

## TEKNİK NOT/TECHNICAL NOTE

### PI KONTROLLÜ DOĞRUSAL OLMAYAN SİSTEMLERDE OSİLYON Ahmet UÇAR<sup>1,2</sup>, Vedat ÇELİK<sup>1</sup>

#### ÖZ

Mühendislik sistemlerinin çoğu doğrusal olmayan dinamikler içerirler. Bu sistemlerin kontrolü için bir çok metod geliştirilmiştir. Bununla beraber endüstriyel bir çok uygulamada doğrudan uygulanabilirliğinden ve parametrelerinin deneysel olarak ayarlanabilirliğinden dolayı halen PID tipindeki kontrolörler kullanılmaktadır.

Bu çalışmada, PI kontrollü doğrusal olmayan geri beslemeli; tek girişli-tek çıkışlı sistemlerde limit çevrim şartlarının oluşmasına özel bir önem verilmiştir. Özellikle doğrusal kısmı sıfırı olmayan ikinci dereceden sistemler incelenmiştir. Limit çevrim davranışı göstermeyen kontrolsüz bir sistemin, PI kontrolünden dolayı sistem dinamiğinin değişerek limit çevrim davranışı gösterebileceği ortaya konulmuştur. Bu çalışmada, doğrusal olmayan sistem analizinde kullanılan ve Genelleştirilmiş Aktarım İşlevi (GAI) olarak adlandırılan yöntem kullanılmıştır. Kontrolsüz olarak limit çevrim göstermeyen bir sistemin PI kontrolörle nasıl limit çevrim gösterdiği bir örnekle gösterilmiştir.

Bu çalışma, tasarımcıya doğrusal olmayan sistemlere PI tipi kontrolör uygulandığında, kapalı çevrimde limit çevrim davranışı olabileceğinin farkında olunmasını sağlamak ve GAI'nin kontrol parametrelerinin seçimi için yardımcı olarak kullanılabilceğini önermektedir.

**Anahtar Kelimeler:** : Limit Çevrimi; PI Kontrollü Sistem; Genelleştirilmiş Aktarım İşlevi Analizi.

## SELSUSTAINED OSCILLATION IN PI CONTROLLED NONLINEAR SYSTEMS

### ABSTRACT

Most of engineering systems contain nonlinear dynamics. There are several methods that have been developed and introduced to control such systems. However, most of industrial applications still rely on PID controller since it can be applied directly and its parameters can be tuned experimentally.

In this paper, a particular emphasis is given on the conditions to occur self-sustained oscillations in single input-single output nonlinear systems controlled by PI. Particularly the systems with second order linear part have been studied. By ensuring that uncontrolled nonlinear systems can not exhibit self-sustained oscillation, we have shown that the controller dynamics may aggravate the system dynamics to lead the conditions of self-sustained oscillation. In this study, an approach developed for nonlinear feedback systems, namely Describing Function (DF), is used for studying self-sustained oscillation in PI controlled system. An example, where self-sustained oscillation is not expected in feedback, is provided to illustrate that PI controller may lead self-sustained oscillation.

This work suggests that the designer should be aware of self-sustained oscillations in the closed-loop while using PI type controllers for nonlinear systems and use DF as a guide method to choose controller parameters.

**Key Words:** Self-sustained Oscillation; PI Controlled System; Describing Function Analysis.

<sup>1</sup> Fırat Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü, 23119 Elazığ.  
<sup>2</sup> E-posta: auçar1@firat.edu.tr, Faks: 0-424-2415526

## 1. GİRİŞ

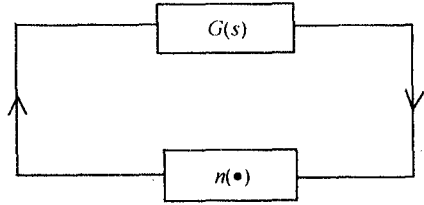
Endüstride kontrol edilmek istenilen sistem modellerinin çoğu doğrusal olmayan eleman ve belirsizlikler içerirler (Schweppe, 1997) ve (Marino ve Tomei, 1995). Bu sistemlerin kontrolü için bir çok kontrol metodu geliştirilmesine rağmen endüstride PID kontrolörler oldukça sık kullanılmaktadır (Aström ve Högglund, 1995). PID kontrolör kullanılması nedenlerinden birisi sistem modeline gereksinim duyulmadan sistemin deneysel yanıtlardan yararlanarak kontrol parametrelerinin seçimine olanak vermesidir (Ogata, 1990). Bu nedenle pratikte, kontrol parametrelerini yaklaşık olarak veren bir çok metod geliştirilmiştir (Unar vd., 1996) ve (Uçar ve Akbey, 2000). Fakat, PID kontrolör, kapalı çevrimli sisteme kutup ve sıfırlardan oluşmuş ek bir dinamik getirdiğinden dolayı kapalı çevrimli sistemin mertebesini artırır (Desoer ve Lin, 1985) ve (Chang vd., 2000). Bunun doğrusal geri beslemeli sisteme, genellikle asimptotik kararlılığına, etkisi incelenmesine rağmen, doğrusal olmayan geri besleme ile sistemde oluşabilecek istenmeyen osilasyonların oluşma şartı yeteri derecede incelenmemiştir (Unar vd., 1996) ve (Patchter vd., 1996).

