ANADOLU ÜNİVERSİTESİ BİLİM VE TEKNOLOJİ DERGİSİ
ANADOLU UNIVERSITY JOURNAL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
Cilt/Vol.: 3 - Sayı/No: 3 : 433-436 (2002)
XIV. Ulusal Matematik Sempozyumu Özel Sayısı/Special Issue for XIVth National Mathematics Symposium

ARAŞTIRMA MAKALESİ/**RESEARCH ARTICLE**

TOPOLOJİK ÖTELEME DÜZLEMLERİNDE BİRİMLİKLER

Emine SOYTÜRK[1]

ÖZ

$V = \mathbb{R}^{2\ell}$ olmak üzere, elemanları ℓ- boyutlu alt vektör uzaylarıolan ve $V \setminus \{0\}$ kümesini ayrıştıran bir S kümesine V vektör uzayında bir yayılım denir. Bu çalışmada, $\mathbb{R}^{2\ell}$ vektör uzayına karşılık gelen topolojik öteleme düzlemleri içinde, sonsuzdaki her noktası bir düz ayağa sahip olan her Öklidyen kürenin bir birimlik olduğu gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Topolojik öteleme düzlemi, Yayılım, Birimlik

UNITALS IN TOPOLOGICAL TRANSLATION PLANES

ABSTRACT

A spread of $V = \mathbb{R}^{2\ell}$ is a set of $\ell-$ dimensional subspaces $L \leq V$ partitioning $V \setminus \{0\}$. Here, it is shown that, in the corresponding topological translation spaces, every Euclidean sphere is a unital with the additional property that every point at infinity has flat feet.

Key Words: Topological translation plane, Spread, Unital

1. GİRİŞ

Birimliğe hemen verilebilecek bir örnek, Dezargsel projektif düzlem içinde üniter kutupsallığın mutlak noktaları ve mutlak olmayan doğrularından oluşan bir kümedir. Sonlu durumda bir birimlik, bir projektif düzlem içine bir daldırmaya dayandırmadan belirli kardinalite parametrelerinin düzenlenmesiyle tanımlanabilir. Sonsuz halde böyle bir yaklaşım genel olarak daldırılmış birimlikler için bile geçerli değildir. Burada biz topolojik bir bakış açısını benimseyeceğiz. Kardinalite ile ilgili varsayımları, homeomorfizm tipleri üstüne hipotezlerle veya düzlemin doğrularının boyutları üstüne ve onların birimliklerle arakesitleri üstüne hipotezlerle değiştireceğiz.

Klasik kompakt projektif düzlemler üstündeki çeşitli polaritelere karşılık gelen birkaç boyut vardır (Salzmann,vd,1995). Üstelik bir birimliğin geometrik işlemlerinin bazı süreklilik özelliklerine sahip olması da istenebilir. Ovaller olması durumunda böyle özellikler, ovalin, verilen düzlemdeki noktaların kapalı bir kümesi olarak tanımlanması halinde ispatlanabilir (Buchanan,vd,1980). Ancak birimliklerin kullanılmasında bu özellikler ciddi olarak ele alınmamıştır. Bu doğrultuda (Immervoll , 2001) en güçlü tanımların tabanı üstüne bütün istenen süreklilik özelliklerini içine alan bir araştırma başlatmıştır.

Bu çalışmada bazı temel zorluklardan kaçınarak eş-boyutu (codimension) 1 olan nokta kümeleri ile özel birimlik tipleri incelenmiştir. Ele alınan birimlikler eş-boyutu 1 olan birimlikler olacaktır.

Daldırılmış bir $\mathbb{U}$ birimliğine bir teğet demek, $\mathbb{U}$ birimliğini tam olarak bir noktada kesen doğru demektir. p noktasından geçen bütün teğetler birimliğe doğrudaş noktalarda değerse, gömülü birimlik $p \notin \mathbb{U}$ noktasına göre düz ayağa sahiptir, denir. $\mathbb{U}$ birimliği her $p \in L \setminus \mathbb{U}$ için düz ayağa sahipse,

[1]Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Afyon
E-posta: soyturk@aku.edu.tr

Geliş: 1 Nisan 2002; **Düzeltme:** 3 Eylül 2002; **Kabul:** 28 Şubat 2003.

$\mathbb{U}$ birimliği L doğrusuna göre de düz ayağa sahiptir, denir. Sonlu projektif düzlemde $\mathbb{U}$ birimliği her $p \notin \mathbb{U}$ noktasına göre düz ayaklara sahipse, $\mathbb{U}$ birimliği bir Hermityen eğridir (Thas,1992).

