ANADOLU ÜNİVERSİTESİ BİLİM VE TEKNOLOJİ DERGİSİ
ANADOLU UNIVERSITY JOURNAL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
Cilt/Vol.: 4 - Sayı/No: 2 : 173-180 (2003)

ARAŞTIRMA MAKALESİ/**RESEARCH ARTICLE**

SINIR ŞARTLARINDA ÖZDEĞER PARAMETRE BULUNDURAN SÜREKSİZ SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÖZDEĞERLERİ

Nihat ALTINIŞIK[1], O.Sh. MUKHTAROV[2]

ÖZ

Bu çalışmada özdeğer parametre bulunduran sınır koşulları ve süreksizlik noktasındaki geçiş koşulları ile verilen süreksiz reguler Sturm-Liouville problemi göz önüne alındı. Bu çalışmanın sonuçları (Fulton, 1977) çalışmasındaki uygun sürekli problemler için bulunmuş sonuçlardan esinlenerek elde edilmiştir. Bu tipten süreksiz problemleri incelemek için biz (Fulton, 1977), (Titchmarsh, 1939) ve (Walter, 1973) Çalışmalarında kullanılan tekniklere uygun teknikler geliştirdikten sonra bu tekniklerden yararlanmakla özdeğerler için asimptotik yaklaşım formülleri elde ettik.

Anahtar Kelimeler: Sturm-Liouville problemleri, geçiş koşulları, özdeğerlerin asimptotiği, süreksiz sınır değer problemleri.

A STATISTICAL ANALYSIS OF THE SOLVENCY OF LIFE INSURANCE COMPANIES

ABSTRACT

In this study discontinuous regular Sturm-Liouville problems with eigenvalue parameter at the boundary conditions and with transmission conditions at the point of discontinuity are considered. The results of this paper are stimulated by the results of (Fulton, 1977) for the corresponding continuous problems. For investigation of such discontinuous problems, we modify some techniques of (Fulton, 1977), (Titchmarsh, 1939) and (Walter, 1973) then by using these techniques we obtain asyptotic approximate formulas of eigenvalues.

Key Word: Sturm_liouville problems, transmission conditions, the asymptotic of eigenvalues, discontinuous boundary value problems.

1.GİRİŞ

Bu çalışmada,

$$\tau u := -u'' + q(x)u = \lambda u, \quad x \in [-1,0) \cup (0,1] \quad \textbf{(1.1)}$$

diferansiyel denkleminden,

$$L_1 u := \lambda(\beta_1' u(-1) - \beta_2' u'(-1)) + \beta_1 u(-1) - \beta_2 u'(-1) = 0 \quad \textbf{(1.2)}$$

$$L_2 u := \lambda(\beta_3' u(1) - \beta_4' u'(1)) + \beta_3 u(1) - \beta_4 u'(1) = 0 \quad \textbf{(1.3)}$$

sınır şartlarından ve

$$L_3 u := u(0-) - \delta u(0+) = 0 \quad \textbf{(1.4)}$$

$$L_4 u := u'(0-) - \delta u'(0+) = 0 \quad \textbf{(1.5)}$$

geçiş şartlarından oluşan sınır değer problemi incelenmiştir. Burada λ kompleks özdeğer parametre, $q(x)$, [-1,0) ve (0,1] de reel değerli ve $q(0\pm) = \lim_{x \to 0\pm} q(x)$ sonlu limitleri olan fonksiyon, $\delta \neq 0, \beta_i, \beta_i' \ (i = 1, 2, 3, 4)$ reel sayılar olmak üze

$$\rho_j := (-1)^j (\beta_{2j-1}' \beta_{2j} - \beta_{2j}' \beta_{2j-1}) > 0, j = 1, 2 \quad \textbf{(1.6)}$$

olduğu kabul edilmiştir.

1 Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Samsun.
2 Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Tokat.

Geliş: 02 Ocak 2002; **Düzeltme:** 25 Ekim 2002; **Kabul:** 26 Haziran 2003.

Sınır şartlarında özdeğer parametre olan sınır değer probleminin spektral özellikleri bir çok makale ve kitapta ((Birkhoff, 1908), (Fulton, 1977), (Hinton, 1979), (Kerimov ve Allakhverdiev, 1993), (Schneider, 1974), (Shkalikov, 1983), (Zayed ve İbrahim, 1992) v.s) araştırılmıştır. Bu tip problemlerin çok çeşitli fiziksel uygulamaları vardır (bak örneğin Fulton, 1977).

Genel olarak böyle problemler kütle ve ısı iletimi teorisinde, özellikle de farklı fiziksel özelliklere sahip olan cisimler arasındaki geçiş sürelerinde ortaya çıkmaktadır.

