ANADOLU ÜNİVERSİTESİ BİLİM VE TEKNOLOJİ DERGİSİ
ANADOLU UNIVERSITY JOURNAL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
Cilt/Vol.: 3 - Sayı/No: 3 : 363-367 (2002)
XIV. Ulusal Matematik Sempozyumu Özel Sayısı/Special Issue for XIVth National Mathematics Symposium

ARAŞTIRMA MAKALESİ/**RESEARCH ARTICLE**

MATRİSLER AİLESİNİN GÜRBÜZ VE KUADRATİK KARARLILIĞI ÜZERİNE

Vakıf Dzhafarov[1], Özlem A. Esen[2]

ÖZ

Bu çalışmada kararlı matrislerin ve onların karakteristik polinomlarının konveks kombinasyonlarının kararlılığı arasındaki bağlantılar incelenmiştir. Konveks kombinasyonlar ailesinin gürbüz ve kuadratik kararlılığı için gerekli ve yeterli koşullar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kararlı matris, Konveks kombinasyon, Gürbüz kararlılık, Kuadratik kararlılık.

ON THE ROBUST AND QUADRATIC STABILITY OF MATRICES FAMILY

ABSTRACT

In this study the relationship between stability of convex combinations of stable matrices and its characteritic polynomialis is investigated. Necessary and sufficient conditions for robust stability and quadratic stability of convex combinations are given.

Key Words: Stable Matrices, Convex combinations of matrix, Robust stability, Quadratic stability.

1. GİRİŞ

Bir A kare matrisi ($p(s)$ polinomu) verilsin. Eğer bu mat-risin tüm özdeğerleri (polinomun tüm kökleri) sol yarı-açık düzlemde ise bu matrise (polinoma) kararlı (veya Hurwitz kararlı) matris (polinom) denir.
Bilindiği gibi A nın özdeğerleri, I birim matris olmak üzere det(sI-A) monik polinomunun kökleridir.

Tersine herhangi

$$p(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0 \qquad (1)$$

monik polinomu

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

matrisinin karakteristik polinomudur. (2) Matrisine (1) polinomunun kompanyon (companion) matrisi denir. (2) matrisine benzer olan tüm matrislerinde karakteristik polinomunun (1) polinomu olduğu bilinmektedir.

Boyutları aynı olan A ve B matrisleri için

$$L_{A,B} = \{(1-\lambda)A + \lambda B : 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

ailesine A ve B nin konveks kombinasyonları kümesi denir.

$\mathfrak{M}$ matrisler ailesi verilsin. Eğer her $A \in \mathfrak{M}$ matrisi kararlı ise $\mathfrak{M}$ ailesine gürbüz kararlı aile denir.

Bu çalışmada önce kararlı matrislerin konveks kombinasyonlarının kararlılığı ile bu matrislerin karakteristik polinomlarının konveks kombinasyonlarının kararlılığı arasındaki bağlantılar

[1]Anadolu Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü 26470 Eskişehir
E-posta: vcaferov@anadolu.edu.tr
[2]Anadolu Üniversitesi Engelliler Entegre Yüksekokulu Eskişehir

Geliş: 26 Mart 2002; **Kabul:** 04 Kasım 2002.

örneklerle açıklanmış ve sonra konveks kombinasyonlar ailesinin gürbüz ve kuadratik kararlılığı için gerekli ve yeterli koşullar verilmiştir.

Fu ve Barmish (1988), Barmish (1994) yayınlarında bir kararlı matrisin belli bir yönde kararlılığının korunması için maksimal sınırlar bulunmuştur. Barmish vd. (1988) makalesinde matrisler politopu için kenar (edge) teoreminin genellikle geçerli olmadığı gösterilmiştir.

2. GÜRBÜZ KARARLILIK

Bilindiği gibi ikinci mertebeden polinomun kararlılığı için katsayıların aynı işaretli olması gerekli ve yeterli. Üçüncü mertebeden

$$a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

polinomunun kararlılığı için ise katsayıları aynı işaretli olmalı ve

$$a_1 a_2 > a_0 a_3$$

eşitsizliği sağlanmalıdır.

$(n \times n)$ boyutlu kararlı iki matrisin konveks kombinasyonu kararlı olmayabilir.

