ANADOLU ÜNİVERSİTESİ BİLİM VE TEKNOLOJİ DERGİSİ
ANADOLU UNIVERSITY JOURNAL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
Cilt/Vol.:7 Sayı/No: 1 : 65-74 (2006)

DERLEME/**REVIEW**

YAŞAM TESTİNDE KULLANILAN ÜSTEL VE WEİBULL DAĞILIMLARININ ARDIŞIK TESTİ

Ümra KEMERKAYA[1] , Sevil BACANLI[2]

ÖZ

Yaşam testi, elektronik bir sistemdeki birimlerin beklenen yaşam süresini test eden yöntem olarak tanımlanmaktadır. Yaşam testinin amacı önceden belirlenen yaşam süresini ya da güvenirlik düzeyini sağlayacak şekilde, olası en az gözlem sayısı ve minimum maliyetle testi gerçekleştirebilmektir. Bu amaçla, yaşam testinde ardışık test çok sık olarak kullanılmaktadır. Yaşam testinde en çok kullanılan olasılık dağılımları ise normal, ters normal, üstel, Weibull ve gamma dağılımlarıdır. Bu çalışmanın amacı, yaşam testinde kullanılan olasılık dağılımlarından olan üstel ve Weibull dağılımlarının ardışık testinin kuramsal yapısını incelemektir. Çalışmada, üstel ve Weibull dağılımlarının olasılık yoğunluk fonksiyonları arasındaki ilişki doğrultusunda dağılımlara ilişkin ardışık test istatistikleri, karakteristik işlem fonksiyonları ve ortalama örneklem sayısı fonksiyonları tanıtılmıştır. Uygulama bölümünde, S-Plus bilgisayar programından, dağılımlara ilişkin yapay veri türetilmiş ve ardışık testin işleyişi Excel'in Visual Basic makro modülü kullanılarak hazırlanan bilgisayar programından yararlanılarak, türetilen yapay veriler üzerinde gösterilmiştir.

Anahtar kelimeler: Yaşam testi, Ardışık test, Üstel dağılım, Weibull dağılımı

THE SEQUENTIAL TEST OF EXPONENTIAL AND WEIBULL DISTRIBUTIONS WHICH ARE USED IN LIFE TESTING

ABSTRACT

Life testing is introduced as a method of testing the expected life time of units in an electronic system. The aim of life testing is concluding the test with minimum observed units and minimum cost while obtaining the expected life time or reliability level. For this reason, sequential test is frequently used in life testing. The probability distributions that are more used in life testing are normal, inverse gaussian, exponential, Weibull and gamma distributions. The aim of this study is to investigate the theory of sequential test of exponential and Weibull distributions which are used in life testing. In the study, according to the similarity between the probability distribution functions of exponential and Weibull distributions, the sequential test statistics, operating characteristics functions and average sample numbers of these distributions are introduced. In a application section, with using S-Plus computer program, artificial data of distributions is generated and the indication of sequential test is shown with using Excel Visual Basic macro module, on the generated artificial data.

Key Words: Life testing, Sequential test, Exponential distribution, Weibull distribution.

[1] Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü, Beytepe Kampusü, ANKARA; **Faks:** 0 312 299 21 57; **E-Posta:** umra@hacettepe.edu.tr
[2] Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü, Beytepe Kampusü, ANKARA.

Geliş: 22 Ekim 2004; **Düzeltme:** 17 Mart 2005; **Kabul:**22 Aralık 2005

1. GİRİŞ

Günümüz mühendisleri üretimdeki birimlerin yaşam bilgilerini kullanarak ilgili fonksiyonlar yardımıyla ürün performansı hakkında karar vermeye çalışmaktadırlar. Ürün tasarım ve geliştirme aşamasında, farklı girdiler kullanılarak yapılan deneylerde karşılaştırma yapmak amacıyla, ürün parçalarının tolerans sınırlarını belirlemekte ve üretim sürecinin etkinliğinin belirlenmesinde istatistiksel yöntemlerden yararlanılmaktadır. Ürün performansını ve güvenirliğini belirlemek için kullanılan istatistiksel yöntemlerden biri de yaşam testi(life testing)'dir.

Yaşam testi elektronik bir sistemdeki birimlerin beklenen yaşam süresini test eden yöntem olarak tanımlanmaktadır. Yaşam testinin amacı, önceden belirlenen yaşam süresini ya da güvenirlik düzeyini sağlayacak şekilde, olası en az gözlem sayısı ve minimum maliyetle testi gerçekleştirebilmektir. Bu amaçla yaşam testlerinde ardışık test çok sık olarak kullanılmaktadır. Ardışık yaşam testinin işleyişi, her bir gözlemden sonra yapılan işlemler yardımıyla yaşam süresine ya da güvenirlik düzeyine bağlı olarak kurulan istatistiksel hipotezler hakkında karar verme temeline dayanmaktadır. Test sonunda, beklenen yaşam süresi kabul, red ya da karara ulaşmak için daha fazla gözlem sayısına ihtiyaç olduğundan teste devam kararlarından biri alınmaktadır. Testin durdurulması hipotezlerden birinin kabul edilmesine bağlı olmakla birlikte hipotez değerleri beklenen yaşam süresini ya da güvenirlik düzeyini sağlayacak şekilde belirlenmelidir (Ghosh, 1970; Kemerkaya, 2004).

