T. C. ANADOLU ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

SONSUZ GELİŞ KAYNAKLI VE TEK KANALLI BEKLEME HATTI SİSTEMLERİNDEKİ İKİ MODELİN İLİŞKİSİ

Doktora Tezi

Hüseyin ERDİN

Eskişehir - 1989

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

İnsanların toplum halinde yaşamalarının birçok nedenleri vardır. Bunların en önemlilerinden biri, insanların başkalarını beklemesini öğrenmeleridir. Eğer insan her istediğini beklemeden elde etme çabasını ilke edinmiş olursa, kendi gücünü ekonomik olmayan bir biçimde kullanacak ve daha sonra bu gücün yetmediğini görecektir. Bunu kavrayan insan başkalarından göreceği hizmetin, kendi yaşantısını sürdürebilmesi için vazgeçilmez bir fayda olduğunu ve gerektiğinde beklemesini öğrenmiştir. Bu durum pek arzulu olmasa da her insanın yaşantısının bir parçası olmuştur.

Birlikte yaşayan insanların oluşturdukları topluluklar karmaşık toplumlara dönüştükçe, bu toplumlarda insan ihtiyaçlarını karşılamak için örgütlenmiş bulunan işletmeler de büyümekte ve karmaşıklaşmaktadır. Ayrıca bu işletmelerin varlığını sürdürebilmesi görevini üstlenen yöneticilerin verecekleri kararlar belirsizlik durumu ile karşılaşmakta ve daha da zorlaşmaktadır.

İşletme yöneticilerinin belirsizlik durumu ile karşılaştığı karar verme konularından biri de hizmet sunan işletme ya da işletme birimlerinin optimal bir biçimde düzenlenmesidir. Bu işletmelerden hizmet isteminde bulunan müşteriler, hizmet sunulan birime geldiklerinde kendilerinden önce kimse yoksa hemen hizmet görmektedirler. Fakat kendilerinden önce başkaları varsa bir bekleme hattı oluşmakta ve önceden belirlenmiş işletme kurallarına göre kendilerine servis yapılmaktadır. Bazen bunun tam tersi olmakta ve hizmet isteminde bulunan müşteriler olmadığı için hizmet birimi boş beklemektedir.

Hemen görüleceği gibi hizmet isteminin belirsizliği birbirine karşıt iki durum ortaya çıkarmaktadır. Bunlar müşterilerin beklemesi ve hizmet biriminin boş beklemesidir. İşte bu birbirine karşıt iki bekleme biçimi arasında optimal bir bekleme zamanı bulmak bir işletmecilik sorunu olarak karşımıza çıkmaktadır.

Yukarıda belirtilen özelliklere sahip işletme ya da işletme birimlerine bekleme hattı sistemleri adı verilmektedir. Bekleme hattı sistemlerinde amaç, servis maliyetlerinin düşük olması istenirken servisin niteliğini yükseltmek ve müşterilerin bekleme zamanını da en düşük düzeyde tutmaktır. Böylece işletmenin yararları ile müşterilerin yararlarını fazla çatıştırmayan bir ekonomik dengeye ulaşma sorunu ile karşılaşılır. İşte bu ekonomik denge veya bir anlamda müşterilere en iyi ve etkin servisi sağlama ancak bekleme hattı modelleri ile gerçekleştirilebilir.

Sonsuz geliş kaynaklı ve tek kanallı bekleme hattı sistemleri için geliştirilen ve bir boyutlu bekleme hattı modeli olarak adlandırılan modelin yaygın uygulamaları vardır. Ancak son yıllarda yine sonsuz geliş kaynaklı ve tek kanallı bekleme hattı sistemleri için iki boyutlu bekleme hattı modeli olarak adlandırılan bir model geliştirilmiştir.

Bu iki model göz önünde bulundurularak araştırmanın amaçları şöyle sıralanabilir.

1.Son yıllarda sonsuz geliş kaynaklı ve tek kanallı bekleme hattı sistemleri için geliştirilen iki boyutlu bekleme hattı sistemini incelemek,

2.Sonsuz geliş kaynaklı ve tek kanallı bekleme hattı sistemleri için geliştirilen bir ve iki boyutlu bekleme hattı modelleri arasındaki ilişkiyi belirlemek,

3.Gerçek hayatta sonsuz geliş kaynaklı ve tek kanallı bir bekleme hattı sistemini kuramsal açıdan ele alıp inceleyerek, iki boyutlu bekleme hattı modelinin burada uygulamasını yapmak.

Bu amaçlar doğrultusunda ikinci bölüm bekleme hattı sistemlerinin kuramsal yönden kavramsal araştırılmasına ayrılmıştır. Bekleme hattı sistemleri olarak tanımlanan bütünler üzerindeki bilimsel çalışmaların tarihsel gelişimiyle başlatılan bu bölümde konu bir temele oturtulmak istenmiştir. Bekleme hattı sistemi başlığıyla incelenen ikinci kesimde bütünün parçalarına inilerek yapılan ayrık tanımlamalardan sonra bütünleşik gösterimlere gidilmiştir. Daha sonra bekleme hattı sistemlerinde karşılaşılan sorunlar ve çözümleri, bekleme hattı sistemlerinde geliştirilen modellerin kapsamı, bekleme hattı sistemini uygulama üstünlükleri, bekleme hattı sistemlerinde geçiş devresi ve kararlı durum konuları açıklanmıştır.

Üçüncü bölümde sonsuz geliş kaynaklı ve tek kanallı bekleme hattı modelleri incelenmiştir. Son yıllarda geliştirilen iki boyutlu bekleme hattı modelinin, klasik model olarak adlandırılabilecek bir boyutlu bekleme hattı modeli ile olan ilişkisi de bu bölümde gösterilmiştir.

Dördüncü bölümde ise T.C. Anadolu Üniversitesi Eğitim ve Uygulama Hastanesi Kadın Hastalıkları ve Doğum Anabilim Dalı servisini sonsuz geliş kaynaklı ve tek kanallı bekleme hattı sistemi olarak ele alıp, burada iki boyutlu bekleme hattı modelinin uygulaması yapılmıştır.

Araştırma, çalışmanın bütünü için söylenebilecek son sözleri ve önerileri kapsayan sonuç bölümüyle tamamlanmıştır.

2. BEKLEME HATTI KURAMI

Ekonomik kaynakların kıtlığı ve nüfus artışının doğal bir sonucu olarak günlük yaşantımızda servis sistemlerinin yetersizliği ve bekleme sorunu ile sık sık karşılaşılmaktadır. Meydana gelen bu yığılma olayı "Bekleme Hattı" veya "Kuyruk" olarak adlandırılırken, doğan problemlere "Bekleme Hattı Problemi" veya "Kuyruk Problemi" adı verilmiştir[1]. Bu yönde sistemlerin analizi ve dizaynı için gerçekleştirilen analitik yaklaşımların tümünü içeren çalışmalar ise "Bekleme Hattı Kuramı" veya "Kuyruk Kuramı"nın oluşmasını sağlamıştır. Başka bir deyişle kuyruğun söz konusu olduğu sistemler üzerindeki bilimsel çalışmalar bekleme hattı kuramı olarak başlamış ve gelişmiştir. Bekleme hattı sisteminin tanımını anlamlı kılmak için, ilgili sistemler üzerindeki bilimsel çalışmaların geçmişine inmek gerekir.

2.1 Bekleme Hattı Kuramının Tarihsel Gelişimi

Günümüzde Yöneylem Araştırması ve Sistem Analizi disiplinlerinin en önemli yöntemlerinden biri olan bekleme hattı kuramının ortaya çıkış tarihi, her iki disiplinden çok daha öncelere gider[2]. Bekleme hattı kuramı ile ilgili ilk önemli çalışmanın Danimarka'lı elektrik mühendisi A. K. Erlang'a ait olduğu bir çok kaynakta belirtilmesine rağmen, bu alanda yayınlanan ilk eser, Johannsen'in 1907'de yazdığı "Waiting Times and Number of Calls" başlığını taşıyan makalesidir[3]. A. K. Erlang ise 1909'da, telefon akışları üzerine uğraşılarını ve bulgularını "Application of the Theory of Probability to Telephone Trunking Problems" başlığıyla bir kitapta yayınlayarak kuramsal çalışmaları hızlandırmış ve etkilemiştir[4].

---

[1] İmdat Kara, Servis Sistemleri ve Gelişler Zamana Bağlı Olduğunda Kapasite Sorununa Matematiksel Yaklaşım (Eskişehir:Eskişehir İ.T.İ. Akademisi Yayını,1976),s.7.

[2] Halil Sarıaslan, Sıra Bekleme Sistemlerinde Simülasyon Tekniği (Ankara:Ankara Üni. Siyasal Bilgiler Fak. Yayını,1986),s.6.

[3] Walter c. Griffin, Queueing:Basic Theory and Applications (Ohio:Grid Inc.,1978),s.3.

[4] Thomas L. Saaty, Mathematical Methods of Operations Research (New York:Mc Graw Hill Book Company,1959),s.332.

1950 lere kadar yapılan daha sonraki çalışmalar telefon akışlarının ötesine geçememiş ve sistem elemanlarının değişik durumları üzerinde yoğunlaşmıştır[5]. Bu çalışmaların belli başlıları 1927'de Molina, 1928'de Fry'ın Erlangın çalışmalarını geliştirmesi, 1930'da ve 1934'de Polaczek'in, 1931'de Kolmogorov, 1932'de Crommelin'in yaptığı çalışmalardır.

1950 lerle birlikte kuramsal çalışmalar iş yerlerinde, stoklamada, hastanelerde ve benzeri yerlerde her türlü fiziksel akışların oluşturduğu yığılma olaylarına hızla uygulanmaya başlanmıştır[6]. Bekleme hattı kuramı üzerinde öncelikle matematikçiler, fizikçiler, trafik mühendisleri ve ekonomistler çalışmışlardır.

Bugün bekleme hattı kuramıyla ilgili birçok kaynak vardır. "Bekleme Hattı Kuramı" başlığını taşıyan kitapların yanısıra, Yöneylem Araştırması, Sistem Analizi ve Olasılık Kuramı üzerine yazılmış kitaplarda da konu öz olarak incelenmektedir.

2.2 Bekleme Hattı Sistemi

Bir sisteme Yöneylem Araştırması yaklaşımı yapıldığında, bu sistemin tanımından sonra bütünleşik yaklaşım yapabilmek için, tanımlanan sistemin yapısı incelenir. Bu nedenle bu kesimde kuramsal olarak bekleme hattı sistemlerinin yapısı incelenmiştir. Sistemin yapısı ele alındığında geliş süreci, bekleme hattı, servis süreci ve servis olgusu gibi dört elemanın varlığından söz edilebilir.

2.2.1 Bekleme Hattı Sisteminin Elemanları

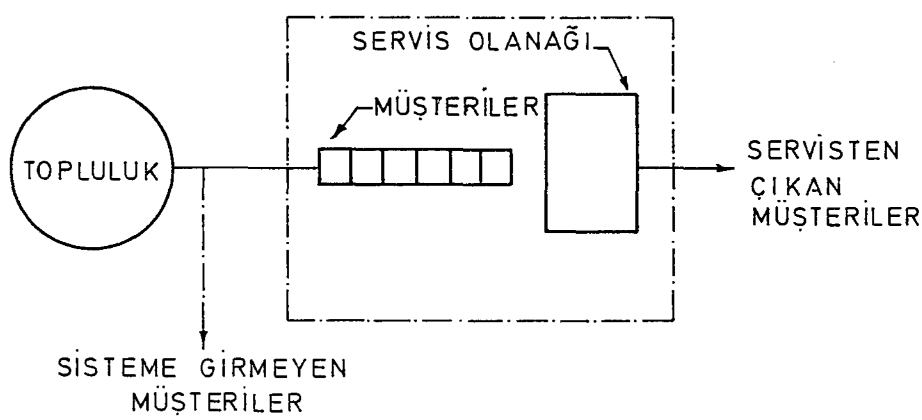
Herhangi bir bekleme hattı sistemi bir veya daha çok sayıda servis olanağına sahip bulunan bir servis sistemi etrafında oluşur. Servise gereksinme gösteren müşteriler çoğu kere topluluk adı verilen bir kaynaktan

[5]Kara,1976,s.8.

[6]L. Kosten, Stochastic Theory of Service Systems (Oxford:Pergamon Press,1973),s.x.

değişik zamanlarda servis sistemine gelirler ve bekleme hattı koşullarına göre sisteme girebilirler veya giremezler. Sisteme gelen bir müşteri, servise girmeden önce sıfır uzunlukta da olabilen bir bekleme hattı ile birleşir ve daha sonra da servis görür. Servis gören müşteri sonuç olarak sistemi terkeder.

Bu açıklamalara göre, en genel anlamda bir bekleme hattı sistemi Şekil:1 de görüldüğü gibidir.



Şekil:1. Bekleme Hattı Sistemi

2.2.1.1 Geliş Süreci

Geliş süreci bekleme hattı sistemine müşterilerin gelişlerini ifade eder. İş veya hizmet isteğiyle sisteme gelen her birime müşteri, müşterilerin oluşturduğu topluluğa müşteriler kaynağı veya topluluk denir[7].

Müşterilerin sisteme gelişleri aşağıdaki biçimlerde ortaya çıkar[8].

---

[7] Russell L. Ackoff ve Maurice Wsasieni, Fundamentals of Operations Research (New York: John Wiley and Sons, Inc.,1968),s.155.

[8] Mustafa Köksal, "Kuyruk Teorisi (=Bekleme Hattı Teorisi)", İstanbul Üni. İşletme Fak. Dergisi,C.9,S.1(Nisan 1980),s.159., Osman Halaç, Kantitatif Karar Verme Teknikleri (istanbul: Arpaz Matbaacılık,1978),s.300., Susan L. Albin,"Analyzing M/M/1 Queues With Perturbations in the Arrival Process", J. Opl. Res. Soc.,C.35,N.4 (1984),s.303.

-Müşteri kaynağı bir veya birden fazla olabilir.

-Müşteri kaynağı sonlu veya sonsuz olabilir.

-Bekleme hattı sistemine tek tek veya toplu gelişler olabilir.

-Gelişler bekleme hattı sistemi tarafından tamamen veya kısmen kontrol edilebilecekleri gibi, hiç kontrol edilmeyebilirler.

-Müşterilerin sisteme gelişleri deterministik (belirlilik altında) veya rassal özellіktedir.

-Bir rassal geliş süreci amprical (gözlemsel) olarak veya kuramsal dağılım fonksiyonu ile tanımlanabilir.

-Geliş süreci bağımlı veya bağımsız özellikte olabilir. Sistemin durumu veya önceki gelişlerin sırası, sonradan gelenleri etkilemiyor ise bağımsız, aksi halde bağımlı değişkenler söz konusudur.

-Geliş süreci sabit nitelikte olabilir veya olmayabilir. Eğer süreç sabitse, parametreler yani ortalama geliş debisi standart sapma ve dağılım.fonksiyonunun tipi zaman içinde sabit demektir. Matematiksel.bir yaklaşımın yapılabilmesi için çoğu kez geliş süreci sabit olarak kabul edilir.

Müşterilerin sisteme gelişleri yukarıda da belirtildiği gibi genellikle rassal gelişlerle tekli veya toplu biçimdedir. Gelişlerin türü açıklığa kavuşturulduktan sonra gelişlerin ve gelişlerarasının dağılım fonksiyonları belirlenir[9]. Bu konuda rassal gelişlerin çoğunun Poisson dağılım fonksiyonuna uyduğu, bunun bir gerektirmesi olarak da gelişlerarası dağılım fonksiyonunun üstel dağılım fonksiyonu olduğu söylenebilir.

[9]Thomas L. Saaty, Elements of Queueing Theory (New York: Mc Graw Hill Book Company,1961),s.37., Ender Şenkal, "Bekleme Hattı Problemlerinin Temel Yapısı ve Tek Kanallı Servis Sisteminin Analizi", İstanbul Üni. İşletme Fak. Dergisi,C.1,S.1 (Nisan 1972),s.155.

2.2.1.2 Bekleme Hattı

Müşteriler servis için bekleme hattı sistemine geldiklerinde sistemin durumuna göre işlem görürler. Eğer müşterilerin beklemesi söz konusu ise bir bekleme hattı oluşur. Sadece servis için beklemekte olan müşterileri kapsayan bekleme hatları servisteki müşterileri içine almaz.

Bekleme hatları izin verilebilir maksimum uzunlukları ile nitelik kazanırlar ve sonlu veya sonsuz uzunlukta olabilirler. Bazı durumlarda belirli uzunluktaki bir bekleme hattının oluşmasına izin verilir[10]. Başka bir deyişle bekleme hattı belli bir uzunluğu aşamaz ve sonludur. Bazen de bekleme hattı uzunluğu üzerinde hiçbir sınırlama yapılmaz. Uzunluk üzerinde hiçbir limitin bulunmaması halinde izin verilebilir bekleme hattı uzunluğunun sonsuz olduğu söylenir.

Sistemin ve isteklerin özelliğine göre servis için gelen müşteriler;

-Tek bir bekleme hattı,

-Özel istemler için özel bekleme hattı,

-Öncelikli servisler için ayrılmış bekleme hattı,

-Aynı istemler için birden fazla bekleme hattı,

ve benzeri biçimlerde beklerler.

Gelen müşterilerin gerek bir bekleme hattını seçme veya seçmeme, gerekse bekleyişte gösterdikleri davranışlara bekleme hattı disiplini denir[11]. Bu konuda aşağıdaki noktalara dikkat edilmelidir.

-Sistemin kapasitesi dolu ise gelen müşteri kabul edilmez.

---

[10] A. Ghosal, "Some Aspects of Queueing and Storage Systems" Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Systems, 28 (Springer Verlag,1970),s.66.

[11] Köksal,s.160., Sedat Akalın, Yöneylem Araştırması (Bornova: Ege Üni. İşletme Fak. Yayını,1979)s.26.

-Gelen bir müşteri bekleme hattında beklemenin uzun zaman alacağını kestirirse, bekleme hattına girmeden sistemi terkedebilir.

-Bazı müşteriler bekleme hattında bir süre bekledikten sonra sistemden ayrılırlar.

Müşterilerin bekleme hattı sistemine gelişleri, gelişlerin dağılımı ve gelişler arasındaki farklılaşma, müşteri topluluğu ile müşterilerin özellikleri ve istemlerine sunulan servis gibi istemin ve doğanın koşullarına bağlıdır[12].

Müşterilerin bekleme hattına gelişleri aşağıdaki tiplerden biri olarak karşımıza çıkar.

-Düzgün gelişler.

-Tamamen rassal gelişler.

-Genel bağımsız gelişler.

-Zamana göre sıçramalı düzgün gelişler.

-Toplu gelişler.

-Karmaşık gelişler.

-Kesik zamanlı gelişler.

-Zamana bağlı gelişler.

-Sistemin diğer yönlerine bağlı gelişler.

-Sürekli akış halinde gelişler.

[12]Kara,1976,s.12., Guy Latouche, "On the Trade-off Between Queue Congestion and Server's Reward in an M/M/1 Queue", Euro. Jour. of Operational Research, 4 (1980),s.203.

Müşterilerin bekleme hattı sistemine gelişleri yukarıda sıralanan türlerden biri olabilir. Fakat genellikle rassal gelişlerle karşılaşılır.

Türsel olarak gelişler belirlendikten sonra, gelişlerin ve gelişler-arasının olasılık dağılım fonksiyonları belirlenir.

2.2.1.3 Servis Süreci

Gelişler ve servise alım başlayınca müşteriye servisin sunuşu yapılır. Servis sunuşunun yapısal yanı olan servis süreci üç eleman ile belirlidir. Bunlar;

-Servis Olanakları.

-Servis Kapasitesi.

-Servis süresi.

olarak sıralanabilir. Bu üç eleman biraz sonra ayrıntıları ile ele alınıp incelenecektir.

Servis olanaklarının servis için müşteri seçiminde ortaya koyduğu ve uyguladığı politikalara servis disiplini denir[13]. Servis disiplininin seçimi maliyetleri etkileyen bir karar sürecidir. Altı tip servis disiplininden söz edilebilir.

-İlk gelen ilk çıkar (FIFO) : En çok bilinen kuraldır. Müşterilerin servis sistemine girişlerinde, ilk önce gelen müşteri birinci olarak, ikinci gelen müşteri ikinci olarak servise alınır ve servise alım bu biçimde

---

[13]Hamdy A. Taha, Operations Research an Introduction (Second Edition. New York: Macmillan Publishing Co., Inc.,1976),s.453., William W. Hines ve Douglas C. Montgomery, Probability and Statistics in Engineering and Management Science (Second Edition. New York: John Wiley and Sons,1972),s.555.

devam eder.

-Son gelen ilk çıkar (LIFO) : Bu kuralda sisteme en son gelen ilk önce servise girer.ve servise alım bu biçimde devem eder.

-Rassal seçim (SIRO) : Servise alınacak müşteriler bekleme hattından rassal olarak seçilirler. Bu duruma rassal servis disiplini adı verilir. Müşterilerin iyi düzenlenmemiş bir bekleme hattında beklediği birçok durumlarda bu disiplin ile karşılaşılır.

-Öncelikli seçim : Bu durumda sisteme katılan bazı müşteriler bekletilmeden servise alınır. Serbest hale gelen servis olanağı en yüksek öncelikli müşteri ile servise başlar. Bekleme hattında aynı öncelikli birden fazla müşteri bulunuyorsa, bunlar ilk gelen ilk çıkar veya rassal seçim kurallarına göre servise alınır.

-Tanımlanan bir özellik sırasına göre alım.

-Önem sırasına göre alım.

Şimdi servis sürecini belirleyen elemanlar şu şekilde incelenebilir.

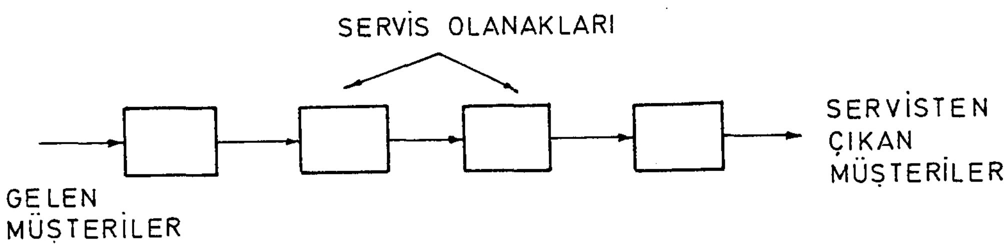
2.2.1.3.1 Servis Olanakları

Servis olanakları bekleme hattındaki müşterilerin gereksinme duyduğu etkinlikleri ortaya koymaktadır. Bu sistemlerde servis yapıldıkça bekleme hattındaki eleman sayısında bir azalma meydana gelir. Servis hiçbir yardımcı alet kullanmayan kimseler tarafından yapılabileceği gibi alet ve araç kullanan kimseler tarafından veya insan emeği olmadan sadece makinalar tarafından yapılabilmektedir.

Servis olanakları servis olanaklarının düzenlenmesi ile belirlidir.

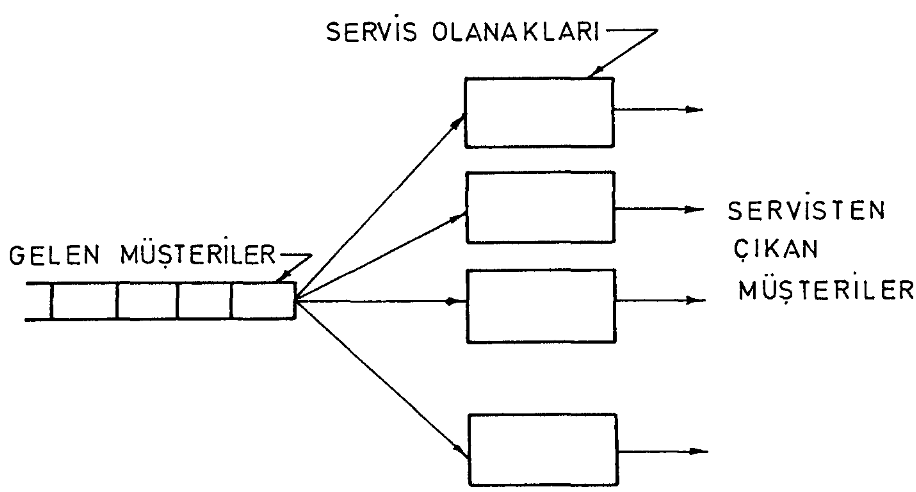
Servis olanaklarına çoğu kez servis kanalı veya sadece kanal adı verilir. Bunlar seri, paralel ve seri-paralel olarak düzenlenir.

Seri bir düzenleme Şekil:2 de olduğu gibi servis olanaklarının arka arkaya sıralanması ile oluşturulur. Böyle bir sistemde servisin tamamlanması için müşterilerin seri olarak sıralanmış bulunan olanakların herbirinden sıra ile geçmesi gerekmektedir. Bununla beraber herbir servis olanağı birbirinden bağımsız disiplinlere göre çalışabilir.



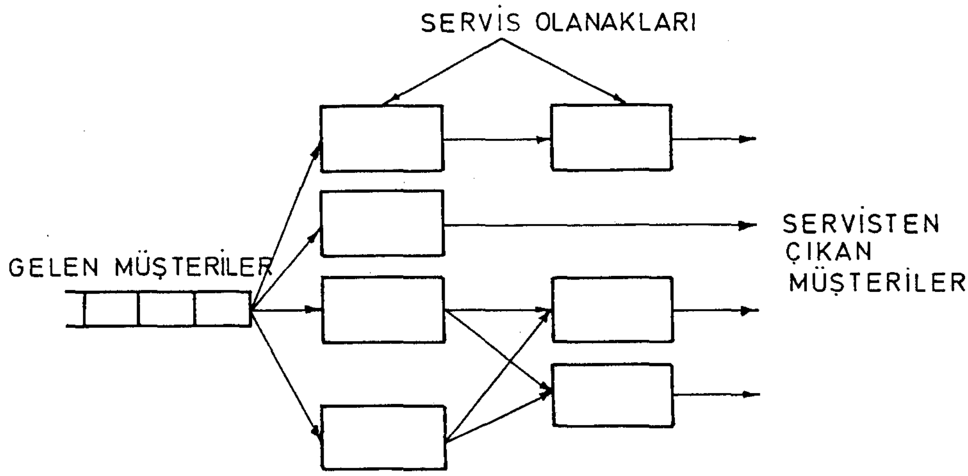
Şekil:2. Seri Düzenlenmiş Servis Olanakları

Paralel düzenlenmiş servis grubuna gelen bir müşteriye bu olanaklardan herhangi biri tarafından servis yapılabilir. Bu durum Şekil:3 de gösterilmiştir.



Şekil:3. Paralel Düzenlenmiş Servis Olanakları.

