ANADOLU ÜNİVERSİTESİ BİLİM VE TEKNOLOJİ DERGİSİ
ANADOLU UNIVERSITY JOURNAL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
Cilt/Vol.: 3 - Sayı/No: 3 : 377-382 (2002)
XIV. Ulusal Matematik Sempozyumu Özel Sayısı/Special Issue for XIVth National Mathematics Symposium

ARAŞTIRMA MAKALESİ/**RESEARCH ARTICLE**

EBU'L - VEFÂ'nın TRİGONOMETRİ CETVELLERİ

Mehmet Üreyen[1]

ÖZ

Matematik tarihi ile ilgili eserlerde, Ebu'l-Vefâ'nın onuncu yüzyılda astronomi ile ilgili çalışmalarının yanında düzlemsel ve küresel trigonometri konusunda da önemli çalışmaları olduğu ve $15'$ aralıkla sinüs cetveli hazırladığı ve bu değerleri bugünkü yazım tarzına göre sekiz basamağa kadar doğru hesapladığı ifade edilir. Ancak bu eserlerde Ebu'l-Vefâ'nın (940-998) bu hesapları nasıl yaptığına dair bir açıklama bulunmamaktadır. Bu çalışmada, bu konuya bir açıklık getirmek amacıyla, Sali Zeki Bey'in (1864-1921) Asarı Bakiye isimli ünlü eserlerinin I.cild'inin "Ebu'l-Vefâ 'nın Cedavel-i Müsellesâtiyesi" (Ebu'l-Vefâ'nın Trigonometri Cetvelleri) isimli bölümü bugünkü yazıya çevrilip sadeleştirildikten sonra Ebu'l-Vefâ'nın $\sin 30'$ ve $\sin 1^o$ ye ait hesaplarının bir değerlendirilmesi yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Ebu'l-Vefâ, Salih Zeki, Trigonometri cetvelleri

ABU'L-WAFA's TRIGONOMETRIC TABLES

ABSTRACT

In the works dealing with history of mathematics it is noted that in X. century Abu'l-Wafa al-Buzjani [940-998] besides of astronomical studies had also important studies about plane and spherical trigonometry and also made up new sine table for angles differing by $15'$, using the equivalent of eight decimal places. But in these works there is no explanation how had Abu'l-Wafa calculated them. In this article, to explain this subject, we have transcribed chapter named "Ebu'l-Vefa' nın Cedavel-i Müsellesatiyesi" in Asarı Bakiye I written by Salih Zeki (1864-1921) and have simplified to todays Turkish and then have criticized Abu'l-Wafa's computing $\sin 30'$ and $\sin 1^o$.

Key Words: Abu'l-Wafa al-Buzjani, Salih Zeki, Trigonometric tables

1. GİRİŞ

Salih Zeki Bey, Asarı Bakiye'nin birinci cildinin "Ebu'l-Vefâ'nın Trigonometri Cetvelleri" isimli bölümünde önce Ebu'l-Vefâ'nın $\sin 30'$ yı nasıl hesapladığını , Ebu'l-Vefâ'nın "Kitabü'l Mecisti" isimli eserinin Paris Millî Kütüphanesinin "Eski Arap Eserleri" bölümünde 1138 numara ile kayıtlı bulunan nüshasına dayanarak, bugünkü dille ve kısaltılmış biçimiyle, şöyle açıklamaktadır:

[1]Anadolu Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü
E-posta: mureyen@anadolu.edu.tr

Geliş: 28 Mart 2002; **Kabul:** 08 Kasım 2002.

2. EBU'L-VEFÂ 'NIN CEDAVEL-İ MÜSELLESÂTİYESİ[2] (EBU'L-VEFÂ'NIN TRİGONOMETRİ CETVELLERİ)

Ebu'l - Vefâ öncelikle bir giriş olmak üzere "toplamları ile farkları doksan dereceden küçük olan iki yayın toplamlarının sinüsü ile büyüğünün sinüsü arasındaki farkın, yine büyüğünün sinüsü ile farklarının sinüsü arasındaki farkdan küçüktür" teoremini tesis etmişdir. Diğer bir deyişle toplamları ile farkları doksan dereceden küçük olan iki yay u, v ile gösterildiğine ve $v < u$ olduğuna göre Ebu'l - Vefâ

$$sin(u + v) - sinu < sinu - sin(u - v)$$

olduğunu isbat etmiştir. İşte Ebu'l - Vefâ' nın hesaplarına esas olan içdeğer formülü bundan ibaretttir. Ebu'l - Vefâ bu iç değer formülünü aşağıdaki postülata dayandırmıştır.