Bu çalışmada, sürekli durum performansını iyileştirmek için kullanılan PID kontrolörünün PI tipinin kapalı çevrim dinamiğine etkisi doğrusal kısmı ikinci mertebeden olan doğrusal olmayan sistemler için incelenmiştir. Bu çalışma ile kontrol birimi olmaksızın osilasyon göstermeyen doğrusal olmayan bir sistemin, PI kontrolörle nasıl osilasyon gösterebileceği ortaya konulmuştur. Osilasyonların genliği ve frekansı doğrusal olmayan sistemlerin analizinde kullanılan ve kontrol teorisinde GAİ (Gibson, 1963) olarak adlandırılan yöntem ile analitik ve grafiksel olarak elde edilmiştir.

Yukarıdaki girişle beraber bu yayında, problem formülasyonu Bölüm 2'de verilmiştir. Bölüm 3'te GAİ metodu ile doğrusal olmayan sistemlerde ve Bölüm 2'de tanımlanan kontrol sistemlerinde oluşan osilasyonların frekans ve genliğinin tahmin edilmesi verilmiştir. Bölüm 4'te endüstride oldukça fazla karşılaşılabilecek kübik türünde doğrusal olmayan eleman (Strogatz, 1994), (Uçar, 2002) ve (Huang, 1997) içeren bir kontrol sistemi örnek olarak seçilmiştir. Bölüm 5'te sonuçlar tartışılmıştır.

## 2. PROBLEM FORMÜLASYONU

Bu çalışmada doğrusal olmayan alt sistem  $n(\bullet)$ 'in doğrusal alt sistem  $G(s)$ 'ten ayrılabilirdiği ve Şekil 1'de verilen doğrusal olmayan geri beslemeli sistemler söz konusudur.



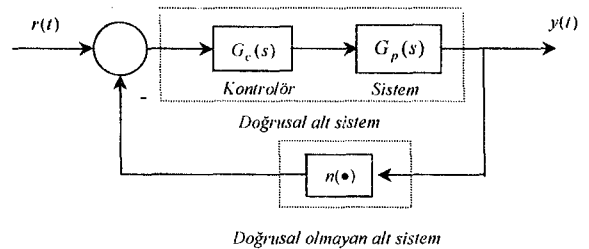
Şekil 1. Doğrusal Olmayan Geri Beslemeli Sistem.

Şekil 1'deki  $G(s)$ , doğrusal kontrolör ve doğrusal alt sistemin transfer fonksiyonu olup düşük frekanslı filtreleme etkisi gösteren bir dinamiğe sahiptir.  $n(\bullet)$  ise skaler doğrusal olmayan bir fonksiyondur.

Şekil 1'deki yapıyla bir çok pratik kontrol sisteminde karşılaşılabilmektedir. Şekil 1'deki sistem dinamiğinde, kapalı çevrimde oluşabilecek osilasyonların veya kaotik davranışların incelenmesi önemlidir (Cook, 1994).

Şekil 1'deki sistem doğrusal olmayan eleman içerdiğinden dolayı oluşabilecek osilasyonlar, doğrusal sistemlerde görülen osilasyonlardan farklıdır. Bu fark; a)Osilasyon genliği ve frekansı başlangıç şartlarından bağımsızdır, b)Osilasyon kararlı veya kararsız olabilir (Slotine ve Li, 1991). Şekil 1'deki yapıda oluşabilecek osilasyonlar (Chua ve Tang, 1982) ve (Buonomo ve Bello, 1996)'da detaylı olarak incelenmiştir ve bu osilasyonların genliği ve frekansını yaklaşık olarak belirleyen metodlar ve referansları verilerek yeni metodlar geliştirilmiştir. Burada Şekil 1'deki tek çevrimli sistemlerde oluşan osilasyonların varlığı ve bu osilasyonların genlik ve frekansının tahmini için GAİ (Slotine ve Li, 1991) ve (Vidyasagar, 1978) metodu kullanılacaktır.

Şekil 1'deki sistemin doğrusal kısmı  $G(s)$ , Şekil 2'deki gibi kontrolör transfer fonksiyonu  $G_c(s)$  ve sistem transfer fonksiyonu  $G_p(s)$ 'den oluşsun, Şekil 2'de belirtildiği gibi sistem girişi ve çıkışı sırası ile  $r(t)$  ve  $y(t)$  olsun.



Şekil 2. Doğrusal Olmayan Bir Geri Beslemeli Kontrol Sistemi.

Bu çalışmada; Şekil 2'deki  $G_p(s)$  ikinci mertebeden alçak frekans geçiren sistem transfer fonksiyonu,  $n(\bullet)$  skaler sürekli veya süreksiz ve histeresis özelliği taşımayan bir doğrusal olmayan eleman olmak üzere;

1)  $G_c(s) = K_p$  alınarak Şekil 2'deki kapalı çevrimli sistemde osilasyon beklenemeyeceği,

2)  $G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s}$  gibi PI tipi kontrolör seçildiğinde ise kapalı çevrimli sistemde osilasyon olabileceği gösterilecektir. Ayrıca bu osilasyonların pratik sonuçları tartışılacaktır.

R.Genesio tarafından formüle edilen yöntem (Genesio ve Tesi, 1990) ve Şekil 2'deki sistemde oluşabilecek osilasyonların genliği ve frekansının bulunması Bölüm 3 verilmiştir.