Seri-paralel düzenlenmiş bir servis olanakları grubu ise Şekil:4 de gösterilmiştir.



Şekil:4. Seri-Paralel Düzenlenmiş Servis Olanakları

2.2.1.3.2 Servis Kapasitesi

Servis sürecinin ikinci elemanı olan servis kapasitesi, tanımlanan bir zaman biriminde servise alınıp istemi karşılanabilen en fazla müşteri sayısı olarek tanımlanır[14].

Tasarımı yapılan servis sistemleri, sistemin amacı ve isteğin niteliğine göre ya sabit kapasiteli ya da değişken kapasiteli sistemler olarak ele alınır[15].

Sabit kapasiteli sistemler için kapasite, tasarım anında bir karar değişkenidir. Değişken kapasiteli sistemler ise genellikle birim zamanda servis yapılabilen müşteri sayısı, iki sınır değer arasında değer alan sistemlerdir.

[14] D. R. Cox ve Walter L. Smith, Queues (London: Chapman and Hall,1971),s.23., J. G. Shanthikumar ve D. D. Yao, "Optimal Server Allocation in a System of Multi-Server Stations", Management Science, C.33,N.9 (Eylül 1982),s.1173.

[15] Kara,1976,s.16.

2.2.1.3.3 Servis Süresi

Herhangi bir müşteriye servis başlangıcı ile bitimi arasında ayrılan zaman, servis süresi olarak tanımlanır. Tanımlanan bir zaman biriminde servisi tamamlanan müşteri sayısına ise servis debisi denir[16]. Servis debisi doğrudan doğruya servis süresine bağlı olduğundan, servis süresinin belirlenmesiyle bulunur.

Servis sisteminin özelliği ve istemin niteliğine göre servis süresi için aşağıdaki tipler sıralanabilir[17].

-Düzgün servis süresi.

-Üstel servis süresi.

-Gama tipi ve özel Erlangian servis süresi.

-Genel Erlangian servis süresi.

-Binom servis süresi.

-Normal servis süresi.

-Kararlı olmayan servis süresi.

-Sistemin diğer durumlarına bağlı servis süresi.

-Müşteri farklılığına bağlı servis süresi.

Servis süreleri rassal olduğunda, servis sürelerinin dağılım fonksiyonu söz konusu olur. Bu durumda genellikle gelişlerarasında olduğu gibi, servis süreleri dağılımı için üstel dağılım fonksiyonuyla karşılaşılmaktadır.

---

[16]Kara,1976,s.16.

[17]Cox ve diğeri,s.19.

2.2.1.4 Servis Olgusu

Hizmet istemiyle sisteme gelen her müşteri, servisin tamamlanmasıyla sistemin bir olgusu olur.

Sistemin bir olgusu için aşağıdaki durumlardan biri veya birkaçı söz konusudur[18].

-Sistemi bir daha dönmemek üzere terkeder.

-Sistemin içinde sürekli dönüş halindedir.

-Sistemi terk eder ama gelecekte yine dönmesi beklenir.

-Olgu yeni bir şekle girer ve diğer sistemlere kayar veya başka sistemlerin olgularıyla bütünleşir.

Servisin bitmesiyle birlikte müşteriler sistemden ayrılırlar. Bu nedenle bir zaman biriminde servisi tamamlanan müşteri sayısı, servis debisine eşdegerdir. Bunun için servis debisine bazen ayrılış debisi de denir.

2.2.2 Bekleme Hattı Sistemlerinin Yapısal Gösterimi

Servis sistemlerinin iki temel elemanı olan gelişler ve servis süreleri genellikle ortalama bir değer etrafında dalgalanır. Bu nedenle, bu iki rassal değişkenin değişik durumlarına göre sistemin yapısı hakkında bilgi veren bazı notasyonlar geliştirilmiştir.

D. G. Kendall gelişler ile servis sürelerinin dağılımlarından başka, sistemde mevcut paralel servis kanalı sayısını da göz önüne alarak genel

[18]Kara,1976,s.17.

bir gösterim yapmıştır[19]. Daha sonraları A. M. Lee bu notasyona dördüncü ve beşinci olarak servis disiplinini ve sistemde bulunabilecek maksimum müşteri sayısını eklemiştir[20]. H. A. Taha ise Kendall-Lee notasyonunu müşteri kaynağını tanımlayan altıncı bir karakteristikle genişletmiştir. Böylece genişletilen notasyon;

(a/b/c) : (d/e/f)

biçimini almıştır. Bu notasyonda;

a:Geliş veya gelişlerarası dağılımını,

b:Ayrılış veya servis süresi dağılımını,

c:Sistemde mevcut paralel servis kanalı sayısını,

d:Servis disiplinini,

e:Sistemde bulunabilecek maksimum müşteri sayısını,

f:Müşteri kaynağını,

göstermektedir.

a ve b simgeleri yerine;

M:Poisson geliş ve ayrılış dağılımları veya bunun gerektirmesi olarak üstel gelişlerarası ve servis süresi dağılımı.

D:Düzgün gelişlerarası veya servis süresi dağılımı.

E_k:Erlang ve Gama gelişlerarası veya servis süresi dağılımı.

---

[19]D. G. Kendall, "Some Problems in the Theory of Queues", J. Roy. Statist. Soc., C.13,N.2 (1951),s.151.

[20]Köksal,s.165., Robert B. Cooper, Introduction to Queueing Theory (New York: The Macmillan Company,1972),s.203.

GI:Genel bağımsız gelişlerarası dağılımı.

G:Genel servis süresi dağılımı.

kullanılabilir.

Örnek verilirse (M/M/3):(LIFO/N/∞) notasyonu, Poisson geliş (üstel gelişlerarası), Poisson ayrılış (üstel servis süresi) dağılımları olan, üç servis kanallı, son gelen ilk çıkar servis disiplinli, sistemde en çok N müşterinin bülunabileceği ve müşteri kaynağının sonsuz olduğu bir bekleme hattı sistemine aittir.

2.3 Bekleme Hattı Sistemlerinde Karşılaşılan Sorunlar ve Çözümleri

Bekleme hattı sistemleri tanım gereği insan-makina sistemleridir. Bu tür sistemlerde insan elemanı, makina elemanı veya insan-makina bileşim elemanından ortaya çıkan birçok sorunla karşılaşılır. Bu tür sorunlara genel olarak yaklaşımı D. G. Kendall'da görüyoruz[21]. Kendall sorunlara sistemin bileşenleri cinsinden yaklaşmıştır.

Konuya ilişkin çalışmalar bir hayli çok olmasına rağmen zaman içinde kuramsal çalışmaların sağladığı ilerlemelere uygun olarak, bekleme hattı sistemlerinde karşılaşılan sorunlar;

-Davranışsal,

-İstatistiksel,

-İşlemsel,

olarak sınıflandırılabilir[22].

[21]Kara,1976,s.29.

[22]U. Narayan Bhat, "Sixty Years of Queueing Theory", Management Science, C.15,N.6 (Şubat 1969),s.281.

Bekleme hattı sistemlerinde, sistem elemanlarının ve elemanların değişik durumlarının zaman içindeki davranışlarından oluşan sorunlara davranışsal sorunlar denir[23]. Sistemin zaman içindeki davranışına ilişkin sorunların çözümü için ise geçmiş eylem devrelerine ilişkin gözlemsel ve kayıtlanmış verilerin incelenmesi gerekir. Bu şekilde bekleme hattı sistemlerinin geçmiş eylem devrelerine ve bu andaki işleyişine yönelik verilerin analizine ilişkin sorunlara istatistiksel sorunlar denir. Gerçek hayatta karşılaşılan bekleme hattı sistemlerinin yapısal ve yönetsel planda, sistemin yöneylem sürecinde yatan tüm sorunları ise işlemsel sorunları oluşturur.

Bekleme hattı sistemlerinde karşılaşılan bu sorunlar için çözüm yöntemleri kullanılmadan önce sorunun ayrıntılı olarak tanımlanması, daha sonra da aşağıdaki sıranın izlenmesi gerekir.

-Değişkenler doğru olarak tanımlanır.

-İstatistiksel ölçümlerle ilgili dağılımlar araştırılarak onların gerçek şekilleri belirlenir.

-Dağılımlardan kullanılacak ölçütler elde edilir ve bu ölçütlerle olayın etkinliği araştırılır.

Böylece sorunların çözümünde amaç ve izlenecek yol belirlendikten sonra sorunun çözümü için çözüm yöntemleri kullanılır. Bu yöntemler sezgisel yaklaşım ve matematiksel yaklaşım olarak sınıflanabilir.

Bekleme hattı sistemlerinde deneme-yanılma veya sezgiyle, önceki bilgilerin ışığı altında bazı düzenlemeler yapılarak sorun çözümlenmiş olabilir. Sorunun bu biçimde giderilmesi yöntemine sezgisel yaklaşım denir. Matematiksel yaklaşım için ise iki yöntem geçerlidir[24]. Bunlar analitik yöntem ve benzetim yöntemidir. Gelişler ve servis sürelerinin dağılımları belirlendikten sonra, servise alım kuralı ve yönetimin amaçları

---

[23]Kara,1976,s.30.

[24]Sarıaslan,s.36., Kara,1976,s.36.

belirlendikten sonra, servise alım kuralı ve yönetimin amaçları doğrultusunda soruna fonksiyonel olarak çözüm arayıp karar değişkenlerini bulma yoluna analitik yöntem denir. Gelişler ve servis süreleri hakkındaki istatistiklerden Monte-Karlo yöntemiyle gerçek veya varsayılmış dağılımlarla kağıt üzerinde adeta bir tür oyun biçiminde karar değişkenleri bulma şekline benzetim yöntemi denir.

2.4 Bekleme Hattı Sistemlerinde Geliştirilen Modellerin Kapsamı

Yöneticiler bekleme hattı sistemlerinde karşılaşılan sorunların en iyi biçimde çözümlenmesi için, sorunun bütünleşik ele alındığı modelleri isterler. Sorunların çözümüne analitik olarak yaklaşıldığında ise matematiksel modellere başvurulur.

Bekleme hattı sistemi için geliştirilecek modellerin bazı varsayımlar taşıyacağı doğaldır. Bu varsayımlar çözüm yöntemine bağlı değildir[25]. Modelin varsayımları bekleme hattı sisteminin dört temel elemanı üzerinde ve bekleme hattı sisteminin çevresiyle olan etkileşimleri için yapılır.

En genel anlamda modelin temel karar değişkenleri servis süreci ve servise alım kuralı üzerinedir. Servis olanaklarının sayısı, olanakların düzenlenmesi, ortalama servis debisi, servis kapasitesi ve değişik servise alım kuralları karar değişkenleridir. Ayrıca ortalama bekleme süresi, servis debisi hızlandırıldığında azalacağından modelde bir karar değişkeni olarak görülebilir. Karar değişkenleri kurulmuş bir sistemin en iyi işlerliği yönünde sistemin özelliği ve sorunun kapsamına bağlıdır.

Modelin parametreleri rassal değişkenlerle sistemiçi ve sistemlerarası etkileşimlere göre belirlenir.

Modelin kısıtları sistemin amacına ve durumun koşullarına bağlı olarak belirlenir. Sözgelimi servis olanaklarının kullanımı, kapasite kullanı-

[25]Kara,1976,s.38.

mı, bekleme hattı uzunluğu ve ortalama bekleme süresi gibi kavramları göz önünde bulunduran yönetim, bazı kısıtlar koyabilir.

2.5 Bekleme Hattı Modelini Uygulama Üstünlükleri

Bekleme hattı modelini uygulayarak elde edilecek önemli sonuçların ne olduğunu bilmeden, yöneticiler sözü edilen modeli işletmelerinde uygulamazlar. Bu nedenle bir bekleme hattı modelinin işletmelere seğlayacağı bazı üstünlükler olmalıdır. Bu modelin sonuçlarına bakarak müşterilerin bekleme hattında bekleme ve servis süreleri azaltılabilir. Böylece müşteriler daha iyi servis hizmetine kavuşurlar.

Müşteriler yönünden model bu yararları sağlarken işletmeye ek maliyetler getirir[26]. Şöyle ki işletme müşterilerine daha iyi hizmet sunabilmek için, bilgi işlem merkezi gibi servis süresini hızlandıracak ek tesisleri kurabilir ve uzman personel çalıştırabilir. Uzman personelin ücret düzeyi yüksek olabileceği gibi ek tesislerin de bir maliyeti olacağından işletmenin toplam maliyeti eskisine göre artacaktır. Buna karşılık işletmenin pazar payı veya müşteri sayısının artması da doğaldır. Böylelikle bekleme hattı modeli daha iyi servisi sağlayacak maliyet ile servisteki gelişmelerin ekonomik dengesini belirleyecektir.

Bekleme hattı modeli en genel anlamda yöneticiye aşağıdaki önemli.sonuçları da verir[27].

-Geliş debisi.

-Servis debisi.

-Trafik yoğunluğu.

-Bekleme hattı sisteminde n müşteri bulunma olasılığı.

---

[26]Ahmet Öztürk, Yöneylem Araştırması (Bursa: Uludağ Üni. Basımevi,I984),s.269.

[27]Kara,I976,s.28.

-Bekleme hattında ortalama müşteri sayısı.

-Bekleme hattı sisteminde ortalama müşteri sayısı.

-Bekleme hattında ortalama bekleme süresi.

-Bekleme hattı sisteminde ortalama bekleme süresi.

-Bekleme hattı sisteminde bekleme süresi dağılımı.

-İşleyiş devresinin ortalama uzunluğu.

-Bekleme hattı sisteminde herhangi bir t anına kadar i geliş, j ayrılış olması olasılığı.

Bekleme hattı sisteminden herhangi bir t anına kadar j ayrılış olması olasılığı.

-Birim zamanda servisi tamamlanan müşteri sayısı.

-Bozulabilen mallar, sabırsız müşteriler ve benzerleri için işleyen bekleme hattı sistemlerinde müşterilerin verilen bir zamandan fazla sistemde kalmama olasılığı.

-Herhangi bir anda 0<n<C olmak üzere n kanalın işler bulunma olasılığı.

-Servisi tamamlanan bir müşterinin sisteme geri dönme olasılığı.

-Müşterilerin farklı istem veya özellikle sisteme gelmeleri durumunda, istem veya müşteri özelliklerine göre yukarıda belirtilen işlem karakteristikleri.

-Sistemin içeriğindeki rassal değişkenlerin ortalama değerlerinin yanında varyansları ve olasılık dağılım fonksiyonları.

Yönetim için amaçlanan bu sonuçlar bütün bekleme hattı sistemleri için tamamen gerekli olmayabilir. Bunlar bekleme hattı sisteminin yapısına, müşterilere ve doğanın koşullarına göre şekillenirler.

2.6 Bekleme Hattı Sistemlerinde Geçiş Devresi ve Kararlı Durum

Bekleme hattı kuramının analizi, bir sistemin davranışının zaman aşımı içerisinde araştırılmasını kapsar[28]. İşleyen bir sistemin karakteristikleri zamana bağlı ise sistem, geçici durumdadır veya geçiş devresindedir denir. Bu durum çoğunlukla sistemin işlemeye başladığı ilk anlarda söz konusudur. Bununla birlikte genellikle sistemin uzun dönemdeki davranışları ile ilgilenildiğinden, bekleme hattı sistemlerinin analizinde dikkatin çoğu kararlı durum sonuçları üzerinde yoğunlaştırılmıştır. Eğer sistemin davranışı zamandan bağımsız ise kararlı durum koşulu var demektir.

Kararlı duruma ulaşabilmek için gerek koşul, sistemin işlemeye başladığı andan itibaren geçen zamanın yeterince büyük olmasıdır. Bu durum zamanın matematiksel olarak sonsuza yaklaşması demektir. Bununla birlikte bu koşul yeter değildir. Zira sistemin parametreleri sistemin kararlı duruma gelmesine engel olabilir. Bunun sonucu olarak kararlı durum için sistemin parametreleri de kontrol edilmelidir[29]. Örnek olarak bazı durumlarda sisteme gelişler servis hızından büyük olabilir. Böyle durumlarda ne kadar zaman geçerse geçsin, sistem kararlı duruma ulaşamayacak ve bekleme hattı uzunluğu kuramsal olarak sonsuza kadar yaklaşabilecektir.

Bekleme hattı sistemlerinin tanımı, bu sistemlerin yapısal analizi çalışmada amaçlanan bekleme hattı sistemlerine kuramsal yönden kavramsal yaklaşım böylece bütünleştirilmiş olmaktadır.

---

[28]Bhaskar Sengupta, "Sojourn Time Distributions For the M/M/1 Queue in a Markovian Environment", European Journal of Operational Research, C.32,N.1 (Ekim 1987),s.140.
[29]Köksal,s,161.

3. SONSUZ GELİŞ KAYNAKLI VE TEK KANALLI BEKLEME HATTI MODELLERİ

Bu bölümde tek servis kanalı olan ve sisteme sonsuz gelişlerin olduğu bekleme hattı sistemlerine ilişkin matematiksel modeller incelenecektir. Burada sisteme gelen müşterilerin gelişleri Poisson dağılımı, servis süreleri ise üstel dağılım özelliği göstereceği varsayılacağı gibi, bekleme hattında bekleyenlerden ilk gelen ilk servis görecektir. İlgili modellerde birim zamanda bekleme hattı sistemine gelen müşteri sayısı, başka bir deyişle ortalama geliş debisi (λ) ile ve birim zamanda tamamlanan servis sayısı yani ortalama servis debisi de (μ) ile gösterilecektir.

Ayrıca birim zamanda gelen müşteri sayısı (λ) ve birim zamandaki servis sayısı (μ) birer Poisson dağılımı gösteriyorsa, birbirini takip eden iki geliş arasında geçen süre ($1/\lambda$) ve servis süresi ($1/\mu$) birer üstel dağılım ortaya koyarlar[30].

Bekleme hattı sistemleri için geliştirilen modellerden analitik sonuçlar elde etmek, sistemdeki müşterilerin sayılarının belirlenmesi üzerine kurulmuştur. Bu durum göz önünde tutularak yapılan çalışmada, bekleme hattı modelinde müşteri sayısı belirlenirken bir nicelik söz konusu ise bir boyutlu bekleme hattı modeli, iki nicelik söz konusu ise iki boyutlu bekleme hattı modeli kavramları kabul edilmiştir.

3.1 Bir Boyutlu Bekleme Hattı Modeli

(M/M/1):(FIFO/∞/∞) notasyonu ile belirlenen bekleme hattı sistemi için geliştirilecek modelin matematik analizi güç işlemleri kapsamaktadır. Bu modeli belirleyen temel denklemlerin çıkarılışına geçmeden önce sisteme

---

[30] Matematiksel ispat için b.k.z., İmdat Kara, Olasılık (Eskişehir: Anadolu Üni. Eğitim,Sağlık ve Bilimsel Araştırma Çalışmaları Vakfı Yayını,1989),s.290., C. W. Churcman,R. L. Ackoff ve E. L. Arnoff, Introduction to Operations Research (New York:John Wiley and Sons, Inc.,1957),s.298.

gelişlerin birbirinden bağımsız olması varsayımını göz önünde tutmak gerekecektir.

3.1.1 Modelin Kurulması

Bekleme hattı sisteminde başlangıçta, başka bir deyimle (0) zamanındaki müşteri sayısı i olsun. Eğer N(t), t zamanında sistemdeki müşteri sayısını gösteriyorsa, N(0)=i dir.

Bekleme hattı sisteminde (0) zamanında i müşteri bulunduğunda, herhangi bir t anında n müşteri varsa, bu durumun olasılığı $p_n(t)$ ile gösterilir. Bu durumda, herhangi bir anda bekleme hattı sisteminde n müşteri bulunma olasılığı böyle bir durumun ortaya çıkma varsayımları esas alınarak tanımlanabilir. Herhangi bir $(t+\Delta t)$ anında bekleme hattı sisteminde n müşteri bulunması durumları Tablo:1 de gösterilmiştir.

Tablo:1

Durum	Sistemde t anında müşteri sayısı	Δt zaman diliminde geliş sayısı	Δt zaman diliminde servis sayısı	Sistemde $(t+\Delta t)$ anında müşteri sayısı
1	n	0	0	n
2	n-1	1	0	n
3	n+1	0	1	n
4	n	1	1	n

Δt zaman diliminde bekleme hattı sistemine gelen bir müşterinin olasılığı $\lambda\Delta t$ ile ve servis gören bir müşterinin olasılığı ise $\mu\Delta t$ ile belirlidir[31].

[31] W. Feller, An Introduction to Probability Theory and its Applications (New York: John Wiley and Sons, Inc.,1957),s.400., William Massey, "Asymtotic Analysis of the Time Dependent M/M/1 Queue", Mathematics of Operations Research, C.10,N.2 (Mayıs 1985),s.305.

Δt zaman diliminin çok küçük düşünülmesi, Δt^2--->0 olma özelliğini benimsetir. Çünkü adı geçen büyüklük önemli değildir ve ihmal edilebilir.

Tabloda görülen dört durum olasılığı bu varsayımlar altında şöyle tanımlanabilir.

$$\text{1. durum olasılığı} = \begin{bmatrix}\text{Sistemde t anında}\\ \text{n müşteri bulunma}\\ \text{olasılığı}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta t \text{ de hiçbir geliş}\\ \text{olmaması}\\ \text{olasılığı}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta t \text{ de serviste}\\ \text{hiçbir}\\ \text{müşterinin}\\ \text{bulunmaması}\\ \text{olasılığı}\end{bmatrix}$$

$$=[p_n(t)]\,(1-\lambda\Delta t)\,(1-\mu\Delta t)$$

$$=[p_n(t)]\,(1-\lambda\Delta t-\mu\Delta t+\lambda\mu\Delta t^2)$$

$$=[p_n(t)]\,(1-\lambda\Delta t-\mu\Delta t)$$

$$\text{2. durum olasılığı} = \begin{bmatrix}\text{Sistemde t anında}\\ \text{n-1 müşteri}\\ \text{bulunma olasılığı}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta t \text{ de 1 müşteri}\\ \text{gelme}\\ \text{olasılığı}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta t \text{ de serviste}\\ \text{hiçbir müşterinin}\\ \text{bulunmaması}\\ \text{olasılığı}\end{bmatrix}$$

$$=[p_{n-1}(t)]\,(\lambda\Delta t)\,(1-\mu\Delta t)$$

$$=[p_{n-1}(t)]\,(\lambda\Delta t-\lambda\mu\Delta t^2)$$

$$=[p_{n-1}(t)]\,(\lambda\Delta t)$$

$$\text{3. durum olasılığı} = \begin{bmatrix}\text{Sistemde t anında}\\ \text{n+1 müşteri}\\ \text{bulunma olasılığı}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta t \text{ de hiçbir geliş}\\ \text{olmaması}\\ \text{olasılığı}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta t \text{ de 1}\\ \text{müşterinin servis}\\ \text{görme olasılığı}\end{bmatrix}$$

$$=[p_{n+1}(t)]\,(1-\lambda\Delta t)\,(\mu\Delta t)$$

$=[p_{n+1}(t)]\ (\mu\Delta t-\lambda\mu\Delta t^2)$

$=[p_{n+1}(t)]\ (\mu\Delta t)$

$$4.\ \text{durum olasılığı}=\begin{bmatrix}\text{Sistemde t anında}\\ \text{n müşteri bulunma}\\ \text{olasılığı}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta t\text{ de 1 müşteri}\\ \text{gelme}\\ \text{olasılığı}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta t\text{ de 1}\\ \text{müşterinin servis}\\ \text{görme olasılığı}\end{bmatrix}$$

$=[p_n(t)]\ (\lambda\Delta t)\ (\mu\Delta t)$

$=[p_n(t)]\ (\lambda\mu\Delta t^2)$

$=0$

Yukarıda açıklanan dört durum olasılığından başka hiçbir hal söz konusu değildir. Tanımlanan dört durum olasılıkları toplamı, bekleme hattı sisteminde (t+Δt) anında başlangıçta i müşteri olduğunda n müşteri bulunma olasılığını verecektir.

$$p_n(t+\Delta t)=[p_n(t)](1-\lambda\Delta t-\mu\Delta t)+[p_{n-1}(t)](\lambda\Delta t)+[p_{n+1}(t)](\mu\Delta t)+0$$

Buradan,

$$\frac{p_n(t+\Delta t)-p_n(t)}{\Delta t}=-(\lambda+\mu)p_n(t)+\lambda p_{n-1}(t)+\mu p_{n+1}(t)$$

yazılabilir. Burada Δt sıfıra gittiğinde,

$$p_n'(t)=-(\lambda+\mu)p_n(t)+\lambda p_{n-1}(t)+\mu p_{n+1}(t)$$

bulunur. Son yazılan ifadede n=0 alındığında,

$$p_0'(t)=-\lambda p_0(t)+\mu p_1(t)$$

olur. Böylece bekleme hattı sisteminin işleyişine ilişkin aşağıdaki diferansiyel-fark denklemleri elde edilir[32].

$$\begin{cases} p'_n(t)=-(\lambda+\mu)p_n(t)+\lambda p_{n-1}(t)+\mu p_{n+1}(t) & (n>0) \\ p'_0(t)=-\lambda p_0(t)+\mu p_1(t) & (n=0) \end{cases} \qquad (1)$$

Bu diferansiyel-fark denklemleri aşağıdaki başlangıç koşulu ile çözülecektir[33].

$$p_n(0)=\begin{cases} 1 & n=i \\ 0 & n\neq i \end{cases} \qquad (2)$$

3.1.2 Modelin Çözümü

Yukarıdaki zamana bağlı diferansiyel-fark denklemlerini çözebilmek için tanımlanan,

$$P(z,t)=\sum_{n=0}^{\infty} p_n(t)z^n$$

fonksiyonu bundan sonra yapılacak işlemlerde yardıcı fonksiyon görevini üstlenecektir[34]. P(z,t) fonksiyonu $|z|\leq 1$ için yakınsaktır.

(1) diferansiyel-fark denklemlerinin birinci denkleminin her iki yanını z^n ile çarpıp, daha sonra bunun n=1 den sonsuza kadar toplamı alınıp ikinci

---

[32]Saaty,1961,s.83.

[33]A. Bruce Clarke, The Time Dependent Waiting Line Problem,University of Michigan,Engineering Research Institute,Report No.M720-1 R39 (1953),s.5., Philip M. Morse, Queues, Inventories and Maintenence (New York: John Wiley and Sons, Inc.,1961),s.9., Alec M. Lee, Applied Queueing Theory (London: ST Martin's Press,1966),s.25.

