ANADOLU ÜNİVERSİTESİ BİLİM VE TEKNOLOJİ DERGİSİ
ANADOLU UNIVERSITY JOURNAL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
Cilt/Vol.:1 - Sayı/No: 1 : 105-113 (2000)

ARAŞTIRMA MAKALESİ/**RESEARCH ARTICLE**

DENGELİ İKİ-SEVİYELİ ŞANSA BAĞLI İÇ-İÇE DÜZENLENMİŞ DENEMELERDE VARYANS BİLEŞENLERİNİN TAHMİNİ İÇİN VARYANS ANALİZ, MAKSİMUM OLABİLİRLİK VE KISITLANMIŞ MAKSİMUM OLABİLİRLİK METOTLARININ KARŞILIKLI OLARAK İNCELENMESİ

M. Ziya FIRAT [1]

ÖZ

Varyans bileşenlerinin tahmini kantitatif genetikçiler ve hayvan ıslahçıları için oldukça önemlidir. Son zamanlarda varyans bileşenlerinin tahmini için birçok metot geliştirilmiştir, örneğin varyans analizi (ANOVA) ve maksimum olabilirlik (ML) ve kısıtlanmış maksimum olabilirlik (REML) gibi olabilirliğe dayalı metotlar. Varyans bileşenlerinin tahmini için kullanılan ANOVA metodu kareler ortamlarını beklenen değerlerine eşitlemekten ibarettir. Fakat, bu yöntemin sakıncalı tarafı varyans bileşenlerinin negatif tahminlerini vermesidir. Olabilirlik teorisine dayalı yöntemlerinin kullanılması ile bunun üstesinden gelinebilir. Bu makalenin amacı, dengeli iki seviyeli şansa bağlı iç-içe düzenlenmiş deneme planlarında maksimum olabilirlik metotlarının varyans bileşenlerinin tahmini için olabilirlik fonksiyonu kullanarak nasıl türetilebildiklerini göstermek, varyans bileşenlerinin negatif tahmini probleminin nasıl üstesinden geldiklerini göstermek, bu metotları teorik açıdan ANOVA metodu ile karşılıştırmak ve sayısal bir örnekle sonuçların uygulanabilirliğini göstermektir.

Anahtar Kelimeler: İç-içe düzenleme, varyans analizi, maksimum ve kısıtlanmış maksimum olabilirlik.

COMPARATIVE INVESTIGATION OF VARIANCE ANALYSIS, MAXIMUM LIKELIHOOD AND RESTRICTED MAXIMUM LIKELIHOOD FOR THE ESTIMATION OF VARIANCE COMPONENTS IN BALANCED TWO-STAGE RANDOM NESTED DESIGNS

ABSTRACT

The estimation of variance components is of primary importance to the quantitative geneticist and animal breeders. A wide array of methods have recently been developed for estimating variance components, for example, analysis of variance (ANOVA) and likelihood based methods such as maximum likelihood (ML) and restricted maximum likelihood (REML). The ANOVA method for estimating variance components is based on equating the mean squares to their expectations. However, the problem with this method is that it gives negative estimates of variance components. This can be overcome by the use of likelihood based methods. The purpose of this paper is to show how maximum likelihood and restricted maximum likelihood methods can be derived using a likelihood function for the estimation of variance components in balanced two-stage random nested designs, to demonstrate how they overcome the problem of negative estimates of variance components, to compare these methods with ANOVA method from a theoretical point of view and to illustrate the applicability of results with a numerical example.

Key words: Nested desingns, analysis of variance, maximum and restricted maximum likelihood.

1 Akdeniz Üniversitesi, Ziraat Fakültesi, Zootekni Bölümü, 07059 - ANTALYA
Faks: (242) 227 45 64 **E-posta:** mzf@agric.akdeniz.edu.tr
Geliş : 10 Aralık 1999; **Düzeltme:** 3 Nisan 2000; **Kabul:** 21 Nisan 2000.

1. GİRİŞ

Varyans bileşenleri ile ilgili problemlerde iç-içe düzenlenmiş deneme planları uygulamada en çok kullanılan deneme planlarıdır. Genetikte, bitki ve hayvan ıslahı çalışmalarında en çok başvurulan deneme planı olup bu deneme planında varyans bileşenlerinin ayrı ayrı tahmin edilmeleri önem taşımaktadır (Bek ve Efe, 1995). Varyans bileşenleri, bilhassa çiftlik hayvanlarının genetik ıslah, teori ve uygulamalarında, özellikle genetik varyasyon kaynaklarını tayin etmede ve seçilecek damızlık adayı erkek ve dişi çiftlik hayvanlarının, ekonomik değeri yüksek özellikler bakımından damızlık değerini belirlemede çok sıkça kullanılmaktadır (Fırat ve Bek, 1997). Örneğin, hayvan ıslahçısı boğalar, boğalar içi inekler ve inekler içi döller şeklinde karekterize edilen verilerle ilgileniyor olabilir. Böylesi durumlarda varyans bileşenlerinin tahmini, sadece denemedeki kaynaklarının optimum dağılımı bakımından değil aynı zamanda değişik gruplar arası korelasyonların tahmini için, örneğin bir süt sığırının birbirini izleyen süt verim kayıtlarının tekrarlama derecesi veya kalıtım derecesi için de önem taşımaktadır. Arazi çalışmalarında, model sabit faktör etkisine sahip olabilir. Örneğin balıkçılıkla ilgili bir çalışmada özel olarak seçilmiş birkaç havuz ilgi alanı olabilir ve herbir havuzdan şansa bağlı olarak alınan örnekler incelemeye konu olabilir (Gill, 1978). Yani iç-içe düzenlenmiş deneme planına ait bir model şansa bağlı etkiler yanında sabit etkiye de sahiptir.

Varyans bileşenlerinin tahmini için son 30 yılda geliştirilen metotlar arasında Varyans Analizi ve Maksimum Olabilirlik ve Kısıtlanmış Maksimum Olabilirlik gibi olabilirlik teorisine dayalı metotlar en çok kullanılanlardır. ANOVA kullanılarak varyans bileşenlerini tahmin etmedeki temel prensip, kareler ortalamalarını beklenen değerlerine eşitledikten sonra elde edilen doğrusal eşitlik sistemini çözmekten ibaretir (Fırat, 1997). Fakat bu yöntemin sakıncalı tarafı bir veya birden fazla varyans bileşeninin negatif tahminlerini vermesidir. Patterson ve Thompson (1971) tarafından geliştirilen REML metodu, hayvan ıslahında doğrusal karışık modellerin varyans bileşenlerini tahmin etmede kullanılan en yaygın metot olmuştur. Maksimum olabilirlik teorisine dayalı metotlarla elde edilen parametre tahminleri ANOVA yönteminin aksine negatif olmayıp, daima asimtotik normallik, kendi parametre tanım aralığında olma ve tutarlılık gibi istatistiki özellikler yönünden oldukça etkilidirler.

