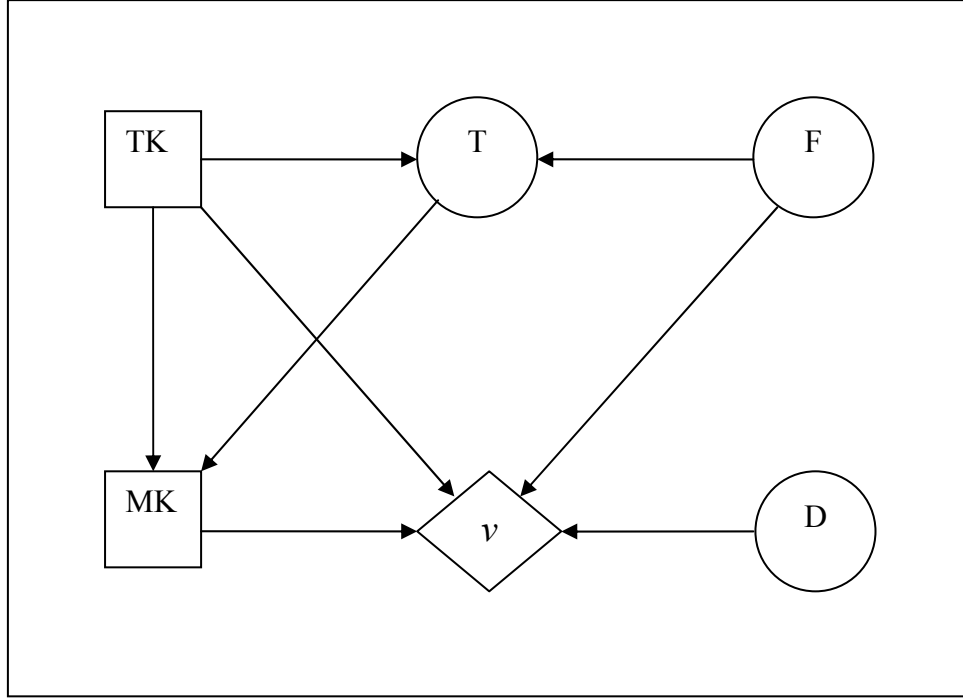
Lojistik firmasının araç temini kararı Ardışık Karar Diyagramı yardımıyla alınmak istendiğinde, problem öncelikle Ardışık Karar Diyagramı ile gösterilip daha sonra çözülecektir.

### **5.1. Problemin Ardışık Karar Diyagramı Gösterimi**

Bilindiği gibi karar probleminin gösterimi, formülasyonu ve çözümü için bu teknikte Etki Diyagramı, Ardışık Karar Diyagramı ve formülasyon tablosundan oluşan birleşik bir yapı kullanılmaktadır.

#### **5.1.1. Grafiksel Gösterim**

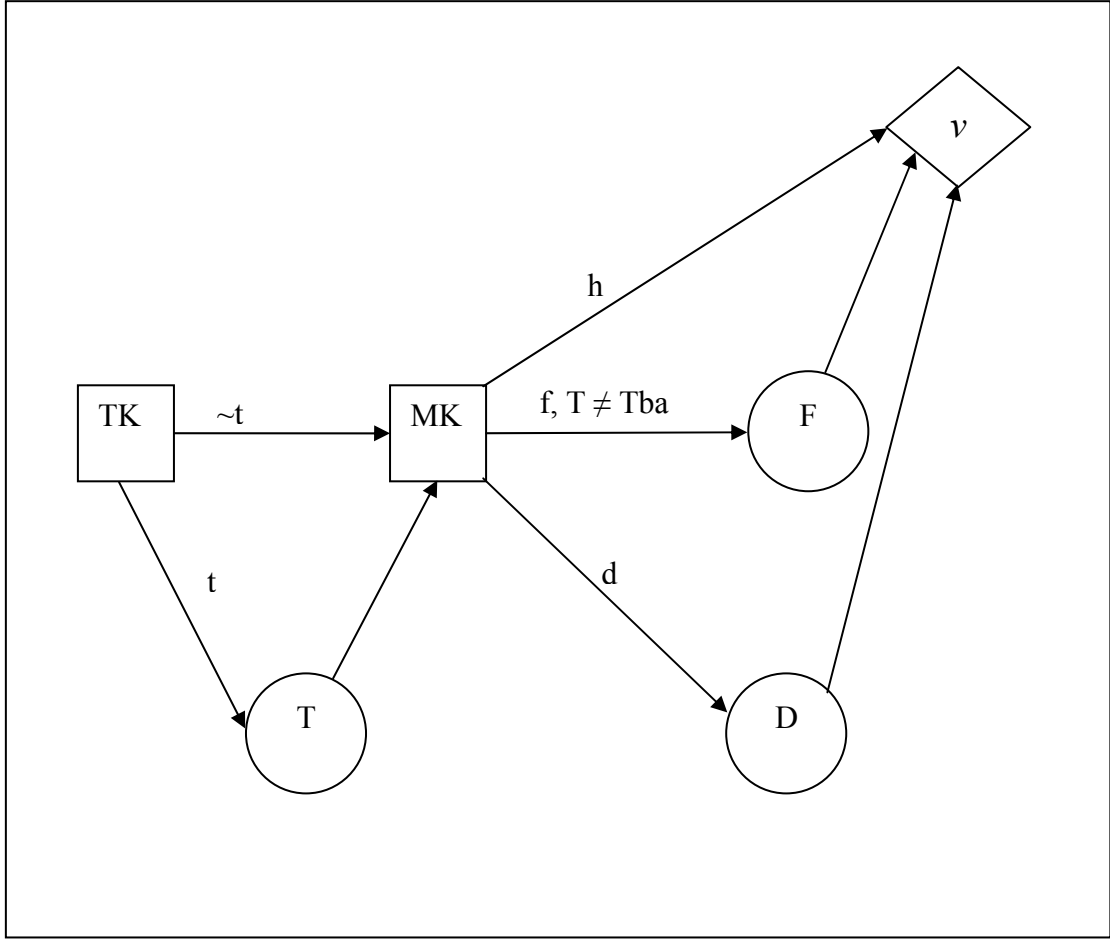
Ardışık Karar Diyagramının grafiksel gösteriminde, probleme ilişkin Etki Diyagramı ve Ardışık Karar Diyagramı ikilisi birlikte kullanılır. Problemin Etki Diyagramı gösterimi hatırlanacağı gibi Şekil 38'de verilen biçimde oluşmaktadır. Bu teknikte Etki Diyagramı problemde yer alan değişkenler arasındaki bağımlılık ilişkilerinin net bir biçimde görülebilmesi amacıyla, yardımcı araç olarak kullanılmaktadır.



Şekil 38. Problemin Ardışık Karar Diyagramı Çözümüne ilişkin Etki Diyagramı

Şekil 39’da ise, problemin asimetrik ve ardışık yapısı ile birlikte problemdeki bilgi akışını yansıtan Ardışık Karar Diyagramı yer almaktadır.

Şekil 39’da  $TK \rightarrow T$  yayı üzerindeki (t) açıklaması, test uygulandığında ( $TK = t$  olduğunda) testin sonuçlarının ( $T = T_{ay}$ ,  $T = T_{ka}$  ya da  $T = T_{ba}$  olarak) gözlenebileceğini belirtmektedir.  $TK \rightarrow MK$  yayı üzerindeki ( $\sim t$ ) açıklaması ise, test yapmama kararı verildiğinde ( $TK = \sim t$ ), test sonuçlarının gözlenemeyeceğini belirtmektedir. Benzer biçimde  $MK \rightarrow v$  yayı üzerindeki (h) açıklaması hiçbir araç almama kararı verildiğinde bir sonraki düğümün değer düğümü olacağını,  $MK \rightarrow D$  yayı üzerindeki (d) açıklaması marka kararı olarak D seçildiğinde, D marka aracın arıza olasılıklarının gözlenebileceğini ve bu durumda F marka araçla ilgilenilmeyeceğini belirtmektedir. Benzer biçimde  $MK \rightarrow F$  yayı üzerindeki (f) açıklaması ise F aracına ilişkin arıza olasılıklarının yalnızca  $MK = f$  olduğunda gözlenebileceğini yansıtmaktadır.  $MK \rightarrow F$  yayı üzerindeki açıklama, aynı zamanda öncel düğümlerde gerçekleşen durumlara olan bağımlılığı da yansıtmaktadır. Diğer bir ifade ile,  $MK \rightarrow F$  yayı üzerindeki açıklama,  $MK = f$ ’nin sadece  $T \neq T_{ba}$  olduğunda mümkün olabileceğini belirtmektedir.

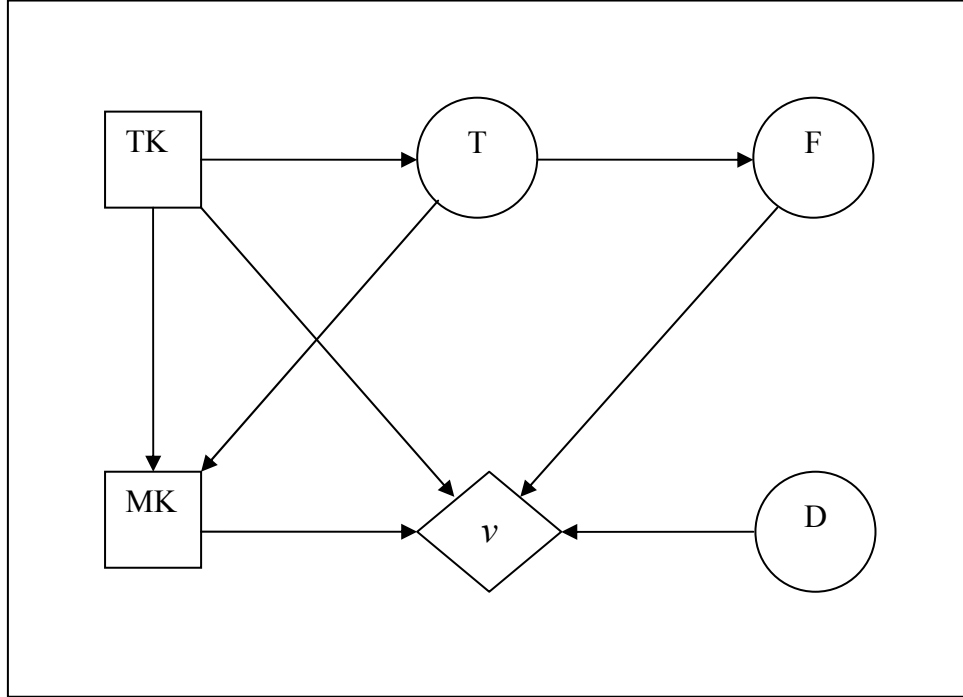


Şekil 39. Ardışık Karar Diyagramı

Problemin Karar Ağacındaki 21 mümkün senaryosu Şekil 39'da TK'dan v'ye yönlendirilen altı yol ile öz biçimde gösterilmektedir.

Daha önce belirtildiği gibi, probleme ilişkin Etki ve Ardışık Karar Diyagramlarının her ikisinde de karar ve şans değişkenlerinin ardışıklığı (kısmi sıralama) aynı ise iki grafiğin uyumlu olduğu kabul edilmektedir. Çözüm aşamasına geçilmeden önce söz konusu iki diyagramın uyumlu olup olmadığı kontrol edilmekte, uyumlu olmadığında uyumlu biçime getirilmesi için Etki Diyagramında gerekli olan dönüşüm işlemleri uygulanmaktadır. Bu amaçla, Şekil 38 ve Şekil 39 birlikte incelenerek yönlü yaylarla belirlenen kısmi sıralamanın aynı olup olmadığı kontrol edilmelidir. Etki Diyagramında (Şekil 38) F'den MK'ya yönlendirilmiş bir yol olduğundan kısmi sıralama  $F <_1 MK$  (yol üzerinde F düğümü MK düğümünün öncelidir) biçimindedir. Ardışık Karar Diyagramında (Şekil 39) ise, MK düğümünden F düğümüne yönlendirilmiş bir yol olduğundan, kısmi sıralama

$MK <_s F$  (yol üzerinde MK düğümü F düğümünün öncelidir) biçimindedir. Bu nedenle iki diyagramın uyumlu olmadığı sonucuna varılır. İki diyagramı uyumlu biçime getirme amacıyla Etki Diyagramındaki  $F \rightarrow T$  yayının ters çevrilmesi gerekir. Etki Diyagramının yay ters çevirme işlemiyle dönüştürülmüş biçimi Şekil 40'ta verilmiştir.



Şekil 40. Ardışık Karar Diyagramı ile Uyumlu Biçime Dönüştürülmüş Etki Diyagramı

Grafik gösterimi, çözümde kullanılacak olan formülasyon tablosunun oluşturulmasının izlediği bilinmektedir. İzleyen kesimde bu tabloya ilişkin ayrıntılara yer verilmiştir.

### 5.1.2. Formülasyon Tablosu

Bilindiği gibi formülasyon tablosu, ardışık ve Etki Diyagramında yer alan her bir düğüme ilişkin veri çerçevesini düzenlemektedir. Araç edinme problemine ilişkin formülasyon tablosu Tablo 24'te verilmiştir. Formülasyon tablosunda Ardışık Karar Diyagramındaki her düğüm için bir satır bulunduğu ve diyagramda  $X <_s Y$  ilişkisi mevcut olduğunda X'e ilişkin satırın Y'ye ilişkin satırdan önce geldiği bilgisinden hareketle ilk iki sütun doldurulmuştur.



