ANADOLU ÜNİVERSİTESİ BİLİM VE TEKNOLOJİ DERGİSİ
ANADOLU UNIVERSITY JOURNAL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
Cilt/Vol.:7-Sayı/No: 2 : 247-253 (2006)

DERLEME/**REVIEW**

RÖLATİVİSTİK ELEKTROMANYETİZMANIN KOMPLEKS KUATERNİONİK DÖNÜŞÜM BAĞINTILARI

Süleyman DEMİR[1]

ÖZ

Bu çalışmada elektrik ve manyetik alanların rölativistik dönüşüm bağıntıları incelenmiştir. Elektrik ve manyetik alanların dönüşüm bağıntıları önce Lorentz dönüşümleri ile daha sonra da kompleks kuaternionlar kullanılarak elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar kompleks kuaternionik dönüşüm bağıntısının daha kullanışlı bir yöntem olduğunu göstermektedir.

Anahtar Kelimeler : Kuaternion, Kuaternionik dönüşüm, Rölativistik elektromanyetizma

COMPLEX QUATERNIONIC TRANSFORMATION RELATIONS OF RELATIVISTIC ELECTROMAGNETISM

ABSTRACT

In this paper; it is investigated that relativistic transformation equations of electric and magnetic fields. These equations are obtained firstly by Lorentz transformations afterwards using complex quaternions. Obtained results show that complex quaternionic transformation equation is much more useful method.

Keywords: Quaternion, Quaternionic transformation, Relativistic electromagnetism

[1], Anadolu Üniversitesi, Fen Fakültesi Fizik Bölümü, Eskişehir
e-posta: sudemir@anadolu.edu.tr

Geliş: 26 Nisan 2005; **Kabul:** 27 Şubat 2006

1. GİRİŞ

Klasik fizik yasaları Newton mekaniğine dayanır. Bu yasalar, hareketli bir cismin düşük hızlardaki davranışını bütün yönleriyle çok başarılı bir şekilde yansıtabilirken, cismin hızının ışık hızıyla karşılaştırılabilir büyüklüğe ulaştığı durumlarda ise yetersiz kalırlar. Yüksek hızlarda Newton yasalarıyla deneysel gerçekler örtüşmez. Bu yasaların ifadelerinin Einstein tarafından öne sürülen özel rölativite teorisine göre değiştirilmesi gerekir. Bu anlamdaki rölativite teorisinin temelinde Lorentz dönüşüm bağıntıları yatar.

Kuaternionlar rölativistik mekaniğin incelenmesinde de önemli roller üstelenmektedir. Bu nedenle kuaternionların önemi yirminci yüzyılın başından itibaren uzay-zaman kavramı üzerindeki çalışmaların yoğunlaşması üzerine artmaya başlamıştır. Silberstein 1912 yılında yayınlanan çalışmasında Lorentz dönüşümlerini kuaternionlarla ifade etmeyi başarmıştır. Rölativistik incelemelerde kuaternionların kullanıldığı son yıllardaki diğer çalışmaların yine Lorentz dönüşümleri üzerinde yoğunlaştığı görülmektedir (Rao, 1983, Manogue ve Schray, 1993, De Leo, 2001). Öte yandan De Leo (1996) tarafından yapılan çalışmada ise kuaternionlar kullanılarak özel rölativite teorisi incelenmiştir. Kompleks kuaternionların ortaya çıkışının hemen ardından elektromanyetik teoride kendisine uygulama alanı bulmuştur. Klasik elektromanyetizma Imaeda (1976) tarafından kompleks kuaternionlarla yeniden incelemiştir. Minkowski uzayının doğası, Lorentz dönüşümleri ve Maxwell denklemleri kompleks kuaternionların fonksiyonu olarak yeniden tanımlanmıştır. Bu çalışmadan etkilenen Negi ve arkadaşları, 1998 yılında yayınlanan çalışmalarında kompleks kuaternionların izomorfik 8×8 matris temsillerini tanımlamış, Maxwell denklemlerinin kapalı ve açık formlarını kompleks kuaternionlarla vermişlerdir. Ayrıca bu eşitliklere karşı gelen izomorfik matris temsillerini de ifade etmişlerdir. Öte yandan kompleks kuaternionların klasik elektromagnetik teoriye ilişkin uygulamaları Lambek (1995), Gürsey ve Tze (1996), Colombo ve arkadaşları (1998), Sweeter ve Dandri (1999), Gsponer ve Hurni (2001) tarafından da incelenmiştir. Tüm bu uygulamalar yardımıyla Maxwell'in dört eşitliği daha kısa ve daha şık formdaki bir eşitliğe indirgenmiştir. Kompleks kuaternionların kullanıldığı rölativistik elektromagnetizmaya ilişkin çalışmalar ise Silberstein (1912), Sobczyk (1981), Jantzen (1982), Abonyi ve arkadaşları (1991), Kassandrov (1995), Ward (1997) ve Dahm (1998), tarafından yapılmıştır. Sözü edilen çalışmalarda Maxwell denklemlerinin Lorentz dönüşümleri altındaki yeni formları elde edilmiştir.