[34]Donald Gross ve Carl M. Harris, Fundamentals of Queueing Theory (New York: John Wiley and Sons, Inc.,1974),s.75.

denklem ile toplanırsa,

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n'(t)z^n+p_0'(t)z^0=-\lambda\sum_{n=1}^{\infty} p_n(t)z^n-\lambda p_0(t)z^0-\mu\sum_{n=1}^{\infty} p_n(t)z^n$$

$$+\lambda\sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1}(t)z^n+\mu\sum_{n=1}^{\infty} p_{n+1}(t)z^n+\mu p_1(t)z^0$$

elde edilir ve sonuç olarak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n'(t)z^n=-\lambda\sum_{n=0}^{\infty} p_n(t)z^n-\mu\sum_{n=1}^{\infty} p_n(t)z^n+\lambda\sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1}(t)z^n+\mu\sum_{n=0}^{\infty} p_{n+1}(t)z^n$$

bulunur. Buradan,

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n'(t)z^n=-\lambda\sum_{n=0}^{\infty} p_n(t)z^n-[\mu\sum_{n=0}^{\infty} p_n(t)z^n-\mu p_0(t)]$$

$$+\lambda z\sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1}(t)z^{n-1}+\frac{\mu}{z}\sum_{n=0}^{\infty} p_{n+1}(t)z^{n+1} \qquad (3)$$

yazılabilir.

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(t)z^n=\sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1}(t)z^{n-1}=\sum_{n=-1}^{\infty} p_{n+1}(t)z^{n+1}=P(z,t)$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n'(t)z^n=\frac{\delta P(z,t)}{\delta t}$$

olduğundan, (3) denklemi,

$$\frac{\delta P(z,t)}{\delta t}=-\lambda P(z,t)-\mu[P(z,t)-p_0(t)]+\lambda zP(z,t)+\frac{\mu}{z}[P(z,t)-p_0(t)] \quad (4)$$

veya

$$\frac{\delta P(z,t)}{\delta t}=\frac{1-z}{z}[(\mu-\lambda z)P(z,t)-\mu p_0(t)]$$

biçiminde yazılabilir. (2) başlangıç koşulundan,

$$P(z,0)=z^i$$

olacağı göz önünde bulundurularak (4) dekleminin her iki yanının Laplace dönüşümü alınsın. Adı geçen denklemin sol yanı Laplace dönüşümüyle,

$$\int_0^\infty e^{-st}\frac{\delta P(z,t)}{\delta t}dt=[e^{-st}P(z,t)]_0^\infty+s\int_0^\infty e^{-st}P(z,t)dt$$

$$=-z^i+sP(z,s)$$

olur. Sağ yan ise,

$$\frac{1-z}{z}[(\mu-\lambda z)P(z,s)-\mu p_0(s)]$$

değerini alır. Buradan,

$$szP(z,s)-z^{i+1}=[\lambda z^2-(\lambda+\mu)z+\mu]P(z,s)-\mu(1-z)p_0(s)$$

olacağından,

$$P(z,s)=\frac{z^{i+1}-\mu(1-z)p_0(s)}{(\lambda+\mu+s)z-\mu-\lambda z^2} \quad (5)$$

olarak bulunur.

P(z,t) nin Laplace dönüşümü ile bulunan P(z,s) fonksiyonu Re(s)>0 olmak üzere $|z|\leq 1$ bölgesinde yakınsaktır. Bu bölgede P(z,s) nin paydasını sıfır yapan değerler olabileceği gibi, P(z,s) nin payını da sıfır yapan değerler vardır. Bu durumun bilinmesi $p_0(s)$ nin belirlenmesinde kullanılacaktır. Payda iki sıfıra sahiptir ve bunlar s nin birer fonksiyonudur. O halde,

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{\lambda+\mu+s-\sqrt{(\lambda+\mu+s)^2-4\lambda\mu}}{2\lambda} \\ \\ z_2 = \dfrac{\lambda+\mu+s+\sqrt{(\lambda+\mu+s)^2-4\lambda\mu}}{2\lambda} \end{cases} \quad (6)$$

olur. Burada karekök pozitif değerlidir. Bu nedenle,

$$\begin{cases} |z_1|<|z_2| \\ \\ z_1+z_2 = \dfrac{\lambda+\mu+s}{\lambda} \\ \\ z_1 . z_2 = \dfrac{\mu}{\lambda} \end{cases} \quad (7)$$

yazılabilir.

Burada kullanılacak olan Fonksiyonlar Kuramının önemli bir teoreminin tanımı yapılacaktır.

Rouche teoremi: Basit kapalı bir C çevresinin içinde ve üzerinde f(z) ve g(z) fonksiyonları analitik ve C üzerinde |f(z)|>|g(z)| ise bu takdirde f(z) ve f(z)+g(z) nin C nin içindeki sıfır yerlerinin sayısı aynıdır[35].

---

[35]Cengiz Uluçay, Fonksiyonlar Teorisi ve Riemann Yüzeyleri (İstanbul: Şirketi Mürettibiye Basımevi,1971),s.179.

Bu teoreme dayanarak $|z|=1$ ve $Re(s)>0$ için,

$$|f(z)|=|(\lambda+\mu+s)z|=|\lambda+\mu+s|>\lambda+\mu\geq|\mu+\lambda z^2|=|g(z)|$$

olduğundan $(\lambda+\mu+s)z-\mu-\lambda z^2$ ifadesinin birim çemberin içinde sadece bir sıfırı vardır. Bu sıfırın $|z_1|<|z_2|$ den dolayı z_1 olacağı açıktır.

Böylece (5) denkleminin sağ yanının payı $z=z_1$ için sıfıra eşitlenerek,

$$p_0(s)=\frac{z_1^{i+1}}{\mu(1-z_1)}$$

bulunur. (7) bağıntılarının son iki tanesi göz önünde bulundurularak (5) denklemi,

$$P(z,s)=\frac{z^{i+1}-\dfrac{(1-z)z_1^{i+1}}{1-z_1}}{\lambda(z-z_1)(z_2-z)} \qquad (8)$$

biçimini alır. Buradan,

$$P(z,s)=\frac{1}{\lambda z_2(1-z/z_2)}\left[\frac{z^{i+1}(1-z_1)-(1-z)z_1^{i+1}}{(z-z_1)(1-z_1)}\right]$$

$$P(z,s)=\frac{1}{\lambda z_2(1-z/z_2)}\left[\frac{(z^{i+1}-z_1^{i+1})(1-z_1)+(z-z_1)z_1^{i+1}}{(z-z_1)(1-z_1)}\right]$$

$$P(z,s)=\frac{1}{\lambda z_2(1-z/z_2)}\left[z^i\left(\frac{1-(z_1/z)^{i+1}}{1-z_1/z}\right)+\frac{z_1^{i+1}}{1-z_1}\right]$$

$$P(z,s)=\frac{1}{\lambda z_2(1-z/z_2)}\left\{z^i[1+(z_1/z)+......+(z_1/z)^i]+\frac{z_1^{i+1}}{1-z_1}\right\}$$

olur. Bu son yazılan denklemde $|z/z_2|<1$ için,

$$(1-z/z_2)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}(z/z_2)^k$$

olduğundan,

$$P(z,s)=\frac{1}{\lambda z_2}(z^i+z_1z^{i-1}+......+z_1^i)\sum_{k=0}^{\infty}(z/z_2)^k+\frac{z_1^{i+1}}{\lambda z_2(1-z_1)}\sum_{k=0}^{\infty}(z/z_2)^k \quad (9)$$

olarak yazılabilir. Daha önce tanımlanan P(z,t) fonksiyonunun Laplace dönüşümü yapılırsa,

$$L\{P(z,t)\}=L\{\sum p_n(t)z^n\}$$

$$P(z,s)=\sum L\{p_n(t)z^n\}$$

$$P(z,s)=\sum z^n L\{p_n(t)\}$$

$$P(z,s)=\sum p_n(s)z^n$$

bulunur. Bu özellik göz önünde bulundurularak (9) denkleminden $p_n(s)$ bulunabilir. Önce adı geçen denklemin ikinci teriminde z^k nın nın katsayısı ele alınırsa,

$$\frac{z_1^{i+1}}{\lambda z_2^{n+1}(1-z_1)}=\frac{z_1^{i+1}}{\lambda z_2^{n+1}}(1+z_1+z_1^2+......)$$

$$\frac{z_1^{i+1}}{\lambda z_2^{n+1}(1-z_1)}=\frac{1}{\lambda}(\lambda/\mu)^{n+1}\sum_{r=n+i+2}^{\infty}(\mu/\lambda)^r\frac{1}{z_2^r} \quad (10)$$

bulunur. Burada $|z_1|<1$ ve $z_1.z_2=\mu/\lambda$ dır.

Şimdi (9) denkleminin birinci teriminde z^k nın katseyısı ele alındığında bu katsayının n≥i ve n<i için çözüme katkısı farklıdır.Önce n≥i için çözüm aranırsa,

$$\frac{1}{\lambda z_2^{n+1}}(z^i+z_1z^{i-1}+......+z_1^i)$$

bulunur. Burada $z=z_2$ alınırsa,

$$\frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{z_2^{n-i+1}}+\frac{z_1}{z_2^{n-i+2}}+\frac{z_1^2}{z_2^{n-i+3}}+......+\frac{z_1^i}{z_2^{n+1}}\right)$$

ve $z_1.z_2=\mu/\lambda$ olduğundan,

$$\frac{1}{\lambda}\left[\frac{1}{z_2^{n-i+1}}+\frac{\mu/\lambda}{z_2^{n-i+3}}+\frac{(\mu/\lambda)^2}{z_2^{n-i+5}}+......+\frac{(\mu/\lambda)^i}{z_2^{n+i+1}}\right] \qquad (11)$$

olur. Sonuç olarak (10) ve (11) ifadeleri toplanırsa n≥i için,

$$p_n(s)=\frac{1}{\lambda}\left[\frac{1}{z_2^{n-i+1}}+\frac{(\mu/\lambda)}{z_2^{n-i+3}}+\frac{(\mu/\lambda)^2}{z_2^{n-i+5}}+......+\frac{(\mu/\lambda)^i}{z_2^{n+i+1}}+(\lambda/\mu)^{n+1}\sum_{r=n+i+2}^{\infty}(\mu/\lambda)^r\frac{1}{z_2^r}\right] \qquad (12)$$

bulunur. Bu durumda $p_n(t)$ yi bulmak için (12) ifadesinin her iki yanının ters Laplace dönüşümü alınacaktır. Bu nedenle (12) ifadesinde yer alan,

$$\frac{K}{z_2^m}=K\left[\frac{\lambda+\mu+s+\sqrt{(\lambda+\mu+s)^2-4\lambda\mu}}{2\lambda}\right]^{-m}$$

terimlerinin ters Laplace dönüşümünü alabilmek için,

$$L^{-1}\left\{\left(\frac{s+\sqrt{s^2-4\lambda\mu}}{2\lambda}\right)^{-n}\right\} = n(\lambda/\mu)^{n/2} t^{-1} I_n(2\sqrt{\lambda\mu}\, t) \tag{13}$$

bağıntısının göz önüne alınması gerekir. O halde,

$$p_n(t)=\frac{e^{-(\lambda+\mu)t}}{\lambda}[(\lambda/\mu)^{(n-i+1)/2}(n-i+1)t^{-1}I_{n-i+1}(2\sqrt{\lambda\mu}\, t)$$

$$+(\mu/\lambda)(\lambda/\mu)^{(n-i+3)/2}(n-i+3)t^{-1}I_{n-i+3}(2\sqrt{\lambda\mu}\, t)+\ldots\ldots$$

$$+(\mu/\lambda)^{i}(\lambda/\mu)^{(n+i+1)/2}(n+i+1)t^{-1}I_{n+i+1}(2\sqrt{\lambda\mu}\, t)$$

$$+(\lambda/\mu)^{n+1}\sum_{r=n+i+2}^{\infty}(\mu/\lambda)^{r/2}\, r\, t^{-1}I_r(2\sqrt{\lambda\mu}\, t)] \tag{14}$$

yazılabilir. Burada düzenlenmiş Bessel fonksiyonlarına ait rekürans formüllerinden,

$$\frac{2k}{x}I_k(x)=I_{k-1}(x)-I_{k+1}(x)$$

formülü kullanılırsa,

$$p_n(t)=\frac{e^{-(\lambda+\mu)t}}{\lambda}\{(\lambda/\mu)^{(n-i+1)/2}\sqrt{\lambda\mu}\,[I_{n-i}(2\sqrt{\lambda\mu}\, t)-I_{n-i+2}(2\sqrt{\lambda\mu}\, t]$$

$$+(\lambda/\mu)^{(n-i+1)/2}\sqrt{\lambda\mu}\,[I_{n-i+2}(2\sqrt{\lambda\mu}\, t)-I_{n-i+4}(2\sqrt{\lambda\mu}\, t)]$$

$$+\ldots\ldots+(\lambda/\mu)^{(n-i+1)/2}\sqrt{\lambda\mu}\,[I_{n+i}(2\sqrt{\lambda\mu}\, t)-I_{n+i+2}(2\sqrt{\lambda\mu}\, t)]$$

$$+(\lambda/\mu)^{n+1}\sum_{r=n+i+2}^{\infty}(\mu/\lambda)^{r/2}\sqrt{\lambda\mu}\,[I_{r-1}(2\sqrt{\lambda\mu}\,t)-I_{r+1}(2\sqrt{\lambda\mu}\,t)]\}\qquad(15)$$

olur. Bulunan bu ifadenin büyük parantez içindeki en son terimi ele alınarak,

$$(\lambda/\mu)^{n+1}\sum_{r=n+i+2}^{\infty}(\mu/\lambda)^{r/2}\sqrt{\lambda\mu}\,[I_{r-1}(2\sqrt{\lambda\mu}\,t)-I_{r+1}(2\sqrt{\lambda\mu}\,t)]$$

$$=(\lambda/\mu)^{n+1}[(\mu/\lambda)^{(n+i+2)/2}\sqrt{\lambda\mu}\,I_{n+i+1}(2\sqrt{\lambda\mu}\,t)$$

$$+\sqrt{\mu/\lambda}\,\sqrt{\lambda\mu}\sum_{r=n+i+2}^{\infty}(\mu/\lambda)^{r/2}I_r(2\sqrt{\lambda\mu}\,t)+(\mu/\lambda)^{(n+i+1)/2}\sqrt{\lambda\mu}\,I_{n+i+2}(2\sqrt{\lambda\mu}\,t)$$

$$-\sqrt{\lambda/\mu}\,\sqrt{\lambda\mu}\sum_{r=n+i+2}^{\infty}(\mu/\lambda)^{r/2}I_r(2\sqrt{\lambda\mu}\,t)]$$

$$=(\mu/\lambda)^{(i-n+1)/2}\lambda I_{n+i+1}(2\sqrt{\lambda\mu}\,t)+(\lambda/\mu)^{(n-i+1)/2}\sqrt{\lambda\mu}\,I_{n+i+2}(2\sqrt{\lambda\mu}\,t)$$

$$+(1-\lambda/\mu)(\lambda/\mu)^{n}\lambda\sum_{r=n+i+2}^{\infty}(\mu/\lambda)^{r/2}I_r(2\sqrt{\lambda\mu}\,t)$$

eşitliği bulunur. Bulunan bu eşitlik (15) ifadesinde yerine konursa, $n\geq i$ için,

$$p_n(t)=e^{-(\lambda+\mu)t}[(\mu/\lambda)^{(i-n)/2}I_{n-i}(2\sqrt{\lambda\mu}\,t)+(\mu/\lambda)^{(i-n+1)/2}I_{n+i+1}(2\sqrt{\lambda\mu}\,t)$$

$$+(1-\lambda/\mu)(\lambda/\mu)^{n}\sum_{r=n+i+2}^{\infty}(\mu/\lambda)^{r/2}I_r(2\sqrt{\lambda\mu}\,t)]\qquad(16)$$

elde edilir. Bu ifade n<i için de çözüm olabilir. Bunu gösterebilmek için (9) denklemini dikkatle gözden geçirmek gerekir. Bu denklemin,

$$(z^i+z_1z^{i-1}+......+z_1^i) \quad \text{ve} \quad \sum_{k=0}^{\infty}(z/z_2)^k$$

çarpımının birinci teriminde z lerin üslerinin i den daha küçük olduğu göz önünde tutulmalıdır. İşlemlerin bu duruma göre yapılması önceden yapılanların tam olarak benzeridir. (9) denkleminin ikinci terimi de n≥i için gösterdiği katkıyı n<i için de gösterir. Ayrıca n bir tam sayı olduğunda, aşağıdaki,

$$I_{-n}(x)=I_n(x)$$

bağıntısı da burada gözden uzak tutulmamalıdır. Sonuç olarak (16) ifadesinin n≥0 için sağlandığı söylenebilir.

İşlemlerimizi daha da ilerletmek için düzenlenmiş Bessel fonksiyonlarına ilişkin,

$$I_n(x)=\frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}+Q(\frac{1}{x})$$

formülü ya da,

$$I_n(x)\sim\frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}$$

asimtotik yaklaşımı burada kullanılabilir. Buradan (16) ifadesi,

$$p_n(t)\sim e^{-(\lambda+\mu)t}\{\frac{(\mu/\lambda)^{(i-n)/2}e^{2\sqrt{\lambda\mu}\,t}}{\sqrt{4\pi t}\,(\lambda\mu)^{1/4}}+\frac{(\mu/\lambda)^{(i-n+1)/2}e^{2\sqrt{\lambda\mu}\,t}}{\sqrt{4\pi t}\,(\lambda\mu)^{1/4}}$$

$$+(1-\lambda/\mu)(\lambda/\mu)^{n}\sum_{r=n+i+2}^{\infty}[(\mu/\lambda)^{r/2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{\lambda\mu}\,t)^{2k+r}}{k!\,\Gamma(k+r+1)}]\}$$

ya da,

$$p_n(t)\sim\frac{e^{-(\sqrt{\lambda}-\sqrt{\mu})^2 t}}{\sqrt{4\pi t}}[\frac{\mu^{(i-n-1/2)/2}}{\lambda^{(i-n+1/2)/2}}+\frac{\mu^{(i-n+1/2)/2}}{\lambda^{(i-n+3/2)/2}}]$$

$$+e^{-(\lambda+\mu)t}(1-\lambda/\mu)(\lambda/\mu)^{n}\sum_{r=n+i+2}^{\infty}[(\mu/\lambda)^{r/2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{\lambda\mu}\,t)^{2k+r}}{k!\,(k+r)!}]$$

biçiminde yazılabilir. Bu ifadenin ilk terimi λ ve μ nün değerlerınden bağımsız olarak,

$$e^{(\sqrt{\lambda}-\sqrt{\mu})^2 t}/\sqrt{t}$$

ifadesi $t\text{--->}\infty$ için sıfır değerini alır. Burada t nin sonsuza yaklaştırılmasının nedeni kararlı durumda zamanın yeterince büyük alınması gerektiğidir. Böylece sadece ikinci terimde sonsuz seriler için yapılması gereken işlemler uygulanacaktır. Buradan,

$$p_n(t)\sim(1-\lambda/\mu)(\lambda/\mu)^{n}e^{-(\lambda+\mu)t}\sum_{k=0}^{\infty}[\frac{(\lambda t)^{k}}{k!}\sum_{r=n+i+2}^{\infty}(\mu/\lambda)^{r/2}\frac{\lambda^{r/2}\mu^{(r/2)+k}t^{k+r}}{(k+r)!}]$$

$$p_n(t)\sim(1-\lambda/\mu)(\lambda/\mu)^{n}\sum_{k=0}^{\infty}[\frac{(\lambda t)^{k}e^{-\lambda t}}{k!}e^{-\mu t}\sum_{r=n+i+2}^{\infty}\frac{(\mu t)^{k+r}}{(k+r)!}]$$

$$p_n(t) \sim (1-\lambda/\mu)(\lambda/\mu)^n \sum_{k=0}^{\infty} [\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} e^{-\mu t} \sum_{m=n+i+2+k}^{\infty} \frac{(\mu t)^m}{m!}]$$

$$p_n(t) \sim (1-\lambda/\mu)(\lambda/\mu)^n \sum_{k=0}^{\infty} [\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} e^{-\mu t} (e^{\mu t} - \sum_{m=0}^{n+i+1+k} \frac{(\mu t)^m}{m!})]$$

$$p_n(t) \sim (1-\lambda/\mu)(\lambda/\mu)^n \sum_{k=0}^{\infty} [\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} (1 - e^{-\mu t} \sum_{m=0}^{n+i+1+k} \frac{(\mu t)^m}{m!})]$$

elde edilir. Burada,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$$

ifadesi Poisson dağılım fonksiyonunun tanımı gereği bire eşittir. O halde,

$$p_n(t) \sim (1-\lambda/\mu)(\lambda/\mu)^n [1 - \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} e^{-\mu t} \sum_{m=0}^{n+i+1+k} \frac{(\mu t)^m}{m!})]$$

olur. Burada t--->∞ için $e^{-(\lambda+\mu)t}t^k$ ifadesi L'Hospital kuralı gereği k adım sonra sıfıra gittiğinden sonuç olarak,

$$p_n(t) = (1-\lambda/\mu)(\lambda/\mu)^n \qquad (17)$$

olasılık fonksiyonu bulunur. $(\lambda/\mu)=1$ olduğu zaman $p_n(t)=0$ ve $(\lambda/\mu)>1$ olduğu zaman $p_n(t)<0$ dır. Bunun için sadece $(\lambda/\mu)<1$ olduğunda olasılık fonksiyonuna sahip olunur.

3.2 İki Boyutlu Bekleme Hattı Modeli

Yukarıda tanımlayıp $p_n(t)$ ile gösterdiğimiz olasılık fonksiyonu herhangi bir t anında bekleme hattında n müşteri bulunma olasılığını verir. Fakat t anına kadar bekleme hattı sisteminin nasıl işlediğine ilişkin bilgisizlik mevcuttur.Buna rağmen yöneticiler t anına kadar olabilecekleri bilmek gereksinimi duyarlar. Bunun sonucu olarak şu sorular ortaya çıkar.

-Bekleme hattı sisteminde t anına kadar kaç müşteri işlem görmüştür?.

-İşlemin ilk t zaman biriminde servis verenin dolu olacağı zaman yüzdesi nedir?.

Ayrıca bekleme hattı sistemi işlemsiz başlarsa, servis verenin meşgul olduğu zaman yüzdesi, umulan bekleme hattı uzunluğu ve bekleme hattı sisteminden çıkışların baştaki oranı kararlı durum sonuçlarından aşağıda olacaktır. Bu durumda hesaplanarak bulunan kararlı durum sonuçlarının kullanımı uygun olmayacaktır.

Bu durumlar göz önünde tutularak herhangi bir t anına kadar sistemin işleyişine ilişkin değişik bir yaklaşım 1982'de Claude Dennis Pegden ve Matthew Rosenshine tarafından geliştirilmiştir[36].

3.2.1 Modelin Kurulması

Burada daha önce ele alınan klasik incelemeden farklı olarak bekleme hattı sisteminde herhangi bir t anına kadar, i gelişlerin sayısı ve j ayrılışların sayısı olmak üzere, durumu (i,j) tarafından belirlenen bekleme hattı sisteminin analizi yapılacaktır. $p_{i,j}(t)$ kurulmak istenen modelde durum olasılıklarını gösterecektir ve herhangi bir t anına kadar bekleme hattı sistemine i gelişlerin, bekleme hattı sisteminden j ayrılışların olasılığını

[36]Claude Dennis Pegden ve Matthew Rosenshine, "Some New Results For the M/M/1 Queue", Management Science, C.28,N.7 (Haziran 1982),s.821-828.

verecektir. $p_{i,j}(t)$ nin çözümü bekleme hattının geçici davranışına dair önemli bilgi sağlar.

Δt zaman diliminde bekleme hattı sistemine gelen bir müşterinin olasılığı $\lambda\Delta t$ ile ve servis gören bir müşterinin olasılığı ise $\mu\Delta t$ ile belirlidir. Δt zaman diliminin çok küçük düşünülmesi Δt^2--->0 olmasını gerekli kılar. Bunun sonucu olarak işlemlerimizde Δt^2 yi içinde bulunduran terimler ihmal edilecektir.

Herhangi bir $(t+\Delta t)$ anına kadar bekleme hattı sisteminde i gelişlerin ve j ayrılışların değişik durumları Tablo:2 de gösterilmiştir.

Tablo:2

Durum	Sistemde t anına kadar geliş, ayrılış sayısı	Δt zaman diliminde geliş sayısı	Δt zaman diliminde servis sayısı	Sistemde $(t+\Delta t)$ anına kadar geliş, ayrılış sayısı
1	i,j-1	0	1	i,j
2	i-1,j	1	0	i,j
3	i,j	0	0	i,j
4	i,j	1	1	i,j

Tabloda görülen dört durum olasılığı şu şekilde tanımlanabilir.

1.durum olasılığı= [Sistemde t anına kadar i geliş j-1 ayrılış olması olasılığı] [Δt de hiçbir geliş olmaması olasılığı] [Δt de 1 müşterinin servis görme olasılığı]

$$=[p_{i,j-1}(t)](1-\lambda\Delta t)(\mu\Delta t)$$

$$=[p_{i,j-1}(t)](\mu\Delta t-\lambda\mu\Delta t^2)$$

$$=[p_{i,j-1}(t)](\mu\Delta t)$$

$$\text{2.durum olasılığı}=\begin{bmatrix}\text{Sistemde t anına}\\ \text{kadar i-1 geliş}\\ \text{j ayrılış olması}\\ \text{olasılığı}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\text{t de 1 geliş}\\ \text{olması}\\ \text{olasılığı}\\ \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\text{t de serviste}\\ \text{hiçbir müşterinin}\\ \text{bulunmaması}\\ \text{olasılığı}\end{bmatrix}$$

$$=[p_{i-1,j}(t)](\lambda\Delta t)(1-\mu\Delta t)$$

$$=[p_{i-1,j}(t)](\lambda\Delta t-\lambda\mu\Delta t^2)$$

$$=[p_{i-1,j}(t)](\lambda\Delta t)$$

$$\text{3. durum olasılığı}=\begin{bmatrix}\text{Sistemde t anına}\\ \text{kadar i geliş}\\ \text{j ayrılış olması}\\ \text{olasılığı}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\text{t de hiçbir}\\ \text{geliş olmaması}\\ \text{olasılığı}\\ \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\text{t de serviste}\\ \text{hiçbir müşterinin}\\ \text{bulunmaması}\\ \text{olasılığı}\end{bmatrix}$$

$$=[p_{i,j}(t)](1-\lambda\Delta t)(1-\mu\Delta t)$$

$$=[p_{i,j}(t)](1-\lambda\Delta t-\mu\Delta t+\lambda\mu\Delta t^2)$$

$$=[p_{i,j}(t)](1-\lambda\Delta t-\mu\Delta t)$$

$$\text{4. durum olasılığı}=\begin{bmatrix}\text{Sistemde t anına}\\ \text{kadar i geliş}\\ \text{j ayrılış olması}\\ \text{olasılığı}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\text{t de 1 geliş}\\ \text{olması}\\ \text{olasılığı}\\ \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\text{t de 1}\\ \text{müşterinin servis}\\ \text{görme olasılığı}\\ \end{bmatrix}$$

$$=[p_{i,j}(t)](\lambda\Delta t)(\mu\Delta t)$$

$$=[p_{i,j}(t)](\lambda\mu t^2)$$

$=0$

Yukarıda açıklanan dört durum dışında, başka hiçbir durum söz konusu değildir. Tanımlanan dört durum olasılıkları toplamı, bekleme hattı sisteminde $(t+\Delta t)$ anına kadar i gelişlerin ve j ayrılışların olasılığını verecektir.

$$p_{i,j}(t+\Delta t)=[p_{i,j-1}(t)](\mu\Delta t)+[p_{i-1,j}(t)](\lambda\Delta t)+[p_{i,j}(t)](1-\lambda\Delta t-\mu\Delta t)+0$$

Buradan,

$$\frac{p_{i,j}(t+\Delta t)-p_{i,j}(t)}{\Delta t}=\mu p_{i,j-1}(t)+\lambda p_{i-1,j}(t)-(\lambda+\mu)p_{i,j}(t)$$

yazılabilir. Burada Δt sıfıra gittiğinde,

$$p'_{i,j}(t)=\mu p_{i,j-1}(t)+\lambda p_{i-1,j}(t)-(\lambda+\mu)p_{i,j}(t)$$

bulunur.