Yaşam testinde en çok kullanılan olasılık dağılımları normal, ters normal, üstel, Weibull ve gamma dağılımlarıdır (Meeker ve Escobar, 1998). Elektronik bir sistemdeki birimlerin yaşam süreleri çoğunlukla basit bir benzetim teorisiyle üstel raslantı değişkeniyle ifade edilmektedir. Elektronik birimlerin yaşam sürelerinin varyasyonunu ifade etmede üstel dağılım öncülük etmekle birlikte sistemdeki olası hatalar dikkate alınarak Weibull dağılımı kullanılabilmektedir. Çoğu kez Weibull dağılımının kullanılabileceğini gösteren açık teorik bir neden yoktur. Sistemdeki esneklikten yararlanılarak üs dönüşümü yoluyla Weibull dağılımı kullanılabilmektedir (Sharma ve Rana, 1993).

Ardışık test ile ilgili çalışmalar Wald (1947)'ın ardışık test kuramını ortaya koymasıyla başlamıştır. Ardışık yaşam testi ile ilgili çalışmalar arasında Dipalo(1969) ve Ghosh(1970)'un üstel dağılımlı kitleler için, Sharma ve Rana (1993) ve Hauck ve Keats (1997)'in Weibull dağılımlı kitleler için çalışmaları bulunmaktadır.

2. GENEL BİLGİLER

2.1 Üstel Dağılım

Üstel dağılım endüstriyel çalışmalarda kullanılan sürekli bir dağılımdır. Üstel dağılımlı X raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu(o.y.f.),

$$f(x;\lambda) = \lambda \exp^{-\lambda x}; \qquad x > 0, \lambda > 0 \tag{2.1}$$

biçiminde tanımlanır. Burada λ, dağılımın ölçek(scale) parametresidir.

Dağılımın ortalaması $1/\lambda$'dır. Ortalamanın en çok olabilirlik tahmin edicisi $1/\hat{\lambda}$;

$$\frac{1}{\hat{\lambda}} = \overline{X} \qquad \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{2.2}$$

olarak tanımlanmaktadır.

Dağılımın varyansı $1/\lambda^2$'dir. Varyansın en çok olabilirlik tahmin edicisi ise, $1/\hat{\lambda}^2$ biçimindedir(Meeker ve Escobar, 1998).

2.2 Weibull Dağılımı

Weibull dağılımı üstel dağılım ailesinden olan sürekli bir dağılımdır. Weibull dağılımlı X raslantı değişkeninin o.y.f.,

$$f(x;\theta;k) = \frac{k}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{k-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{k}\right] \tag{2.3}$$

$x > 0,\ \theta > 0,\ k > 0$

eşitliği ile gösterilmektedir. Burada θ, ölçek parametresi ve k ise şekil(shape) parametresidir.

Dağılımın beklenen değeri ve varyansı,

$$E(X) = \theta\ \Gamma\left(k^{-1}+1\right) \tag{2.4}$$

$$\mathrm{V}(\mathrm{X}) = \theta^{2}\ \Gamma\left(2k^{-1}+1\right) - \theta^{2}\ \left[\Gamma\left(k^{-1}+1\right)\right]^2 \tag{2.5}$$

olarak ifade edilmektedir.

Dağılımın şekil parametresi olan k'nın en çok olabilirlik tahmini $\hat{k}$,

$$\hat{k} = \left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\hat{k}} \ln X_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\hat{k}}\right)^{-1} - n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\log x_i\right]^{-1} \tag{2.6}$$

ve ölçek parametresi olan θ'nın en çok olabilirlik tahmini ise $\hat{\theta}$,

$$\hat{\theta} = \left[n^{-1}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\hat{k}}\right]^{1/\hat{k}} \tag{2.7}$$

ile ifade edilmektedir.

2.3 Olasılık Oranlarının Ardışık Testi

2.3.1 Kuramsal tanım

Herhangi bir X raslantı değişkeninin o.y.f. $f(x;\Theta)$ ile gösterilsin. O.y.f.'ndaki Θ parametresi test edilmek istendiğinde,

$$H_0 : \Theta = \Theta_0 , \quad H_1 : \Theta = \Theta_1 \qquad \textbf{(2.8)}$$

basit hipotezleri kurularak $\Theta_1, \Theta_2, ..., \Theta_k$ değerlerini alabilen Θ parametresinin bir tek değere eşit olup olmadığı test edilir.