Yukarıda belirtildiği üzere kompleks kuaternionların rölativistik elektromanyetizmanın incelenmesinde kullanılması yeni değildir. Bu çalışmada hedeflenen; kompleks kuaternionlarla elektrik ve manyetik alanlar ifade edildikten sonra bu ifadelerin çok iyi bilinen Lorentz dönüşümleri ile yeni biçimlerinin elde edilmesi, ardından kompleks kuaternionik dönüşümle elde edilen sonuçlarla karşılaştırılarak hangi yöntemin kullanışlı olduğunun araştırılmasıdır.

2. KOMPLEKS KUATERNİONLAR

Kompleks kuaternionlar, reel kuaternionların kompleks bir ifadesidir. $\mathbf{q}$ ve $\mathbf{q}'$ reel kuaternionları;

$$\mathbf{q} = q_0 \mathrm{e}_0 + q_1 \mathrm{e}_1 + q_2 \mathrm{e}_2 + q_3 \mathrm{e}_3 \tag{2.1}$$

ve

$$\mathbf{q}' = q'_0 \mathrm{e}_0 + q'_1 \mathrm{e}_1 + q'_2 \mathrm{e}_2 + q'_3 \mathrm{e}_3 \tag{2.2}$$

ile verilmek üzere $\mathbf{Q}$ kompleks kuaternionu;

$$\begin{aligned}\mathbf{Q} = \mathbf{q} + i\mathbf{q}' &= (q_0 \mathrm{e}_0 + q_1 \mathrm{e}_1 + q_2 \mathrm{e}_2 + q_3 \mathrm{e}_3) + i(q'_0 \mathrm{e}_0 + q'_1 \mathrm{e}_1 + q'_2 \mathrm{e}_2 + q'_3 \mathrm{e}_3) \\ &= (q_0 + iq'_0)\mathrm{e}_0 + (q_1 + iq'_1)\mathrm{e}_1 + (q_2 + iq'_2)\mathrm{e}_2 + (q_3 + iq'_3)\mathrm{e}_3 \\ &= Q_0 \mathrm{e}_0 + Q_1 \mathrm{e}_1 + Q_2 \mathrm{e}_2 + Q_3 \mathrm{e}_3\end{aligned} \tag{2.3}$$

biçiminde yazmak mümkündür (Negi vd., 1998). Burada $i^2 = -1$ olup, Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 ise kompleks sayılardır. Kuaternionların taban elemanları olan e_0 ve $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3$ aşağıdaki çarpım kurallarına uyarlar:

$$\mathrm{e}_0^2 = 1 \quad \mathrm{e}_j \mathrm{e}_k = -\delta_{jk} \mathrm{e}_0 + \varepsilon_{jkl} \mathrm{e}_l \quad (j, k, l = 1, 2, 3) \tag{2.4}$$

δ_{jk} ve ε_{jkl} terimleri sırasıyla Kronecker deltası ve Levi-Civita sembollerini göstermektedir. Bir $\mathbf{P}$ kompleks kuaternionu skaler P_0 ve vektörel bileşenleri $P_1 \mathrm{e}_1 + \mathrm{P}_2 \mathrm{e}_2 + \mathrm{P}_3 \mathrm{e}_3$ cinsinden de yazmak mümkündür:

$$\mathbf{P} = P_0 + \mathrm{P} \tag{2.5}$$

$\mathbf{P}$ ve $\mathbf{Q}$ gibi iki kompleks kuaternionunun çarpımı,

$$\mathbf{PQ} = (P_0 + \mathrm{P})(Q_0 + \mathrm{Q}) = P_0 Q_0 + P_0 \mathrm{Q} + Q_0 \mathrm{P} - \mathrm{P}.\mathrm{Q} + \mathrm{P} \times \mathrm{Q} \tag{2.6}$$

biçiminde tanımlanır. Buradaki nokta ve kros çarpımlar, üç boyutlu uzaydaki skaler ve vektörel çarpımlara karşılık gelmektedir. Her kompleks kuaternion için bir eşlenik tanımlamak mümkündür. $\mathbf{Q}$ kompleks kuaternionunun eşleniği $\mathbf{Q}^*$ ile gösterilir ve

$$\mathbf{Q}^* = Q_0 - \mathrm{Q} = Q_0 \mathrm{e}_0 - Q_1 \mathrm{e}_1 - Q_2 \mathrm{e}_2 - Q_3 \mathrm{e}_3 \tag{2.7}$$

şeklinde tanımlanır. Görüldüğü gibi Q' nun eşleniği vektörel kısmın işaretinin değiştirilmesi ile elde edilir. $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ kompleks kuaternion olmak üzere bunların çarpımının eşleniği için;

$$(\mathbf{PQ})^* = \mathbf{Q}^* \mathbf{P}^* \tag{2.8}$$

ifadesi yazılabilir. Kompleks kuaternionlar için kompleks eşlenik de tanımlanabilir. $\mathbf{Q}^c$ ile gösterilen kompleks eşlenik;

$$\mathbf{Q}^c = (q_0 - iq_0')e_0 + (q_1 - iq_1')e_1 + (q_2 - iq_2')e_2 + (q_3 - iq_3')e_3 = Q_0^c e_0 + Q_1^c e_1 + Q_2^c e_2 + Q_3^c e_3 \quad (2.9)$$

ile verilir ve Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 kompleks sayılarının eşleniğinin alınmasıyla elde edilir. Kompleks kuaternionların normu da tanımlıdır. **Q** kompleks kuaternionunun normu N_Q ile gösterilmek üzere;

$$N_Q = \mathbf{QQ}^* = Q_0^2 + Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 \quad (2.10)$$

