

DERLEME/REVIEW

**PENROSE SÜRECİ VE KERR KARADELİĞİNİN  
ALANINDA HAREKET PROBLEMİ**

**Göksel Daylan ESMER<sup>1</sup>**

**ÖZ**

Newton'un Evrensel çekim yasası çerçevesi içinde, küresel simetrik bir kütle dağılımının doğurduğu gravitasyon alanında bir test taneciğinin yörüngesi, başlangıç koşullarına bağlı olarak, koniklerden biri olup hareket düzlemsel harekettir. Özellikle  $E < 0$  için yörüngeler, kapalı eğriler olan elipslerdir (Bağlı Yörüngeler). Buna karşılık Einstein'ın Genel Gravitasyon Teorisi yörüngelerin bağlı halde gözlemlerde uygun olarak, kapalı olmayan elipsler olduğunu göstermektedir (Perihelik Hareket). Küresel simetrik bir karadeliğin alanında bir test taneceğinin hareket düzleminin zenit açısının belirli iki değeri arasında salınım yapmakta olduğu yani hareketin artık bir düzlem hareket olmadığı gösterilmiş bulunmaktadır (Wilkins Olayı). Bu derlemede hem küresel simetrik bir karadeliğin alanında hem de spine sahip bir karadeliğin ekstenel simetrik gravitasyon alanında bir test taneciğinin hareketinin özellikleri sunulmaktadır.

**Anahtar Kelimeler:** Penrose Süreci, Kerr Karadeliği, Küresel Simetri, Ekstenel Simetri, Wilkins Olayı, Eliptik Yörünge.

**PENROSE PROCESS AND THE MOTION PROBLEM  
IN THE FIELD OF KERR BLACK-HOLE**

**ABSTRACT**

The orbit of a test particle in a gravitational field of a spherical symmetric mass distribution is one of conics depending to the initial conditions and the motion is a plane motion in the scope of the Newton's Gravitational law. Especially the orbits are ellipses (Bound orbits) which are closed curves for  $E < 0$ . On the other hand the Einstein's General Theory of Gravitation shows that the orbits are open ellipses in the bound states which coincides with observational results (Perihelic motion). Although this result does not change in the field of a spherical symmetric black-hole, in an axial symmetric gravitational field of spinning black-hole, the plane of motion of a test particle oscillates between two certain zenith angels so the motion is no longer a plane motion (Wilkins effect). In this review, the properties of the motion of a test particle in the fields of either a spherical symmetric black-hole or axially symmetric spinning black-hole is presented.

**Key words:** Penrose Process, Kerr Back-Hole, Spherical Symmetry, Axially Symmetry, Wilkins Effect, Elip-tical orbit.

<sup>1</sup> İstanbul Üniversitesi, Fen Fakültesi, Fizik Bölümü **E-mail:** gokselde @ hotmail. com, **Fax:** 0 212 5190834  
**Geliş:** 10 Kasım 1999; **Kabul:** 3 Şubat 2000.

## 1. GİRİŞ

Bilindiği gibi  $\vec{\xi}$  Killing vektör alanı ile tasvir edilen simetriye sahip bir geometride; “herhangi bir geodezik boyunca göz önüne alınan hareket, jeodeziğin teğeti ile Killing vektörünün skaler çarpımını sabit bırakır.” biçiminde ifade edilen bir teorem geçerlidir. Yani,  $\vec{p}$  ile, daima yörüngenin teğeti doğrultusunda bulunan, dörtlü momentum vektörü gösterilmek üzere

$$\vec{p} \cdot \vec{\xi} = \text{sabit}$$

ifadesi bir “hareket sabiti” tanımlamaktadır. Buna göre,  $\frac{\partial}{\partial t}$  ile  $r = \text{sabit}$ ,  $\theta = \text{sabit}$ ,  $\varphi = \text{sabit}$  ve  $\frac{\partial}{\partial \varphi}$  ile de  $t = \text{sabit}$ ,  $r = \text{sabit}$ ,  $\theta = \text{sabit}$  koordinat eğrilerinin teğet vektörlerinin gösterecek, eksnel simetrik stasyoner metriğin

$$\vec{\xi}_{(t)} \equiv \frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{\xi}_{(\varphi)} \equiv \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (1)$$

şeklindeki Killing vektörleri aracılığıyla (\*)

$$p_0 = \vec{p} \cdot \vec{\xi}_{(t)} = E \quad (2)$$

$$p_\varphi = \vec{p} \cdot \vec{\xi}_{(\varphi)} = -L_z \quad (3)$$

olacağı, yani eksnel simetrik stasyoner alandaki bir hareketin hareket sabitlerinin, taneciğin enerjisi ile açısal momentumunun karadelğin dönme eksenini doğrultusundaki bileşeni olduğu görülür.

