ANADOLU ÜNİVERSİTESİ BİLİM VE TEKNOLOJİ DERGİSİ
ANADOLU UNIVERSITY JOURNAL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
Cilt/Vol.:7-Sayı/No: 1 : 149-155 (2006)

ARAŞTIRMA MAKALESİ /**RESEARCH ARTICLE**

ÖĞRENCİ BAŞARI NOTLARI İÇİN ROBUST FAKTÖR ANALİZİ UYGULAMASI

Fikret ER[1], Harun SÖNMEZ[2]

ÖZ

Faktör analizi, yaygın kullanılan çok değişkenli bir analiz tekniğidir. Faktör analizinin temelinde varyans-kovaryans matrisi ve korelasyon matrisi hesaplanması aşaması bulunmaktadır. Asal bileşenler analizi, faktör analizi için çok faydalı sonuçlar ortaya çıkarmaktadır. Aykırı değerlerin bulunduğu veri setlerinde, varyans-kovaryans matrisi tahmini bulunurken aykırı değerlerden meydana gelen sapmalar, faktör analizini de etkilemektedir. Bu çalışmada varyans-kovaryans matrisi hesabında kullanılan robust ölçüler incelenmiş ve çok değişkenli bir veriye uygulanan faktör analizine katkısı araştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler : MKD, Donoho-Stahel, Faktör analizi, Robust kovaryans matrisi, Asal bileşenler

AN APPLICATION OF ROBUST FACTOR ANALYSIS TO STUDENT COURSE SCORES

ABSTRACT

Factor analysis is a frequently used multivariate analysis technique. The variance-covariance and correlation matrix play a fundamental role in factor analysis. Also principal components analysis provide useful information for factor analysis. In the presence of outlying observations in a data set may influence the factor anaysis results since they may influence the estimation of variance covariance matrix. In this study, robust measures used for the estimation of variance-covariance matrix is reviewed and a factor analysis problem, for a real life data set, is investigated using these estimated matrices.

Keywords: MCD, Donoho-Stahel, Factor analysis, Robust variance-covariance matrix, Principal components

[1, 2] Anadolu Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstatistik Bölümü, Yunusemre Kampüsü, 26470, Eskişehir.
[1] **Faks:** +90 222 3204910, **E-Posta**: fer@anadolu.edu.tr
[2] **E-Posta**: hsonmez@anadolu.edu.tr.

Geliş: 8 Aralık 2004; **Düzeltme:** 1 Temmuz 2005; **Kabul:** 20 Ekim 2005

1. GİRİŞ

Çok değişkenli istatistik analizlerinde asal bileşenlerin kullanımına sıklıkla rastlanmaktadır. Asal bileşenler analizinin temeli Karl Pearson ve Hotelling'in yaptığı çalışmalara dayanmaktadır. Genel olarak asal bileşenler analizi, verinin özetlenmesi için kullanılabilecek bir kaç doğrusal kombinasyonun araştırılması işlemidir. Asal bileşenlerin bir başka faydası da faktör analizinde başlangıç faktör yükleri olarak kullanıma olanak vermesidir. Dolayısıyla asal bileşenler analizi hesaplamalarında meydana gelen gelişmeler paralel olarak faktör analizini etkilemektedir. Özellikle varyans-kovaryans matrisi tahmini hem asal bileşenler hem de faktör analizi için büyük bir önem taşımaktadır. Aykırı değerler içeren veri setlerinde en kolay etkilenebilecek ölçü birimleri aritmetik ortalama ve varyanstır. Yapılması gereken işlem özellikle aykırı değerlerin bulunduğu veri setlerinde bu değerlere karşı daha duyarlı olabilecek tekniklerin kullanılmasıdır. Son yıllarda varyans-kovaryans matrisi tahmininde kullanılmak üzere bazı robust teknikler önerilmiştir.