### 3. GERİ BESLEMELİ DOĞRUSAL OLMAYAN SİSTEMLERDE OSİLYON VE GAİ METODU İLE ANALİZİ

Şekil 2'deki kontrol sisteminde açık çevrim alt sistemin toplama transfer fonksiyonu

$$G(s) = G_c(s)G_p(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$$

biçiminde yazılır. Burada  $p(s)$  ve  $q(s)$  sırasıyla (1) m'inci ve n'inci dereceden aralarında asal polinomlardır ve  $m < n$ ,  $n \geq 2$  dir.  $r(t)=0$  alınarak, sistem çıkışının diferansiyel denklemi

$$q(D)y(t) + p(D)n[y(t)] = 0$$

biçiminde verilebilir. Denklem (2)'deki D diferansiyel operatörünü göstermektedir. Şekil 2'deki doğrusal olmayan geri beslemeli sistemin çıkış yanıtı  $y(t)$  aşağıdaki gibi DA (Doğru Akım) ve bir AA (Alternatif Akım) terimi içerdiği kabul edilsin.

$$y_0(t) = A + B \sin \omega t, \quad B, \omega > 0$$

Bu durumda girişi  $y_0(t)$  olan doğrusal olmayan elemanın çıkışının Fourier serisine açılabilmesi kabul edililerek

$$n[y_0(t)] = N_0(A, B)A + N_1(A, B)B \sin \omega t + \dots$$

yazılabilir. Kapalı çevrimli sistemin doğrusal alt sistemi  $G(s)$  yeteri derecede alçak geçiren bir filtre etkisine sahip olduğu varsayılırsa denklem (4)'teki doğrusal olmayan elemanın çıkışındaki temel bileşen hariç yüksek harmonikleri süzeceğinden doğrusal olmayan alt sistem  $n(\bullet)$ , yaklaşık olarak denklem (4)'te verilen ilk iki terim tarafından karakterize edilebilir. Bu iki terimin katsayıları reel olup sırası ile;

$$N_0(A, B) \cong \frac{1}{2\pi A} \int_{-\pi}^{\pi} n(A + B \sin \omega t) d\omega t \quad (5)$$

$$N_1(A, B) = \frac{1}{\pi B} \int_{-\pi}^{\pi} n(A + B \sin \omega t) \sin \omega t d\omega t \quad (6)$$

dir. Denklem (5) ve (6) GAİ'nin bilinen terimleridirler (Gibson, 1963), (Slotine ve Li, 1991) ve (Vidyasagar, 1978).

Bu çalışmada sadece Şekil 2'deki doğrusal olmayan alt sistemin çıkışında sadece ilk iki terim olan DA bileşeni  $N_0(A, B)$  ve AA bileşeni  $N_1(A, B)$  katsayıları göz önüne alınmasına rağmen, daha hassas bir sonuç elde etmek için denklem (4)'teki serinin içeriğinde üçüncü, dördüncü veya daha yüksek harmonikler dikkate alınabilir. Ancak bu GAİ metodunun karmaşıklığını artırır. Şekil 2'deki doğrusal olmayan alt sistem  $n(\bullet)$ , denklem (5) ve (6)'da verilen katsayılar ile karakterize edilirse, geri beslemedeki osilasyonun genliği ve frekansı kapalı çevrimli sistemin karakteristik denklemi olan denklem (7) ve (8)'in çözümünden elde edilir.

$$A[1 + N_0(A, B)G(0)] = 0 \quad (7)$$

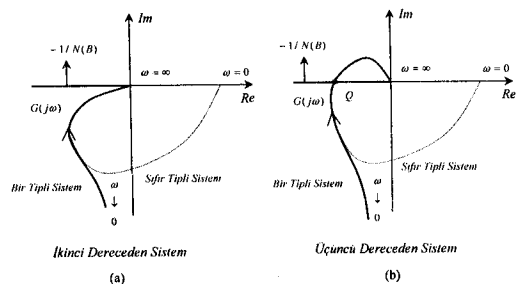
$$1 + N_1(A, B)G(j\omega) = 0, \quad B, \omega > 0 \quad (8)$$

Doğrusal olmayan alt sistem  $n(\bullet)$ 'nin çıkışı DA terim içermediği durumda,  $A=0$  dir ve kapalı çevrimli sistemdeki osilasyon genliği  $B$  ve frekansı  $\omega$ , denklem (8)'in yeni biçimi

$$1 + N(B)G(j\omega) = 0 \quad (9)$$

eşitliğinden elde edilebilir.

Şekil 2'deki kapalı çevrimli sistemde osilasyonun olması için  $-1/N(B)$  ile  $G(j\omega)$ 'nin analitik olarak çözümünün olması veya denklem (9)'un grafiksel çözümü olan Şekil 3'deki  $N(B)$ , negatif reel  $-1/N(B)$  eğişi ile  $G(j\omega)$  eğişisinin kesişmesi gerekir. Şekil 3(a)'da görüldüğü gibi ikinci mertebeden minimum fazlı  $G(j\omega)$  için herhangi bir kesişme olasılığı yoktur. Oysa ki Şekil 3(b)'de üçüncü mertebeden  $G(j\omega)$  için  $Q$  noktasında  $-1/N(B)$  ile  $G(j\omega)$  birbiriyle kesişmektedir ve osilasyon



Şekil 3. Denklem (12)'te Verilen ve Alçak Geçiren Filtre Özelliği Taşıyan İki Farklı  $G(j\omega)$ 'nin Polar Diyagramı: (a)  $G(j\omega)$  İkinci Dereceden Bir Sistem, (b)  $G(j\omega)$  Üçüncü Dereceden Bir Sistem.

beklenebilir. Böylece ikinci mertebeden bir  $G(j\omega)$  için osilasyon şartı yoktur.