## 2. PENROSE SÜRECİ

Şimdi dönen karadelğin alanındaki  $\mu$  kütleli bir test taneciğinin hareketini göz önüne alalım. Bu alanda önceden verilmiş herhangi bir noktadan geçen yörüngeler için taneciğin E enerjisinin her değeri alamayacağı ve E üzerinde bazı sınırların bulunacağı gösterilebilir. Bunun için verilen noktada yerel bir dik koordinat sistemi seçelim. Bu sistemde dörtlü hız vektörü,  $\vec{v}$  ile uzay kısmı gösterilerek,  $\gamma \equiv (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}}$  olmak üzere

$$\vec{u} = (\gamma, \gamma \vec{v})$$

ve  $\vec{\xi}_{(t)}$  ile,  $\vec{\xi}_{(t)}$  Killing vektörünün uzay kısmı gösterilerek

$$\vec{\xi}_{(t)} = \left( \xi^0, \vec{\xi} \right)$$

olacağından, Eş.(2) de gözönünde bulundurularak

$$E = \vec{p} \cdot \vec{\xi}_{(t)} = \gamma \mu \left( \xi^0 - \vec{v} \cdot \vec{\xi} \right) \quad (4)$$

yazılabilir. Yerel olarak Öklitsel, 3-boyutlu uzaydaki skaler çarpıma karşılık

$$\vec{v} \cdot \vec{\xi} = |\vec{v}| \left| \vec{\xi} \right| \cos \alpha$$

nın ekstremumları

$$\vec{v} \cdot \vec{\xi} = \pm v \left| \vec{\xi} \right| \quad (5)$$

dir. Öte yandan Boyer Lindquist koordinatlarında  $ds^2$  nin ifadesinden görüleceği üzere,  $\xi_{(t)}$  nin normunun karesi,  $\rho^2 \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta$  olmak üzere

$$\vec{\xi}_{(t)} \cdot \vec{\xi}_{(t)} = g_{00} = \left( 1 - \frac{2mr}{p^2} \right) \quad (6)$$

şeklinde olduğundan  $r > r_\infty$  için  $g_{00} > 0$  ve  $r < r_\infty$  için de  $g_{00} < 0$  dır. Bu da  $\vec{\xi}_{(t)}$  nin ergosfer içinde daima uzay cinsinden, statiklik sınırının dışında ise daima zaman cinsinden olacağı anlamına gelir. Bu durumda iki temel hal göz önüne alınabilir.

i)  $\vec{\xi}_{(t)}$  uzay cinsinden ise:  $\xi^0 < \left| \vec{\xi} \right|$  olduğu bu halde  $\vec{\xi}_{(t)} \cdot \vec{\xi}_{(t)} = g_{00} < 0$  olacağından göz önüne alınan nokta ergosfer içinde bulunacaktır. Eş. (4) den görüleceği gibi

$$E_{\text{ext}} = \gamma \mu \left( \xi^0 \pm v \left| \vec{\xi} \right| \right)$$

olduğundan, bu noktadan geçen yörüngelere sahip taneciğin enerjisi için

$$-\infty < E < \infty$$

değerleri mümkün olabilecektir. Yani taneciğin enerjisi her türlü değeri alabilecek bu arada negatif de olabilecektir. Sonsuz limitler,  $v \rightarrow 1$  dolayısıyla  $\gamma \rightarrow \infty$  değerlerine karşılık gelirken, bir maddesel tanecik için daima  $v < 1$ , dolayısıyla momentum dörtlü vektörünün daima zaman cinsinden olacağına dikkat edilmelidir.

ii)  $\vec{\xi}_{(t)}$  zaman cinsinden ise:  $\xi^0 > \left| \vec{\xi} \right|$  olduğu bu halde  $\vec{\xi}_{(t)} \cdot \vec{\xi}_{(t)} = g_{00} > 0$  olacağından göz önüne alınan nokta ergosferin dışında bulunacaktır. Bu halde Eş.(4) ifadesinin sağ yanı daima pozitif olacağından E

(\*) Işık hızı ve gravitasyonh sabiti sırasıyla  $c = 1$  ve  $G = 1$  alınmaktadır.

de daima pozitifdir. Eş.(5) ifadesi örneğin, pozitif işaret-  
le göz önüne alınır ve Eş.(4) de yerine konursa (eksi işa-  
retinin seçilmesi de aynı sonuca götürmektedir),

$$\left( \frac{E}{\mu} + \frac{E^2}{\mu^2} \right) v^2 - 2\xi^0 \xi v + \left( (\xi^0)^2 - \frac{E^2}{\mu^2} \right) = 0$$

olur. Bu ifade düzenlenecek olursa

$$\left( \xi + \frac{E^2}{\mu^2} \right) v^2 - 2\xi^0 \xi v + \left( (\xi^2) - \frac{E^2}{\mu^2} \right) = 0$$