Burada ele alınan düzlemler lokal kompakt afin öteleme düzlemleridir. Böyle bir düzlemi oluşturmak için $\mathbb{R}^{2\ell}$ uzayı içindeki bir yayılıma gereksinme duyulur. Oluşturulan düzlemin noktaları $\mathbb{R}^{2\ell}$ uzayının noktaları, doğruları yayılımdaki L doğrularının ötelenmişleridir. Düzlemin topolojik gereklilikleri (birleşim ve kesişimin sürekliliği) sağlaması için gerek ve yeter koşul S yayılımının, $\mathbb{R}^{2\ell}$ uzayının bütün ℓ boyutlu alt uzaylarının Grassmann manifoldunun kapalı bir alt kümesi olmasıdır. Bu durumda S yayılımı, S_ℓ ℓ-küresine homeomorftur. ℓ nin alabileceği değerler $1, 2, 4$ ve 8 dir. Her kompakt yayılım, aynı zamanda bir dual yayılımdır. Başka bir deyişle, $\mathbb{R}^{2\ell}$ uzayının her lineer hiperdüzlemi S yayılımının tam olarak bir elemanını içerir (Salzmann,vd,1995). $\mathbb{R}^{2\ell}$ vektör uzayında için standart skalar çarpımı gözönüne alacağız. $\mathbb{R}^{2\ell}$vektör uzayı içindeki S yayılımının self-ortogonal olması demek, $S = S^{\perp}$ olması demektir. Bu durumda S yayılımı yardımıyla oluşturulan düzlemler kendi üstündeki transpozuna izomorftur (Buchhanan ve Hähl, 1978). Bu önermenin karşıtı doğru değildir. Aykırı örnekler için özel *nearfield* düzlemleri alınır. Aşikardır ki, klasik yayılımlar (reel, kompleks, kuaterniyon ve oktanyon düzlemleri) self-ortogonaldir. Burada esas amaç self-ortogonal kompakt yayılımlara klasik olmayan örnekler vermektir.

2. BİRİMLİKLER

Bir lokal kompakt irtibatlı afin öteleme $\mathcal{A}$ düzlemini, bir S yayılımı ile birlikte alınmış $\mathbb{R}^{2\ell}$ nokta kümesi ile ele alacağız. $\mathbb{U}$, noktaların bir kümesi, L, $\mathcal{A}$ düzleminin bir doğrusu olsun. $L \cap \mathbb{U}$ kümesi boş küme ise, L doğrusuna $\mathbb{U}$ kümesinin bir dış doğrusu, $L \cap \mathbb{U}$ kümesi tek elemanlı bir küme ise, L doğrusuna $\mathbb{U}$ kümesinin bir teğeti, $L \cap \mathbb{U}$ kümesi birden fazla elemanlı bir küme ise, L doğrusuna $\mathbb{U}$ kümesinin bir keseni diyeceğiz.

Tanım 1. *$\mathbb{U}$, $\mathbb{R}^{2\ell}$ uzayının bir alt kümesi olsun. Aşağıdaki önermeler doğrulanıyorsa $\mathbb{U}$ kümesine eş-boyutu bir olan bir kompakt birimlik denir.*

U1) $\mathbb{U}$ kümesinin her noktası bir ve yalnız bir teğet üzerinde bulunur.

U2) $\mathbb{U}$ kümesi, boyutu $2\ell - 1$ olan $S_{2\ell-1}$ küresine homeomorftur.

U3) L doğrusu bir kesen ise, $L \cap \mathbb{U}$ kümesi, $S_{\ell-1}$ küresine homeomorftur.

Birimlik denilince, eş-boyutu 1 olan kompakt birimlik anlayacağız. Afin öteleme düzlemlerindeki birimlik örnekleri kolayca elde edilir. Örneğin, $\mathbb{R}^2$ afin öteleme düzleminde her çember bir birimliktir. Çemberin her noktası bir ve yalnız bir teğet üzerinde bulunur. Düzlemde çember, S_1 küresine homeomorftur. Çember, S_1 küresine birim dönüşümle homeomorftur. L doğrusu bir kesen ise, $L \cap \mathbb{U}$ kümesi, S_0 küresine homeomorftur. Düzlemde L keseni, çemberi yalnız iki noktada keser. Bu durumda $S_0 = \{p_0, p_1\}$ kümesi , $\mathbb{R}$ üstünde bir sıfır küre demektir.