Denklem (9)'un grafiksel çözümünün yararlarından birisi de, oluşabilecek osilasyonların kararlılığının kolayca inceleme olanağı vermesidir. Bu, Bölüm 4.1'de bir örnek üzerinde detaylı olarak verilecektir. Şekil 2'de verilen sistemde oluşabilecek osilasyonun genliği ve frekansının bu metodla hassas olarak elde edilmesi,  $-1/N(B)$  ve  $G(j\omega)$  eğrilerinin kesişme açısının  $90^\circ$ 'ye yakınlığı ile doğru orantılıdır. Başka bir deyişle, Şekil 2'deki sistemde osilasyon olabilmesi için  $G(j\omega)$ 'in,  $n(\bullet)$ 'nin çıkışında ana harmonik dışındaki frekans bileşenlerini azaltıcı filtreleme etkisine sahip olması gerekir. Bunun için Şekil 2'deki doğru rusal alt sistemin aşağıdaki eşitsizliği sağlaması gerekir (Genesio vd., 1993).

$$|G(j\omega)| \gg |G(jk\omega)|, \quad k = 2, 3, \dots, \infty \quad (10)$$

#### 4. PI KONTROLÖRLÜ VE DOĞRUSAL OLMAYAN GERİ BESLEMELİ KONTROL SİSTEMLERDE OSİLYASYON

Bölüm 3'te açıklanan GAİ sonuçlarının bir PI kontrolörlü kapalı çevrimli sisteme uygulanması bu bölümde verilecektir. Bu uygulama için Şekil 2'deki kontrol sisteminde, kontrol edilen sistemin

$$G_p(s) = \frac{1}{s^2 + 2s - 1} \quad (11)$$

transfer fonksiyonu ile tanımlı olduğu, geri beslemenin

$$n(\bullet) = y^3 \quad (12)$$

fonskiyonu uyarınca sağlandığı kabul edilerek, sırası ile orantı (P) ve orantı+integral (PI) kontrolörlerinin etkileri ayrıntılı olarak incelenecektir.

Denklem (12)'de verilen geri besleme işareti bir çok pratik sistemin karakteristiği inde görülebilen belsiksiz kübik doğru rusal olmayan bir fonksiyondur (Jang vd., 2002) ve (Uçar, 2002).

Denklem (11)'de verilen kontrol edilen doğru rusal sistem kararsızdır. Kapalı çevrimli sistemin geçici rejimi kabul edilebilir derecede iyi olması ve bununla beraber sistemin sürekli durum cevabının iyileştirilmesi için kontrolör tasarımı gerekmektedir. Bunun için;

Oransal Kontrol:

$$G_c(s) = K_p \quad (13)$$

oransal kontrolör kullanılırsa denklem (12)'deki gibi doğru rusal olmayan geri besleme ile oluşan kontrol sistemin,  $K_p > 1$  için sistemin sürekli durumu iyileşir. Ancak kapalı çevrimli sistem cevabının geçici durumu, ol-

dukça yüksek genlikli sönümlü bir osilasyon gösterir. Nümerik olarak hesaplanması oldukça zaman alan bu osilasyonun sürekli durumda sistemde doğru rusal olmayan eleman olduğu için sistemin sönümsüz osilasyon gösterip göstermediği analitik olarak Bölüm 3'te belirtildiği gibi araştırılabilir. Şöyle ki Bölüm 3'te anlatılan şartlar altında denklem (12)'de verilen doğru rusal olmayan elemanın GAİ;

$$N(B) = \frac{3}{4} B^2 \quad (14)$$

dir (Gibson, 1963).

Şekil 2'deki  $G_c(s)$  ile  $G_p(s)$ 'den oluşmuş doğru rusal alt sistem,  $G(s)$  ve doğru rusal olmayan elemanın GAİ;  $N/B$ 'nin oluşturduğu kapalı çevrimli sistemin karakteristik denklemi frekans domeninde,  $s = j\omega$ ;

$$1 + N(B)G(j\omega) = 0 \quad (15)$$

olur. Burada  $\omega$  Şekil 2'de olabilecek limit çevriminin frekansdır.  $G(j\omega)$  ve  $N/B$  değerleri yerine yazılarak, denklem (15) tekrar yazılırsa denklem (16) elde edilir.

$$\left( \frac{3}{4} B^2 \right) \left( \frac{-K_p(\omega^2 + 1)}{\omega^4 + 6\omega^2 + 1} - j \frac{2K_p\omega}{\omega^4 + 6\omega^2 + 1} \right) = -1 \quad (16)$$