Üçüncü sütunda  $i$  düğümünün standart geçmişi, Ardışık Karar Diyagramında  $i$  düğümünün öncelleri biçiminde düzenlenmiştir. Uyumlu hale dönüştürülmüş Etki Diyagramında  $i$  düğümünün doğrudan öncelleri ise minimal düğümlere karşılık gelmek üzere üçüncü sütunda kalın olarak belirlenmiştir. Dördüncü sütuna düğüm tipine bağlı olarak durum uzayları yerleştirilmiştir. Değer fonksiyonu ayrıştırması kullanılmadığından izleyen gerçekleşen geri dönüş fonksiyonu sütununda tüm değerler sıfır olarak yer almıştır. Hatırlanacağı gibi olasılık dağılım fonksiyonu sütunu şans değişkenlerinin olasılık dağılımlarını göstermektedir. Söz konusu sütunda yer alan olasılık dağılımlarından F düğümüne ilişkin olanlar, Etki Diyagramında uyumlaştırma amacıyla yay ters çevirme işlemi yapıldığından Bayes kuralı ile hesaplanan olasılık değerleridir. Aynı olasılıkların Bayes kuralı ile hesaplama ayrıntıları Karar Ağacı çözümünde verildiğinden burada tekrarlanmayarak yalnızca sonuç değerleri tabloya yerleştirilmiştir. Son sütunda yer alan bir sonraki düğüm fonksiyonları Ardışık Karar Diyagramından hareketle belirlenmiştir.

Tablonun hazırlanması sonrası çözüm aşamasına geçilmiştir.

## 5.2. Ardışık Karar Diyagramının Çözümü

Daha önce belirtilen biçimde, çözüm yöntemi ardışık diyagrama dayalı olarak geriye doğru yineleme yöntemidir. Problemin çözümünde daha önce 2.6.2’de belirtilen düğüm işlem sırası uygulanmıştır. Buna göre, Karar Ağacının çözüm sürecine benzer biçimde, Ardışık Karar Diyagramında değer düğümünden başlayarak geriye doğru her adımda bir düğüm silinir.  $v$ , D, F, MK, T, TK veya  $v$ , F, D, MK, T, TK biçiminde iki farklı silme sırası uygulanabilir. Problemin çözümünde benimsenen silme sırası  $v$ , D, F, MK, T, TK biçimindedir. Buna göre problemin çözümü, her düğümün silinmesinde (22) eşitliği uygulanarak beklenen değerlerin hesaplanması biçimde gerçekleştirilmiş ve ayrıntıları izleyen kesimde verilmiştir.



Değer düğümü  $v$ 'nin farklı geçmişlere göre beklenen faydaları,  $w_v$  formülasyon tablosundaki  $v$  düğümü ile ilgili fayda fonksiyonu olmak üzere;

$$w_v \left( \begin{array}{cccc} \text{TK} & \text{MK} & \text{F} & \text{D} \\ \sim & t & h & - \end{array} \right) = 0$$

$$w_v \left( \begin{array}{cccc} \text{TK} & \text{MK} & \text{F} & \text{D} \\ \sim & t & d & - \end{array} \right) = 365$$

.

.

.

$$w_v \left( \begin{array}{cccc} \text{TK} & \text{MK} & \text{F} & \text{D} \\ t & f & \text{Fba} & - \end{array} \right) = 545 \text{ biçimindedir.}$$

Yukarıda verilen düğüm silme sırasına göre D düğümünün silinmesi aşamasına geçilir. Formülasyon tablosundan görüldüğü gibi D'nin "*minimal geçmiş*" düğüm kümesi  $\emptyset$  olduğundan, D'nin ardılı olan düğüm  $v$  düğümüdür. Öte yandan  $v$  düğümünün "*minimal geçmiş*" düğüm kümesinin  $\{\text{TK}, \text{MK}, \text{D}, \text{F}\}$  ve D'nin öncelleri kümesinin  $\{\text{TK}, \text{T}, \text{MK}\}$  olduğu da tablodan görülmektedir. Bundan dolayı, D düğümü için "*ilgili geçmiş*" düğüm kümesi,  $\{\text{TK}, \text{MK}\}$  olarak belirlenir ve D düğümünde beklenen fayda ilgili geçmişin farklı durumlarına göre izleyen biçimde hesaplanır:

$$\begin{aligned} w_D \left( \begin{array}{cc} \text{TK} & \text{MK} \\ \sim & t \end{array} \right) &= w_v \left( \begin{array}{ccc} \text{TK} & \text{MK} & \text{D} \\ \sim & t & d \end{array} \right) * 0,86 + w_v \left( \begin{array}{ccc} \text{TK} & \text{MK} & \text{D} \\ \sim & t & d \end{array} \right) * 0,14 = \\ &= w_v \left( \begin{array}{cccc} \text{TK} & \text{MK} & \text{D} & \text{F} \\ \sim & t & d & \text{Day} \end{array} \right) * 0,86 + w_v \left( \begin{array}{cccc} \text{TK} & \text{MK} & \text{D} & \text{F} \\ \sim & t & d & \text{Dav} \end{array} \right) * 0,14 = \\ &= (365 * 0,86) + (315 * 0,14) = 358 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_D \left( \begin{array}{cc} \text{TK} & \text{MK} \\ t & d \end{array} \right) &= w_v \left( \begin{array}{ccc} \text{TK} & \text{MK} & \text{D} \\ t & d & \text{Day} \end{array} \right) * 0,86 + w_v \left( \begin{array}{ccc} \text{TK} & \text{MK} & \text{D} \\ t & d & \text{Dav} \end{array} \right) * 0,14 = \\ &= w_v \left( \begin{array}{cccc} \text{TK} & \text{MK} & \text{D} & \text{F} \\ t & d & \text{Day} & - \end{array} \right) * 0,86 + w_v \left( \begin{array}{cccc} \text{TK} & \text{MK} & \text{D} & \text{F} \\ t & d & \text{Dav} & - \end{array} \right) * 0,14 = \\ &= (265 * 0,86) + (215 * 0,14) = 258 \end{aligned}$$

F düğümünün silinmesine ilişkin hesaplamalar da D düğümününkine benzer olarak aşağıda verilen biçimde gerçekleştirilmiştir:

$$\begin{aligned}
 w_F \left( \begin{array}{ccc} \text{TK} & \text{T} & \text{MK} \\ t & \text{Tka} & f \end{array} \right) &= w_v \left( \begin{array}{cccc} \text{TK} & \text{T} & \text{MK} & \text{F} \\ t & \text{Tka} & f & \text{Fay} \end{array} \right) * 0,44 + w_v \left( \begin{array}{cccc} \text{TK} & \text{T} & \text{MK} & \text{F} \\ t & \text{Tka} & f & \text{Fka} \end{array} \right) * 0,51 + \\
 &+ w_v \left( \begin{array}{cccc} \text{TK} & \text{T} & \text{MK} & \text{F} \\ t & \text{Tka} & f & \text{Fba} \end{array} \right) * 0,05 = \\
 &= (620 * 0,44) + (580 * 0,51) + (545 * 0,05) = 595,85
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w_F \left( \begin{array}{ccc} \text{TK} & \text{T} & \text{MK} \\ t & \text{Tay} & f \end{array} \right) &= w_v \left( \begin{array}{cccc} \text{TK} & \text{T} & \text{MK} & \text{F} \\ t & \text{Tay} & f & \text{Fay} \end{array} \right) * 0,94 + w_v \left( \begin{array}{cccc} \text{TK} & \text{T} & \text{MK} & \text{F} \\ t & \text{Tay} & f & \text{Fka} \end{array} \right) * 0,05 + \\
 &+ w_v \left( \begin{array}{cccc} \text{TK} & \text{T} & \text{MK} & \text{F} \\ t & \text{Tay} & f & \text{Fba} \end{array} \right) * 0,01 = \\
 &= (620 * 0,94) + (580 * 0,05) + (545 * 0,01) = 617,25
 \end{aligned}$$

Bu hesaplamalar sonrasında MK düğümünün silinmesi aşamasına gelinir. MK düğümünün ilgili geçmişlerinin TK ve T düğümlerinden oluştuğu görülmektedir. MK karar düğümü olduğundan, MK düğümünün silinmesi öncesi MK'nın ilgili geçmişlerinde gerçekleşen değerlere bağlı olarak en yüksek fayda seçilir. Buna göre MK düğümünün beklenen değeri geçmiş düğümde test yapmama kararı verildiğinde

$$\begin{aligned}
 w_{MK} \left( \begin{array}{cc} \text{TK} & \text{T} \\ \sim t & - \end{array} \right) &= \text{ENB} \left\{ w_v \left( \begin{array}{ccc} \text{TK} & \text{T} & \text{MK} \\ \sim t & - & h \end{array} \right), w_D \left( \begin{array}{ccc} \text{TK} & \text{T} & \text{MK} \\ \sim t & - & d \end{array} \right), w_F \left( \begin{array}{ccc} \text{TK} & \text{T} & \text{MK} \\ \sim t & - & f \end{array} \right) \right\} = \\
 &= \text{ENB} \{0; 358; 703\} = \\
 &= 703 \quad [f]
 \end{aligned}$$

olarak belirlenir. Sonuç, test yapılmaması durumunda en yüksek fayda değeri olan 703'ü sağlayan alternatif "F marka aracın alınması" biçiminde ortaya çıkmaktadır. Test yapılmama durumundakine benzer işlemler, test yapılması durumunda ortaya çıkabilecek olası tüm test sonuçları için gerçekleştirilecektir.

Test sonucunda büyük arıza ortaya çıkması durumunda beklenen değer,

$$\begin{aligned}
 w_{MK} \left( \begin{array}{cc} \text{TK} & \text{T} \\ t & \text{Tba} \end{array} \right) &= \text{ENB} \left\{ w_v \left( \begin{array}{ccc} \text{TK} & \text{T} & \text{MK} \\ t & \text{Tba} & h \end{array} \right), w_D \left( \begin{array}{ccc} \text{TK} & \text{T} & \text{MK} \\ t & \text{Tba} & d \end{array} \right), w_F \left( \begin{array}{ccc} \text{TK} & \text{T} & \text{MK} \\ t & \text{Tba} & f \end{array} \right) \right\} = \\
 &= \text{ENB} \{-100; 258; 0\} = \\
 &= 258 \quad [d]
 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

$w_F\left(\begin{array}{ccc} \text{TK} & \text{T} & \text{MK} \\ t & \text{Tba} & f \end{array}\right)$  nin değeri olan 0 test sonucunda büyük arıza çıkması durumunda F marka aracın alınmayacağını göstermektedir.

Test sonucunda küçük arıza ortaya çıkması durumunda beklenen değer,

$$\begin{aligned} w_{MK}\left(\begin{array}{ccc} \text{TK} & \text{T} \\ t & \text{Tka} \end{array}\right) &= \text{ENB}\{w_v\left(\begin{array}{ccc} \text{TK} & \text{T} & \text{MK} \\ t & \text{Tka} & h \end{array}\right), w_D\left(\begin{array}{ccc} \text{TK} & \text{T} & \text{MK} \\ t & \text{Tka} & d \end{array}\right), w_F\left(\begin{array}{ccc} \text{TK} & \text{T} & \text{MK} \\ t & \text{Tka} & f \end{array}\right)\} = \\ &= \text{ENB}\{-100; 258; 595,85\} = \\ &= 595,85 \quad [f] \end{aligned}$$

ve test sonucunda arıza ortaya çıkmaması durumunda beklenen değer,

$$\begin{aligned} w_{MK}\left(\begin{array}{ccc} \text{TK} & \text{T} \\ t & \text{Tay} \end{array}\right) &= \text{ENB}\{w_v\left(\begin{array}{ccc} \text{TK} & \text{T} & \text{MK} \\ t & \text{Tay} & h \end{array}\right), w_D\left(\begin{array}{ccc} \text{TK} & \text{T} & \text{MK} \\ t & \text{Tay} & d \end{array}\right), w_F\left(\begin{array}{ccc} \text{TK} & \text{T} & \text{MK} \\ t & \text{Tay} & f \end{array}\right)\} = \\ &= \text{ENB}\{-100; 258; 617,25\} = \\ &= 617,25 \quad [f] \end{aligned}$$

olarak bulunmuştur.

İşlem sırası T düğümünün silinmesine gelmiştir. T düğümü için *ilgili geçmiş* TK düğümü olduğundan,

$$\begin{aligned} w_T\left(\begin{array}{c} \text{TK} \\ t \end{array}\right) &= w_{MK}\left(\begin{array}{ccc} \text{TK} & \text{T} \\ t & \text{Tba} \end{array}\right) * 0,05 + w_{MK}\left(\begin{array}{ccc} \text{TK} & \text{T} \\ t & \text{Tka} \end{array}\right) * 0,15 + w_{MK}\left(\begin{array}{ccc} \text{TK} & \text{T} \\ t & \text{Tay} \end{array}\right) * 0,80 = \\ &= (258 * 0,05) + (595,85 * 0,15) + (617,25 * 0,80) = 596,0775 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Son işlem olarak diyagramda kalan TK düğümü silinecektir. TK düğümünün *ilgili geçmiş* kümesi boş küme olduğundan,

$$\begin{aligned} w_{TK} &= \text{ENB}\{w_{MK}\left(\begin{array}{c} \text{TK} \\ \sim t \end{array}\right), w_T\left(\begin{array}{c} \text{TK} \\ t \end{array}\right)\} = \\ &= \text{ENB}\{w_{MK}\left(\begin{array}{ccc} \text{TK} & \text{T} \\ \sim t & - \end{array}\right), w_T\left(\begin{array}{c} \text{TK} \\ t \end{array}\right)\} = \\ &= \text{ENB}\{703; 596,0775\} = \\ &= 703 \quad [\sim t] \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Optimal politika, TK karar noktasında **test yapmamak** ( $\sim t$ ), MK karar noktasında **F marka aracı almak** (f) biçiminde ortaya çıkmıştır. Optimal politika sonucunda elde edilecek en yüksek fayda **703** olarak bulunmuştur.