Son yazılan ifade, j=i için,

$$p'_{i,i}(t)=\mu p_{i,i-1}(t)-\lambda p_{i,i}(t)$$

j=0 için,

$$p'_{i,0}(t)=\lambda p_{i-1,0}(t)-(\lambda+\mu)p_{i,0}(t)$$

ve i=0,j=0 için,

$$p'_{0,0}(t)=-\lambda p_{0,0}(t)$$

olur. Böylece bekleme hattı sisteminin işleyişine ilişkin aşağıdaki diferansiyel-fark denklemleri elde edilir.

$$\begin{cases} p'_{i,j}(t)=\mu p_{i,j-1}(t)+\lambda p_{i-1,j}(t)-(\lambda+\mu)p_{i,j}(t) & i\geq 2,\ 1\leq j<i \\ p'_{i,i}(t)=\mu p_{i,i-1}(t)-\lambda p_{i,i}(t) & i\geq 1 \\ p'_{i,0}(t)=\lambda p_{i-1,0}(t)-(\lambda+\mu)p_{i,0}(t) & i\geq 0 \\ p'_{0,0}(t)=-\lambda p_{0,0}(t) & \end{cases} \tag{18}$$

3.2.2 Modelin Çözümü

(18) diferansiyel-fark denklemlerinde ilk ve son denklemlerin Laplace dönüşümü,

$$p_{i,j}(s)=\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu+s}\right)^{i}\left(\frac{\mu}{\lambda+s}\right)^{j}\sum_{k=0}^{j}\frac{(i-k)(i+k-1)!}{k!\,i!}\frac{(\lambda+s)^{k-1}}{(\lambda+\mu+s)^{k}} \qquad i\geq 1,0\leq j\leq i \tag{19}$$

ve

$$p_{0,0}(s)=\frac{1}{\lambda+s} \tag{20}$$

olur. (19) ifadesinin doğruluğu tümevarım yöntemiyle gösterilebilir. Tümevarım yöntemi şu adımlarla uygulanacaktır[37].

i) (19) ifadesi $p_{1,0}(s)$, $p_{2,0}(s)$ ve $p_{1,1}(s)$ için doğrulanır.

ii) (19) ifadesi $p_{i,0}(s)$ için doğru kabul edilip, $p_{i+1,0}(s)$ için doğrulanır.

iii) (19) ifadesi $p_{i-1,j}(s)$ ve $p_{i,j-1}(s)$ için doğru ise, $p_{i,j}(s)$ için i>j olmak üzere doğrulanır.

iv) (19) ifadesi $p_{i,i-1}(s)$ için doğru ise, $p_{i,i}(s)$ için doğrulanır.

[37] Pegden ve diğeri,s.826.

Bu adımların doğruluğu şu şekilde gösterilir.

-(i) adımı için (19) ifadesinden,

$$p_{1,0}(s)=(\frac{\lambda}{\lambda+\mu+s})(\frac{1}{\lambda+s})$$

$$p_{2,0}(s)=(\frac{\lambda}{\lambda+\mu+s})^2(\frac{1}{\lambda+s})$$

$$p_{1,1}(s)=(\frac{\lambda}{\lambda+\mu+s})(\frac{\mu}{\lambda+s})(\frac{1}{\lambda+s})$$

sonuçları bulunur. Bu sonuçların doğruluğu (18) diferansiyel-fark denklemlerinden ikinci ve üçüncü denklemlerin Laplace dönüşümü alınması yoluyla gösterilebilir. Üçüncü denklemin Laplace dönüşümü,

$$sp_{i,0}(s)=\lambda p_{i-1,0}(s)-(\lambda+\mu)p_{i,0}(s) \qquad (21)$$

olduğundan,

$$p_{i,0}(s)=(\frac{\lambda}{\lambda+\mu+s})\, p_{i-1,0}(s)$$

bulunur. İ=1 için,

$$p_{1,0}(s)=(\frac{\lambda}{\lambda+\mu+s})\, p_{0,0}(s)$$

ve (20) ifadesinden,

$$p_{1,0}(s)=(\frac{\lambda}{\lambda+\mu+s})(\frac{1}{\lambda+s})$$

elde edilir. i=2 için,

$$p_{2,0}(s)=\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu+s}\right) p_{1,0}(s)$$

olduğundan,

$$p_{2,0}(s)=\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu+s}\right)^2 \left(\frac{1}{\lambda+s}\right)$$

olur. Şimdi $p_{1,1}(s)$ nin doğruluğunu gösterebilmek için (19) diferensiyel-fark denklemlerinin ikinci denkleminin Laplace dönüşümü alınsın. O halde,

$$sp_{i,i}(s)=\mu p_{i,i-1}(s)-\lambda p_{i,i}(s) \qquad (22)$$

ve

$$p_{i,i}(s)=\left(\frac{\mu}{\lambda+s}\right) p_{i,i-1}(s)$$

olur. i=1 için,

$$p_{1,1}(s)=\left(\frac{\mu}{\lambda+s}\right) p_{1,0}(s)$$

olduğundan,

$$p_{1,1}(s)=\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu+s}\right) \left(\frac{\mu}{\lambda+s}\right) \left(\frac{1}{\lambda+s}\right)$$

bulunur. Böylece (i) adımı sağlanmış olur.

-(ii) adımı için (19) ifadesinden,

$$p_{i+1,0}(s)=\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu+s}\right)^{i+1}\left(\frac{1}{\lambda+s}\right)$$

sonucu bulunur. Bu sonucun doğruluğunu gösterebilmek için, yine (19) ifadesinden veya (i) adımından tümevarım yöntemiyle elde edilen,

$$p_{i,0}(s)=\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu+s}\right)^{i}\left(\frac{1}{\lambda+s}\right)$$

ifadesi doğru olsun. (21) ifadesinden,

$$sp_{i+1,0}(s)=\lambda p_{i,0}(s)-(\lambda+\mu)p_{i+1,0}(s)$$

eşitliği yazılabilir. Buradan,

$$p_{i+1,0}(s)=\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu+s}\right)p_{i,0}(s)$$

olur. $p_{i,0}(s)$ nin doğru kabul edilen eşitliğinden,

$$p_{i+1,0}(s)=\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu+s}\right)^{i+1}\left(\frac{1}{\lambda+s}\right)$$

elde edilir. Böylece (ii) adımı sağlanmış olur.

-(iii) adımı için, (18) diferansiyel-fark denklemlerinde birinci denklemin Laplace dönüşümü alınırsa, i>j için,

$$sp_{i,j}(s)=\mu p_{i,j-1}(s)+\lambda p_{i-1,j}(s)-(\lambda+\mu)p_{i,j}(s) \qquad (23)$$

ve

$$p_{i,j}(s)=\frac{\mu}{\lambda+\mu+s}\,p_{i,j-1}(s)+\frac{\lambda}{\lambda+\mu+s}\,p_{i-1,j}(s)$$

bulunur. Bulunan bu eşitliğin sağ tarafı, (19) ifadesi kullanılarak,

$$p_{i,j}(s)=\frac{\mu}{\lambda+\mu+s}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu+s}\right)^{i}\left(\frac{\mu}{\lambda+s}\right)^{j-1}\sum_{k=0}^{j-1}\frac{(i-k)\,(i+k-1)!}{k!\,i!}\,\frac{(\lambda+s)^{k-1}}{(\lambda+\mu+s)^{k}}$$

$$+\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu+s}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu+s}\right)^{i-1}\left(\frac{\mu}{\lambda+s}\right)^{j}\sum_{k=0}^{j}\frac{(i-k-1)\,(i+k-2)!}{k!\,(i-1)!}\,\frac{(\lambda+s)^{k-1}}{(\lambda+\mu+s)^{k}}$$

biçiminde yazılabilir. Gerekli kısaltmalar yapılarak,

$$p_{i,j}(s)=\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu+s}\right)^{i}\left(\frac{\mu}{\lambda+s}\right)^{j}\sum_{k=0}^{j-1}\frac{(i-k)\,(i+k-1)!}{k!\,i!}\,\frac{(\lambda+s)^{k}}{(\lambda+\mu+s)^{k+1}}$$

$$+\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu+s}\right)^{i}\left(\frac{\mu}{\lambda+s}\right)^{j}\sum_{k=0}^{j}\frac{(i-k-1)\,(i+k-2)!}{k!\,(i-1)!}\,\frac{(\lambda+s)^{k-1}}{(\lambda+\mu+s)^{k}}$$

$$p_{i,j}(s)=\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu+s}\right)^{i}\left(\frac{\mu}{\lambda+s}\right)^{j}\left\{\sum_{k=0}^{j-1}\frac{(i-k)\,(i+k-1)!}{k!\,i!}\,\frac{(\lambda+s)^{k}}{(\lambda+\mu+s)^{k+1}}\right.$$

$$\left.+\sum_{k=0}^{j}\frac{(i-k-1)\,(i+k-2)!}{k!\,(i-1)!}\,\frac{(\lambda+s)^{k-1}}{(\lambda+\mu+s)^{k}}\right\}$$

$$p_{i,j}(s)=\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu+s}\right)^{i}\left(\frac{\mu}{\lambda+s}\right)^{j}\left\{\sum_{k=1}^{j}\frac{(i-k-1)\,(i+k-2)!\,i}{k!\,i!}\,\frac{(\lambda+s)^{k-1}}{(\lambda+\mu+s)^{k}}\right.$$

$$+\frac{1}{\lambda+s}+\sum_{k=1}^{j}\frac{(i-k+1)\,(i+k-2)!\,k}{k!\,i!}\,\frac{(\lambda+s)^{k-1}}{(\lambda+\mu+s)^{k}}\}$$

$$p_{i,j}(s)=\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu+s}\right)^{i}\left(\frac{\mu}{\lambda+s}\right)^{j}$$

$$\{\frac{1}{\lambda+s}+\sum_{k=1}^{j}\frac{(i-k)\,(i+k-1)\,(i+k-2)!}{k!\,i!}\,\frac{(\lambda+s)^{k-1}}{(\lambda+\mu+s)^{k}}\}$$

$$p_{i,j}(s)=\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu+s}\right)^{i}\left(\frac{\mu}{\lambda+s}\right)^{j}\sum_{k=0}^{j}\frac{(i-k)(i+k-1)!}{k!\,i!}\,\frac{(\lambda+s)^{k-1}}{(\lambda+\mu+s)^{k}}\qquad i\geq 1,\ 0\leq j\leq i$$

sonucu bulunur. Bulunan bu eşitlik (19) ifadesi ile aynıdır ve böylelikle doğrudur denilebilir.

-(iv) adımı için (22) ifadesi ele alınsın. Bu ifadeden,

$$p_{i,i}(s)=\left(\frac{\mu}{\lambda+s}\right)p_{i,i-1}(s)$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitlikte (19) ifadesine uygun olarak $p_{i,i-1}(s)$ degeri yerine konulursa,

$$p_{i,i}(s)=\frac{\mu}{\lambda+s}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu+s}\right)^{i}\left(\frac{\mu}{\lambda+s}\right)^{i-1}\sum_{k=0}^{i-1}\frac{(i-k)\,(i+k-1)!}{k!\,i!}\,\frac{(\lambda+s)^{k-1}}{(\lambda+\mu+s)^{k}}$$

ve

$$p_{i,i}(s)=\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu+s}\right)^{i}\left(\frac{\mu}{\lambda+s}\right)^{i}\sum_{k=0}^{i}\frac{(i-k)\,(i+k-1)!}{k!\,i!}\,\frac{(\lambda+s)^{k-1}}{(\lambda+\mu+s)^{k}}$$

bulunur. Bulduğumuz bu sonuç (19) ifadesinden uygun olarak elde edilen $p_{i,i}(s)$ ile uyuşur.

Böylece dört adım sonucu olarak $p_{i,j}(s)$ nin genel biçimi olan (19) ifadesinin doğruluğu tümevarım yöntemiyle gösterilmiş olur.

$p_{i,j}(s)$ nin ters Laplace dönüşümü alınarak $p_{i,j}(t)$ bulunur. Bunu elde etmek amacıyla yapacağımız işlemlerin ilki olarak, $p_{i,j}(s)$ yi yeniden düzenlersek,

$$p_{i,j}(s)=\frac{\lambda^i \mu^i}{i!}\sum_{k=0}^{j}\frac{(i-k)\,(i+k-1)!}{k!}\frac{1}{(\lambda+s)^{j-k+1}(\lambda+\mu+s)^{i+k}} \tag{24}$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadenin her iki yanının ters Laplace dönüşümü convolution yöntemiyle,

$$p_{i,j}(t)=\frac{\lambda^i \mu^i}{i!}\sum_{k=0}^{j}\frac{(i-k)\,(i+k-1)!}{k!}$$

$$\frac{1}{(j-k)!\,(i+k-1)!}\int_0^t (t-u)^{j-k}e^{-\lambda(t-u)}u^{i+k-1}e^{-(\lambda+\mu)u}du$$

olarak bulunur[38]. Burada w=u/t dönüşümü yapılırsa,

$$p_{i,j}(t)=\frac{\lambda^i \mu^j e^{-\lambda t}t^{i+j}}{i!}\sum_{k=0}^{j}\frac{i-k}{k!\,(j-k)!}\int_0^1 (1-w)^{j-k}w^{i+k-1}e^{-\mu tw}dw \tag{25}$$

elde edilir. Burada $(1-w)^{j-k}$ iki terimlisinin açılımı yapılarak,

$$p_{i,j}(t)=\frac{\lambda^i \mu^j e^{-\lambda t}t^{i+j}}{i!}\sum_{k=0}^{j}\frac{i-k}{k!\,(j-k)!}\sum_{m=0}^{j-k}\frac{(-1)^m(j-k)!}{(j-k-m)!\,m!}\int_0^1 e^{-\mu tw}w^{m+i+k-1}dw$$

[38]Sheplay L. Ross, Differential Equations (Second Edition. New York: John Wiley and Sons, Inc.,1974),s.380.

ifadesi bulunur. Bu ifadede aşağıda örnek olarak verilen,

$$\int_0^1 e^{-ax}x^n dx = \frac{n!}{a^{n+1}}\left(1-e^{-a}\sum_{r=0}^{n}\frac{a^r}{r!}\right) \qquad a\neq 0$$

eşitliği söz konusu olduğundan sonuç olarak,

$$p_{i,j}(t) = (\lambda/\mu)^i \frac{(\mu t)^j e^{-\lambda t}}{i!} \sum_{k=0}^{j} \frac{i-k}{k!}$$

$$\sum_{m=0}^{j-k}\frac{(-1)^m (m+i+k-1)!}{m!\,(j-k-m)!\,(\mu t)^{m+k}}\left(1-e^{-\mu t}\sum_{r=0}^{m+i+k-1}\frac{(\mu t)^r}{r!}\right) \qquad i\geq 1, 0\leq j\leq i \quad (26)$$

bulunur.

3.2.3 Modelin Çözümünden Elde Edilen Sonucun İyileştirilmesi

Modelin çözümünden elde edilen ve (26) denklemiyle belirlenen sonucun, uygulamaya yönelik olan çalışmalarda bilgisayar desteği bile olsa güçlük çıkaracağı beklenebilir. Bu nedenle aşağıdaki iyileştirme yapılmıştır.

Modelin çözüm aşamalarından (25) denklemini ele alalım.

$$p_{i,j}(t) = \frac{\lambda^i \mu^j e^{-\lambda t} t^{i+j}}{i!}\sum_{k=0}^{j}\frac{i-k}{k!\,(j-k)!}\int_0^1 (1-w)^{j-k} w^{i+k-1} e^{-\mu t w}\, dw$$

Burada,

$$\sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} k w^{k-1} (1-w)^{j-k} = j \qquad j \geq 0 \tag{27}$$

eşitliği göz önünde bulundurulursa yukarıdaki ifade aşağıdaki biçimi alır[39].

$$p_{i,j}(t) = \frac{\lambda^i \mu^j e^{-\lambda t} t^{i+j}}{i!} \int_0^1 \frac{1}{j!} [i \, (\sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} w^k (1-w)^{j-k}) w^{i-1}$$

$$-(\sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} k w^{k-1} (1-w)^{j-k}) \, w^i \,] \, e^{-\mu t w} dw \tag{28}$$

Burada birinci toplamda $[w(1-w)]^j = 1$ olduğundan ve ikinci toplamda (27) eşitliği göz önünde bulundurulursa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$p_{i,j}(t) = \frac{(\lambda t)^i (\mu t)^j e^{-\lambda t}}{i!} \int_0^1 \frac{1}{j!} [i \, w^{i-1} - j \, w^i \,] \, e^{-\mu t w} dw$$

Burada,

$$\int_0^1 e^{-ax} x^n dx = \frac{n!}{a^{n+1}} e^{-a} \sum_{r=n+1}^{\infty} \frac{a^r}{r!} \qquad a \neq 0$$

integral formülünün kullanımıyla,

$$p_{i,j}(t) = \frac{(\lambda t)^i (\mu t)^j e^{-\lambda t}}{i! \, j!} [\frac{(\mu t - j) \, i!}{(\mu t)^{i+1}} \sum_{r=i}^{\infty} \frac{(\mu t)^r e^{-\mu t}}{r!} + \frac{j}{\mu t} e^{-\mu t}]$$

39Jonn R. Hubbart, Claude Denis Pegden ve Matthew Rosenshine, "The Departure Process For the M/M/1 Queue", J. Appl. Prob., C.23,S.1 (Mart 1986),s.250.

bulunur. Burada yine gerekli olan düzenleme yapılırsa,

$$p_{i,j}(t)=\frac{(\lambda t)^{i}(\mu t)^{j}e^{-(\lambda+\mu)t}}{i!\,j!}\left[(1-\frac{j}{\mu t})\frac{i!}{(\mu t)^{i}}\sum_{r=i}^{\infty}\frac{(\mu t)^{r}}{r!}+\frac{j}{\mu t}\right]$$

elde edilir. Sonuç olarak aynı ifade ,

$$p_{i,j}(t)=\frac{(\lambda t)^{i}(\mu t)^{j}e^{-(\lambda+\mu)t}}{i!\,j!}\left[(1-\frac{j}{\mu t})(\frac{i!}{(\mu t)^{i}})(e^{\mu t}-\sum_{r=0}^{i-1}\frac{(\mu t)^{r}}{r!})+\frac{j}{\mu t}\right] \qquad (29)$$

biçiminde yazılabilir. Bu ifade (26) ifadesi ile eşdeğerdir ve daha belirgin işlemleri kapsamaktadır. Bu nedenle çalışmamızın ilerleyen kesimlerinde ve gerekli olduğunda (26) ifadesi yerine (29) ifadesi tercih edilecektir.

3.2.4 Modelin Özel Sonuçları

(M/M/1):(FIFO/∞/∞) bekleme hattı sisteminden herhangi bir t anına kadar kesin ayrılışların sayısı bir olasılık fonksiyonuna sahiptir. $p_{i,j}(t)$ nin terimlerinden oluşan bu fonksiyon $p_{.j}(t)$ dir ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$p_{.j}(t)=\sum_{i=j}^{\infty}p_{i,j}(t) \qquad (30)$$

$p_{.j}(t)$ herhangi bir t anına kadar bekleme hattı sisteminden ayrılan kesin j müşterinin olasılığını verir.

Bu tanımdan hareketle herhangi bir t anına kadar bekleme hattı sisteminden, hiç olmazsa j müşterinin ayrılma olasılığı ise şu şekilde tanımlanabilir. T j ninci ayrılıştaki zaman olmak üzere,

$$p(T\leq t)=\sum_{k=j}^{\infty} p_{.k}(t) \qquad (31)$$

olur.

Sistem kullanımı başka bir deyişle, t anına kadar servis verenin dolu olduğu zaman yüzdesi $p_{i,j}(t)$ nin terimleri ile tanımlanabilir. Belli bir τ süresi boyunca bekleme hattı sistemi bazen boştur ve bu durumda olasılık,

$$A(t)=\sum_{j=0}^{\infty} p_{j,j}(\tau)$$

dir. Böylece bekleme hattı sistemi boş iken zaman yüzdesi veya sonuç olarak servis verenin aylaklığı,

$$I(t)=\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\sum_{j=0}^{\infty} p_{j,j}(\tau)\,d\tau \qquad (32)$$

biçiminde tanımlanabilir.

Bekleme hattı sistemi dolu iken zaman yüzdesi, başka bir deyişle servis verenin kullanımı ise,

$$U(t)=1-\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\sum_{j=0}^{\infty} p_{j,j}(\tau)\,d\tau \qquad (33)$$

olur.

3.3 Bir ve İki Boyutlu Bekleme Hattı Modellerinin İlişkisi

Bir boyutlu modelin sonucu olarak, herhangi bir t anında bekleme hattı sisteminde n müşteri bulunma olasılığı $p_n(t)$ olarak bulunmuştu. İki boyutlu modelin sonucu olarak ise, bekleme hattı sisteminde herhangi bir t anına kadar i gelişlerin sayısı ve j ayrılışların sayısı olmak üzere bu durumun olasılığı $p_{i,j}(t)$ olarak bulunmuştu.Bu iki sonuç göz önünde bulundurularak,

$$p_n(t)=\sum_{j=0}^{\infty} p_{j+n,j}(t) \tag{34}$$

gibi bir ilişkinin olması gerektiği ileri sürülebilir. Şimdi bu ilişkinin doğruluğu araştırılacaktır. (34) ifadesi yerine,

$$p_n(t)=\sum_{j=0}^{\infty} (\lambda/\mu)^{j+n} \frac{(\mu t)^j e^{-\lambda t}}{(j+n)!} \sum_{k=0}^{j} \frac{j+n-k}{k!}$$

$$\sum_{m=0}^{j-k} \frac{(-1)^m (m+j+n+k-1)!}{m!\,(j-k-m)!\,(\mu t)^{m+k}} (1-e^{-\mu t} \sum_{r=0}^{m+j+n+k-1} \frac{(\mu t)^r}{r!})$$

ve

$$p_n(t)=(\lambda/\mu)^n \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^j e^{-\lambda t}}{(j+n)!} \sum_{k=0}^{j} \frac{j+n+k}{k!}$$

$$\sum_{m=0}^{j-k} \frac{(-1)^m (m+j+n+k-1)!}{m!\,(j-k-m)!\,(\mu t)^{m+k}} (1-e^{-\mu t} \sum_{r=0}^{m+j+n+k-1} \frac{(\mu t)^r}{r!})$$

yazılabilir. Buradan,

$$p_n(t)=(\lambda/\mu)^n \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^j e^{-\lambda t}}{(j+n)!} \sum_{k=0}^{j} \frac{j+n-k}{k!} [\frac{(j+n+k-1)!}{0!\,(j-k)!\,(\mu t)^k} (1-e^{-\mu t} \sum_{r=0}^{j+n+k-1} \frac{(\mu t)^r}{r!})$$

$$-\frac{(j+n+k-1)!}{1!\,(j-k-1)!\,(\mu t)^{1+k}} (1-e^{-\mu t} \sum_{r=0}^{j+n+k} \frac{(\mu t)^r}{r!} + \ldots\ldots$$

$$+(-1)^{j-k} \frac{(2j+n-1)!}{(j-k)!\,0!\,(\mu t)^j} (1-e^{-\mu t} \sum_{r=0}^{2j+n-1} \frac{(\mu t)^r}{r!})\,]$$

ve

$$p_n(t)=(\lambda/\mu)^n \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^j e^{-\lambda t}}{(j+n)!} [\frac{(j+n)\,(j+n-1)!}{0!\,0!\,j!} (1-e^{-\mu t} \sum_{r=0}^{j+n-1} \frac{(\mu t)^r}{r!})$$

$$-\frac{(j+n)\,(j+n)!}{0!\,1!\,(j-1)!\,(\mu t)} (1-e^{-\mu t} \sum_{r=0}^{j+n} \frac{(\mu t)^r}{r!})+\ldots\ldots$$

$$+\frac{(j+n-1)\,(j+n)!}{1!\,0!\,(j-1)!\,(\mu t)} (1-e^{-\mu t} \sum_{r=0}^{j+n} \frac{(\mu t)^r}{r!})-\ldots\ldots$$

$$+\frac{(2j+n-1)!}{0!\,0!\,(\mu t)^j} (1-e^{-\mu t} \sum_{r=0}^{2j+n-1} \frac{(\mu t)^r}{r!})\,]$$

yazılabilir. Bulunan bu ifadede gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$p_n(t)=(\lambda/\mu)^n [\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^j e^{-\lambda t}}{j!} - \frac{\lambda}{\mu} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{j-1} e^{-\lambda t}}{(j-1)!}$$

$$+\ldots\ldots+\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{j}e^{-\lambda t}}{(j+n)!}\frac{(2j+n-1)!}{(\mu t)^{j}}(1-e^{-\mu t}\sum_{r=0}^{2j+n-1}\frac{(\mu t)^{r}}{r!})]$$

olur. j≥0 olduğundan bu ifade,

$$p_n(t)=(\lambda/\mu)^{n}[\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{j}e^{-\lambda t}}{j!}-\frac{\lambda}{\mu}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{j}e^{-\lambda t}}{j!}$$

$$+\ldots\ldots+\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{j}e^{-\lambda t}}{(j+n)!}\frac{(2j+n-1)!}{(\mu t)^{j}}(1-e^{-\mu t}\sum_{r=0}^{2j+n-1}\frac{(\mu t)^{r}}{r!})]$$

biçimini alır. Burada ilk iki terimdeki sonsuz toplamlar Poisson dağılım fonksiyonunun tanımı gereği 1 e eşittir. Diğer terimler ise kararlı durum sonuçları göz önünde bulundurulduğundan, t--->∞ için sıfıra eşittir. Böylece,

$$p_n(t)=(1-\lambda/\mu)(\lambda/\mu)^n$$

sonucu bulunmuş olur. Bu ise daha önce bulduğumuz bir boyutlu bekleme hattı modelinin sonucu ile aynıdır. O halde (34) ifadesi ile belirlenen ilişki doğrudur.