'Başlangıçları ortak ve farkları birbirine eşit ve herbiri çeyrek daireden küçük olan yani

$$u - v = v - t, \qquad t < v < u < 90^o$$

bulunan üç yaydan bitim noktaları başlangıca göre daha uzakta bulunan u, v yaylarının sinüsleri arasındaki fark, bitim noktaları başlangıca daha yakın olan v, t yaylarının sinüsleri arasındaki farkdan küçük olur. Diğer bir deyişle

$$\sin u - \sin v < \sin v - \sin t$$

bulunur'

İkinci olarak daire içine çizilmiş düzgün altıgenin kenar uzunluğu dairenin yarıçapına eşit olduğundan bunu Ebu'l - Vefâ 60 cüz ile ifade etmiş ve düzgün ongenin kenar uzunluğu da yarıçapın $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ katına eşit bulunduğundan onu da hesapla

$$hâmise^{cüz} 37,, 4,, 55,, 20,, 29,, 39$$

ile göstermiştir.

Ebu'l-Vefâ , 30 ve 18 derecelik yayların sinüslerini doğrudan doğruya bulmuş ve bir yayın sinüsü bilindiğine göre yarısının sinüsünü veren formül vasıtasıyla da aşağıdaki yayların sinüslerini hesaplamıştır.

$$\left(\frac{30}{2}\right)^o, \left(\frac{18}{8}\right)^o, \left(\frac{18}{2}\right)^o, \left(\frac{30}{16}\right)^o,$$
$$\left(\frac{30}{4}\right)^o, \left(\frac{18}{16}\right)^o, \left(\frac{18}{4}\right)^o, \left(\frac{30}{32}\right)^o,$$
$$\left(\frac{30}{8}\right)^o, \left(\frac{18}{32}\right)^o, \left(\frac{15}{32}\right)^o$$

İşte bu yaylardan son ikisinin sinüsleri Ebu'l - Vefâ'ya göre aşağıdadır:

$$\sin\left(\frac{15}{32}\right)^o = hâmise^{cüz} 0,, 29,, 27,, 7,, 34,, 19 \quad (1)$$
$$\sin\left(\frac{18}{32}\right)^o = hâmise^{cüz} 0,, 35,, 20,, 32,, 27,, 29 (2)$$

dir.

Üçüncü olarak, herkesçe bilinen fark formülü yardımıyla

$$\sin\left(\left(\frac{18}{8}\right)^o - \left(\frac{30}{16}\right)^o\right) = \sin\left(\frac{12}{32}\right)^o$$
$$= hâmise^{cüz} 0,, 23,, 33,, 42,, 23,, 56$$

bulmuştur.

Dördüncü olarak asıl maksad 30 dakikalık veya $\frac{16}{32}$ derecelik yayın sinüsünü belirlemek olduğu ve fakat yukarıda sinüsleri hesâb edilmiş olan yaylar arasında da farkları $\frac{16}{32}$ ye eşit iki yay bulunmadığı için bu usulde doğal olarak devam edememiş ve zorunlu olarak ilk bölümdeki içdeğer formülüne mürâcaat etmiştir. Diğer bir deyişle $\sin\left(\frac{16}{32}\right)^o$yi sınırlayacak ve mümkün olduğunca birbirine yakın bulunacak şekilde iki sınır aramıştır. Bu amaçla önce:

$$\sin\left(\frac{16}{32}\right)^o > \sin\left(\frac{15}{32}\right)^o + \frac{1}{3}\left[\sin\left(\frac{18}{32}\right)^o - \sin\left(\frac{15}{32}\right)^o\right]$$

olduğunu, ikinci olarak da

$$\sin\left(\frac{16}{32}\right)^o < \sin\left(\frac{15}{32}\right)^o + \frac{1}{3}\left[\sin\left(\frac{15}{32}\right)^o - \sin\left(\frac{12}{32}\right)^o\right]$$

bulunduğunu göstermiştir

İşte Ebu'l - Vefâ 30 dakika veya $\frac{16}{32}$ derecelik yayın sinüsünü bu suretle birbirine yakın iki sınır arasına sıkıştırdıktan sonra 30 dakikalık yayın sinüsünün bir yaklaşık değeri olmak üzere bu sınırların ortalamasını almışdır ki bu da :

$$\sin\left(\frac{16}{32}\right)^o = \sin\left(\frac{15}{32}\right)^o + \frac{1}{6}\left[\sin\left(\frac{18}{32}\right)^o - \sin\left(\frac{12}{32}\right)^o\right]$$

den ibarettir.