Ardışık Karar Diyagramının temel üstünlüğü asimetriyi öz biçimde sunabilmesidir. Ardışık Karar Diyagramı görsel anlamda Karar Ağacının öz biçimi olarak düşünülebilir. Bu nedenle Karar Ağacının boyutunun değişken sayısına bağlı olarak artması biçimindeki zayıflığını gideren bir gösterimdir. Karar Ağacında olduğu gibi Ardışık Karar Diyagramı da asimetriyi yapay durumlar eklemeksizin modeller. Çözüm aşamasında Ardışık Karar Diyagramında minimal ve ilgili geçmişlerin kullanımı tüm senaryolar (ya da geçmişler) üzerinde çalışmak zorunda bırakmaz. Böylece, Karar Ağacının kolay bir şekilde gerçekleştirilemeyen birleşme işlemini kolaylıkla gerçekleştirmiş olur. Sıralanan üstünlüklerine karşın problemin değişkenler arasındaki bağımlılık ilişkilerini gösterebilmek için aynı zamanda Etki Diyagramına ihtiyaç duyması bir eksiklik olarak ortaya çıkar. Ayrıca olasılık modelini tutarlı biçimde göstermede yetersizdir. Ardışık Karar Diyagramı ile tutarlı olan Etki Diyagramı gösteriminde bir dağılım kullanırken formülasyon tablosunda daha farklı bir dağılım kullanır. Ardışık Karar Diyagramının formülasyonunu tamamlayabilmesini sağlayan formülasyon tablosunun belirlenmesi öncesinde olasılıklar üzerinde ön işlem yapılması gerekebilir. Bunun için ilgili Ardışık Karar Diyagramı ile uyumlu hale gelmesi için Etki Diyagramının değiştirilmesi gerekir. Büyük boyutlu problemlerde standart geçmişler de doğrusal olarak büyüyeceği için tüm standart geçmişleri sıralayıp bunların içinden minimal ve ilgili geçmişlerin belirlenmesi de ayrı bir zorluk olarak ortaya çıkacaktır.

## 6. PROBLEMİN ARDIŞIK DEĞERLEME AĞI ÇÖZÜMÜ

Lojistik firmasının karar problemini çözmek amacıyla kullanılacak son grafiksel yaklaşımda da diğer grafiksel yaklaşımlarda olduğu gibi problem öncelikle Ardışık Değerleme Ağı ile gösterilip daha sonra çözülecektir.

### 6.1. Problemin Ardışık Değerleme Ağı Gösterimi

Problemin *Ardışık Değerleme Ağı* ile gösterimi daha önce belirtildiği gibi grafiksel, nitel ve nicel olmak üzere üç bölümden oluşmaktadır.

### 6.1.1. Grafiksel Bölüm

Araç edinme problemine ilişkin Ardışık Değerleme Ağının grafiksel bölümü Şekil 41’de verilmiştir. Grafiksel bölümde yer alan düğümler izleyen kısımda açıklanmıştır:

**Karar düğümleri:** Grafikte, TK ve MK ile gösterilen iki karar düğümü bulunmaktadır.

TK: Test kararını

MK: Marka kararını

temsil etmektedir.

TK’nın durum uzayı;

$\sim t$ : test yapmama kararı

t: test yapma kararı

olmak üzere

$$\Omega_{TK} = \{\sim t, t\};$$

MK’nın durum uzayı;

h: hiçbir araç almama kararı

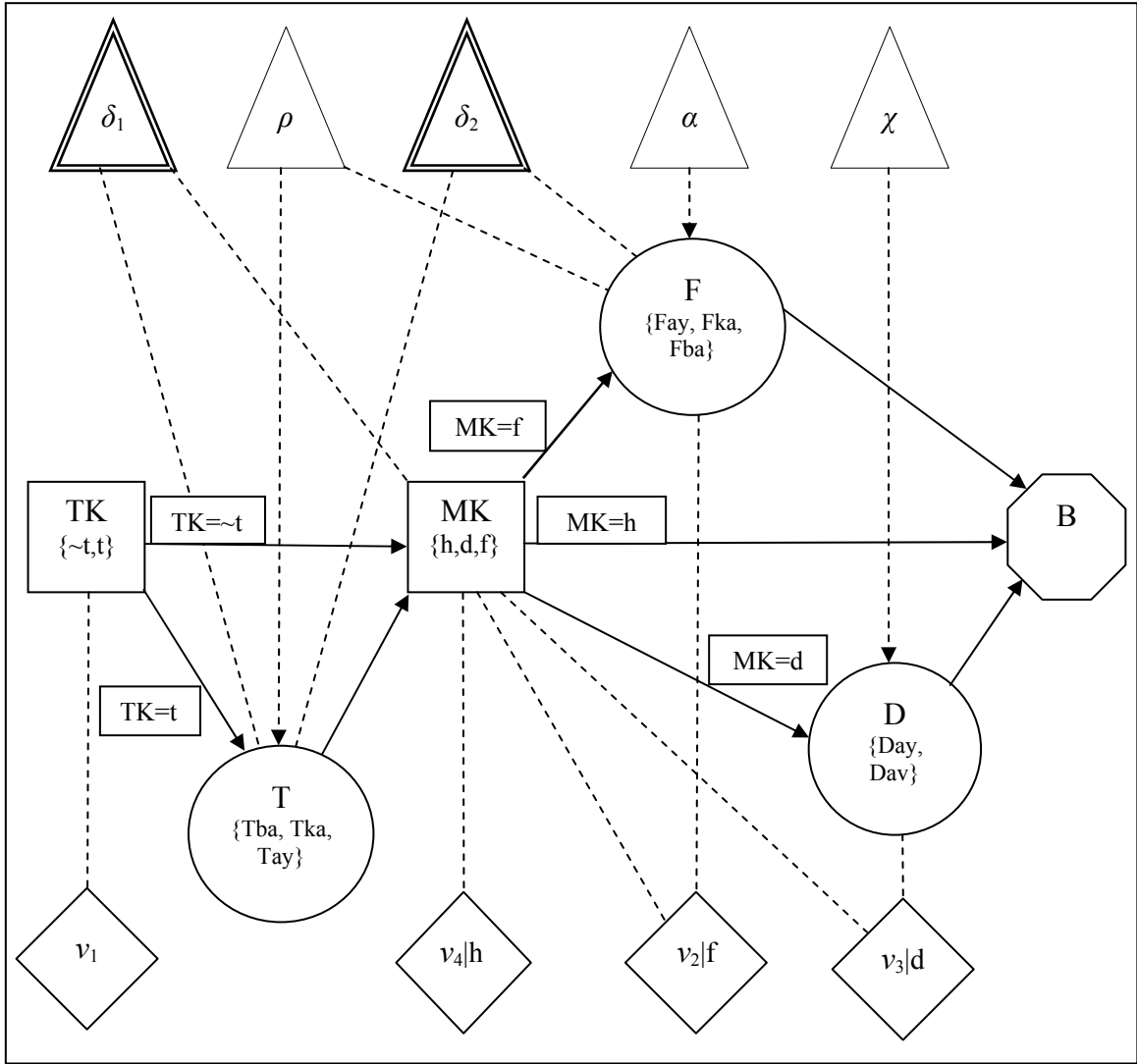
d: D marka araç alma kararı

f: F marka araç alma kararı

olmak üzere,

$$\Omega_{MK} = \{h, d, f\}$$

biçimindedir ve ilgili düğümler üzerinde gösterilmiştir.



Şekil 41. Problemin Ardışık Değerleme Ağı ile Gösterimi

**Şans düğümleri:** Grafikte T, F ve D ile gösterilen üç şans düğümü bulunmaktadır.

T: Test yapılması durumunda testin olası sonuçlarını

F: F markası seçilirse F'nin olası arıza durumlarını

D: D markası seçilirse D'nin olası arıza durumlarını

temsil etmektedir.

T'nin durum uzayı;

Tba: Test sonucunda büyük arıza gözlenmesi durumu

Tka: Test sonucunda küçük arıza gözlenmesi durumu

Tay: Test sonucunda arıza gözlenmeme (arıza yok) durumu

olmak üzere

$\Omega_T = \{Tba, Tka, Tay\}$  ;

F'nin durum uzayı;

Fay: F marka araç alındığında, aracın arıza yapmama durumu

Fka: F marka araç alındığında, aracın küçük arıza yapma durumu

Fba: F marka araç alındığında, aracın büyük arıza yapma durumu

olmak üzere,

$$\Omega_F = \{Fay, Fka, Fba\};$$

D'nin durum uzayı;

Day: D marka araç alındığında, aracın arıza yapmama durumu

Dav: D marka araç alındığında, aracın arıza yapma durumu

olmak üzere,

$$\Omega_D = \{Day, Dav\}$$

biçimindedir ve ilgili düğümler üzerinde gösterilmiştir.

T'nin durum uzayının, Tsy (Test sonucu yok) biçimindeki yapay durumu içermediği gözlenebilmektedir.

**Gösterge düğümleri:** Grafikte  $\delta_1$  ve  $\delta_2$  ile gösterilen iki gösterge düğümü bulunmaktadır. Kesikli doğrularla gösterge düğümlerine doğrudan birleştirilen düğümler gösterge değerlemelerinin tanım kümelerini oluşturduğundan;

$$\delta_1 \text{ 'in tanım kümesi: } \{T, MK\}$$

$$\delta_2 \text{ 'nin tanım kümesi: } \{T, F\} \text{ dir.}$$

Gösterge düğümleri ile temsil edilen gösterge değerlemelerinin ayrıntıları nitel bölümde belirlenecektir.

**Olasılık Düğümleri:** Grafikte  $\rho$ ,  $\alpha$ ,  $\chi$  ile temsil edilen üç olasılık düğümü bulunmaktadır. Gösterge düğümlerine benzer şekilde kesikli doğrular izlenerek,

$$\rho \text{ 'nun tanım kümesinin: } \{T, F\},$$

$$\alpha \text{ 'nın tanım kümesinin: } \{F\},$$

$$\chi \text{ 'nin tanım kümesinin: } \{C\} \text{ olduğu görülebilir.}$$

Hatırlanacağı gibi, olasılık düğümünden ilgili şans düğümlerine bağlantıyı sağlayan kesikli doğrulardan bazılarının yönlendirilmiş olması, ilgili olasılık değerlemesinin yönlendirildiği şans değişkenine bağlı olduğu başka bir ifade ile koşullu olduğu anlamını taşımaktadır.

Olasılık düğümleri ile temsil edilen olasılık değerlemelerinin ayrıntıları nicel bölümde belirlenecektir.

**Fayda Düğümleri:** Grafikte  $v_1$ ,  $v_2 | f$ ,  $v_3 | d$ ,  $v_4 | h$  ile gösterilen dört fayda düğümü yer almaktadır.  $v_1$ 'in tanım kümesinin  $\{TK\}$ ,  $v_2 | f$ 'nin tanım kümesinin  $\{MK, F\}$ ,  $v_3 | d$ 'nin tanım kümesinin  $\{MK, D\}$  ve  $v_4 | h$ 'nin tanım kümesinin  $\{MK\}$  olduğu grafikten izlenebilmektedir.

**Terminal Düğümü:** Terminal düğümü, bitiş düğümü olarak B ile temsil edilmiş ve grafik üzerinde bir sekizgen ile gösterilmiştir.

Karar, şans ve terminal düğümleri kümesinden oluşan alt grafik, tek bir kaynak (kök) düğümü olan ve terminal düğümünü bitiş düğümü kabul eden yönlendirilmiş bir grafik olarak ele alındığında, kaynak düğümden terminal düğümüne giden her bir yönlendirilmiş yol bir senaryoya karşılık gelmektedir.

Bilindiği gibi, Ardışık Karar Diyagramlarında karar düğümleri üzerindeki tüm kısıtlar, karar değişkenlerinden çıkan yönlü yaylar üzerindeki açıklayıcı notlarla ifade edilirken, Ardışık Değerleme Ağlarında böylesi kısıtlar, gösterge değerlemeleri kullanılarak ifade edilmektedir. Ardışık Değerleme Ağında karar değişkenlerinden çıkan yönlendirilmiş yaylar üzerindeki açıklayıcı notlar ise yalnızca senaryolardaki değişkenlerin sıralamasını tanımlamada kullanıldığından,  $TK \rightarrow MK$  yayı üzerindeki  $TK = \sim t$  açıklaması test kararı noktasında test yapmama kararı verildiğinde bir sonraki adımın marka kararı olduğunu belirtmektedir. Yaylar üzerinde yer alan diğer açıklama notları da benzer şekillerde yorumlanır.

### 6.1.2. Nitel Bölüm

Nitel bölümde, gösterge değerlemelerinin ayrıntıları belirlenmektedir. Gösterge değerlemesi, tanım kümesiyle birlikte, tanım kümesindeki değişkenler için izin verilen tüm durumların listelenmesi ile belirlenebilir.



MK karar düğümünün durum uzayı üzerindeki kısıtı temsil eden  $\delta_1$  gösterge değerlemesi, tanım kümesi  $\{T, MK\}$  olmak üzere;

$\delta_1: \{(Tba, d), (Tba, h), (Tka, f), (Tka, d), (Tka, h), (Tay, f), (Tay, d), (Tay, h)\}$  biçimindedir.

Görüldüğü gibi bu kısıt  $\Omega_{\{T, MK\}}$ 'da izin verilen tüm durumların listelenmesiyle belirlenmiştir.

F şans düğümünün durum uzayı üzerindeki kısıtı temsil eden  $\delta_2$  gösterge değerlemesi, tanım kümesi  $\{T, F\}$  olmak üzere;

$\delta_2:$

$\{(Tba, Fka), (Tba, Fba), (Tka, Fay), (Tka, Fka), (Tka, Fba), (Tay, Fay), (Tay, Fka), (Tay, Fba)\}$

biçimindedir.

Problemde “test sonucunda büyük arıza olduğunda F marka aracın alınmayacağı” biçiminde ifade edilen kısıt,  $\delta_2$ 'de ( $\Omega_{\{T, F\}}$ 'de izin verilen durumlar içinde) (Tba, Fay) durumuna yer verilmeyerek belirtilmiştir.

$\delta_1 \subset \Omega_{\{T, MK\}}$  ve  $\delta_2 \subset \Omega_{\{T, F\}}$  olduğu görülebilmektedir.

Çözüm aşaması boyunca bazı alt problemlerdeki hesaplamalar, alt problemle ilgili olan gösterge değerlemeleri ile kısıtlanmış ilgili durum uzayı üzerinde gerçekleştirilecektir.