$\mathcal{O}$, $\mathbb{R}^n$ kümesinin bir alt kümesi olsun. $\mathcal{O}$ kümesi kompakt ise, $\mathcal{O}$ kümesinin her keseni tam olarak $\mathcal{O}$ kümesinin iki noktasını kapsıyorsa ve $\mathcal{O}$ kümesinin bir p noktasından geçen teğetler bir H_p hiperdüzlemini örtüyorsa, $\mathcal{O}$ kümesine ovoid denir. Öteleme düzlemlerinin ℓ -boyutlu doğrularından ayırt etmek için, ovoidin kesenine ve teğetine bir boyutlu doğrular diyeceğiz. Kompakt projektif düzlemdeki ovaller gibi $\mathbb{R}^n$ kümesindeki her kompakt $\mathcal{O}$ ovoidi S_{n-1} küresine homeomorftur. $\mathbb{R}^n$ kümesindeki $\mathcal{O}$ ovoidi için p noktasını çıkarınca geriye kalan küme birebir, örten ve sürekli olacak biçimde $\mathbb{R}^{n-1}$ kümesi ile eşlenebilir.

Önerme 2. *Reel afin uzay $\mathbb{R}^{2\ell}$ içindeki bir $\mathcal{O}$ kompakt ovoidi, $\mathbb{R}^{2\ell}$ uzayı üstünde tanımlanmış lokal kompakt $\mathcal{A}$ afin öteleme düzlemi içinde eş-boyutu* 1 *olan bir birimliktir.*

Kanıt. $\mathcal{A}$ düzleminin bir L doğrusu ovoidin bir keseni ise, bu durumda $L \cap \mathcal{O}$ kümesi, ℓ -boyutlu reel afin L uzayı içinde bir kompakt ovoid tir. Buna göre U3 önermesi yukarıdaki uyarıların bir sonucudur. Aynı uyarılar U2 önermesini gerektirir. Başka bir anlatımla $\mathbb{U}$ kümesi, boyutu $2\ell - 1$ olan $S_{2\ell-1}$ küresine homeomorftur. Son olarak U1 önermesinin sağlandığını gösterelim. $\mathcal{O}$ ovoidinin bir p noktasından geçen bir boyutlu teğetler bir H_p hiperdüzlemini örterler. $\mathcal{A}$ düzleminin S yayılımı aynı zamanda dual yayılım olduğundan H_p hiperdüzlemi, $\mathcal{A}$ düzleminin p noktasından geçen tam olarak birtek L elemanını içerir. Aşikar olarak L bir teğettir. p noktasından geçen öteki doğrular birer kesen doğru olmak zorundadır (Löwe,vd,2000).

S, reel afin uzay $\mathbb{R}^{2\ell}$ üstünde bir yayılım olsun.

$$S = \left\{ L \mid L, \begin{array}{l} V = \mathbb{R}^{2l} \text{ vektör uzayının } l - \text{boyutlu} \\ \text{bir alt vektör uzayıdır ve} \\ L \backslash \{0\} \text{ kümelerinin birleşimi} \\ V \backslash \{0\} \text{ kümesinin bir ayrışımıdır} \end{array} \right\}$$

V$=\mathbb{R}^2$ reel afin uzayında başlangıç noktasından geçen herbir doğru S yayılımının bir elemanıdır.$\mathbb{R}^4$reel afin uzayında ise başlangıç noktasından geçen 2-düzlemlerinin bir alt kümesi bir yayılımdır. Bu uzayda yalnız orijin ortak noktasına sahip olan 2-düzlemleri alınır.

Her öklidyen $\mathbb{U}$ küresi bir ovoiddir ve böylece lokal kompakt, irtibatlı afin $\mathcal{A}$ öteleme düzlemi içinde bir birimliktir. Şimdi $K \in S$ özellikli bir K doğrusunu gözönüne alalım. K doğrusunun sonsuzdaki noktasının ayaklarının kümesini F_K ile gösterelim.

$$F_K = \left\{(x+K) \cap \mathbb{U} : x \in \mathbb{R}^{2\ell}, x+K \text{ bir teğettir}\right\}$$

Önerme 3. *Merkezi başlangıç noktası olan bir küre $\mathbb{U}$ ise, K doğrusunun sonsuzdaki bir noktasının ayaklarının kümesi*

$$F_K = \mathbb{U} \cap K^{\perp}$$

biçimindedir.

Kanıt. Afin 2ℓ-uzayı içindeki bir $\mathbb{U}$ ovoidi, $p \in \mathbb{U}$ noktasında $H_p = p + p^{\perp}$ teğet hiperdüzlemine sahiptir. $K \subseteq p^{\perp}$ ise, $\ell-$boyutlu $p+K$ doğrusu teğettir. Bu ifadeye denk olarak $p \in K^{\perp} \cap \mathbb{U}$ dır. Başka bir anlatımla, $K \subseteq p^{\perp}$ ise $K^{\perp} \supseteq p^{\perp\perp}$ dır. $p \in p^{\perp\perp}$ olduğundan $p \in K^{\perp}$ olur. Ayrıca $p \in \mathbb{U}$ olduğundan $p \in K^{\perp} \cap \mathbb{U}$ elde edilir.