şeklinde v ye göre ikinci dereceden bir denklem elde edilir. Bu denklemin diskriminantı sıfıra eşitlenerek v nin ekstremumlarına karşılık gelen değerler

$$\frac{E^2}{\mu^2} \left( \frac{E^2}{\mu^2} + \xi^2 - \xi^{0^2} \right) = 0$$

ifadesi yardımıyla belirlenir. E = 0 anlamsız hali bir yana bırakılacak olursa  $\frac{E}{\mu}$  nün alt sınırının,

$$\frac{E^2}{\mu^2} = (\xi^0)^2 - \xi^2 = \vec{\xi}(t) \cdot \vec{\xi}(t)$$

ile, yani o noktadaki Killing vektörünün normunun karesi ile belirleneceği anlaşılır. Böylece  $\frac{E}{\mu}$  nün, yalnızca pozitif değerler aldığı bu halde

$$\left( \vec{\xi}(t) \cdot \vec{\xi}(t) \right)^{1/2} \leq \frac{E}{\mu} < \infty$$

aralığında değişeceği görülmüş olur.

Öte yandan bilindiği gibi Kerr metriği, v,  $\psi$ ,  $\lambda_1$  ve  $\lambda_2$ , r ve  $\theta$  ya bağlı fonksiyonlar olmak üzere,

$$ds^2 = e^{2v} dt^2 - e^{2\psi} (d\phi - \omega dt)^2 - e^{2\lambda_1} dr^2 - e^{2\lambda_2} d\theta^2$$

şeklinde yazılabilmektedir [Lightman, et.al. (1975)]. Buradan, metriğin  $g^{\mu\nu}$  kontravaryant bileşenlerinin de

$$g^{00} = e^{-2v}, \quad g^{0\phi} = \omega e^{-2v}, \quad g^{\phi\phi} = -[e^{-2\psi} - \omega^2 e^{-2v}], \\ g^{rr} = -e^{-2\lambda_1}, \quad g^{\theta\theta} = -e^{-2\lambda_2}$$

olduğu görülür.  $\mu$  Sükûnet kütesine sahip bir tanecik için,

$$\mu^2 = \vec{p} \cdot \vec{p} = p^\nu p_\nu = g^{\lambda\nu} p_\lambda p_\nu \\ = e^{-2v} p_0^2 + 2\omega e^{-2v} p_0 p_\phi - e^{2\lambda_1} p_r^2 - \\ e^{-2\lambda_2} p_\theta^2 - [e^{-2\psi} - \omega^2 e^{-2v}] p_\phi^2$$

ifadesi,  $p_0 = E$  olduğu da göz önünde bulundurularak düzenlenecek olursa

$$E^2 + (2\omega p_\phi) E \pm \left[ \begin{array}{l} (e^{2v} - 2\psi - \omega^2) p_\phi + \\ e^{2v} (e^{-2\lambda_1} p_r^2 + e^{-2\lambda_2} p_\theta^2 + \mu^2) \end{array} \right] = 0$$

ikinci derece denklemi elde edilir. Bu denklemin kök-  
leri

$$E = -\omega p_\phi \pm [e^{2v} - 2\psi p_\phi^2 + e^{2v} (e^{-2\lambda_1} p_r^2 + e^{-2\lambda_2} p_\theta^2 + \mu^2)]^{1/2}$$

dir. Sonsuzda sükûnetteki ( $p_r = p_\theta = p_\phi = 0$ ) bir tanecik için  $E \rightarrow +\mu$  olmasını sağladığından, yalnızca + işaret-  
li terimi içeren kök kabul edilebilir çözümü temsil et-  
mektedir. Buna göre, E nin negatif olduğu haller için,  
 $p_\phi (= L_z)$  nin pozitif olması ve aynı zamanda

$$[e^{2v} - 2\psi p_\phi^2 + e^{2v} (e^{-2\lambda_1} p_r^2 + e^{-2\lambda_2} p_\theta^2 + \mu^2)]^{1/2} < \omega p_\phi \quad (7)$$

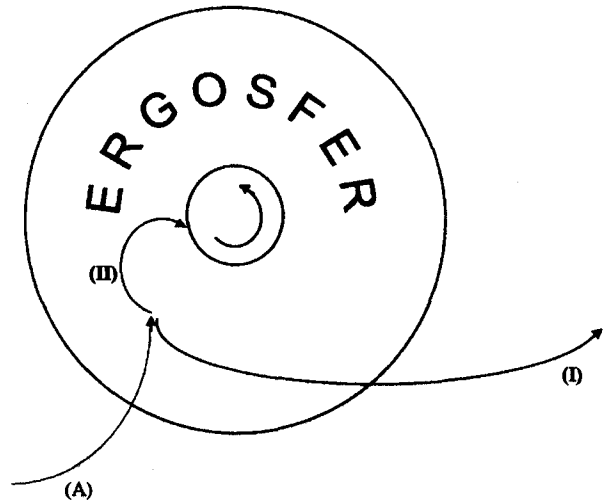
koşulunun sağlanması gerekir. Buradan, Kerr alanında E nin ancak ergosfer içinde negatif olabileceği bir kez daha görülebilir. Gerçekten de, örneğin ( $p_r = p_\theta = 0$ ) olacak şekilde bir hareket yapan, oldukça rölativist bir tanecik ( $\mu \rightarrow 0$ ) için Eş.(7) den

$$e^{2v} - 2\psi < \omega^2$$

$$e^{2v} - \omega^2 e^{2\omega} = g_{00} < 0$$

olacağı yani, Eş.(6) dolayısıyla, ergosfer içinde E nin negatif olacağı anlaşılır.