2. SİMETRİK LİNEER OPERATÖR

Kolayca gösterebiliriz ki, $H_{\delta,\,p} = L_2\,[-1,1] \oplus C \oplus C$

lineer uzayı; $F = \begin{pmatrix} f(x) \\ F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} g(x) \\ G_1 \\ G_2 \end{pmatrix} \in H_{\delta,\,p}$ olmak üzere

$$< F, G >= \int_{-1}^{0} f(x)\overline{g(x)}dx + \delta^2$$

$$\int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx + \frac{1}{\rho_1}F_1\overline{G_1} + \frac{\delta^2}{\rho_2}F_2\overline{G_2} \quad (2.1)$$

iç çarpımına göre bir Hilbert uzayı tanımlar. Öyle ki bu Hilbert uzayı (1.1)-(1.5) sınır değer problemine uygun Hilbert uzayıdır. İşlemlerin kolaylığı için aşağıdaki gösterimleri kullanalım.

$$R_1(u) := \beta_1 u(-1) - \beta_2 u'(-1)),$$

$$R_1'(u) := \beta_1' u(-1) - \beta_2' u'(-1) \quad (2.2)$$

$$R_2(u) := \beta_3 u(1) - \beta_4 u'(1)),$$

$$R_2'(u) := \beta_3' u(1) - \beta_4' u'(1)) \quad (2.3)$$

Diğer taraftan $[-1,0) \cup (0,1]$ aralığında tanımlı ve $f(0\pm) = lim_{x\to 0\pm} f(x)$ sonlu limitlerine sahip olan her $f(x)$ fonksiyonu için $I_1 = [-1,0\,]$ ve $I_2 = [0,1]$ aralıklarında sırasıyla tanımlı olan,

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [-1,0) \\ f(0-), & x = 0 \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (0,1] \\ f(0+), & x = 0 \end{cases}$$

fonksiyonlarını göstereceğiz.

Differansiyellenebilir $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının vronskiyenini ise $W(f,g;x) = f(x)g'(x)-f'(x)g(x)$ olarak alırsak, (2.2) ve (2.3) gereği

$$R_1(f)R_1'(g) - R_1'(f)R_1(g) = -\rho_1 W(f,g;-1) \quad (2.4)$$

$$R_2(f)R_2'(g) - R_2'(f)R_2(g) = \rho_2 W(f,g;1) \quad (2.5)$$

eşitliklerini elde ederiz. Burada p_1 ve p_2 (1.6) da tanımladığımız değerlerdir. Bunlara göre verilmiş (1.1)-(1.5) sınır değer problemine uygun A: $H_{\delta,\rho} \to H_{\delta,\rho}$ lineer operatörünü

$$D(A) = \{ \begin{pmatrix} f(x) \\ R_1'(f) \\ R_2'(f) \end{pmatrix} \in H_{\delta,\rho} | f_j(x) \text{ ve } f_j'(x)$$

fonksiyonları I_j aralığında mutlak süreklidirler.

$$\tau f \in L_2[-1,1] \text{ve} L_3(f) = 0, L_4(f) = 0\} \quad (2.6)$$

$$AF = \begin{pmatrix} \tau f \\ -R_1(f) \\ -R_2(f) \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu şekilde tanımladığımız A operatörünün özdeğerleri ile (1.1)-(1.5) sınır değer probleminin özdeğerlerinin aynı olduğu açıktır

Teorem 2.1 *A lineer operatörü simetriktir.*

İspat 1: *Her $F, G \in D(A)$ için (2.1) gereği*

$$< AF, G >= \int_{-1}^{0} \tau f\overline{g}dx + \delta^2$$

$$\int_0^1 \tau f\overline{g}dx - \frac{1}{\rho_1}R_1(f)\overline{R_1'(g)} - \frac{\delta^2}{\rho_2}R_2(f)\overline{R_2'(g)}$$

olur. Kısmi integrasyonu üst üste iki defa uygular ve (2.3) ve (2.4) bağıntılarını göz önünde bulundurursak,

$$< AF, G > - < F, AG >$$

$$= W(f,\overline{g};0-) - \delta^2 W(f,\overline{g};0+) \quad (2.8)$$

eşitliğini elde ederiz. $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının (2.6) gereği (1.4) ve (1.5) geçiş şartlarını sağladığını kullanırsak, (2.8) eşitliğinin sağ tarafının sıfıra eşit olduğu görülür.

3. ÖZDEĞER VE ÖZFONKSİYONLAR

Teorem 2.1 den aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 3.1 *(1.1)-(1.5) probleminin bütün özdeğerleri reeldir. (Özfonksiyonlar ise reel değerli olarak kabul edebiliriz)*

Sonuç 3.2 *λ_1 ve λ_2 (1.1)-(1.5) probleminin iki farklı özdeğeri olsun. Bu özdeğerlere karşılık gelen ve özfonksiyonları için aşağıdaki eşitlik sağlanır.*

$$\int_{-1}^{0} u_1(x)u_2(x)dx + \delta^2 \int_0^1 u_1(x)u_2(x)dx$$

$$= -\frac{1}{\rho_1}R_1'(u_1)R_1'(u_2) - \frac{\delta^2}{\rho_2}R_2'(u_1)R_2'(u_2)$$

İspat 2: *λ_1 ve λ_2 ve özdeğerlerine karşılık gelen $u_1(x)$ ve $u_2(x)$ özfonksiyonları için*, $U_1 = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ R_1'(u_1) \\ R_2'(u_1) \end{pmatrix}$ $U_2 = \begin{pmatrix} u_2(x) \\ R_1'(u_2) \\ R_2'(u_2) \end{pmatrix} \in D(A)$ *dır.*

Dolayısıyla U_1 ve U_2 nin ortogonalliğinden ispat açıktır.

