ANADOLU ÜNİVERSİTESİ BİLİM VE TEKNOLOJİ DERGİSİ
ANADOLU UNIVERSITY JOURNAL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
Cilt/Vol.:3 - Sayı/No: 2 : 343-350 (2002)

ARAŞTIRMA MAKALESİ/**RESEARCH ARTICLE**

HAYVAN ISLAHINDA PROFİL OLABİLİRLİK YÖNTEMİ

Mehmet Ziya FIRAT[1]

ÖZ

Varyans unsurları ve bunların fonksiyonlarına hayvan ıslahı uygulamalarında doğrudan ilgi duyulur. Bundan dolayı, bunlar hakkında yorumlamalar yapabilmek önem arzetmektedir. Varyans unsurlarını içeren çok sayıda parametreye sahip doğrusal modeller, örneğin hayvan ıslahı denemelerinden elde edilen yapısal verilerdeki değişkenliği modellemek için yaygın bir biçimde kullanılırlar. Bununla birlikte, gereksiz parameterelerin varlığında yapılan yorumlamalara hayvan ıslahında yaygın olarak karşılaşılır. Gereksiz parameterelerin varlığında yorumlamalar yapmak için en basit yaklaşımlardan bir tanesi, olabilirlik fonksiyonundaki gereksiz parametreleri, kendi maksimum olabilirlik tahminleri ile değiştirmek ve sonuçta elde edilen profil olabilirlik yardımı ile ilgi duyulan parametrenin bir fonksiyonu olarak incelemektir. Bu durumda, profil olabilirlik, ilgi duyulan parametre hakkında yorumlama yapmak için basit bir olabilirlik fonksiyonu olarak işlev görür. Bu çalışmada, gereksiz parametrelerin varlığında, ilgi duyulan parametre için profil olabilirlik yöntemi iki varyans unsuruna sahip dengeli tek değişkenli bir boğa modeli için dikkate alınmıştır. Tek değişkenli bir boğa modeli kullanılarak, tesadüfi normal sapmalardan dört veri seti elde edilmiştir ve profil olabilirlik ve profil log-olabilirlik değerlerinin her ikisi de kullanılarak modeldeki herbir parametre için yöntemin grafiksel sunumu verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Profil olabilirlik, Varyans unsurları, Boğa modeli.

PROFILE LIKELIHOOD METHOD IN ANIMAL BREEDING

ABSTRACT

The components of variance and their functions are of direct interest in animal breeding applications. It is therefore important to be able to make inferences about them. Linear models with multiple parameters including variance components are widely used for modelling variability in structured data such as arises from animal breeding experiments. However, inferences in the presence of nuisance parameters are widely encountered in animal breeding. One of the simplest approaches for making inferences in the presence of nuisance parameters is to replace the nuisance parameters in the likelihood function by their maximum likelihood estimates and examine the resulting profile likelihood as a function of the parameter of interest. Profile likelihood is then treated as an ordinary likelihood function for inference about the parameter of interest. In this study, profile likelihood method for parameter of interest in the presence of nuisance parameters is considered for a balanced univariate sire model with two variance components. Four sets of data are generated from random normal deviates based on an univariate sire model and the graphical representation of the method is given for each parameter in the model using both profile likelihood and profile log-likelihood values.

Key Words: Profile likelihood, Variance components, Sire model.

---

1 Akdeniz Üniversitesi, Ziraat Fakültesi, Zootekni Bölümü, 07059-ANTALYA.
Faks: (242) 2274564; **E-posta:** mzf@agric.akdeniz.edu.tr

Geliş: 10 Nisan 2001; **Düzeltme:** 17 Temmuz 2001; **Kabul:** 09 Aralık 2002.

1. GİRİŞ

İstatistiksel yöntemlere uygun olarak oluşturulan varyans unsurları dahil çok sayıda parametreye sahip şansa bağlı doğrusal modeller ziraat ve biyoloji gibi bilim dallarında yoğun olarak kullanılmaktadırlar. Özellikle hayvan ıslahçıları, önce varyans unsurlarını tahmin etmek için bir istatistiksel yöntem kullanmak suretiyle bir karakterin kalıtım derecesini tahmin eder ve sonra da kalıtım derecesini şansa bağlı doğrusal bir modelin varyans unsurları cinsinden ifade ederler. Kalıtım derecesinin tahminine doğrudan ilgi duyulabileceği gibi, bir hayvanın veya hayvan populasyonunun genetik değeri hakkında yorumlamalar yapmada dolaylı olarak da kullanılabilir (Harville ve Callanan, 1990).

Son yirmi yılda, hayvan ıslahı uygulamalarında, varyans unsurlarının tahmininde kullanılan istatistiksel yöntemler, aşamalı olarak Varyans Analizi (ANOVA) yönteminden Maksimum Olabilirlik (ML) ve ilgili yöntemlere kadar değişim göstermiştir ve varyans unsurlarının tahmini için olabilirliğe dayalı metodlar, hayvan ıslahçıları ve diğer uygulamacılar arasında hızlı bir biçimde önem kazanmıştır (Meyer, 1990). Uygulamalı kantitatif genetikte, birçok problem için özellikle Kısıtlanmış Maksimum Olabilirlik (REML) tahmini (Patterson ve Thompson, 1971), günümüzde tercih edilen metod olmuştur.

Fakat, REML yöntemini uygulamak için ihtiyaç duyulan hesaplamalar birçok durumlarda oldukça yoğun olmakla birlikte son yıllardaki bilgisayar teknolojisindeki gelişmelerle birlikte bu durum geçerliliğini yitirmiştir. Genel olarak, REML tahminleri için kapalı form ifadeler mevcut değildir ve tahminler, olabilirlik fonksiyonunun maksimumunu belirlemek için sayısal bir iteratif metod kullanılarak hesaplanmak zorundadırlar. En çok önerilen iteratif algoritmalar, Newton-Rapson ve EM'dir (Harville ve Callanan, 1990). Bu algoritmalar esas itibariyle, iki sebepten ötürü hesaplamalara zorluk getirmektedirler. Bunlardan biri ihtiyaç duyulan iterasyon sayısının ne olacağı, diğeri ise herbir iterasyon için gerek duyulan hesaplamaların yoğunluğudur.