Şimdi Şekil 1 deki gibi, sonsuzdan gelip ergosfere giren bir A taneciği, herhangi bir biçimde iki taneciğe ayrılmış olsun. Ergosferde  $\vec{\xi}(t)$  Killing vektörünün uzay cinsinden olması, bu bölgede sükûnet halinin mümkün olamayacağını gösterir. Gerçekten de dört boyutlu uzay-zamanda teğeti  $\vec{\xi}(t)$  ile belirlenen, uzay cinsinden bir yörüngeyi izlemesi mümkün olmadığından (I) ve (II)



Şekil 1. Dönen bir karadelikten Penrose sürecine bağlı enerji sağının şematik olarak gösterimi.

tanecikleri ya karadeliğe ya da ergosferin dışına doğru, hareket etmek zorundadırlar. Bozunmadan önce ve sonrası için, dörtlü momentum korunumu

$$\vec{p}^{(A)} = \vec{p}^{(I)} + \vec{p}^{(II)}$$

dir. Bu ifadenin her iki yanının  $\vec{\xi}_{(t)} = \frac{\partial}{\partial t}$  Killing vektörü ile skaler çarpımı

$$E^{(A)} = E^{(I)} + E^{(II)} \quad (8)$$

şeklindeki enerji korunumunu verir. Buradan karadeliğe aktarılan enerji ise

$$\Delta W = E^{(A)} - E^{(I)} = E^{(II)} = \vec{p}^{(II)} \cdot \vec{\xi}_{(t)}$$

olur. Böylece, bozunma ergosfer dışında ise, her iki taneciğin de  $p_\phi$  leri negatif dolayısıyla enerjileri pozitif olacağından karadeliğin enerji kazanacağı, bozunma ergosfer içinde ise, bu halde bozunmadan sonra oluşan (II) taneciğinin enerjisi negatif olabileceğinden karadeliğin enerji kaybedeceği anlaşılmış olur. Bu son halde, Eş.(8) dolayısıyla,  $E^{(II)} > E^{(A)}$  olduğundan (I) taneciği, giren taneciğe göre daha büyük bir enerjiyle ergosferi terk etmektedir. Bu şekilde yörüngeleri ergosfere uzanan tanecikler yardımıyla bir Kerr karadeliğinden enerji sağlanabileceği ve böyle bir sürecin sonunda karadeliğin, açısız momentumu sıfıra indirgenmiş bir Schwarzschild karadeliğine evrimleşeceği anlaşılır [Penrose (1969)].

### 3. KERR KARADELİĞİNİN ALANINDA HAREKET

Şimdi dönen bir karadeliğin alanında bulunan bir test taneciğinin hareket denklemlerini ve hareketinin özelliklerini incelemek istiyoruz.

$\lambda$  parametresi,  $\tau$  öz-zamanı cinsinden  $\tau \equiv \mu\lambda$  şeklinde tanımlanan bir parametre olmak üzere  $\mu$  kütleli bir test taneciğinin momentum dörtlü vektörü

$$p^\alpha = \mu u^\alpha = \mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} = \frac{dx^\alpha}{d\lambda}$$

dir. Süper-Hamilton fonksiyonunu

$$H = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta \quad (9)$$

şeklinde tanımlanıp

$$S = \int (p_\alpha dx^\alpha - H d\lambda)$$

aksiyonu yardımıyla ve  $\delta S = 0$  aksiyon ilkesinden hareketle taneciğin

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} + \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{matrix} \right\} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \frac{dx^\gamma}{d\lambda} = 0$$

şeklindeki hareket denklemlerinin elde edilebileceği ise kolayca gösterilebilir [Misner, et. al.(1973)]. Taneciğin hareketini Hamilton-Jacobi formalizmi [Goldstein (1980)] ile incelerken, Eş.(9)'u göz önünde bulundurup hareket denklemlerinin çözümlerini elde edeceğimiz [Carter (1968)].