(Titchmarsh, 1939) deki teorem1.5 in ispatındaki mantığı kullanarak aşağıdaki lemmayı ispat edebiliriz.

Lemma 3.1 *Reel değerli g(x) fonksiyonu [a,b] de sürekli $f(\lambda)$, $g(\lambda)$ ise verilen iki tam fonksiyon olsun. O zaman her $\lambda \in C$ için $-u'' + q(x)\,u = \lambda u$ denkleminin $u(a) = f(\lambda)$, $u'(a) = g(\lambda)$, (veya $u(b) = f(\lambda)$, $u'(b) = g(\lambda)$) şartlarını sağlayan bir tek $u = u(x,\lambda)$ çözümü vardır, öyle ki her bir $x \in [a,b]$ için $u = u(x,\lambda)$ fonksiyonu λ ya göre tam fonksiyondur.*

Buna göre $\phi_{1\lambda}(x) := \phi_1(x,\lambda)$ ile (1.1) denkleminin [-1,0] aralığında

$$u(-1) = \lambda\beta_2' + \beta_2, \quad u'(-1) = \lambda\beta_1' + \beta_1 \tag{3.1}$$

şartlarını sağlayan çözümünü, $\phi_{2\lambda}(x) := \phi_2(x,\lambda)$ ile, (1.1) denkleminin $x \in [0,1]$ de

$$u(0) = \delta^{-1}\phi_1(0,\lambda), \quad u'(0) = \delta^{-1}\phi_1'(0,\lambda) \tag{3.2}$$

şartlarını sağlayan çözümünü gösterelim. Böylece $\phi_\lambda(x) := \phi(x,\lambda)$ fonksiyonu

$$\phi_\lambda(x) = \begin{cases} \phi_{1\lambda}(x), & x \in [-1,0) \\ \phi_{2\lambda}(x), & x \in (0,1] \end{cases}$$

olmak üzere (1.1) denkleminin $[-1,0] \cup (0,1]$ de (1.2) başlangıç şartı ile (1.4) ve (1.5) geçiş şartlarını da sağlayan çözümü olur.

Benzer şekilde (1.1) denkleminin [0,1] $\chi_{2\lambda}(x) := \chi_2(x,\lambda)$

$$u(1) = \lambda\beta_4' + \beta_4, \quad u'(1) = \lambda\beta_3' + \beta_3 \tag{3.3}$$

şartlarını sağlayan çözümünü, bu çözüme bağlı olarak [-1,0] $\chi_{1\lambda} := \chi_1(x,\lambda)$ ile (1.1) denkleminin

$$u(0) = \delta^{-1}\chi_2(0,\lambda), \quad u'(0) = \delta^{-1}\chi_2'(0,\lambda) \tag{3.4}$$

şartlarını sağlayan çözümünü gösterelim. Yine $\chi_\lambda(x) := \chi(x,\lambda)$ fonksiyonu,

$$\chi_\lambda(x) = \begin{cases} \chi_{1\lambda}(x), & x \in [-1,0) \\ \chi_{2\lambda}(x), & x \in (0,1] \end{cases}$$

olmak üzere (1.1) denkleminin $[-1,0) \cup (0,1]$ de (1.3) başlangıç şartı ile birlikte (1.4) ve (1.5) geçiş şartını da sağlayan çözümü olur.

Diğer taraftan $x \in I_j$ ($j = 1, 2$) için $\phi_{j\lambda}(x)$ ve $\chi_{j\lambda}(x)$ fonksiyonlarının vronskiyeni x değişkeninden bağımsız olduğu için

$$w_j(\lambda) := W(\phi_{j\lambda}, \chi_{j\lambda}; x) \tag{3.5}$$

şeklinde gösterebiliriz.

Lemma 3.2 *Her bir $\lambda \in C$ için $w_1(\lambda) = \delta^2 w_2(\lambda)$ dir.*

İspat 3 *(3.2) ve (3.4) gereği ispat açıktır.*

Buna göre $w(\lambda)$ karakteristik fonksiyonunu

$$w(\lambda) := w_1(\lambda) = \delta^2 w_2(\lambda) \tag{3.6}$$

şeklinde gösterebiliriz.