X raslantı değişkeninin o.y.f. H_0 hipotezi doğru iken, $f(x;\Theta_0)$; H_1 hipotezi doğru iken $f(x;\Theta_1)$ dır. X raslantı değişkeninin aldığı değerler $x_1, x_2, ..., x_n$ olarak belirtildiğinde,

$$\begin{aligned} f(x;\Theta_0) &= f(\ x_1, x_2, ..., x_n ; \Theta_0) \\ f(x;\Theta_1) &= f(\ x_1, x_2, ..., x_n ; \Theta_1) \end{aligned} \qquad \textbf{(2.9)}$$

yazılabilir. (2.9)'daki o.y.f.larının birbirine oranı *olabilirlik oranı* olarak bilinir ve

$$L_n = \prod_{i=1}^{n} \frac{f(x_i;\Theta_1)}{f(x_i;\Theta_0)} \qquad \textbf{(2.10)}$$

biçiminde yazılır. L_n değeri logaritma yardımıyla daha kolay bulunabileceğinden (2.10)'daki eşitliğin logaritması alınarak

$$\ln L_n = \sum_{i=1}^{n} \ln\left[f(x_i;\Theta_1) / f(x_i;\Theta_0) \right] \qquad \textbf{(2.11)}$$

elde edilir. Burada,

$$z_i = \ln\left[f(x_i;\Theta_1) / f(x_i;\Theta_0) \right] \qquad \textbf{(2.12)}$$

ile gösterildiğinde (2.11) eşitliği,

$$\ln L_n = \sum_{i=1}^{n} z_i \qquad \textbf{(2.13)}$$

olarak yazılabilmektedir.

Dolayısıyla, n'inci aşamada $\ln L_n$ bulunarak $\ln A$ ve $\ln B$ ile aşağıda belirtildiği gibi karşılaştırılır.

1. $\sum_{i=1}^{n} z_i \le \ln B$ ise, H_0 hipotezi kabul edilerek

sürece son verilir.

2. $\sum_{i=1}^{n} z_i \ge \ln A$ ise, H_0 hipotezi red edilerek

sürece son verilir.

3. $\ln B < \sum_{i=1}^{n} z_i < \ln A$ ise, gözlemlerin

yetersizliğine karar verilir ve bir gözlem daha eklenerek sürece devam edilir (Wald, 1947).

Burada,

$$\begin{aligned} \ln A &= \ln[(1-\beta)/\alpha] \\ \ln B &= \ln[\beta/(1-\alpha)] \end{aligned} \qquad \textbf{(2.14)}$$

eşitlikleri yardımıyla hesaplanabilmektedir.

Olabilirlik oranı, A ve B değişmezlerine dayanarak yapılan bu teste *Wald tipi ardışık test, ardışık olasılık oran testi* ya da kısaca *ardışık test* denir (Wald, 1947).

Yaşam testinde ardışık test planına başlarken n tane birimin teste tabi tutulduğu ve x_i'nin teste tabi tutulan elektronik birimlerin yaşam süresini gösterdiği ve $x_{1:n} \le x_{2:n} \le ... \le x_{n:n}$ varsayılmaktadır. $x_{1:n}$ sistemdeki en zayıf birimin yaşam süresi ve de $x_{i:n}$ i. yaşam süresi ya da i. sıra istatistiğini göstermektedir. Sistemdeki birimler ardışık olarak geldiği test sürecinde, bir birim teste alınarak yaşam süresi $(= x_1)$ bir başka deyişle başarısızlık zamanı (failure time) ölçülür ve daha önce belirtilen karar kurallarına göre karara varılır. Eğer teste devam kararı verilirse; ikinci birim alınır, yaşam süresi ölçülür $(= x_2)$ ve bu kez $x_1 + x_2$ temel alınarak karara varılır. Bu ardışık test planı teste tabi tutulan ortalama birim sayısını minimize eden optimal yöntemdir(Ghosh, 1970).

2.3.2 Karakteristik işlem fonksiyonu

$H_o : \Theta = \Theta_0$ hipotezini kabul etme olasılığı Θ'nın bir fonksiyonudur. Bu fonksiyona *karakteristik işlem fonksiyonu* denir ve $P(\Theta)$ ile gösterilir. H_0'ın kabul edilme olasılığını bulmak için Wald, kullanışlı bir yöntem geliştirmiştir (Wald, 1947). Bu yönteme göre,

$$E\left\{ \left[f(x;\Theta_1) / f(x;\Theta_0) \right]^h \right\} = 1 \qquad \textbf{(2.15)}$$

olacak şekilde Θ parametresi bulunur. Eğer X raslantı değişkeni sürekli ise,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[f(x;\Theta_1) / f(x;\Theta_0) \right]^h f(x;\Theta) dx = 1 \qquad \textbf{(2.16)}$$

eşitliğinden yararlanılır. Karakteristik işlem fonksiyonu($P(\Theta)$) ise,

$$P(\Theta) = \frac{A^h - 1}{(A^h - B^h)} \qquad \textbf{(2.17)}$$

ile verilen yaklaşık eşitlikte Θ parametresi $h(-\infty \le h \le +\infty)$ değerine bağlı olduğundan her bir h değeri için Θ parametresinin ve karakteristik işlem fonksiyonu'nun $(P(\Theta))$ alacağı değerler bulunabilir.

Çizelge 1. Wald tipi ardışık test için çeşitli h değerlerinde Θ ve $P(\Theta)$ değerleri

h	$-\infty$	-1	1	∞
Θ		Θ_1	Θ_0	
$P(\Theta)$	0	β	$1-\alpha$	1

2.3.3 Ortalama örneklem sayısı fonksiyonu

Ardışık testte H_0 ve H_1 hipotezlerinden biri hakkında karar verebilmek için gerekli olan örneklem büyüklüğü (n), test süresince değişen bir raslantı değişkenidir. Bu nedenle beklenen değeri söz konusudur.