Kısıtlanmış maksimum olabilirlik metodunun, maksimum olabilirlik metodundan üstün yönleri mevcuttur. Maksimum olabilirlik metodunda sabit etkilerin tahminine karşılık gelen serbestlik dereceleri dikkate alınmayıp REML yönteminde önem taşırlar. REML tahmin edicileri, olabilirlik fonksiyonunun sadece şansa bağlı olan kısmının maksimize edilmesinden elde edildiklerinden (Patterson ve Thompson, 1971), böyle fonksiyonların varyans bileşenlerini elde etmek için maksimumun bulunması oldukça karmaşıktır (Searle, 1987). Fırat ve Bek (1997) tek yönlü şansa bağlı bir boğa modeline ait varyans bileşenlerinin tahmininde kullanılan olabilirlik teorisine dayalı metotların karşılaştırılmasını yapmışlardır. Daha sonra Fırat (1997) yine tek yönlü bir boğa modelinden ANOVA metodu ile teorik olarak negatif varyans bileşenleri elde etme olasılıklarını hesaplayarak olabilirliğe dayalı yöntemlerin bu sorunu nasıl ortadan kaldırdıklarını yapay verilerle göstermiştir. Şimdiye kadar yapılan çalışmalar basit tek yönlü modeller üzerine yoğunlaşmış olup özellikle ıslah çalışmalarında sıkça kullanılan daha karmaşık modeller ihmal edilmiştir.

Bu makalenin amacı, dengeli iki seviyeli şansa bağlı iç-içe düzenlenmiş deneme planlarında maksimum olabilirlik fonksiyonunu kullanarak nasıl türetilebildiklerini göstermek, bu metotları teorik açıdan ANOVA metodu ile karşılaştırmak ve sayısal bir örnekle sonuçların uygulanabilirliğini göstermektedir.

2. MODEL ve VARYANS BİLEŞENLERİNİN TAHMİNİ

2.1. Model

İç-içe veya hiyerarşik yapı, veriler iki veya daha fazla aşamada tesadüf örneklemesi ile elde edildikleri zaman ortaya çıkmaktadır. Örneğin a adet boğa ile tesadüfi olarak çiftleşen b adet ineğin herbirinin rastgele seçilen n dölüne ait iki-seviyeli bir denemeyi dikkate alalım. Herbir örnek için bir ölçüm kaydedilir ve sonuçta elde edilen veriler boğa, boğa içi inek ve inek içi döl bakımından iç-içe girmiştir. Bu şekilde biri diğerinin içine düzenlenmiş faktörler çoğu zaman şansa bağlı faktörlerdir. Yukarıdaki örnekte a adet boğa kuramsal olarak büyük bir boğa populasyonundan tesadüfi olarak seçilmiştir. Aynı şekilde herbir boğa içinde b adet inek büyük bir inek populasyonu içinden tesadüfi olarak seçilerek boğalarla çiftleştirilmişlerdir.

İki faktöre (A ve B) sahip olduğumuzu varsayalım. Dengeli veriler için $\beta_{j(i)}$'nin (B faktörü) α_i'nin (A faktörü) içine sınıflandırıldığı iki-seviyeli şansa bağlı bir iç-içe deneme planına ait matematik model eşitliği aşağıdaki gibidir:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_{i(i)} + e_{ijk}$$
$$(i = 1,..., a; j = 1,..., b; k = 1, ..., n) \qquad (1)$$

Burada y_{ijk} birinci faktörün i 'inci ve ikinci faktörün j 'inci seviyesinde sınıflanan k'ıncı elemana ait gözlem değeri, μ populasyon ortalaması, α_i birinci faktörün i 'inci seviyesinin etkisi, $\beta_{j(i)}$ birinci faktörün

i'inci seviyesinde sınıflanan ikinci faktörün j 'inci seviyesinin etkisi ve e_{ijk} şansa bağlı hata terimidir. Modeldeki şansa bağlı değişkenler α_i, $\beta_{j(i)}$ ve e_{ijk} ortak olarak birbirlerinden bağımsızdırlar

ve $a_i \sim N(0, s_a^2)$, $b_{j(i)} \sim N(0, s_{b(a)}^2)$ ve $e_{ijk} \sim N(0, s_e^2)$.

A ve B faktörleri arasında etkileşim tanımlamanın mümkün olmadığına dikkat edilmelidir. Şimdiye kadar kullanılan $\beta_{j(i)}$, $B(A)$ ve $\sigma^2_{\beta(\alpha)}$ notasyonları iç-içe düzenleme ilişkisini temsil etmektedir.

2.2. Varyans Bileşenlerinin Tahmini

2.2.1. Varyans Analiz Yöntemi

Dengeli verilerden varyans bileşenlerini tahmin etmede kullanılan ANOVA yöntemi varyans analizinin kareler ortalamasını beklenen değerlere eşitler. Beklenen değerler bileşenlerin doğrusal kombinasyonlarıdır. Elde edilen eşitlikler varyans bileşenleri için çözülür ve çözümler varyans bileşenlerin tahminleridir. Şansa bağlı değişkenler α_i, $\beta_{j(i)}$ ve e_{ijk}'nın kendi aralarındaki bağımsızlığı varsayımı altında (1) nolu modeli kullanarak varyans bileşenleri σ_e^2, $\sigma^2_{\beta(\alpha)}$, ve σ_e^2 'nin ANOVA yansız tahmin edicileri şöyledir (Searke vd. ,1992).

$$\hat{\sigma}_e^2 = HKO, \quad \hat{\sigma}^2_{\beta(\alpha)} = \frac{B(A)KO - HKO}{n} \quad \text{ve}$$

$$\hat{\sigma}^2_\alpha = \frac{AKO - B(A)KO}{bn}$$

Burada *HKO, B(A)KO* ve *AKO* sırasıyla hata, *A*'lar içi *B*'ler ve *A* kareler ortalamaları olup şöyledir:

$$HKO = \sum_i^a \sum_j^b \sum_k^n (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})^2 / ab(n-1),$$

$$B(A)KO = \sum_i^a \sum_j^b n(\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..})^2 / a(b-1)$$

$$AKO = \sum_i^b bn(\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2 / (a-1) \text{ ve}$$

$$\bar{y}_{ij.} = \sum_{k=1}^n y_{ijk}/n$$

$$\bar{y}_{i..} = \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n y_{ijk}/bn \quad \bar{y}_{...} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n y_{ijk}/abn$$

Varyans bileşenleri tahmin edicileri, kareler ortalamalarının doğrusal fonksiyonlarıdır. Varyansların kendileri için tanımlanan parametre aralığı dışında değerler alabilecekleri bilinmektedir. ANOVA metodu ile ilgili en önemli sorun, negatif varyans bileşenleri tahminlerinin elde edilmesidir. σ_e^2 'nin ANOVA tahmin edicisi daima pozitif olduğu halde $\hat{\sigma}^2_\alpha$ ve $\hat{\sigma}^2_{\beta(\alpha)}$ tahmin edicileri, AKO, B(A)KO ve HTO tesadüf değişkenleri ile ilgili örnekleme varyasyonu yüzünden veya örnek gruplarının gerçekten şansa bağlı olmamasından dolayı negatif değerler alabilirler. Örneğin, ilgi duyulan populasyondan seçilen boğalarla (şansa bağlı seçilen boğaların aksine) çiftleştirilen ineklerin döllerinden elde edilen veriler, HKO'ya nisbeten B(A)KO'nun kısıtlanmış değerlerine yol açabilirler.