Örnek 1.

$$A = \begin{bmatrix} -1.5 & -12.06 & -0.06 \\ -0.25 & 0 & 1 \\ 0.25 & -4 & -1 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} -0.5 & -12.06 & -0.06 \\ -0.25 & 0 & 1 \\ 0.25 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

matrisleri kararlı olduğu halde $(1-\lambda)A + \lambda B$ matrisi $\lambda = \frac{2}{3}$ için kararlı değildir.

Eğer I matrisi $(n-3) \times (n-3)$ boyutlu birim matris ise

$$A^{\sim} = \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}, B^{\sim} = \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

gibi tanımlanan $(n \times n)$ boyutlu blok matrisler kararlı oldukları halde onların konveks kombinasyonu $\lambda = \frac{2}{3}$ için kararsızdır.

Konveks kombinasyonu kararsız olan iki kararlı matrisin karakteristik polinomlarının konveks kombinasyonları kararlı olabilir.

Örnek 2.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

kararlı matrislerini alalım. Bu iki matrisin konveks kombinasyonu $\lambda = \frac{1}{2}$ için kararlı olmadığı halde her ikisininde karakteristik polinomu $s^2 + s + 1$ dir.

Konveks kombinasyonları da kararlı olmak üzere öyle $p_1(s)$ ve $p_2(s)$ polinomları vardır ki A_1 ve A_2 kompanyon matrisler olmak üzere öyle W_1, W_2 matrisleri bulunabilir ki

$$B_1 = W_1 A_1 W_1^{-1} \qquad B_2 = W_2 A_2 W_2^{-1}$$

olduğunda B_1 ve B_2 matrislerinin konveks kombinasyonları kararsız olur.

Örnek 3.

$$p_1(s) = s^2 + s + 1 \ , \ p_2(s) = s^2 + 2s + 4$$

Kompanyon matrisler

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \ , \ A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

olur.

$$W_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} \text{ ve } W_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

alırsak

$$\begin{aligned} B_1 &= W_1 A_1 W_1^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{4}{13} & -\frac{3}{13} \\ \frac{79}{13} & -\frac{17}{13} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_2 &= W_2 A_2 W_2^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ -14 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. B_1 ile B_2 nin konveks kombinasyonu $\lambda = \frac{1}{2}$ için kararsızdır.

Konveks kombinasyonu kararsız olan öyle $p_1(s)$ ve $p_2(s)$ polinomları bulabiliriz ki A_1 ve A_2 kompanyon matrisler olmak üzere $B_1 = W_1 A_1 W_1^{-1}$, $B_2 = W_2 A_2 W_2^{-1}$ olduğunda B_1 ve B_2 matrislerinin konveks kombinasyonu kararlı olur.

Örnek 4.

$$p_1(s) = s^3 + s^2 + 2s + 1$$

ve

$$p_2(s) = s^3 + 0.001s^2 + 0.001s + 10^{-8}$$

seçelim (Bialas ve Garloff, 1985).

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -10^{-8} \\ 1 & 0 & -0.001 \\ 0 & 1 & -0.001 \end{bmatrix}$$

dir.

$$W_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad W_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

seçilirse

$$\begin{aligned} B_1 &= W_1 A_1 W_1^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 4 \\ -3 & -\frac{1}{4} & \frac{29}{4} \\ 1 & -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_2 &= W_2 A_2 W_2^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1.001 & -1.001 & -.001 \\ 0.5005 & -1.5005 & .4995 \\ 1.5015 & -2.5015 & .4985 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olur.

$p_1(s)$ ve $p_2(s)$ polinomlarının konveks kombinasyonu $\lambda = \dfrac{2}{3}$ için kararsız olduğu halde B_1 ve B_2 ninkiler ise kararlıdır.

Şimdi iki kararlı matrisin konveks kombinasyonunun kararlılığı için gerekli ve yeterli koşul verelim. Bu koşul Fu ve Barmish (1988) makalesindeki temel teoremin bir sonucu olarak elde edilmektedir. Önce aşağıdaki tanım ve notasyonları verelim.

$\lambda_{\max}^{+}(A)$ ile bir A kare matrisinin pozitif özdeğerlerinin en büyüğünü gösterelim. Eğer A pozitif özdeğere sahip değilse $\lambda_{\max}^{+}(A) = 0^{+}$ olarak kabul edilir. $R^{n\times n}$ ise $(n \times n)$ boyutlu matrisler ailesini göstersin.