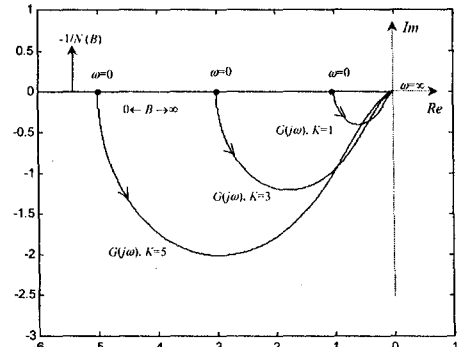
Böylece Şekil 2'de olabilecek osilasyonun frekansı,  $\omega$ , denklem (16)'nın kompleks kısmı sıfıra eşitlenerek,

$$\text{Im}[N(B)G(j\omega)] = 0 \quad (17)$$

$\omega=0$  bulunur. Denklem (16)'nın reel kısmını denklem (18)'de olduğu gibi  $-1$ 'e eşitlenerek,

$$\text{Re}[N(B)G(j\omega)] = -1 \quad (18)$$

genliği  $i$ ,  $B = \sqrt{\frac{3}{4}} K_p$  bulunur. Görüldüğü gibi genlik şartı  $K_p > 0$  için sağlanmış olmasına rağmen hiçbir  $K_p$  değerinde frekans şartı sağlanmaz. Böylece denklem (11) ve (12)'de tanımlı alt sistemlerle Şekil 2'deki kapalı çevrimli sistemde beklendiği gibi limit çevrim gözlenmez. Denklem (16)'nın farklı  $K_p$  değerleri,  $K_p = 1, 3$  ve  $5$ , için kompleks düzlemdeki grafiksel çözümü Şekil 4'te verilmiştir.



Şekil 4.  $K = 1, 3$  ve  $5$  değerleri,  $G(j\omega) = K/((j\omega)^2 + 2(j\omega) - 1)$  ile  $-1/N(B)$ 'in Kompleks Düzlemdeki Değişimi.

## PI Kontrol:

Şekil 2'deki sistemin sürekli durumunu iyileştirmek için  $G_c(s)$  kontrolörü aşağıdaki gibi orantı+integral türü

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s} \quad (19)$$

biçiminde seçilirse, kapalı çevrimli yapıda ileri yoldaki doğrusal alt sistemin toplam transfer fonksiyonu

$$G(s) = \frac{K_p s + K_i}{s^3 + 2s^2 - s} \quad (20)$$

olur. Burada  $K_p$  ve  $K_i$  sırasıyla oransal ve integral katsayılarıdır. Genellikle  $G_c(s)$ 'in genliği üzerinde herhangi bir sınırlama olmadığı kabul etmekle beraber bu yayında pratikte uygulaması için özellikle küçük  $K_p$  ve  $K_i$  değerleri üzerinde durulmuştur. Bu durumda Şekil 2'deki kapalı çevrimli kontrol sistemin frekans domaininde karakteristik denklemi,  $s = j\omega$  için;

$$\left(\frac{3}{4}B^2\right) \left( \frac{-(K_p\omega^4 + (2K_i + K_p)\omega^2)}{\omega^6 + 6\omega^4 + \omega^2} - j \frac{(K_i - 2K_p)\omega^3 + K_i\omega}{\omega^6 + 6\omega^4 + \omega^2} \right) = -1 \quad (21)$$

olur. Buradan kapalı çevrimli sistemde oluşacak osilasyonun frekansı;

$$\omega = \sqrt{\frac{K_i}{2K_p - K_i}} \quad (22)$$

bulunur.  $\omega > 0$  olması için;

$$K_{si} > K_i > 0 \quad (23)$$

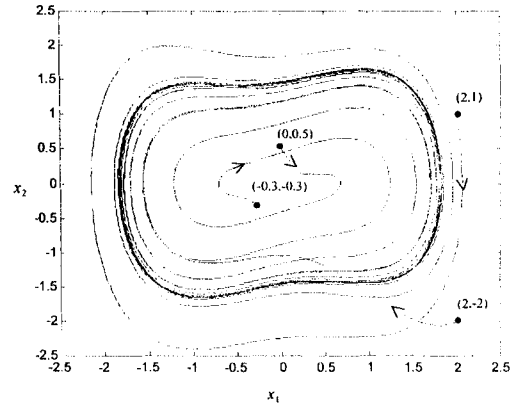
$$K_{sp} > K_p > K_i / 2 \quad (24)$$

olmalıdır ve burada  $K_{si}$  ve  $K_{sp}$  pratikte olabilecek en büyük kazanç değerleridir. Kapalı çevrimde oluşacak olan osilasyonun genliği  $i$ ;

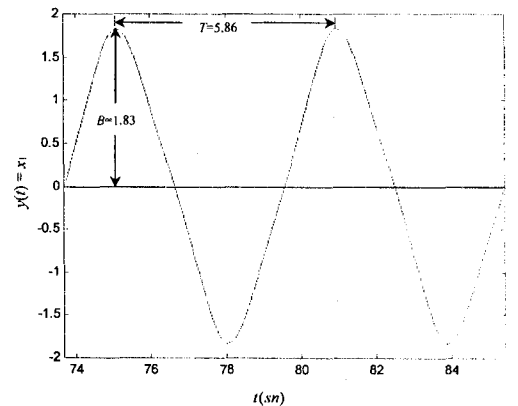
$$B = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{\omega^6 + 6\omega^4 + \omega^2}{K_p\omega^4 + (2K_i + K_p)\omega^2}} \quad (25)$$