Test edilecek parametre Θ olduğundan örneklem büyüklüğünün beklenen değeri $(\mathrm{E}(n;\Theta))$, Θ'nın bir fonksiyonu olduğundan *ortalama örneklem sayısı fonksiyonu* olarak adlandırılır ve yaklaşık formülü,

$$E(n;\Theta)=\frac{P(\Theta)\ln B+(1-P(\Theta))\ln A}{E(z;\Theta)} \tag{2.18}$$

$E(z;\Theta)\neq 0$

olarak elde edilmektedir(Wald, 1947).

3. ÜSTEL DAĞILIM İÇİN ARDIŞIK TEST

3.1 Testin Çıkarsaması

Üstel dağılımlı bir kitlenin ortalamasını test etmek istediğimizde kurulacak olan hipotezler,

$$\begin{aligned} H_0 &: \lambda=\lambda_0 \\ H_1 &: \lambda=\lambda_1 \end{aligned} \quad , (\lambda_1 \rangle \lambda_0) \tag{3.1}$$

biçimindedir. Üstel dağılımın o.y.f.,

$$f(x;\lambda)=\lambda\exp(-\lambda\ x) \tag{3.2}$$

eşitliği ile gösterilir. H_0 hipotezi doğru iken üstel o.y.f.,

$$f(x;\lambda_0)=\lambda_0\exp(-\lambda_0 x) \tag{3.3}$$

H_1 hipotezi doğru iken ise,

$$f(x;\lambda_1)=\lambda_1\exp(-\lambda_1 x) \tag{3.4}$$

şeklinde gösterilir. Bu o.y.f.'larına bağlı olan genel olabilirlik oranı,

$$L_n=\prod_{i=1}^{n}\frac{f(x;\lambda_1)}{f(x;\lambda_0)}=\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda_1\exp(-\lambda_1 x_i)}{\lambda_0\exp(-\lambda_0 x_i)} \tag{3.5}$$

olarak bulunmaktadır.

$$\ln L_n=\sum_{i=1}^{n} z_i \tag{3.6}$$

$$z_i=\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_0}-(\lambda_1-\lambda_0)x_i \tag{3.7}$$

olduğundan

$$\sum_{i=1}^{n} z_i=n\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_0}-(\lambda_1-\lambda_0)\sum_{i=1}^{n}x_i \tag{3.8}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla, (3.8) eşitliği ile verilen test istatistiği $\ln A$ ve $\ln B$ değerleri ile karşılaştırılarak hipotezler hakkında Kesim 2.3.1'de verilen karar kurallarına göre karara varılır(Dipalo, 1969).

3.2 Karakteristik İşlem Fonksiyonu

H_0 hipotezini kabul etme olasılığı olan $P(\lambda)$,

$$P(\lambda)=\frac{A^h-1}{A^h-B^h} \tag{3.9}$$

eşitliğindeki gibidir. X raslantı değişkeni sürekli olduğundan (2.16) eşitliği,

$$\int_0^{+\infty}\left\{\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)[\exp(-(\lambda_1 x-\lambda_0 x))]h+(-\lambda\, x)\right\}dx=1 \tag{3.10}$$

biçiminde tanımlanır. İntegral sonucu λ'ya göre düzenlendiğinde,

$$\lambda=\frac{(\lambda_1/\lambda_0)^h-1}{h(\lambda_1-\lambda_0)} \tag{3.11}$$

elde edilmektedir(Ghosh, 1970). Bu eşitlik yardımıyla çeşitli h değerleri için λ parametresinin alacağı değerler bulunarak $P(\lambda)$ değerleri hesaplanabilir.

Çizelge 2. Çeşitli h değerlerine karşılık λ ve $P(\lambda)$ değerleri

h	$-\infty$	-1	1	∞
λ	0	λ_1	λ_0	∞
$P(\lambda)$	0	β	$1-\alpha$	1

3.3 Ortalama Örneklem Sayısı Fonksiyonu

Üstel dağılımlı bir kitle için ortalama örneklem büyüklüğü bulunmak istendiğinde,

$$E(n;\lambda) \cong \frac{P(\lambda)\ln B + (1-P(\lambda))\ln A}{E(z;\lambda)} \quad \textbf{(3.12)}$$

eşitliğinden yararlanılır. Burada,

$$z = \ln\frac{\lambda_1}{\lambda_0} - (\lambda_1 - \lambda_0)x \quad \textbf{(3.13)}$$

Üstel dağılım için $E(x) = 1/\lambda$ olduğundan, (3.13) eşitliğinde beklenen değer yerine konulduğunda,

$$E(z;\lambda) = \ln\frac{\lambda_1}{\lambda_0} - (\lambda_1 - \lambda_0)(1/\lambda) \quad \textbf{(3.14)}$$

olarak bulunmaktadır. Dolayısıyla test için gereken ortalama örneklem sayısı fonksiyonu,

$$E(n;\lambda) \cong \frac{P(\lambda)\ln B + (1-P(\lambda))\ln A}{\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_0} - (\lambda_1 - \lambda_0)(1/\lambda)} \quad \textbf{(3.15)}$$

eşitliğinden hesaplanabilmektedir.