Sonsuz geliş kaynaklı ve tek kanallı bekleme hattı modelleri olarak ele alınan bir ve iki boyutlu bekleme hattı modelleri incelenmiş, bunlar arasındaki ilişki doğrulanmıştır. Takip eden bölümde iki boyutlu bekleme hattı modelinin uygulamasına yer verilecektir.

4. İKİ BOYUTLU BEKLEME HATTI MODELİNİN UYGULAMASI

Günlük yaşantıda çok sık karşılaşılan olay türü olan bekleme hatlarının ortaya koyduğu sorunların yapısı üzerine geliştirilen kuramların uygulama alanı giderek yaygınlaşmaktadır. Bu gibi yerlerde hizmet almak isteyenlerin çokluğuna karşılık hizmet verenlerin sayısının sınırlı bulunması, ayrıca gelişlerin ve hizmetlerin tek ya da çok kanaldan olması, bekleme ve servis süresi üzerinde etkili olmaktadır.

Belediye otobüs duraklarında ortalama bekleme süresinin hesaplanmasında genellikle yolcu geliş sürecinin, vasıta hizmet çizelgesinden begımsız bir Poisson dağılımı gösterdiği varsayılmaktadır. Gerçekte ise durum pek böyle değildir. Zira herhangi bir şehirde Belediye Otobüs İşletmesi tarafından belirlenmiş bir hizmet çizelgesi mevcut ise yolcu bu çizelgeye göre geliş zamanını seçecektir.

Bu bağlılığın ortalama bekleme süresine etkisini göz önünde tutan bazı modeller geliştirilebilir ve yapılan varsayımlar gerekçeleriyle incelenebilir. Sonuç olarak da ortalama bekleme süresi formülü üzerinde görüşler açıklanabilir.

Bu durum dikkate alınarak çeşitli bekleme hattı sistemleri üzerinde bazı incelemeler yapılmakta, toplanan veriler değerlendirilerek bekleme ve servis süreleri araştırılmaktadır.

Ayrıca bu verilere dayanarak incelenen gelişlerin, gelecek dönemlerde ne kadar olacağı konusunda da tahminler yapılıp, hizmet verenler açısından buna göre durum değerlemesine gidilmektedir. Bu arada hizmet verenlerin çalışma koşulları ve araştırma yapılan kuruluşun sorunları da değerlendirilebilmektedir.

Bu araştırmada yukarıda açıklanan sorunun, üzerinde çalışılan modellerin karmaşıklığını arttırmaması ve bozucu bir etken olmaması için, gerçek hayattan alınıp kuramsal olarak incelenecek bekleme hattı sisteminin seçiminde özen gösterilmiştir.

4.1 Bir Sağlık Merkezinin Kadın Hastalıkları ve Doğum Anabilim Dalı Servisinin Bekleme Hattı Sistemi Olarak Tanımı

Bu araştırmada T. C. Anadolu Üniversitesi Eğitim ve Uygulama Hastanesi Kadın Hastalıkları ve Doğum Anabilim Dalı Servisi bir bekleme hattı sistemi olarak ele alınmıştır. Bu amaçla;

-Doğum yapmak için gelen hastalar müşteriler,

-Doğum için gelen hastaların birikimi durumunda oluşan yığılma bekleme hattı,

-Servise alınan bir hastaya uygulanan tüm işlemler servis süreci,

-Servisi tamamlanan her hasta, bir servis olgusu,

olarak kabul edilmiştir.

İzleyen kesimlerde bu sağlık merkezinde ele alınan servise bir bekleme hattı sistemi yaklaşımı yapılarak, iki boyutlu bekleme hattı modeli için uygulama yapılacaktır.

4.2 Bekleme Hattı Sisteminde (Kadın Hastalıkları ve Doğum Anabilim Dalı Servisinde) İki Boyutlu Bekleme Hattı Modelinin Uygulaması

Günümüzde toplumsal yaşantının bir gereği olarak hizmet görmek amacıyla çeşitli kurumlara başvurulmaktadır. Tedavi görmek amacı ile sağlık kurumlarına başvuran hasta sayıları ve bunların servis süreleri gibi olayların bekleme hattı kuramı adı altında incelendiği bilinmektedir.

Bu durum göz önünde tutularak sonsuz geliş kaynaklı ve tek kanallı iki boyutlu bekleme hattı modelinin uygulaması, bir bekleme hattı sistemi olarak ele alınan T. C. Anadolu Üniversitesi Eğitim ve Uygulama Hastanesi Kadın Hastalıkları ve Doğum Anabilim Dalı Servisinde yapılacaktır.

Doğum yapmak amacı ile gelen hastalar ilgili serviste önce muayene tetkik ve tedavi odasına alınmakta, daha sonra sancı ve doğum eylemlerinin olduğu eylem odasına gönderilmektedir. Uygulamada sancı ve doğum eylemlerinin olduğu eylem odasında gerçekleştirilen işlemler için harcanan zaman servis süresi olarak ele alınmıştır.

4.2.1 Veri ve Yöntem

Bu uygulama için ilgili sağlık merkezinin Kadın Hastalıkları ve Doğum Anabilim Dalı Servisine doğum yapmak amacı ile gelen hastaların belirli iki tarih arasında, muayene tetkik ve tedavi odasına geliş saatleri,sancı ve doğum eylemlerinin olduğu eylem odasına giriş ve çıkış saatleri belirlenmiştir. Bu amaçla toplanan veriler EK-1 de verilmiştir.

Belirli bir süre ile belirlenen bu veriler çalışmanın veri tabanını oluşturmuştur. Gözlemler sonucu elde edilen verilerden belirli aralıklarla muayene tetkik ve tedavi odasına gelişler ve eylem odasının kullanım süreleri esas alınarak uygulama için belirlenen yöntem kullanılmıştır.

4.2.2 Dağılımların Belirlenmesi

Sonsuz geliş kaynaklı ve tek kanallı bekleme hattı sistemleri için geliştirilen bir ve iki boyutlu modellerin varsayımları içinde gelişlerin Poisson dağılımı, servis sürelerinin ise üstel dağılım olması bulunmaktaydı.

Bu durumun veri derlediğimiz bekleme hattı sisteminde geçerli olup olmadığının bilinmesi gerekir Bu amaçla alt kesimlerde gelişlerin ve servis sürelerinin dağılımları araştırılacaktır.

4.2.2.1 Gelişlerin Dağılımı

Gelişlerin hangi dağılıma uygun olduğunun araştırılması için EK-3 de verilen bilgisayar programı kullanılacaktır. Bu program yapılmadan önce gelişlerin hangi dağılıma uygun olup olmadığı konusuda tasarımlar yapılmış, sonuç olarak ilgili dağılım fonksiyonunun Poisson dağılımı olabileceği konusunda fikir sahibi olunmuştur.

Bu programın Poisson dağılımı ile ilgili aşamaları şöylece özetlenebilir[40].

-Kabul edilen zaman aralığında gelişlerin sayıları belirlenir.

-Kabul edilen zaman aralığnda gelişlerin sayıları frekans serisi haline getirilir.

-Elde edilen frekans serisi için momentler hesaplanır.

-Momentler yardımıyla ilgili dağılım fonksiyonuna uygun kuramsal modelin belirlenmesi için kullanılacak ölçütler bulunur.

-Bu ölçütlere göre gelişlerin gerçek frekanslarına karşılık gelen kuramsal frekanslar elde edilir.

-Uygunluk sınaması yapılır.

Seçilen bekleme hattı sistemine gün olarak kabul edilen zaman

---

[40]Özer Serper, Uygulamalı İstatistik (İstanbul:Filiz Kitabevi,1986),s.15., Richard L. Scheaffer ve James T. McClave, Probability and Statistics For Engineers (Second Edition. Boston: PWS-KENT Publishing Company,1986),s.126.

aralığında gelişlerin sayıları Tablo:3 de gösterilmiştir.

Tablo:3

GUNLERDE GELISLERIN SAYILARI

GUNLER	GUNDE GELISLERIN SAYISI	GUNLER	GUNDE GELISLERIN SAYISI
01/11/1986	2	21/11/1986	5
02/11/1986	1	22/11/1986	3
03/11/1986	0	23/11/1986	0
04/11/1986	1	24/11/1986	4
05/11/1986	2	25/11/1986	1
06/11/1986	3	26/11/1986	2
07/11/1986	3	27/11/1986	2
08/11/1986	0	28/11/1986	0
09/11/1986	2	29/11/1986	1
10/11/1986	2	30/11/1986	2
11/11/1986	1	01/12/1986	2
12/11/1986	1	02/12/1986	2
13/11/1986	4	03/12/1986	0
14/11/1986	4	04/12/1986	2
15/11/1986	0	05/12/1986	2
16/11/1986	1	06/12/1986	1
17/11/1986	1	07/12/1986	1
18/11/1986	1	08/12/1986	0
19/11/1986	1	09/12/1986	5
20/11/1986	0		

Bu veri dizisi frekans serisi haline dönüştürülürse Tablo:4 deki frekans dağılımı elde edilir.

Tablo:4

GELISLERIN FREKANS DAGILIMI

GUNDE GELISLER	GOZLENEN FREKANSLAR
0	8
1	12
2	11
3	3
4	3
5	2

Gelişlerin frekans dağılımından yararlanarak gerçek momentlerin hesaplanmasına ilişkin işlemler Tablo:5 de gösterilmiştir. Bu momentler bize standart ve kuramsal momentlerin hesaplanarak karşılaştırılmasında yardımcı olacaktır.

Tablo:5

GELISLERIN FREKANS DAGILIMININ GERCEK MOMENTLERI

X	f	Xf	X^2*f	X^3*f	X^4*f
0	8	0	0	0	0
1	12	12	12	12	12
2	11	22	44	88	176
3	3	9	27	81	243
4	3	12	48	192	768
5	2	10	50	250	1250
TOPLAM:	39	65	181	623	2449

Gerçek momentlerden yararlanarak gelişlerin sıfır civarındaki momentleri Tablo:6 da görüldüğü gibidir.

Tablo:6

GELISLERIN SIFIR CIVARINDAKI MOMENTLERI

M1= 1.66666667
M2= 4.64102564
M3= 15.974359
M4= 62.7948718

Sıfır ve ortalama civarındaki momentlerin arasındaki ilişkiden yararlanarak ortalama civarındaki momentler Tablo:7 de gösterilmiştir.

Tablo:7

GELISLERIN ORTALAMA CIVARINDAKI MOMENTLERI

V1= 0
V2= 1.86324787
V3= 2.02849003
V4= 10.5014245

Gelişlerin standart momentleri, V_i ler ortalama civarındaki momentler olmak üzere,

$$\mu_2 = V_2$$

$$\propto_3 = \frac{V_3}{V_2^{3/2}}$$

$$\propto_4 = \frac{V_4}{V_2^{2}}$$

fomülleri ile belirlidir. Bu değerler Tablo:8 de verilmiştir.

Tablo:8

GELISLERIN STANDART MOMENTLERI

MU2= 1.86324787
ALFA3= 0.797566544
ALFA4= 3.02487165

Gelişlerin kuramsal momentleri ise gelişlerin sıfır civarındaki momentleri yardımıyla bulunur. Poisson dağılımı için kuramsal momentleri veren formüller M_1 sıfır civarındaki birinci moment olmak üzere şöyledir.

$$\mu_2 = M_1$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{M_1}}$$

$$\alpha_4 = 3 + \frac{1}{M_1}$$

Bu formüllerle tanımlanan gelişlerin kuramsal momentlerinin aldığı değerler Tablo:9 da gösterilmiştir.

Tablo:9

GELISLERIN KURAMSAL MOMENTLERI

MU2= 1.66666667
ALFA3= 0.774596669
ALFA4= 3.6

Şimdiye kadar yapılan işlemler sonunda standart ve kuramsal momentlerin birbirine oldukça yakın değerler aldıkları Tablo:10 yardımıyla söylenebilir.

Tablo:10

GELISLERIN STANDART VE KURAMSAL MOMENTLERININ KARSILASTIRILMASI

MOMENT	STANDART	KURAMSAL
MU2	1.86324787	1.66666667
ALFA3	0.797566544	0.774596669
ALFA4	3.02487165	3.6

Ayrıca Poisson dağılımında aritmetik ortalama ile varyansın birbirine eşit olduğu bilinmektedir. Gelişlerin standart ve kuramsal momentlerinden μ_2 kuramsal momenti aritmetik ortalama ve μ_2 standart momenti ise dağılımın varyansıdır. Bu değerler birbirine oldukça yakın görülmektedir. Bu nedenle ilgili dağılım fonksiyonunun Poisson olabileceği söylenebilir.Bu durum karşısında Poisson dağılım fonksiyonuna karşılık gelen kuramsal moment belirlenebilir. Kuramsal model yardımıyla ise kuramsal frekanslar bulunur. Gerçek ve kuramsal frekanslar Tablo:11 de gösterilmiştir.

Tablo:11

GELISLERIN GERCEK VE KURAMSAL FREKANSLARI

X	fG	fK
0	8	7.3661485
1	12	12.2769142
2	11	10.2307618
3	3	5.6837566
4	3	2.3682319
5	2	0.7894106
TOPLAM:	39	38.7152236

Bilindiği gibi uygun görülerek seçilen bir dağılım fonksiyonuna göre hesaplanmış olan kuramsal frekansların gerçek frekanslara uygunluğu, Ki-kare yöntemi ile sınanabilir. fG gerçek frekansları, fK kuramsal frekansları göstermek üzere,

$$\chi^2=\sum\frac{fG^2}{fK}-N$$

dir Buradan,

```
GELISLER ICIN HESAPLANAN KI-KARE= 0.483475313
```

olarak bulunmuştur.

Ki-kare uygunluk testi kullanılırken herbir sınıf veya aralık için kuramsal frekans 5 veya daha fazla olmalıdır.Bu şart gerçeklenmez ise komşu sınıflar gruplanmalıdır[41]. Bu durum karşısında serbestlik derecesi k=sınıf sayısı, m=kuramsal frekansı hesaplamak için gerekli olan örneğin istatistikleri olmak üzere, υ=k-m-1 olur.

Kabul edilen bu durumlara göre 0.05 anlam seviyesi ve 2 serbestlik derecesine göre Ki-kare tablosundan ilgili değer,

$$\chi^2=5.99$$

olarak bulunmuştur.

$$\chi^2_{hes.}<\chi^2_{tab.}$$

olduğundan, gözlem verileri ve Poisson dağılımının aritmetik ortalaması olan λ değeri arasında anlamlı bir fark yoktur biçiminde tanımlanabilecek olan H_0 hipotezi reddedilemez ve hipotez doğrudur. O halde gözlem

[41]Osman Halaç, İşletmelerde Simülasyon Teknikleri (İstanbul:İstanbul Üni. İşletme Fak. Yayını,1982),s.12.

değerleri Poisson dağılımı göstermektedir.

Bu durumda,

ORTALAMA GELIS DEBISI= 1.66666667 Hasta/Gun

olur.

4.2.2.2 Servis Sürelerinin Dağılımı

Servis sürelerinin hangi dağılıma uygun olduğunun araştırılması için EK-3 de verilen bilgisayar programı kullanılacaktır. Yapılan hesaplamalar sonucunda servis sürelerinin üstel dağılıma uygun olduğu belirlenmiştir.

Adı geçen programın üstel dağılım ile ilgili aşamaları şöylece özetlenebilir.

-Servis süreleri sınıflanır.

-Elde edilen gruplandırılmış seri için momentler hesaplanır ve ortalama civarındaki momentler için Sheppard düzeltmesi yapılır[42].

-Momentler yardımıyla ilgili dağılım fonksiyonuna uygun kuramsal modelin belirlenmesi için kullanılacak ölçütler bulunur.

-Bu ölçütlere göre servis sürelerinin gerçek frekanslarına karşılık gelen kuramsal frekanslar bulunur ve uygunluk sınaması yapılır.

Seçilen bekleme hattı sisteminde servis süresi olarak kabul edilen eylem odasını kullanım süreleri EK-2 de verilmiştir.

---

[42]Scheaffer ve diğeri,s.157., Kenan Gürtan, İstatistik ve Araştırma Metodları (İstanbul: İstanbul Üni. İşletme Fak. Yayını,1977),s.322.

EK-2 de verilen veri dizisini gruplandırılmış seri biçimine getirebilmek için,

s :Sınıf aralığı

X_{max} :Gözlenen en büyük değer,

X_{min} :Gözlenen en küçük değer,

N :Gözlenen birimlerin sayısı,

olmak üzere,

$$s=\frac{X_{max}-X_{min}}{1+(3.322)\text{LogN}}$$

formülüyle sınıf aralığı belirlenebilir[43]. Hesaplanan sınıf aralığı yardımıyla gruplanan veri dizisinden Tablo:12 deki frekans dağılımı elde edilir.

Tablo:12

SERVIS SURELERININ FREKANS DAGILIMI

SINIFLAR	FREKANSLAR
10.00000000 -- 128.19155800	25
128.19155800 -- 246.38311600	16
246.38311600 -- 364.57467400	10
364.57467400 -- 482.76623200	7
482.76623200 -- 600.95779000	3
600.95779000 -- 719.14934800	2
719.14934800 -- 837.34090700	1
837.34090700 -- 955.53246500	1

[43]Gürtan,s.86.

Servis sürelerinin frekans dağılımından yararlanarak gerçek momentlerin hesaplanmasına ilişkin işlemler Tablo:13 de gösterilmiştir.

Tablo:13

SERVIS SURELERININ FREKANS DAGILIMININ GERCEK MOMENTLERI

SINIFLAR	X	f	X*f	X^2*f	X^3*f	X^4*f
10.000000 -- 128.191558	69.095779	25	1727.39448	119355.67	8246972.8	569831010.0
128.191558 -- 246.383116	187.287337	16	2996.59739	561224.75	105110288.0	19685826000.0
246.383116 -- 364.574674	305.478895	10	3054.78895	933173.55	285064826.0	87081288200.0
364.574674 -- 482.766232	423.670453	7	2965.69317	1256476.57	532331998.0	225533339000.0
482.766232 -- 600.957790	541.862011	3	1625.58603	880843.32	477295532.0	258628317000.0
600.957790 -- 719.149348	660.053569	2	1320.10714	871341.43	575132020.0	379617943000.0
719.149348 -- 837.340907	778.245128	1	778.24513	605665.48	471356207.0	366830672000.0
837.340907 -- 955.532465	896.436686	1	896.43669	803598.73	720375383.0	645770921000.0
TOPLAM:		65	15364.84900	6031679.50	3174913230.0	1983718140000.0

Gerçek momentlerden yararlanarak gelişlerin sıfır civarındaki momentleri ise Tablo:14 deki gibi bulunur.

Tablo:14

SERVIS SURELERININ SIFIR CIVARINDAKI MOMENTLERI

M1= 236.382292
M2= 92795.0692
M3= 48844818.9
M4= 3.05187E+10

Sıfır ve ortalama civarındaki momentlerin arasındaki ilişkiden yararlanarak ve Sheppard düzeltmesi yapılarak ortalama civarındaki momentler Tablo:15 deki değerlere sahip olur.

Tablo:15

SERVIS SURELERININ ORTALAMA CIVARINDAKI MOMENTLERI

V1= 0
V2= 35754.3775
V3= 9455957.35
V4= 5.82622E+09

Servis sürelerinin standart momentleri, V_i ler ortalama civarındaki momentler olmak üzere,

$$\mu_2 = V_2$$

$$\alpha_3 = \frac{V_3}{V_2^{3/2}}$$

$$\alpha_4 = \frac{V_4}{V_2^{2}}$$

formülleri ile belirlidir. Bu değerler servis sürelerinin ortalama civarındaki momentleri yardımıyla Tablo:16 da gösterilmiştir.

Tablo:16

SERVIS SURELERININ STANDART MOMENTLERI

MU2= 189.08828
ALFA3= 1.39865845
ALFA4= 4.55751953

Servis sürelerinin kuramsal momentleri ise servis sürelerinin sıfır civarındaki momentleri yardımıyla bulunur. M_1 sıfır civarındaki birinci moment olmak üzere üstel dağılım için kuramsal momentler şöyledir.

$$\mu_2=M_1$$

$$\alpha_3=2$$

$$\alpha_4=9$$

Bunların sonucu olarak servis sürelerinin kuramsal momentleri Tablo:17 deki gibidir.

Tablo:17

SERVIS SURELERININ KURAMSAL MOMENTLERI

MU2= 236.382292
ALFA3= 2
ALFA4= 9

Standart ve kuramsal momentlerin karşılaştırılması Tablo:18 de olduğu gibi göz önünde bulundurulabilir.

Tablo:18

SERVIS SURELERININ STANDART VE KURAMSAL MOMENTLERININ KARSILASTIRILMASI

MOMENT	STANDART	KURAMSAL
MU2	189.08828	236.382292
ALFA3	1.39865845	2
ALFA4	4.55751953	9

Bu tabloda üstel dağılım için aritmetik ortalama standart sapmaya eşit olması gerektiği halde, böyle bir durum görülmemektedir. Ancak üstel dağılım için aritmetik ortalamanın standart sapmaya eşit olduğu durum anakütle için söylenebilir. Başka bir deyişle örnek büyüklüğü arttıkça bu değerlerin birbirine yakın olacağı varsayılabilir. α_3 ve α_4 ün standart ve kuramsal değerleri için de aynı durum söz konusudur. Bu nedenle servis sürelerinin standart ve kuramsal momentlerinin karşılaştırılması bir fikir vermemektedir. Buna rağmen burada servis sürelerinin üstel dağılım gösterebileceği kabul edilip, Ki-kare uygunluk testinden sonra gerçek karar verilecektir.

Bu durum karşısında üstel dağılım fonksiyonuna karşılık gelen kuramsal model belirlenebilir. Kuramsal model yardımıyla ise kuramsal frekanslar bulunur. Gerçek ve kuramsal frekanslar Tablo:19 da gösterilmiştir.

Tablo:19

SERVIS SURELERININ GERCEK VE KURAMSAL FREKANSLARI

SINIFLAR	fG	fK
10.000000 -- 128.191558	25	24.51618410
128.191558 -- 246.383116	16	14.86979140
246.383116 -- 364.574674	10	9.01896866
364.574674 -- 482.766232	7	5.47027147
482.766232 -- 600.957790	3	3.31788158
600.957790 -- 719.149348	2	2.01239340
719.149348 -- 837.340907	1	1.22057617
837.340907 -- 955.532465	1	0.74031558
TOPLAM:	65	61.16638230

Bilindiği gibi uygun görülerek seçilen bir dağılım fonksiyonuna göre hesaplanmış olan kuramsal frekansların gerçek frekanslara uygunluğu Ki-kare yöntemi ile sınanabilir. fG gerçek frekansları, fK kuramsal frekansları göstermek üzere,

$$\chi^2 = \sum \frac{fG^2}{fK} - N$$

dir. Buradan,

SERVIS SURELERI ICIN HESAPLANAN KI-KARE= 4.15598896

olarak bulunmuştur.

Ki-kare uygunluk testi kullanılırken herbir sınıf veya aralık için kuramsal frekansın 5 veya daha fazla olacağı, bu şart gerçeklenmez ise komşu sınıfların gruplanacağı bilinmektedir. Bu durum karşısında serbestlik derecesi 2 olur.0.05 anlam seviyesi ve 2 serbestlik derecesine göre Ki-kare tablosundan ilgili değer,

$$\chi^2 = 5.99$$

olarak bulunmuştur.

$$\chi^2_{hes.} < \chi^2_{tab.}$$

olduğundan, gözlem verileri ve üstel dağılımın aritmetik ortalaması olan $1/\mu$ değeri arasında anlamlı bir fark yoktur biçiminde tanımlanabilecek H_0 hipotezi reddedilemez ve hipotez doğrudur. O halde gözlem değerleri üstel dağılım göstermektedir.

Bu durumda,

ORTALAMA SERVIS DEBISI= 4.23044E-03 Hasta/Dak = 6.09182688 Hasta/Gun

olur.

4.2.3 Bir ve İki Boyutlu Bekleme Hattı Modellerinin İlişkisinin Sayısal Olarak Araştırılması

Üçüncü bölümde doğruluğu gösterilen bir ve iki boyutlu bekleme hattı modelleri arasındaki ilişkinin sayısal olarak gösterilebilmesi için EK-3 ve EK-4 de verilen programların çıktılarından yararlanılacaktır. Bu amaçla bir boyutlu bekleme hattı modelinin sonucu olarak $1 \leq n \leq 10$ olmak üzere bekleme hattı sisteminde herhangi bir t anında n müşteri bulunma olasılıkları Tablo:20 de gösterilmiştir.

Tablo:20

BEKLEME HATTI SISTEMINDE N MUSTERI BULUNMA OLASILIKLARI

MUSTERI SAYISI=N	N MUSTERI BULUNMA OLASILIGI
1	0.1987388
2	0.0543731
3	0.0148760
4	0.0040699
5	0.0011135
6	0.0003046
7	0.0000833
8	0.0000228
9	0.0000062
10	0.0000017

İki boyutlu bekleme hattı modelinin sonucundan da yararlanarak herhangi bir t anında bekleme hattı sisteminde n müşteri bulunma olasılığı hesaplanabiliyordu. Bu durumun gösterilebilmesi için bazı matematiksel işlemler yapılmıştı. Ayrıca bu işlemler yapılırken kararlı durum sonucunu aradığımızdan dolayı t nin kuramsal olarak sonsuza gitmesi göz önünde tutulmuştu.Yukarıda açıklanan kararlı durum sonucunun doğruluğu EK-4 de verilen bilgisayar programının çıktısı olarak Tablo-21 de gösterilmiştir.