şeklinde tanımlanır. Q_0, Q_1, Q_2, ve Q_3 kompleks sayılar olduğuna göre, kompleks kuaternionların normu kompleks bir skalerdir. Normu birim olan kompleks kuaterniona birim kompleks kuaternion denir. **P** ve **Q** kompleks kuaternionlarının çarpımının normu, herbirisinin normlarının çarpımına eşittir:

$$N_{PQ} = \mathbf{PQ}(\mathbf{PQ})^* = \mathbf{PQQ}^*\mathbf{P}^* = \mathbf{QQ}^*\mathbf{PP}^* = N_Q N_P = N_P N_Q \quad (2.11)$$

Normu sıfırdan farklı olmak kaydı ile ele alınan Q kompleks kuaternionunun tersi ise

$$\mathbf{Q}^{-1} = \frac{\mathbf{Q}^*}{N_Q} \quad (2.12)$$

şeklinde tanımlanır.

3. RÖLATİVİSTİK ELEKTROMANYETİZMA

Bu bölümde Lorentz dönüşüm denklemleri hem vektörlerden yararlanılarak hem de kompleks kuaternionik dönüşüm denklemlerinden yararlanılarak elde edilecektir. Eylemsiz gözlem çerçeveleri arasındaki göreli dönüşümü ifade eden bu denklemler kolaylıkla elde edilebilir. S gözlem çerçevesine göre pozitif $x-$ekseni yönünde v hızı ile hareket eden S' gözlem çerçevesinde ölçülen konum ve zaman değerlerini birbirine bağlayan ifadeler aşağıdaki gibi özetlenebilir:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \beta(x - vt) \quad (3.1)$$

$$y' = y \quad (3.2)$$

$$z' = z \quad (3.3)$$

$$t' = \frac{t - xv/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \beta(t - \mu x/c) \quad (3.4)$$

Burada $\beta = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ ve $\mu = v/c$' dir. Lorentz dönüşüm denklemleri incelendiğinde uzay ve zaman kavramlarının bağımsız nicelikler olmadığı, aksine birbirleriyle yakından ilişkili olduğu görülmektedir. Diğer bir deyişle klasik Newton mekaniğindeki incelemelerde yer alan mutlak uzay ve mutlak zaman kavramları artık tek başlarına anlam taşımazlar. Bu kavramların yerine birbirleriyle yakın ilişkilerini ifade eden uzay-zaman kavramı kullanılır.

3.1 Lorentz Dönüşümleri ve Kompleks Kuaternionlar

Yukarıda ifade edilen Lorentz dönüşümleri x-ekseni yönündeki iki farklı koordinat sisteminin göreceli hareketine dayanır. Fakat genel anlamda aynı yönde olmayan bir $\vec{v}$ hızından söz edilmelidir. Öte yandan bir $\vec{r}$ konum vektörü, $\vec{v}$ yönündeki bileşeni ile $\vec{v}$' ye dik diğer bir bileşenin toplamı olarak iki parçaya ayrılabilir. $\vec{v}$ yönündeki bileşen,

$$\frac{(\vec{r}.\vec{v})\vec{v}}{v^2} \quad (3.5)$$

ise $\vec{v}$' ye dik diğer bileşen,

$$\vec{r} - \frac{(\vec{r}.\vec{v})\vec{v}}{v^2} \quad (3.6)$$

olacaktır. Bu takdirde $\vec{r}$,

$$\vec{r} = \frac{(\vec{r}.\vec{v})\vec{v}}{v^2} + \left[\vec{r} - \frac{(\vec{r}.\vec{v})\vec{v}}{v^2}\right] \quad (3.7)$$

şeklinde ifade edilmelidir. $\vec{r}$' den $\vec{r}'$' ne tanımlanan bir Lorentz dönüşümünde, sadece $\vec{v}$ yönündeki bileşen dönüşümden etkilenirken $\vec{v}$' ye dik bileşende bir değişim gözlenmeyecektir:

$$\vec{r}' = \left[\vec{r} - \frac{(\vec{r}.\vec{v})\vec{v}}{v^2}\right] + \beta\left[\frac{(\vec{r}.\vec{v})\vec{v}}{v^2} - \vec{v}t\right] \quad (3.8)$$

$$ct' = \beta\left[ct - \frac{(\vec{r}.\vec{v})\vec{v}}{v^2}.\frac{\vec{v}}{c}\right] \quad (3.9)$$

Yukarıdaki denklemler düzenlenerek;

$$\vec{r}' = \vec{r} + [\beta - 1]\frac{(\vec{r}.\vec{v})}{v^2}\vec{v} - \beta\vec{v}\,t \quad (3.10)$$

ve

$$ct' = \beta\left[ct - \frac{(\vec{r}.\vec{v})}{c}\right] \quad (3.11)$$

şeklinde de ifade edilebilir (Kyrala, 1967).