Birden fazla varyans unsuruna sahip doğrusal modellerde, özellikle modeldeki sabit etkilere ilgi duyulduğu birçok problemde, varyans unsurları gereksiz parametre olarak varsayılmıştır. Bununla birlikte, özellikle kantitatif genetik ve hayvan ıslahında olduğu gibi, varyans unsurları doğrudan ilgilenilen parametrelerdir ve bunlar hakkında yorumlamalar yapabilmek önem arzetmektedir. Varyans unsurları ve bunların fonksiyonları hakkında yorumlamalar yapmak amacıyla, olabilirliğe dayalı yöntemlerin kullanımı esas itibariyle ML ve REML nokta tahminleri ile sınırlı olduğu görülmektedir. Bu makalede, böylesi yorumlamarı yapmada profil olabilirlik yöntemi kullanılmıştır.

"Gereksiz parametre" ifadesi ilk defa Kalbfleisch ve Sprott (1970) tarafından kullanılmıştır. Herhangi çok parametreli doğrusal şansa bağlı bir modelde, ilgi duyulmayan veya gereksiz parametrelerin varlığında, ilgi duyulan parametreler hakkında bilinmeyen yorumlamaların yapılabilmesi için istenmeyen parametrelerin bertaraf edilmesi problemi ile oldukça yaygın olarak karşılaşılmakta ve sorunun çözümü amacıyla geliştirilen olabilirlik fonksiyonu tiplerini Kalbfleisch ve Sprott (1970) ve Patefield (1977) detaylı bir biçimde ele almışlardır. Barndorff-Nielsen (1986) profil olabilirliği gereksiz parametrelere göre düzeltmek için modifiye edilmiş profil olabilirliği geliştirmiştir. Gereksiz parametreleri elemek amacıyla kullanılan yöntemlerden en önemlisi, olabilirlik fonksiyonundaki istenmeyen parametreleri kendi maksimum olabilirlik tahminleriyle değiştirmek ve sonuçta elde edilecek profil olabilirliği ilgi duyulan parametrenin bir fonksiyonu olarak incelemekten ibarettir (Cox ve Reid, 1987). Bu durumda profil olabilirlik, ilgi duyulan parametreler hakkındaki yorumlama ve bu parametrelerin tahmini için alışılagelen olabilirlik fonksiyonu olarak işlem görür (McCullagh ve Tibshirani, 1990). Profil olabilirlik yönteminde, her parametrenin profiline ayrı ayrı bakılacağından, her parametre için ayrı bir olabilirlik fonksiyonuna gereksinim vardır.

Bu makalenin amacı, profil olabilirlik yöntemine dayalı olarak dengeli tek değişkenli bir boğa modelindeki ortalama, varyans unsurları ve bunların fonksiyonlarının belirli özelliklerini incelemektir. Böyle bir model için, önce profil olabilirlik teorisi verilecek, daha sonra küçük bir Monte Carlo simülasyon çalışmasından üretilen dört veri setine ait gözlem değerleri kullanılarak varyans unsurlarının profil olabilirlik fonksiyonları elde edilecek ve simülasyon sonuçları tablo ve grafikler şeklinde sunularak bu sonuçlar tartışılacaktır.

2. METOD

2.1. Şansa Bağlı Model ve Varsayımlar

Bu çalışmada, hayvan ıslahı uygulamalarında çok sık olarak kullanılan baba bir üvey kardeş ailelerinin üyelerinden, tek bir karakterden elde edilen gözlemlerin modeline ait parametreler hakkında yapılacak yorumlamalar dikkate alınacaktır. s boğanın olduğunu ve bunların herbirinin farklı analardan n tane döle sahip olduğu varsayılsın. y_{ij}'inci ailenin j'inci dölüne ait fenotipik değeri göstersin (i=1,...,s; j=1,...,n). Bu durumda aşağıdaki dengeli tek değişkenli şansa bağlı boğa modelini kullanmak mümkündür,

$$y_{ij} = \mu + s_i + e_{ij} \qquad (i=1,...,s;\ j=1,...,n) \qquad \textbf{(1)}$$

Burada μ genel ortalamayı temsil eder, s_i i'inci boğaya ait tesadüfi etki ve e_{ij} baba bir üvey kardeş familyaları içi değişkenliği temsil eden hata terimidir. Boğa başına düşen döl sayısı eşit olarak varsayılmıştır. s_i'ler e_{ij}'lerden bağımsız olarak dağılış gösterirler ve $s_i \sim N(0, \sigma^2_s)$, $e_{ij} \sim N(0, \sigma^2_e)$ ve $\mathrm{Cov}(s_i, e_{i'j'}) = 0$. Böyle bir modelde bilinmeyen parametrelere ait vektör $\theta=(\mu,\{s_i\},\sigma^2_s,\sigma^2_e)$'dır. Modeldeki gözlem değerlerine ait şartlı dağılış aşağıdaki gibidir.

$$y_{ij} \mid \mu, s_i, \sigma^2_s, \sim N(0, \sigma^2_e).$$

2.2. Bazı Kısıtlamalar ve Hayvan Islahı Varsayımları

Bazı hayvan ıslahı uygulamalarında, varyans unsurları yerine bunların oranları veya fonksiyonları hakkında yorumlamaların yapılması gerekebilir. γ, boğa ve hata varyans unsurlarının oranını, σ^2_s/σ^2_e, temsil etsin. Bu durumda, bir karakterin kalıtım derecesi, h^2, γ'nin artan bir fonksiyonu olup $h^2=4/(1+\gamma^1)$ şeklinde verilir. γ varyansların bir oranı olduğundan, pozitiftir. Ayrıca, (1)'deki boğa modelinin kullanımı γ üzerine bir üst sınır konulmasını zorunlu kılar, bu u ile gösterilsin. Böylece $0\leq\gamma\leq u$ veya $0\leq\sigma^2_s\leq u\sigma^2_e$ sınırları elde edilir. Baba bir üvey kardeş aile yapısı için kalıtım derecesinin 0 ile 1 arasında olması u'nun 1/3'e eşit olmasını gerektirir ve σ^2_s, 0 ve $1/3\sigma^2_e$ arasında değerler alır. Bu kısıtlamayı dikkate almayan bir yorumlama yöntemi kalıtım derecesi tahminlerinin kendi parametre sınırları dışında değerler almasına yol açabilir.