elde edilir. Denklem (22) ve (25)'de analitik olarak görüldüğü gibi Şekil 2'deki sistem  $G_c(s)$ , PI tipi bir kontrolör olduğu durumda kapalı çevrimli sistemde bir limit çevrim oluşmaktadır. Bu limit çevrim, Şekil 2'deki sistemin girişine herhangi bir işaret uygulanmadan sadece durum değ işkenlerinin başlangıç şartlarının sıfırdan farklı olduğu durumda oluşmaktadır. PI kontrolör kazançlarının pratikte alacağı en büyük değerler,  $K_{si} \equiv 2$  ve  $K_{sp} \equiv 1$  olduğu düşünülerek,  $K_i = 1$  ve  $K_p = 0.9$  alınırsa, Şekil 2'deki kapalı çevrimli sistemde oluşabilecek limit çevriminin genliği,  $B = 1.82$ , frekansı,

$\omega = 1.12$  rad/sn değerlerinde GAI analizi yardımıyla analitik olarak bulunur.  $K_i = 1$  ve  $K_p = 0.9$  değerleri için GAI ile elde edilmiş sonuçlarla, Şekil 2'deki sistemin nümerik sonuçları birbirine çok yakındır. Şekil 5'te  $K_i = 1$  ve  $K_p = 0.9$  için sistemde beklenen limit çevriminin değ işimi farklı dört başlangıç şartı;  $(x_1(0), x_2(0)) = (0, 0.5)$ ,  $(-0.3, -0.3)$ ,  $(2, 1)$  ve  $(2, -2)$  için sistemin durum yörüngeleri grafiğ inde,  $x_1$  durum değ işkeninin  $x_2$  durum değ işkenine göre çizdirilmesiyle elde edilen değ işim gösterilmiştir. Şekil 5'te görüldüğü gibi kapalı çevrimli sistemde oluşan osilasyon, Bölüm 2'de belirtildiği gibi durum değ işkenlerinin başlangıç şartlarından bağımsızdır. Limit çevrim, durum değ işkenlerinin başlangıç şartı ne olursa olsun genliği  $B = 1.82$ , frekansı,  $\omega = 1.12$  rad/sn civarındadır. Pratik sınırlamalardan dolayı  $(|x_1(0)|, |x_2(0)|) \leq (4, 4)$  olarak alınırsa, sistemin  $(x_1(0), x_2(0)) = (0, 0)$  denge noktası hariç, olabilecek tüm durum değ işkenlerinde Şekil 2'deki kapalı çevrimli sistem, Şekil 6'da verilen ve genliği  $B = 1.83$ , periyodu  $T = 5.84$  sn olan limit çevrimi davranışı gösterir.



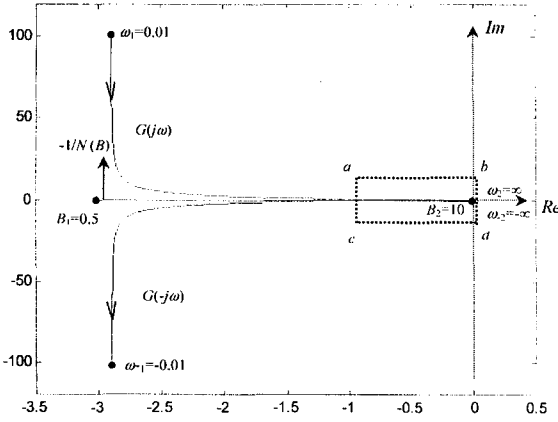
Şekil 5.  $K_i = 1$  ve  $K_p = 0.9$  Olduğu Durumdaki Sistemin Durum Değ işkenlerinin Dört Başlangıç Şartı;  $(x_1(0), x_2(0)) = (0, 0.5)$ ,  $(-0.3, -0.3)$ ,  $(2, 1)$  ve  $(2, -2)$  İçin Limit Çevriminin Durum Yörüngeleri Grafiğindeki Değ işimi.



Şekil 6.  $K_i = 1$  ve  $K_p = 0.9$  İçin Şekil 1'deki Kapalı Çevrimli Sistemin Çıkışı  $y(t) = x_1$ 'in Geçici Rejim Elimine Edilerek Elde Edilen Sürekli Rejim Değ işimi.

Şekil 6'da gördüğümüz gibi kapalı çevrimli sistemde oluşan ve nümerik olarak bulunan limit çevrimin genliği ve frekansı daha önce GAİ uygulanarak bulunan sonuçlara çok yakındır.