Çalışmada bu teknikler kısaca ele alınacak ve yeni teknikler kullanarak elde edilen varyans-kovaryans matrislerinin gerçek bir veri set üzerinde faktör analizi bakımından ne tür etkiler yarattığı incelenecektir. Faktör analizinde başlangıç katsayılarının hesabında asal bileşenler analizi tekniği kullanılmıştır.

Temel olarak asal bileşenler analizinde x_1, x_2, x_3,..., x_p değişkenleri izleyen özellikleri taşıyacak şekilde yeni bir y_1, y_2, y_3,...., y_p setine dönüştürülür, bu özellikler,

a) Her bir y, x'lerin doğrusal kombinasyonlarıdır, $y_i=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+...+a_{ip}x_p$.
b) a_{ij} katsayılarının kareleri toplamı (j=1,2,...,p) bire eşittir, $\sum a_{ij}^2 = 1$.
c) y_1, y_2 ile korelasyonsuz, olası bütün doğrusal kombinasyonlar en yüksek varyansa sahiptir.

Yeni oluşturulan p adet değişken orijinal değişkenlerin birbirleri ile ilişkisiz ve azalan varyansa göre sıralanmış dönüşümleridir. Bu çok genel bir tekniktir ve ilgilenilen değişkenlerin analizle ilişkili değişkenler olması varsayımı dışında bir varsayımı gerektirmez dolayısıyla test edilebilecek herhangi bir hipotezde bulunmamaktadır. Temel olarak değişkenler grubunun daha farklı, daha kolay bir şekilde yeniden sunulması işlemidir (Johnson ve Wichern, 2002).

Genel faktör analizi modeli, p tane değişkenin daha az sayıda indisler ya da faktörler ile temsil edilmesidir. Bu konu ile ilgili ilk gelişmeler Charles Spearman'a aittir. Değişik tipteki test sonuçları arasındaki korelasyonlar üzerinde çalışan Spearman, gözlemlenen korelasyonların sonuçlar için verilecek basit bir model ile tanımlanabileceğini göstermiştir (Spearman, 1904). Faktör analizi modelinde korelasyon matrisi kullanılabileceği gibi varyans-kovaryans matrisi de kullanılabilir. Faktör analizinde az sayıda birkaç ortak faktörün modeli oluşturması söz konusudur. Faktör analizi yaygın olarak bir çok araştırmada kullanılmaktadır. x_1, x_2, x_3,..., x_p değişkenlerinin m tane olası F_1,F_2,...,F_m faktörleri ile izleyen istatistik modeli yardımıyla ilişkilendirildikleri varsayılmaktadır. Bu model $X_i=a_{i1}F_1+a_{i2}F_2+....+a_{im}F_m+e_i$, i=1,...,p, olarak yazılmaktadır. Modelde yer alan X_i, i'inci değişken için standartlaştırılmış puan, F_1,F_2,...,F_m, m tane ortak faktör, a_{i1},a_{i2},...a_{im} faktör yükleri ve e_i'ler de i'inci değişkene özgü faktör olarak ele alınmaktadır. Bu model için aşağıdaki varsayımlar kabul edilmektedir.

a) F_1,F_2,...,F_m ortak faktörleri ve her değişkene özgü faktörler e_1,e_2,...,e_p'lerin hepsi birbirinden bağımsızdır.
b) F_1,F_2,...,F_m ortak faktörleri sıfır(0) ortalama ve bir(1) standart sapmaya sahiptir.
c) Değişkenlere özgü özel faktörler, e_1,e_2,...,e_p, sıfır (0) ortalamaya sahiptir.
d) F_1,F_2,...,F_m faktörlerinin ortak dağılımı çok değişkenli Normal dağılımdır.