Kerr alanının, ekstenel simetrik ve stasyonere bir alan olması, bu alanda hareket eden bir tanecik için  $p_\phi = E$  ve  $p_\theta = L_z$  büyüklüklerinin birer hareket sabiti olmalarını sağlamakta idi. Bunların yanısıra momentum dörtlü vektörünün normu da

$$|\vec{p}|^2 = g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = \mu^2$$

olduğundan korunmaktadır. Şimdi,  $p^\alpha = \frac{\partial S}{\partial x^\alpha}$  olmak üzere

$$H \left( x^\alpha, \frac{\partial S}{\partial x^\beta} \right) = - \frac{\partial S}{\partial \lambda}$$

şeklindeki Hamilton-Jacobi denklemi Eş.(9) göz önünde bulundurularak düzenlenecek olursa

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial S}{\partial x^\alpha} \frac{\partial S}{\partial x^\beta} = 0 \quad (10)$$

denklemi elde edilir. Öte yandan Boyer-Lindquist koordinatlarında Kerr metriğinin,  $G = 1$  ve  $c = 1$  alınan sistemde  $m = M$  olduğuna da dikkat ederek

$$\rho^2 \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta = r^2 + a^2 - 2Mr$$

olmak üzere

$$ds^2 = \frac{\Delta}{\rho^2} [dt - a \sin^2 \theta d\phi]^2 - \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} [(r^2 + a^2) d\phi - a dt]^2 - \frac{p^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2$$

şeklinde yazılabilen ifadesini [d'Inverno (1992)] göz önüne alalım. Buna göre metrik tansörün  $g^{\alpha\beta}$  kontravaryant bileşenleri Eş.(10) a taşınacak olursa,

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \lambda} = & - \frac{1}{2\Delta\rho^2} \left[ (r^2 + a^2) \frac{\partial S}{\partial t} + a \frac{\partial S}{\partial \phi} \right]^2 \\ & + \frac{1}{2\rho^2 \sin^2 \theta} \left[ \frac{\partial S}{\partial \phi} + a \sin^2 \theta \frac{\partial S}{\partial t} \right]^2 \\ & + \frac{\Delta}{2\rho^2} \left( \frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2\rho^2} \left( \frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 \end{aligned} \quad (11)$$

denklemi elde edilir. Bu denklemi değişkenlere ayrışım yöntemiyle çözmek üzere

$$S(t, r, \theta, \phi, \lambda) = S_0(t) + S_1(r) + S_2(\theta) + S(\phi) + \bar{S}(\lambda) \quad (12)$$

alalım.

$$H = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} P_\alpha P_\beta = \frac{1}{2} \mu^2$$

olduğundan

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} = \frac{d\bar{S}}{d\lambda} = -H = -\frac{1}{2} \mu^2$$

den

$$\bar{S}(\lambda) = -\frac{1}{2} \mu^2 \lambda \quad (13)$$

olması gerektiği görülür. Öte yandan  $p_0 = E$  ve  $p_\varphi = -L_z$  şeklindeki hareket sabitleri yardımıyla da

$$p_0 = \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{dS_0}{dt} = E \rightarrow S_0(t) = Et \quad (14)$$

$$p_\varphi = \frac{\partial S}{\partial \varphi} = \frac{dS_3}{d\varphi} = -L_z \rightarrow S_3(\varphi) = -L_z \varphi \quad (15)$$

olacağından Eş.(13) - (15), Eş.(12) de yerine konarak S aksiyonu

$$S = -\frac{1}{2} \mu^2 \lambda + Et - L_z \varphi + S_1(r) + S_2(\theta) \quad (16)$$

olur. Bu son ifadeyi Eş.(11) denkleminde taşıyıp

$$-\mu p^2 = -\frac{1}{\Delta} [E(r^2 + a^2) - aL_z]^2 +$$

$$\frac{1}{\sin^2 \theta} [L_z - aE \sin^2 \theta]^2 + \Delta \left( \frac{dS_1}{dr} \right)^2 + \left( \frac{dS_2}{d\theta} \right)^2$$

şeklinde yazılabilen denklemi ayırıştırarak olursak

$$P \equiv E(r^2 + a^2) - aL_z \quad (17)$$

olmak üzere, K ile ayrışım sabiti gösterilerek

$$-\mu^2 r^2 + \frac{P^2}{\Delta} - L_z^2 - a^2 E^2 + 2aEL_z - \Delta \left( \frac{dS_1}{dr} \right)^2$$

$$= \cos^2 \theta \left[ a^2 (\mu^2 - E^2) + \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta} \right] + \left( \frac{dS_2}{d\theta} \right)^2 = K$$

yazılır. Böylece

$$\left( \frac{dS_2}{d\theta} \right)^2 = K - \cos^2 \theta \left[ a^2 (\mu^2 - E^2) + \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta} \right] \equiv \Theta \quad (19)$$

$$\Delta^2 \left( \frac{dS_1}{dr} \right)^2 = P^2 - \Delta [\mu^2 r^2 + (L_z - aE)^2 + K] \equiv R \quad (20)$$

den

$$S_2 = \int \sqrt{\Theta} d\theta \quad , \quad S_1 = \int \Delta^{-1} \sqrt{R} dr$$

bulunurlar.  $S_1$  ve  $S_2$  (16) da yerine konacak olursa S aksiyonu

$$S = \frac{1}{2} \mu^2 \lambda - Et + L_z \varphi + \int \Delta^{-1} \sqrt{R} dr + \int \sqrt{\Theta} d\theta$$

olur.  $\alpha_i$  sabitlerini

$$\alpha_1 \equiv \mu^2 \quad , \quad \alpha_2 \equiv E \quad , \quad \alpha_3 \equiv L_z \quad , \quad \alpha_4 \equiv K + (L_z - aE)^2$$