4. WEİBULL DAĞILIMI İÇİN ARDIŞIK TEST

4.1 Testin Çıkarsaması

Weibull dağılımına sahip bir X raslantı değişkeninin o.y.f.,

$$f(x;\theta;k) = \frac{k}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{k-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{\theta}\right)^k\right) \quad \textbf{(4.1)}$$

biçimindedir. Weibull o.y.f.'nda $Y = X^k$ dönüşümü yapıldığında (4.1) eşitliği,

$$f(y;\theta;k) = \frac{1}{\theta^k}\exp\left(-\frac{y}{\theta^k}\right); \quad y > 0 \quad \textbf{(4.2)}$$

biçiminde ve ortalaması θ^k ve varyansı θ^{2k} olan üstel o.y.f.'na dönüşmektedir(Sharma&Rana, 1993). Dolayısıyla k 'nın bilindiği durum için kurulan,

$$\begin{aligned} H_0 &: \theta = \theta_0 \\ H_1 &: \theta = \theta_1 \end{aligned} \quad , \ (\theta_1 < \theta_0) \quad \textbf{(4.3)}$$

hipotezlerinin ardışık testini gerçekleştirmek mümkündür. H_0 hipotezi doğru iken o.y.f.,

$$f(y;\theta_0;k) = \frac{1}{\theta_0^k}\exp\left(-\frac{y}{\theta_0^k}\right) \quad \textbf{(4.4)}$$

H_1 hipotezi doğru iken o.y.f. ise,

$$f(y;\theta_1;k) = \frac{1}{\theta_1^k}\exp\left(-\frac{y}{\theta_1^k}\right) \quad \textbf{(4.5)}$$

Dolayısıyla bu fonksiyonlar kullanılarak oluşturulan olabilirlik oranı,

$$L_n = \prod_{i=1}^{n}\frac{f(y;\theta_1;k)}{f(y;\theta_0;k)} = \frac{(1/\theta_1)^{kn}\exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i}{\theta_1^k}\right)\right)}{(1/\theta_0)^{kn}\exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i}{\theta_0^k}\right)\right)} \quad \textbf{(4.6)}$$

olarak elde edilir.

$$\ln(L_n) = \sum_{i=1}^{n} z_i \quad \textbf{(4.7)}$$

$$z_i = kn\ln\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)\left[-\sum_{i=1}^{n} y_i\left(\theta_1^{-k} - \theta_0^{-k}\right)\right] \quad \textbf{(4.8)}$$

olduğundan

$$\sum_{i=1}^{n} z_i = kn\ln\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)\left[-y_i\left(\theta_1^{-k} - \theta_0^{-k}\right)\right] \quad \textbf{(4.9)}$$

olarak bulunur(Sharma ve Rana, 1993). Dolayısıyla, (4.9) eşitliği ile verilen test istatistiği $\ln A$ ve $\ln B$ değerleri ile karşılaştırılarak hipotezler hakkında Kesim 2.3.1'de verilen karar kurallarına göre karara varılır.

4.2 Karakteristik İşlem Fonksiyonu

H_0 hipotezini kabul etme olasılığı olan $P(\theta)$,

$$P(\theta) = \frac{A^h - 1}{A^h - B^h} \quad \textbf{(4.10)}$$

eşitliği ile hesaplanabilmektedir. X raslantı değişkeni sürekli olduğundan (2.16) eşitliği,

$$\int_0^{+\infty}\left[\frac{(1/\theta_1)^k\exp\left(-\frac{y}{\theta_1^k}\right)}{(1/\theta_0)^k\exp\left(\frac{y}{\theta_0^k}\right)}\right]^h \frac{1}{\theta^k}\exp\left(-\frac{y}{\theta^k}\right)dx = 1 \quad \textbf{(4.11)}$$

biçiminde yazılabilir. İntegral sonucu θ'ya göre düzenlendiğinde,

$$\theta = \left(\frac{(\theta_0/\theta_1)^{kh} - 1}{h\left(\theta_1^{-k} - \theta_0^{-k}\right)}\right)^{1/k} \quad \textbf{(4.12)}$$

elde edilmektedir(Hauck ve Keats, 1997). Bu eşitlik yardımıyla çeşitli h değerleri için θ parametresinin alacağı değerler bulunarak $P(\theta)$ değerleri hesaplanabilir.

Çizelge 3 Çeşitli h değerlerine karşılık θ ve $P(\theta)$ değerleri

h	$-\infty$	-1	1	∞
θ	0	θ_1	θ_0	∞
$P(\theta)$	0	β	$1-\alpha$	1

4.3 Ortalama Örneklem Sayısı Fonksiyonu

Weibull dağılımının θ parametresinin ardışık testi için gerekli olan ortalama örneklem sayısı fonksiyonu,

$$E(n;\theta) \cong \frac{P(\theta)\ln B + (1-P(\theta))\ln A}{E(z;\theta)} \quad \textbf{(4.13)}$$

eşitliği kullanılarak hesaplanabilmektedir. Burada,

$$z = k\ln(\theta_0/\theta_1) - y(\theta_1^{-k} - \theta_0^{-k}) \quad \textbf{(4.14)}$$

$E(Y) = \theta^{k}$ olduğundan, (4.14) eşitliğinde yerine koyulduğunda test istatistiğinin beklenen değeri,

$$E(z;\theta) = k\ln(\theta_0/\theta_1) - \theta^{k}(\theta_1^{-k} - \theta_0^{-k}) \quad \textbf{(4.15)}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla test için gereken ortalama örneklem sayısı fonksiyonu,

$$E(n;\theta) \cong \frac{P(\theta)\ln B + (1-P(\theta))\ln A}{k\ln(\theta_0/\theta_1) - \theta^{k}(\theta_1^{-k} - \theta_0^{-k})} \quad \textbf{(4.16)}$$

olarak bulunmaktadır.