### 6.1.3. Nicel Bölüm

Bilindiği gibi nicel bölümde olasılık ve fayda değerlemelerinin ayrıntıları belirlenmektedir. Bu amaçla, her bir olasılık ve fayda değerlemesinin tanım kümesi grafiksel bölümden belirlenerek, sayısal değerleri bir tablo biçiminde düzenlenmiştir. Tablo 25 olasılık değerlemesi parçalarını, Tablo 26 ise fayda değerlemesi parçalarını göstermektedir.

Tablo 25. Olasılık Değerlemesi Parçaları

$\Omega_D$	$\gamma$	$\delta_2$	$\rho$
Day	0,86	Tba, Fka	0,24
Dav	0,14	Tba, Fba	0,85
		Tka, Fay	0,15
		Tka, Fka	0,60
		Tka, Fba	0,10
		Tay, Fay	0,85
		Tay, Fka	0,16
		Tay, Fba	0,05

$\Omega_F$	$\alpha$
Fay	0,68
Fka	0,20
Fba	0,12

Tablo 26. Fayda Değerlemesi Parçaları

$\Omega_{TK}$	$\nu_1$	$\{f\} \times \Omega_F$	$\nu_2   f$
~t	0	f, Fay	720
t	-100	f, Fka	680
		f, Fba	645

$\{d\} \times \Omega_D$	$\nu_3   d$
d, Day	365
d, Dav	315

$\{h\} \subset \Omega_{MK}$	$\nu_4   h$
h	0

Problemin gösteriminin tamamlanmasından sonra çözüm aşamasına geçilmiştir.

## 6.2. Ardışık Değerleme Ağının Çözümü

Çözüm süreci, problemin ayrıştırılması ve alt problemlerin çözümü aşamalarından oluşmaktadır.

### 6.2.1. Problemin Ayrıştırılması

Grafiksel gösterimden hareketle problem alt problemlere ayrıştırılmıştır. Her alt problem, Ardışık Değerleme Ağının grafiksel bölümünde, başlangıç düğümünden terminal düğümüne yönlendirilmiş yollar ve alt yolların hepsi ayrı ayrı numaralandırılarak belirlenmiştir. Buna göre problem, başlangıç düğümü TK ile birlikte;

TK	(alt problem 8)
TK $\rightarrow$ T	(alt problem 7)
TK $\rightarrow$ MK	(alt problem 6)
TK $\rightarrow$ T $\rightarrow$ MK	(alt problem 5)
TK $\rightarrow$ MK $\rightarrow$ D	(alt problem 4)
TK $\rightarrow$ MK $\rightarrow$ F	(alt problem 3)
TK $\rightarrow$ T $\rightarrow$ MK $\rightarrow$ D	(alt problem 2)
TK $\rightarrow$ T $\rightarrow$ MK $\rightarrow$ F	(alt problem 1)

biçiminde 8 alt probleme ayrıştırılmış ve sondan başa doğru numaralandırılmıştır. Her alt problemde yer alan değişkenlerin bu biçimde belirlenmesini, her alt probleme ilişkin fayda ve gösterge değerlemelerinin belirlenmesi izlemiştir. Bu amaçla  $v_1$ ,  $v_2 | f$ ,  $v_3 | d$ ,  $v_4 | h$ , fayda değerlemeleri ile  $\delta_1$  ve  $\delta_2$  gösterge değerlemelerinin hangi alt problemlerle ilişkili olduğu fayda ve gösterge değerlemesi parçaları yardımıyla belirlenmiş ve izleyen kesimde verilmiştir.

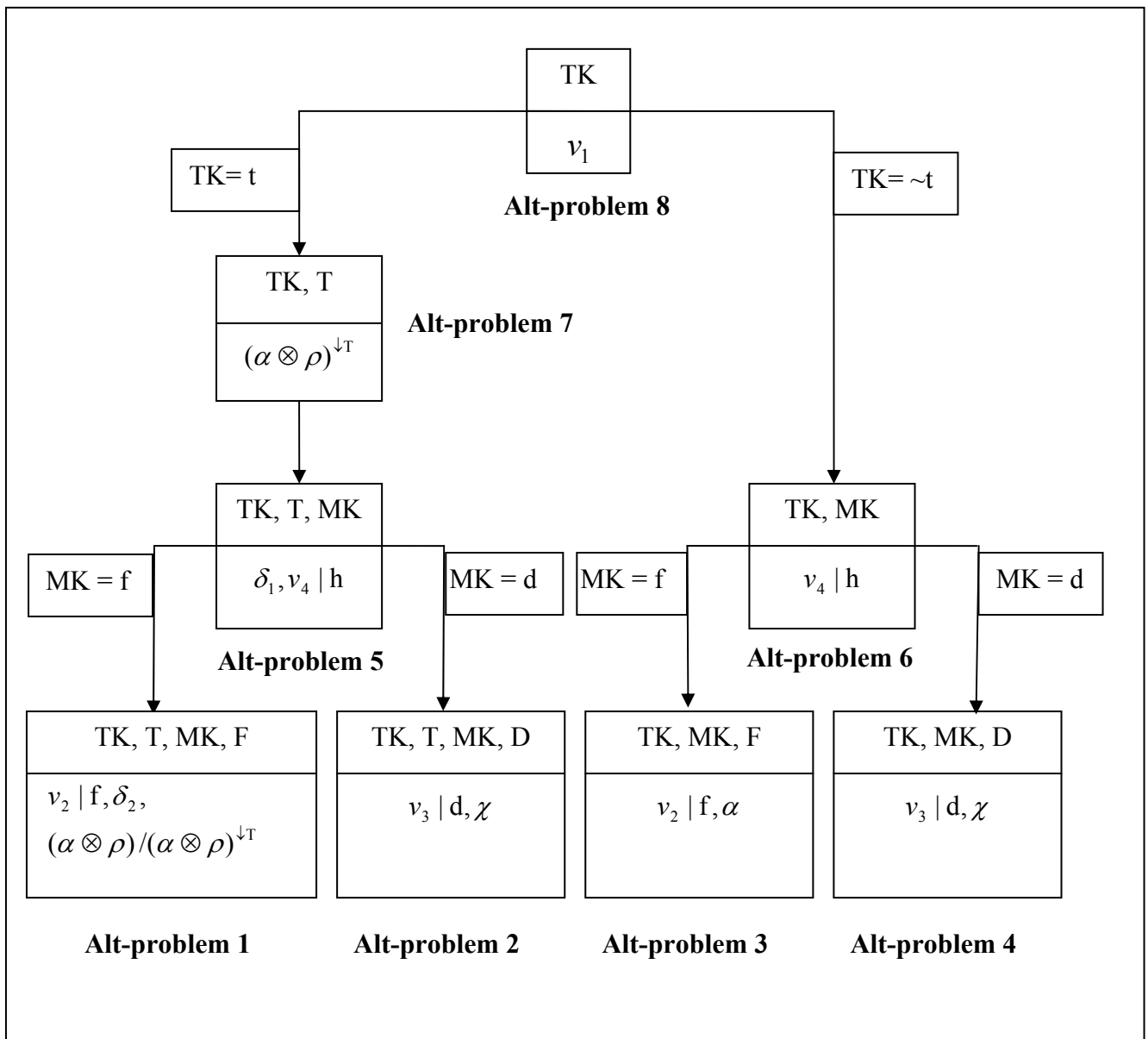
Alt problem 8: Yukarıda sıralanan diğer değerlemelerden hiçbirinin tanım kümesinde  $\{TK\}$  yer almadığından, yalnızca  $v_1$  fayda değerlemesi tanım kümesi  $\{TK\}$  ile birlikte alt problem 8 ile ilişkilendirilmiştir.

Alt problem 7: Alt problem 8'le ilişkilendirilmeyen  $v_2 | f$ ,  $v_3 | d$ ,  $v_4 | h$ ,  $\delta_1$  ve  $\delta_2$  değerlendirme parçaları alt problem 7'ye aktarılmıştır.  $\{TK, T\}$  tanım kümesine sahip hiç değerlendirme parçası bulunmadığından, söz konusu değerlemelerden hiçbiri alt problem 7 ile ilişkilendirilmemiştir. Böylece tüm değerlendirme parçaları  $\{TK, T, MK\}$  değişkenlerini içeren alt problem 5'e aktarılmıştır.

Alt problem 6: Bir üst düzey problemle ilişkilendirilmeyen  $v_2 | f$ ,  $v_3 | d$ ,  $v_4 | h$ ,  $\delta_1$  ve  $\delta_2$  değerlendirme parçaları alt problem 6'ya aktarılmıştır. Grafikten izlenebileceği gibi  $v_4 | h$ 'nin tanım kümesi MK'dır. Alt problem 6, MK'yı içeren  $\{TK, MK\}$  değişkenlerine sahip olduğundan,  $v_4 | h$  alt problem 6 ile ilişkilendirilmiş,  $v_2 | f$ ,  $\delta_1$  ve  $\delta_2$  alt problem 3'e,  $v_3 | d$ ,  $\delta_1$  ve  $\delta_2$  alt problem 4'e aktarılmıştır.

Alt problem 3: Bir önceki aşamadan aktarılan  $v_2 | f$ ,  $\delta_1$  ve  $\delta_2$  değerlemelerinden  $v_2 | f$  tanım kümesi  $\{TK, F\}$  ile birlikte alt problem 3 ile ilişkilendirilmiş ve kalan değerlemeler  $\delta_1$  ve  $\delta_2$  göz ardı edilmiştir. Benzer şekilde  $v_3 | d$  alt problem 4 ile ilişkilendirilmiş ve  $\delta_1$  ve  $\delta_2$  göz ardı edilmiştir.

Fayda ve gösterge değerlemelerinin alt problemlerle ilişkilendirilmesi süreci yukarıdaki biçimde yinelenerek tamamlanmış ve alt problemlerdeki fayda ve gösterge değerlemelerinin dağılım sonuçları Şekil 42’de gösterilmiştir.



Şekil 42. Ayrıştırılmış Ağaç

Hatırlanacağı gibi problemin ayrıştırılmasına ilişkin son işlemler olasılık değerlemelerinin belirlenmesine ilişkindir. Araç alımı probleminde olasılık değerlemelerinin hesaplanması amacıyla izleyen işlemler gerçekleştirilmiştir. Olasılık değerlemeleri yalnızca son değişkeni şans düğümü olan 1, 2, 3, 4 ve 7 numaralı alt problemler ile ilişkilendirilmiştir. Şekil 40'teki alt problem 8'den alt problem 1'e uzanan yol ele alındığında, yol üzerindeki şans değişkenlerinin T ve F olduğu görülmektedir. Ardışık Değerleme Ağından,  $(\chi \otimes \alpha \otimes \rho)^{\downarrow\{T,F\}} = \alpha \otimes \rho$ ,  $\{T,F\}$  için birleşik dağılım olmak üzere, alt problem 1 ile ilişkilendirilmiş olasılık değerlemesi  $(\alpha \otimes \rho)/(\alpha \otimes \rho)^{\downarrow T}$  olarak belirlenir.  $(\alpha \otimes \rho)/(\alpha \otimes \rho)^{\downarrow T}$ 'nin hesaplanmasına ilişkin ayrıntılar Tablo 27'de verilmiştir.

Tablo 27. Olasılık Değerlemesi  $(\alpha \otimes \rho)/(\alpha \otimes \rho)^{\downarrow T}$ 'nin Sayısal Hesaplamaları

$\delta_2$		$\alpha$	$\rho$	$\alpha \otimes \rho$	$(\alpha \otimes \rho)^{\downarrow T}$	$(\alpha \otimes \rho)/(\alpha \otimes \rho)^{\downarrow T}$
Tba	Fka	0,20	0,24	0,048	0,15	0,32
Tba	Fba	0,12	0,85	0,102		0,68
Tka	Fay	0,68	0,15	0,102	0,234	0,44
Tka	Fka	0,20	0,60	0,12		0,51
Tka	Fba	0,12	0,10	0,012		0,05
Tay	Fay	0,68	0,85	0,578	0,616	0,94
Tay	Fka	0,20	0,16	0,032		0,05
Tay	Fba	0,12	0,05	0,006		0,01

$(\alpha \otimes \rho)^{\downarrow T}$  olasılık değerlemesi şans değişkeni  $\{T\}$  ile ilişkilendirildiğinden, alt problem 7 ile ilişkilendirilen olasılık değerlemesi  $(\alpha \otimes \rho)^{\downarrow T}/(\alpha \otimes \rho)^{\downarrow \emptyset} = (\alpha \otimes \rho)^{\downarrow T}$  olarak belirlenmiştir ( $(\alpha \otimes \rho)^{\downarrow \emptyset}$  1 sabit değerine eşittir).

Benzer biçimde, alt problem 2 ile ilişkilendirilmiş olasılık değerlemesinin  $\chi$ , alt problem 3 ile ilişkilendirilmiş olasılık değerlemesinin  $\alpha$  ve alt problem 4 ile ilişkilendirilmiş olasılık değerlemesinin  $\rho$  olduğu Ardışık Değerleme Ağından görülebilir.

### 6.2.2. Alt Problemlerin Çözümü

Daha önce belirtildiği gibi alt problemlerin çözümüne ilk olarak en alt seviyede yer alan (yaprak) alt problemlerden başlanmıştır. Bir alt problem çözüldükten sonra, çözümde elde

edilen fayda değerlendirme parçası çözülen alt problemin bağlı olduğu bir üst seviyedeki alt probleme aktarılmış ve çözülen alt problem ayrıştırılmış ağaçtan silinmiştir. Fayda değerlendirme parçasının bir üst seviyedeki alt probleme aktarılması işleminde; fayda değerlendirme parçasının tanım kümesi, bir üst seviyedeki alt problemde yer alan herhangi bir değişkeni içermediğinde, fayda değerlemesine bir üst seviyeli alt problemin son değişkeni ve alacağı değer etiket olarak verilmiş ve bu etiketle aktarılmıştır. Tüm alt problemlerin çözümünde benzer işlemler uygulanmıştır.