Tablo:21

```
FILE: ERDIN    BASLOG   A   T.C.ANADOLU UNIVERSITESI B.A.U.M.-ESKISEHIR

LOGGING TO 'ERDIN' LOG IS ON.
IBM BASIC/VM VERSION 1 RELEASE 2.0  1989/08/24  13:27
 *
RUN
```

	T=1	T=3	T=4	T=5	T=6	T=7	T=25
N= 1	0.1977105	0.1987356	0.1987386	0.1987388	0.1987388	0.1987388	0.1987388
N= 2	0.0515088	0.0543335	0.0543666	0.0543719	0.0543728	0.0543730	0.0543731
N= 3	0.0127519	0.0148386	0.0148696	0.0148748	0.0148757	0.0148759	0.0148760
N= 4	0.0029556	0.0040444	0.0040654	0.0040691	0.0040698	0.0040699	0.0040699
N= 5	0.0006351	0.0010986	0.0011107	0.0011130	0.0011134	0.0011135	0.0011135
N= 6	0.0001259	0.0002969	0.0003031	0.0003043	0.0003046	0.0003046	0.0003046
N= 7	0.0000230	0.0000796	0.0000826	0.0000832	0.0000833	0.0000833	0.0000833
N= 8	0.0000039	0.0000211	0.0000224	0.0000227	0.0000228	0.0000228	0.0000228
N= 9	0.0000006	0.0000055	0.0000061	0.0000062	0.0000062	0.0000062	0.0000062
N=10	0.0000001	0.0000014	0.0000016	0.0000017	0.0000017	0.0000017	0.0000017

```
END AT LINE 580.
 *
QUiT
```

Tablo:21 e göre zaman yeterince büyük tutulduğu takdirde herhangi bir t anında bekleme hattı sisteminde n hasta bulunma olasılıkları kararlı durum sonucu olmakta ve t nin her değeri için aynı değeri almaktadır.

Böylelikle t=25 sütününda yer alan alan, herhangi bir anda bekleme hattı sisteminde $1 \leq n \leq 10$ hasta bulunma olasılıkları, bir boyutlu bekleme hattı modelinin, bekleme hattı sisteminde $1 \leq n \leq 10$ hasta bulunma olasılıkları için hesaplanan değerleriyle uyuşmaktadır. Bu durum karşısında bir ve iki boyutlu bekleme hattı modellerinin ilişkisi sayısal olarak gösterilmiş olmaktadır.

4.2.4 İki Boyutlu Bekleme Hattı Modelinin Sonucunun Sayısal Olarak Araştırılması

Bekleme hattı sisteminde herhangi bir t anına kadar i gelişlerin, j ayrılışların sayısı olmak üzere,bu durumun olasılığını veren sonsuz geliş kaynaklı ve tek kanallı bekleme hattı modelinin sonucunun ssayısal olarak araştırılması bu kesimde yapılacaktır. Bu amaçla EK-5 de verilen bilgisayar programı kullanılacaktır.

Bu programın çıktısına göre elde edilen olasılıklar geçici durum olasılıklarıdır. t değiştiğinde tanımlanan $p_{i,j}(t)$ olasılıkları Tablo:22 de gösterilmiştir.

Bulunan bu $p_{i,j}(t)$ geçici durum olasılıkları sistemin t anına kadar işleyişine ilişkin somut bilgiler verir.

4.3 Uygulama Sonuçlarının Değerlendirilmesi

Bir bekleme hattı sistemi hakkında yöneticilerin karar vermesine yardımcı olan öncelikli altı sonucun oldugu bilinmektedir. Bu sonuçlar EK-3 de verilen bilgisayar programı yardımıyla bulunacaktır.

Tablo:22

T= 1

	J=0	J=1	J=2	J=3	J=4	J=5	J=6	J=7	J=8	J=9	J=10
I= 1	0.05156	0.26323									
I= 2	0.01391	0.07143	0.17699								
I= 3	0.00364	0.01888	0.04742	0.07579							
I= 4	0.00091	0.00475	0.01214	0.01989	0.02304						
I= 5	0.00021	0.00112	0.00290	0.00487	0.00587	0.00526					
I= 6	0.00005	0.00024	0.00064	0.00110	0.00137	0.00129	0.00094				
I= 7	0.00001	0.00005	0.00013	0.00023	0.00029	0.00028	0.00022	0.00013			
I= 8	0.00000	0.00001	0.00002	0.00004	0.00006	0.00006	0.00005	0.00003	0.00002		
I= 9	0.00000	0.00000	0.00000	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00000	0.00000	
I=10	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

T= 3

	J=0	J=1	J=2	J=3	J=4	J=5	J=6	J=7	J=8	J=9	J=10
I= 1	0.00184	0.03185									
I= 2	0.00050	0.00871	0.07501								
I= 3	0.00014	0.00238	0.02052	0.11733							
I= 4	0.00004	0.00065	0.00561	0.03210	0.13706						
I= 5	0.00001	0.00018	0.00154	0.00878	0.03750	0.12746					
I= 6	0.00000	0.00005	0.00042	0.00240	0.01026	0.03487	0.09822				
I= 7	0.00000	0.00001	0.00011	0.00066	0.00281	0.00954	0.02687	0.06445			
I= 8	0.00000	0.00000	0.00003	0.00018	0.00077	0.00261	0.00735	0.01763	0.03672		
I= 9	0.00000	0.00000	0.00001	0.00005	0.00021	0.00071	0.00201	0.00482	0.01004	0.01843	
I=10	0.00000	0.00000	0.00000	0.00001	0.00006	0.00019	0.00055	0.00131	0.00274	0.00503	0.00823

T= 5

	J=0	J=1	J=2	J=3	J=4	J=5	J=6	J=7	J=8	J=9	J=10
I= 1	0.00007	0.00194									
I= 2	0.00002	0.00053	0.00780								
I= 3	0.00000	0.00015	0.00213	0.02090							
I= 4	0.00000	0.00004	0.00058	0.00572	0.04196						
I= 5	0.00000	0.00001	0.00016	0.00156	0.01148	0.06728					
I= 6	0.00000	0.00000	0.00004	0.00043	0.00314	0.01841	0.08978				
I= 7	0.00000	0.00000	0.00001	0.00012	0.00086	0.00504	0.02456	0.10251			
I= 8	0.00000	0.00000	0.00000	0.00003	0.00024	0.00138	0.00672	0.02805	0.10223		
I= 9	0.00000	0.00000	0.00000	0.00001	0.00006	0.00038	0.00184	0.00767	0.02797	0.09044	
I=10	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00002	0.00010	0.00050	0.00210	0.00765	0.02474	0.07186

Tablo:22 (devam ediyor)

T= 7

	J=0	J=1	J=2	J=3	J=4	J=5	J=6	J=7	J=8	J=9	J=10
I= 1	0.00000	0.00010									
I= 2	0.00000	0.00003	0.00056								
I= 3	0.00000	0.00001	0.00015	0.00211							
I= 4	0.00000	0.00000	0.00004	0.00058	0.00600						
I= 5	0.00000	0.00000	0.00001	0.00016	0.00164	0.01363					
I= 6	0.00000	0.00000	0.00000	0.00004	0.00045	0.00373	0.02581				
I= 7	0.00000	0.00000	0.00000	0.00001	0.00012	0.00102	0.00706	0.04184			
I= 8	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00003	0.00028	0.00193	0.01145	0.05930		
I= 9	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00001	0.00008	0.00053	0.00313	0.01622	0.07465	
I=10	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00002	0.00014	0.00086	0.00444	0.02042	0.08450

T= 9

	J=0	J=1	J=2	J=3	J=4	J=5	J=6	J=7	J=8	J=9	J=10
I= 1	0.00000	0.00000									
I= 2	0.00000	0.00000	0.00003								
I= 3	0.00000	0.00000	0.00001	0.00016							
I= 4	0.00000	0.00000	0.00000	0.00004	0.00060						
I= 5	0.00000	0.00000	0.00000	0.00001	0.00016	0.00176					
I= 6	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00004	0.00048	0.00431				
I= 7	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00001	0.00013	0.00118	0.00905			
I= 8	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00004	0.00032	0.00247	0.01661		
I= 9	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00001	0.00009	0.00068	0.00454	0.02709	
I=10	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00002	0.00019	0.00124	0.00741	0.03974

T= 11

	J=0	J=1	J=2	J=3	J=4	J=5	J=6	J=7	J=8	J=9	J=10
I= 1	0.00000	0.00000									
I= 2	0.00000	0.00000	0.00000								
I= 3	0.00000	0.00000	0.00000	0.00001							
I= 4	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00005						
I= 5	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00001	0.00017					
I= 6	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00005	0.00052				
I= 7	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00001	0.00014	0.00135			
I= 8	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00004	0.00037	0.00304		
I= 9	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00001	0.00010	0.00083	0.00609	
I=10	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00003	0.00023	0.00167	0.01097

Tablo:22 (devam ediyor)

T= 13

	J=0	J=1	J=2	J=3	J=4	J=5	J=6	J=7	J=8	J=9	J=10
I= 1	0.00000	0.00000									
I= 2	0.00000	0.00000	0.00000								
I= 3	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000							
I= 4	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000						
I= 5	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00001					
I= 6	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00005				
I= 7	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00001	0.00016			
I= 8	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00004	0.00042		
I= 9	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00001	0.00012	0.00100	
I=10	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00003	0.00027	0.00214

T= 15

	J=0	J=1	J=2	J=3	J=4	J=5	J=6	J=7	J=8	J=9	J=10
I= 1	0.00000	0.00000									
I= 2	0.00000	0.00000	0.00000								
I= 3	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000							
I= 4	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000						
I= 5	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000					
I= 6	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000				
I= 7	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00002			
I= 8	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00005		
I= 9	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00001	0.00013	
I=10	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00004	0.00033

T= 17

	J=0	J=1	J=2	J=3	J=4	J=5	J=6	J=7	J=8	J=9	J=10
I= 1	0.00000	0.00000									
I= 2	0.00000	0.00000	0.00000								
I= 3	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000							
I= 4	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000						
I= 5	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000					
I= 6	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000				
I= 7	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000			
I= 8	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000		
I= 9	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00001	
I=10	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00004

Tablo:22 (devam ediyor)

T= 19

	J=0	J=1	J=2	J=3	J=4	J=5	J=6	J=7	J=8	J=9	J=10
I= 1	0.00000	0.00000									
I= 2	0.00000	0.00000	0.00000								
I= 3	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000							
I= 4	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000						
I= 5	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000					
I= 6	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000				
I= 7	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000			
I= 8	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000		
I= 9	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	
I=10	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

T= 21

	J=0	J=1	J=2	J=3	J=4	J=5	J=6	J=7	J=8	J=9	J=10
I= 1	0.00000	0.00000									
I= 2	0.00000	0.00000	0.00000								
I= 3	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000							
I= 4	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000						
I= 5	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000					
I= 6	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000				
I= 7	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000			
I= 8	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000		
I= 9	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	
I=10	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

T= 25

	J=0	J=1	J=2	J=3	J=4	J=5	J=6	J=7	J=8	J=9	J=10
I= 1	0.00000	0.00000									
I= 2	0.00000	0.00000	0.00000								
I= 3	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000							
I= 4	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000						
I= 5	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000					
I= 6	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000				
I= 7	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000			
I= 8	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000		
I= 9	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	
I=10	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

Bu programa göre, bir bekleme hattı sistemi olarak ele alınan Anadolu Üniversitesi Eğitim ve Uygulama Hastanesi Kadın Hastalıkları ve Doğum Anabilim Dalı Servisinde değerlendirilebilecek sonuçlar Tablo:23 de verilmiştir.

Tablo:23

SONUCLARIN DEGERLENDIRILMESI

```
==========================================================================
! Bekleme hatti sisteminin bos olma olasiligi= 0.7264093840              !
!                                                                        !
! Bekleme hattinda ortalama hasta sayisi= 0.103043582 hasta              !
!                                                                        !
! Bekleme hatti sisteminde ortalama hasta sayisi= 0.376634198 hasta      !
!                                                                        !
! Bekleme hattinda ortalama bekleme suresi= 0.061826149 gun              !
!                                                                        !
! Bekleme hatti sisteminde ortalama bekleme suresi= 0.225980519 gun      !
!                                                                        !
! Sistem kullanim etmeni= 0.273590616                                    !
!                                                                        !
--------------------------------------------------------------------------
```

Bu sonuçlara ek olarak iki boyutlu bekleme hattı modelinin sonucundan yararlanarak herhangi bir t anına kadar bekleme hattı sisteminden ayrılan kesin j müşteri olasılığı hesaplanabilir. Ayrıca yine seçilen sistem hakkında bilgi olarak, herhangi bir t anına kadar bekleme hattı sisteminden, hiç olmazsa j müşterinin ayrılma olasılığı da belirlenebilir.

Sistem kullanımı, başka bir deyişle t anına kadar servis verenin dolu olduğu zaman yüzdesi $p_{i,j}(t)$ nin terimleri ile tanımlandığından, bir bekleme hattı sistemi olarak ele alınan sağlık merkezinin ilgili servisinde, servis verenin aylaklığı ve servis verenin kullanımı belirlenebilir.

Sonsuz geliş kaynaklı ve tek kanallı bekleme hattı sistemlerinde ,iki boyutlu bekleme hattı modelinin sonucundan yararlanarak, herhangi bir t anında bekleme hattı sisteminde n müşteri bulunma olasılığı hesaplanırken, $1 \leq t$ için çözümler yapılarak bekleme hattı sisteminin kaç günde kararlı durum sonuçlarına ulaşacağı bulunabilir.

Ayrıca yine iki boyutlu bekleme hattı modelinin sonucundan yararlanarak yönetici,herhangi bir t anına kadar i geliş ve j ayrılış geçici durum olasılıklarının hangi zamanda 0 olacağını, başka bir deyişle böyle bir durumun bekleme hattı sisteminde hangi zaman zarfında artık olmayacağını bilebilir. Bunun bir gerektirmesi olarak da bekleme hattı sisteminde ne kadar zaman sonra i geliş ve j ayrılış durumlarının meydana gelebileceğini gözleyebilir.

5. SONUÇ

Bekleme, hizmet üretiminde bulunan işletmelerin etkinliklerinde devamlı olarak karşılaştıkları önemli bir sorundur. İşletmelerin sunduğu hizmete olan istemin rassal olarak değişmesinden kaynaklanan bu sorun, birbirine karşıt iki biçimde ortaya çıkmaktadır. Bunlardan birincisi istemdeki artış sonucu bir bekleme hattı oluşmakta ve müşteriler hizmet için beklemektedir. İkincisi ise, hizmet isteminde bulunan müşteri çok az ya da hiç olmadığı için hizmet birimi boş beklemektedir. Birinci durum müşterilerin bekleme hattında beklemesinden dolayı bir alternatif maliyete ve müşteri kaybına yol açarken, ikinci durum da işletme maliyetlerinin yükselmesine neden olmaktadır.

Böylece, istemin belirsizliği sonucu hangi biçimde olursa olsun, kaçınılmaz olan bekleme olayı bir dereceye kadar optimal hizmet sunmanın bir işleyişi olarak ortaya çıkmakta ve ekonomik zorunluluklardan kaynaklanmaktadır. Bundan dolayı müşteriler ile işletmenin yararlarını göz önünde bulunduran bir ekonomik dengeye ulaşmak sorunu ortaya çıkar. Bu ekonomik denge sorunu ise bekleme hattı modelleri ile ortadan kaldırılabilir.

Bu araştırmada sonsuz geliş kaynaklı ve tek kanallı bekleme hattı sistemleri için geliştirilen iki model göz önünde tutulup, araştırma amaçlar doğrultusunda tamamlanmıştır. Varılan sonuçlar ve ileriye dönük çalışmalar için öneriler şöyle sıralanabilir.

-Bekleme hattı sistemleri kuramsal yönden kavramsal olarak araştırılarak "Bekleme Hattı Kuramı" başlığı altında bir bütün haline getirilmiştir.

-Bekleme hattı sistemleri kavramsal yönden bir bütün haline getirilirken, gerçek hayattaki hangi sistemin bekleme hattı sistemi olduğu açıklığa kavuşturulmuştur. Bunun yanında, konunun genel olarak incelenmesi için geliştirilen matematiksel modellerin ana hatları ortaya çıkarılmıştır.

-Sonsuz geliş kaynaklı ve tek kanallı bekleme hattı sistemleri için geliştirilen bir ve iki boyutlu olarak adlandırılan modeller incelenmiştir.

-Sonsuz geliş kaynaklı ve tek kanallı, iki boyutlu bekleme hattı modelinin sonucu göz önünde tutularak belirlenen özel sonuçlar üzerinde, araştırmanın amacı dışında olduğu için sadece tanımları verilerek durulmuştur.

-Sonsuz geliş kaynaklı ve tek kanallı bekleme hattı sistemleri için geliştirilen, bir ve iki boyutlu bekleme hattı modelleri arasındaki ilişki belirlenerek ispatlanmıştır.

-Araştırmada bir uygulama yapmak amacı ile ele alınan T.C. Anadolu Üniversitesi Eğitim ve Uygulama Hastanesi Kadın Hastalıkları ve Doğum Anabilim Dalı Servisi, sonsuz geliş kaynaklı ve tek kanallı bir bekleme hattı sistemidir. Bu bekleme hattı sisteminin, bekleme hattı sistemlerine ilişkin genel bilgiler ışığında tanımı, elemanları ve elemanların durumları belirlenmiştir.

-Gerçek hayattan alınıp incelenen bu bekleme hattı sisteminde gelişlerin dağılımının Poisson dağılımı, servis sürelerinin dağılımının ise üstel dağılım olduğu belirlenmiştir. Bu durumda ortalama geliş hızı λ=1.66666667 hasta/gün ve ortalama servis hızı μ=6.09182688 hasta/gün olarak bulunmuştur.

-Bulunan bu parametreler kullanılarak sonsuz geliş kaynaklı ve tek kanallı, bir ve iki boyutlu bekleme hattı modellerinin ilişkisi sayısal olarak araştırılmıştır.

-Yine yukarıdaki parametreler kullanılarak, sonsuz geliş kaynaklı ve tek kanallı iki boyutlu bekleme hattı modelinin sonucu sayısal olarak araştırılmıştır.

-Sayısal olarak araştırılan sonsuz geliş kaynaklı ve tek kanallı, iki boyutlu bekleme hattı modelinin sonucu üzerinde görüşler ve öneriler belirtilmiştir.

EK-1

T. C.
ANADOLU UNIVERSITESI
EGITIM VE UYGULAMA HASTANESI
KADIN HASTALIKLARI VE DOGUM ANABILIM DALI SERVISI BILGI FORMU

			HASTANIN		
SIRA NO	TARIH	HASTA PROTOKOL NO	MUAYENE TETKIK VE TEDAVI ODASINA GELIS SAATI	EYLEM ODASINI KULLANIM SURESI	
				EYLEM ODASINA GIRIS SAATI	EYLEM ODASINDAN CIKIS SAATI
1	01/11/1986	163260	0.10	15.05	22.15
2	01/11/1986	191326	13.40	13.45	15.00
3	02/11/1986	129319	3.00	3.30	14.00
4	04/11/1986	188187	2.00	2.10	8.30
5	05/11/1986	3063	7.55	8.00	20.00
6	05/11/1986	169871	21.00	21.10	0.30
7	06/11/1986	59235	8.30	8.45	8.55
8	06/11/1986	192923	10.00	10.10	10.25
9	06/11/1986	184879	11.10	11.30	11.50
10	07/11/1986	188204	11.00	11.45	19.50
11	07/11/1986	195334	16.00	19.55	23.45
12	07/11/1986	120184	20.30	23.50	5.50
13	09/11/1986	183209	3.00	3.20	8.30
14	09/11/1986	195064	10.00	10.30	12.40
15	10/11/1986	170906	5.00	5.30	10.30
16	10/11/1986	167817	13.00	13.05	19.00
17	11/11/1986	191059	4.20	5.00	6.50
18	12/11/1986	193066	5.10	5.40	16.00
19	13/11/1986	140273	9.00	9.10	10.15
20	13/11/1986	92773	9.20	10.20	11.15
21	13/11/1986	40000	13.05	13.20	16.20
22	13/11/1986	163972	21.15	21.35	23.30

EK-1 (devam ediyor)

T. C.
ANADOLU UNIVERSITESI
EGITIM VE UYGULAMA HASTANESI
KADIN HASTALIKLARI VE DOGUM ANABILIM DALI SERVISI BILGI FORMU

SIRA NO	TARIH	HASTA PROTOKOL NO	HASTANIN MUAYENE TETKIK VE TEDAVI ODASINA GELIS SAATI	HASTANIN EYLEM ODASINI KULLANIM SURESI: EYLEM ODASINA GIRIS SAATI	HASTANIN EYLEM ODASINI KULLANIM SURESI: EYLEM ODASINDAN CIKIS SAATI
23	14/11/1986	157958	3.45	4.10	5.15
24	14/11/1986	168253	6.30	7.00	10.30
25	14/11/1986	191748	9.35	10.35	18.30
26	14/11/1986	46562	11.40	18.35	19.40
27	16/11/1986	187853	22.00	22.30	0.30
28	17/11/1986	186033	9.00	9.15	9.30
29	18/11/1986	128316	10.20	10.55	11.50
30	19/11/1986	190750	17.30	17.50	22.50
31	21/11/1986	186110	4.00	16.35	21.00
32	21/11/1986	154997	6.30	7.00	8.30
33	21/11/1986	187796	9.30	10.05	16.30
34	21/11/1986	194967	12.30	21.05	23.50
35	21/11/1986	190778	20.00	23.55	3.40
36	22/11/1986	191287	0.05	5.20	19.20
37	22/11/1986	194400	1.00	3.45	5.15
38	22/11/1986	182020	21.30	22.00	23.00
39	24/11/1986	165096	6.00	6.30	9.30
40	24/11/1986	155768	7.00	13.35	14.45
41	24/11/1986	100762	7.10	12.10	13.30
42	24/11/1986	32144	8.30	9.35	12.00
43	25/11/1986	159771	9.00	9.10	9.30
44	26/11/1986	38076	4.30	8.20	8.40

EK-1 (devam ediyor)

T. C.
ANADOLU UNIVERSITESI
EGITIM VE UYGULAMA HASTANESI
KADIN HASTALIKLARI VE DOGUM ANABILIM DALI SERVISI BILGI FORMU

SIRA NO	TARIH	HASTA PROTOKOL NO	HASTANIN MUAYENE TETKIK VE TEDAVI ODASINA GELIS SAATI	HASTANIN EYLEM ODASINI KULLANIM SURESI: EYLEM ODASINA GIRIS SAATI	HASTANIN EYLEM ODASINI KULLANIM SURESI: EYLEM ODASINDAN CIKIS SAATI
45	26/11/1986	145350	10.15	11.10	13.30
46	27/11/1986	145350	10.15	11.10	13.30
47	27/11/1986	136185	4.50	5.20	14.40
48	29/11/1986	184087	21.15	21.20	1.55
49	30/11/1986	151929	12.00	12.30	18.00
50	30/11/1986	69149	22.00	22.30	2.30
51	01/12/1986	89467	9.30	10.00	17.20
52	01/12/1986	107153	20.45	21.10	23.50
53	02/12/1986	191482	8.30	8.45	9.00
54	02/12/1986	193828	9.30	10.00	15.15
55	04/12/1986	185983	12.00	13.00	16.50
56	04/12/1986	196854	17.00	21.30	5.00
57	05/12/1986	91218	18.00	21.45	3.20
58	05/12/1986	169786	20.00	20.30	21.40
59	06/12/1986	184725	11.30	12.00	21.30
60	07/12/1986	136779	6.45	7.15	9.55
61	09/12/1986	137934	5.30	6.10	7.15
62	09/12/1986	196711	8.00	8.45	14.50
63	09/12/1986	170041	8.05	14.55	15.45
64	09/12/1986	196794	18.00	21.20	0.50
65	09/12/1986	194907	19.00	19.15	21.15

EK-2

SIRA NO	TARIH	HASTANIN EYLEM ODASINA GIRIS SAATI	EYLEM ODASINDAN CIKIS SAATI	EYLEM ODASINI KULLANIM SURESI
1	01/11/1986	15.05	22.15	430 Dak.
2	01/11/1986	13.45	15.00	75 Dak.
3	02/11/1986	3.30	14.00	630 Dak.
4	04/11/1986	2.10	8.30	380 Dak.
5	05/11/1986	8.00	20.00	720 Dak.
6	05/11/1986	21.10	0.30	200 Dak.
7	06/11/1986	8.45	8.55	10 Dak.
8	06/11/1986	10.10	10.25	15 Dak.
9	06/11/1986	11.30	11.50	20 Dak.
10	07/11/1986	11.45	19.50	485 Dak.
11	07/11/1986	19.55	23.45	230 Dak.
12	07/11/1986	23.50	5.50	360 Dak.
13	09/11/1986	3.20	8.30	310 Dak.
14	09/11/1986	10.30	12.40	130 Dak.
15	10/11/1986	5.30	10.30	300 Dak.
16	10/11/1986	13.05	19.00	355 Dak.
17	11/11/1986	5.00	6.50	110 Dak.
18	12/11/1986	5.40	16.00	620 Dak.
19	13/11/1986	9.10	10.15	65 Dak.
20	13/11/1986	10.20	11.15	55 Dak.
21	13/11/1986	13.20	16.20	180 Dak.
22	13/11/1986	21.35	23.30	115 Dak.

EK-2 (devam ediyor)

SIRA NO	TARIH	HASTANIN EYLEM ODASINA GIRIS SAATI	EYLEM ODASINDAN CIKIS SAATI	EYLEM ODASINI KULLANIM SURESI
23	14/11/1986	4.10	5.15	65 Dak.
24	14/11/1986	7.00	10.30	210 Dak.
25	14/11/1986	10.35	18.30	475 Dak.
26	14/11/1986	18.35	19.40	65 Dak.
27	16/11/1986	22.30	0.30	120 Dak.
28	17/11/1986	9.15	9.30	15 Dak.
29	18/11/1986	10.55	11.50	55 Dak.
30	19/11/1986	17.50	22.50	300 Dak.
31	21/11/1986	16.35	21.00	265 Dak.
32	21/11/1986	7.00	8.30	90 Dak.
33	21/11/1986	10.05	16.30	385 Dak.
34	21/11/1986	21.05	23.50	165 Dak.
35	21/11/1986	23.55	3.40	225 Dak.
36	22/11/1986	5.20	19.20	840 Dak.
37	22/11/1986	3.45	5.15	90 Dak.
38	22/11/1986	22.00	23.00	60 Dak.
39	24/11/1986	6.30	9.30	180 Dak.
40	24/11/1986	13.35	14.45	70 Dak.
41	24/11/1986	12.10	13.30	80 Dak.
42	24/11/1986	9.35	12.00	145 Dak.
43	25/11/1986	9.10	9.30	20 Dak.
44	26/11/1986	8.20	8.40	20 Dak.