ANOVA yönteminden negatif tahminler elde edilmesinin bir diğer sebebi yanlış tahmin metodunun seçilmesidir. Negatif tahmin elde etme olasılığı kesinlikle normallik varsayımına bağlı değildir. Geleneksel olarak negatif tahminler sıfır olarak alınmasına rağmen, bu tahminlerin yansızlık özelliğini bozduğu için sakıncalıdır. Böyle bir durumda, daha iyi metodolojiye ihtiyaç vardır ve verileri daha uygun bir şekilde tanımlayan modelin kullanılması gerekmektedir (Fırat, 1997). Olabilirlik teorisine dayalı metotlar ANOVA yönteminin bu olumsuz yönünü ortadan kaldırdıklarından varyans bileşenlerini tahmin etmede sıkça kullanılmaya başlanmışlardır.

2.2.2. Maksimum Olabilirlik (ML) Yöntemi

Sürekli bir değişkene ait verilerden varyans bileşenlerinin maksimum olabilirlik tahmini normallik varsayımları ile sınırlanmıştır. μ, $\{\alpha_i\}$, $\{\beta_{j(i)}\}$ *ve* σ_e^2 verildiğinde verilerin $\{y_{ijk}\}$, $\{\alpha_i\}$ ve $\{\beta_{j(i)}\}$ 'nin koşullu dağılışları şöyledir:

$$\{y_{ijk}\} | \mu, \{\alpha_i\}, \{\beta_{j(i)}\}, \sigma_e^2 \sim N(\mu + \alpha_i + \beta_{j(i)}, \sigma_e^2),$$

$$\{\alpha_i\} | \sigma_\alpha^2 \sim N(0, \sigma_\alpha^2) \text{ ve } \{\beta_{j(i)}\} | \sigma^2_{\beta(\alpha)} \sim N(0, \sigma^2_{\beta(\alpha)})$$

Bu normallik varsayımları altında olabilirlik fonksiyonu şöyle yazılabilir.

$$L = L(\mu \{\alpha_i\}, \{\beta_{j(i)}\}, \sigma_\alpha, \sigma^2_{\beta(\alpha)}, \sigma_e^2 | \{y_{ijk}\}) \propto$$

$$(\sigma_e^2)^{-\frac{1}{2}abn} (\sigma_\alpha^2)^{-\frac{1}{2}a} (\sigma^2_{\beta(\alpha)})^{-\frac{1}{2}ab}$$

$$x \, exp\left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{\sum\sum\sum (y_{ijk} - \mu - \alpha_i - \beta_{j(i)})^2}{\sigma_e^2} + \frac{\sum \alpha_i^2}{\sigma_e^2} + \frac{\sum\sum \beta_{j(i)}^2}{\sigma^2_{\beta(\alpha)}} \right] \right\}$$

Bu fonksiyonun önce $\{\beta_{j(i)}\}$'ye sonrada $\{\alpha_i\}$'ye göre integrali alınarak aşağıdaki ifade elde edilir:

$$L\left\{\mu,\sigma_\alpha^2,\sigma_{\beta(\alpha)}^2,\sigma_e^2 \middle| \{y_{ijk}\}\right\} \propto$$

$$\left(\sigma_e^2\right)^{-\frac{1}{2}ab(n-1)}\left(\sigma_e^2+n\sigma_{\beta(\alpha)}^2\right)^{-\frac{1}{2}a(b-1)}\left(\sigma_e^2+\sigma_{\beta(\alpha)}^2+bn\sigma_\alpha^2\right)^{-\frac{1}{2}a}$$

$$\text{x}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{HKT}{\sigma_e^2}+\frac{B(A)KT}{\sigma_e^2+n\sigma_{\beta(\alpha)}^2}+\frac{AKT+abn(\bar{y}_{...}-\mu)^2}{\sigma_e^2+n\sigma_{\beta(\alpha)}^2+bn\sigma_\alpha^2}\right]\right\} \qquad (2)$$

Burada *HKT, B(A)KT* ve *AKT* sırasıyla hata, *A* içi *B* ve *A* faktörüne ait kareler toplamlarıdır:

$$HKT=\sum_i^a\sum_j^b\sum_k^n\left(y_{ijk}-\bar{y}_{ij.}\right)^2,\; B(A)KT=\sum_i^a\sum_j^b n\left(\bar{y}_{ij.}-\bar{y}_{i..}\right)^2$$

$$\text{ve } AKT=\sum_i^a bn\left(\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...}\right)^2$$

(2) nolu olabilirlik fonksiyonunun logaritması aşağıdaki gibidir.

$$l=\log L\left(\mu,\lambda,\gamma,\sigma_e^2 \middle| \{y_{ijk}\}\right)\propto$$

$$-\frac{ab(n-1)}{2}\log\left(\sigma_e^2\right)-\frac{a(b-1)}{2}\log\left(\sigma_e^2+n\sigma_{\beta(\alpha)}^2\right)$$

$$-\frac{a}{2}\log\left(\sigma_e^2+n\sigma_{\beta(\alpha)}^2+bn\sigma_\alpha^2\right) \qquad (3)$$

$$-\frac{HKT}{2\sigma_e^2}-\frac{B(A)KT}{2\lambda}-\frac{AKT+abn(\bar{y}_{...}-\mu)^2}{2\gamma}$$

Notasyonu basitleştirmek için $\lambda=\sigma_e^2+n\sigma_{\beta(\alpha)}^2$ ve $\gamma=\sigma_e^2+n\sigma_{\beta(\alpha)}^2+bn\sigma_\alpha^2=\lambda+bn\sigma_\alpha^2$ olarak alınmıştır. ML eşitlikleri, $\log L\left(\mu,\lambda,\gamma,\sigma_e^2 \middle| \{y_{ijk}\}\right)$ 'nin μ,λ,γ ve σ_e^2'ye göre kısmi türevlerini sıfıra eşitlemek suretiyle elde edilirler. Kısmi türevler şöyle bulunmuştur:

$$\frac{\partial l}{\partial\mu}=\frac{abn(\bar{y}_{...}-\mu)}{\gamma}$$

$$\frac{\partial l}{\partial\gamma}=-\frac{a}{2\gamma^2}\left(\gamma-\frac{AKT}{a}\right)+\frac{abn(\bar{y}_{...}-\mu)^2}{2\gamma^2}$$

$$\frac{\partial l}{\partial\lambda}=-\frac{a(b-1)}{2\lambda^2}\left[\lambda-\frac{B(A)KT}{a(b-1)}\right]$$

$$\frac{\partial l}{\partial\sigma_e^2}=-\frac{ab(n-1)}{2\sigma_e^4}\left[\sigma_e^4-\frac{HKT}{ab(n-1)}\right]$$

Bu kısmi türevler sıfıra eşitlenerek sırasıyla μ,λ,γ ve σ_e^2 için çözüldüğünde bu parametrelerin ML tahmin edicileri elde edilmiş olur.

$$\dot{\mu}=\bar{y}_{...},\; \dot{\lambda}=\frac{B(A)KT}{a(b-1)}=B(A)KO,$$

$$\dot{\gamma}=\frac{AKT}{a}=\left(1-\frac{1}{a}\right)AKO \text{ ve } \dot{\sigma}_e^2=\frac{HKT}{ab(n-1)}=HKT=\hat{c}$$

Böylece $\dot{\lambda}$ ve $\dot{\gamma}$'dan $\sigma_{\beta(\alpha)}^2$ ve $\sigma_{(\alpha)}^2$'nın ML tahmin edicileri şöyledir (Searle vd., 1992).

$$\dot{\sigma}_{\beta(\alpha)}^2=\frac{B(A)KO-HKO}{n}=\hat{\sigma}_{\beta(\alpha)}^2$$

$$\dot{\sigma}_\alpha^2=\frac{\left(1-\frac{1}{a}\right)AKO-B(A)KO}{bn}$$

Bunlar maksimum olabilirlik eşitliklerinin çözümleridir. Fakat maksimum olabilirlik tahmin edicileri olmak zorunda değildir.