Adı geçen zaten $\frac{18}{32}$, $\frac{12}{32}$ derecelik yayların sinüslerini evvelce hesaplamış olduğundan son formül vasıtasıyla $\frac{16}{32}$ derecelik veya 30 dakikalık yayın sinüsü olarak aşağıdaki değeri bulmuştur:

$$\sin 30' =^{cüz} 0,, 31,, 24,, 55,, 54,, 55$$

sin 30$'$nın altmış tabanına göre yazılmış bu değeri yarıçap birim alındığında ondalık kesirli değeri:

$$0,008726536672$$

dır ki aynı ondalık hanesine kadar olan gerçek değerinden :

$$0,000\ 000\ 001\ 174$$

kadar fazladır.

Bununla beraber Ebu'l - Vefâ'nın bu yöntem ile bulduğu sin30$'$ nın değeri kendi zamanında kullanılan değerine göre daha çok gerçeğe yakındır. Gerçekten gerek Habeş el - Hasib ve gerek Battani'nin kullandığı cedvellerde yarım derecenin sinüsü $^{cüz}0,,$ $^{ka}31,,$ ^{niye} 24 olarak yazılmışdır ki bu değerin gerçek değerinden fazlası on milyonda ikiden büyüktür. İşte hicri dokuzuncu asır başlangıcında yaşamış olan Gıyaseddin Cemşid'in zamanına kadar şarkda kullanılan trigonometri cetvelleri Ebu'l - Vefâ'nın bu hesâbı üzerine te'sis edilmiş idi. Ebu'l - Vefâ kitabü'l - mecistisinin birinci makalesinin beşinci bölümünün sonunda , hesap tarzını göstermeksizin doğrudan doğruya bir derecelik yayın sinüsünün değerini de yazmışdır ki adı geçen değer :

$$Sin1^o =^{c\ddot{u}z} 1_{''}2_{''}49_{''}43_{''}17_{''}35$$

den ibaretttir.

$\sin 1^o$ nin hesap tarzına gelince [2]:

Bunun için Ebu'l - Vefâ önce ana kirişler adı verilen $180^o, 120^o, 90^o, 72^o, 60^o, 45^o, 36^o$ lik yayların kirişlerini geometri yoluyla yarıçapın kesirleri cinsinden hesâb etmiştir. Bundan sonra evvela sinüsü ve doğal olarak kosinüsü bilinen yayların sinüsünü veren formül vasıtasıyla: 9^o ve 15^o için

$$\begin{aligned} \sin 9^o &= {}^{c\ddot{u}z}9_{''}32_{''}09_{''}00 \\ \sin 15^o &= {}^{c\ddot{u}z}15_{''}32_{''}44_{''}55 \end{aligned}$$

değerlerini bulmuştur.

İkinci olarak sinüsleri ve kosinüsleri bilinen iki yayın toplamı veya farkının sinüsünü veren formül ile:

$$\sin(18^o - 15^o) = \sin 3^o =^{c\ddot{u}z} 2_{''}08_{''}24_{''}34$$

değerini hesâb etmişdir.

Asıl bir derecelik yayın sinüsünü ta'yîne gelince yukarıki iç değer formülünü kullanabilmek için bir dereceye mümkün mertebe yakın ve farkları birbirine eşit üç yayın sinüsünü ta'yîn etmek gerektiğinden evvela 3 derecenin sinüsü vasıtasıyla bunun yarısı olan $1^o30'$ lık yayın ve ondan sonra bunun da yarısı bulunan $45'$ nın sinüsünü hesâb etmişdir ve :

$$\sin 45' = \sin\left(1^o - \left(\frac{4}{16}\right)^o\right) =^{c\ddot{u}z} 0_{''}47_{''}07_{''}21_{''}09_{''}30$$

bulmuştur.