5. UYGULAMA

Bu bölümde, üstel ve Weibull dağılımlarına ilişkin 3. ve 4. bölümde verilen ardışık test süreçlerinin uygulamaları yapılacaktır.

S-Plus bilgisayar programından yararlanılarak üstel ve Weibull dağılımları için veri türetilebilmektedir. Veri türetimi işlemi için S-Plus bilgisayar programında dağılım parametreleri tanımlanmıştır. Dağılımlara ilişkin türetilen yapay verilerin parametreleri, yaşam testi verisine uygun olacak şekilde düzenlenmiştir.

Burada, ortalaması $1/\lambda = 0.05$ olan üstel dağılım için $n = 100$, parametre değerleri $\theta = 4.5$ ve $k = 6.2$ olan Weibull dağılımı için $n = 100$ genişliğinde veri türetilmiştir. Türetilen yapay verilerden elde edilmiş olan değerler Ek 1'de yer almaktadır. Yaşam verisine uygun olması açısından değerler küçükten büyüğe doğru sıralanmıştır.

Ardışık testlerin bilgisayar ortamında yapılabilmesi amacıyla, Excel'in Visual Basic makro modülü kullanılarak bilgisayar programları hazırlanmıştır. Bu programlar yardımıyla, araştırmacılar önceden belirledikleri birinci ve ikinci tip hata olasılıklarında, kurdukları hipotez doğrultusunda adım adım ardışık test istatistiği değerlerini görebilmekte ve testi sonuçlandırabilmektedir. Yazılan makrolar Ek 2 ve 3'de yer almaktadır.

Dolayısıyla, üstel dağılım için test edilecek hipotezler;

$$\begin{aligned} H_0 &: \lambda = 20 \\ H_1 &: \lambda = 25 \end{aligned} \quad \textbf{(5.1)}$$

biçimindedir. $\alpha = 0.05$ ve $\beta = 0.05$ hata olasılıkları için $\ln A = 2.944$ ve $\ln B = -2.944$'dür. Ortalama örneklem büyüklükleri eşitlik 3.15'den $E(n;20) = 70$ ve $E(n;25) = 114$ olarak hesaplanmaktadır. Ardışık test sonuçları Çizelge 4'de verilmiştir.

Buna göre. $n = 41$ gözlemden sonra alt sınır aşıldığı için süreç sona ermektedir ve H_0 hipotezi kabul edilmektedir.

Weibull dağılımı için test edilecek hipotezler;

$$\begin{aligned} H_0 &: \theta = 4.5 \\ H_1 &: \theta = 4 \end{aligned} \quad \textbf{(5.2)}$$

biçimindedir. $k = 6.2$ değeri bilindiğine göre; $\alpha = 0.05$ ve $\beta = 0.05$ hata olasılıkları için $\ln A = 2.944$ ve $\ln B = -2.944$'dür. Ortalama örneklem büyüklükleri eşitlik 4.17'den $E(n;4.5) = 15$ ve $E(n;4) = 12$ olarak hesaplanmaktadır. Ardışık test sonuçları Çizelge 5'de verilmiştir.

Çizelge 5. $\alpha = 0.05$. $\beta = 0.05$. $\theta_0 = 4.5$. $\theta_1 = 4$ ve $k = 6.2$ olan Weibull dağılımı için ardışık test sonuçları

i	**Z_i**
1	0.7298
2	1.4596
3	2.1896
4	2.9195
5	3.6494
H_0 KABUL	

Buna göre. $n = 5$ gözlemden sonra alt sınır aşıldığı için süreç sona ermektedir ve H_0 hipotezi kabul edilmektedir(Kemerkaya. 2004).

6. SONUÇLAR

Günümüzde yapılan araştırmaların çoğunda örneklem genişliği önceden belirlenen sabit bir değerdir. Ardışık test sürecinde ise. örneklem genişliğinin önceden belirlenmesine gerek yoktur. Örneklem genişliği bir raslantı değişkenidir. Ardışık test, zaman ve para bakımından maliyetin yüksek olduğu alanlarda büyük tasarruf sağlamaktadır. Test yardımıyla dağılımı bilinen bir kitlenin parametrelerine ilişkin kararlar verilebilir.