şeklinde alıp,  $\frac{\partial S}{\partial \alpha_4}$ ,  $\frac{\partial S}{\partial \mu^2}$ ,  $\frac{\partial S}{\partial E}$ ,  $\frac{\partial S}{\partial L_z}$  ifadelerini sıfıra eşitlemek suretiyle, test taneciğinin yörüngesini tasvir eden, sırasıyla

$$\int \frac{dr}{\sqrt{R}} = \int \frac{d\theta}{\sqrt{\Theta}}$$

$$\lambda = \int \frac{a^2 \cos^2 \theta}{\sqrt{\Theta}} d\theta + \int \frac{r^2 dr}{\sqrt{R}}$$

$$t = \int \frac{(r^2 + a^2)P}{\Delta \sqrt{R}} dr + \int \frac{-a(aE \sin^2 \theta - L_z)}{\sqrt{\Theta}} d\theta \quad (21)$$

$$\varphi = \int \frac{aP}{\Delta \sqrt{R}} dr + \int \frac{-(aE \sin^2 \theta - L_z)}{\sin^2 \theta \sqrt{\Theta}} d\theta$$

denklemleri elde edilir. Şimdi yukarıdaki denklemler yardımıyla kolayca düzenleyeceğimiz, hareket denklemlerinin,

$$\rho^2 \frac{dr}{d\lambda} = \sqrt{R}$$

$$\rho^2 \frac{d\theta}{d\lambda} = \sqrt{\Theta}$$

(22)

$$\rho^2 \frac{d\varphi}{d\lambda} = -\left( aE - \frac{L_z}{\sin^2 \theta} \right) + \frac{a}{\Delta} P$$

$$\rho^2 \frac{dt}{d\lambda} = -a(aE \sin^2 \theta - L_z) + \frac{r^2 + a^2}{\Delta} P$$

şeklindeki ilk integrallerini, çeşitli başlangıç koşulları altında incelemek suretiyle, Kerr alanındaki test taneciğin hareketinin özelliklerini belirlemek istiyoruz. Bunun için önce, özellikle bir karadeliğin alanında önem kazanan, iki hal için çözümün mümkün olduğunu gösterip özelliklerini irdeleneceğiz.

#### 4. KARADELİĞİN EKSENİNDEN GEÇEN ÇEMBER YÖRÜNGE

Bu halde Eş.(22) nin yalnızca ilk iki denklemini göz önünde bulunduracağız. Böyle bir yörünge için,  $\theta = 0$  ve  $\theta = \pi$  de, yani karadeliğin ekseninde  $\frac{d\theta}{d\lambda}$  nın reel olabilmesi için,  $\Theta$  nın bu eksen üzerinde pozitif olması gerekir. Ayrıca bu halde  $L_z = 0$  olacağı da göz önünde bulundurularak Eş.(19) dan K hareket sabitinin

$$K > a^2 (\mu^2 - E^2)$$

olması gerektiği görülür. Buna göre

$$T \equiv K - a^2 (\mu^2 - E^2) > 0$$

olmak üzere Eş.(17) ve (20) yardımıyla Eş.(22) nin ilk denklemini

$$\rho^4 \left( \frac{dr}{d\lambda} \right)^2 = R = E^2 (r^2 + a^2)^2 - \Delta [\mu^2 (r^2 + a^2) + T] \quad (23)$$

olur. Buna göre,  $V_r$  efektif potansiyeli,  $\frac{dr}{d\lambda} = 0$  olduğu dönüm noktasında  $E^2 - V_r^2 = 0$  bağıntısıyla tanımlanmakta olduğundan [Golstein (1980), Misner, et. al. (1973), Adler, et. al. (1975)] Eş.(23) sıfıra eşitlenmek suretiyle E çekilip  $V_r$  efektif potansiyeli

$$E^2 = \frac{\Delta [\mu^2 (r^2 + a^2) + T]}{(r^2 + a^2)} \equiv V_r^2$$

şeklinde elde edilir. Dairesel yörüngeler için  $\frac{dV_r}{dr} = 0$  olduğu göz önünde bulundurularak, buradan T pozitif sabiti

$$T = \frac{\mu^2 (r - m) (r^2 + a^2)^2}{2r\Delta - (r - m) (r^2 + a^2)}$$

şeklinde çekilir de yerine konacak olursa,  $\mu$  sükunet kütleli test taneciğinin söz konusu yörüngedeki enerjisi,

$$E^2 = \frac{\mu^2 r \Delta^2}{(r^2 + a^2) (r^3 - 3mr^2 + a^2 r + a^2 m)} \quad (24)$$