Teorem 3.1 *Verilmiş olan (1.1)- (1.5) probleminin özdeğerleri ancak $w(\lambda)$ ve ancak fonksiyonunun sıfır yerlerinden ibarettir.*

İspat 4 *olsun. Bu durumda $W(\phi_{j\lambda_0}, \chi_{j\lambda_0}; x)$ fonksiyonu sırasıyla [-1,0) ve (0,1] de sıfıra eşit olduğundan*

$$\chi_{j\lambda_0}(x) = k_j\phi_{j\lambda_0}(x), \quad x \in I_j \tag{3.7}$$

eşitliğini sağlayan $k_j \neq 0$sayısı vardır. Buna göre (1.3) şartını sağlayan $\chi_{\lambda 0}(x)$ fonksiyonu (1.2) şartını da sağlayacağından $\chi_{\lambda 0}(x)$, (1.1)-(1.5) λ_0 probleminin özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonu olur.

Şimdi kabul edelim ki $u_0(x)$, λ_0 özdeğerine karşılık gelen özfonksiyon olsun, ancak $w(\lambda_0) \neq 0$ olsun. O zaman $\phi_{1\lambda 0}, \chi_{1\lambda 0}$, ve $\phi_{2\lambda 0}, \chi_{1\lambda 0}$ fonksiyonları sırasıyla [-1,0) ve (0,1] de lineer bağımsızdırlar. Buna göre c_1, c_2, c_3, c_4, en az biri sıfır olmayan sabitler olmak üzere

$$u_0(x) = \begin{cases} c_1\phi_{1\lambda_0}(x) + c_2\chi_{1\lambda_0}(x), & x \in [-1,0) \\ c_3\phi_{2\lambda_0}(x) + c_4\chi_{2\lambda_0}(x), & x \in (0,1] \end{cases}$$

formunda yazılabilir. Diğer taraftan $u_o(x)$ özfonksiyon olduğundan

$$L_i(u_0(x)) = 0, \quad (i = 1,2,3,4) \tag{3.8}$$

eşitlikleri sağlanır. (3.8) eşitliklerine c_1, c_2, c_3, c_4, değişkenlerine göre homojen lineer denklem sistemi olarak bakacak olursak (3.2), (3.4) ve (3.5) gereği

$$\begin{vmatrix} 0 & w_1(\lambda_0) & 0 & 0 \\ \phi_{1\lambda_0}(0) & \chi_{1\lambda_0}(0) & -\delta\phi_{2\lambda_0}(0) & -\delta\chi_{2\lambda_0}(0) \\ \phi_{1\lambda_0}'(0) & \chi_{1\lambda_0}'(0) & -\delta\phi_{2\lambda_0}'(0) & -\delta\chi_{2\lambda_0}'(0) \\ 0 & 0 & w_2(\lambda_0) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\delta^2 w_1(\lambda_0) w_2{}^2(\lambda_0) \neq 0$$

elde edilir . Bu ise bize (3.8) denklem sisteminin yalnız c_1, c_2, c_3, c_4, aşikar çözümünün olduğunu verir. Bu çelişki ispatı tamamlar.

Lemma 3.3 *Eğer $\lambda=\lambda_0$ bir özdeğer ise $\phi(x,\lambda_0)$ ve $\chi(x,\lambda_0)$ lineer bağımlıdır.*

İspat 5: *$w_j(\lambda_0)=0$ olduğundan (3.7) eşitliğini sağlayan $k_1 \neq 0$ ve $k_2 \neq 0$ sayıları vardır. Göstereceğiz ki $k_1 = k_2$ dir. Kabul edelim ki $k_1 \neq k_2$ olsun. $\phi_{j\lambda 0}(x)$, $\chi_{j\lambda 0}(x)$ çözüm fonksiyonları için (3.7) eşitliğini kullanırsak, $L_3(\chi_{\lambda 0}) = \delta(k_1-k_2)\,\phi_{2\lambda 0}(0) = 0$ olur. $\delta(k_1-k_2) \neq 0$ olduğundan*

$$\phi_{2\lambda_0}(0) = 0 \tag{3.9}$$

elde edilir. Benzer düşünce ile $L_4(\chi_{\lambda 0}) = 0$ eşitliğinden

$$\phi'_{2\lambda_0}(0) = 0 \tag{3.10}$$

elde edilir. Buna göre (1.1) denkleminin [0,1] de (3.9) ve (3.10) başlangıç şartlarını sağlayan $\phi_{2\lambda 0}(x)$ çözümü $\phi_{2\lambda 0}(x) = 0$ olur. Benzer yolla $L_3(\chi_{\lambda 0}) = 0$ ve $L_4(\chi_{\lambda 0}) = 0$ eşitliklerinden elde edilen (1.1) denkleminin [-1,0] da $\phi_{1\lambda 0}(0) = \phi'_{1\lambda 0}(0) = 0$ başlangıç şartlarını sağlayan $\phi_{1\lambda 0}(x)$çözümü $\phi_{1\lambda 0}(x) = 0$ çözümüdür. Böylece (1.1) denkleminin $[-1,0) \cup (0,1]$ deki çözümü $\phi_{\lambda 0}(x) = 0$ olur. Bu ise (3.1) ile çelişir.