2.3. Notasyon ve Profil Olabilirliğin Tanımı

Bu bölümde notasyon belirlenerek profil olabilirliğin tanımı yapılacaktır. Parametrik problemlerle ilgilendiğimizi varsayalım. **y**, olasılık yogunluk fonksiyonu $f(\mathbf{y};\theta)$ olan şansa bağlı Y değişkeninin Nx1 boyutlu gözlem vektörü olsun. θ tahmin edilecek parametrelerin $1xp$ boyutlu vektörünü göstersin. Genellikle, tam olabilirlik fonksiyonundaki parametre vektörü ilgi duyulan veya *yapısal parametreler* ve geriye kalanlar da tesadüfi veya *gereksiz parametreler* olmak üzere ikiye parçalanırlar (Neyman ve Scott, 1948). Gereksiz parametre terimi ilk kez Kalbfleisch ve Sprott (1970) tarafından kullanılmıştır. Dağılışı i'den bağımsız bir θ parametresi ve i'ye bağımlı β_i parametrelerine bağlı olan bir dizi birbirinden bağımsız $Y_1, Y_2,\ldots, Y_i,\ldots$ şans değişkenlerini dikkate alalım. Burada θ yapısal ve β_i'ler gereksiz parametrelerdir. Aynı varyans (θ) fakat farklı ortalamalara (β_i) sahip normal dağılışlardan elde edilen veriler buna örnek olarak gösterilebilir.

θ parametre vektörü $\theta = (\psi, \lambda)$ şeklinde parçalanabilir, burada $\psi = (\psi_1,\ldots,\psi_{p1})$ ilgi duyulan parametreler ve $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_{p1})$ gereksiz parametrelerdir. θ'nın log-olabilirlik fonksiyonu $l(\theta)$ ile gösterilebilir. **y**'nin müşterek yoğunluk fonksiyonu $f(\mathbf{y}; \psi, \lambda)$ ise, burada f'nin fonksiyonel formu bilinmektedir, örnek değerleri, **y**, verildiğinde ψ ve λ'nın log-olabilirlik fonksiyonu şöyledir

$$l(\psi, \lambda) = \log f(\mathbf{y}; \psi, \lambda)$$

Gereksiz parametreleri elimine etmek amacıyla geliştirilen olabilirlik fonksiyonu tiplerini Kalbfleisch ve Sprott (1970) ve Patefield (1977) detaylı bir biçimde ele almışlardır. Bu makalede varsayılan yaklaşım aşağıda tanımlanan profil olabilirlik fonksiyonudur.

θ'nın maksimum olabilirlik $\hat{\theta} = (\hat{\psi}, \hat{\lambda})$ tahmini ile gösterilsin. $\hat{\psi}_\lambda$, sabit λ için ψ'nın maksimum olabilirlik tahminini ve benzer şekilde $\hat{\lambda}_\psi$, sabit ψ için λ'nın maksimum olabilirlik tahminini göstersin. ψ'nın kısmi maksimize edilmiş veya profil olabilirliği ve profil log-olabilirliği sırayla şöyle tanımlanır

$$L_c(\psi) = L(\psi, \hat{\lambda}_\psi) = \sup_\lambda \exp\{l(\psi,\lambda)\} \quad \text{ve}$$

$$l_c(\psi) = l(\psi, \hat{\lambda}_\psi) = \sup_\lambda l(\psi,\lambda).$$

Log-olabilirlikler sadece verilerin eklemeli fonksiyonları için tanımlanırlar. Patefield (1977) tarafından belirtildiği gibi, log-olabilirlik, $l_c(\psi)$, esas itibariyle tam log-olabilirliğin, ψ parametre vektörünün alt-vektörlerinin elemanlarına ait eksene projeksiyonudur.

Notasyon ve profil olabilirliğin yukarıda verilen genel tanımını tek yönlü boğa modeline şu şekilde uyarlamak mümkündür. (1) nolu modeldeki si ve yij'lerin şartlı dağılışlarına ait olabilirlik fonksiyonunun, $f(\{y_{ij}\}|\mu,\{s_i\},\sigma^2_s,\sigma^2_e)f(\{s_i\}|\sigma^2_s)$, s_i'lere göre integrali aldıktan ve σ^2_s'yi $\gamma = \sigma^2_s/\sigma^2_e$'ye dönüştürdükten sonra bilinmeyen parametreler vektörü $\theta_1 = (\mu, \sigma^2_e, \gamma)$ olur. Bu parametre vektöründe μ'nün ilgi duyulan, σ^2_e ve γ'nın ise ilgi duyulmayan parametreler olduğu varsayılsın. Bu durumda σ^2_e ve γ'yı içermeyen bir olabilirlik fonksiyonu elde edilebilir. Böylece 'nün aşağıdaki olabilirlik fonksiyonunu incelemek mantıklı bir yaklaşımdır

$$l_c(\mu) = l_c\left(\mu; \hat{\sigma}^2_e(\mu), \hat{\gamma}(\mu); \{y_{ij}\}\right)$$

burada ve $\hat{\sigma}^2_e$, $\hat{\gamma}(\mu)$ μ'nun verilen değeri için σ^2_e ve γ'nın maksimum olabilirlik tahminleridir. Bu μ'nun yoğunlaştırılmış veya profil olabilirlik fonksiyonu olarak bilinir (Harville ve Carriquiry, 1992; Meyer ve Hill, 1992) ve olabilirlik yüzeyinin yandan görünümüne (profil) eşdeğerdir. Patefield (1977)'in belirttiği gibi, profil olabilirlik, örneğin $l_c(\mu)$'nün μ'ye karşı grafiğini elde etmek suretiyle, tam olabilirlik yüzeyinin,

$l(\mu,\sigma^2_e,\gamma|\{y_{ij}\})$, değişik yönlerini incelemede kullanılabilir. Daha da önemlisi, $l_c(\mu)$ büyük ölçüde gerçek bir olabilirlik fonksiyonuymuş gibi düşünülüp o şekilde kullanılabilir. Özellikle μ'nun maksimum profil olabilirlik tahmini, genel maksimum olabilirlik tahminine, $\widehat{\mu}$, eşittir.