Tanım 5. *$T(.) : R^{n\times n} \to R^{m\times m}$ lineer dönüşümü verilsin. Eğer*

1) Her $A \in R^{n\times n}$ için $T(A)$ matrisinin en az bir reel özdeğeri vardır.

2)$max\{Re(\lambda) : \lambda, A$ nin bir özdeğeri$\}$

ve

$max\{\nu : \nu,\ T(A)$ nin bir reel özdeğeri$\}$

sayıları ya aynı işaretli yada her ikiside sıfırdır koşulları sağlanıyorsa $T(.)$ dönüşümüne kararlılık problemini tekil olmama (nonsingularity) problemine dönüştüren dönüşüm denir.

Yukarıdaki özelliğe sahip $T(.)$ dönüşümleriyle ilgili örnekler Fu ve Barmish (1988) çalışmasında verilmiştir.

Teorem 6. *(Fu ve Barmish, 1988) $T(.)$ kararlılık problemini nonsingülerlik problemine dönüştüren dönüşüm olsun. A kararlı olmak üzere*

$$\mathfrak{M} = \{A + rM : r \in (0.r_{\max})\} \quad (3)$$

ailesini tanımlayalım. O zaman $\mathfrak{M}$ ailesinin gürbüz kararlı olduğu $(0, r_{\max})$ maksimal aralığı için

$$r_{\max} = \frac{1}{\lambda_{\max}^{+}\left(-T(A)^{-1}T(M)\right)}$$

dir.

Şimdi A ve B kararlı olmak üzere

$$L_{A,B} = \{(1-\lambda)A + \lambda B : 0 \le \lambda \le 1\}$$

ailesine Teorem 6' yı uygularsak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 7. *(3) Ailesinin kararlı olması için gerekli ve yeterli koşul*

$$r_{\max} = \frac{1}{\lambda_{\max}^{+}\left(-T(A)^{-1}T(B-A)\right)} \ge 1 \quad (4)$$

olmasıdır.

Tek bir q elemanı bir $[\underline{q}, \bar{q}]$ aralığında değişen diğer elemanları ise sabit olan $\mathfrak{M}$ matrisler ailesini göz önüne alalım.

Önerme 8. *$\mathfrak{M}$ ailesi yukarıdaki gibi tanımlansın. Bu durumda*

a) eğer q esas köşegen elemanı ise karakteristik polinomda $s^{n-1}, s^{n-2}, ..., s^0$ dereceli terimlerin katsayıları q ya bağlıdır.

b) eğer q esas köşegen elemanı değilse karakteristik polinomda ancak $s^{n-2}, s^{n-3}..., s^0$ dereceli terimlerin katsayıları q ya bağlıdır.

Bu önermenin ispatı bir determinantın herhangi bir satıra göre açılımı teoreminden elde edilebilir.

Sonuç 9. *$\mathfrak{M}$ ailesi tek bir q elemanı bir aralıkta değişen diğer elemanları ise sabit olan $(n \times n)$ matrisler ailesi olsun ve q esas köşegen elemanı olmasın. Bu durumda eğer uç matrisler kararlıysa $\mathfrak{M}$ ailesi gürbüz kararlıdır.*

Kanıt. Önerme 8'e göre karakteristik polinom

$$s^3 + a_2 s^2 + (\alpha_1 q + \beta_1) + (\alpha_0 q + \beta_0)$$

biçimindedir. Üçüncü mertebeden polinomun kararlılık koşuluna göre her $q \in [\underline{q}, \bar{q}]$ için

$$a_2(\alpha_1 q + \beta_1) - (\alpha_0 q + \beta_0) > 0$$

olduğunu görmeliyiz. Uç matrisler kararlı olduklarından bu eşitsizlik $q = \underline{q}$ ve $q = \bar{q}$ için geçerlidir. Eşitsizliğin sol tarafı q ya göre doğrusal olduğundan bu eşitsizlik her $q \in [\underline{q}, \bar{q}]$ için de geçerli olmalıdır.

Yukarıdaki sonuç $n \geq 4$ olmak üzere $(n \times n)$ boyutlu matrisler ailesi için geçerli değildir.