Bütün bu tartışmalardan yola çıkarak elektromagnetik denklemleri Lorentz dönüşümleri altında incelemek mümkündür. Uzay-zamanı tanımlayan,

$$\mathbf{R} = ct + i\mathrm{r} = \tau + i\mathrm{r} \quad (3.12)$$

kompleks kuaternionunu (3.10) ve (3.11)' den yararlanarak,

$$\mathrm{r}' = \mathrm{r} + [\beta - 1]\frac{(\mathrm{r.v})}{v^2}\mathrm{v} - \beta\,\tau\frac{\mathrm{v}}{c} \tag{3.13}$$

ve

$$\tau' = \beta\left[\tau - \frac{(\mathrm{r.v})}{c}\right] \tag{3.14}$$

biçiminde ifade etmek mümkündür. Böylece $\mathbf{R}'$ kompleks kuaternionu ise,

$$\mathbf{R}' = \left[\tau - \frac{(\mathrm{r.v})}{c}\right] + i\left[\mathrm{r} + [\beta - 1]\frac{(\mathrm{r.v})}{v^2}\mathrm{v} - \beta\,\tau\frac{\mathrm{v}}{c}\right] \tag{3.15}$$

şeklinde verilmelidir. v yerine $-\mathrm{v}$ alınarak kompleks kuaternionik differansiyel operatörünün

$$\mathbf{D} = \frac{\partial}{\partial t} + i\,\nabla \tag{3.16}$$

Lorentz dönüşümü altındaki

$$\mathbf{D}' = \frac{\partial}{\partial t'} + i\,\nabla' \tag{3.17}$$

şeklinde olması gereken formu ele alınsın. Operatörün skaler bileşeni,

$$Sc\{\mathbf{D}'\} = \frac{\partial}{\partial t'} = \beta\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{v}.\nabla}{c}\right] \tag{3.18}$$

ve vektörel bileşeni ise,

$$Vec\{\nabla'\} = \nabla + [\beta - 1]\frac{(\nabla.\mathrm{v})}{v^2}\mathrm{v} - \beta\,\mathrm{v}\,t \tag{3.19}$$

halini almalıdır. Öyleyse (3.17) ifadesi, (3.18) ve (3.19) eşitlikleri gereğince,

$$\mathbf{D}' = \beta\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{v}.\nabla}{c}\right] + i\left[\nabla + [\beta - 1]\frac{(\nabla.\mathrm{v})}{v^2}\mathrm{v} - \beta\,\mathrm{v}\,t\right] \tag{3.20}$$

ile tanımlanmalıdır.

$\vec{E}$ elektrik ve $\vec{H}$ manyetik alanlarının Lorentz dönüşümü altında nasıl değiştiğini görmek için elektrik alanı ifade eden,

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\,\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \tag{3.21}$$

eşitliğini bileşenleri cinsinden yazmak daha uygun olacaktır:

$$\begin{aligned}\mathrm{E} &= -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial t}\right)\mathrm{e}_1 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial t}\right)\mathrm{e}_2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial t}\right)\mathrm{e}_3 \\ &= E_x\,\mathrm{e}_1 + E_y\,\mathrm{e}_2 + E_z\,\mathrm{e}_3.\end{aligned} \tag{3.22}$$

Benzer şekilde manyetik alanı için yazılan,

$$\vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{3.23}$$

eşitliği de,

$$\begin{aligned}\mathrm{H} &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\mathrm{e}_1 + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\mathrm{e}_2 + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\mathrm{e}_3 \\ &= H_x\,\mathrm{e}_1 + H_y\,\mathrm{e}_2 + H_z\,\mathrm{e}_3\end{aligned} \tag{3.24}$$

şeklindeki bileşenlerine ayrılabilir. Öte yandan hız vektörü, x-bileşenleri yönünde seçilirse yani,

$$\mathrm{v} = v\,\mathrm{e}_1 \tag{3.25}$$

reel vektör kuaternionuyla tanımlanırsa (3.1) ve (3.4) denklemleri gereğince $\vec{A}$ ve φ' nin Lorentz dönüşümleri,

$$A_x' = \beta(A_x - \mu\varphi) \tag{3.26}$$

$$A_y' = A_y \tag{3.27}$$

$$A_z' = A_z \tag{3.28}$$

$$\varphi' = \beta(\varphi - \mu\,A_x) \tag{3.29}$$

şeklinde ve (3.17) denkleminin bileşenleri ise,

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \beta\left[\frac{\partial}{\partial t} + \mu\frac{\partial}{\partial x}\right] \tag{3.30}$$

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \beta\left[\frac{\partial}{\partial x} + \mu\frac{\partial}{\partial t}\right] \tag{3.31}$$

$$\frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y} \tag{3.32}$$

$$\frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z} \tag{3.33}$$

biçiminde olmalıdır. Bu tanımlardan yola çıkarak (3.22)' de verilen $\mathbf{E}$ alanının Lorentz dönüşümü,

$$\begin{aligned}E_x' &= -\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial x'} + \frac{\partial A_x'}{\partial t'}\right) = -\beta^2\left[\frac{\partial}{\partial x} + \mu\frac{\partial}{\partial x}\right](\varphi - \mu A_x) - \beta^2\left[\frac{\partial}{\partial t} + \mu\frac{\partial}{\partial x}\right](A_x - \mu\varphi) \\ &= -\beta^2(1 - \mu^2)\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial t}\right] = -\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial t}\right] \\ &= E_x\end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned}E_y' &= -\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial y'} + \frac{\partial A_y'}{\partial t'}\right) = -\beta\frac{\partial}{\partial y}[\varphi - \mu A_x] - \beta\left[\frac{\partial}{\partial t} + \mu\frac{\partial}{\partial x}\right]A_y \\ &= -\beta\left[\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial t}\right] - \beta\,\mu\left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right] \\ &= \beta(E_y - \mu H_z)\end{aligned} \tag{3.35}$$