3. PROFİL OLABİLİRLİK

Tek yönlü boğa modelindeki s_i ve y_{ij}'lerin şartlı dağılışlarına ait olabilirlik fonksiyonu, $f(\{y_{ij}\}|\mu,\{s_i\},\sigma^2_s,\sigma^2_e)f(\{s_i\}|\sigma^2_s)$, aşağıdaki gibidir

$$l\left(\mu,\{s_i\},\sigma_s^2,\sigma_e^2 \mid \{y_{ij}\}\right) \propto \left(\sigma_e^2\right)^{-\frac{1}{2}sn}\left(\sigma_s^2\right)^{-\frac{1}{2}s}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\mu-s_i)^2}{\sigma_e^2}+\frac{\sum_{i=1}^{s}s_i^2}{\sigma_s^2}\right]\right\}.$$

Bu fonksiyonun s_i'lere göre integrali alınmak suretiyle aşağıdaki olabilirlik fonksiyonu elde edilir

$$l\left(\mu,\sigma_s^2,\sigma_e^2 \mid \{y_{ij}\}\right) \propto \int\cdots\int\left(\sigma_e^2\right)^{-\frac{1}{2}sn}\left(\sigma_s^2\right)^{-\frac{1}{2}s}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\mu-s_i)^2}{\sigma_e^2}+\frac{\sum_{i=1}^{s}s_i^2}{\sigma_s^2}\right]\right\}ds_1\cdots ds_2$$

$$=\left(\sigma_e^2\right)^{-\frac{1}{2}s(n-1)}\left(\sigma_e^2+n\sigma_s^2\right)^{-\frac{1}{2}s}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{S_w}{\sigma_e^2}+\frac{S_b+ns(\bar{y}_{..}-\mu)^2}{\sigma_e^2+n\sigma_s^2}\right]\right\}$$

Daha sonra σ^2_s'yi $\gamma=\sigma^2_s/\sigma^2_e$'ye dönüştürdükten sonra bilinmeyen parametreler vektörü $\theta_1=(\mu,\sigma^2_e,\gamma)$'in olabilirlik fonksiyonu (çarpımsal sabite dışında) aşağıdaki gibi verilebilir.

$$l(\theta_1 \mid \{y_{ij}\}) \propto \left(\sigma_e^2\right)^{-\frac{1}{2}sn}(1+n\gamma)^{-\frac{1}{2}s}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_e^2}\left(S_w+\frac{B}{1+n\gamma}\right)\right]$$

burada

$$B=n\sum_{i=1}^{n}(\bar{y}_{i.}-\mu)^2=S_b+ns(\bar{y}_{..}-\mu)^2,\quad S_b=n\sum_{i=1}^{s}(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})^2\quad S_w=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n}(\bar{y}_{ij}-\bar{y}_{i.})^2,$$

S_b ve S_w ve sırasıyla boğalar arası ve boğalar içi kareler toplamıdır. Böylece log-olabilirlik şöyle yazılabilir.

$$l=-\frac{1}{2}sn\ln\left(\sigma_e^2\right)-\frac{1}{2}s\ln(1+n\gamma)-\frac{1}{2\sigma_e^2}\left(S_w+\frac{B}{1+n\gamma}\right)$$

ve μ'nün maksimum olabilirlik tahmini (σ^2_e ve γ'nın her ikisi için) $\bar{y}_{..}$'dir. Aynı zamanda σ^2_e ve γ'nın birinci dereceden kısmi türevleri aşağıdaki gibi elde edilir

$$\frac{\partial l}{\partial\sigma_e^2}=-\frac{sn}{2\sigma_e^2}+\frac{1}{2\sigma_e^4}\left(S_w+\frac{B}{1+n\gamma}\right)$$

böylece

$$\widehat{\sigma}_e^2(\mu)=\frac{S_w+\frac{B}{1+n\gamma}}{sn}, \tag{2}$$

ve

$$\frac{\partial l}{\partial\gamma}=-\frac{sn}{2(1+n\gamma)}+\frac{nB}{2\sigma_e^2(1+n\gamma)^2},$$

böylece

$$1+n\widehat{\gamma}(\mu)=\frac{B}{s\sigma_e^2} \tag{3}$$

Eşitlik (2) ve (3)'den aşağıdaki elde edilir

$$\widehat{\sigma}_e^2=\frac{S_w}{s(n-1)},$$

böylece 'nün profil olabilirlik fonksiyonu şöyledir

$$l_c(\mu)=B^{-\frac{1}{2}s}e^{-\frac{1}{2}sn}\left[\frac{S_w}{s(n-1)}\right]^{-\frac{1}{2}s(n-1)}\qquad -\infty<\mu<\infty.$$