Alt problemin çözülmesi sürecinde, daha önce aktarıldığı gibi füzyon (eritme) işlemleri uygulanmıştır. Bu amaçla alt problemlerdeki son değişken ile ilgili değerlendirme parçaları eritilerek, elde edilen fayda değerlendirme parçası bir üst seviyedeki alt probleme aktarılmıştır. Bu şekilde devam edilerek kök alt problemin içerdiği tüm alt problemler çözülmüş ve problem çözümü elde edilmiştir. Buna göre araç alımı problemine ilişkin ayrıştırılmış ağaçta yer alan alt problemlerin çözümleri alt problem 1'den başlayarak izleyen kısımda verilmiştir.

**Alt Problem 1'in Çözümü:** Alt problem 1' de yer alan değerlendirme parçaları,  $v_2 | f$ ,  $(\alpha \otimes \rho)/(\alpha \otimes \rho)^{\downarrow T}$  ve  $\delta_2$  olduğundan, F ile ilgili değerlendirme parçalarına aşağıda verildiği şekilde füzyon işlemi uygulanmıştır.

$$Fus_F = \{v_2 | f, (\alpha \otimes \rho)/(\alpha \otimes \rho)^{\downarrow T}\} = \{[(v_2 | f) \otimes (\alpha \otimes \rho)/(\alpha \otimes \rho)^{\downarrow T}]^{-F}\} = \{v_5 | f\}$$

Fayda değerlendirme sonucu  $v_5 | f$ , ayrıştırılmış ağaçta bir üst seviyede bulunan alt problem 5'e aktarılacaktır.  $v_5 | f$  kendi tanım kümesinde MK'yı kapsadığı için etiketleme ihtiyacı göstermemektedir. Tüm hesaplamalar  $\delta_2$  gösterge değerlemesi ile sınırlandırılmış olarak ilgili durum uzayları üzerinde gerçekleştirilir. Hesaplama ayrıntıları Tablo 28'de verilmiştir.

Tablo 28. Alt Problem 1'in Çözümüne İlişkin Hesaplamalar

$\{d\} \times \delta_2$			$v_2 f$	$(\alpha \otimes \rho)/(\alpha \otimes \rho)^{1T}$	$(v_2 f) \otimes (\alpha \otimes \rho)/(\alpha \otimes \rho)^{1T} = \varphi$	$\varphi^{-F} = v_5 f$
f	Tba	Fka	680	0,32	217,6	656,2
f	Tba	Fba	645	0,68	438,6	
f	Tka	Fay	720	0,44	313,85	695,641
f	Tka	Fka	680	0,51	348,72	
f	Tka	Fba	645	0,05	33,08	
f	Tay	Fay	720	0,94	675,58	717,19
f	Tay	Fka	680	0,05	35,32	
f	Tay	Fba	645	0,01	6,28	

**Alt Problem 2'nin Çözümü:** Alt problem 2, D ile ilgili değerlendirme parçaları  $\{v_3 | d, \chi\}$  üzerinde izleyen biçimde füzyon işleminin uygulanması ile çözülmüştür.

$$\text{Fus}_D \{v_3 | d, \chi\} = \{((v_3 | d) \otimes \chi)^{-D}\} = \{v_6 | d\}$$

Füzyon işlemine ilişkin hesaplama ayrıntıları Tablo 29 yardımıyla izlenebilir.

Tablo 29. Alt Problem 2'nin Çözümüne İlişkin Hesaplamalar

$\{d\} \times \Omega_D$		$v_3 d$	$\chi$	$(v_3 d) \otimes \chi$	$((v_3 d) \otimes \chi)^{-D} = (v_6 d)$
d	Day	365	0,86	313,9	358
d	Dav	315	0,14	44,1	

$v_6 | d$  biçiminde bir fayda parçası olan sonuç ayrıştırılmış ağaçta bir üst düzeydeki alt problem 5'e aktarılır.  $v_6 | d$  tanım kümesinde MK'yı içerdiğinden etiketlenmeyecektir.

**Alt Problem 3'ün Çözümü:** Alt problem 3'ün çözülmesi amacıyla  $\{v_2 | f, \alpha\}$  üzerinde

$$\text{Fus}_F \{v_2 | f, \alpha\} = \{((v_2 | f) \otimes \alpha)^{-F}\} = \{v_7 | f\} \quad \text{biçiminde füzyon işlemi uygulanmıştır.}$$

Füzyon işlemine ilişkin hesaplama ayrıntıları Tablo 30'da verilmiştir.

Tablo 30. Alt Problem 3'ün Çözümüne İlişkin Hesaplamalar

$\{f\} \times \Omega_F$		$v_2 f$	$\alpha$	$(v_2 f) \otimes \alpha$	$((v_2 f) \otimes \alpha)^{-F} = (v_7 f)$
f	Fay	720	0,68	489,6	703
f	Fka	680	0,20	136	
f	Fba	645	0,12	77,4	

$v_7 | f$  biçiminde bir fayda parçası olan füzyon sonucu, ayrıştırılmış ağaçta bir üst düzeydeki alt problem 6'ya aktarılmıştır.  $v_7 | f$  tanım kümesinde MK 'yı içerdiğinden etiketlenmemiştir.

**Alt Problem 4'ün Çözümü:** Alt problem 4, D ile ilgili değerlendirme parçaları  $\{v_3 | d, \chi\}$  üzerinde  $Fus_D \{v_3 | d, \chi\} = \{((v_3 | d) \otimes \chi)^{-D}\} = \{v_6 | d\}$  biçimde füzyon işleminin uygulanması ile çözülmüştür. Füzyon işlemine ilişkin hesaplama ayrıntıları alt problem 2 ile aynıdır ve Tablo 31'de verilmiştir.

Tablo 31. Alt Problem 4'ün Çözümüne İlişkin Hesaplamalar

$\{d\} \times \Omega_D$	$v_3   d$	$\chi$	$(v_3   d) \otimes \chi$	$((v_3   d) \otimes \chi)^{-D} = (v_6   d)$
d	Day	365	0,86	313,9
d	Dav	315	0,14	44,1

$v_6 | d$  biçiminde bir fayda parçası olan sonuç yapıla geldiği biçimde ayrıştırılmış ağaçta bir üst düzeydeki alt problem 6'ya aktarılmıştır.  $v_6 | d$  tanım kümesinde MK 'yı içerdiğinden etiketlenmemiştir.

Alt problem 4'ün çözümü ile ayrıştırılmış ağaçtaki tüm yaprak alt problemler çözülmüş ve ağaçtan silinmiştir. Böylece bir üst düzeyde yer alan alt problem 5 ve alt problem 6 yaprak alt problem konumuna geçmiştir. Problemin çözümünde bir sonraki adım alt problem 5'in çözümüdür.

**Alt Problem 5'in Çözümü:** Başlangıçta alt problem 5 tanım kümesi MK olan  $v_4 | h$  fayda değerlemesi ve tanım kümesi  $\{T, MK\}$  olan  $\delta_1$  gösterge değerlemesi ile ilişkilidir. Daha sonra, alt problem 1'den tanım kümesi  $\{MK, T\}$  olan  $v_5 | f$  değerlemesini ve alt problem 2'den tanım kümesi  $\{MK\}$  olan  $v_6 | d$  değerlemesini almıştır. Tanım kümelerinde TK 'yı içeren herhangi bir olasılık ve fayda değerlendirme olmadığından bu alt problemdeki tüm hesaplamalar  $\delta_1$ 'in durum uzayı üzerinde gerçekleştirilerek MK ile ilgili füzyon işlemi,  $Fus_{MK} \{v_4 | h, v_5 | f, v_6 | d\} = \{((v_4 | h) \otimes (v_5 | f) \otimes (v_6 | d))^{-MK}\} = \{v_8\}$  biçiminde hesaplanmıştır. Füzyon işlemine ilişkin hesaplama ayrıntıları Tablo 32'de verilmiştir.



Tablo 32. Alt Problem 5'in Çözümüne İlişkin Hesaplamalar

$\delta_1$	$v_4 h$	$v_5 f$	$v_6 d$	$(v_4 h) \otimes (v_5 f) \otimes (v_6 d)$	$(v_4 h) \otimes (v_5 f) \otimes (v_6 d)^{-MK} = v_8$
Tba d			358	358	358
Tba h	0			0	
Tka f		695,641		695,64	695,64
Tka d			358	358	
Tka h	0			0	
Tay f		717,19		717,19	717,19
Tay d			358	358	
Tay h	0			0	

Füzyon işlemi ile elde edilen  $v_8$  biçiminde fayda parçası, tanım kümesi  $\{T\}$  ile birlikte ayrıştırılmış ağaçta bir üst düzeydeki alt problem 7'ye aktarılmıştır.  $v_8$  tanım kümesinde T'yi içerdiği için etiketlenmemiştir.

**Alt Problem 6'nın Çözümü:** Başlangıçta  $v_4|h$  fayda değerlemesi ile ilişkilendirilmiş olan alt problem 6, daha sonra alt problem 3'ten  $v_7|f$  fayda değerlemesi parçasını ve alt problem 4'ten  $v_6|d$  fayda değerlemesi parçasını almıştır. Alt problem 6, alt problemde yer alan son değişken MK ile ilgili üç değerlendirme üzerinde füzyon işleminin  $Fus_{MK} \{v_4|h, v_7|f, v_6|d\} = \{(v_4|h) \otimes (v_7|f) \otimes (v_6|d)\}^{-MK} = \{v_9\}$  biçiminde uygulanması ile çözülmüştür. Füzyon işlemine ilişkin hesaplama ayrıntıları Tablo 33'te verilmiştir.

Tablo 33. Alt Problem 6'nın Çözümüne İlişkin Hesaplamalar

$\Omega_{MK}$	$v_4 h$	$v_7 f$	$v_6 d$	$(v_4 h) \otimes (v_7 f) \otimes (v_6 d)$	$(v_4 h) \otimes (v_7 f) \otimes (v_6 d)^{-MK} = v_9$
h	0			0	703
f		703		703	
d			358	358	

$v_9$  biçiminde bir fayda değerlendirme olan sonuç  $\emptyset$  olan tanım kümesi ile birlikte ayrıştırılmış ağaçta bir üst düzeydeki alt problem 8'e aktarılmıştır.  $v_9$  tanım kümesinde TK'yı içermediğinden  $TK = \sim t$  olarak etiketlenmiştir. Böylece,  $v_9 \otimes (t_{TK} | \sim t)$  biçiminde gösterilen fayda değerlendirme alt problem 8'e aktarılmıştır.

**Alt Problem 7'nin Çözümü:** Başlangıçta olasılık değerlemesi  $(\alpha \otimes \rho)^{\downarrow T}$  ile ilişkilendirilen alt problem 7 daha sonra alt problem 5'ten tanım kümesi  $\{T\}$  olan  $v_8$  fayda değerlemesini aldığından,  $T$  ile ilgili bu iki değerlendirme üzerinde,  $Fus_T \{v_8, (\alpha \otimes \rho)^{\downarrow T}\} = \{(v_8 \otimes (\alpha \otimes \rho)^{\downarrow T})^{-T} = \{v_{10}\}$  biçiminde füzyon işlemi gerçekleştirilerek alt problemin çözümü elde edilmiştir. Füzyon işlemine ilişkin hesaplama ayrıntıları Tablo 34'ten izlenebilir.

Tablo 34. Alt Problem 7'nin Çözümüne İlişkin Hesaplamalar

$\Omega_T$	$v_8$	$(\alpha \otimes \rho)^{\downarrow T}$	$v_8 \otimes (\alpha \otimes \rho)^{\downarrow T}$	$(v_8 \otimes (\alpha \otimes \rho)^{\downarrow T})^{-T} = v_{10}$
Tba	358	0,15	53,7	658,27
Tka	695,64	0,23	162,78	
Tay	717,19	0,62	441,79	

Bu aşamada elde edilen  $v_{10}$  değerlemesi tanım kümesinde TK'yı içermediğinden  $TK = t$  olarak etiketlenmiş ve  $v_{10} \otimes (I_{TK} | t)$  biçiminde gösterilen fayda değerlemesi, bir üst düzeydeki alt problem 8'e aktarılmıştır.

**Alt Problem 8'in Çözümü:** Başlangıçta alt problem 8 ile ilişkili olarak yalnızca  $v_1$  fayda değerlemesi mevcut iken, daha sonraki aşamalarda alt problem 6'dan  $v_9 \otimes (I_{TK} | \sim t)$  fayda değerlendirme parçasını ve alt problem 7'den  $v_{10} \otimes (I_{TK} | t)$  fayda değerlendirme parçasını almıştır. Bu nedenle bu aşamada gerçekleştirilecek füzyon işlemi söz konusu üç fayda değerlendirme üzerinde aşağıda belirtilen biçimde gerçekleştirilir:

$$Fus_{TK} = \{v_1, v_9 \otimes (I_{TK} | \sim t), v_{10} \otimes (I_{TK} | t)\} = \{v_1 \otimes (v_9 \otimes (I_{TK} | \sim t)) \otimes v_{10} \otimes (I_{TK} | t)\}^{-TK}$$

Söz konusu füzyon işlemine ilişkin hesaplama ayrıntıları Tablo 35'de verilmiştir.

Tablo 35. Alt Problem 8'in Çözümüne İlişkin Hesaplamalar

$\Omega_{TK}$	$v_1$	$v_9 \otimes (I_{TK}   \sim t)$	$v_{10} \otimes (I_{TK}   t)$	$v_1 \otimes v_9 \otimes (I_{TK}   \sim t) \otimes v_{10} \otimes (I_{TK}   t)$	$(v_1 \otimes (v_9 \otimes (I_{TK}   \sim t)) \otimes (v_{10} \otimes (I_{TK}   t)))^{-TK}$
t	-100		658,27	558,27	703
$\sim t$	0	703		703	

Son alt problemin çözümü ile problemin tamamı çözülmüştür. MK karar düğümü için Tablo 33 ve TK karar düğümü için Tablo 35 incelendiğinde optimal politikanın **test**

**yapmamak** ( $\sim t$ ), ve **F marka aracı almak** (f) biçiminde olduğu görülmektedir. Bu politika uygulandığında elde edilecek fayda değeri **703** olarak bulunmuştur.