Sonuç 3.3 *Eğer $\lambda = \lambda_0$ özdeğer ise $\phi_{\lambda 0}(x)$ve $\chi_{\lambda 0}(x)$ fonksiyonları bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyonlardır.*

Lemma 3.4 *$w(\lambda)$ nın sıfırı olan bütün özdeğerler basittir.*

İspat 6: *İyi bilinen (Naimark, 1967., sayfa 6-7) Lagrange formülü gereği herhangi bir λ için*

$$(\lambda-\lambda_n)\left(\int_{-1}^{0}\phi_\lambda(x)\phi_{\lambda_n}(x)dx + \delta^2\int_0^1 \phi_\lambda(x)\phi_{\lambda_n}(x)dx\right)$$

$$= -W(\phi_\lambda,\phi_{\lambda_n};-1) + \delta^2 W(\phi_\lambda,\phi_{\lambda_n};1) \tag{3.11}$$

eşitliğini elde ederiz. Burada (3.1) gereği $W(\phi_\lambda, \phi_{\lambda n}; -1) = (\lambda-\lambda_n)\rho_1$ olur. λ_n özdeğerine karşılık gelen $\phi_{\lambda n}(x)$ ve $\chi_{\lambda n}(x)$özfonksiyonlar için $\chi_{\lambda n}(x) = k_n\phi_{\lambda n}(x)$, $x \in [-1,0) \cup (0,1]$eşitliğinin $k_n \neq 0$ için sağlandığını kullanır ve gerekli işlemleri yaparsak

$$W(\phi_\lambda,\phi_{\lambda_n};1) = \frac{1}{k_n}\left(w(\lambda) - (\lambda-\lambda_n)R_2'(\phi_\lambda)\right) \tag{3.12}$$

elde edilir. Elde edilen (3.12) ifadesini (3.11) de yerine yazar ve $\lambda \to \lambda_n$ alırsak

$$\int_{-1}^{0}(\phi_{\lambda_n}(x))^2dx + \delta^2\int_0^1(\phi_{\lambda_n}(x))^2dx$$

$$= -\rho_1 + \frac{\delta^2}{k_n}w'(\lambda_n) - \frac{\delta^2}{k_n}R_2'(\phi_{\lambda_n}) \tag{3.13}$$

olur. Burada $R_2'(\phi\lambda_n) = \frac{\rho_2}{k_n}$ değerini (3.13) de yerine yazarsak $w^1(\lambda_n) \neq 0$ olduğu görülür.

4. W (λ) FONKSİYONU İÇİN ASİMPTOTİK AÇILIMLAR

Lemma 4.1 *$\lambda = s^2$ olmak üzere (1.1) denkleminin üçüncü kesimde tanımlanan $\phi_\lambda(x)$ çözüm fonksiyonu için aşağıdaki integral denklemleri geçerlidir.*

$$\frac{d^k}{dx^k}\phi_{1\lambda}(x) = (\beta_2's^2+\beta_2)\frac{d^k}{dx^k}cos\{s(x+1)\}$$

$$+\frac{1}{s}(\beta_1's^2+\beta_1)\frac{d^k}{dx^k}sin\{s(x+1)\}$$

$$+\frac{1}{s}\int_{-1}^{x}\frac{d^k}{dx^k}sin\{s(x-y)\}q(y)\phi_{1\lambda}(y)dy \tag{4.1}$$

$$\frac{d^k}{dx^k}\phi_{2\lambda}(x) = \frac{1}{\delta}\phi_{1\lambda}(0)\frac{d^k}{dx^k}cos(sx)$$

$$+\frac{1}{s}\frac{1}{\delta}\phi_{1\lambda}'(0)\frac{d^k}{dx^k}sin(sx)$$

$$+\frac{1}{s}\int_{0}^{x}\frac{d^k}{dx^k}sin\{s(x-y)\}q(y)\phi_{2\lambda}(y)dy \tag{4.2}$$

Buradaki k = 0,1 dir.

İspat 7: *Yukarıda (4.1) ve (4.2) deki integral ifadesinin içindeki $q(y)\,\phi_{J\lambda}(y)$ yerine $s^2\,\phi_{J\lambda}(y) + (y) + (\phi''_{j\lambda})(y)$ ifadesini yazar ve iki kez kısmi integrasyon uygularsak istenen ifadeleri elde ederiz.*

Lemma 4.2 *Kabul edelik ki $\lambda = s^2$, $Ims = t$ olsun. $x \in I_j$ ve $|\lambda| \to \infty$ olduğunda $\phi_{j\lambda}(x)$ fonksiyonları için aşağıdaki asimptotik ifadeler geçerlidir.*