Şimdi ML tahmin edicilerini $\tilde{\mu}$, $\tilde{\sigma}_e^2$, $\tilde{\sigma}_{\beta(\alpha)}^2$ ve $\tilde{\sigma}_\alpha^2$ ile gösterelim. Bunun nedeni $\dot{\mu}$, $\dot{\sigma}_e^2$, $\dot{\sigma}_{\beta(\alpha)}^2$ ve $\dot{\sigma}_\alpha^2$ 'nın hepsi sırasıyla $\tilde{\mu}$, $\tilde{\sigma}_e^2$, $\tilde{\sigma}_{\beta(\alpha)}^2$ ve $\tilde{\sigma}_\alpha^2$ değillerdir ve $\dot{\mu}$, $\dot{\sigma}_e^2$, $\dot{\sigma}_{\beta(\alpha)}^2$ ve $\dot{\sigma}_\alpha^2$ 'nın tamamı daima μ, σ_e^2, $\sigma_{\beta(\alpha)}^2$ ve σ_α^2 için tanımlanan parametre uzayı içinde değerler almayabilir. Özellikle, $\dot{\sigma}_{\beta(\alpha)}^2$ ve $\dot{\sigma}_\alpha^2$ negatif olabilir ve böyle olduğunda bunlar varyansın tanımı gereği $0\le\sigma_{\beta(\alpha)}^2<\infty$ ve $0\le\sigma_\alpha^2<\infty$ parametre uzayı içinde olmazlar. Bundan dolayı, genel olarak $\dot{\sigma}_{\beta(\alpha)}^2$ ve $\dot{\sigma}_\alpha^2$ çözümleri sadece pozitif olduklarında ML tahmin edicileri $\tilde{\sigma}_{\beta(\alpha)}^2$ ve $\tilde{\sigma}_\alpha^2$ olacaklardır. Maksimum olabilirliğin en önemli özelliği, olabilirliğin parametre uzayı içinde maksimize edilmesidir. Bu sebepten, ML tahmin edicileri parametre uzayı içinde olmak zorundadırlar, yani $\tilde{\sigma}_e^2>0$, $\tilde{\sigma}_{\beta(\alpha)}^2\ge 0$ ve $\tilde{\sigma}_\alpha^2\ge 0$'dır.

Parametrelerin tanım aralıkları $-\infty<\mu<\infty$, $0<\sigma_e^2<\infty$, $0\le\sigma_{\beta(\alpha)}^2<\infty$ ve $0\le\sigma_\alpha^2<\infty$ 'dur ve dört ML çözümü $\dot{\mu}$, $\dot{\sigma}_e^2$, $\dot{\sigma}_{\beta(\alpha)}^2$ ve $\dot{\sigma}_\alpha^2$ 'dan kendi parametre uzayı içinde olmayan parametreler sadece $\dot{\sigma}_{\beta(\alpha)}^2$ ve $\dot{\sigma}_\alpha^2$ 'dır. $\dot{\mu}$, $\dot{\sigma}_e^2$, $\dot{\sigma}_{\beta(\alpha)}^2$ ve $\dot{\sigma}_\alpha^2$ çözümleri sırayla dikkate alınarak incelenecektir. Önce, $\dot{\mu}$, $\dot{\sigma}_e^2$, $\dot{\sigma}_{\beta(\alpha)}^2$ veya $\dot{\sigma}_\alpha^2$ 'ya bağlı değildir ve $\dot{\mu}=\bar{y}_{...}$ açıkça μ'nün tanım aralığı içinde olduğundan ML tahmin edicisidir, yani $\tilde{\mu}=\dot{\mu}=\bar{y}_{...}$.

$\hat{\sigma}_e^2$ = HKO σ_e^2'nin parametre uzayı içindedir, çünkü HKO asla negatif olmaz. Buna karşılık, B(A)KO<HKO ve $\left(1-\frac{1}{a}\right)$AKO<B(A)KO olduğu zaman sırasıyla $\hat{\sigma}^2_{\beta(\alpha)}$ ve $\hat{\sigma}^2_{\alpha}$ tahminleri negatif değerler alabilirler. Böylesi durumlarda, ML tahmin edicileri $\tilde{\sigma}^2_{\beta(\alpha)}$ ve $\tilde{\sigma}^2_{\alpha}$ sıfıra eşitlenmelidirler ve bunun sonucu olarak da 3 durum ortaya çıkacaktır: (i) sadece $\hat{\sigma}^2_{\beta(\alpha)} < 0$ olduğu zaman $\tilde{\lambda} = \tilde{\sigma}_e^2$, (ii) sadece $\hat{\sigma}^2_{\alpha} < 0$ olduğu zaman $\tilde{\gamma} = \tilde{\lambda} = \tilde{\sigma}_e^2 + n\tilde{\sigma}^2_{\beta(\alpha)}$ ve (iii) $\hat{\sigma}^2_{\beta(\alpha)}$ ve $\hat{\sigma}^2_{\alpha}$'nin her ikisi de negatif olduğu zaman $\tilde{\lambda} = \tilde{\sigma}_e^2$ ve $\tilde{\gamma} = \tilde{\sigma}_e^2$ olacaktır. Bundan dolayı, $\tilde{\sigma}^2_{\beta(\alpha)} = 0$ ve/veya $\tilde{\sigma}^2_{\alpha} = 0$ olduğu zaman μ ve σ_e^2'nin ML tahmin edicilerini bulmak için bu üç duruma maruz kalan logL'nin maksimize edilmesi gerekmektedir. Bu, modele bu üç durumu uyguluyoruz anlamına gelmez, fakat bu üç durumdaki uzay ile sınırlı logL'yi maksimize etmek anlamındadır. Şimdi bu üç durumu sırayla inceleyelim.