Faktör analizi modeli için daha ayrıntılı bilgiler Manly (1994), Mardia vd., (1994), Everitt ve Dunn (1999), Tatlıdil (1996) ve Johnson ve Wichern (2002)'den elde edilebilir. Daha önce de belirtildiği gibi faktör analizi modelinin temelinde yer alan varyans-kovaryans matrisi için kullanılabilecek robust teknikler izleyen bölümde ele alınmıştır. Robust faktör analizi bu teknikler yardımıyla hesaplanan varyans-kovaryans matrislerinin kullanılması ile uygulanabilir (Pison vd., 2003, Croux ve Haesbroeck, 2003). Son bölümde öğrenci başarı notları üzerinde faktör analizi araştırmasında robust varyans-kovaryans matrisi hesaplamalarının etkileri faktör yük grafikleri kullanılarak yorumlanmıştır.

2. ROBUST VARYANS KOVARYANS MATRİSİ HESABI

Robust kovaryans matrisinin elde edilmesi için çeşitli teknikler bulunmaktadır. İzleyen üç alt bölümde sırasıyla Donoho-Stahel, Minimum Kovaryans Determinant (MKD) ve M tahmini teknikleri kısaca açıklanmıştır.

2.1 Donoho-Stahel Tekniği

Donoho-Stahel tahmincisi bir tartılı ortalama ve tartılı kovaryans matrisi olarak tanımlanır. Her noktanın tartısı bir aykırılık ölçeğinin fonksiyonudur. Aykırılık ölçeği r, eğer bir nokta çok değişkenli aykırı değer ise bu noktanın tek değişkenli bir aykırı değerde olacağını gösteren, verinin tek-boyutlu bir projeksiyonununda bulunduğu fikrine dayanmaktadır (Maronna ve Yohai, 1995). $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$, $\Re^p$'de n tane nokta kümesi olduğu varsayılsın. Her x_i noktası için aykırılık r değeri $A=\{a\in\Re^p \mid \|a\|=1\}$ iken $a\in A$ yönünün aşağıdaki gibi hesaplanması ile elde edilir :

$$\mathrm{r_i} = \sup_{a\in A} \frac{\left| x_i^T a - \mathrm{med}\{x_j^T a\}_{j=1}^n \right|}{\mathrm{mad}\{x_j^T a\}_{j=1}^n} \quad . \tag{1}$$

w_i tartı (weight) değeri Eşitlik (2)'de verilen aykırılık fonksiyonu kullanılarak hesaplanır. Eşitlik (1)'deki med medyanı, mad en küçük mutlak sapmayı temsil etmektedir.

$$w(r;c) = \begin{cases} 0 & \left|\frac{r}{c}\right| > 1 \text{ ise} \\ a_1 + a_2\left(\frac{r}{c}\right)^2 + a_3\left(\frac{r}{c}\right)^4 + a_4\left(\frac{r}{c}\right)^6 & 0.8 < \left|\frac{r}{c}\right| \le 1 \text{ ise} \\ 1 & \left|\frac{r}{c}\right| \le 0.8 \text{ ise} \end{cases} \tag{2}$$

Fonksiyonda $a_1 = -19.71879$, $a_2 = 82.30453$, $a_3 = -105.45267$, $a_4 = 42.86694$

olmaktadır. Düzeltme katsayısı p serbestlik dereceli ki-kare dağılımının 0.95'inci kantilinin kare köküdür. Konum ve saçılım için ($(t(X), V(X))$) Donoho-Stahel tahmincisi izleyen formüllerdeki gibi tanımlanır (Insightful, 2002).

$$t = t(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} \quad , \tag{3}$$

$$V = V(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i (x_i - t)(x_i - t)'}{\sum_{i=1}^{n} w_i} \quad . \tag{4}$$

Donoho-Stahel Tekniği ile ilgili daha ayrıntılı bilgi (Maronna ve Yohai, 1995)'den elde edilebilir.