$\beta_2' \neq 0$ için

$$\frac{d^k}{dx^k}\phi_{1\lambda}(x) = \beta_2's^2\frac{d^k}{dx^k}$$

$$cos\{s(x+1)\} + O(|s|^{k+1}e^{|t|(x+1)}) \tag{4.3}$$

$$\frac{d^k}{dx^k}\phi_{2\lambda}(x) = \frac{1}{\delta}\beta_2' s^2 \frac{d^k}{dx^k}$$

$$cos\{s(x+1)\} + O(|s|^{k+1}e^{|t|(x+1)}) \quad (4.4)$$

$\beta_2' = 0$ için

$$\frac{d^k}{dx^k}\phi_{1\lambda}(x) = \beta_1' s \frac{d^k}{dx^k}$$

$$sin\{s(x+1)\} + O(|s|^k e^{|t|(x+1)}) \quad (4.5)$$

$$\frac{d^k}{dx^k}\phi_{2\lambda}(x) = \frac{1}{\delta}\beta_1' s \frac{d^k}{dx^k}$$

$$sin\{s(x+1)\} + O(|s|^k e^{|t|(x+1)}) \quad (4.6)$$

İspat 8: *ϕ_λ (x) için (Titchmarsh, 1939) de karşılık gelen formüllerin ispatındakine benzer yöntemi uygularsak yukarıdaki asimptotik ifadeleri elde ederiz.*

Teorem 4.1 *Kabul edelim ki $\lambda = s^2$, Ims = t olsun O halde w(λ) fonksiyonu için aşağıdaki asimptotik ifadeler geçerlidir.*

Birinci hal: $\beta_2' \neq 0$ *ve* $\beta_4' \neq 0$ *için*

$$w(\lambda) = s^5 \beta_2' \beta_4' \delta sin(2s) + O(|s|^4 e^{2|t|}) \quad (4.7)$$

İkinci hal: $\beta_2' \neq 0$ *ve* $\beta_4' = 0$ *için*

$$w(\lambda) = s^4 \beta_2' \beta_3' \delta cos(2s) + O(|s|^3 e^{2|t|}) \quad (4.8)$$

Üçüncü hal: $\beta_2' = 0$ *ve* $\beta_4' \neq 0$ *için*

$$w(\lambda) = -s^4 \beta_1' \beta_4' \delta cos(2s) + O(|s|^3 e^{2|t|}) \quad (4.9)$$

Dördüncü hal: $\beta_2' = 0$ *ve* $\beta_4' = 0$ *için*

$$w(\lambda) = s^3 \beta_1' \beta_3' \delta sin(2s) + O(|s|^2 e^{2|t|}) \quad (4.10)$$

İspat 9: *w (λ) fonksiyonu (3.6) gereği*

$$w(\lambda) = \lambda\delta^2(\beta_3'\phi_{2\lambda}(1) - \beta_4'\phi_{2\lambda}'(1))$$

$$+\delta^2(\beta_3\phi_{2\lambda}(1) - \beta_4\phi_{2\lambda}'(1)) \quad (4.11)$$

olur. Burada $\phi_{2\lambda}(1)$ ve $\phi_{2\lambda}'(1)$ *yerine asimptotik ifadeleri yazılır ve düzenlenirse istenen asimptotikler elde edilir.*

Sonuç 4.1 *(1.1)-(1.5) probleminin özdeğerleri alttan sınırlıdır.*

İspat 10: *Yukarıdaki formüllerde s = it (t > 0) alırsak $t \to \infty$ için w ($-t^2$) $\to \infty$ gider. Böylece λ negatif olmak üzere $|\lambda|$ nın yeteri kadar büyük değerleri için w (λ) $\neq$ 0 olur.*

5. ÖZDEĞERLER İÇİN ASİMPTOTİK AÇILIMLAR

Bilindiği gibi tam fonksiyon olan w (λ) nın sıfırlarından ibaret olan özdeğerler, sonlu limit noktasına sahip değildir ve sonuç 3.1 ve sonuç 4.1 gereği reel ve alttan sınırlıdır. Buna göre bu özdeğerler $\lambda 0 \leq \lambda 1 \leq \lambda 2 \leq ...$ şeklinde sıralanabilir ve *n* nin yeteri kadar büyük değerleri için olarak gösterebiliriz.

Teorem 5.1 (1.1)-(1.5) probleminin özdeğeri için olduğunda aşağıdaki asimptotikler geçerlidir.

Birinci hal: $\beta_2' \neq 0$ ve $\beta_4' \neq 0$ için

$$s_n = \frac{1}{2}(n-2)\pi + O(\frac{1}{n}) \quad (5.1)$$

İkinci hal: $\beta_2' = 0$ ve $\beta_4' \neq 0$ için

$$s_n = \frac{1}{2}(n-\frac{3}{2})\pi + O(\frac{1}{n}) \quad (5.2)$$

Üçüncü hal: $\beta_2' \neq 0$ ve $\beta_4' = 0$ için

$$s_n = \frac{1}{2}(n-\frac{3}{2})\pi + O(\frac{1}{n}) \quad (5.3)$$

Dördüncü hal: $\beta_2' = 0$ ve $\beta_4' = 0$ için

$$s_n = \frac{1}{2}(n-1)\pi + O(\frac{1}{n}) \quad (5.4)$$

İspat 11: *Sadece birinci hal için ispatı vereceğiz. w_{11} (s) ve w_{12} (s) ile (4.1) ifadesinin sırasıyla ilk ve O terimlerini gösterelim.*