Örnek 10. $\mathfrak{M}$ ailesini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$\begin{bmatrix} -1 & -5 & q & 0 \\ 2 & 1 & -10 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -7 & -5 & -10 & -5 \end{bmatrix} \qquad -7 \leq q \leq 7$$

Uç matrisler ($q = -7$, ve $q = 7$) kararlı olmasına rağmen $q = 0$ için elde edilen matris kararlı değildir.

3. KUADRATİK KARARLILIK

Bilindiği gibi bir A matrisinin kararlılığı denk biçimde şöyle de tanımlanabilir.

Eğer

$$A^T P + PA < 0 \tag{5}$$

olacak biçimde $P > 0$ matrisi varsa A matrisine kararlı matris denir. Burada A^T matrisi A nın transpozunu, $P > 0$ ise P nin pozitif belirliliğini ifade etmektedir. Bir $\mathfrak{M}$ ailesi için de şunu söyleyebiliriz: Eğer her $A \in \mathfrak{M}$ için

$$A^T P + PA < 0$$

olacak biçimde $P > 0$ matrisi varsa $\mathfrak{M}$ ailesi gürbüz kararlıdır.

Eğer burada P matrisi A dan bağımsız ise yani öyle $P > 0$ varsa ki her $A \in \mathfrak{M}$ için (5) sağlanıyorsa $\mathfrak{M}$ ailesine kuadratik kararlı aile denir.

Tanımdan görüldüğü gibi eğer bir $\mathfrak{M}$ ailesi kuadratik kararlı ise bu ailenin konveks zarfı olan $conv\mathfrak{M}$ ailesi de kuadratik kararlıdır.

$\mathcal{P}$ ile $(n \times n)$ boyutlu normu bir olan pozitif yarı belirli matrisler ailesini gösterelim. $\mathfrak{M}$ ise $(n \times n)$ boyutlu matrislerin kompakt bir ailesi olsun. $P \in \mathcal{P}$ ve $A \in \mathfrak{M}$ için $A^T P + PA$ matrisinin en büyük özdeğerini $J(A, P)$ ile gösterelim (Chen, 1999):

$$J(A, P) = \lambda_{\max}(A^T P + PA)$$

$J(A, P)'$ nin maksiminine J_1 minimaksına J_2 ile gösterelim:

$$J_1 = \max_{A \in \mathfrak{M}} \min_{P \in \mathcal{P}} J(A, P) \tag{6}$$

$$J_2 = \min_{P \in \mathcal{P}} \max_{A \in \mathfrak{M}} J(A, P) \tag{7}$$

$\mathcal{P}$ ve $\mathfrak{M}$ kümeleri kompakt, $J(A, P)$ fonksiyonu ise sürekli olduğundan (6) ve (7)' de maksimum ve minimumlar alınmaktadır. Oyun teorisinden $J_1 < J_2$ olduğu bilinmektedir.

Yukarıdaki tanımlardan aşağıdaki önermenin doğruluğu çıkar.

Önerme 11. $\mathfrak{M}$. *ailesinin gürbüz kararlı olabilmesi için gerek ve yeter koşul $J_1 < 0$ kuadratik kararlı olabilmesı için ise $J_2 < 0$ olmasıdır.*

Görüldüğü gibi gürbüz ve kuadratik kararlık problemleri oyun teorisi (minimax ve maksimin) problemlerine dönüşmektedir.

Şimdi ise kararlı A_1 ve A_2 matrislerinin konveks kombinasyon kümesinin kararlı olabilmesi için daha basit koşul verelim.

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} = L_{A_1,A_2} &= \{(1-\lambda)A_1 + \lambda A_2 : 0 \leq \lambda \leq 1\} \\ &= conv\{A_1, A_2\} \end{aligned}$$

olsun. $N > 0$ olmak üzere

$$A_1^T P + PA_1 = -N \tag{8}$$

matris denkleminin tek çözümünü $P(N)$ ile gösterelim. Bu çözümün

$$P(N) = \int_0^\infty e^{A_1^T P} N e^{A_1 P} dt$$

biçiminde olduğu bilinmektedir (Chen, 1984).