Önceki iki tekniğin üstünlüklerini birleştirip eksikliklerini giderme çabası gösteren Ardışık Değerleme Ağının üstün ve zayıf yönleri izleyen biçimde belirlenmiştir. Asimetri Değerleme Ağında gösterge değerlemelerinin ayrıntılarında belirlenirken, Ardışık Değerleme Ağı problemin asimetrik yapısının büyük bölümünü grafik düzeyinde küçük bir kısmını ise gösterge değerlemelerinin ayrıntılarında belirlemektedir.

Ardışık Değerleme Ağında şans ve karar düğümlerinin durum uzayları yapay durumları içermemektedir. Bu da gereksiz hesaplamaları ortadan kaldırmaktadır. Belirsizliği modellemek için Ardışık Karar Diyagramında olduğu gibi ayrı bir Etki Diyagramına ihtiyaç duymayıp genel bir belirsizlik modeli kullanmaktadır. Problemden verilen kısıtlamalar tek bir değişkeni içeriyorsa yaylar üzerindeki açıklamalarla birden fazla değişkeni içeriyorsa gösterge değerlemelerinin kullanımı ile gösterilmektedir. Bu son özellik önceki iki tekniğin nitel kısıtlamaları göstermede kullandıkları yaklaşımların birleşimidir. Ardışık Değerleme Ağı, Ardışık Karar Diyagramında olduğu gibi ayrı bir formülasyon tablosuna ihtiyaç duymamaktadır.

Ardışık Değerleme Ağında problemin daha küçük alt problemlere ayrıştırılması ve sonrasında her bir alt problemin çözümü Karar Ağacının geriye doğru katlama çözüm sürecine benzetilebilir.

Ardışık Değerleme Ağının bazı zayıf yönleri ise izleyen şekilde belirlenmiştir. Ardışık Değerleme Ağının daha küçük alt problemlere ayrıştırılması, Ardışık Karar Diyagramlarının yay ters çevirme için gerektirdiğine benzer şekilde olasılık değerlemeleri üzerinde işlem yapılmasını gerektirir. Ardışık Değerleme Ağının çözüm tekniği birleşme durumunu kabul etmediğinden hesaplamalarda bazı tekrarlamalara neden olur. Son olarak, Ardışık Değerleme Ağının grafiksel gösterimi karmaşık olabilir.

## SONUÇ

İşletme faaliyetleri verilen kararlara bağlı olarak gerçekleştirilir. Bu nedenle karar verme işletme amaçlarına erişme ve başarıda yüksek öneme sahiptir. Doğru kararın alınabilmesi bu amaçla kullanılan karar verme yaklaşımı ile yakından ilintilidir. İşletme yöneticileri ise çoklukla deneyimleri ve önsezileri doğrultusunda karar verme eğilimindedir. Fakat yüksek rekabet ve belirsizlik ortamında yalnızca deneyim ve önsezi doğru karar için yeterli olmayabilmektedir. Karar verme konusunda da bilimsel yaklaşımın benimsenmesi doğru işletme kararları alınmasına önemli ölçüde katkı sağlayacaktır.

Karar problemleri, karar ortamlarına (belirsizlik, belirlilik ve risk) ve verilen karar sayısına (tek ya da çok aşamalı –ardışık-) bağlı olarak sınıflandırılabilir.

Tek bir karar için sonuç matrisi yaklaşımı çözüm için yeterli olurken birden fazla karar gerektiren problemlerde grafiksel çözüm yaklaşımları kullanılır. Çok aşamalı karar problemlerinin modellenmesi ve çözümü için geliştirilen grafiksel yaklaşım olan Karar Ağacı tek aşamalı karar problemlerine de uygulanabilmektedir. Özellikle asimetrik yapıli ardışık karar problemlerinin modellenmesi ve çözümü için çok elverişli olan Karar Ağacı yaklaşımı, gösterim açısından değişken sayısı arttığında karmaşıklaşip anlaşılabilir bir görünüme bürünmektedir. Bu durumda gösterimi daha yalın Etki Diyagramı yaklaşımı tercih edilmektedir. Karar Ağacı ve Etki Diyagramının yanı sıra Değerleme Ağı, Ardışık Karar Diyagramı, Ardışık Değerleme Ağı teknikleri, karar problemlerinin modellenmesi ve çözümü için zaman içinde geliştirilen diğer tekniklerdir.

Günümüze değin grafiksel teknikler daima problem tabanlı olarak ortaya konmuş ve çözümler hep özgün bir karar problemine yönelik olarak geliştirilmiştir. Bu çalışmada öncelikle grafiksel yaklaşımların teorik yapılarının problemden ayırık matematiksel modellerle ifade edilmesiyle genellemelere gidilmiştir. Problem gösterimi ve çözümü konularında geliştirilen genellemeler sonrasında ise, söz konusu bütün yaklaşımlar, sırayla “Bir lojistik firmasının araç edinme problemi”nin gerçek hayat verilerine uygulanmıştır.

Uygulama bölümünde ele alınan lojistik firmasının karar probleminde, ihtiyacın hafif ticari araç kategorisinde yer alan ve şasi biçiminde tanımlanan araç tipinde olduğu belirlenmiştir. Karar seçenekleri, mevcut filo içinde yer alan (D) marka (model) veya mevcut filo içinde

yer almayan (F) marka (model) biçimindedir. Filoda yer almadığından (F) marka araç için test yapılması söz konusudur. Bu nedenle firma ardışık olarak önce test yapıp yapmama kararı ve sonrasında marka (model) kararı vermek durumundadır. Test süreci sonunda büyük arıza ortaya çıktığında (F) marka araç alınmayacaktır. Bu kısıt problemin asimetric özellik göstermesine neden olmaktadır. Belirtilen problem sırayla *Karar Ağacı*, *Etki Diyagramı*, *Değerleme Ağı*, *Ardışık Karar Diyagramı* ve *Ardışık Değerleme Ağı* teknikleri ile çözülmüş ve tüm tekniklerin çözüm sonucunda en yüksek beklenen fayda **703** olarak bulunmuştur. Bu faydayı sağlayan kararlar ise **test yapmamak** ve **F markasını almak** biçiminde belirlenmiştir.

Gerçekleştirilen uygulama ile bir yandan karar problemine bilimsel yaklaşımla çözüm bulunurken, öte yandan farklı grafiksel tekniklerin üstün ve zayıf yönlerinin net bir biçimde ortaya çıkması sağlanmıştır. Gerçekten de uygulama çalışması yardımıyla hiçbir tekniğin teori ve uygulamada karar problemini modelleme ve çözme yönleriyle mükemmel olmadığı ortaya konmuştur. Her tekniğin üstün ve zayıf yönleri ise izleyen biçimde belirlenmiştir.

Karar Ağacı karar probleminin yapısını tüm ayrıntılarıyla ve kronolojik olarak göstermektedir. Bu açıdan karar probleminin anlaşılmasını ve çözümünü kolaylaştırır. Asimetric yapıli problemlerde, asimetriyi göstermek için doğrudan senaryoları kullandığından, modele yapay durumlar ve değişkenler eklenmesine gerek kalmamaktadır. Eğer bir değişken senaryo ile ilgili değilse, Karar Ağacı gösterimi bu değişkeni içermeyecektir. Bu güçlü yanlarına karşın karar probleminde yer alan değişken sayısı arttığında Karar Ağacının boyutunun da buna bağlı olarak büyüyeceği ve gösterimi karmaşıklaştıracağı açıktır. Karar Ağacının boyutu büyüdüğünde, bu olumsuzluğu ortadan kaldırma amacıyla ortak senaryoları birleştirme işlemi uygulanabilirse de bu işlem kolaylıkla gerçekleştirilemez. Çünkü bu işlem birleşmemiş ağacın tamamını oluşturmayı ve sonrasında tekrarlanan alt ağaçların belirlenerek birleştirilmesini gerektirir. Bu da Karar Ağacı gösteriminin temel darboğazı olarak kabul edilip Karar Ağacı tekniğini, küçük karar problemlerinin gösterimi için kullanmakla sınırlandırır. Problemden yer alan bazı olasılıkların yeniden hesaplanabilmesine olanak sağlayan ek bilgi olduğunda, olasılıklar Karar Ağacı oluşturulmadan önce Bayes kuralı ile yeniden hesaplanır. Olasılıklar üzerinde bu şekilde ön işlem yapılması ayrı bir hesaplama gayreti gerektirir.

Etki Diyagramı gösterimi, Karar Ağacı gösterimine göre karar probleminin yapısını grafiksel olarak daha öz biçimde sunabilmektedir. Bu anlamda Karar Ağacının boyuta ilişkin zayıflığını giderecek bir tekniktir. Öte yandan Etki Diyagramı değişkenler arasında Karar Ağacı gösteriminden açıkça izlenemeyen bağımlılık ve bağımsızlık ilişkilerini açık bir şekilde gösterebilmektedir. Gösterimdeki bu üstünlüğüne rağmen çözüm sürecinde simetrik karar problemleri için kullanışlı olup yüksek asimetri özelliği gösteren problemlerin çözümünde kullanışlı değildir. Bunun nedeni çözüm sürecinde ortaya çıkabilecek tüm durumların dikkate alınması ve asimetriyi gösterebilmek için probleme yapay durumlar eklemesidir. Yapay durumlar ve bu durumlara ilişkin olasılık ve fayda fonksiyonları kullanılarak problem simetrikleştirilmekte ve daha sonra çözülmektedir. Ancak bu yapıldığında problemin yapısı karmaşıklaşmaktadır. Bu da çözüm için gerekli olan zaman ve çaba artışına neden olmaktadır.

Değerleme Ağı, problemin gösterimi için Etki Diyagramı ile benzerlik gösteren öz bir grafik kullanır ve değişkenler arasındaki bağımlılık ilişkilerini olasılık modelinde gösterir. Karar Ağacı ve Etki Diyagramında olduğu gibi olasılıklar için ön işlem yapılması gerekmez, her olasılık modeli doğrudan gösterilebilir. Bunun için gerekli olan tek şey her bir şans değişkeni için birleşik olasılık dağılımının faktörlere ayrılmasıdır. Problemdeki asimetri gösterge değerlemeleri yardımıyla yansıtılır. Gösterge değerlemeleri asimetriyi parça parça ve tekrarlama olmaksızın yansıtır. Gösterge değerlemeleri aynı zamanda etkin çerçevelerin tanımlanmasında kullanılır ve etkin çerçeve, ilgili olduğu değişkenlere ilişkin tüm asimetri bilgisini içerir. Bu özellik gösterimi basitleştirme katkısı sağlar. Tüm hesaplamaların etkin çerçeveler üzerinde gerçekleştirilmesi ise çözüm tekniğinin etkinliğine katkı sağlar. Değerleme Ağının çözüm aşamasında kullanılan füzyon algoritması bölgesel hesaplama yaptığından daha az hesaplama içermektedir ve bu nedenle Etki Diyagramlarının yayı ters çevirme tekniğinden daha etkindir. Problem simetrik olduğunda Karar Ağacının geriye doğru katlama tekniğinden de daha etkindir. Ancak problem asimetric olduğunda çözüm aşamasında asimetriyi yansıtabilmek için yapay durumlar kullanma ihtiyacı gösterir. Öte yandan Değerleme Ağında koşullu olasılıklar Etki Diyagramında olduğu gibi kolay anlaşılabilir değildir. Etki Diyagramından daha fazla düğüm içermesi değişken sayısı arttıkça buna bağlı olasılık ve gösterge düğümlerini de arttırabileceğinden gösterimin anlaşılmasını da güçleştirebilir.

Ardışık Karar Diyagramının temel üstünlüğü asimetriyi öz biçimde sunabilmesidir. Ardışık Karar Diyagramı görsel anlamda Karar Ağacının öz biçimi olarak düşünülebilir. Bu nedenle Karar Ağacının boyutunun değişken sayısına bağlı olarak artması biçimindeki zayıflığını gideren bir gösterimdir. Karar Ağacında olduğu gibi Ardışık Karar Diyagramı da asimetriyi yapay durumlar eklemeksizin modeller. Ardışık Karar Diyagramının çözüm aşamasında minimal ve ilgili geçmişlerin kullanımı tüm senaryolar (ya da geçmişler) üzerinde çalışma zorunluluğunu ortadan kaldırır. Böylece, Karar Ağacının kolay bir şekilde gerçekleştirilemeyen birleşme işlemini kolaylıkla gerçekleştirmiş olur. Sıralanan üstünlüklerine karşın problemin değişkenleri arasındaki bağımlılık ilişkilerini gösterebilmek için aynı zamanda Etki Diyagramına ihtiyaç duyması bir eksiklik olarak ortaya çıkar. Ayrıca olasılık modelini tutarlı biçimde göstermede yetersizdir. Ardışık Karar Diyagramı ile tutarlı olan Etki Diyagramı gösteriminde bir dağılım kullanırken formülasyon tablosunda daha farklı bir dağılım kullanır. Ardışık Karar Diyagramının formülasyonunu tamamlayabilmesini sağlayan formülasyon tablosunun belirlenmesi öncesinde olasılıklar üzerinde ön işlem yapılması gerekebilir. Bunun için ilgili Ardışık Karar Diyagramı ile uyumlu hale gelmesi için Etki Diyagramının değiştirilmesi gerekir. Büyük boyutlu problemlerde standart geçmişler de doğrusal olarak büyüyeceği için tüm standart geçmişleri sıralayıp bunların içinden minimal ve ilgili geçmişlerin belirlenmesi de ayrı bir zorluk olarak ortaya çıkacaktır.