Üçüncü olarak 9 derecelik yayın bilinen sinüsü vasıtasıyla yarısı olan $4^o30'$nın ve ondan sonra bunun yarısı olan $2^o15'$ nın ve nihayet bunun da yarısı bulunan $1^o7'30''$ nın :

$$\begin{aligned} \sin(1^o7'30'') &= \sin\left(1^o + \left(\frac{2}{16}\right)^o\right) \\ &= {}^{c\ddot{u}z}1_{''}10_{''}40_{''}52_{''}24_{''}00 \end{aligned}$$

sinüsünü bulmuştur.

Dördüncü olarak 15 derecenin sinüsü vasıtasıyla $7^o30'$ nın ve ondan sonra $3^o45'$ ve daha sonra $1^o52'30''$ nin sinüsünü ve nihayet

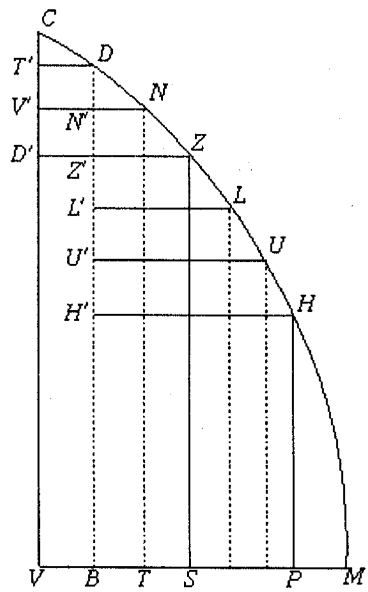
$$\begin{aligned} \sin(0^o56'15'') &= \sin\left(1^o - \left(\frac{1}{16}\right)^o\right) \\ &= {}^{c\ddot{u}z}0_{''}58_{''}54_{''}7_{''}59_{''}1 \end{aligned}$$

bulmuştur. Bu üç yayın sinüsünü bulduktan ve bu üç yayın aralarındaki farkı da $\left(\frac{3}{16}\right)^o$ şeklinde birbirine eşit isabet etdirdikten sonra bir derecelik yayın sinüsünü hesâb etmiştir.

Şöyleki: evvelâ (Şekil 1) bir çember üzerinde M noktasından itibaren :

$$\widehat{MH} = 45' = u \quad , \quad \widehat{MZ} = 56'15'' = v,$$
$$\widehat{MC} = 1^o7'30'' = s$$

alınacak olur ise doğal olarak:



olur.

İşte birbirine eşit bulunan bu $\widehat{HZ}, \widehat{ZC}$ yaylarını U, L,ve N, D noktalarıyla üç eşit parçaya bölünmüş farz edelim. Bu halde parçalardan her biri $\frac{1}{16}$ derecelik bir yay olacağından :

$$\widehat{MN} = \widehat{MZ} + \widehat{ZN} = 1^o - \left(\frac{1}{16}\right)^o + \left(\frac{1}{16}\right)^o = 1^o$$

bulunur ve bundan dolayı bunun sinüsü olan $|NT|$ uzunluğu da aranılan sinüsden ibaret olur. Şimdi şekilde görüldüğü üzere bölüm noktalarından, M noktasından geçen çap ile CV üzerine birer dikme inilecek olur ise

$$|ZS| - |HP| = |H'Z'|$$

[2]Gıyaseddin Cemşid- zîc-i hâkanî der-tekmil-i zîc-i ilhânî, Mîrim Çelebi, Düstûrü'l-amel ve tashîhü'l-cedvel

farkı, iç değer teoremi gereğince DB doğrusu üzerinde, birbirinden farklı üç kısma bölünmüş bulunur ki bunun en büyüğü $|H'U'|$ ve en küçüğü $|Z'L'|$ dır.Bu halde :

$$|Z'L'| < \frac{1}{3}|H'Z'|$$

olur. Diğer bir deyişle:

$$|Z'B| + \frac{1}{3}|H'Z'| > |N'B|$$

veya

$$|Z'B| + \frac{1}{3}|H'Z'| > \sin 1^o \qquad (1)$$

ve bundan dolayı $|Z'B|$ veya $|ZS|$ mikdarına $\frac{1}{3}|H'Z'|$ mikdarı eklenince hâsıl olan toplam $|Z'B|+|Z'L'|$ den ve haydi haydi $|N'B|$ den büyük olur. Benzer şekilde :