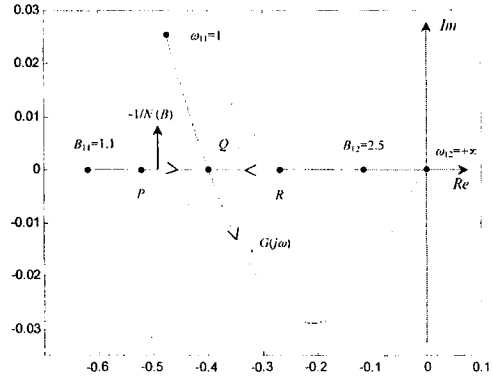
**4.1.PI Kontrolörlü Sistemde Oluşan Limit Çevrim Kararlılığı:** Denklem (21)'in analitik çözümünde elde edilen (22) ve (25) sonuçlarından oluşan limit çevriminin kararlı olup olmadığı bilinemez. Çünkü bu hem kararlı ve hem de varsa kararsız limit çevrimin genlik ve frekansını içerir. Bu nedenle limit çevriminin kararlı olup olmadığı; a) Şekil 2'deki sistemin nümerik çözümü, b) denklem (21)'deki eşitliğin grafiksel çözümünden belirlenebilir. Birincisi oldukça zaman alan bir yoldur. Buna karşın ikinci yol daha pratiktir. Şekil 7'de denklem (21)'ün grafiksel çözümü  $\omega_1 < \omega < \omega_2$  ile  $\omega_{-1} < \omega_{-} < \omega_{-2}$  aralığı ve  $B_1 < B < B_2$  aralığı için çizdirilmiştir.  $G(j\omega)$  eğrisinin,  $-1/N(B)$  eğrisini verilen sınırlar içerisinde kesip kesmediği Şekil 7'deki a,b,c ve d dikdörtgeni ile belirlenen bölgenin daha detaylı olarak Şekil 8'de  $\omega_{11} < \omega < \omega_{12}$  ve  $B_{11} < B < B_{12}$  aralığında çizdirilmesiyle görülebilir. Şekil 8'de  $-1/N(B)$  doğrusu ve  $G(j\omega)$  eğrisi birbirini Q noktasında kesmektedir ve bu noktada bir limit çevrim vardır.



Şekil 7.  $K_i = 1$  ve  $K_p = 0.9$  Değerli  $G(j\omega) = (K_p j\omega + K_p) / ((j\omega)^3 + 2(j\omega)^2 - j\omega)$ 'in Polar Diyagramı ve  $-1/N(B)$ 'nin Kompleks Düzlemdeki Değişimi.

Limit çevrimin kararlılığı; eğer Q noktasındaki sistem bir bozucu tarafından R noktasına kayarsa,  $-1/N(B)$ ,  $G(j\omega)$  eğrisi içinde yer alacaktır. Nyquist kararlılık kriterinin tersi olarak (Lewis vd., 1997) R noktasındaki osilasyon genliği azalacak ve osilasyonun genliğindeki azalma, B, Q noktasına düşünceye kadar devam edecektir ve sürekli durumda bu osilasyonun genliği ve frekansı Q noktası tarafından belirlenen B ve  $\omega$  olacaktır. Eğer bozucu etki sistemi, P noktasına kaydırırsa, bu durumda  $-1/N(B)$  doğrusu  $G(j\omega)$  eğrisinin dışında olacaktır ve osilasyonun genliği  $G(j\omega)$  yapısı gereği artacaktır. Artan osilasyon genliği, Q noktasındaki

genlik olan  $B = 1.82$ 'e kadar devam edecektir. Şekil 8'deki  $-1/N(B)$  üzerinde işaretlenen ok yönleri bu değişimi göstermektedir. Sonuç olarak Q noktasındaki limit çevrim, kararlı bir limit çevrimdir.



Şekil 8. Şekil 6'daki a,b,c,d Bölgesinde  $G(j\omega)$  ile  $-1/N(B)$ 'in Kompleks Düzlemdeki Değişimi.

## 5. SONUÇLAR

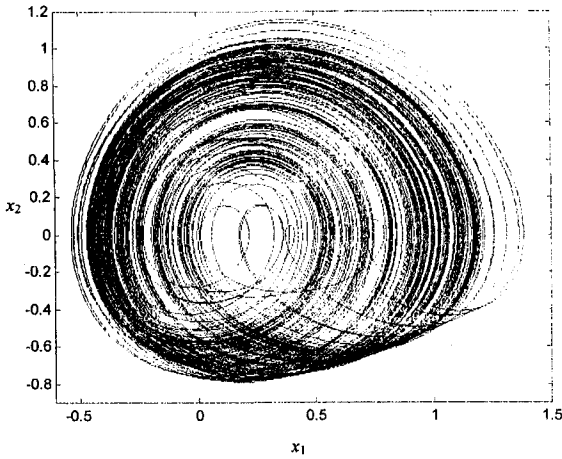
Bu çalışmada, Şekil 1'deki doğrusal alt sistemi ikinci mertebeden düşük frekanslı filtre özelliği gösteren doğrusal olmayan geri beslemeli sistemde oluşabilecek limit çevriminin oluşma şartı kontrolör tipine bağlı olduğu vurgulandı. Limit çevrimin varlığı ve kararlılığı Şekil 1'deki doğrusal olmayan alt sisteme GAİ analizi uygulanarak belirlendi. Özellikle pratikte sistemlerin sürekli durumu iyileştirmek için kullanılan PI kontrolörün olmadığı durumda limit çevrim göstermeyen sistemlerin, PI kontrolörün integral etkisiyle nasıl osilasyon gösterebileceği ortaya kondu. Oluşan limit çevrim, kontrol işaretinin veya sistemdeki saturasyonlardan değil, tamamen sistemin çalışma şartlarından dolayı ortaya çıkabileceği gösterildi. Bununla beraber bu çalışma kontrolör tasarımcısına;

a) Şekil 2'de tanımlanan doğrusal olmayan sistemlerin tasarımı, kontrolör seçimi ve kontrolör parametrelerinin belirlenmesi,

b) Şekil 2'deki sistemde oluşabilecek istenen/istenmeyen limit çevrimli osilasyonların elde edilme/silme/elimin edilmesi konularında,

yön vermektedir.