2.2 Minimum Kovaryans Determinant Tekniği (MKD)

Konum ve kovaryans için en küçük kovaryans determinant tahmincisi Rousseeuw ve Van Driessen (1999)'in gerçekleştirdikleri algoritma yardımı ile araştırılabilir. Bu algoritma temel olarak bir C-Adımına ihtiyaç duymaktadır. Bu adımda MKD Tekniği için yaklaşık bir değer verildiğinde daha küçük determinanta sahip bir başka yaklaşıma ulaşmak mümkün olmaktadır.

Algoritmanın C adımı şu şekilde gerçekleştirebilir. $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$, $\Re^p$'de n tane nokta kümesi olsun. $H_j \subset \{1, ..., n\}$, $|\mathrm{H_j}| = h,$ ve

$$T_j = \frac{1}{h}\sum_{i\in H_j} x_i \quad \text{ile} \tag{5}$$

$$S_j = \frac{1}{h}\sum_{i\in H_j} (x_i - T_1)(x_i - T_1)' \tag{6}$$

olarak ele alındığında, eğer **det(**S_j) $\neq 0$ olarak ortaya çıkıyor ise

$$d_j(i) = \sqrt{(x_i - T_j)' S_j^{-1} (x_i - T_j)} \tag{7}$$

uzaklığı hesaplanır. Daha sonra da *dj*'ye en küçük uzaklıklara sahip *h* tane nokta yardımıyla yeni bir H_{j+1} alt kümesi oluşturulur. Bu işlemden sonra **det(**S_{j+1}) $\le$ **det(**S_j) olacaktır. Bu eşitliğin geçerliliği ise $T_{j+1} = T_j$ ve $S_{j+1} = S_j$ olmasına bağlıdır.

Veri setinin ve değişken sayısının fazla olduğu durumlarda MKD Tekniği, Donoho-Stahel Tekniğine tercih edilir. MKD Tekniği ile ilgili daha ayrıntılı bilgi Rousseeuw ve Van Driesen (1999), Insightful (2002)'dan elde edilebilir.

2.3 M Tahmini Tekniği

$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$, $\Re^p$'de n tane nokta kümesi olsun. Çok değişkenli konum ve şekil parametresi için bir S-tahmini sırasıyla $\hat{t}$ vektörü ve $\hat{C}$'nın aşağıdaki eşitliğe dayalı olarak determinantını en küçükleyen $\hat{C}$, pozitif tanımlı simetrik matristir (Huber,1981).

$$n^{-1}\sum_{i=1}^{n} \rho\left(\frac{\left[(x_i - t)^T C^{-1}(x_i - t)\right]^{1/2}}{c}\right) = n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\rho\left(\frac{d_i}{c}\right) = b_0 \tag{8}$$

Eşitlikteki $d_i = \left[(x_i - t)^T C^{-1}(x_i - t)\right]^{1/2}$ ve ρ'da $[0, \infty)$ aralığında azalmayan bir fonksiyondur. Fonksiyonu c_0'da maksimum bire ulaşan bir fonksiyondur. b_0 katsayısı 0.45'e eşit olarak seilen r kırılma noktasına göre $b_0 = r\rho\{c_0\}$ olarak seçilir. c katsayısı C'nin tahmini $\hat{C}$'yı çok değişkenli normal dağılım varsayımı altında tutarlı yapacak şekilde seçilir, bunun anlamı $E(\rho(d/c)) = b_0$ olmasıdır. İfadedeki beklenen değer p serbestlik derecesi ile ki kare dağılımında hesaplanmaktadır. Burada $\tilde{d}_j = d_i / c$ olarak tanımlandığında, istenen S-tahmini aynı zamanda ($\hat{t}$, $\hat{C}$)'nin tartılı ortalama ve varyans kovaryans iterasyonları

$$\hat{t}_i^{(j)} = \frac{\sum w\left(\tilde{d}_i^{(j)}\right) x_i}{\sum w\left(\tilde{d}_i^{(j)}\right)} \tag{9}$$