ve

$$\begin{aligned} E'_z &= -\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial z'} + \frac{\partial A'_z}{\partial t'}\right) = -\beta\frac{\partial}{\partial z}\left[\varphi - \mu A_x\right] - \beta\left[\frac{\partial}{\partial t} + \mu\frac{\partial}{\partial x}\right]A_z \\ &= -\beta\left[\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial t}\right] + \beta\mu\left[\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right] \\ &= \beta(E_z + \mu H_y) \end{aligned} \qquad \textbf{(3.36)}$$

şeklinde elde edilir. Benzer şekilde **H** alanı ise Lorentz dönüşümleri altında,

$$H'_x = \left(\frac{\partial A'_z}{\partial y'} - \frac{\partial A'_y}{\partial z'}\right) = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) = H_x \qquad \textbf{(3.37)}$$

$$\begin{aligned} H'_y &= \left(\frac{\partial A'_x}{\partial z'} - \frac{\partial A'_z}{\partial x'}\right) = \beta\frac{\partial}{\partial z}\left(A_x - \mu\varphi\right) - \beta\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mu\frac{\partial}{\partial t}\right)A_z \\ &= \beta\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) - \beta\mu\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial t}\right) \\ &= \beta(H_y + \mu E_z) \end{aligned} \qquad \textbf{(3.38)}$$

ve

$$\begin{aligned} H'_z &= \left(\frac{\partial A'_y}{\partial x'} - \frac{\partial A'_x}{\partial y'}\right) = \beta\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mu\frac{\partial}{\partial t}\right)A_y - \beta\frac{\partial}{\partial y}\left(A_x - \mu\varphi\right) \\ &= \beta\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) + \beta\mu\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial t}\right) \\ &= \beta(H_z - \mu E_y) \end{aligned} \qquad \textbf{(3.39)}$$

ile verilen dönüşümlere tabi tutulacaktır. Böylelikle,

$$\mathrm{E}' = E_x\mathrm{e}_1 + \beta(E_y - \mu H_z)\mathrm{e}_2 + \beta(E_z + \mu H_y)\mathrm{e}_3 \qquad \textbf{(3.40)}$$

ve

$$\mathrm{H}' = H_x\mathrm{e}_1 + \beta(H_y + \mu E_z)\mathrm{e}_2 + \beta(H_z - \mu E_y)\mathrm{e}_3 \qquad \textbf{(3.41)}$$

ifadeleri elde edilir. v hızının x-eksenine paralel olmadığı durumda ise bu denklemler,

$$\mathrm{E}' = \beta\mathrm{E} + (1-\beta)\frac{(\mathrm{E.v})}{v^2}\mathrm{v} + \frac{\beta(\mathrm{v}\times\mathrm{H})}{c} \qquad \textbf{(3.42)}$$

ve

$$\mathrm{H}' = \beta\mathrm{H} + (1-\beta)\frac{(\mathrm{H.v})}{v^2}\mathrm{v} - \frac{\beta(\mathrm{v}\times\mathrm{E})}{c} \qquad \textbf{(3.43)}$$

biçiminde ifade edilir.

3.2 Elektrik ve Manyetik Alanların Kompleks Kuaternionik Dönüşümleri

Klasik Lorentz dönüşüm formülleriyle elde edilen elektrik ve magnetik alana ilişkin denklemleri kompleks kuaternionik dönüşüm formülleri ile de elde etmek mümkündür. $\vec{H}$ manyetik alanı ile $\vec{E}$ elektrik alanını birleştiren,

$$\mathbf{M} = \mathrm{H} + i\mathrm{E} = [H_1\mathrm{e}_1 + H_2\mathrm{e}_2 + H_3\mathrm{e}_3] + i[E_1\mathrm{e}_1 + E_2\mathrm{e}_2 + E_3\mathrm{e}_3] \qquad \textbf{(3.44)}$$

kompleks kuaternionu ele alınsın. Tanımlanacak dönüşüm sonucunda elde edilecek kompleks kuaternionun da,