(i) $\hat{\sigma}^2_{\alpha} \geq 0$ ve $\hat{\sigma}^2_{\beta(\alpha)} < 0$: Bu durumda $\lambda = \sigma_e^2$ olur ve log olabilirlik $l\left(\lambda = \sigma_e^2\right)$ şeklinde gösterilir. Böylece bunu (3) nolu eşitliğe uygulayarak aşağıdaki elde edilir.

$$l\left(\lambda = \sigma_e^2\right) \propto \frac{1}{2}a(bn-1)\log\left(\sigma_e^2\right) - \frac{1}{2}a\log(\gamma) - \frac{HKT + B(A)KT}{2\sigma_e^2} - \frac{AKT + abn(\bar{y}_{...} - \mu)^2}{2\gamma}$$

Bu μ , σ_e^2 ve γ'ya göre maksimize edilince sırayla $\tilde{\mu} = \bar{y}_{...} = \hat{\mu}$ ve aşağıdaki σ_e^2 ve γ'nin ML tahmin edicileri elde edilir:

$$\frac{\partial\, l\left(\lambda = \sigma_e^2\right)}{\partial \sigma_e^2} = -\frac{a(bn-1)}{2\sigma_e^4}\left(\sigma_e^2 - \frac{HKT + B(A)KT}{a(bn-1)}\right)$$

$$\frac{\partial\, l\left(\lambda = \sigma_e^2\right)}{\partial \gamma} = -\frac{a}{2\gamma^2}\left(\gamma - \frac{AKT}{a}\right) + \frac{abn(\bar{y}_{...} - \mu)^2}{2\gamma^2}$$

Bunlar çözüldüğünde aşağıdaki ML tahmin edicileri elde edilir.

$$\tilde{\sigma}_e^2 = \frac{HKT + B(A)KT}{a(bn-1)} \qquad \text{ve} \qquad \bar{\gamma} = \frac{AKT}{a}$$

Böylece $\gamma = \lambda + bn\sigma_\alpha^2$ ve $\lambda = \sigma_e^2$ olduğundan

$\tilde{\gamma} = \sigma_e^2 + bn\sigma_e^2$'dır ve

$$\tilde{\sigma}_\alpha^2 = \frac{AKT/a - \tilde{\sigma}_e^2}{bn} = \frac{\left(1 - \frac{1}{a}\right)AKO - \tilde{\sigma}_e^2}{bn}$$

Böylece $\hat{\sigma}^2_{\beta(\alpha)} < 0$ olduğu zaman ML tahmin edicileri $\tilde{\sigma}^2_{\beta(\alpha)} = 0$ ve $\tilde{\sigma}_e^2$ ve $\tilde{\sigma}_\alpha^2$ yukarıdaki gibidir.

(ii) $\hat{\sigma}^2_{\alpha} < 0$ ve $\hat{\sigma}^2_{\beta(\alpha)} \geq 0$: Bu durumda $\gamma = \lambda$ olur ve log olabilirlik aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$l\,(\gamma = \lambda) \propto -\frac{1}{2}ab(n-1)\log\left(\sigma_e^2\right) - \frac{1}{2}ab\log(\lambda) - \frac{HKT}{2\sigma_e^2} - \frac{B(A)KT + AKT + abn(\bar{y}_{...} - \mu)^2}{2\lambda}$$

Bu fonksiyonun maksimizasyonu sonucu aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\frac{\partial\, l(\gamma = \lambda)}{\partial \sigma_e^2} = -\frac{ab(n-1)}{2\sigma_e^4}\left(\sigma_e^2 - \frac{HKT}{ab(n-1)}\right)$$

$$\frac{\partial\, l(\gamma = \lambda)}{\partial \lambda} = -\frac{ab}{2\lambda^2}\left(\lambda - \frac{AKT + B(A)KT}{ab}\right) + \frac{abn(\bar{y}_{...} - \mu)^2}{2\lambda^2}$$

Bu eşitlikler çözüldüğü zaman aşağıdaki ML tahmin edicileri elde edilir.

$$\tilde{\sigma}_e^2 = HKO \qquad \text{ve} \qquad \tilde{\lambda} = \frac{AKT + B(A)KT}{ab}$$

Buradan, $\lambda = \sigma_e^2 + n\sigma^2_{\beta(\alpha)}$, olduğu için $\tilde{\lambda} = \tilde{\sigma}_e^2 + n\tilde{\sigma}^2_{\beta(\alpha)}$ ve

$$\tilde{\sigma}^2_{\beta(\alpha)} = \frac{1}{n}\left(\frac{AKT + B(A)KT}{ab} - HKO\right).$$

(iii) $\hat{\sigma}^2_{\alpha} < 0$ ve $\hat{\sigma}^2_{\beta(\alpha)} < 0$: Bu durumda $\lambda = \sigma_e^2$ ve $\gamma = \sigma_e^2$ olur. Log olabilirlik şöyle elde edilir.

$$l\,\left(\lambda = \gamma = \sigma_e^2\right) \propto -\frac{1}{2}abn\log\left(\sigma_e^2\right) - \frac{HKT + B(A)KT + AKT + abn(\bar{y}_{...} - \mu)^2}{2\sigma_e^2}$$

Bunun σ_e^2'ye göre kısmi türevi aşağıdaki eşitliği verir.

$$\frac{\partial\, l\left(\lambda = \gamma = \sigma_e^2\right)}{\partial \sigma_e^2} = -\frac{abn}{2\sigma_e^4}\left(\sigma_e^2 - \frac{GKT}{abn}\right) + \frac{abn(\bar{y}_{...} - \mu)^2}{\sigma_e^4}$$

Burada GKT genel kareler toplamını ifade etmektedir. Bu eşitlik çözüldüğü zaman σ_e^2'nin ML tahmin edicisi şöyle bulunur.

$$\tilde{\sigma}_e^2 = \frac{GKT}{abn}.$$

2.2.3. Kısıtlanmış Maksimum Olabilirlik (REML) Yöntemi:

Parametrelerin REML tahmin edicileri olabilirlik fonksiyonunun sadece şansa bağlı kısmının (bu çalışmada iç-içe düzenlemeye ait modelin olabilirlik fonksiyonunun μ'yü içermeyen kısmı) maksimize edilmesinden elde edilirler. Yani, bu maksimum olabilirlik yöntemi sabit etkilerin tahmini ile ilgilenmemesine rağmen modelin sabit etkilerine ait serbestlik derecesini kullanır. Bundan dolayı parametrelerin REML tahmin edicilerinin bulunabilmesi için önce, aşağıdaki olabilirlik fonksiyonunun sabit ve şansa bağlı faktörlere göre faktörize edilmesi gerekmektedir. Bu özellikleri ile REML ML metodundan farklılıklar gösterir.

$$L\left(\mu , \sigma^2_\alpha , \sigma^2_{\beta(\alpha)} , \sigma^2_e \mid \{y_{ijk}\}\right) =$$

$$(2\pi)^{-\frac{1}{2}abn} \left(\sigma^2_e\right)^{-\frac{1}{2}ab(n-1)} (\lambda)^{-\frac{1}{2}a(b-1)} (\gamma)^{-\frac{1}{2}a}$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{HKT}{\sigma^2_e} + \frac{B(A)KT}{\lambda} + \frac{AKT}{\gamma} + \frac{(\bar{y}_{\ldots} - \mu)^2}{\gamma / abn}\right]\right\}$$

Bu olabilirlik fonksiyonunda $\bar{y}_{\ldots}$, HKO, B(A)KO ve AKO'nun hepsinden de bağımsız olduğundan faktörizasyon aşağıdaki gibi gerçekleşir.