Aynı yöntemle σ^2_e ve γ'nın profil olabilirlik fonksiyonları elde edilir. Burada $\widehat{\mu}=\bar{y}_{..}$'dir ve

$$1+n\widehat{\gamma}\left(\sigma_e^2\right)=\frac{S_b}{s\sigma_e^2}$$

olup, σ^2_e'nin profil olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunur

$$l_c\left(\sigma_e^2\right)\propto\left(\sigma_e^2\right)^{-\frac{1}{2}s(n-1)}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma_e^2}S_w\right)\left(\frac{eS_b}{s}\right)^{-\frac{1}{2}s}\qquad 0<\sigma_e^2<\infty$$

burada e=2.71828'dir. $\widehat{\mu}=\bar{y}_{..}$ olduğundan, (2) no'lu eşitlikten

$$\sigma_e^2(\gamma)=\left[S_w+S_b(1+n\gamma)^{-1}\right]/(sn) \tag{4}$$

elde edilir. Böylece γ'nın profil olabilirlik fonksiyonu

$$l_c(\gamma)\propto(1+n\gamma)^{-\frac{1}{2}s}\left\{e\left[S_w+S_b(1+n\gamma)^{-1}\right]/sn\right\}^{-\frac{1}{2}sn}\qquad 0\leq\gamma\leq 1/3$$

şeklinde yazılır. Son olarak, 'nin profil olabilirliği, log-olabilirlik fonksiyonunda yerine konularak elde edilebilir. (4) nolu eşitlik aşağıdaki gibi yazılabilir

$$\widehat{\sigma}_e^2\left(h^2\right)=\left[S_w+S_b1+n\left(\frac{h^2}{4-h^2}\right)\right]^{-1}/(sn),$$

ve h^2'nin profil olabilirliği aşağıdaki gibi verilebilir

$$l_c\left(h^2\right)\propto 1+n\left(\frac{h^2}{4-h^2}\right)^{-\frac{1}{2}s}\left\{e\left[S_w+S_b\left(1+n\left(\frac{h^2}{4-h^2}\right)\right)^{-1}\right]/sn\right\}^{-\frac{1}{2}sn}\qquad 0\leq h^2\leq 1.$$

4. KARIŞIK MODELE GENELLEME

Şimdi basit doğrusal bir boğa modeli için verilen sonuçlar, matris notasyonu ile birden fazla şansa bağlı etkiye sahip olan karışık bir model için geliştirilecektir. Hayvan ıslahında kullanılan karışık model yöntemlerinin genel teorisinin gelişimi ilk kez Henderson (1963) tarafından verilmiştir. Karışık model yöntemleri, model varsayımları verildiğinde, istatistiki özellikleri tanımlı sabit ve şansa bağlı etkilerin eş zamanlı olarak tahminlerini vermektedir. $\mathbf{y}=(y_1,\ldots y_N)'$ vektörünün aşağıdaki karışık modelin gözlem vektörü olduğu varsayılsın

$$\mathbf{y}=\mathbf{X}\alpha+\sum_{r=1}^{p}\mathbf{Z}_r\mathbf{u}_r+\mathbf{e} \tag{5}$$

burada $\mathbf{X}$ ve $\mathbf{Z}_r$ sırayla Nxk ve Nxc_r boyutlu desen matrisleri, α $kx1$ boyutlu sabit etkiler vektörü, $\mathbf{u}_r$ c_rx1 boyutlu şansa bağlı etkiler vektörü ve $\mathbf{e}$ $Nx1$ boyutlu gözlemlenmeyen hata vektörüdür. $\mathbf{e}$ ve $\mathbf{u}_r$'lerin hepsinin birbirinden bağımsız olduğu varsayılmaktadır. Ayrıca, $\mathbf{u}_r$'nin herbir elemanı karşılıklı olarak birbirinden bağımsız ve ortalaması sıfır varyansı σ^2_r $(r=1,\ldots,p)$ olan normal dağılış ($\mathbf{u}_r \sim MVN(\mathbf{0}, \sigma^2_r\mathbf{I})$ göstermekte, buna karşılık $\mathbf{e}$'nin elemanları bağımsız ve ortalaması sıfır ve varyansı σ^2_{p+1} olan normal dağılış ($\mathbf{e} \sim MVN(\mathbf{0},\sigma^2_{p+1}\mathbf{I})$ göstermektedir. Böylece $\mathbf{y}$'nin ortalama ve varyansı şöyledir

$$E(\mathbf{y}) = \mathbf{X}\alpha \quad \text{ve} \quad Var(\mathbf{y}) = \mathbf{V} = \sum_{r=1}^{p+1} \sigma_r^2 \mathbf{J}_r = \sum_{r=1}^{p} \sigma_r^2 \mathbf{Z}_r \mathbf{Z}_r' + \sigma_{p+1}^2 \mathbf{I},$$

burada $\mathbf{J}_r = \mathbf{Z}_r \mathbf{Z}'_r$ $(r=1,\ldots,p)$ ve $\mathbf{J}_{p+1}$, NxN boyutlu birim matrisidir. $\sigma^2 = \sigma^2_1,\ldots,\sigma^2_{p+1})'$ vektörünün elemanları varyans unsurları olarak bilinmektedir.

Model (5)'deki, bütün varyansların vektörü olan σ^2 hakkında hakkında olabilirliğe dayalı yorumlamalar yaygın olarak aşağıdaki profil log-olabilirlik, $l_c(\sigma^2)$, kullanılarak yapılmaktadır,

$$l_c(\theta) = l_c\{\theta, \hat{\tau}(\theta)\} = -\frac{1}{2}\mathbf{y}'\hat{\mathbf{P}}\mathbf{y} - \frac{1}{2}\log\left|\hat{\mathbf{V}}\right|,$$

burada $\hat{\alpha}(\sigma^2) = \left(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y}$, sabit σ^2 için α'nın maksimum olabilirlik tahminidir ve $\mathbf{P} = \mathbf{V}^{-1}\text{-}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}$.