Çalışmada ele alınan son teknik olan Ardışık Değerleme Ağı önceki iki tekniğin üstünlüklerini birleştirip eksikliklerini giderme çabası göstermektedir. Şans ve karar düğümlerinin durum uzaylarının yapay durumları içermemesi gereksiz hesaplamaları ortadan kaldırdığından bu durum Ardışık Değerleme Ağının üstünlüklerinden biri olarak ortaya çıkmaktadır. Diğer bir üstünlük olarak belirsizliği modellemek için Ardışık Karar Diyagramında olduğu gibi ayrı bir Etki Diyagramına ihtiyaç duymayıp genel bir belirsizlik modeli kullanmaktadır. Problemden verilen kısıtlamalar tek bir değişkeni içeriyorsa yaylar üzerindeki açıklamalarla birden fazla değişkeni içeriyorsa gösterge değerlemelerinin kullanımı ile gösterilmektedir. Bu son özellik önceki iki tekniğin nitel kısıtlamaları göstermede kullandıkları yaklaşımların birleşimidir. Son olarak Ardışık Değerleme Ağı, Ardışık Karar Diyagramında olduğu gibi ayrı bir formülasyon tablosuna ihtiyaç duymamaktadır. Ardışık Değerleme Ağının bazı zayıf yönleri ise izleyen şekilde belirlenmiştir. Ardışık Değerleme Ağının daha küçük alt problemlere ayrıştırılması, Ardışık Karar Diyagramlarının yay ters çevirme için gerektirdiğine benzer şekilde olasılık

değerlemeleri üzerinde işlem yapılmasını gerektirir. Ardışık Değerleme Ağının çözüm tekniği birleşme durumunu kabul etmediğinden hesaplamalarda bazı tekrarlamalara neden olur. Son olarak, Ardışık Değerleme Ağının grafiksel gösterimi karmaşık olabilir ve anlaşılması güçleşebilir.

Grafiksel tekniklere ilişkin ayrıntılar incelendiğinde, değişken ve durum sayıları arttığında Karar Ağacının karmaşık görünümü diğer tekniklerin kullanımıyla ortadan kalkmaktadır. Ancak diğer tekniklerin yalın görünümlerinin konunun uzmanı olmayan kişilerce algılanmasının ve anlaşılmasının oldukça güç olacağı da bir gerçektir. Kaldı ki asimetrik karar problemlerine Karar Ağacı çözüm yaklaşımı diğerlerine göre daha sade ve basittir. Bu nedenle, işletme yöneticilerinin karşı karşıya oldukları karar problemlerinin gösterimi ve çözümü konusunda yararlanabilecekleri grafiksel teknik olarak Karar Ağacı yaklaşımı günümüzde hala önemini korumaktadır.



## EKLER

### Ek 1: Füzyon Algoritması Teoreminin İspatı

**Önerme 1.**  $\Delta = \{\mathcal{X}_D, \mathcal{X}_R, \{l_1, \dots, l_s\}, \{v_1, \dots, v_j\}, \{\rho_1, \dots, \rho_k\}, \rightarrow\}$  'nin karar probleminin iyi-tanımlanmış Değerleme Ağı gösterimi olduğu ve  $>$  kısmi sıralamasına göre  $X$  'in  $\mathcal{X} = \mathcal{X}_D \cup \mathcal{X}_R$  'de en küçük değer olduğunu varsayıldığında,

$((\otimes \{v_1, \dots, v_j\}) \otimes (\otimes \{l_1, \dots, l_s, \rho_1, \dots, \rho_k\}))^{\downarrow(\mathcal{X}-\{X\})} = \otimes Fus_X \{v_1, \dots, v_j, l_1, \dots, l_s, \rho_1, \dots, \rho_k\}$  olarak yazılır.

**Önerme 1'in İspatı**  $l_i$  'nin  $h_i$  için bir gösterge değerlemesi,  $v_i$  'nin  $g_i$  için bir fayda değerlemesi ve  $\rho_i$  'nin  $r_i$  için bir olasılık değerlemesi olduğu varsayalım.

*Durum 1:*  $X$  'in bir karar değişkeni olduğu, genellikle kayıp vermeksizin  $v_1, \dots, v_j$  'nin tanım kümelerinde  $X$  'in yer aldığı fayda değerlemeleri olduğu ve  $l_1, \dots, l_s, \rho_1, \dots, \rho_k$  'lerin tanım kümelerinde  $X$  'in yer aldığı gösterge ve olasılık değerlemeleri olduğunu varsayıldığında  $v, \otimes \{v_1, \dots, v_j\}; g, \cup \{g_1, \dots, g_j\}; \rho, \otimes \{l_1, \dots, l_s, \rho_1, \dots, \rho_k\}$  ve  $r \cup \{h_1, \dots, h_s, r_1, \dots, r_k\}$  'yi göstermek üzere,  $\mathbf{c} \in \Omega_{\mathcal{X}-\{X\}}$  iken

$$\begin{aligned} & ((\otimes \{v_1, \dots, v_j\}) \otimes (\otimes \{l_1, \dots, l_s, \rho_1, \dots, \rho_k\}))^{\downarrow(\mathcal{X}-\{X\})}(\mathbf{c}) = \\ & = \text{ENB}\{[v_1(\mathbf{c}^{\downarrow g_1 - \{X\}}, \mathbf{x}) + \dots + v_j(\mathbf{c}^{\downarrow g_j - \{X\}}, \mathbf{x}) + v_{j+1}(\mathbf{c}^{\downarrow g_{j+1}}) + \dots + v_j(\mathbf{c}^{\downarrow g_j})] \times [l_1(\mathbf{c}^{\downarrow h_1 - \{X\}}, \mathbf{x}) \\ & \dots l_s(\mathbf{c}^{\downarrow h_s - \{X\}}, \mathbf{x}) l_{s+1}(\mathbf{c}^{\downarrow h_{s+1}}) \dots l_s(\mathbf{c}^{\downarrow h_s}) \rho_1(\mathbf{c}^{\downarrow r_1 - \{X\}}, \mathbf{x}) \dots \rho_{k'}(\mathbf{c}^{\downarrow r_{k'} - \{X\}}, \mathbf{x}) \rho_{k+1}(\mathbf{c}^{\downarrow r_{k+1}}) \dots \rho_k(\mathbf{c}^{\downarrow r_k})] \\ & \mid \mathbf{x} \in W_X \ni (\mathbf{c}, \mathbf{x}) \in \Omega_{\mathcal{X}}\}. \end{aligned}$$

yazılır.

$\Delta$  iyi-tanımlanmış olduğu için, tüm  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W_X \ni (\mathbf{c}, \mathbf{x}), (\mathbf{c}, \mathbf{y}) \in \Omega_{\mathcal{X}}$  için izleyen biçimde gösterilebilir.

$$\begin{aligned} & l_1(\mathbf{c}^{\downarrow h_1 - \{X\}}, \mathbf{x}) \dots l_s(\mathbf{c}^{\downarrow h_s - \{X\}}, \mathbf{x}) \rho_1(\mathbf{c}^{\downarrow r_1 - \{X\}}, \mathbf{x}) \dots \rho_{k'}(\mathbf{c}^{\downarrow r_{k'} - \{X\}}, \mathbf{x}) = \\ & = l_1(\mathbf{c}^{\downarrow h_1 - \{X\}}, \mathbf{y}) \dots l_s(\mathbf{c}^{\downarrow h_s - \{X\}}, \mathbf{y}) \rho_1(\mathbf{c}^{\downarrow r_1 - \{X\}}, \mathbf{y}) \dots \rho_{k'}(\mathbf{c}^{\downarrow r_{k'} - \{X\}}, \mathbf{y}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& ((\otimes\{v_1, \dots, v_j\}) \otimes (\otimes\{l_1, \dots, l_s, \rho_1, \dots, \rho_k\}))^{\downarrow(\mathcal{X}-\{X\})}(\mathbf{c}) = \\
& = [\text{ENB}\{v_1(\mathbf{c}^{\downarrow g_1-\{X\}}, \mathbf{x}) + \dots + v_j(\mathbf{c}^{\downarrow g_j-\{X\}}, \mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in W_X \ni (\mathbf{c}^{\downarrow g-\{X\}}, \mathbf{x}) \in \Omega_{\mathcal{X}}\} + v_{j+1}(\mathbf{c}^{\downarrow g_{j+1}}) + \dots + \\
& + v_j(\mathbf{c}^{\downarrow g_j})][l_1(\mathbf{c}^{\downarrow h_1-\{X\}}, \mathbf{x}) \dots l_{s'}(\mathbf{c}^{\downarrow h_{s'}-\{X\}}, \mathbf{x}) \rho_1(\mathbf{c}^{\downarrow r_1-\{X\}}, \mathbf{x}) \dots \rho_{k'}(\mathbf{c}^{\downarrow r_{k'}-\{X\}}, \mathbf{x}) l_{s+1}(\mathbf{c}^{\downarrow h_{s+1}}) \dots l_s(\mathbf{c}^{\downarrow h_s}) \\
& \rho_{k+1}(\mathbf{c}^{\downarrow r_{k+1}}) \dots \rho_k(\mathbf{c}^{\downarrow r_k})] = \\
& = [v^{\downarrow g-\{X\}}(\mathbf{c}^{\downarrow g-\{X\}}) + v_{j+1}(\mathbf{c}^{\downarrow g_{j+1}}) + \dots + v_j(\mathbf{c}^{\downarrow g_j})][l_1(\mathbf{c}^{\downarrow h_1-\{X\}}, \mathbf{y}) \dots l_{s'}(\mathbf{c}^{\downarrow h_{s'}-\{X\}}, \mathbf{y}) \rho_1(\mathbf{c}^{\downarrow r_1-\{X\}}, \mathbf{y}) \dots \\
& \rho_{k'}(\mathbf{c}^{\downarrow r_{k'}-\{X\}}, \mathbf{y}) l_{s+1}(\mathbf{c}^{\downarrow h_{s+1}}) \dots l_s(\mathbf{c}^{\downarrow h_s}) \rho_{k+1}(\mathbf{c}^{\downarrow r_{k+1}}) \dots \rho_k(\mathbf{c}^{\downarrow r_k})] \\
& (\mathbf{y} = \zeta_X(\mathbf{c}^{\downarrow g-\{X\}})) \\
& = [v^{\downarrow g-X}(\mathbf{c}^{\downarrow g-\{X\}}) + v_{j+1}(\mathbf{c}^{\downarrow g_{j+1}}) + \dots + v_j(\mathbf{c}^{\downarrow g_j})][(\rho \otimes \zeta_X)^{\downarrow r-\{X\}}(\mathbf{c}^{\downarrow r-\{X\}}) l_{s+1}(\mathbf{c}^{\downarrow h_{s+1}}) \dots l_s(\mathbf{c}^{\downarrow h_s}) \\
& \rho_{k+1}(\mathbf{c}^{\downarrow r_{k+1}}) \dots \rho_k(\mathbf{c}^{\downarrow r_k})] = \\
& = \otimes(\{v^{\downarrow g-\{X\}}, v_{j+1}, \dots, v_j\} \cup \{(\rho \otimes \zeta_X)^{\downarrow r-\{X\}}, l_{s+1}, \dots, l_s, \rho_{k+1}, \dots, \rho_k\})(\mathbf{c})
\end{aligned}$$

*Durum 2:*  $X$ 'in bir rassal değişken olduğu ve genellikle kayıp vermeksizin  $v_i, \dots, v_{j'}$ 'nin tanım kümelerinde  $X$ 'in yer aldığı fayda değerlemeleri olduğu ve  $l_i, \dots, l_{s'}, \rho_1, \dots, \rho_{k'}$ 'lerin tanım kümelerinde  $X$ 'in yer aldığı gösterge ve olasılık değerlemeleri olduğunu varsayıldığında  $v, \otimes\{v_1, \dots, v_j\}; g \cup \{g_1, \dots, g_j\}; \rho \otimes \{l_1, \dots, l_{s'}, \rho_1, \dots, \rho_{k'}\}$  ve  $r, \cup\{h_1, \dots, h_{s'}, r_1, \dots, r_{k'}\}$ 'yi göstermek üzere,  $\mathbf{c} \in \Omega_{\mathcal{X}-\{X\}}$  iken,