$$\hat{C}^{(j)} = \frac{\sum w\left(\tilde{d}_i^{(j)}\right)\left(x_i - t^j\right)\left(x_i - t^j\right)^T}{\sum v\left(\tilde{d}_i^{(j)}\right)} \quad \textbf{(10)}$$

için bir çözüm olur. Eşitliklerde $w\left(\tilde{d}\right) = \psi\left(\tilde{d}\right)/\tilde{d}$, $\psi\left(\tilde{d}\right) = \rho'\left(\tilde{d}\right), \upsilon\left(\tilde{d}\right) = \tilde{d}\,\psi\left(\tilde{d}\right)$ olacaktır. M Tahmini Tekniği ile ilgili daha ayrıntılı bilgi Rocke (1996)'den elde edilebilir.

3. UYGULAMA

İstatistik Bölümünde öğrenimini tamamlamış 29 öğrenci için belirli derslerdeki başarı notları üzerinde bir uygulama yapılmıştır. İlgilenilen dersler 3 başlık altında toplanmaktadır. Bunlar seçilmiş bazı temel istatistik dersleri, matematik dersleri ve bilgisayar dersleridir. İlgilenilen dersler konu başlıkları sırasına göre, Olasılık, Örnekleme, Deney Tasarımı, Temel İstatistik, Matematiksel İstatistik, Bilgisayar 1, Bilgisayar 2, Bilgisayar 3, Calculus, Analiz ve Matrisler Kuramı'dır.

Analizin ilk aşaması olarak Donoho-Stahel, MKD ve M teknikleri kullanılarak varyans-kovaryans matrisleri oluşturulmuştur. Hesaplamalarda R For Windows 1.2.0 kullanılmıştır. Daha sonra elde edilen bu matrisler kullanılarak faktör analizi modellemesi gerçekleştirilmiştir. Ayrıca klasik varyans-kovaryans matrisi yardımıyla da faktör analizi uygulaması gerçekleştirilmiştir. Başlangıç faktör yüklerinin belirlenmesinde asal bileşenler analizi kullanılmıştır. Genel olarak 3 faktör elde etmeye çalışılmıştır. Çeşitli varyans-kovaryans matrislerine göre elde edilen faktör katsayı yükleri Tablo 1'de verilmiştir. Ayrıca kolaylık olması amacı ile bu aşamada veri üzerinde herhangi bir faktör döndürmesi işlemi uygulanmamıştır. İhtiyaç görüldüğünde bu döndürme de kolaylıkla uygulanabilir. Bütün teknikler 1. faktör bakımından toplam varyansın açıklanmasına yüksek katkıda bulunmaktadır. Fakat Tablo 1'e bakıldığında her bir tekniğe göre 1. faktör içinde yer alan değişkenlerin katkıları farklı ortaya çıkmaktadır. Bu da, veri setinin doğal yapısında bulunan çeşitli aykırı değerlerle tekniklerin başa çıkma gücünü ortaya koymaktadır.

Tablo 2'de hesaplanan faktörler için açıklanan varyans oranları sunulmuştur. Bu oranlara bakarak özellikle 1. faktör için Donoho-Stahel tekniğinin varyans açıklanma oranını diğer tekniklere göre daha yüksek verdiğini görmek mümkündür.

Bu iki tablodan sonra her bir teknik için faktör yük grafikleri de çizdirilebilir. Grafikler yukarıdaki tablolardaki sıraya göre Şekil 1, Şekil 2, Şekil 3 ve Şekil 4'te verilmiştir.