Genel olarak, σ^2 vektörünün elemanlarının tamamına ilgi duyulmaz ve sadece unsurlarının bir veya birkaçı hakkında yorumlama yapmak gerekebilir. (5) nolu modeldeki varyans unsurlarının bir q alt-kümesi hakkında olabilirliğe dayalı yorumlamalar yapmada, α ve diğer p-q+1 varyans unsurunun profil olabilirliğine gereksinim vardır. Gösterimi kolaylaştırmak amacıyla, $\tau=(\tau_1,\ldots,\tau_{p-q+1})$ profil olabilirliğine gereksinim duyulan varyans unsurları olsun ve $\theta=(\theta_1,\ldots,\theta_q)$ $=(\sigma^2_1,\ldots,\sigma^2_q)$ geri kalan varyans unsurları olsun, böylece $\sigma^2 = (\theta,\tau)$'dır. Profil olabilirlik metodu, log-olabilirlik fonksiyonundaki α ve τ'yi kendi maksimum olabilirlik tahmin edicileri ile değiştirir. Bu anlamda, α'nın maksimum olabilirlik tahmin edicisi $\hat{\alpha}\{\theta,\hat{\tau}(\theta)\}$ iken, τ'nın maksimum olabilirlik tahmin edicisi $\hat{\tau}(\theta)$ aşağıdaki koşulu sağlamaktadır

$$\mathbf{y}'\mathbf{P}\{\theta,\hat{\tau}(\theta)\}\mathbf{J}_r\mathbf{P}\{\theta,\hat{\tau}(\theta)\}\mathbf{y} = tr\left[\mathbf{V}\{\theta,\hat{\tau}(\theta)\}^{-1}\mathbf{J}_r\right], \quad r=q+1,\ldots,p+1.$$

Böylece, θ'nın profil log-olabilirlik fonksiyonu şöyle yazılabilir

$$l_c(\theta) = l_c\{\theta, \hat{\tau}(\theta)\} = -\frac{1}{2}\mathbf{y}'\hat{\mathbf{P}}\mathbf{y} - \frac{1}{2}\log\left|\hat{\mathbf{V}}\right|,$$

burada $\hat{\mathbf{P}}$ ve $\hat{\mathbf{V}}$, $\hat{\tau}(\theta)$ noktasında hesaplanan $\mathbf{P}=\mathbf{P}(\theta,\tau)$ $\mathbf{V}=\mathbf{V}(\theta,\tau)$ ve matrisleridir.

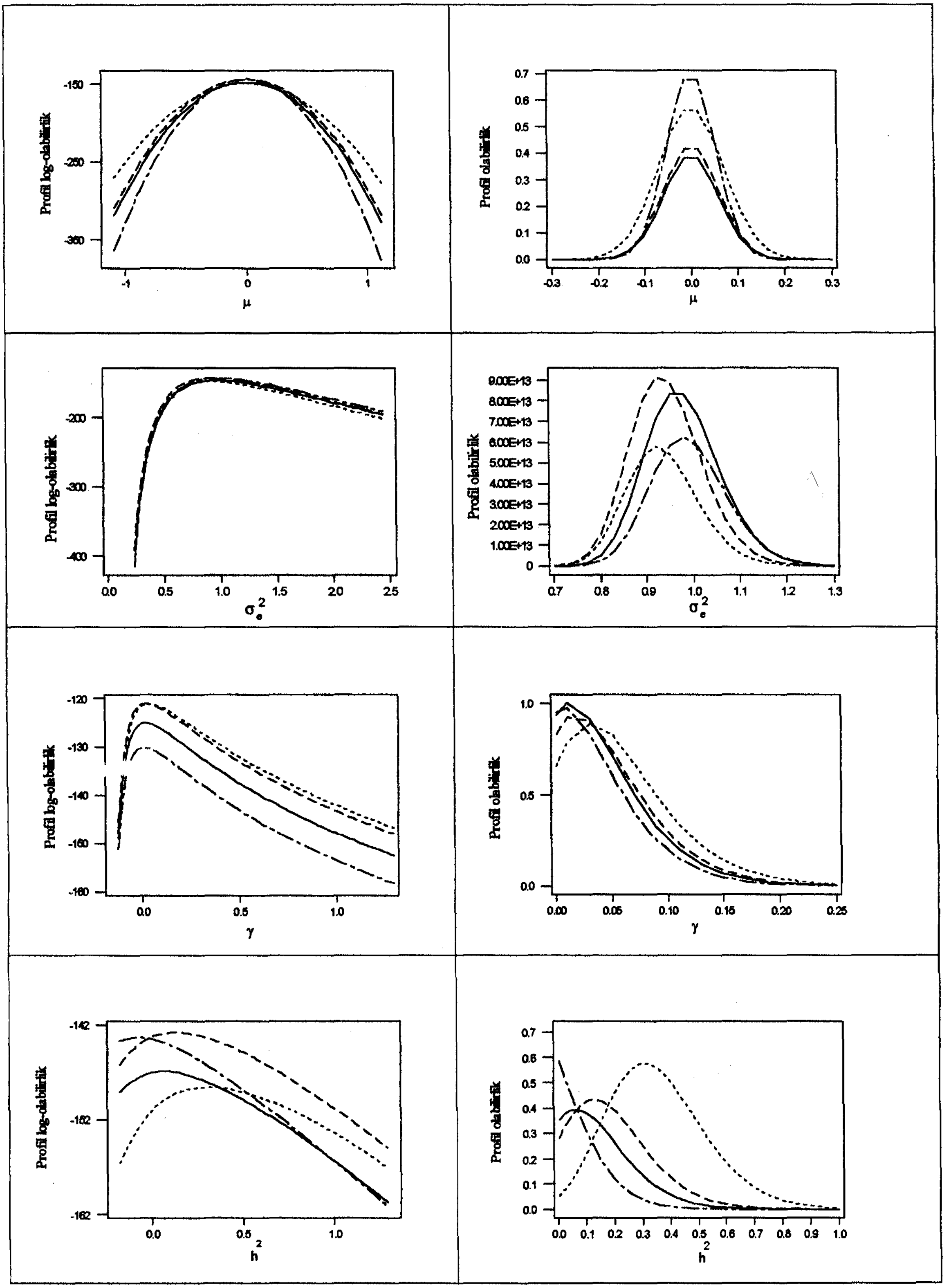
Eğer (5) nolu modelde p=1 olarak alınırsa, $\mathbf{X}$ birlerden ibaret Nx1 boyutlu vektör, $\mathbf{1}_N$, ve $\mathbf{J}_1$ elemanları birlerden ibaret $Nc_1^{-1}\mathrm{x}Nc_1^{-1}$ boyutlu blok-köşegen matris haline dönüşür. Bu durumda, (5) nolu model (1) nolu modele indirgenir ve σ^2_1 ve σ^2_2 sırayla boğa varyansı, σ^2_s, ve hata varyansına, σ^2_e, eşit olur ve N=sn'dir.

5. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Dengeli tek değişkenli şansa bağlı boğa modeli (1)'de 50 boğa ve boğa başına 6 birey olacak şekilde, μ=0, σ^2_s=0.025 ve σ^2_e=0.975 parametre değerleri kullanılarak Monte Carlo simulasyonuyla dört veri seti elde edilmiştir. Bu 300 gözleme sahip dört veri seti şansa bağlı modellerde karşılaşılabilecek birçok problemi açıklamak için yeterli sayılabilir. Örneğin negatif boğa varyansı, σ^2_s, tahmini dahil oldukça geniş kapsamlı boğa varyansı tahminleri mevcuttur.

Herbir veri seti için varyans analizi (ANOVA) yapılmış ve elde edilen kareler toplamları Tablo 1'de ve ortalam μ, hata varyansı σ^2_e, varyansların oranı γ ve kalıtım derecesi h^2'nin ANOVA, ML ve REML tahminleri ise Tablo 2'de sunulmuştur. Tablo 2'den de görülebileceği gibi, herbir veri seti -0.095'ten 0.383'e değişen aralıkta h^2'nin farklı ANOVA tahminlerini vermektedir. En dikkati çeken veri setinin h^2'nin ANOVA tahminini negatif olarak veren dört nolu veri seti olduğu görülmektedir. Bu durumda ML ve REML tahminleri sıfıra eşit olmaktadır. Ayrıca veriler dengeli olduğundan h^2'nin ANOVA tahminlerinin pozitif olarak elde edildiği veri setleri 1, 2 ve 3'e ait σ^2_e γ ve h^2'nin ML ve REML tahminleri ANOVA tahminleri ile eşit olmuştur.

Ortalama, hata varyansı, varyansların oranı ve kalıtım derecesi, μ σ^2_e γ ve h^2'ye ait profil log-olabilirlik ve profil olabilirlik yoğunlukları veri setleri 1, 2, 3 ve 4 için Şekil 1'de gösterilmiştir. Bu şekil dengeli tek değişkenli şansa bağlı bir boğa modelinden simüle edilen veri setlerine ait karakteristik sonucu göstermektedir. Profil log-olabilirlik grafikleri σ^2_e ve γ parametrelerinin hesaplandığı aralıklardaki yerel maksimumları göstermektedir. Şekil 1'den de görüleceği üzere, σ^2_e'nin profil log-olabilirliği geniş bir aralıkta düze yakındır. Bu şekil σ^2_e hakkında yorumlama yapmayı güçleştirmektedir. Fakat hesaplamalar bakımından herhangi bir zorluk yoktur. Varyansların oranına, γ, ait profil log olabilirlik eğrilerinin varsayılan aralıkta simetrik olmadıkları, çarpık oldukları görülmektedir. Meyer ve Hill (1992) bu çarpıklığın artan örnek büyüklüğüne bağlı olarak azaldığını bildirmişlerdir.



Şekil 1. Veri Setleri 1 (___), 2 (- - - -), 3 (. . . . .) ve 4 (-.-.-.-) için μ, σ^2_e, γ, ve h^2'nin Profil Log-olabilirlik ve Profil Olabilirlik Yoğunlukları.

Bu makalede, birden fazla parametreye sahip basit dengeli tek değişkenli şansa bağlı bir boğa modelindeki ortalama, varyans unsurları ve bunların oranları hakkında istatistiksel yorumlamalar yapmada kullanılan profil olabilirlik yöntemi incelenmiştir. Bu yöntem, olabilirlik fonksiyonundaki istenmeyen parametreleri elimine etmek suretiyle ilgi duyulan parametre hakkında yorumlamalar yapılmasını kolaylaştırmaktadır. Elimine etme işlemi olabilirlik fonksiyonunun gereksiz parametrelere göre maksimize edilmesinden ibarettir.

Mevcut çalışmada, şansa bağlı boğa modeli için verilen teorik sonuçlar daha sonra birden fazla şansa bağlı etkiye sahip karışık bir model için geliştirilmiştir. Fakat sayısal örnekler sunumdaki kolaylık bakımından sadece dengeli şansa bağlı boğa modeli için verilmiştir. Bu çalışmadan biraz farklı olarak, Meyer ve Hill (1992) iki şansa bağlı etkiye sahip (şansa bağlı hata terimi dışında) dengeli hiyerarşik bir modele ait verileri kullanarak, modeldeki üç varyans unsurunun maksimum olabilirlik tahminlerine ait örnekleme varyansları ve güven aralıklarını elde etmişlerdir.

Bu çalışmada sunulan profil olabilirlik yöntemi Bayesian ve olabilirliğe dayalı metodları karşılaştırmak istenildiği zaman daha da önem kazanmaktadır. Herbir parametrenin prior ve posterior yoğunluklarını karşılaştırmada Tablo 1'deki profil olabilirlik yoğunlukları kullanılır. Bu amaçla Smith ve Naylor (1987), üç parametreli Weibull dağılışı için profil olabilirlik yöntemini kullanarak maksimum olabilirlik ve Bayesian tahmin edicilerini geliştirmiş ve karşılaştırmışlardır. Bayesian ve maksimum olabilirlik yöntemleri arasındaki en önemli farklılıklardan bir tanesi gereksiz parametreleri ele alma şeklidir. Profil olabilirlik, olabilirlik fonksiyonunu gereksiz parametrelere göre maksimize edilerek elde edildiği halde, marjinal posterior yoğunluklar integralle elde edilir. Maksimum olabilirlik ve Bayesian yöntemlerinin her ikisi de hesaplamalar açısından oldukça kolaydırlar, fakat istatistiksel yorumlamalarda bazı güçlükler vardır. Maksimum olabilirlik teorisi asimtotiklere ve dolayısı ile de log-olabilirliğin asimtotik olan kuadratik şekline bağlıdır. Fakat, Bayesian yöntemi olabilirliklere dayanmamaktadır. Bu karşılaştırma mevcut çalışmada araştırılmamış olup başka bir araştırmanın konusudur.