$$\mathbf{M}' = \mathrm{H}' + i\mathrm{E}' \qquad \textbf{(3.45)}$$

formunda olması beklenir. Öte yandan diğer bir **Q** kompleks kuaternionu,

$$\mathbf{Q} = q_0 + i\,\mathrm{q} \qquad \textbf{(3.46)}$$

şeklinde tanımlanmak üzere kompleks kuaternionik dönüşüm bağıntısı,

$$\mathbf{M}' = \mathbf{QMQ}^* \qquad \textbf{(3.47)}$$

şeklinde tanımlanır (Ward, 1997). Bu ifade açılarak,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}' &= [q_0 + i\,\mathrm{q}][\mathrm{H} + i\mathrm{E}][q_0 - i\,\mathrm{q}] \\ &= [q_0 + i\,\mathrm{q}][q_0\mathrm{H} + i\mathrm{H.q} - i\mathrm{H}\times\mathrm{q} + iq_0\mathrm{E} - \mathrm{E.q} + \mathrm{E}\times\mathrm{q}] \\ &= \left[q_0^2\mathrm{H} + 2q_0(\mathrm{E}\times\mathrm{q}) - \mathrm{q.(H}\times\mathrm{q}) + \mathrm{q}\times(\mathrm{H}\times\mathrm{q}) - \mathrm{q}(\mathrm{H.q})\right] \\ &\quad + i\left[q_0^2\mathrm{E} + 2q_0(\mathrm{q}\times\mathrm{H}) - \mathrm{q}(\mathrm{E.q}) - \mathrm{q}(\mathrm{E}\times\mathrm{q}) + \mathrm{q}\times(\mathrm{E}\times\mathrm{q})\right] \end{aligned} \qquad \textbf{(3.48)}$$

elde edilir. Öte yandan,

$$\mathrm{a}\times(\mathrm{b}\times\mathrm{c}) = \mathrm{b}(\mathrm{a.c}) - \mathrm{c}(\mathrm{a.b}) \qquad \textbf{(3.49)}$$

vektör eşitliğinden yararlanarak $\mathrm{q}\times(\mathrm{H}\times\mathrm{q})$ ifadesi için,

$$\mathrm{q}\times(\mathrm{H}\times\mathrm{q}) = \mathrm{H}(\mathrm{q.q}) - \mathrm{q}(\mathrm{q.H}) \qquad \textbf{(3.50)}$$

ve $\mathrm{q}\times(\mathrm{E}\times\mathrm{q})$ ifadesi için ise,

$$\mathrm{q}\times(\mathrm{E}\times\mathrm{q}) = \mathrm{E}(\mathrm{q.q}) - \mathrm{q}(\mathrm{q.E}) \qquad \textbf{(3.51)}$$

yazılabilir. Böylece (3.48) denklemi,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}' &= \left[q_0^2\mathrm{H} + 2q_0(\mathrm{E}\times\mathrm{q}) - \mathrm{q.(H}\times\mathrm{q}) + \mathrm{H}(\mathrm{q.q}) - \mathrm{q}(\mathrm{q.H}) - \mathrm{q}(\mathrm{H.q})\right] \\ &\quad + i\left[q_0^2\mathrm{E} + 2q_0(\mathrm{q}\times\mathrm{H}) - \mathrm{q}(\mathrm{E.q}) - \mathrm{q}(\mathrm{E}\times\mathrm{q}) + \mathrm{E}(\mathrm{q.q}) - \mathrm{q}(\mathrm{q.E})\right] \end{aligned} \qquad \textbf{(3.52)}$$

halini alacaktır. Öte yandan,

$$\mathrm{q}\perp(\mathrm{H}\times\mathrm{q}) \qquad \textbf{(3.53)}$$

olduğuna göre yukarıdaki denklemde yer alan $\mathrm{q.(H}\times\mathrm{q})$ terimleri sıfırdır. (3.52) denklemi tekrar düzenlenirse,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}' &= [q_0^2\mathrm{H} + 2q_0(\mathrm{E}\times\mathrm{q}) - 2\mathrm{q}(\mathrm{H.q}) + \mathrm{H}(\mathrm{q.q})] \\ &\quad + i[q_0^2\mathrm{E} + 2q_0(\mathrm{q}\times\mathrm{H}) - 2\mathrm{q}(\mathrm{E.H}) + \mathrm{E}(\mathrm{q.q})] \end{aligned} \qquad \textbf{(3.54)}$$

elde edilir. (3.45)' de verilen tanım gereğince,

$$\mathrm{H}' = [q_0^2 + \mathrm{q.q}]\mathrm{H} + 2q_0(\mathrm{E}\times\mathrm{q}) - 2\mathrm{q}(\mathrm{H.q}) \qquad \textbf{(3.55)}$$

ve

$$\mathrm{E}' = [q_0^2 + \mathrm{q.q}]\mathrm{E} + 2q_0(\mathrm{q}\times\mathrm{H}) - 2\mathrm{q}(\mathrm{E.H}) \qquad \textbf{(3.56)}$$

olmalıdır. Bununla birlikte

$$\varsigma = i\frac{\alpha}{2} \tag{3.57}$$

şeklinde tanımlanmak üzere $\mathbf{Q} = q_0 + i\mathrm{q}$ için,

$$\mathbf{Q} = q_0 + i\mathrm{q} = \cos\varsigma - \hat{\mathrm{q}}\sin\varsigma = \cos\left(i\frac{\alpha}{2}\right) - \hat{\mathrm{q}}\sin\left(i\frac{\alpha}{2}\right) = \cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right) - i\hat{\mathrm{q}}\sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right) \tag{3.58}$$

ifadesi verilsin. Burada,

$$q_0 = \cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right) \tag{3.59}$$

ve

$$\mathrm{q} = -\hat{\mathrm{q}}\sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right) \tag{3.60}$$

eşlemesi yapılmıştır.