$$|CV| - |ZS| = |CD'|$$

farkı da üç farklı kısma bölünmüş olur ki bunun da en büyüğü $|Z'N'|$ veya $|D'V'|$ ve en küçüğü $|T'C|$ dir. Bu halde :

$$|V'D'| > \frac{1}{3}|CD'|$$

veya

$$|Z'N'| > \frac{1}{3}|CD'|$$

ve bundan dolayı

$$|Z'B| + |Z'N'| > |Z'B| + \frac{1}{3}|CD'|$$

veya

$$\frac{1}{3}|CD'| + |Z'B| < \sin 1^o \qquad (2)$$

olur. İşte $\sin 1^o$ için bir üst sınır ve bir alt sınır bulduktan sonra aşağıdaki hesâba devam olunabilir:

$$\begin{aligned} |Z'B| &= \sin(56'15'') =^{cüz} 0_{,,}58_{,,}54_{,,}07_{,,}59_{,,}01 \\ |H'B| &= \sin(45') =^{cüz} 0_{,,}47_{,,}07_{,,}21_{,,}09_{,,}30 \\ |Z'B| - |H'B| &= |Z'H'| =^{cüz} 0_{,,}11_{,,}46_{,,}46_{,,}49_{,,}31 \end{aligned}$$

ve

$$\frac{1}{3}|Z'H'| =^{cüz} 0_{,,}03_{,,}55_{,,}35_{,,}36_{,,}30$$

ve

$$|Z'B| + \frac{1}{3}|Z'H'| = 1_{,,}02_{,,}49_{,,}43_{,,}35_{,,}31 \qquad (1)$$

diğer taraftan:

$$\begin{aligned} |CV| &= \sin(1^o 7'30'') =^{cüz} 1_{,,}10_{,,}40_{,,}52_{,,}34_{,,}00 \\ |Z'B| &= \sin(56'15'') =^{cüz} 0_{,,}58_{,,}54_{,,}07_{,,}59_{,,}01 \\ |CV| - |Z'B| &= |CD'| =^{cüz} 0_{,,}11_{,,}46_{,,}44_{,,}34_{,,}59 \end{aligned}$$

ve

$$\frac{1}{3}|CD'| =^{cüz} 0_{,,}03_{,,}55_{,,}34_{,,}51_{,,}39$$

ve

$$|Z'B| + \frac{1}{3}|CD'| =^{cüz} 1_{,,}02_{,,}49_{,,}42_{,,}50_{,,}40 \qquad (2)$$

bulunacağından (1) ve (2) gereğince:

$$\begin{aligned} \sin 1^o &< {}^{cüz}1_{,,}02_{,,}49_{,,}43_{,,}35_{,,}31 \\ \sin 1^o &> {}^{cüz}1_{,,}02_{,,}49_{,,}42_{,,}50_{,,}40 \end{aligned}$$

ve bundan dolayı bu iki sınır arasındaki fark

$${}^{cüz}0_{,,}00_{,,}00_{,,}00_{,,}44_{,,}51$$

ve yarısı:

$${}^{cüz}0_{,,}00_{,,}00_{,,}00_{,,}22_{,,}25_{,,}30$$

olur ki bu fark üst sınırdan çıkarılır veya alt sınıra eklenirse:

$$\sin 1^o =^{cüz} 1_{,,}02_{,,}49_{,,}43_{,,}13_{,,}05_{,,}30$$

veya yarıçap birim olduğuna göre:

$$\sin 1^o = 0,017 \quad 452 \quad 406$$

bulunur." [2]

3. DEĞERLENDİRME

1) Salih Zeki Bey'in bu açıklamasında dikkat çeken önemli bir nokta Ebu'l-Vefâ'nın iç değer formülünü bir postülata dayandırmasıdır. Sinüs ile ilgili toplam ve fark formülleriyle kolayca ispat edilebilen bu eşitsizliği Ebu'l-Vefâ neden postülata dayandırmıştır? sorusu akla gelmektedir.Eğer Ebu'l-Vefâ'nın hesaplarını nakledenlerin bir hatası yoksa Ebu'l-Vefâ'nın bu formülü bir postülata dayandırmasının nedeni şu olabilir:

Toplam ve fark formülleri bugün sembollerle ifade edilebildiğinden ispat için gerekli ilişkiler kolayca görülebilmektedir, buna karşılık daha çok sözel çalışan Ebu'l-Vefâ ispat için gerekli ilişkileri zihninde görememiş ve dolayısıyla eşitsizliği ispatlayamadığından postülata dayandırmak zorunda kalmıştır.