$$L\left(\mu , \sigma^2_\alpha , \sigma^2_{\beta(\alpha)} , \sigma^2_e \mid \{y_{ijk}\}\right) =$$

$$L(\mu|\bar{y}_{\ldots})\, L\left(\sigma^2_\alpha, \sigma^2_{\beta(\alpha)}, \sigma^2_e \mid HKO, B(A)KO, AKO\right),$$

Burada $L(\mu|\bar{y}_{\ldots})$ $\bar{y}_{\ldots}$ verildiğinde μ'nün olabilirlik fonksiyonu,

$$L(\mu|\bar{y}_{\ldots}) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} (\gamma / abn)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(\bar{y}_{\ldots} - \mu)^2}{\gamma / abn}\right]$$

ve $L\left(\sigma^2_\alpha , \sigma^2_{\beta(\alpha)} , \sigma^2_e \mid HKO, B(A)KO, AKO\right)$, HKO, B(A)KO ve AKO verildiğinde σ^2_α , $\sigma^2_{\beta(\alpha)}$ ve σ_e^2'nin olabilirlik fonksiyonudur.

$$L_R = L\left(\sigma^2_\alpha , \sigma^2_{\beta(\alpha)} , \sigma^2_e \mid HKO, B(A)KO, AKO\right),$$

$$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}(abn-1)} \left(\sigma^2_e\right)^{-\frac{1}{2}ab(n-1)} (\lambda)^{-\frac{1}{2}a(b-1)} (\gamma)^{-\frac{1}{2}(a-1)} \qquad (4)$$

$$(abn)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{HKT}{\sigma^2_e} + \frac{B(A)KT}{\lambda} + \frac{AKT}{\gamma}\right]\right\}$$

Bu dengeli verilere ait iç-içe düzenlemeler için kısıtlanmış olabilirlik olarak bilinmektedir. REML tahmini $\sigma_e^2 > 0$, $\sigma_\alpha^2 \geq 0$ ve $\sigma^2_{\beta(\alpha)} \geq 0$ parametre uzayı içinde (4) nolu eşitliği maksimize eden σ_e^2 , $\sigma^2_{\beta(\alpha)}$ ve σ_α^2 tahmin edicilerini elde etmekten ibarettir. Bu fonksiyonun logaritması aşağıdaki gibidir:

$$l_R = \log L\left(\sigma^2_\alpha, \sigma^2_{\beta(\alpha)}, \sigma^2_e \mid HKT, B(A)KT, AKT\right) \propto$$

$$-\frac{1}{2}(abn-1)\log\left(\sigma^2_e\right) - \frac{1}{2}a(b-1)\log(\lambda) \qquad (5)$$

$$-\frac{1}{2}(a-1)\log(\gamma) - \frac{HKT}{\sigma^2_e} - \frac{B(A)KT}{\lambda} - \frac{AKT}{\gamma}$$

l_R'nin σ_e^2 , λ ve γ'ya göre kısmi türevleri şöyledir:

$$l_{R,\sigma^2_e} = -\frac{ab(n-1)}{2\sigma^4_e}\left(\sigma^2_e - \frac{HKT}{ab(n-1)}\right),$$

$$l_{R,\lambda} = -\frac{a(b-1)}{2\lambda^2}\left(\lambda - \frac{B(A)KT}{a(b-1)}\right)$$

$$l_{R,\gamma} = -\frac{a-1}{2\gamma^2}\left(\gamma - \frac{AKT}{a-1}\right)$$

σ_e^2 , λ ve γ'nın ve dolayısı ile de $\sigma^2_{\beta(\alpha)}$ ve σ^2_α 'nın REML tahmin edicileri yukarıdaki kısmi türevler sıfıra eşitlenip çözülerek bulunur.

$$\dot{\sigma}^2_{e,R} = \frac{HKT}{ab(n-1)} = HKO ,$$

$$\dot{\lambda}_R = \frac{B(A)KT}{a(b-1)} = B(A)KO,$$

$$\dot{\gamma}_R = \frac{AKT}{a-1} = AKO ,$$

$$\sigma^2_{\beta(\alpha),R} = \frac{B(A)KO - HKO}{n}$$

$$\dot{\sigma}^2_{\beta(\alpha),R} = \frac{B(A)KO - HKO}{n}$$

Bunlar REML çözümleridirler. ML ile ilgili duruma benzer olarak, REML çözümleri sadece $\dot{\sigma}^2_{e,R}$, $\dot{\sigma}^2_{\beta(\alpha),R}$ ve $\dot{\sigma}^2_{\alpha,R}$ 'nin tamamı pozitif olduğu zaman REML tahmin edicisi olurlar. $\dot{\sigma}^2_{e,R}$ asla negatif olmaz fakat $\dot{\sigma}^2_{\beta(\alpha),R}$ ve $\dot{\sigma}^2_{\alpha,R}$ olabilirler. Bunun üzerine, aynen ML yöntemindeki üç duruma maruz kalan l_R'yi maksimize etmek suretiyle REML tahmin edicileri bulunur.

(i) $\dot{\sigma}^2_{\alpha,R} \geq 0$ ve $\dot{\sigma}^2_{\beta(\alpha),R} < 0$: Bu durumda $\lambda = \sigma_e^2$'dir ve (5) nolu eşitlikten aşağıdaki elde edilir.

$$l_R\left(\lambda = \sigma_e^2\right) \propto -\frac{1}{2} a(bn-1)\log\left(\sigma_e^2\right) - \frac{1}{2}(a-1)\log(\gamma) - \frac{HKT + B(A)KT}{2\sigma_e^2} - \frac{AKT}{2\gamma}$$

Bunun σ_e^2 ve γ'ya göre kısmi türevleri aşağıdaki gibidir.

$$\frac{\partial l_R\left(\lambda = \sigma_e^2\right)}{\partial \sigma_e^2} = -\frac{a(bn-1)}{2\sigma_e^4}\left(\sigma_e^2 - \frac{HKT + B(A)KT}{a(bn-1)}\right)$$

$$\frac{\partial l_R\left(\lambda = \sigma_e^2\right)}{\partial \gamma} = -\frac{a-1)}{2\gamma^2}\left(\gamma - \frac{AKT}{a-1}\right)$$

Bu eşitlikler çözüldüğünde ve $\tilde{\gamma}_R = \tilde{\sigma}^2_{e,R} + bn\tilde{\sigma}^2_{\alpha,R}$ olduğundan aşağıdaki tahmin ediciler elde edilir.

$$\tilde{\sigma}^2_{e,R} = \frac{HKT + B(A)KT}{a(bn-1)},$$

$$\tilde{\gamma}_R = \frac{AKT}{a-1} = AKO \quad \text{ve} \quad \tilde{\sigma}^2_{\alpha,R} = \frac{AKO - \tilde{\sigma}^2_{e,R}}{bn}$$

(ii) $\dot{\sigma}^2_{\alpha,R} < 0$ ve $\dot{\sigma}^2_{\beta(\alpha),R} \geq 0$: Bu durumda $\gamma = \lambda$ 'dır ve log olabilirlik fonksiyonu şöyledir.