$$\cosh\alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \tag{3.61}$$

$$\sinh\alpha = -\beta\, v \tag{3.62}$$

ve

$$\hat{\mathrm{q}} = \frac{\mathrm{v}}{v} \tag{3.63}$$

tanımları yapıldığı takdirde (3.55)' de verilen H' ifadesi,

$$\begin{aligned}\mathrm{H}' = &\left[\cosh^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sinh^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]\mathrm{H} - 2\cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(\frac{\mathrm{E}\times\mathrm{v}}{v}\right)\sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ &- 2\frac{\mathrm{v}}{v}\sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(\frac{\mathrm{H.v}}{v}\right)\sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right)\end{aligned} \tag{3.64}$$

halini alacaktır. Trigonometrik denklemlerden,

$$\cosh\alpha = \cosh^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sinh^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \tag{3.65}$$

ve

$$\sinh\alpha = 2\cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right) \tag{3.66}$$

bilindiğine göre H' denklemi,

$$\mathrm{H}' = \cosh\alpha\mathrm{H} - \sinh\alpha\left(\frac{\mathrm{E}\times\mathrm{v}}{v}\right) - 2\sinh^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\mathrm{v(H.v)}}{v} \tag{3.67}$$

halini alır. Yine trigonometrik denklemlerden yararlanarak,

$$\sinh^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}(\cosh\alpha - 1) = \frac{1}{2}(\beta - 1) \tag{3.68}$$

ifadesi yazılabilir. Sonuç olarak H' için,

$$\mathrm{H}' = \beta\mathrm{H} + \beta(\mathrm{E}\times\mathrm{v}) - (\beta-1)\frac{\mathrm{v(H.v)}}{v^2} = \beta\left[\mathrm{H} - (\mathrm{v}\times\mathrm{E}) - \frac{\mathrm{v(H.v)}}{v^2}\right] + \frac{\mathrm{v(H.v)}}{v^2} \tag{3.69}$$

denklemi elde edilir. Benzer şekilde E' için,

$$\begin{aligned}\mathrm{E}' &= \left[\cosh^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sinh^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]\mathrm{E} - 2\sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(\frac{\mathrm{H}\times\mathrm{v}}{v}\right) \\ &\quad - 2\frac{\mathrm{v}}{v}\sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(\frac{\mathrm{E.v}}{v}\right)\sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ &= \cosh\alpha\,\mathrm{E} + \sinh\alpha\left(\frac{\mathrm{H}\times\mathrm{v}}{v}\right) - 2\sinh^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\mathrm{v(E.v)}}{v}\end{aligned} \tag{3.70}$$

eşitliği elde edilir. Bu ifadede (3.61) ve (3.62) tanımları kullanılarak,

$$\mathrm{E}' = \beta\mathrm{E} - \beta(\mathrm{H}\times\mathrm{v}) - (\beta-1)\frac{\mathrm{v(E.v)}}{v^2} = \beta\left[\mathrm{E} - (\mathrm{v}\times\mathrm{H}) - \frac{\mathrm{v(E.v)}}{v^2}\right] + \frac{\mathrm{v(E.v)}}{v^2} \tag{3.71}$$

bulunur (Ward, 1997). Görüldüğü gibi H' ve E' için elde edilen bu denklemler, alışılagelen Lorentz dönüşüm denklemleriyle elde edilen (3.42) ve (3.43) ifadeleri ile aynıdır.

4. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Kompleks kuaternionlar rölativistik denklemlerin ifade edilmesinde önemli derecede rol oynamaktadırlar. Kompleks kuaternionların iki reel kuaternionun kompleks bir kombinasyonu ile elde edildiği daha önce belirtilmişti. Bu nedenle sahip oldukları "i" kompleks sayısı fiziksel niceliklerin büyük bir açıklıkla ifade edilmesi açısından büyük bir önem teşkil eder. Zira dört vektörler gibi dört boyutlu uzayı temsil etmek için kullanılan yöntemlerin aksine, kompleks kuaternionların sahip oldukları "i" sayısı farklı fiziksel doğaya sahip niceliklerin kolaylıkla birbirinden ayırt edilebilmesine olanak sağlar. Örneğin; (3.12) ifadesinde görüldüğü gibi uzay ve zaman koordinatları, (3.44) tanımında olduğu gibi elektrik ve manyetik alan bileşenleri kolaylıkla ayırt edilebilir. Böylece (3.47) denklemine benzer bir dönüşüm sonrasında elde edilen fiziksel sonuçlar birbirleriyle kolaylıkla ilişkilendirilebilir. (3.44) eşitliğinde $\mathbf{M}$ kompleks kuaternionunun reel bileşeni ile manyetik alan, kompleks bileşenle ise elektrik alan ifade edilmiştir. Bu nedenle rölativistik dönüşüm sonucunda elde edilen (3.54) denkleminde manyetik ve elektrik alan bileşenlerini ayırt etmek artık zor değildir. Bu ifadede (3.44) ile verilen tanım gereğince $\mathbf{M}'$ kompleks kuaternionunun reel bileşeni H' manyetik alanına, "i" sayısının bulunduğu kompleks bileşen ise E' elektrik alanına karşılık gelmelidir. Bu gösterim, yukarıda belirtildiği gibi elde edilen sonuçların kolaylıkla birbirleriyle ilişkilendirilebilmesine imkan da sağlamaktadır.