şeklinde elde edilir. Çok büyük r değerleri için bu ifadenin

$$E \equiv \left( \mu - \frac{m}{2r} + \dots \right)$$

şeklindeki, dairesele yörüngeler için Newtonsal bağıntısını vermekte olduğu görülmektedir. Eş.(24) ün payı pozitif olup, paydasının sıfır olması halinde (E nin sonsuz olmasıyla) bir çözümden söz edilemeyecektir. Buna göre

$$r^2 - 3mr^2 + a^2 r + a^2 m = 0$$

ile belirlenen

$$r = m \left[ 1 + \frac{2 \left( 3 - \frac{a^2}{m^2} \right)^{1/2}}{3^{1/2}} \cos \left( \frac{1}{3} \arccos \frac{3^{3/2} \left( 1 - \frac{a^2}{m^2} \right)}{\left( 3 - \frac{a^2}{m^2} \right)^{3/2}} \right) \right] \quad (25)$$

minimum yarıçapı haiz yörüngeye kadar, karadelinin ekseninden geçen dairesele yörüngeler mümkün olabilecektir.  $E \rightarrow \infty$  olduğu bu yörüngenin  $v \rightarrow 1$  durumuna karşı düşen (daha önce E nin  $\pm \infty$  limitlerinin  $v = 1$  için söz konusu olduğu tartışılmıştı) foton yörüngesi olduğunu belirtelim. Görüldüğü gibi yarıçapın alt sınırı

$$a = 0 \quad \text{için (Schwarzschild Hali)} \quad r = 3m$$

$$a = m \quad \text{için (Uç Kerr Hali)} \quad r = (1 + \sqrt{2}) m$$

değerlerine karşı düşmektedir.

## 5. EKVATOR DÜZLEMİNDEKİ ÇEMBER YÖRÜNGE

Şimdi de kısaca bu halin özelliklerini [Novikov-Frolov (1989)] gözden geçirmek istiyoruz.  $\theta = \frac{\pi}{2}$  düzlemindeki bu harekette  $\Theta = 0$  ve Eş.(19) dolayısıyla  $K = 0$  dir. Buna göre Eş.(22) nin

$$r^3 \left( \frac{dr}{d\lambda} \right)^2 = E^2 (r^3 + a^2 r + 2ma^2) - 4maL_z E - (r - m)L_z^2 - \mu^2 r \Delta \quad (26)$$

$$\frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{(r - 2m)L_z + 2maE}{r\Delta} \quad (27)$$

şeklinde düzenleyeceğimiz birincisi ve üçüncüsü hareketi tasvir etmek üzere yeterli olacaktır. İlk halde olduğu gibi Eş.(26) nin sağ yanı sıfıra eşitlenerek E çözülecek olursa  $V_r$  efektif potansiyeli belirlenir.  $V_r$  nin bu ifadesi, dairesele yörüngelerin, efektif potansiyelin ektramumlarına karşılık düşüğü göz önünde bulundurularak, düzenlenmek suretiyle, birim kütleli ( $\mu = 1$ ) bir test taneciğinin dairesele yörüngeleri için

$$E = \frac{r^2 - 2mr \pm a\sqrt{mr}}{r(r^2 - 3mr \pm 2a\sqrt{mr})^{1/2}} \quad (28)$$

$$L_z = \pm \frac{\sqrt{mr}(r^2 \pm 2a\sqrt{mr} + a^2)}{r(r^2 - 3mr \pm 2a\sqrt{mr})^{1/2}} \quad (29)$$

bulunur.  $L_z$  nin ifadesindeki (+) işareti, dairesele yörüngede bulunan bir taneciğin dönme yönünün karadelinin dönme yönüyle aynı olduğu hale, (-) işareti ise zıt yönlü dönmeye karşı düşmektedir. Karadelige en yakın dairesele yörünge, önceki hale benzer şekilde, Eş.(28) de  $E \rightarrow \infty$  olduğu hale karşı düşen foton yörüngesi olup, yarıçapının

$$r_{\pm} = 2m \left\{ 1 + \cos \left[ \frac{2}{3} \arccos \left( \pm \frac{a}{m} \right) \right] \right\} \quad (30)$$

ile verileceği ve buradan da

$$a = 0 \quad \text{için (Schwarzschild Hali)} \quad r = 3m$$

$$a = m \quad \text{için (Uç Kerr Hali)} \quad r_{\pm} = 4m, \quad r_{-} = m$$

olacağı görülür. Öte yandan  $E \rightarrow \mu$  olduğu hale karşı düşen kararsız dairesele yörüngesinin yarıçapı (açık yörüngelere geçiş sınırı),  $\mu = 1$  için çıkarılmış bulunan Eş.(21) de  $E = 1$  koyarak

$$r_k = 2m \pm a + 2\sqrt{m(m \pm a)^{1/2}} \quad (31)$$

şeklinde bulunur. Bu yarıçap değerleri Eş.(21) ile tasvir olunan yörüngelerden parabolik yörüngelerin periheline karşılık düşer. Ekvator düzleminde  $V_{\infty} < c$  hızıyla gelen ve karadelige  $r_k$  dan daha fazla yaklaşan bir tanecik, kapalı yörüngelere girer, dolayısıyla karadelik tarafından yakalanmış olur.