$$C_n = \{s \in \mathbb{C} | \ |s| = \frac{1}{2}(n+\frac{1}{2})\pi\}$$

eğrisi üzerinde yeteri kadar büyük n değeri için $|w_{11}(s)| > |w_{12}(s)|$ olduğu görülür. $\lambda_n = s_n^2$ ve w (λ) nın sıfırlarını $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ...$ şeklinde alırsak C_n eğrisi içerisinde w_{11} (s) nin sıfırları s = 0 (altıncı dereceden katlı kök) ve $s = \frac{kp}{2}$ k = ±1, ±2, ..., ±n (birinci dereceden katlı kök) olmak üzere 2n+6 tanedir. Buna göre Rouche teoremini de uygularsak w (λ) = w_{11} (s) + w_{12} (s) fonksiyonunun sıfır yerleri

$$s_n = \frac{(n-2)\pi}{2} + \delta_n \quad (5.5)$$

olur. Burada $\delta_n = O\ (1)$ dir. Daha açık olarak n-nin yeteri kadar büyük değerleri için $|\delta_n| < \frac{\pi}{4}$ olur. Bu değeri (4.7) de yerine koyarsak $|\delta_n| = O\left(\frac{1}{n}\right)$ olduğu görülür. Diğer haller ise benzer hesaplamalar ile ispatlanır.

Özdeğerler için daha iyi asimptotik açılım, (Titchmarsh, 1939, sayfa 19) da sürekli halinde olduğu gibi Titchmarsh'ın metodunu uygulayarak elde edilebilir. Bunun için $q(y)$ fonksiyonunun [-1,1] de sınırlı varyasyonlu olduğu kabul edilmiştir.

Yine özdeğerlerin asimptotik açılımını sadece birinci hal için vereceğiz. O halde (4.1) de $x = 0$ koyup bu değeri (4.2) de yerine yazarsak

$$\phi'_{2\lambda}(1) = -\frac{1}{\delta}\beta'_2 s^3 sin(2s) + \frac{1}{\delta}\beta'_1 s^2 cos(2s) + \frac{1}{\delta}\beta'_2 s^2$$
$$\int_{-1}^{1} cos\{s(1-y)\}cos\{s(1+y)\}q(y)dy + O(|s|e^{2|t|})$$

elde ederiz. Diğer taraftan (4.4) den

$$\phi_{2\lambda}(1) = \frac{1}{\delta}\beta'_2 s^2 cos(2s) + O(|s|e^{2|t|})$$

dir. Bu değerleri (4.11) de yerine yazar ve gerekli düzenlemeleri yaparsak

$$w(\lambda) = \delta\beta'_2\beta'_4 s^5 sin(2s) + \delta s^4\{(\beta'_2\beta'_3 - \beta'_1\beta'_4)$$
$$cos(2s) - \frac{1}{2}\beta'_2\beta'_4 cos(2s)\int_{-1}^{1} q(y)dy -$$
$$-\frac{1}{2}\beta'_2\beta'_4\int_{-1}^{1} cos(2sy)q(y)dy\} + O(|s|^3 e^{2|t|}) \quad \textbf{(5.6)}$$

elde ederiz. (5.1) ifadesini (5.6) da yerine yazarsak

$$sin(2\delta_n) = \frac{cos(2\delta_n)}{s_n}\{\frac{\beta'_1}{\beta'_2} - \frac{\beta'_3}{\beta'_4} + \frac{1}{2\delta}\int_{-1}^{1} q(y)dy$$
$$+\frac{1}{2\delta}\int_{-1}^{1} cos(2s_n y)q(y)dy\} + O(\frac{1}{n^2}) \quad \textbf{(5.7)}$$

buluruz. $q(y)$ fonksiyonu [-1,1] de sınırlı varyasyonlu olduğundan Riemann-Lebesque Lemması (Zygmund, 1959., sayfa 48, teorem 4.12) gereği (5.7) ifadesinin sağındaki ikinci integral $O\left(\frac{1}{n}\right)$ eşit olur. Buna göre (5.7) ifadesinden

$$\delta_n = \frac{1}{(n-2)\pi}\{\frac{\beta'_1}{\beta'_2} - \frac{\beta'_3}{\beta'_4} + \frac{1}{2\delta}\int_{-1}^{1} q(y)dy\} + O(\frac{1}{n^2}) \quad \textbf{(5.8)}$$

bulunur. Bu ifadeyi (5.5) de yerine yazarsak

$\beta'_2 \neq 0$ ve $\beta'_4 \neq 0$ için

$$s_n = \frac{(n-2)\pi}{2} + \frac{1}{(n-2)\pi}\{\frac{\beta'_1}{\beta'_2} - \frac{\beta'_3}{\beta'_4} + \frac{1}{2\delta}$$
$$\int_{-1}^{1} q(y)dy\} + O(\frac{1}{n^2}) \quad \textbf{(5.9)}$$

asimptotik açılımını elde ederiz. Benzer düşünce ile diğer haller içinde aşağıdaki asimptotikler elde edilir.