Yaşam testlerinde test edilecek birim sayısı fazladır ve ardışık olarak gelmektedir. Dolayısıyla ardışık testin kullanımı yaşam testlerinde kolaylık sağlamaktadır. Üstel ve Weibull dağılımları. yaşam testlerinde en çok kullanılan olasılık dağılımlarıdır. Bu amaçla çalışmada. dağılımların ardışık test süreci incelenmiş ve her bir dağılıma ilişkin testin işleyişini gösteren bilgisayar programları hazırlanmıştır. Hazırlanan bilgisayar programları yardımıyla belirlenen hata olasılıkları ve hipotez değerlerinde ardışık testi kolaylıkla uygulamak mümkün olmaktadır

Çizelge 4. $\alpha = 0.05, \beta = 0.05, \lambda_n = 20, \lambda_1 = 25$ olan üstel dağılım için ardışık test sonuçları

i	Z_i	i	Z_i	i	Z_i	i	Z_i
1	0.144225	11	-1.00535	21	-2.22668	31	-2.22838
2	0.252614	12	-1.77744	22	-2.12769	32	-2.12082
3	0.435366	13	-1.65273	23	-1.93079	33	-2.09018
4	0.13991	14	-2.24551	24	-2.07073	34	-1.94018
5	-0.12784	15	-2.23754	25	-2.54665	35	-2.12829
6	0.009994	16	-2.09905	26	-2.48979	36	-1.90977
7	-0.02968	17	-1.91063	27	-2.46499	37	-1.95802
8	0.05057	18	-1.72558	28	-2.25915	38	-1.90091
9	-0.1363	19	-1.66448	29	-2.32012	39	-1.69626
10	-0.09088	20	-2.27769	30	-2.30336	40	-1.72706
						41	-2.95934
H_0 KABUL							

EK 1.

$\lambda = 20$ için üstel dağılımdan türetilen verilerin değerleri

0.0009	0.0081	0.0171	0.0284	0.0355	0.0479	0.0897	0.1157	0.2036
0.0011	0.0100	0.0197	0.0286	0.0357	0.0508	0.0900	0.1172	0.2275
0.0024	0.0109	0.0201	0.0294	0.0358	0.0526	0.0946	0.1214	0.2383
0.0028	0.0110	0.0202	0.0296	0.0375	0.0543	0.0960	0.1269	0.2911
0.0035	0.0119	0.0203	0.0296	0.0385	0.0568	0.0961	0.1328	
0.0037	0.0139	0.0219	0.0315	0.0390	0.0586	0.0982	0.1398	
0.0045	0.0142	0.0229	0.0324	0.0397	0.0694	0.1017	0.1632	
0.0052	0.0146	0.0230	0.0331	0.0413	0.0725	0.1017	0.1673	
0.0056	0.0158	0.0231	0.0332	0.0430	0.0726	0.1037	0.1692	
0.0060	0.0164	0.0248	0.0333	0.0447	0.0738	0.1063	0.1779	
0.0069	0.0169	0.0262	0.0333	0.0450	0.0820	0.1081	0.1811	
0.0076	0.0171	0.0281	0.0344	0.0472	0.0822	0.1090	0.1990	

$\theta = 4.5$ ve $k = 6.2$ için Weibull dağılımından türetilen verilerin değerleri

1.2958	2.8734	3.4794	3.7338	4.0824	4.2544	4.5090	4.8262	5.2454
2.0049	2.8801	3.4945	3.7674	4.0987	4.2591	4.5268	4.8717	5.2666
2.1018	2.8920	3.5542	3.7807	4.1005	4.2617	4.5655	4.8735	5.3257
2.3031	3.0009	3.5800	3.8396	4.1115	4.2636	4.5770	4.8774	5.4920
2.3537	3.0315	3.6101	3.8482	4.1207	4.2884	4.5806	4.9036	
2.3776	3.1044	3.6230	3.9551	4.1229	4.3145	4.6224	4.9347	
2.5574	3.1490	3.6301	3.9982	4.1476	4.3590	4.6580	4.9614	
2.5877	3.2346	3.6475	4.0336	4.1545	4.3594	4.7101	4.9839	
2.5925	3.2598	3.6635	4.0414	4.1775	4.3648	4.7301	5.0668	
2.6577	3.3516	3.6700	4.0508	4.2038	4.4164	4.7427	5.0892	
2.7148	3.4580	3.7111	4.0647	4.2335	4.4309	4.7757	5.1671	
2.8047	3.4785	3.7247	4.0738	4.2352	4.4609	4.8103	5.1836	

EK 2. ÜSTEL DAĞILIMIN ARDIŞIK TESTİNDE KULLANILAN EXCEL MAKROSU

```
Sub TestYap()
    Dim Sample As Worksheet. Test As Worksheet
    Dim Nr As Integer. r As Integer. i As Integer
    Dim LambdaZero As Double. LambdaOne As Double. SigmaKare As Double
    Dim A As Double. B As Double. Alfa As Double. Beta As Double
    Dim X As Double. Z As Double. zToplam As Double. rSample As Integer
    Dim N As Integer. Cont As Boolean. Result As String
    '
    Set Sample = Sheet1
    Set Test = Sheet2
    '
    Nr = 15 'Test sayfasında i ve Zi sayılarının başladığı yer
    '
    LambdaZero = Test.Cells(7. 3)
    LambdaOne = Test.Cells(7. 5)
    A = Test.Cells(10. 3)
    B = Test.Cells(10. 5)
    '
    'Varsa eski değerleri sil
    i = Nr
    Do While Test.Cells(i. 2) <> ""
       Test.Cells(i. 2).Clear
       Test.Cells(i. 3).Clear
       i = i + 1
    Loop
    'Test Başlasın
    r = Nr 'çıktı satır no
    Cont = True
    N = 1
    zToplam = 0
    rSample = 3 'örneklem satır no
    Do ' yeni örneklem değeri (X) alıyor
      X = Sample.Cells(rSample. 2)
      'Ln() fonksiyonu e tabanına göre çalışıyor: Ln()
      Z = Ln(LambdaOne / LambdaZero) - X * (LambdaOne - LambdaZero)
      'çıktı
      zToplam = zToplam + Z
      Test.Cells(r. 2).Value = N
      Test.Cells(r. 3).Value = zToplam
      r = r + 1
      If X = 0 Then
         Result = "Örneklem az geldi"
```

```
      Cont = False
    ElseIf zToplam <= B Then
      Result = "H0 KABUL"
      Cont = False
    ElseIf zToplam >= A Then
      Result = "H0 RED"
      Cont = False
    Else
      N = N + 1
      rSample = rSample + 1
    End If
  Loop While Cont
  Test.Cells(r. 2) = Result
End Sub
```