4. SONUÇ

Uygulama bölümünde verilen sonuçların genel bir değerlendirmesi yapılırsa, varyans-kovaryans matrisi hesabının faktör analizine uygulanmasının çok da zor olmadığı kolaylıkla görülebilir. Ayrıca kullanılan veri seti analizi sonucuna göre de Donoho-Stahel Tekniği ile hesaplanan varyans-kovaryans matrisine dayalı olarak oluşturulan üç faktörün genel değişkenliğin %75'ni oluşturduğu görülebilir. Oysa ki bu değer klasik analizde %61, MKD Tekniğinde %65 ve M tahmini Tekniğinde %60 olarak gerçekleşmiştir. Çalışmada elde edilen sonuçlar bu araştırmada kullanılan veri için geçerlidir. Başka araştırmalarda ve veri yapılarında farklı sonuçlara ulaşılması mümkündür. Önemli olan, bu araştırmada da olduğu gibi, hesaplamaları kolaylıkla yapabilecek çok daha modern tekniklerin, faktör analizinde kullanılmasıyla farklı, belki de araştırmanın yapısına daha uygun sonuçlar elde edilebileceğinin gösterilmesidir. Araştırmacıların veri analizi tekniklerini uygularken, günümüz değişen dünyasının hareketliliklerinin veri üzerinde yapacağı olumlu ve olumsuz etkileri göz önüne alarak, faktör analizi ya da asal bileşenler analizi gibi çok değişkenli analiz tekniklerinde robust olarak sınıflanan varyans-kovaryans matrislerini kullanmaları faydalı olabilir.

KAYNAKLAR

Croux, C. ve Haesbroeck, G. (2003). Principal Component Analysis Based on Robust Estimators of the Covariance or Correlation Matrix: Influence Functions and Efficiencies. http://ideas.repec.org/p/fth/gemame/9908.html.

Everitt, B.S. ve Dunn, G. (1999). *Applied Multivariate Data Analysis*. Edward Arnold, Great Britain.

Huber, P. J. (1981). *Robust Statistics*. New York, John Wiley & Sons.

Insightful Corporation (2002). *S-Plus 6 Robust Library User's Guide*. Seattle, United States.

Johnson, R.A. ve Wichern, D.W. (2002). *Applied Multivariate Statistical Analysis*. Fifth Edition, Pearson Education Int., New Jersey.

Manly, Bryan F. J. (1994). *Multivariate Statistical Methods : A Primer*. 2nd ed., Chapman & Hall, London.

Mardia, K.V., Kent, J.T. ve Bibby, J.M. (1994). *Multivariate Analysis*. Nineth Printing, Academic Press Limited, Great Britain.

Maronna, R. A. ve Yohai, V.J., (1995). The Behavior of the Stahel-Donoho Robust Multivariate Estimator. *Journal of American Statistical Association* 90, 330-341.

Pison, G., Rousseeuw, P.J., Filzmoser, P ve Croux, C. (2003). Robust Factor Analysis. *Journal of Multivariate Analysis* 84 (1), 145-172.

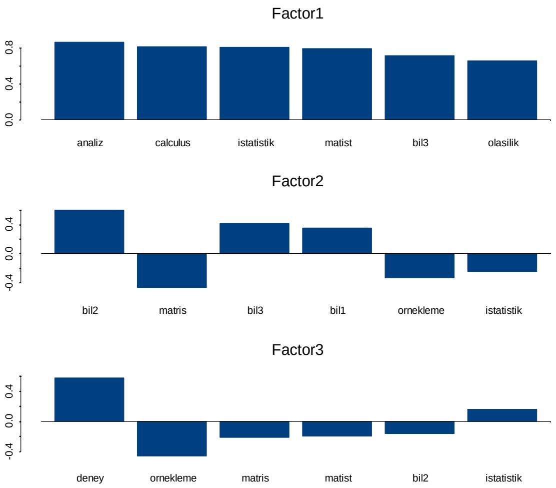
Rocke, D.M. (1996). Robustness Properties of S-Estimators of Multivariate Location and Shape in High Dimension. *Annals of Statistics* 24 (3), 1327-1345.