İleriye yönelik olarak da bu çalışma, Şekil 2'de tanımlanan PI kontrolörlü sistemde limit çevrim dışında başka tür davranış olup olmadığını araştırmayı teşvik etmektedir. Bu çalışmanın değerlendirme aşamasında Şekil 2'deki sistemin;  $G_p(s) = 1/(s^2 + 0.26s + 1.4)$ ,  $n(\bullet) = y - y^2$  için,  $K_p = 0.06$ ,  $K_i = 1.034$  PI değerlerinde kaotik davranış gösterdiği Şekil 9'daki durum yörüngeleri grafiğinde verildiği gibi görülmüştür.



Şekil 9. Şekil 2'deki Sistemde;  $G_c(s) = 0.06 + 1.034/s$ ,  $G_p(s) = 1/(s^2 + 0.26s + 1.4)$  ve  $n(\bullet) = y - y^2$  için  $x_0(2 \cdot 10^{-10}, 0, 0)$  Başlangıç Şartında Sistemin Durum Yörüngeleri Grafiği.

Şekil 2'de PI kontrollü doğrusal olmayan geri beslemeli sistemlerde oluşabilecek kaotik davranışların incelenmesi ve kaotik davranışın beklenildiği kontrol parametrelerinin değişim aralığının belirlenmesi bir başka çalışmada değerlendirilecektir.

## KAYNAKÇA

- Aström, K. J. ve Hägglund, T. (1995). PID Controllers. Instrument Society of America.
- Buonomo, A. ve Bello C. D. (1996). Asymptotic Formulas in Nearly Sinusoidal Nonlinear Oscillators. IEEE Trans. CAS, 43, ss. 953-963.
- Cook, P. A. (1994). Nonlinear Dynamical Systems. Prentice-Hall, Int. Ed..
- Chang, G. W., Espinosa-Perez, G., Mendes, E. ve Ortega, R. (2000). Tuning Rules for the PI Gain of Field Oriented Controllers of Induction Motor. IEEE Trans. Ind. Electron., 47, ss. 592-602.
- Chua, L. O. ve Tang, Y. S. (1982). Nonlinear Oscillation via Volterra Series. IEEE Trans. CAS, 29, ss. 150-168.
- Desoer, A. ve Lin, A. (1985). Tracking and Disturbance Rejection of MMO Nonlinear Systems with PI Controller. IEEE Trans. Autom. Control, 30, ss. 861-867.
- Genesio, R. ve Tesi, A. (1990). Harmonic Balance Methods for the Analysis of Chaotic Dynamics in Nonlinear Systems. DSI-RT33/90, University of Florence.
- Genesio, R., Tesi, T. ve Villoresi, F. (1993). A Frequency Approach for Analyzing Controlling Chaos in Nonlinear Circuits. IEEE Trans. CAS, 40, ss. 819-827.
- Gibson, J. E. (1963). Nonlinear Automatic Control. McGraw-Hill International Student Edition.
- Huang, A., Pivka, L., Wu, CW. ve Franz, M. (1997). Chua's Equation with Cubic Nonlinearity. IEEE Trans. CAS, 44, ss. 1011-1014.
- Jang, M. J., Chen, C. L. ve Chen, K. (2002). Sliding Mode Control of Chaos in Cubic Chua's Circuit System. Int. J. Bifurcation and Chaos, 12, ss. 1437-1450.
- Lewis, C. P., Uçar, A. ve Bishop, S. R. (1997). An Approach to the Investigation of Robustness and Stability of Delay Feedback Control of Nonlinear Systems. Proc. 15th IMACS World Congress on Scientific Computation, Modelling and Applied Mathematics, (ed. Sydow, A), Wissenschaft and Verlag, Berlin, 5, ss. 263-268.
- Marino, R. ve Tomei, P. (1995). Nonlinear Control Design. Prentice-Hall.
- Ogata, K. (1990). Modern Control Engineering. Prentice-Hall International Edition.
- Pachter, M., D'Azzo, J. J. ve Veth, M. (1996). Proportional and Integral Control of Nonlinear Systems. Int. J. Control, 64, ss. 679-692.
- Schweppe, F.C. (1977). Uncertain Dynamic Systems. Prentice-Hall Inc..
- Slotine, J. J. E. ve Li, W. (1991). Applied Nonlinear Control. Prentice-Hall Int. Inc..
- Strogatz, S. H. (1994). Nonlinear Dynamics and Chaos: with Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company.
- Uçar, A. ve Akbey, T. (2000). A Genetic Algorithm to Tune Conventional Control Parameters for Uncertain Systems. 16th IFAC Workshop on Distributed Computer Control Systems, Australia, ss. 81-87.
- Uçar, A. (2002). A Prototype Model for Chaos Studies. Int. J. Engineering Science, 40, ss. 251-258.
- Unar, A., Murray-Smith, D. J. ve Shah, S. F. A. (1996). Design and Tuning of Fixed Structure PID Controllers: A Survey. Technical Reports CSC-96016, Centre for Systems and Control, University of Glasgow.
- Vidyasagar, M. (1978). Nonlinear System Analysis. Prentice-Hall.