EK-2 (devam ediyor)

SIRA NO	TARIH	HASTANIN EYLEM ODASINA GIRIS SAATI	EYLEM ODASINDAN CIKIS SAATI	EYLEM ODASINI KULLANIM SURESI
45	26/11/1986	11.10	13.30	140 Dak.
46	27/11/1986	11.10	13.30	140 Dak.
47	27/11/1986	5.20	14.40	560 Dak.
48	29/11/1986	21.20	1.55	275 Dak.
49	30/11/1986	12.30	18.00	330 Dak.
50	30/11/1986	22.30	2.30	240 Dak.
51	01/12/1986	10.00	17.20	440 Dak.
52	01/12/1986	21.10	23.50	160 Dak.
53	02/12/1986	8.45	9.00	15 Dak.
54	02/12/1986	10.00	15.15	315 Dak.
55	04/12/1986	13.00	16.50	230 Dak.
56	04/12/1986	21.30	5.00	450 Dak.
57	05/12/1986	21.45	3.20	335 Dak.
58	05/12/1986	20.30	21.40	70 Dak.
59	06/12/1986	12.00	21.30	570 Dak.
60	07/12/1986	7.15	9.55	160 Dak.
61	09/12/1986	6.10	7.15	65 Dak.
62	09/12/1986	8.45	14.50	365 Dak.
63	09/12/1986	14.55	15.45	50 Dak.
64	09/12/1986	21.20	0.50	210 Dak.
65	09/12/1986	19.15	21.15	120 Dak.

EK-3

```
10 REM BEKLEME HATTI SISTEMINE ILISKIN BIR UYGULAMA
20 REM BILGISAYAR:AMSTRAD 128k Colour Personal Computer
30 REM TEST*12.10.1989-Huseyin ERDIN*
40 REM
50 INPUT"EKRAN(0) VEYA YAZICI(8)";Q
60 INPUT "VERI SAYISI";S
70 DEFINT T
80 DIM A(12),B$(S),C$(S),D$(S),B(S),C(S),D(S)
90 DIM G$(S),P(S),G(S),Sb(S),Ss(S),I$(S),K(100)
100 DIM E$(S),F$(S),H$(S),K$(S),L$(S),M$(S),P$(100)
110 DIM J$(S),E(S),F(S),H(S)
120 DIM N(35),R(S),S(S),T(S),Xa(S),Xu(S),U(S)
130 REM *GELISLERIN POISSON DAGILIMINA UYGUNLUGU*
140 REM TAKVIM PROGRAMINA HAZIRLIK
150 FOR I=1 TO 12
160 READ A(I)
170 NEXT I
180 DATA 31,28,31,30,31,30,31,31,30,31,30,31
190 FOR I=1 TO S
200 READ G$(I),P(I),G(I),Sb(I),Ss(I)
210 NEXT I
220 FOR I=1 TO S
230 LET B$(I)=LEFT$(G$(I),2)
240 LET C$(I)=MID$(G$(I),4,2)
250 LET D$(I)=RIGHT$(G$(I),4)
260 LET B(I)=VAL(B$(I))
270 LET C(I)=VAL(C$(I))
280 LET D(I)=VAL(D$(I))
290 NEXT I
300 REM VERILERIN TABLO BICIMINDE GOSTERIMI
310 GOSUB 5840
320 FOR I=1 TO S
330 IF I=23 OR I=45 THEN GOSUB 5840
340 PRINT#Q,USING"|### | ";I;
350 PRINT#Q,G$(I);
360 PRINT#Q,USING" | ###### |      ##.##       |      ##.##       |       ";P(I),G(I),Sb(I);
370 PRINT#Q,USING"##.##       |";Ss(I)
380 PRINT#Q,"|";STRING$(80,"-");TAB(82)"|"
390 NEXT I
400 REM TAKVIM PROGRAMI
410 FOR Y=D(1) TO D(S)
420 FOR A=C(1) TO 12
430 FOR G=B(1) TO A(A)
440 LET T=T+1
450 LET E$(G)=STR$(G)
460 LET F$(G)=STR$(A)
470 LET H$(G)=STR$(Y)
480 IF VAL(E$(G))<10 THEN K$(G)="0"+RIGHT$(E$(G),1) ELSE K$(G)=RIGHT$(E$(G),2)
490 IF VAL(F$(G))<10 THEN L$(G)="0"+RIGHT$(F$(G),1) ELSE L$(G)=RIGHT$(F$(G),2)
500 LET M$(G)=RIGHT$(H$(G),4)
```

EK-3 (devam ediyor)

```
510 LET J$(G)="/"
520 LET I$(G)=K$(G)+J$(G)+L$(G)+J$(G)+M$(G)
530 LET P$(T)=I$(G)
540 IF G>=B(S) AND A>=C(S) AND Y>=D(S) THEN GOTO 600
550 NEXT G
560 IF G>31 OR G>30 OR G>29 OR G>28 THEN LET B(1)=1
570 NEXT A
580 IF A=13 THEN LET G=1:LET C(1)=1:LET B(1)=1
590 NEXT Y
600 PRINT#Q,
610 PRINT#Q,
620 PRINT#Q,
630 REM GELISLERIN DAGILIMI
640 FOR I=1 TO T
650 LET K=0
660 FOR J=1 TO S
670 IF P$(I)<>G$(J) THEN GOTO 700
680 LET K=K+1
690 LET K(I)=K
700 NEXT J
710 NEXT I
720 IF INT(T/2)<>T/2 THEN FF=INT(T/2)+1 ELSE FF=T/2
730 PRINT#Q,TAB(26)"GUNLERDE GELISLERIN SAYILARI"
740 PRINT#Q,
750 PRINT#Q,STRING$(80,"=")
760 PRINT#Q,"!   GUNLER   ! GUNDE GELISLERIN SAYISI !!   GUNLER   ! GUNDE GELISLERIN SAYISI !"
770 PRINT#Q,STRING$(80,"-")
780 FOR I=1 TO FF
790 PRINT#Q,"!";TAB(3)P$(I);TAB(14)"!";
800 PRINT#Q,USING"          ###          !!";K(I);
810 PRINT#Q,TAB(43)P$(FF+I);TAB(54)"!";
820 IF INT(T/2)<>T/2 AND FF+I=T+1 THEN PRINT#Q,"                       !":GOTO 840
830 PRINT#Q,USING"          ###          !";K(FF+I)
840 PRINT#Q,STRING$(80,"-")
850 NEXT I
860 PRINT#Q,
870 PRINT#Q,
880 PRINT#Q,
890 REM GUNDE GELISLERIN SAYISININ SIRALANMASI
900 FOR I=1 TO T-1
910 LET W=I+1
920 FOR J=W TO T
930 IF K(I)<=K(J) THEN GOTO 970
940 LET M=K(J)
950 LET K(J)=K(I)
960 LET K(I)=M
970 NEXT J
980 NEXT I
990 REM GUNDE GELISLERIN SAYISININ FREKANS DAGILIMI
1000 FOR I=1 TO T
```

EK-3 (devam ediyor)

```
1010 LET E=0
1020 FOR J=1 TO T
1030 IF K(I)=K(J) THEN LET E=E+1
1040 LET F(I)=E
1050 NEXT J
1060 IF K(I)<>K(I+1) THEN LET P=P+1 ELSE GOTO 1090
1070 LET E(P)=K(I)
1080 LET H(P)=F(I)
1090 NEXT I
1100 PRINT#Q,TAB(27)"GELISLERIN FREKANS DAGILIMI"
1110 PRINT#Q,
1120 PRINT#Q,TAB(20)STRING$(40,"=")
1130 PRINT#Q,TAB(20)"|       GUNDE       |       GOZLENEN       |"
1140 PRINT#Q,TAB(20)"|      GELISLER     |      FREKANSLAR      |"
1150 PRINT#Q,TAB(20)"|";STRING$(38,"-");"|"
1160 FOR I=1 TO P
1170 PRINT#Q,TAB(20)"|";
1180 PRINT#Q,USING"        ##                ###          |";E(I),H(I)
1190 PRINT#Q,TAB(20)"|";TAB(59)"|"
1200 NEXT I
1210 PRINT#Q,TAB(20)"|";STRING$(38,"-");"|"
1220 PRINT#Q,
1230 PRINT#Q,
1240 PRINT#Q,
1250 REM GELISLERIN FREKANS DAGILIMININ GERCEK MOMENTLERI
1260 LET L=0
1270 LET V=0
1280 LET N=0
1290 LET R=0
1300 LET U=0
1310 PRINT#Q,TAB(16)"GELISLERIN FREKANS DAGILIMININ GERCEK MOMENTLERI"
1320 PRINT#Q,
1330 PRINT#Q,TAB(9)STRING$(61,"=")
1340 PRINT#Q,TAB(9)"|    X          f          Xf       X^2*f      X^3*f      X^4*f  |"
1350 PRINT#Q,TAB(9)"| -------    -------    -------    -------    -------    -------|"
1360 FOR I=1 TO P
1370 LET I(I)=E(I)*H(I)
1380 LET J(I)=E(I)^2*H(I)
1390 LET M(I)=E(I)^3*H(I)
1400 LET L(I)=E(I)^4*H(I)
1410 LET L=L+H(I)
1420 LET V=V+I(I)
1430 LET N=N+J(I)
1440 LET R=R+M(I)
1450 LET U=U+L(I)
1460 PRINT#Q,USING"        |    #         ##          ##          ##        ";E(I),H(I),I(I),J(I);
1470 PRINT#Q,USING"###       ####    |";M(I),L(I)
1480 PRINT#Q,TAB(9)"|";TAB(69)"|"
1490 NEXT I
1500 PRINT#Q,TAB(9)"|           -------    -------    -------    -------    -------|"
```

EK-3 (devam ediyor)

```
1510 PRINT#Q,USING"        | TOPLAM:     ##        ###       ####       ####       ";L,V,N,R;
1520 PRINT#Q,USING"####   |";U
1530 PRINT#Q,TAB(9)"|";TAB(69)"|"
1540 PRINT#Q,TAB(9)STRING$(61,"-")
1550 PRINT#Q,
1560 PRINT#Q,
1570 PRINT#Q,
1580 REM GELISLERIN SIFIR CIVARINDAKI MOMENTLERI
1590 PRINT#Q,TAB(20)"GELISLERIN SIFIR CIVARINDAKI MOMENTLERI"
1600 PRINT#Q,
1610 PRINT#Q,TAB(20)STRING$(39,"=")
1620 LET M1=V/L
1630 LET M2=N/L
1640 LET M3=R/L
1650 LET M4=U/L
1660 PRINT#Q,TAB(20)"|";TAB(32)"M1=";M1;TAB(58)"|"
1670 PRINT#Q,TAB(20)"|";TAB(58)"|"
1680 PRINT#Q,TAB(20)"|";TAB(32)"M2=";M2;TAB(58)"|"
1690 PRINT#Q,TAB(20)"|";TAB(58)"|"
1700 PRINT#Q,TAB(20)"|";TAB(32)"M3=";M3;TAB(58)"|"
1710 PRINT#Q,TAB(20)"|";TAB(58)"|"
1720 PRINT#Q,TAB(20)"|";TAB(32)"M4=";M4;TAB(58)"|"
1730 PRINT#Q,TAB(20)"|";TAB(58)"|"
1740 PRINT#Q,TAB(20)STRING$(39,"-")
1750 PRINT#Q,
1760 PRINT#Q,
1770 PRINT#Q,
1780 REM GELISLERIN ORTALAMA CIVARINDAKI MOMENTLERI
1790 PRINT#Q,TAB(19)"GELISLERIN ORTALAMA CIVARINDAKI MOMENTLERI"
1800 PRINT#Q,
1810 PRINT#Q,TAB(19)STRING$(42,"=")
1820 LET V1=0
1830 LET V2=M2-M1^2
1840 LET V3=M3-3*M2*M1+2*M1^3
1850 LET V4=M4-4*M3*M1+6*M2*M1^2-3*M1^4
1860 PRINT#Q,TAB(19)"|";TAB(32)"V1=";V1;TAB(60)"|"
1870 PRINT#Q,TAB(19)"|";TAB(60)"|"
1880 PRINT#Q,TAB(19)"|";TAB(32)"V2=";V2;TAB(60)"|"
1890 PRINT#Q,TAB(19)"|";TAB(60)"|"
1900 PRINT#Q,TAB(19)"|";TAB(32)"V3=";V3;TAB(60)"|"
1910 PRINT#Q,TAB(19)"|";TAB(60)"|"
1920 PRINT#Q,TAB(19)"|";TAB(32)"V4=";V4;TAB(60)"|"
1930 PRINT#Q,TAB(19)"|";TAB(60)"|"
1940 PRINT#Q,TAB(19)STRING$(42,"-")
1950 PRINT#Q,
1960 PRINT#Q,
1970 PRINT#Q,
1980 REM GELISLERIN STANDART MOMENTLERI
1990 PRINT#Q,TAB(25)"GELISLERIN STANDART MOMENTLERI"
2000 PRINT#Q,
```

EK-3 (devam ediyor)

```
2010 PRINT#Q,TAB(19)STRING$(42,"=")
2020 LET ALFA3=V3/V2^(3/2)
2030 LET ALFA4=V4/V2^2
2040 PRINT#Q,TAB(19)"|";TAB(31)"  MU2=";V2;TAB(60)"|"
2050 PRINT#Q,TAB(19)"|";TAB(60)"|"
2060 PRINT#Q,TAB(19)"|";TAB(31)"ALFA3=";ALFA3;TAB(60)"|"
2070 PRINT#Q,TAB(19)"|";TAB(60)"|"
2080 PRINT#Q,TAB(19)"|";TAB(31)"ALFA4=";ALFA4;TAB(60)"|"
2090 PRINT#Q,TAB(19)"|";TAB(60)"|"
2100 PRINT#Q,TAB(19)STRING$(42,"-")
2110 PRINT#Q,
2120 PRINT#Q,
2130 PRINT#Q,
2140 REM GELISLERIN KURAMSAL MOMENTLERI
2150 PRINT#Q,TAB(25)"GELISLERIN KURAMSAL MOMENTLERI"
2160 PRINT#Q,
2170 PRINT#Q,TAB(19)STRING$(42,"=")
2180 LET ALFA3K=1/SQR(M1)
2190 LET ALFA4K=3+1/M1
2200 PRINT#Q,TAB(19)"|";TAB(31)"  MU2=";M1;TAB(60)"|"
2210 PRINT#Q,TAB(19)"|";TAB(60)"|"
2220 PRINT#Q,TAB(19)"|";TAB(31)"ALFA3=";ALFA3K;TAB(60)"|"
2230 PRINT#Q,TAB(19)"|";TAB(60)"|"
2240 PRINT#Q,TAB(19)"|";TAB(31)"ALFA4=";ALFA4K;TAB(60)"|"
2250 PRINT#Q,TAB(19)"|";TAB(60)"|"
2260 PRINT#Q,TAB(19)STRING$(42,"-")
2270 PRINT#Q,
2280 PRINT#Q,
2290 PRINT#Q,
2300 REM GELISLERIN STANDART VE KURAMSAL MOMENTLERININ KARSILASTIRILMASI
2310 PRINT#Q,TAB(8)"GELISLERIN STANDART VE KURAMSAL MOMENTLERININ KARSILASTIRILMASI"
2320 PRINT#Q,
2330 PRINT#Q,TAB(8)STRING$(63,"=")
2340 PRINT#Q,TAB(8)"|        MOMENT             STANDART           KURAMSAL        |"
2350 PRINT#Q,TAB(8)"|     --------------     --------------     --------------     |"
2360 PRINT#Q,TAB(8)"|";TAB(18)"  MU2";TAB(33)V2;TAB(52)M1;TAB(70)"|"
2370 PRINT#Q,TAB(8)"|";TAB(70)"|"
2380 PRINT#Q,TAB(8)"|";TAB(18)"ALFA3";TAB(33)ALFA3;TAB(52)ALFA3K;TAB(70)"|"
2390 PRINT#Q,TAB(8)"|";TAB(70)"|"
2400 PRINT#Q,TAB(8)"|";TAB(18)"ALFA4";TAB(33)ALFA4;TAB(52)ALFA4K;TAB(70)"|"
2410 PRINT#Q,TAB(8)"|";TAB(70)"|"
2420 PRINT#Q,TAB(8)STRING$(63,"-")
2430 PRINT#Q,
2440 PRINT#Q,
2450 PRINT#Q,
2460 REM GELISLERIN KURAMSAL FREKANSLARININ BULUNMASI
2470 LET B=1
2480 FOR I=0 TO 33
2490 IF I=0 THEN B=1 : GOTO 2510
2500 LET B=B*I
```

EK-3 (devam ediyor)

```
2510 LET N(I+1)=B
2520 NEXT I
2530 FOR I=0 TO P-1
2540 LET P(I+1)=(M1^I)*(EXP(-M1))/N(I+1)*L
2550 NEXT I
2560 LET C=0
2570 FOR I=1 TO P
2580 LET C=C+P(I)
2590 NEXT I
2600 REM GELISLERIN GERCEK VE KURAMSAL FREKANSLARI
2610 PRINT#Q,TAB(20)"GELISLERIN GERCEK VE KURAMSAL FREKANSLARI"
2620 PRINT#Q,
2630 PRINT#Q,TAB(16)STRING$(48,"=")
2640 PRINT#Q,TAB(16)"!        X              fG              fK       |"
2650 PRINT#Q,TAB(16)"|  ------------   ------------   ------------  |"
2660 FOR I=1 TO P
2670 PRINT#Q,USING"             |        #              ##         ";E(I),H(I);
2680 PRINT#Q,USING" ##.#######   |";P(I)
2690 PRINT#Q,TAB(16)"|";TAB(63)"|"
2700 NEXT I
2710 PRINT#Q,TAB(16)"|                   ------------   ------------  |"
2720 PRINT#Q,USING"             |      TOPLAM:          ##         ##.#######   |";L,C
2730 PRINT#Q,TAB(16)"|";TAB(63)"|"
2740 PRINT#Q,TAB(16)STRING$(48,"-")
2750 PRINT#Q,
2760 PRINT#Q,
2770 PRINT#Q,
2780 REM GELISLER ICIN 5 DEN KUCUK FREKANSLARIN BELIRLENMESI
2790 FOR Y=1 TO P
2800 IF P(Y)<5 THEN LET Z=Z+1:LET U(Z)=Y:GOSUB 6090
2810 NEXT Y
2820 LET U=0:LET U1=0
2830 FOR K=1 TO Z
2840 LET U=U+P(U(K)):LET U1=U1+H(U(K))
2850 NEXT K
2860 LET P(U(1)-1)=U+P(U(1)-1):LET H(U(1)-1)=U1+H(U(1)-1)
2870 REM GELISLER ICIN KI-KARE TESTI
2880 LET D=0
2890 FOR I=1 TO P-Z
2900 LET O(I)=H(I)^2/P(I)
2910 LET D=D+O(I)
2920 NEXT I
2930 LET F=D-L
2940 PRINT#Q,TAB(5)"GELISLER ICIN HESAPLANAN KI-KARE=";F
2950 PRINT#Q,
2960 PRINT#Q,TAB(5)"ORTALAMA GELIS DEBISI=";M1;"Hasta/Gun"
2970 PRINT#Q,
2980 PRINT#Q,
2990 PRINT#Q,
3000 REM *SERVIS SURELERININ USTEL DAGILIMA UYGUNLUGU*
```

EK-3 (devam ediyor)

```
3010 PRINT#Q,TAB(3)STRING$(73,"=")
3020 PRINT#Q,TAB(3)"!    !           !             H  A  S  T  A  N  I  N            !"
3030 PRINT#Q,TAB(3)"!    !           !---------------------------------------------------!"
3040 PRINT#Q,TAB(3)"!SIRA!   TARIH   ! EYLEM ODASINA  ! EYLEM ODASINDAN !  EYLEM ODASINI  !"
3050 PRINT#Q,TAB(3)"! NO !           !  GIRIS SAATI   !   CIKIS SAATI   ! KULLANIM SURESI !"
3060 PRINT#Q,TAB(3)"!";STRING$(71,"-");TAB(75)"!"
3070 FOR I=1 TO S
3080 IF I=23 OR I=45 THEN GOSUB 5990
3090 LET R(I)=INT(Sb(I))*60+(Sb(I)-INT(Sb(I)))*100
3100 IF Sb(I)<Ss(I) THEN LET S(I)=INT(Ss(I))*60+(Ss(I)-INT(Ss(I)))*100
3110 IF Sb(I)>=Ss(I) THEN LET S(I)=1440+INT(Ss(I))*60+(Ss(I)-INT(Ss(I)))*100
3120 LET T(I)=S(I)-R(I)
3130 PRINT#Q,USING"  !### ! ";I;
3140 PRINT#Q,G$(I);
3150 PRINT#Q,USING" !      ##.##      !      ##.##      !     ####  Dak.  !";Sb(I),Ss(I),T(I)
3160 PRINT#Q,TAB(3)"!";STRING$(71,"-");TAB(75)"!"
3170 NEXT I
3180 PRINT#Q,
3190 PRINT#Q,
3200 PRINT#Q,
3210 REM SERVIS SURELERININ SIRALANMASI
3220 FOR I=1 TO S-1
3230 LET H=I+1
3240 FOR J=H TO S
3250 IF T(I)<=T(J) THEN GOTO 3290
3260 LET O=T(J)
3270 LET T(J)=T(I)
3280 LET T(I)=O
3290 NEXT J
3300 NEXT I
3310 REM SERVIS SURELERININ GRUPLANDIRILMASI
3320 LET MAS=T(S)
3330 LET MIS=T(1)
3340 LET SA=(MAS-MIS)/(1+3.322*LOG10(S))
3350 LET J=0
3360 LET X=MIS
3370 LET J=J+1
3380 LET Xa(J)=MIS
3390 LET X=X+SA
3400 LET Xu(J)=X
3410 LET MIS=X
3420 IF Xu(J)>=MAS THEN GOTO 3440
3430 GOTO 3370
3440 LET Z=J
3450 PRINT#Q,TAB(22)"SERVIS SURELERININ FREKANS DAGILIMI"
3460 PRINT#Q,
3470 PRINT#Q,TAB(12)STRING$(55,"=")
3480 PRINT#Q,TAB(12)"!          SINIFLAR                FREKANSLAR     !"
3490 PRINT#Q,TAB(12)"!";STRING$(53,"-");TAB(66)"!"
3500 FOR W=1 TO Z
```

EK-3 (devam ediyor)

```
3510 LET Aa=0
3520 FOR I=1 TO S
3530 IF T(I)<Xa(W) THEN GOTO 3570
3540 IF T(I)>=Xu(W) THEN GOTO 3570
3550 LET Aa=Aa+1
3560 LET U(W)=Aa
3570 NEXT I
3580 PRINT#Q,USING"          |   ####.######## -- ####.########          ";Xa(W),Xu(W);
3590 PRINT#Q,USING"##         |";U(W)
3600 PRINT#Q,TAB(12)"|";TAB(66)"|"
3610 NEXT W
3620 PRINT#Q,TAB(12)STRING$(55,"-")
3630 PRINT#Q,
3640 PRINT#Q,
3650 PRINT#Q,
3660 REM SERVIS SURELERININ FREKANS DAGILIMININ GERCEK MOMENTLERI
3670 PRINT#Q,TAB(24)"SERVIS SURELERININ FREKANS DAGILIMININ GERCEK MOMENTLERI"
3680 PRINT#Q,
3690 PRINT#Q,STRING$(102,"=")
3700 LET D$="|         SINIFLAR                 X        f      X*f"
3710 LET E$="         X^2*f         X^3*f           X^4*f     |"
3720 LET F$=D$+E$
3730 PRINT#Q,F$
3740 LET A$="|-------------------------  ----------  --  ----------  "
3750 LET B$="----------  -----------  --------------|"
3760 LET C$=A$+B$
3770 PRINT#Q,C$
3780 LET Ba=0
3790 LET Ca=0
3800 LET Da=0
3810 LET Ea=0
3820 LET Fa=0
3830 FOR I=1 TO Z
3840 LET Xo(I)=(Xa(I)+Xu(I))/2
3850 LET V(I)=Xo(I)*U(I)
3860 LET Y(I)=Xo(I)^2*U(I)
3870 LET Z(I)=Xo(I)^3*U(I)
3880 LET W(I)=Xo(I)^4*U(I)
3890 LET Ba=Ba+U(I)
3900 LET Ca=Ca+V(I)
3910 LET Da=Da+Y(I)
3920 LET Ea=Ea+Z(I)
3930 LET Fa=Fa+W(I)
3940 PRINT#Q,USING"|####.###### -- ####.######  ####.######  ##  ";Xa(I),Xu(I),Xo(I),U(I);
3950 PRINT#Q,USING"#####.#####  ########.##  ##########.#  ############.#|";V(I),Y(I),Z(I),W(I)
3960 PRINT#Q,"|";TAB(102)"|"
3970 NEXT I
3980 LET G$="|                                        --  ----------  ----------  "
3990 LET H$="-----------  --------------|"
4000 LET I$=G$+H$
```

EK-3 (devam ediyor)

```
4010 PRINT#Q,I$
4020 PRINT#Q,USING"! TOPLAM:                                   ##  #####.#####  ";Ba,Ca;
4030 PRINT#Q,USING"########.##  ##########.#  #############.#!";Da,Ea,Fa
4040 PRINT#Q,"!";TAB(102)"!"
4050 PRINT#Q,STRING$(102,"-")
4060 PRINT#Q,
4070 PRINT#Q,
4080 PRINT#Q,
4090 REM SERVIS SURELERININ SIFIR CIVARINDAKI MOMENTLERI
4100 PRINT#Q,TAB(17)"SERVIS SURELERININ SIFIR CIVARINDAKI MOMENTLERI"
4110 PRINT#Q,
4120 PRINT#Q,TAB(20)STRING$(41,"=")
4130 LET M11=Ca/Ba
4140 LET M22=Da/Ba
4150 LET M33=Ea/Ba
4160 LET M44=Fa/Ba
4170 PRINT#Q,TAB(20)"!";TAB(33)"M1=";M11;TAB(60)"!"
4180 PRINT#Q,TAB(20)"!";TAB(60)"!"
4190 PRINT#Q,TAB(20)"!";TAB(33)"M2=";M22;TAB(60)"!"
4200 PRINT#Q,TAB(20)"!";TAB(60)"!"
4210 PRINT#Q,TAB(20)"!";TAB(33)"M3=";M33;TAB(60)"!"
4220 PRINT#Q,TAB(20)"!";TAB(60)"!"
4230 PRINT#Q,TAB(20)"!";TAB(33)"M4=";M44;TAB(60)"!"
4240 PRINT#Q,TAB(20)"!";TAB(60)"!"
4250 PRINT#Q,TAB(20)STRING$(41,"-")
4260 PRINT#Q,
4270 PRINT#Q,
4280 PRINT#Q,
4290 REM SERVIS SURELERININ ORTALAMA CIVARINDAKI MOMENTLERI
4300 PRINT#Q,TAB(16)"SERVIS SURELERININ ORTALAMA CIVARINDAKI MOMENTLERI"
4310 PRINT#Q,
4320 PRINT#Q,TAB(20)STRING$(41,"=")
4330 LET V11=0
4340 LET V22=M22-M11^2
4350 LET V33=M33-3*M22*M11+2*M11^3
4360 LET V44=M44-4*M33*M11+6*M22*M11^2-3*M11^4
4370 LET SV22=V22-SA^2/12
4380 LET SV44=V44-(SA^2/2)*V22+7*SA^4/240
4390 PRINT#Q,TAB(20)"!";TAB(33)"V1=";V11;TAB(60)"!"
4400 PRINT#Q,TAB(20)"!";TAB(60)"!"
4410 PRINT#Q,TAB(20)"!";TAB(33)"V2=";SV22;TAB(60)"!"
4420 PRINT#Q,TAB(20)"!";TAB(60)"!"
4430 PRINT#Q,TAB(20)"!";TAB(33)"V3=";V33;TAB(60)"!"
4440 PRINT#Q,TAB(20)"!";TAB(60)"!"
4450 PRINT#Q,TAB(20)"!";TAB(33)"V4=";SV44;TAB(60)"!"
4460 PRINT#Q,TAB(20)"!";TAB(60)"!"
4470 PRINT#Q,TAB(20)STRING$(41,"-")
4480 PRINT#Q,
4490 PRINT#Q,
4500 PRINT#Q,
```