Önerme 12. $\mathfrak{M}$ *ailesinin kuadratik kararlı olması için gerekli ve yeterli koşul*

$$\inf_{N>0} \lambda_{max}\left(A_2^T P(N) + P(N) A_2\right) < 0 \tag{9}$$

veya buna denk olarak

$$\min_{N \in \mathcal{P}} \lambda_{max}(A_2^T P(N) + P(N) A_2) < 0 \tag{10}$$

ın sağlanmasıdır.

Kanıt. $conv\{A_1, A_2\}$ ailesinin kuadratik kararlı olması iki elemanlı $\{A_1, A_2\}$ ailesinin kuadratik kararlı olmasına denktir. Tanıma göre öyle $P > 0$ matrisi bulunmalıdır ki

$$A_1^T P + PA_1 < 0 \tag{11}$$

ve

$$A_2^T P + PA_2 < 0 \tag{12}$$

olmalıdır. (11) eşitsizliğini sağlayan P ler kümesi

$$P(N) : N > 0$$

dir. Bu kümedeki bir elemanın (12) yi sağlaması için (9) veya buna denk olan (10) eşitsizliği sağlanmalıdır.

Görüldüğü gibi $\mathfrak{M}$ ailesinin konveks kombinasyonlar kümesi olması durumunda (7) oyun teorisi problemi daha basit olan (9), (10) optimizasyon problemine dönüşmektedir.

Örnek 13.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 5 & 5 & -10 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -6 \\ 3 & 6 & -9 \end{bmatrix}$$

kararlı matrislerini alalım. Önerme 12'ye göre

$$P = \begin{bmatrix} \frac{957}{1120} & -\frac{9}{112} & -\frac{47}{560} \\ -\frac{9}{112} & \frac{103}{112} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{47}{560} & -\frac{1}{10} & \frac{141}{280} \end{bmatrix}$$

elde ederiz ve

$$A_1^T P + P\, A_1 < 0$$

$$A_2^T P + P\, A_2 < 0$$

sağlanır. Dolayısıyla A_1 ve A_2 nin konveks kombinasyonlar ailesi kuadratik kararlıdır.

KAYNAKÇA

Barmish, B.R. (1994). *New Tools for Robustness of Linear Systems* , Macmillan Publishing Company.

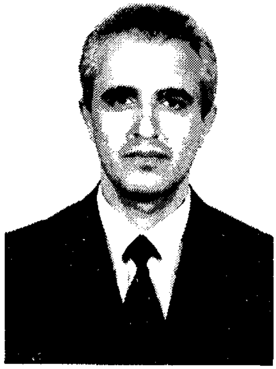
Barmish, B.R. Fu, M. ve Saleh, S. (1988). Stability of Polytope Matrices; Counterexamples. *IEEE Transactions on Automatic Control* vol. AC-33, pp. 569-572.

Bialas, S. ve Garloff, J., (1985). Convex Conbinations of stable polynomials. *Journal of Franklin Institute* 319, 373-377.

Chen, C. T., (1984) *Linear System Theory and Design* , Holt, Rinehart and Winston, New York .

Chen, W.H. (1999). On Relationship Between Quadratic and Robust Stability of Uncertain Systems. *International Journal of Robust and Nonlear Control* 9, 51-58.

Fu, M., Barmish, B.R. (1988). Maximal Unidirectional Perturbation Boudns for Stability of Polynomials and Matrices. *Systems and Control Letters* 11, 173-179.



Vakıf DZHAFAROV

1955 yılında Azerbaycan da doğdu. 1975 yılında Bakü Devlet Üniversitesi'nden mezun oldu. 1976-1982 yılları arasında Sovyetler Birliği Bilimler Akademisi Ural merkezinde doktora yaptı. 1991 yılında Baş Bilim Adamı unvanını aldı. 1998 yılından buyana Anadolu Üniversitesi Matematik Bölümünde sözleşmeli öğretim üyesi olarak çalışmaktadır.

Özlem A. ESEN

1974 yılında Eskişehir'de doğdu. 1996 yılında Osmangazi Üniversitesi, Fen – Edebiyat Fakültesi, Matematik bölümünü bitirdi. 2001 yılında yüksek lisansını tamamladı. Halen Anadolu Üniversitesi , Fen Bilimleri Enstitüsü'nde doktora programına devam etmektedir.