Tablo 1. Tekniklere Göre Faktör Katsayı Yükleri

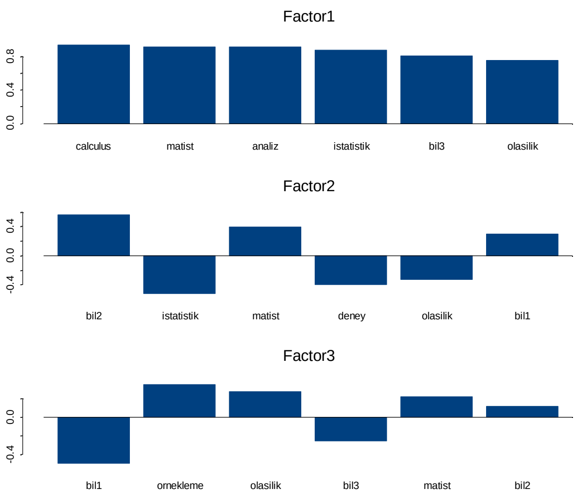
Klasik Faktör Analizi	**Faktör 1**	**Faktör 2**	**Faktör 3**
Olasılık	0.652	-0.103	
Örnekleme	0.599	-0.337	-0.460
Deney Tasarımı	0.316	-0.183	0.574
Bilgisayar I	0.583	0.350	
Bilgisayar II	0.427	0.598	-0.162
Bilgisayar III	0.712	0.414	0.139
Calculus	0.813	0.150	
Analiz	0.860	-0.220	0.153
Matrisler Kuramı	0.497	-0.471	-0.213
Temel İstatistik	0.803	-0.243	0.158
Matematik. İstatistik	0.788		-0.204
Donoho-Stahel	**Faktör 1**	**Faktör 2**	**Faktör 3**
Olasılık	0.758	0.321	0.275
Örnekleme	0.539	0.201	0.350
Deney Tasarımı	0.656	-0.392	
Bilgisayar I	0.716	0.302	-0.494
Bilgisayar II	0.524	0.562	0.119
Bilgisayar III	0.810	-0.164	-0.258
Calculus	0.941	0.221	-0.100
Analiz	0.920		
Matrisler Kuramı	0.608		
Temel İstatistik	0.877	-0.515	
Matematik. İstatistik	0.922	0.395	0.222
MKD	**Faktör 1**	**Faktör 2**	**Faktör 3**
Olasılık	0.649	0.290	-0.130
Örnekleme	0.468	0.179	0.668
Deney Tasarımı	0.275	0.548	-0.309
Bilgisayar I	0.453	-0.354	
Bilgisayar II	0.632	-0.522	0.244
Bilgisayar III	0.712		-0.254
Calculus	0.764	-0.111	-0.251
Analiz	0.876	0.150	-0.110
Matrisler Kuramı	0.483	0.406	0.530
Temel İstatistik	0.766	0.343	
Matematik. İstatistik	0.886	-0.420	
M Tahmincisi	**Faktör 1**	**Faktör 2**	**Faktör 3**
Olasılık	0.656		0.103
Örnekleme	0.591	-0.339	-0.451
Deney Tasarımı	0.356	-0.164	0.545
Bilgisayar I	0.588	0.356	
Bilgisayar II	0.442	0.592	-0.190
Bilgisayar III	0.715	0.400	0.163
Calculus	0.817	0.156	
Analiz	0.862	-0.214	0.128
Matrisler Kuramı	0.496	-0.478	-0.219
Temel İstatistik	0.818	-0.240	0.207
Matematik.İstatistik	0.789		-0.219