İkinci Hal $\beta'_2 \neq 0$, $\beta'_4 = 0$ için

$$s_n = \frac{(n-\frac{3}{2})\pi}{2} + \frac{1}{(n-\frac{3}{2})\pi}\{-\frac{\beta'_1}{\beta'_2} + \frac{\beta_4}{\beta'_3} - \frac{1}{2\delta}$$
$$\int_{-1}^{1} q(y)dy\} + O(\frac{1}{n^2}) \quad \textbf{(5.10)}$$

Üçüncü hal $\beta'_2 = 0$, $\beta'_4 \neq 0$ için

$$s_n = \frac{(n-\frac{3}{2})\pi}{2} + \frac{1}{(n-\frac{3}{2})\pi}\{\frac{\beta_2}{\beta'_1} + \frac{\beta'_3}{\beta'_4} - \frac{1}{2\delta}$$
$$\int_{-1}^{1} q(y)dy\} + O(\frac{1}{n^2}) \quad \textbf{(5.11)}$$

Dördüncü hal $\beta'_2 = 0$, $\beta'_4 = 0$ için

$$s_n = \frac{(n-1)\pi}{2} + \frac{1}{(n-1)\pi}\{-\frac{\beta_2}{\beta'_3} - \frac{\beta_4}{\beta'_1} + \frac{1}{2\delta}$$
$$\int_{-1}^{1} q(y)dy\} + O(\frac{1}{n^2}). \quad \textbf{(5.12)}$$

6. SONUÇ

Bu çalışmada süreksiz katsayılı ve özdeğer parametresini sadece denklemde değil sınır şartlarında da bulunduran ve Sturm-Liouville probleminin bir genelleşmesi olan sınır değer probleminin özdeğerleri için asimptotik formüller yeni bir yaklaşımla bulunmuştur. Bulduğumuz sonuçlar literatürde sürekli problemler için bilinen uygun sonuçları genelleştirmektedir. (Bakınız (Fulton, 1977),(Kerimov ve Allakhverdiev, 1993),(Titchmarsh, 1939),(Walter, 1973)).

KAYNAKÇA

Birkhoff, G.D.,(1908). On the Asymptotic Character of the Solution of the Certain Linear Differential Equations Containing Parameter. Trans. Amer. Math. Soc.,9, p.219-231.

Fulton, C. T., (1977). Two Point Boundary Value Problems with Eigenvalue Parameter Contained in the Boundary Conditions. Proc. Soc. Edinburg, 77A, p.293-308.

Hinton, D., (1979). An Expansion Theorem for in Eigenvalue problem with Eigenvalue Parameter in the Boundary Condition. Quart. J. Math. Oxford(2), 30, 33-42.

Kerimov, N.B., Allakhverdiev, T.I., (1993). On a Boundary Value Problem II. Differetsial'nye Uravneniya 29. no.6,952-960,1099.

Naimark, M.A.,(1967). Linear Differential Operators. Ungar, New york.

Schneider, A., (1974). A note on Eigenvalue Problems with Eigenvalue Parameter in the Boundary Condition. Math. Z.136,163-167.

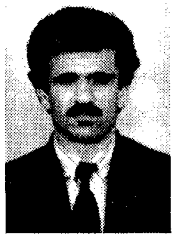
Shkalikov, A.A., (1983). Boundary Valuve Problems for Ordinary Differential Equations with a Parameter in Boundary Condition. Trudy.,Sem., Imeny, I.G. Petrosgo,9, 190-229.

Titchmarsh, E.C., (1939). Eigenfunction Expansion Associated with Scond Order Differential Equations I., (2nd end). Oxford univ. Press, London.

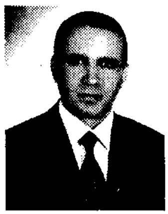
Walter, J., (1973). Regular Eigenvalue Problems with Eigenvalue Parameter in the Boundary Conditions. Math. Z. 133, 301-312.

Zayed, E.M.E., Ibrahim, S.F.M., (1992). Regular Eigenvalue Problem with Eigenparameter in the Boundary Conditions. Bull. Cal. Math. Soc. 84. 379-393.

Zygmund, A., (1959). Trigonomatric Seres I. (2nd end) (london, Pergamon).



Nihat Altınışık, 1962 Malatya doğumluyum. İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fak. Matematik Bölümünden 1986 yılında mezun oldum. Üç yıl öğretmenlik yaptıktan sonra Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak göreve başladım. Aynı üniversitede Yüksek Lisansı 1993, Doktorayı ise 1998 yılında tamamladım. Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı kodrosunda Yard. Doç. olarak görev yapmaktayım.



Oktay Muhtarov, 15.02.2003 tarihinde Azerbaycan Devlet Üniversitesi Mekanik-Matematik bölümünü bitirdim. 1989 yılında Doktor, 1993 yılında ise Doçent Dr. Ünvanını kazandım. Gaziosmanpaşa Üniversitesi matemetik bölümünde yabancı uyruklu sözleşmeli öğretim üyesi olarak çalışmaktayım. Evli ve ik çocuk babasıyım.