EK 3. WEIBULL DAĞILIMIN ARDIŞIK TESTİNDE KULLANILAN EXCEL MAKROSU

```
Sub TestYap()
  Dim Sample As Worksheet. Test As Worksheet
  Dim Nr As Integer. r As Integer. i As Integer
  Dim TetaZero As Double. TetaOne As Double. K As Double
  Dim A As Double. B As Double. Alfa As Double. Beta As Double
  Dim X As Double. Z As Double. zToplam As Double. rSample As Integer
  Dim N As Integer. Cont As Boolean. Result As String
  '
  Set Sample = Sheet1
  Set Test = Sheet2
  Nr = 15 'Test sayfasında i ve Zi sayılarının başladığı yer
  '
  TetaZero = Test.Cells(7. 3)
  TetaOne = Test.Cells(7. 5)
  K = Test.Cells(5. 3)
  A = Test.Cells(10. 3)
  B = Test.Cells(10. 5)
  '
  'Varsa eski değerleri sil
  i = Nr
  Do While Test.Cells(i. 2) <> ""
    Test.Cells(i. 2).Clear
    Test.Cells(i. 3).Clear
    i = i + 1
  Loop
  'Test Başlasın
  r = Nr 'çıktı satır no
  Cont = True
  N = 1
  zToplam = 0
  rSample = 3 'örneklem satır no
  Do ' yeni örneklem değeri (X) alıyor
    X = Sample.Cells(rSample. 2)
    'Ln() fonksiyonu e tabanına göre çalışıyor: Ln()
    Z = K * (Ln(TetaZero / TetaOne)) - X * (1 / (TetaOne ^ K) - 1 / (TetaZero ^ K))
    'çıktı
    zToplam = zToplam + Z
    Test.Cells(r. 2).Value = N
    Test.Cells(r. 3).Value = zToplam
    r = r + 1
    If X = 0 Then
```

```
      Result = "Örneklem az geldi"
      Cont = False
    ElseIf zToplam <= B Then
      Result = "H0 KABUL"
      Cont = False
    ElseIf zToplam >= A Then
      Result = "H0 RED"
      Cont = False
    Else
      N = N + 1
      rSample = rSample + 1
    End If
  Loop While Cont
  Test.Cells(r. 2) = Result
End Sub
```

7. KAYNAKÇA

Dipalo. A.J.(1969). The theory of the design of a sequential life test. Naval Engineers Journal. 85- 92.

Ghosh. B.K.. 1970. Sequential Tests of Statistical Hypotheses. Addison-Wesley. California.

Hauck. D.J.. Keats. J.B.. 1997. Robustness of the exponential sequential probability ratio test (SPRT) when Weibull distributed failures are transformed using a “known” shape parameter. Microelectronics in Reliabilit. 37(12), 1835-1840.

Kemerkaya. Ümra. 2004. Yaşam Testinde Kullanılan Dağılımların Ardışık Testi. Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi. Ankara.

Meeker. W.Q.. Escobar. L.A.. 1998. Statistical Methods for Reliability Data. John Wiley & Sons New York.

Sharma. K.K.. Rana. R.S.. 1993. Robustness of sequential Weibull life-test plans. Microelectronics in Reliability 33(4), 467-470.

Wald. A.. 1947. Sequential Analysis. John Wiley & Sons New York.

Ümra Kemerkaya, lisans öğrenimini Gazi Üniversitesi İktisat Bölümünde 2000 yılında; yüksek lisans öğrenimini Hacettepe Üniversitesi İstatistik Bölümünde 2004 yılında tamamlamıştır. 2001-2004 yılları arasında Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü’nde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmıştır. 2005 yılından beri Jandarma Genel Komutanlığı-Ankara’da uzman olarak görev yapmaktadır.

Sevil Bacanlı, lisans öğrenimini Hacettepe Üniversitesi İstatistik Bölümü’nde 1986 yılında; yüksek lisans öğrenimini 1988 yılında aynı bölümde; doktorasını 1995 yılında yine aynı bölümde tamamlamıştır. 1995 yılından itibaren aynı bölümde Yardımcı Doçent olarak görev yapmaktadır. İlgi alanları uygulamalı istatistik, örnekleme ve araştırma yöntemleridir.