Öte yandan diğer yöntemlerin aksine kompleks kuaternionlar fiziksel niceliklerin sekiz boyuta kadar ifadesine imkan sağlamaktadır. (3.44) tanımında görüldüğü üzere altı bileşenli kompleks kuaternion, elektrik ve manyetik alanların birlikte ifade edilmesine ve yine birlikte dönüşüme tabi tutulmasına olanak tanımaktadır. Zira, (3.22) ve (3.24) denklemleri ile ifade edilen elektrik ve manyetik alanların Lorentz dönüşümünü aynı anda gerçekleştirmek klasik yöntemle mümkün değildir. Klasik yöntemde bu alanlara kaynaklık eden $\vec{A}$ ve φ potansiyelleri ile $\vec{\nabla}$ operatörünün Lorentz dönüşümleri altındaki yeni formlarını ayrı ayrı elde etmek gerekirken kompleks kuaternionik dönüşüm bağıntısının kullanıldığı yöntemde elektrik ve manyetik alanlar birlikte ifade edilebilmekte, (3.47) dönüşüm bağıntısı ile rölativistik biçimleri de kolayca elde edilebilmektedir.

Kompleks kuaternionların hem skaler hem de vektörel bileşenlerden oluşması, gerektiğinde skalerlerin özelliklerinden gerektiğinde de vektörlerin özelliklerinden yararlanmayı olanaklı hale getirir. Nitekim, (3.5)-(3.11) arasındaki vektörel özelliklerden yararlanılarak **R** kompleks kuaternionunun klasik Lorentz dönüşümleri altındaki (3.15) ile verilen yeni ifadesi elde edilmiştir.

Sonuç olarak; kompleks kuaternionların rölativistik elektromanyetizmanın incelenmesinde diğer yöntemlere göre daha kullanışlı, daha iyi ifade edici, daha kısa ve basit formülasyona imkan verdiği görülmektedir.

KAYNAKÇA

Abonyi, I., et al. (1991). A Quaternion Representation of the Lorentz Group for Classical Physical Applications. *Journal of Physics A: Mathematical and General* 24,3245-3254.

Colombo, F., et al. (1998). Regular Functions of Biquaternionic Variables and Maxwell' s Equations. *Journal of Geometry and Physics* 26, 183-201.

Dahm, R. (1998). Complex Quaternions in Spacetime Symmetry and Relativistic Spin-Flavor Supermultiplets. *Physics of Atomic Nuclei* 61(11), 1885-1891.

De Leo, S. (1996). Quaternions and Special Relativity. *Journal of Mathematical Physics* 37(6), 2955-2968.

De Leo, S. (2001). Quaternionic Lorentz Group and Dirac Equation. *Foundations of Physics Letters* 14(1), 37-50.

Gsponer, A. and Hurni, J. P. (2001). Comment on Formulating and Generalizing Dirac's, Proca's, and Maxwell's Equations with Biquaternions or Clifford Numbers. *Foundations of Physics Letters* 14(1), 77-85.

Gürsey, F. and Tze, C. H. (1996) *On the role of Division, Jordan and Related Algebras in Particle Physics.*World Scientific, Singapore.

Imaeda, K. (1976). A New Formulation of Classical Electrodynamics, *Nuovo Cimento* 32B(1), 138-162.

Jantzen, R. (1982). Generalized Quaternions and Spacetime Symmetries. *Journal of Mathematical Physics* 23(10), 1741-1746.

Kassandrov, V. V. (1995). Biquaternion Electrodynamics and Weyl-Cartan Geometry of Space-Time. *Garvitation and Cosmology* 1(3), 216-222.

Kyrala, A. (1967). *Theoretical Physics: Applications of Vectors, Matrices, Tensors and Quaternions*. W. B. Saunders Company, Philadelphia, London.

Lambek, J. (1995). If Hamilton Had Prevailed: Quaternions in Physics. *The Mathematical Intelligencer* 17(4), 7-15.

Negi, O. P. S., et al. (1998). Revisting Quaternion Formulation and Electromagnetism. *Nuovo Cimento* 113B(12), 1449-1467.

Manogue, C., Schray, J. (1993). Finite Lorentz Transformations, Automorphisms and Divison Algebras. *Journal of Mathematical Physics* 34(8) 3746-3767.

Rao S. K. N. (1983). On the Quaternion Representation of the Proper Lorentz Group SO(3,1). *Journal of Mathematical Physics* 24(8), 1945-1954.

Silberstein, L. (1912). Quaternionic Form of Relativity. *Philosophical Magazine* 23, 790-809.

Sobczyk, G. (1981). Spacetime Vector Analysis, *Physics Letters* 84A(2), 45-48.

Sweeter, D. and Dandri, G. (1999). Maxwell's Vision: Electromagnetism with Hamilton's Quaternions. *Second Meeting on Quaternionic Structures in Mathematics and Physics*, September 6-10, Roma, Italy..

Ward, J. P. (1997). *Quaternions and Cayley Numbers.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Süleyman Demir, 1971 yılında Antalya/Manavgat' ta doğdu. Hacettepe Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Fizik Mühendisliği Bölümü'nden 1995 yılında mezun oldu. 1996 yılında Anadolu Üniversitesi Fen Fakültesi Fizik Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak akademik hayatına başlayan Demir, 1999 yılında yüksek lisans, 2003 yılında ise doktora derecesini aldı. Halen aynı bölümde öğretim üyesi olarak görevine devam etmektedir.