İncelediğimiz iki özel halde, göz önüne alınan düzlemlerle sınırlı olmayan genel halde bağlı yörüngeler ve

bu yörüngelerin bütün özellikleri ayrıntılı olarak incelenmiştir [Wilkins (1972)]. Bu genel halde  $\theta$  nin değişimi yönündeki harekete ilişkin  $V_\theta^2$  efektif potansiyeli,  $V_r$  e benzer şekilde  $\theta$  yı, dolayısıyla  $\Theta$  yı sıfır yapan  $E^2$  değeri olarak tanımlanır. Eş.(22) nin ikinci denklemi ve Eş.(19) yardımıyla

$$\rho^2 \frac{d\theta}{d\lambda} = \sqrt{\Theta} = 0$$

ve

$$\Theta = K - \cos^2 \theta \left[ a^2(\mu^2 - V_\theta^2) + \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta} \right] = 0 \quad (32)$$

dan  $V_\theta^2$  için

$$V_\theta^2 = \mu^2 + \frac{1}{a^2} \left( \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta} - \frac{K}{\cos^2 \theta} \right) \quad (33)$$

bulunur.  $V_\theta^2$  nin bu ifadesi yardımıyla düzenlenen  $\Theta$

$$\Theta = a^2 \cos^2 \theta (E^2 - V_\theta^2)$$

şeklinde yazılır. Buna göre

a)  $K = 0$  ise ve hareket ekvator düzlemini kateden bir hareket ise, hareketin daima bu düzlemde kalacağı anlaşılır. Gerçekten de  $K = 0$  olduğu halde  $\theta = \frac{\pi}{2}$  dışında Eş.(32) sağlanmadığından,  $\dot{\theta}$  nın sıfır olduğu,  $\theta = \frac{\pi}{2}$  ye karşılık gelen bir tek dönüm noktası bulunmaktadır.

b)  $K > 0$  ise hareket, taneciğin açısal momentumu ve enerjisine bağlı olarak ekvator düzleminin dışında bir maksimum  $\theta$  değeriyle sınırlanmaktadır. Newtonsal haldeki gibi gerek Schwarzschild gerekse Reisner-Nordstrom halinde test taneciğinin hareketinin bir düzlem hareket olmasına karşılık Kerr (ve Kerr Newman) halinde taneciğin yörüngesinin, Eş.(32) yi sağlayan  $\theta_+$  ve  $\theta_-$  gibi iki dönüm noktası arasında, fazladan bir salınım yapacağı anlaşılır. Bu salınım hareketine *Wilkins Olayı* [Wilkins (1972), Johnston and Ruffini (1974)] denilmektedir.

Öte yandan  $K > 0$  halinde hareketin, karadeliğin simetri eksenine ulaşması ise, ilk örnekte incelediğiniz gibi ancak  $L_z = 0$  ve  $K \geq a^2 (\mu^2 - E^2)$  için gerçekleşebilecektir.

## KAYNAKÇA

- Adler, R., Basin, M., Schiffer, M. (1975): *Introduction to General Theory of Relativity*, Mac Graw Hill, New York.
- Carter, B. (1968): Global Structure of the Kerr Family of Gravitational Fields, *Phys. Rev.* 174, 1559-1571.
- D'inverno, R. (1992): *Introducing Einstein's Relativity*, Clarendon Press, Oxford.
- Goldstein, H. (1980): *Classical Mechanics*, Addison-Wesley Publ. Comp., Amsterdam, London.
- Johnston, M., Ruffini, R. (1974): Generalized Wilkins Effect and Selected Orbits in a Kerr-Newman Geometry, *Phys. Rev. D*, 10, 2324-2329.
- Lightman, A.P., Press, W. H., Price, R. H., Teukolsky, S. A. (1975): *Problem Books In Relativity and Gravitation*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- Misner, C. W., Thorne, K. S., Wheeler, J. A. (1973): *Gravitation*, Freeman, San Francisco.
- Novikov, I. D., Frolov, V. P. (1989): *Physics of Black Holes*, Kluwer Academic Publishers, Netherlands.
- Penrose, R. (1969): Gravitational Collapse, The Role of General Relativity, *Riv. Nuovo Cimento*, 1, 242.
- Wilkins, D. C. (1972): Bound Geodesics in the Kerr Metric, *Phys. Rev. D*, 5, 814-822.



**Göksel Daylan Esmer**  
1965 Mardin doğumludur. 1987 yılında İstanbul Üniversitesi Fizik Bölümü'nden mezun olduktan sonra 1990 da yüksek lisansını, 1997'de doktoraasını aynı bölümde tamamlamıştır. Esmer'in araştırma alanları, Genel Rölativite Teorisi, Karadelik Fiziği'dir.