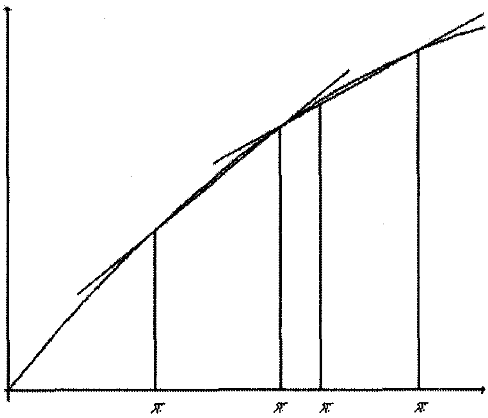
2) Ebu'l-Vefâ'nın $\sin\left(\frac{16}{32}\right)^o$için bulduğu alt sınır, sinüs eğrisi üzerinde $\frac{\pi}{384}$ $\left(= \left(\frac{15}{32}\right)^o\right)$ ve $\frac{\pi}{320}$ $\left(= \left(\frac{18}{32}\right)^o\right)$ apsisli noktaların belirlediği lineer interpolasyon fonksiyonu olan

$$f(x) = 1920\left(\sin\left(\frac{\pi}{320}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{384}\right)\right)x + 30\left(\frac{1}{5}\sin\left(\frac{\pi}{384}\right) - \frac{1}{6}\sin\left(\frac{\pi}{320}\right)\right)$$

fonksiyonunun $\frac{\pi}{360}$ $\left(= \left(\frac{16}{32}\right)^o\right)$ noktasındaki değeri olan

$$\begin{aligned} f(\frac{\pi}{360}) &= \frac{2}{3}\sin(\frac{\pi}{384}) + \frac{1}{3}\sin(\frac{\pi}{320}) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{384}\right) + \frac{1}{3}\left(\sin\left(\frac{\pi}{320}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{384}\right)\right) \\ &= \sin\left(\frac{15}{32}\right)^o + \frac{1}{3}\left(\sin(\frac{18}{32})^o - \sin(\frac{15}{32})^o\right) \end{aligned}$$

dir.



Benzer şekilde Ebu'l-Vefâ'nın bulduğu üst sınır da sinüs eğrisi üzerinde apsisleri $\frac{\pi}{480}$ $\left(= \left(\frac{12}{32}\right)^o\right)$ ve $\frac{\pi}{384}$ $\left(= \left(\frac{15}{32}\right)^o\right)$ olan noktaların belirlediği lineer interpolasyon fonksiyonu olan

$$g(x) = 1920\left(\sin\left(\frac{\pi}{384}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{480}\right)\right)x + \\ 20\left(\frac{1}{4}\sin\left(\frac{\pi}{480}\right) - \frac{1}{5}\sin\left(\frac{\pi}{384}\right)\right)$$

fonksiyonunun $\frac{\pi}{360}$ $\left(= \left(\frac{16}{32}\right)^o\right)$ noktasındaki değeri olan

$$\begin{aligned} g(\frac{\pi}{360}) &= \frac{4}{3}\sin(\frac{\pi}{384}) - \frac{1}{3}\sin(\frac{\pi}{480}) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{384}\right) + \frac{1}{3}\left(\sin\left(\frac{\pi}{384}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{480}\right)\right) \\ &= \sin\left(\frac{15}{32}\right)^o + \frac{1}{3}\left(\sin(\frac{15}{32})^o - \sin(\frac{12}{32})^o\right) \end{aligned}$$

dir. Ebu'l-Vefâ'nın bulduğu değer bu iki interpolasyon fonksiyonunun $\frac{\pi}{360}$ (veya$(\frac{16}{32})^o$) noktasında aldığı değerlerin ortalamasıdır.