$$\begin{aligned}
& ((\otimes\{v_1, \dots, v_j\}) \otimes (\otimes\{l_1, \dots, l_s, \rho_1, \dots, \rho\}))^{\downarrow(\mathcal{X}-\{X\})}(\mathbf{c}) = \\
& = \sum [v_1(\mathbf{c}^{\downarrow g_1-\{X\}}, \mathbf{x}) + \dots + v_j(\mathbf{c}^{\downarrow g_j-\{X\}}, \mathbf{x}) + v_{j+1}(\mathbf{c}^{\downarrow g_{j+1}}) + \dots + v_j(\mathbf{c}^{\downarrow g_j})][l_1(\mathbf{c}^{\downarrow h_1-\{X\}}, \mathbf{x}) \dots \\
& l_{s'}(\mathbf{c}^{\downarrow h_{s'}-\{X\}}, \mathbf{x}) l_{s+1}(\mathbf{c}^{\downarrow h_{s+1}}) \dots l_s(\mathbf{c}^{\downarrow h_s}) \rho_1(\mathbf{c}^{\downarrow r_1-\{X\}}, \mathbf{x}) \dots \rho_{k'}(\mathbf{c}^{\downarrow r_{k'}-\{X\}}, \mathbf{x}) \rho_{k+1}(\mathbf{c}^{\downarrow r_{k+1}}) \dots \rho_k(\mathbf{c}^{\downarrow r_k})] \\
& \mid \mathbf{x} \in W_X \ni (\mathbf{c}, \mathbf{x}) \in \Omega_{\mathcal{X}} = \\
& = (\sum \{[v(\mathbf{c}^{\downarrow g-\{X\}}, \mathbf{x}) + v_{j+1}(\mathbf{c}^{\downarrow g_{j+1}}) + \dots + v_j(\mathbf{c}^{\downarrow g_j})][\rho(\mathbf{c}^{\downarrow r-\{X\}}, \mathbf{x})] \mid \mathbf{x} \in W_X \ni (\mathbf{c}, \mathbf{x}) \in \Omega_{\mathcal{X}}\}) \\
& l_{s+1}(\mathbf{c}^{\downarrow h_{s+1}}) \dots l_s(\mathbf{c}^{\downarrow h_s}) \rho_{k+1}(\mathbf{c}^{\downarrow r_{k+1}}) \dots \rho_k(\mathbf{c}^{\downarrow r_k}) = \\
& = (\sum \{[v(\mathbf{c}^{\downarrow g-\{X\}}, \mathbf{x}) + v_{j+1}(\mathbf{c}^{\downarrow g_{j+1}}) + \dots + v_j(\mathbf{c}^{\downarrow g_j})][\rho(\mathbf{c}^{\downarrow r-\{X\}}, \mathbf{x})] / \rho^{\downarrow r-\{X\}}(\mathbf{c}^{\downarrow r-\{X\}})\} \\
& \mid \mathbf{x} \in W_X \ni (\mathbf{c}, \mathbf{x}) \in \Omega_{\mathcal{X}}\}) l_{s+1}(\mathbf{c}^{\downarrow h_{s+1}}) \dots l_s(\mathbf{c}^{\downarrow h_s}) \rho_{k+1}(\mathbf{c}^{\downarrow r_{k+1}}) \dots \rho_k(\mathbf{c}^{\downarrow r_k}) \rho^{\downarrow r-\{X\}}(\mathbf{c}^{\downarrow r-\{X\}}) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\sum \{[v(\mathbf{c}^{\downarrow g-\{X\}}, \mathbf{x})(\rho/\rho^{\downarrow r-\{X\}})(\mathbf{c}^{\downarrow r-\{X\}}, \mathbf{x})] + [(v_{j+1}(\mathbf{c}^{\downarrow g_j+1}) + \dots + v_j(\mathbf{c}^{\downarrow g_j}))](\rho/\rho^{\downarrow r-\{X\}})(\mathbf{c}^{\downarrow r-\{X\}}) \mid \mathbf{x} \in W_X \ni (\mathbf{c}, \mathbf{x}) \in \Omega_\chi\}) l_{s+1}(\mathbf{c}^{\downarrow h_s+1}) \dots l_s(\mathbf{c}^{\downarrow h_s}) \rho_{k+1}(\mathbf{c}^{\downarrow r_k+1}) \dots \rho_k(\mathbf{c}^{\downarrow r_k}) \rho^{\downarrow r-\{X\}}(\mathbf{c}^{\downarrow r-\{X\}}) = \\
&= (\sum \{[v(\mathbf{c}^{\downarrow g-\{X\}}, \mathbf{x})(\rho/\rho^{\downarrow r-\{X\}})(\mathbf{c}^{\downarrow r-\{X\}}, \mathbf{x})] \mid \mathbf{x} \in W_X \ni (\mathbf{c}, \mathbf{x}) \in \Omega_\chi\}) + [(v_{j+1}(\mathbf{c}^{\downarrow g_j+1}) + \dots + v_j(\mathbf{c}^{\downarrow g_j}))](\sum \{(\rho/\rho^{\downarrow r-\{X\}})(\mathbf{c}^{\downarrow r-\{X\}}, \mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in W_X \ni (\mathbf{c}, \mathbf{x}) \in \Omega_\chi\}) l_{s+1}(\mathbf{c}^{\downarrow h_s+1}) \dots l_s(\mathbf{c}^{\downarrow h_s}) \rho_{k+1}(\mathbf{c}^{\downarrow r_k+1}) \dots \rho_k(\mathbf{c}^{\downarrow r_k}) \rho^{\downarrow r-\{X\}}(\mathbf{c}^{\downarrow r-\{X\}}) = \\
&= [(v \otimes (\rho/\rho^{\downarrow r-\{X\}}))^{\downarrow(g \cup r)-\{X\}}(\mathbf{c}^{\downarrow(g \cup r)-\{X\}}) + v_{j+1}(\mathbf{c}^{\downarrow g_j+1}) + \dots + v_j(\mathbf{c}^{\downarrow g_j})] l_{s+1}(\mathbf{c}^{\downarrow h_s+1}) \dots l_s(\mathbf{c}^{\downarrow h_s}) \rho_{k+1}(\mathbf{c}^{\downarrow r_k+1}) \dots \rho_k(\mathbf{c}^{\downarrow r_k}) \rho^{\downarrow r-\{X\}}(\mathbf{c}^{\downarrow r-\{X\}}) = \\
&= \otimes(\{(v \otimes (\rho/\rho^{\downarrow r-\{X\}}))^{\downarrow(g \cup r)-\{X\}}, v_{j+1}, \dots, v_j\} \cup \{l_{s+1}, \dots, l_s, \rho_{k+1}, \dots, \rho_k, \rho^{\downarrow r-\{X\}}\})(\mathbf{c}) = \\
&= \otimes Fus_X \{v_1, \dots, v_j, l_1, \dots, l_s, \rho_1, \dots, \rho_k\}(\mathbf{c})
\end{aligned}$$

olarak yazılır.

### Teoreminin İspatı

$(\otimes\{v_1, \dots, v_m\}) \otimes (\otimes\{l_1, \dots, l_p, \rho_1, \dots, \rho_n\})^{\downarrow\emptyset}$  en küçük değişkenin ardışık marjinalizasyonu ile elde edilmektedir. Bu teoremin bir ispatı, önerme 1'in sonucunun tekrarlı olarak uygulanması ile elde edilir. Her aşamada en küçük bir değişken silinir ve bu en küçük değişkene göre tüm değerlemeler kümesi eritilir. Eritme sonucunda elde edilen Değerleme Ağının iyi tanımlandığı kolayca görülebilir. Önerme 1 kullanılarak  $X_1$ 'e göre eritme işlemi yapıldıktan sonra sonuçta elde edilen Değerleme Ağındaki tüm değerlemelerin birleşimi  $(\otimes\{v_1, \dots, v_m\}) \otimes (\otimes\{l_1, \dots, l_p, \rho_1, \dots, \rho_n\})^{\downarrow(\mathbb{Z}-\{X_1\})}$  e eşit olur. Önerme 1 kullanılarak  $X_2$ 'ye göre eritme işlemi yapıldıktan sonra sonuçta elde edilen Değerleme Ağındaki tüm değerlemelerin birleşimi  $(\otimes\{v_1, \dots, v_m\}) \otimes (\otimes\{l_1, \dots, l_p, \rho_1, \dots, \rho_n\})^{\downarrow(\mathbb{Z}-\{X_1, X_2\})}$  ye eşit olur ve işlemler bu biçimde sürdürülür. Tüm değişkenler silindiğinde geriye tek bir değerleme kalır. Önerme 1 kullanılarak, bu değerlemenin  $(\otimes\{v_1, \dots, v_m\}) \otimes (\otimes\{l_1, \dots, l_p, \rho_1, \dots, \rho_n\})^{\downarrow\emptyset}$  olacağı belirlenir.

## KAYNAKÇA

### Kitaplar

ALBRIGHT, S.Christian, WINSTON, Wayne L. ve ZAPPE, Christopher. **Data Analysis&Decision Making**. Third Edition. USA:Thomson South-Western, 2006.

ALIPRANTIS, Charalambos D. ve CHAKRABARTI, Subir K. **Games and Decision Making**. USA:Oxford University Press, 2000.

CLEMEN, Robert T. **Making Hard Decision**. Second Edition. USA: Duxbury Press, 1996.

ESİN, Alptekin. **Yöneylem Araştırmasında Yararlanılan Karar Yöntemleri**. Dördüncü Basım. Ankara: Gazi Kitabevi Tic.Ltd.Şti., 2003.

FRENCH, Simon ve INSUA, David Rios. **Statistical Decision Theory**. London:Oxford University Pres Inc., 2000.

GORDON, Gilbert ve PRESSMAN, Israel. **Quantitative Decision-Making For Business**. Second Edition.USA.:Prentice Hall International Inc.,1983.

GÜRSAKAL, Nemci. **Bayesgil İstatistik**. Bursa:Uludağ Üniversitesi Basımevi, 1992.

MALCZEWSKI, Jacek. **GIS and Multicriteria Decision Analysis**. USA:John Wiley&Sons, Inc., 1999.

İPEK, Merih. **İstatistiğe Giriş II**. İstanbul:Beta Basım Yayım Dağıtım A.Ş., 2006.

JENSEN, Finn V. **Bayesian Networks and Decision Graphs**. USA: Springer, 2001.

MEREDITH, Jack, SHAFER, Scott ve TURBAN, Efraim. **Quantitative Business Modeling**. USA: South-Western Thomson Learning, 2002.

NEWMAN, Joseph W. **Management Applications of Decision Theory.**  
USA:Harper&Row Publishers, 1971.

ÖZTÜRK, Ahmet. **Yöneylem Araştırması**, Dokuzuncu Basım. Bursa:Ekin Kitabevi,  
2004.

RAIFFA, Howard. **Decision Anlysis Introductory Lectures on Choices Under  
Uncertainty.** Second Editon:USA, Addison-Wesley Publishing Company, Inc.,  
1970.

SEZEN, H.Kemal. **Yöneylem Araştırması.** Bursa: Ekin Kitabevi, 2004.

TÜTEK, Hülya ve GÜMÜŞOĞLU, Şevkinaz. **Sayısal Yöntemler Yönetmel Yaklaşım.**  
İkinci Basım. İstanbul:Beta Basım Yayım Dağıtım A.Ş., 1994.

W.TAYLOR, Bernard. **Introduction to Management Science.** Ninth Edition.  
USA:Prentice Hall, 2007.

### **Makaleler**

BIELZA, Concha ve SHENOY, Prakash P. “A Comparison of Graphical Techniques for  
Asymmetric Decision Problems”, **Management Science**, Vol.45, No.11,  
(November 1999).

COVALIU, Zvi ve OLIVER, Robert M. “Representation and Solution of Decision  
Problems Using Sequential Decision Diagrams”, **Management Science**, Vol.41,  
No.12, (December 1995).

DEMİRER, Rıza ve SHENOY, Prakash P. “Sequential Valuation Networks for  
Asymmetric Decision Problems”, **European Journal of Operational Research**,  
Vol.169, Issue 1, (February 2006).

- DIEHL, Michael ve HAIMES, Yacov Y. "Influence Diagrams With Multiple Objectives and Tradeoff Analysis", **IEEE Transaction on Systems, Man and Cybernetics-Part A:Systems and Humans**, Vol.34, No.3, (May 2004).
- HOWARD, Ronald A. ve MATHESON, James E. "Influence Diagrams", **Decision Analysis**, Vol.2, No.3, (September 2005).
- İMİR ŞIKLAR, Emel. "Reklam Deneylerinin Düzenlenmesinde İstatistiksel Bir Yaklaşım: Modern Karar Kuramı", **Anadolu Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi**, Cilt:6 Sayı:2, (Kasım 1988).
- OWENS, Douglas K., SHACHTER, Ross D. ve F.NEASE, Robert "Representation and Analysis of Medical Decision Problems with Influence Diagrams", **Medical Decision Making**, Vol.17 No.3, (July-September 1997).
- SHACHTER, Ross D. "Evaluating Influence Diagrams", **Operation Research**, Vol.34, No.6, (November-December,1986).
- SHENOY, Prakash P. "Valuation-Based Systems for Bayesian Decision Analysis", **Operations Research**, Vol.40, No.3, (May-June 1992).
- "A Comparison of Graphical Techniques for Decision Analysis", **European Journal of Operational Research**, Vol.78, Issue 1, (October 1994).
- "Valuation Network Representation and Solution of Asymmetric Decision Problems", **European Journal of Operational Research**, Vol.121, (March 2000).
- SMITH, James E., HOLTZMAN Samuel ve MATHESON, James E. "Structuring Conditional Relationships in Influence Diagrams", **Operations Research**, Vol.41, No.2, (March – April 1993).
- KIRKWOOD, Craig W. "An Algebraic Approach to Formulating and Solving Large Models for Sequential Decisions Under Uncertainty", **Management Science**, Vol.39, No.7, (July 1993).

VIRTANEN, Kai, RAIVIO, Tuomas ve HÄMÄLÄINEN, Raimo P. “Modeling Pilot’s Sequential Maneuvering Decisions by a Multistage Influence Diagram”, **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, Vol.27, No.4, (July – August 2004).

### **Internet Kaynakları**

Thomas D.NIELSEN ve Finn V. JENSEN, “Advances in Decision Graphs”,  
<http://www.cs.aau.dk/~tdn/papers/nielsen-jensen-04-book.pdf> (Erişim tarihi: 02.06.2006)

Rıza Demirer ve Prakash P.Shenoy, “Sequential Valuation Networks and Asymmetric Decision Problems”, 1999,  
<http://citeseer.comp.nus.edu.sg/cache/papers/cs/8686/ftp:zSzzSzftp.bschool.ukans.eduuzSzhomezSzrdemirerzSzresearchzSzsvn.pdf/sequential-valuation-asymmetric-decision.pdf>  
(Erişim tarihi: 08.08.2007)

[http://web.mit.edu/wsimmons/www/thesis/Simmons\\_PhD\\_Thesis.pdf](http://web.mit.edu/wsimmons/www/thesis/Simmons_PhD_Thesis.pdf) (Erişim tarihi: 15.11.2006)

Prakash P.Shenoy, “Binary Join Trees For Computing Marginals in The Shenoy-Shafer Architecture”, 1997,  
<https://kuscholarworks.ku.edu/dspace/bitstream/1808/172/1/IJAR97.pdf> (Erişim tarihi: 09.10.2008)

<http://www.few.vu.nl/stagebureau/werkstuk/werkstukken/werkstuk-braun.doc> (Erişim tarihi: 12.09.2008)

[http://fisher.osu.edu/~butler\\_267/DAPresent/SanAntonio/SA02-3.pdf](http://fisher.osu.edu/~butler_267/DAPresent/SanAntonio/SA02-3.pdf) (Erişim tarihi: 28.11.2007)