Tablo 2. Tekniklere Göre Faktörler İçin Açıklanan Varyans Oranları

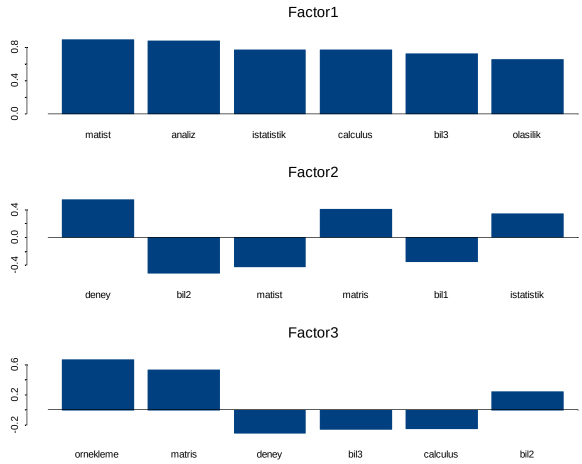
Klasik Faktör Analizi	**Faktör 1**	**Faktör 2**	**Faktör 3**
Varyans Oranı	0.4387606	0.1062439	0.06703159
Donoho-Stahel	**Faktör 1**	**Faktör 2**	**Faktör 3**
Varyans Oranı	0.5871936	0.1100427	0.05309533
MKD	**Faktör 1**	**Faktör 2**	**Faktör 3**
Varyans Oranı	0.4356942	0.1196164	0.09620892
M Tahmincisi	**Faktör 1**	**Faktör 2**	**Faktör 3**
Varyans Oranı	0.4460105	0.1044274	0.06653867



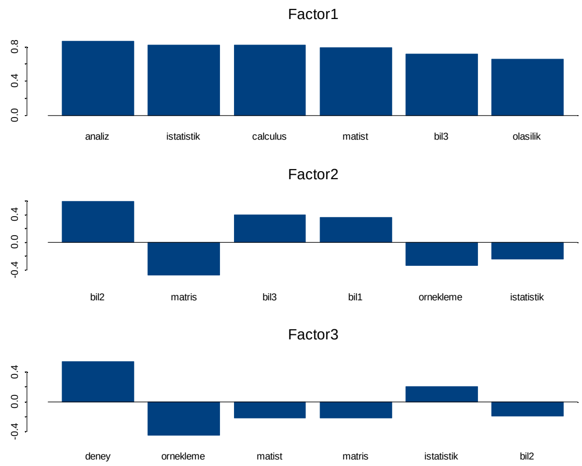
Şekil 1. Klasik Faktör Analizi Varyans Kovaryans Matrisine Göre Faktör Analizi İçin Faktör Yük Grafiği



Şekil 2. Donoho-Stahel Varyans Kovaryans Matrisine Göre Faktör Analizi İçin Faktör Yük Grafiği



Şekil 3. MKD Varyans Kovaryans Matrisine Göre Faktör Analizi İçin Faktör Yük Grafiği



Şekil 4. M Tahmincisi Varyans Kovaryans Matrisine Göre Faktör Analizi İçin Faktör Yük Grafiği

Rousseeuw, P. ve Van Driesen, K. (1999), A Fast Algorithm for the Minimum Covariance Determinant Estimator. *Technometrics* 41, 212-223.

Spearman, C. (1904). General Intelligence. *American Journal of Psychology* 15, 201-193.

Tatlıdil, H. (1996). *Uygulamalı Çok Değişkenli İstatistiksel Analiz*. Cem Web Ofset Ltd. Şti., Ankara.

Fikret Er, lisans öğrenimini Anadolu Üniversitesi İstatistik Bölümü'nde 1992'de, doktora öğrenimini University of Leeds İngiltere'de 1999'da tamamlamıştır. Halen Anadolu Üniversitesi İstatistik Bölümü'nde Yardımcı Doçent olarak çalışmaktadır. Evli ve bir çocuk babasıdır.

Harun Sönmez, lisans öğrenimini anadolu Üniversitesi İstatistik Bölümü'nde 1992'de, yüksek lisans öğrenimini Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalında 2001 de tamamlamıştır. 2001'den bu yana Anadolu Üniversitesi İstatistik Bölümü'nde Yardımcı Doçent olarak çalışmaktadır. Evli ve iki çocuk babasıdır.