3) Şimdi de Ebu'l-Vefâ'nın bulduğu değerle $\frac{\pi}{480}$, $\frac{\pi}{384}$ ve $\frac{\pi}{320}$ noktalarının belirlediği quadratik interpolasyon fonksiyonunun $\frac{\pi}{360}$ noktasında aldığı değeri karşılaştıralım:

Bu üç noktanın belirlediği quadratik interpolasyon fonksiyonu

$$\begin{aligned} h(x) = \frac{32^2.60^2}{2\pi^2}[&(x - \frac{\pi}{384})(x - \frac{\pi}{320})\sin(\frac{\pi}{480}) - \\ &2(x - \frac{\pi}{480})(x - \frac{\pi}{320})\sin(\frac{\pi}{384}) + \\ &(x - \frac{\pi}{480})(x - \frac{\pi}{384})\sin(\frac{\pi}{320})] \end{aligned}$$

dir.

Bu fonksiyonun $\frac{\pi}{360}$ noktasındaki değeri,

$$\begin{aligned} h(\frac{\pi}{360}) &= -\frac{1}{9}\sin(\frac{\pi}{480}) + \frac{8}{9}\sin(\frac{\pi}{384}) + \frac{2}{9}\sin(\frac{\pi}{320}) \\ &= 0,00_{,,}31_{,,}24_{,,}55_{,,}47_{,,}10 \\ &= 0,008\ 726\ 526\ 706 \end{aligned}$$

dır.

Bu yaklaşık hesabın hatası:

$$\begin{aligned} h(\frac{\pi}{360}) - \text{gerçek değer} &\simeq 0{,}00_{,,}00_{,,}00_{,,}00_{,,}06_{,,}50 \\ &\simeq 0,000000008788 \end{aligned}$$

dir. Bu hata Ebu'l-Vefâ'nın hatası ile karşılaştırıldığında Ebu'l-Vefâ'nın hatasının daha küçük olduğu görülür. Bu nedenle $\sin 30'$ nın hesabında Ebu'l-Vefâ'nın kullandığı yöntem quadratik interpolasyondan daha iyi bir yaklaşık değer vermektedir diyebiliriz.

4) Salih Zeki Bey, $\sin 30'$ için Ebu'l-Vefâ'nın bulduğu alt ve üst sınırları dipnotta bugünkü cebir yardımıyla göstermektedir. Ancak günündeki geometriyi iyi bilen Ebu'l-Vefâ'nın hem $\sin 1^o$ yi ve hem de $\sin 30'$ yı aynı yöntemle bulmuş olmalıdır. Çünkü Salih Zeki Bey'in açıklamasındaki işlemleri yapabilen Ebu'l-Vefâ'nın iç değer formülünü kolaylıkla ispatlaması gerekirdi. Bu nedenle Ebu'l-Vefâ'nın her iki hesabı da geometrik yöntemle bulmuş olması akla daha yakın görünmektedir. Çünkü $\sin 30'$ yı hesaplamak için , $\sin 1^o$ de izlediği yöntemde $\sin 30'$ için yukarıda bulduğu açıları alması yeterlidir.

5) $\sin 30'$ da olduğu gibi, Ebul-Vefâ'nın $\sin 1^o$ için bulduğu alt sınır sinüs eğrisi üzerinde apsisleri $\frac{\pi}{192}$ $(= 56'15'')$ ve $\frac{\pi}{160}$ $(= 1^o7'30'')$ olan noktaların belirlediği lineeer interpolasyon fonksiyonunun $\frac{\pi}{180}$ $(= 1^o)$ apsisili noktadaki değeridir.Gerçekten söz konusu lineer interpolasyon fonksiyonu,

$$\begin{aligned} k(x) &= \sin\left(\frac{\pi}{192}\right) + \\ &\frac{16.60}{\pi}\left[\sin\left(\frac{\pi}{160}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{192}\right)\right](x - \frac{\pi}{192}) \end{aligned}$$

dir. Bu fonksiyonun $\frac{\pi}{180}$ noktasındaki değeri ise,

$$\begin{aligned} k\left(\frac{\pi}{180}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{192}\right) + \\ & \frac{16.60}{\pi}\frac{\pi}{12.15.16}\left[\sin\left(\frac{\pi}{160}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{192}\right)\right] \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{192}\right) + \frac{1}{3}\left[\sin\left(\frac{\pi}{160}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{192}\right)\right] \\ &= {}^{c\ddot{u}z}1,,2,,49,,42,,50,,40 \end{aligned}$$

dır.