EK-3 (devam ediyor)

```
4510 REM SERVIS SURELERININ STANDART MOMENTLERI
4520 PRINT#0,TAB(22)"SERVIS SURELERININ STANDART MOMENTLERI"
4530 PRINT#0,
4540 PRINT#0,TAB(19)STRING$(44,"=")
4550 LET SMU=SQR(SV22)
4560 LET ALFA33=V33/SV22^(3/2)
4570 LET ALFA44=SV44/SV22^2
4580 PRINT#0,TAB(19)"!";TAB(32)"  MU2=";SMU;TAB(62)"!"
4590 PRINT#0,TAB(19)"!";TAB(62)"!"
4600 PRINT#0,TAB(19)"!";TAB(32)"ALFA3=";ALFA33;TAB(62)"!"
4610 PRINT#0,TAB(19)"!";TAB(62)"!"
4620 PRINT#0,TAB(19)"!";TAB(32)"ALFA4=";ALFA44;TAB(62)"!"
4630 PRINT#0,TAB(19)"!";TAB(62)"!"
4640 PRINT#0,TAB(19)STRING$(44,"-")
4650 PRINT#0,
4660 PRINT#0,
4670 PRINT#0,
4680 REM SERVIS SURELERININ KURAMSAL MOMENTLERI
4690 PRINT#0,TAB(22)"SERVIS SURELERININ KURAMSAL MOMENTLERI"
4700 PRINT#0,
4710 PRINT#0,TAB(19)STRING$(44,"=")
4720 PRINT#0,TAB(19)"!";TAB(32)"  MU2=";M11;TAB(62)"!"
4730 PRINT#0,TAB(19)"!";TAB(62)"!"
4740 PRINT#0,TAB(19)"!";TAB(32)"ALFA3=";2;TAB(62)"!"
4750 PRINT#0,TAB(19)"!";TAB(62)"!"
4760 PRINT#0,TAB(19)"!";TAB(32)"ALFA4=";9;TAB(62)"!"
4770 PRINT#0,TAB(19)"!";TAB(62)"!"
4780 PRINT#0,TAB(19)STRING$(44,"-")
4790 PRINT#0,
4800 PRINT#0,
4810 PRINT#0,
4820 REM SERVIS SURELERININ STANDART VE KURAMSAL MOMENTLERININ  KARSILASTIRILMASI
4830 PRINT#0,TAB(5)"SERVIS SURELERININ STANDART VE KURAMSAL MOMENTLERININ KARSILASTIRILMASI"
4840 PRINT#0,
4850 PRINT#0,TAB(9)STRING$(62,"=")
4860 PRINT#0,TAB(9)"!        MOMENT             STANDART             KURAMSAL       !"
4870 PRINT#0,TAB(9)"!    --------------    --------------    --------------       !"
4880 PRINT#0,TAB(9)"!";TAB(19)"  MU2";TAB(34)SMU;TAB(53)M11;TAB(70)"!"
4890 PRINT#0,TAB(9)"!";TAB(70)"!"
4900 PRINT#0,TAB(9)"!";TAB(19)"ALFA3";TAB(34)ALFA33;TAB(53)2;TAB(70)"!"
4910 PRINT#0,TAB(9)"!";TAB(70)"!"
4920 PRINT#0,TAB(9)"!";TAB(19)"ALFA4";TAB(34)ALFA44;TAB(53)9;TAB(70)"!"
4930 PRINT#0,TAB(9)"!";TAB(70)"!"
4940 PRINT#0,TAB(9)STRING$(62,"-")
4950 PRINT#0,
4960 PRINT#0,
4970 PRINT#0,
4980 REM SERVIS SURELERININ KURAMSAL FREKANSLARININ BULUNMASI
4990 PRINT#0,TAB(16)"SERVIS SURELERININ GERCEK VE KURAMSAL FREKANSLARI"
5000 PRINT#0,
```

EK-3 (devam ediyor)

```
5010 PRINT#0,TAB(10)STRING$(60,"=")
5020 PRINT#0,TAB(10)"|          SINIFLAR                  fG          fK       |"
5030 PRINT#0,TAB(10)"|  -------------------------   ----------   ------------  |"
5040 LET Ga=1/M11
5050 FOR I=1 TO Z
5060 LET Q(I)=(-EXP(-Ga*Xu(I))-(-EXP(-Ga*Xa(I))))*Ba
5070 PRINT#0,USING"          |  ####.###### -- ####.######      ##        ";Xa(I),Xu(I),U(I);
5080 PRINT#0,USING"##.########  |";Q(I)
5090 PRINT#0,TAB(10)"|";TAB(69)"|"
5100 NEXT I
5110 LET Ha=0
5120 FOR I=1 TO Z
5130 LET Ha=Ha+Q(I)
5140 NEXT I
5150 PRINT#0,TAB(10)"|                                ----------   ------------  |"
5160 PRINT#0,USING"          |  TOPLAM:                          ##        ##.########  |";Ba,Ha
5170 PRINT#0,TAB(10)"|";TAB(69)"|"
5180 PRINT#0,TAB(10)STRING$(60,"-")
5190 PRINT#0,
5200 PRINT#0,
5210 PRINT#0,
5220 REM SERVIS SURELERI ICIN 5 DEN KUCUK FREKANSLARIN BELIRLENMESI
5230 LET K=0
5240 FOR A=1 TO Z
5250 IF Q(A)<5 THEN LET K=K+1:LET PP(K)=A:GOSUB 6130
5260 NEXT A
5270 LET W=0:LET W1=0
5280 FOR M=1 TO K
5290 LET W=W+Q(PP(M)):LET W1=W1+U(PP(M))
5300 NEXT M
5310 LET Q(PP(1)-1)=W+Q(PP(1)-1):LET U(PP(1)-1)=W1+U(PP(1)-1)
5320 REM SERVIS SURELERI ICIN KI-KARE TESTI
5330 LET Ia=0
5340 FOR I=1 TO Z-K
5350 LET X(I)=U(I)^2/Q(I)
5360 LET Ia=Ia+X(I)
5370 NEXT I
5380 LET Ja=Ia-Ba
5390 PRINT#0,TAB(5)"SERVIS SURELERI ICIN HESAPLANAN KI-KARE=";Ja
5400 PRINT#0,
5410 LET Ka=Ga*1440
5420 PRINT#0,TAB(5)"ORTALAMA SERVIS DEBISI=";Ga;"Hasta/Dak =";Ka;"Hasta/Gun"
5430 PRINT#0,
5440 PRINT#0,
5450 PRINT#0,
5460 REM SONUCLARIN DEGERLENDIRILMESI
5470 PRINT#0,TAB(25)"SONUCLARIN DEGERLENDIRILMESI"
5480 PRINT#0,
5490 PRINT#0,STRING$(76,"=")
5500 LET Uu=1-M1/Ka
```

EK-3 (devam ediyor)

```
5510 PRINT#Q,USING"! Bekleme hatti sisteminin bos olma olasiligi=##.##########          !";Uu
5520 PRINT#Q,"!";TAB(76)"!"
5530 LET Vv=(M1^2)/(Ka*(Ka-M1))
5540 PRINT#Q,USING"! Bekleme hattinda ortalama hasta sayisi=##.######### hasta          !";Vv
5550 PRINT#Q,"!";TAB(76)"!"
5560 LET Yy=M1/(Ka-M1)
5570 PRINT#Q,USING"! Bekleme hatti sisteminde ortalama hasta sayisi=##.######### hasta   !";Yy
5580 PRINT#Q,"!";TAB(76)"!"
5590 LET Zz=M1/(Ka*(Ka-M1))
5600 PRINT#Q,USING"! Bekleme hattinda ortalama bekleme suresi=##.######### gun         !";Zz
5610 PRINT#Q,"!";TAB(76)"!"
5620 LET Xx=1/(Ka-M1)
5630 PRINT#Q,USING"! Bekleme hatti sisteminde ortalama bekleme suresi=##.######### gun  !";Xx
5640 PRINT#Q,"!";TAB(76)"!"
5650 LET Ww=M1/Ka
5660 PRINT#Q,USING"! Sistem kullanim etmeni=##.#########                                !";Ww
5670 PRINT#Q,"!";TAB(76)"!"
5680 PRINT#Q,STRING$(76,"-")
5690 PRINT#Q,
5700 PRINT#Q,
5710 PRINT#Q,
5720 REM BEKLEME HATTI SISTEMINDE N MUSTERI BULUNMA OLASILIKLARI
5730 PRINT#Q,"BEKLEME HATTI SISTEMINDE N MUSTERI BULUNMA OLASILIKLARI"
5740 PRINT#Q,
5750 PRINT#Q,STRING$(55,"=")
5760 PRINT#Q,"!  MUSTERI SAYISI=N  !   N MUSTERI BULUNMA OLASILIGI  !"
5770 PRINT#Q,STRING$(55,"-")
5780 FOR N=1 TO 10
5790 LET H(N)=(1-M1/Ka)*(M1/Ka)^N
5800 PRINT#Q, USING"!       ##        !         #.#######        !";N,H(N)
5810 PRINT#Q,STRING$(55,"-")
5820 NEXT N
5830 END
5840 PRINT#Q:PRINT#Q:PRINT#Q
5850 PRINT#Q,TAB(40)"T. C."
5860 PRINT#Q,TAB(32)"ANADOLU  UNIVERSITESI"
5870 PRINT#Q,TAB(28)"EGITIM VE UYGULAMA HASTANESI"
5880 PRINT#Q,TAB(12)"KADIN HASTALIKLARI VE DOGUM ANABILIM DALI SERVISI BILGI FORMU"
5890 PRINT#Q,
5900 PRINT#Q,STRING$(82,"=")
5910 PRINT#Q,"!    !            !       !               H  A  S  T  A  N  I  N            !"
5920 PRINT#Q,"!    !            !       !---------------------------------------------------!"
5930 PRINT#Q,"!SIRA!   TARIH    ! HASTA !MUAYENE TETKIK VE!  EYLEM ODASINI KULLANIM SURESI   !"
5940 PRINT#Q,"! NO !            !PROTOKOL!  TEDAVI ODASINA !----------------------------------!"
5950 PRINT#Q,"!    !            !   NO  !   GELIS SAATI   ! EYLEM ODASINA  ! EYLEM ODASINDAN !"
5960 PRINT#Q,"!    !            !       !                 !  GIRIS SAATI   !   CIKIS SAATI   !"
5970 PRINT#Q,"!";STRING$(80,"-");TAB(82)"!"
5980 RETURN
5990 PRINT#Q,
6000 PRINT#Q,
```

EK-3 (devam ediyor)

```
6010 PRINT#0.
6020 PRINT#0.TAB(3)STRING$(73,"=")
6030 PRINT#0,TAB(3)"|    |                 |                H  A  S  T  A  N  I  N              |"
6040 PRINT#0,TAB(3)"|    |                 |----------------------------------------------------|"
6050 PRINT#0,TAB(3)"|SIRA|   TARIH         |  EYLEM ODASINA  | EYLEM ODASINDAN |  EYLEM ODASINI  |"
6060 PRINT#0,TAB(3)"| NO |                 |   GIRIS SAATI   |   CIKIS SAATI   | KULLANIM SURESI |"
6070 PRINT#0.TAB(3)"|":STRING$(71,"-"):TAB(75)"|"
6080 RETURN
6090 FOR C=Y TO P
6100 IF P(C)>5 THEN LET Z=Z+1:LET U(Z)=C
6110 NEXT C
6120 RETURN
6130 FOR B=A TO Z
6140 IF Q(B)>5 THEN LET K=K+1:LET PP(K)=B
6150 NEXT B
6160 RETURN
6170 DATA 01/11/1986,163260,00.10,15.05,22.15
6180 DATA 01/11/1986,191326,13.40,13.45,15.00
6190 DATA 02/11/1986,129319,03.00,03.30,14.00
6200 DATA 04/11/1986,188187,02.00,02.10,08.30
6210 DATA 05/11/1986,  3063,07.55,08.00.20.00
6220 DATA 05/11/1986.169871,21.00,21.10,00.30
6230 DATA 06/11/1986, 59235,08.30,08.45,08.55
6240 DATA 06/11/1986,192923,10.00,10.10,10.25
6250 DATA 06/11/1986,184879,11.10,11.30,11.50
6260 DATA 07/11/1986,188204,11.00,11.45,19.50
6270 DATA 07/11/1986,195334,16.00,19.55,23.45
6280 DATA 07/11/1986.120184,20.30,23.50,05.50
6290 DATA 09/11/1986,183209,03.00,03.20,08.30
6300 DATA 09/11/1986.195064,10.00,10.30,12.40
6310 DATA 10/11/1986.170906,05.00,05.30,10.30
6320 DATA 10/11/1986,167817,13.00,13.05,19.00
6330 DATA 11/11/1986.191059,04.20,05,00,06.50
6340 DATA 12/11/1986,193066.05.10,05.40,16.00
6350 DATA 13/11/1986.140273,09.00,09.10,10.15
6360 DATA 13/11/1986, 92773,09.20,10.20,11,15
6370 DATA 13/11/1986. 40000,13.05,13.20,16.20
6380 DATA 13/11/1986.163972,21.15,21.35,23.30
6390 DATA 14/11/1986.157958,03.45,04.10,05.15
6400 DATA 14/11/1986,168253,06.30,07.00,10.30
6410 DATA 14/11/1986.191748,09.35,10.35,18.30
6420 DATA 14/11/1986, 46562.11.40.18.35,19.40
6430 DATA 16/11/1986.187853,22.00,22.30,00.30
6440 DATA 17/11/1986.186033,09.00,09.15,09.30
6450 DATA 18/11/1986.128316.10.20.10.55,11.50
6460 DATA 19/11/1986.190750,17.30,17.50,22.50
6470 DATA 21/11/1986.186110.04.00.16.35,21.00
6480 DATA 21/11/1986,154997,06.30,07.00.08.30
6490 DATA 21/11/1986.187796,09.30,10.05.16.30
6500 DATA 21/11/1986,194967.12.30.21.05.23.50
```

EK-3 (devam ediyor)

```
6510 DATA 21/11/1986,190778,20.00,23.55,03.40
6520 DATA 22/11/1986,191287,00.05.05.20,19.20
6530 DATA 22/11/1986,194400,01.00,03.45,05.15
6540 DATA 22/11/1986,182020,21.30,22.00,23.00
6550 DATA 24/11/1986,165096,06.00,06.30,09.30
6560 DATA 24/11/1986,155768,07.00,13.35,14.45
6570 DATA 24/11/1986,100762,07.10,12.10,13.30
6580 DATA 24/11/1986, 32144.08.30,09.35,12.00
6590 DATA 25/11/1986,159771,09.00,09.10,09.30
6600 DATA 26/11/1986, 38076,04.30,08.20,08.40
6610 DATA 26/11/1986,145350,10.15,11.10,13.30
6620 DATA 27/11/1986,145350,10.15,11.10,13.30
6630 DATA 27/11/1986,136185.04.50,05.20,14.40
6640 DATA 29/11/1986,184087,21.15,21.20,01.55
6650 DATA 30/11/1986,151929,12.00,12.30,18.00
6660 DATA 30/11/1986, 69149,22.00,22.30,02.30
6670 DATA 01/12/1986, 89467,09.30,10.00,17.20
6680 DATA 01/12/1986,107153,20.45,21.10,23.50
6690 DATA 02/12/1986,191482,08.30,08.45,09.00
6700 DATA 02/12/1986,193828,09.30,10.00,15.15
6710 DATA 04/12/1986,185983,12.00,13.00,16.50
6720 DATA 04/12/1986,196854,17.00,21.30,05.00
6730 DATA 05/12/1986, 91218,18.00,21.45,03.20
6740 DATA 05/12/1986,169786,20.00,20.30,21.40
6750 DATA 06/12/1986,184725,11.30,12.00,21.30
6760 DATA 07/12/1986,136779,06.45,07.15,09.55
6770 DATA 09/12/1986,137934,05.30,06.10,07.15
6780 DATA 09/12/1986,196711,08.00,08.45,14.50
6790 DATA 09/12/1986,170041,08.05,14.55,15.45
6800 DATA 09/12/1986,196794,18.00,21.20,00.50
6810 DATA 09/12/1986,194907,19.00,19.15,21.15
```

EK-4

```
FILE: ERDIN    BASIC    A   T.C.ANADOLU UNIVERSITESI B.A.U.M.-ESKISEHIR

100 REM BİLGİSAYAR:IBM 4341
110 REM TEST * 16.08.1989 - HUSEYİN ERDİN *
120 REM
130 DİM M(500),KK(25,25),Q(10)
140 LET B=1
150 FOR İ=0 TO 449
160 İF İ=0 THEN B=1 : GOTO 180
170 LET B=B*İ
180 M(İ+1)=B
190 NEXT İ
200 LA=1.66666667
210 MU=6.09182688
220 FOR İ=1 TO 7
230 READ Q(İ)
240 NEXT İ
250 DATA 1,3,4,5,6,7,25
260 PRINT '            T=1          T=3          T=4          T=5          T=6';
270 PRINT 'T=7          T=25'
280 PRİNT
290 FOR N=1 TO 10
300 L=0
310 FOR Z=1 TO 7
320 T=Q(Z)
330 L=L+1
340 FOR J=0 TO 200
350 A=0
360 FOR R=0 TO J+N-1
370 A=A+(MU*T)**R/M(R+1)
380 NEXT R
390 B=EXP(MU*T)-A
400 C=(LA/MU)**(J+N)
410 D=(MU*T)**(J-1)
420 E=EXP(-(LA+MU)*T)
430 F=(LA*T)**(J+N)
440 G=M(J+N+1)*M(J+1)
450 H=H+C*D*E*(MU*T-J)*B/M(J+1)+F*D*E*J/G
460 NEXT J
470 KK(N,L)=H
480 H=0
490 NEXT Z
500 NEXT N
510 FOR N=1 TO 10
520 PRINT USING ' N=öö   ' : N;
530 PRINT ' ';
540 FOR S=1 TO L
550 PRINT USING ' öö.ööööööö ' : KK(N,S);
560 NEXT S
570 PRİNT
580 NEXT N
590 END
```

EK-5

FILE: LALE   BASIC   A   T.C.ANADOLU UNIVERSITESI B.A.U.M.-ESKISEHIR

```
100 OPEN ö1:NAME 'SONUC',OUTPUT,DiSPLAY,SEQUENTiAL
110 REM BiLGiSAYAR:IBM 4341
120 REM TEST * 16.08.1989 - HUSEYiN ERDiN *
130 REM
140 DiM M(500),KK(25,25),Q(13)
150 LET B=1
160 FOR i=0 TO 449
170 iF i=0 THEN B=1 : GOTO 190
180 LET B=B*i
190 M(i+1)=B
200 NEXT i
210 LA=1.66666667
220 MU=6.09182688
230 FOR i=1 TO 12
240 READ Q(i)
250 NEXT i
260 DATA 1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,25
270 FOR Z=1 TO 12
280 T=Q(Z)
290 PRiNT ö1: '          T=';T
300 PRiNT ö1: '---------------------'
310 PRiNT ö1
320 PRINT ö1: '        J=0      J=1      J=2      J=3      J=4      J=5';
330 PRINT ö1: '      J=6      J=7      J=8      J=9      J=10'
340 PRiNT ö1
350 FOR i=1 TO 10
360 FOR J=0 TO i
370 A=0
380 FOR R=0 TO i-1
390 A=A+(MU*T)**R/M(R+1)
400 NEXT R
410 B=EXP(MU*T)-A
420 C=(LA/MU)**i
430 D=(MU*T)**(J-1)
440 E=EXP(-(LA+MU)*T)
450 F=(LA*T)**i
460 G=M(i+1)*M(J+1)
470 H=C*D*E*(MU*T-J)*B/M(J+1)+F*D*E*J/G
480 KK(i,J)=H
490 NEXT J
500 NEXT i
510 FOR i=1 TO 10
520 PRINT ö1: 'I=';:PRINT ö1,USING ' öö ' : I;
530 FOR J=0 TO i
540 PRINT ö1,USING ' öö.öööö ' : KK(I,J);
550 NEXT J
560 PRiNT ö1
570 NEXT i
580 PRiNT ö1
590 PRiNT ö1
600 NEXT Z
610 END
```

KAYNAKLAR DİZİNİ

Ackoff Russel ve Maurice Wsasieni — Fundamentals of Operations Research. New York: John Wiley and Sons, Inc.,1968.

Akalın Sedat — Yöneylem Araştırması. Bornova:Ege Üni. İşletme Fak. Yayını,1979.

Albin Susan L. — "Analyzing M/M/1 Queues With Perturbations in the Arrival Process". J Opl. Res. Soc., C.35, N.4 (1984).

Bhat U. Narayan — "Sixty Years of Queueing Theory". Management Science, C.5, N.6 (Şubat 1969).

Churcman C. W., R. L. Ackoff ve E. L. Arnoff — Introduction to Operations Research. New York:John Wiley and Sons, Inc.,1957.

Clarke A. Bruce — The Time Dependent Waiting Line Problem. University of Michigan, Engineering Rerearch Institute, Report No. M720-1 R39 (1953).

Cooper Robert B. — Introduction to Queueing Theory New York: The Macmillan Company,1972.

Cox D. R. ve Walter L. Smith — Queues. London: Chapman and Hall,1971.

Feller W. — An Introduction to Probability and its Applications. New York: John Wiley and Sons. Inc.,1957.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam ediyor)

Ghosal A. "Some Aspects of Queueing and Storage Systems". Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Systems ,28. New York: Springer Verlag,1970.

Giffin Walter C. Queueing: Basic Theory and Applications. Ohio: Grid Inc.,1978

Gross Donald ve Carl Fundamentals of Queueing Theory. New York: John Wiley and Sons, Inc.,1974.

Gürtan Kenan İstatistik ve Araştırma Metodları. İstanbul: İstanbul Üni. İşletme Fak.Yayını,1977.

Halaç Osman İşletmelerde Simülasyon Teknikleri. İstanbul: İstanbul Üni. İşletme Fak. Yayını,1982.

Halaç Osman Kantitatif Karar Verme Teknikleri. İstanbul: Arpaz Matbaacılık,1978.

Hines William W. ve Douglas C. Montgomery Probability and Statistics in Engineering and Management Science. Second Edition. New York: John Wiley and Sons.,1972.

Hubbard John R., Claude Dennis Pegden ve Matthew Rosenshine "The Departure Process For the M/M/1 Queue". J. Appl. Prob., C.23, S.1 (Mart 1986).

Kara İmdat Olasılık. Eskişehir: Anadolu Üni. Eğitim Sağlık ve Bilimsel Araştırma Çalışmaları Vakfı Yayını,1989.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam ediyor)

Kara İmdat — Servis Sistemleri ve Gelişler Zamana Bağlı Olduğunda Kapasite Sorununa Matematiksel Yaklaşım. Eskişehir: Eskişehir İ.T.İ. Akademisi Yayını,1976.

Kendall D. G. — "Some Problems in the Theory of Queues". J. Roy. Statist. Soc., C.13, N.2 (1951).

Kosten L. — Stochastic Theory of Service Systems. Oxford: Pergamon Press,1973.

Köksal Mustafa — "Kuyruk Teorisi (Bekleme Hattı Teorisi)". İstanbul Üni İşletme Fak. Dergisi, C.9,S.1 (Nisan 1980).

Latouche Guy — "On the Trade-off Between Queue Congestion and Server's Reward in an M/M/1 Queue". European Journal of Operational Research, 4 (1980).

Lee Alec M. — Applied Queueing Theory. London: ST Martin's Press, 1966.

Massey William A. — "Asymtotic Analysis of the Time Dependent M/M/1 Queue". Mathematics of Operations Research, C.10, N.7 (Mayıs 1985)

Morse Philip M. — Queues, Inventories and Maintenence. New York: John Wiley and Sons, Inc.,1961.

Öztürk Ahmet — Yöneylem Araştırması. Bursa: Uludağ Üni. Basımevi, 1984.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam ediyor)

Pegden Claude Dennis ve Matthew Rosenshine	"Some New Results For the M/M/1 Queue" Management Science, C.28, N.7 (Haziran 1982)
Ross Sheplay L.	Differential Equations. Second Edition. New York: John Wiley and Sons, Inc.,1974.
Saaty Thomas L.	Elements of Queueing Theory. New York: Mc Graw Hill Book Company,1961.
Saaty Thomas L.	Mathematical Methods of Operations Research. New York: Mc Graw Hill Book Company,1959.
Sarıaslan Halil	Sıra Bekleme Sistemlerinde Simülasyon Tekniği. Ankara: Ankara Üni. Siyasal Bilgiler Fak. Yayını, 1986.
Scheaffer Richard L. ve James T. McClave	Probability and Statistics for Engineers. Second Edition. Boston: PWS-KENT Publishing Company,1986.
Sengupta Bhaskar	"Sojourn Time Distributions For the M/M/1 Queue in a Markovian Environment" European Journal of Operational Research, C.32, N.1 (Ekim 1987).
Serper Özer	Uygulamalı İstatistik. İstanbul: Filiz Kitabevi,1986.
Shanthikumar J. G. ve D. D. Yao	"Optimal Server Allocation in a System of Multi-Server Stations" Management Science, C.33, N.9 (Eylül 1982).

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam ediyor)

Şenkal Ender — "Bekleme Hattı Problemlerinin Temel Yapısı ve Tek Kanallı Servis Sisteminin Matematik Analizi". İstanbul Üni İşletme Fak Dergisi, C.1, S.1 (Nisan 1972).

Taha Hamdy A. — Operations Research an Introduction. Second Edition. New York: Macmillan Publishing Co., Inc.,1976.

Uluçay Cengiz — Fonksiyonlar Teorisi ve Riemann Yüzeyleri. İstanbul: Şirketi Mürettibiye Basımevi,1971.