$$l_R(\gamma = \lambda) \propto -\frac{1}{2} ab(n-1)\log\left(\sigma_e^2\right) - \frac{1}{2}(ab-1)\log(\lambda) - \frac{HKT}{2\sigma_e^2} - \frac{B(A)KT + AKT}{2\lambda}$$

Bu fonksiyonun σ_e^2 ve λ'ya göre kısmi türevleri alındığında aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\frac{\partial l_R(\gamma = \lambda)}{\partial \sigma_e^2} = -\frac{ab(n-1)}{2\sigma_e^4}\left(\sigma_e^2 - \frac{HKT}{ab(n-1)}\right)$$

ve

$$\frac{\partial l_R(\gamma = \lambda)}{\partial \lambda} = -\frac{ab-1)}{2\lambda^2}\left(\lambda - \frac{B(A)KT + AKT}{ab-1}\right)$$

Tablo 1. Dengeli iki seviyeli şansa bağlı iç-içe düzenlenmiş bir modele ait parametrelerin σ_e^2, $\sigma^2_{\beta(\alpha)}$, ve σ_α^2'nin ANOVA, ML, ve REML tahmin edicileri.

ML/REML çözümü tarafından yerine getirilen şartlar	Yöntem	$\tilde{\sigma}^2_e$	$\tilde{\sigma}^2_{\beta(\alpha)}$	$\tilde{\sigma}^2_\alpha$
$\dot{\sigma}^2_\alpha \geq 0$, $\dot{\sigma}^2_{\beta(\alpha)} \geq 0$	ML	HKO	$\frac{B(A)KO - HKO}{n}$	$\frac{\left(1-\frac{1}{a}\right) AKO - B(A)KO}{bn}$
	REML	HKO	$\frac{B(A)KO - HKO}{n}$	$\frac{AKO - B(A)KO}{bn}$
$\dot{\sigma}^2_\alpha \geq 0$, $\dot{\sigma}^2_{\beta(\alpha)} < 0$	ML	$\frac{HKT + B(A)KT}{a(bn-1)}$	0	$\frac{\left(1-\frac{1}{a}\right) AKO - \tilde{\sigma}^2_e}{bn}$
	REML	$\frac{HKT + B(A)KT}{a(bn-1)}$	0	$\frac{AKO - \tilde{\sigma}^2_{e,R}}{bn}$
$\dot{\sigma}^2_\alpha < 0$, $\dot{\sigma}^2_{\beta(\alpha)} \geq 0$	ML	HKO	$\frac{1}{n}\left(\frac{AKT + B(A)KT}{ab} - HKO\right)$	0
	REML	HKO	$\frac{1}{n}\left(\frac{AKT + B(A)KT}{ab-1} - HKO\right)$	0
$\dot{\sigma}^2_\alpha < 0$, $\dot{\sigma}^2_{\beta(\alpha)} < 0$	ML	$\frac{GKT}{abn}$	0	0
	REML	$\frac{GKT}{abn-1}$	0	0
	ANOVA	HKO	$\frac{B(A)KO - HKO}{n}$	$\frac{AKO - B(A)KO}{bn}$

Tablo 2. Süt verim kaynakları, kg (305 gün).

		Öz Kardeşlerin Verimleri							
Boğa	İnek	Veri 1		Veri 2		Veri 3		Veri 4	
	1	4379	6560	6379	6560	6379	6560	6679	6560
	2	5560	7733	6560	6733	6560	6733	6560	6333
1	3	4637	5639	6637	6639	6637	6639	6637	6639
	4	5726	5576	6726	6576	6726	6576	6826	6576
	5	4968	4574	6968	6574	6968	6574	6968	6574
	6	5355	7057	4355	4057	6355	7057	6355	7057
	7	4605	4180	4605	4180	6605	6180	6605	6180
2	8	4393	4530	4393	4530	6393	6530	6393	6530
	9	5195	7024	4195	4024	6195	7024	6195	7024
	10	6137	4748	4137	4748	6137	6748	6137	6748
	11	6253	6666	6253	6666	6253	6666	6553	6666
	12	5553	6026	6553	6026	5553	6026	6453	6726
3	13	6268	7575	6268	6575	6268	6575	6268	6575
	14	7112	6382	6112	6382	7112	6382	6612	6782
	15	5840	7316	6840	6316	6840	7316	6840	6316
	16	6246	5595	5246	5595	6246	6595	6946	6795
	17	5400	6440	5400	5440	6400	6440	6400	6440
4	18	7301	6615	5301	5615	7301	6615	6801	6515
	19	5453	6592	5453	5592	6453	6592	6453	6592
	20	7374	6693	5374	5693	7374	6693	6374	6693

Bu eşitlikler çözüldüğünde ve $\tilde{\lambda}_R = \tilde{\sigma}^2_{e,R} + n\tilde{\sigma}^2_{\beta(\alpha),R}$ olduğundan REML tahmin edicileri şöyledir:

$$\tilde{\sigma}^2_{e,R} = \frac{HKT}{ab(n-1)} = HKO \, , \tilde{\lambda}_R = \frac{AKT + B(A)KT}{ab - 1}$$

ve

$$\tilde{\sigma}^2_{\beta(\alpha),R} = \frac{1}{n}\left(\frac{AKT + B(A)KT}{ab - 1} - HKO\right).$$

(iii) $\dot{\sigma}^2_{\alpha,R} < 0$ ve $\dot{\sigma}^2_{\beta(\alpha),R} < 0$: Bu durumda $\lambda = \sigma_e^2$ ve $\gamma = \sigma_e^2$'dir ve log olabilirlik şöyledir.

$$l_R(\lambda = \gamma = \sigma_e^2) \propto -\frac{1}{2}(abn-1)\log\left(\sigma_e^2\right) - \frac{GKT}{2\sigma_e^2}$$

Bu eşitliğin σ_e^2'ye göre kısmi türevinin alınması sonucu aşağıdaki elde edilir.

$$\frac{\partial l_R(\lambda = \gamma = \sigma_e^2)}{\partial \sigma_e^2} = -\frac{abn-1}{2\sigma_e^4}\left(\sigma_e^2 - \frac{GKT}{abn-1}\right)$$

Bu eşitlik çözüldüğü zaman σ_e^2'nin REML tahmin edicisi şöyle bulunur.

$$\tilde{\sigma}^2_{e,R} = \frac{GKT}{abn-1}$$

Şimdiye kadar değişik yöntemlerle elde edilen varyans bileşenleri tahmin edicilerini bir tabloda toplamak mümkündür. Tablo 1 dengeli iki seviyeli şansa bağlı iç-içe düzenlenmiş bir modele ait varyans bileşenleri σ_e^2 , $\sigma^2_{\beta(\alpha)}$, ve σ_α^2'nin ANOVA, ML ve REML tahmin edicilerini göstermektedir.

3.SAYISAL ÖRNEK

Büyük bir sürü populasyonundan bu populasyonu temsil edecek kadar boğa ve inekler şansa bağlı olarak seçilerek çiftleştirilmeleri sonucu elde edilen öz kardeşlerin aynı yıla ait süt verim kayıtları (305gün) tutuluyor. Yaşa göre düzeltilen bu kayıtlar (kg olarak) Tablo 2'nin Veri 1 sütununda verilmiştir. Bu tablonun Veri2, Veri3, ve Veri4 sütunlarındaki veriler Veri1 de

Tablo 3. Dört veri setine ait varyans bileşenlerinin ANOVA, ML ve REML tahminleri.