Tablo 1. s=50, n=6, μ=0, σ^2_s=0.025 ve σ^2_e=0.975 Değerleri Kullanılarak Simule Edilen Dört Veri Setine Ait Varyans Analiz Tablosu.

Kaynak	s.d.*	K.T.**
	Veri Seti 1	
Gruplar arası	49	52.443
Gruplar içi	250	241.615
	Veri Seti 2	
Gruplar arası	49	55.870
Gruplar içi	250	230.875
	Veri Seti 3	
Gruplar arası	49	73.261
Gruplar içi	250	228.451
	Veri Seti 4	
Gruplar arası	49	41.457
Gruplar içi	250	245.854

*s.d. = serbestlik derecesi **K.T. = kareler toplamı

Tablo 2. Dört Veri Setine Ait μ σ^2_e γ ve h^2'nin ANOVA, ML ve REML Tahminleri.

Yöntem	Veri Setleri	μ	σ^2_e	γ	h^2
ANOVA	1	-0.055	0.967	0.018	0.070
	2	-0.048	0.924	0.039	0.151
	3	0.061	0.914	0.106	0.383
	4	0.053	0.983	-0.023	-0.095
ML	1	-0.055	0.967	0.018	0.070
	2	-0.048	0.924	0.039	0.151
	3	0.061	0.914	0.106	0.383
	4	0.053	0.958	0.000	0.000
REML	1	-	0.967	0.018	0.070
	2	-	0.924	0.039	0.151
	3	-	0.914	0.106	0.383
	4	-	0.961	0.000	0.000

KAYNAKÇA

Barndorff-Nielsen, O. (1986). Inference on full or partial parameters based on the standardized log likelihood ratio. *Biometrika* 73, 307-322.

Cox, D.R. ve Reid N. (1987). Parameter orthogonality and approximate conditional inference. *Journal of the Royal Statistical Society B* 49, 1-39.

Harville, D.A. ve Callanan T.P. (1990). Computational aspects of likelihood-based inference for variance components. *Advances in Statistical*

Methods for the Genetic Improvement of Livestock, Eds: D. Gianola, ve K. Hammond, Springer-Verlag, Berlin, ss.136-176.

Harville, D.A. ve Carriquiry A.L. (1992). Classical and Bayesian prediction as applied to an unbalanced mixed linear model. *Biometrics* 48, 987-1003.

Henderson, C.R. (1963). Selection index and expected genetic advance. *Statistical genetics and plant breeding.* NAS-NRC 982, Washington DC, ss. 141-163.

Kalbfleisch, J.D. ve Sprott D.A. (1970). Application of likelihood methods involving large numbers of parameters. *Journal of the Royal Statistical Society B* 32, 175-208.

McCullagh, P. ve Tibshirani R. (1990). A simple method for the adjustment of profile likelihoods. *Journal of the Royal Statistical Society B* 52, 325-344.

Meyer, K. (1990). Present status of knowledge about statistical procedures and algorithms to estimate variance and covariance components. *Proc. 4th World Congr. Genet. Appl. Livest. Prod. XIII.* ss. 407-419.

Meyer, K. ve Hill W.G. (1992). Approximation of sampling variances and confidence intervals for maximum likelihood estimates of variance components. *Journal of Animal Breeding and Genetics* 109, 264-280.

Neyman, J. ve Scott E.L. (1948). Consistent estimates based on partially consistent observations. *Econometrica* 16, 1-32.

Patefield, W.M. (1977). On the maximized likelihood function. *Sankhya B* 39, 92-96.

Patterson, H.D. ve Thompson R. (1971). Recovery of inter-block information when block sizes are unequal. *Biometrika* 58, 545-554.

Smith, R.L. ve Naylor J.C. (1987). A comparison of maximum likelihood and Bayesian estimators for the three-parameter weibull distribution. *Applied Statistics* 36, 358-369.

Mehmet Ziya Fırat, 1964 yılında Erzincan'ın Kemaliye ilçesinde dünyaya geldi. Çukurova Üniversitesi, Ziraat Fakültesi Zootekni Bölümünden 1986 yılında mezun olup 1987'de aynı bölüme Araştırma Görevlisi olarak girdi. Yüksek Öğretim Kurumunun Yurtdışı Bursu ile 1989-1991 yılları arasında İngiltere'nin Reading Üniversitesi Uygulamalı İstatistik Bölümünde Master ve 1991-1995 yıllarında İskoçya'nın Edinburgh Üniversitesi Matematik ve İstatistik Bölümünde Doktorasını tamamladı. 1995 yılında Çukurova Üniversitesi, Ziraat Fakültesi Zootekni Bölümüne Yardımcı Doçent olarak atandı. 1997 yılında altı aylık bir süre ile Amerika'nın Michigan State Üniversitesi, Hayvancılık Bölümü, Biyometri ve Genetik Anabilim Dalında ziyaretçi profesör olarak görev yaptı. Aynı yıl Biyometri Bilim Dalında Doçent ünvanı aldı. 1999 yılında Çukurova Üniversitesindeki görevinden ayrılarak Akdeniz Üniversitesi, Ziraat Fakültesi Zootekni Bölümü, Biyometri ve Genetik Anabilim Dalı başkanlığı görevine atandı. Uygulamalı istatistik, bilgisayar uygulamaları, araştırma ve deneme metodları gibi konularda lisans, yüksek lisans ve doktora düzeyinde birçok ders vermekte olup çalışma konuları Bayesci istatistik, varyans bileşenlerinin tahmini, genelleştirilmiş doğrusal modeller ve kantitatif genetikdir.