Ebu'l-Vefâ'nın bulduğu üst sınır da benzer şekilde, sinüs eğrisi üzerinde $\frac{\pi}{240}$ $(= 45')$ ve $\frac{\pi}{192}$ $(= 56'15'')$ apsisli noktaların belirlediği lineer interpolasyon fonksiyonu olan

$$\begin{aligned} l(x) &= \sin\left(\frac{\pi}{240}\right) + \\ & \frac{16.60}{\pi}\left[\sin\left(\frac{\pi}{192}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{240}\right)\right](x - \frac{\pi}{240}) \end{aligned}$$

fonksiyonunun $\frac{\pi}{180}$ $(= 1^o)$ noktasındaki değeri olan,

$$\begin{aligned} l\left(\frac{\pi}{180}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{240}\right) + \\ & \frac{16.60}{\pi}\frac{\pi}{12.60}\left[\sin\left(\frac{\pi}{192}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{240}\right)\right] \\ &=^{c\ddot{u}z} 1,,2,,49,,43,,35,,31 \end{aligned}$$

dir.

6) Salih Zeki Bey, Ebu'l-Vefâ'nın $\sin 30'$ yı nasıl hesapladığını açıkladıktan sonra $\sin 1^o$ nin yaklaşık hesabını açıklamaktadır. Bu anlatış sırasına göre Ebu'l-Vefâ $\sin 30'$ nın değeri yardımıyla $\cos 30'$ yı hesaplayıp, yarım açı formülünü bildiği için, bunun yardımıyla da $\sin 1^o$ yi hesaplayabilirdi. Benzer şekilde $\sin 1^o$ yi hesapladıktan sonra bunun yardımıyla $\sin 30^o$ yi hesaplayabilirdi. Ebu'l-Vefâ bu değerlerden birisini bulduktan sonra diğerini yarım açı formülünü kullanarak veya kosinüs için iç değer formülü yazarak bulabilirdi ve bazılarında hatası daha da küçük olabilirdi. Ancak metinden Ebu'l-Vefâ'nın bu yolları tercih etmediği görülmektedir. Burada doğal olarak Ebu'l-Vefâ neden bu yollardan birisini izlememiştir sorusu akla gelmektedir. Bu soruya cevap olarak şu söylenebilir. Bu yolları uygulamış olsaydı altmışlık sistemde çok sayıda kare ve karekök alma işlemi yapmak zorunda kalacaktı, bu işlemlerin zorluğu yanında bu işlemlerde hassasiyet kaybolacaktı bu nedenle bu yolları tercih etmemiştir denilebilir. Ancak Ebu'l-Vefâ diğer hesaplarında bu işlemleri sık sık kullanmakta ve bulduğu sonuçlara güvenmektedir. Bu nedenle bu düşünce doğru olamaz. Burada akla daha yakın gelen neden, iyi bir geometrici olan Vefâ'nın geometri ağırlıklı olan iç değer formülüne hakim olması ve bu formülde sınırları çok iyi belirleyebilmesinin izlediği yönteme kazandırdığı güzellik ve hassasiyettir.

Ebu'l-Vefâ alt ve üst sınırları belirleyebilmek için altmışlık sistemde çok sayıda kare ve karekök alma işlemleri yapmış olmalıdır. Bundan başka sonuçların altı basamağa kadar doğru olması için ilk değerlerin çok fazla basamakla bulunması gerekmektedir. Vefâ'nın hangi basamakla hesaplamaya başladığı ve bulduğu sonuçlara hangi nedenle güvendiği merak edilmeye değer bir konudur.

KAYNAKÇA

Boyer, B.C. (1968). *A History of Mathematics.* John Wiley & Sons,USA.

Salih Zeki. (1913). *Asarı Bakiye.* I.cild, Matbaa-i Âmire, İstanbul 1329.

Struik, J.D. (çev: Silier, Y.) (1996). *Kısa Matematik Tarihi.* Sarmal Yayınevi, İstanbul.

Mehmet ÜREYEN

1948 yılında Sivrihisar'ın Hamamkarahisar köyünde doğdu. 1969 yılında Ankara Yüksek Öğretmen Okulu, Matematik – Fizik bölümünden mezun oldu. 1969 – 1976 yıllarında Adana ve Eskişehir'de lise öğretmeni olarak görev yaptı. 1976 yılında Eskişehir Devlet Mimarlık ve Mühendislik Akademisi'nde matematik asistanı olarak göreve başladı. 1981 yılında doktor, 2000 yılında doçent oldu. Halen Anadolu Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde öğretim üyesidir.