Metot	σ_e^2	$\sigma^2_{\beta(\alpha)}$	σ_α^2
		Veri1	
ANOVA	689557.30	97566.72	259296.92
ML	689557.30	97566.72	172357.47
REML	689557.30	97566.72	259296.92
		Veri2	
ANOVA	54107.30	-12864.53	1101634.84
ML	42672.19	0	824091.07
REML	42672.19	0	1100195.63
		Veri3	
ANOVA	107957.29	32510.47	-10245.16
ML	107957.29	20503.15	0
REML	107957.29	24423.24	0
		Veri4	
ANOVA	68712.30	-16479.53	-1333.66
ML	50338.69	0	0
REML	51629.43	0	0

değişiklikler yapılmak suretiyle elde eldilmiştir. Bu örneğe ait model (1) nolu eşitliğin aynısıdır.

Tablo 2'deki dört ayrı veri setinden varyans bileşenlerinin ANOVA, ML ve REML tahminleri SAS paket programının (SAS Institute, 1987) PROC VARCOMP prosedürü kullanılarak hesaplanmış ve elde edilen değerler Tablo 3'de verilmiştir. Bu tablodan görülebileceği gibi, Veri1 veri setinden elde edilen varyans bileşenlerinin ANOVA tahminlerinin tamamı pozitif olduğu halde, Veri2'den elde edilen $\sigma^2_{\beta(\alpha)}$ 'nin, Veri3'den elde edilen σ^2_{α} 'nın ve Veri4'den elde edilen σ^2_{α} ve $\sigma^2_{\beta(\alpha)}$ 'nın her ikisinin ANOVA tahminleri negatiftir. Bu iki varyans bileşeninin ANOVA tahminlerinin negatif olması durumunda ML ve REML tahminlerinin 0 değerini aldığı görülmektedir. Veri1 ve Veri3 veri setlerinde σ^2_e 'nin ANOVA, ML ve REML tahminleri aynı değeri almaktadırlar.

Varyans bileşenleri ANOVA tahminlerini pozitif olarak veren Veri1 veri setinden elde edilen $\sigma^2_{\beta(\alpha)}$ 'nın ANOVA, ML ve REML tahminleri aynı değerleri alamakla birlikte σ^2_{α}'nın sadece ANOVA ve REML tahminleri birbirine eşittir. Bunun nedeni, ANOVA ve REML'ın σ^2_{α} 'yı ML'ye oranla daha yansız olarak tahmin etmesidir.

4. TARTIŞMA

Bu makalede iki seviyeli şansa bağlı iç-içe düzenlenmiş bir deneme planında ANOVA, ML ve REML metotları varyans bileşenlerini tahmin etmeleri bakımından karşılaştırılmalı olarak incelenmişlerdir. Bahsedilen metotlar arasındaki fark önce teorik olarak araştırılmış daha sonrada dört veri setinden oluşan bir örnekle uygulamalı olarak gösterilmeye çalışılmıştır. ANOVA yöntemi ile elde edilen varyans bileşeni tahminlerinin negatif olduğu yerlerde ML ve REML tahminleri sıfıra eşitlenmiştir. REML, ML'den kaynaklanan sapmanın bir kısmını giderdiğinden σ^2_e, $\sigma^2_{\beta(\alpha)}$ ve σ^2_{α} 'nın bu metotlarla elde edilen tahmin edicileri biraz farklılık göstermektedir. Bu iki metodu birbirinden ayıran diğer özellik, REML'ın μ'nün tahminini vermemesine karşılık ML'nin bunu vermesidir. Buna karşılık REML μ'nün tahmininde kullanılan serbestlik derecesini dikkate almaktadır (Fırat ve Bek, 1997).

Çalışmada kullanılan (1) nolu model dengeli veriler için olup teori ve uygulama bu tip veriler için geliştirilmiştir. Bununla birlikte, bu çalışmanın sonuçlarını dengesiz veriler için genişletmek oldukça kolay olduğu gibi üç aşamalı deneme planları için de genişletilmesi mümkündür. Ayrıca şansa bağlı model yerine karışık model kullanılarak da varyans bileşenlerinin değişik yöntemlerle tahmin edicilerini bulmak olasıdır.Özellikle hayvan ıslahı çalışmalarında yakın yıllarda giderek önem kazanan Bayesian metodu ANOVA ve olabilirlik teorisine dayalı yöntemlerin bazı olumsuz yönlerini ortadan kaldırdığından, bu metodun varyans bileşenlerinin tahmini için uygulanması düşünülmelidir.

5.KAYNAKÇA

Bek, Y. ve Efe, E. (1995). *Araştırma ve Deneme Metodları*. Çukurova Üniversitesi, Ziraat Fakültesi Ders Kitabı No:71 Adana.

Fırat, M.Z. (1997). Hayvan ıslahından negatif varyans unsuru tahmini ve tahmin yöntemlerinin inclenmesi. *Ç.Ü. Ziraat Fakültesi Dergisi*, Vol. 12, ss. 169-176.

Fırat, M.Z. ve Bek, Y. (1997). Varyans unsurlarının tahmini için maksimum olabilirlik metodlarının karşılaştırılmalı olarak incelenmesi. *Ç.Ü. Ziraat Fakültesi Dergisi*, Vol. 12, ss.1-8.

Gill, J.L. (1978). *Desing and Analysis of Experments in the Animal and Medical Sciences*. Volume I, The Iowa State University Press, Ames, Iowa, U.S.A.

Patterson,H.D. ve Thompson, R. (1971). Recovery of interblock information when block sizes are unequal. *Biometrika* , Vol. 58, ss.545-551.

SAS Institute, (1987). *SAS User's Guide*. Release 6.03 Edition. Cary, North Caroline.

Searle, S.R. (1987). *Linear Models For Unbalanced Data*. John Wiley&Sons, New York, N.Y.

Searle,S.R.,Casella, G. ve McCulloch, C.E. (1992). *Variance Components*. John Wiley&Sons, New York, N.Y.

Mehmet Ziya Fırat, lisans öğretimini Çukurova Üniversitesi Ziraat Fakültesi Zootekni Bölümü'nde 1986 da, yüksek lisansını İngiltere Reading Üniversitesi Uygulamalı İstatistik Bölümü'nde 1991 de, doktorasını İskoçya Edinburg Üniversitesi Matemetik ve İstatistik Bölümü'nde 1995'de tamamlamıştır. 1995 yılında Çukurova Üniversitesi Ziraat Fakültesi Zootekni Bölümünde yardımcı doçentliğe atanmıştır. Dalı'nda doçent ünvanını almıştır. Halen Akdeniz Üniversitesi Ziraat Fakültesi'nde çalışmakta olup, Bayesian Yöntemleri, Varyans Unsurlarının Tahmini, Genelleştirilmiş Lineer Modeller ve Kantitatif Genetik konularında çalışmalarını sürdürmektedir.