Böylece aşağıdaki teoremi elde etmiş olduk.

Teorem 4. *$\mathbb{R}^{2\ell}$ uzayı üstündeki bir S yayılımı ile elde edilen bir $\mathcal{A}$ öteleme düzlemi içindeki her Öklidyen küre bir birimliktir. Sonsuzdaki bir doğruya göre bu birimliği düz bir ayağa sahip olması için gerek ve yeter koşul S nin self-ortogonal olmasıdır.*

Açık Problem: Lokal kompakt, bağlantılı afin öteleme düzlemi içindeki her birimlik afin 2ℓ-uzayı içinde bir ovoid midir? Düzlem kompleks afin düzlem olsa bile yanıt pek açık değildir.

3. SELF-ORTOGONAL YAYILIMLAR

$\mathbb{R}^{2\ell} = \mathbb{R}^{\ell} \times \mathbb{R}^{\ell}$ uzayı içindeki bir yayılım zaman zaman onun Grassmann koordinatlarıyla verilebilir. $\mathcal{M}$, $\ell \times \ell$ biçimindeki matrislerin kümesi olmak üzere, yayılımın doğruları $V = \mathcal{O} \times \mathbb{R}^{\ell}$ ve

$$L_M = \left\{(x, Mx) : x \in \mathbb{R}^{\ell}\right\},\ M \in \mathcal{M}$$

biçiminde verilsin. Bu yayılımı, $\mathcal{M}$ den elde ettiğimiz için $S_{\mathcal{M}}$ ile göstereceğiz. M matrisinin transpozunu M^t ile, adjointini $\left(M^t\right)^{-1} = M^*$ ile gösterelim. Kolaylıkla görülebilir ki $V = L_0^{\perp}$ ve $M \neq 0$ için $L_M^{\perp} = L_{-M^*}$ dır. Böylece

$$\begin{aligned} \langle (x, Mx), (y, -M^*y) \rangle &= \langle x, y \rangle - \langle Mx, M^*y \rangle \\ &= \langle x, y \rangle - \langle MM^{-1}x, y \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç olarak aşağıdaki yardımcı teoremi elde etmiş olduk.

Yardımcı Teorem 5. *$\mathcal{M}$ kümesi tarafından tanımlanan bir $S_{\mathcal{M}}$ yayılımının standart skalar çarpıma göre self-ortogonal olması için gerek ve yeter koşul sıfır matrisini kapsaması ve*

$$\forall M \in \mathcal{M} \backslash \{0\} \text{ için } -\left(M^t\right)^{-1} = -M^*$$

olmasıdır.

Örnek 6. Klasik olmayan lokal kompakt, irtibatlı ilk öteleme düzlemleri Betten [1] tarafından verilmiştir. $\mathcal{A} = \mathcal{A}_f$ düzlemleri, monoton, sürekli birebir-örten $f :]0, \infty[\rightarrow]0, \infty[$ fonksiyonuna bağlıdır. Yayılım elemanının Grassmann koordinatları

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -f\left(a^2+b^2\right)b & f\left(a^2+b^2\right)a \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{R}$$

biçimli matrislerdir. Basit bir hesaplama yardımcı teorem 5 deki koşulun sağlandığını gösterir. f tanımlayıcı fonksiyonu simetrik ise, yayılım standart skalar çarpıma göre self-ortogonaldir. Burada f fonksiyonunun simetrik olması $\forall r$ için

$$f\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{f(r)}$$

olması anlamındadır.

KAYNAKÇA

Betten, D. (1970). Nicht- desarguessche 4-dimensionale Ebenen. *Arch. Math.* 21, 100-102.

Bödi, R.,Immervoll, S. ve Löwe, H. (2000). Smooth stable planes and the moduli space of locally compact translation planes. *Monatsh. Math.* 129, 303-319.

Buchanan, T. and Hähl, H. (1978). The transposition of locally compact, connected translation planes. *J. Geom.* 11,84-92.

Buchanan, T., Hähl, H. ve Löwen, R. (1980). Topologische Ovale, *Geom. Dedicata* 9, 401-424.

Immervoll, S., Topological and smooth unitals, preprint.

Löwe, H., Löwen, R., Soytürk, E.(2000). Self-orthogonal compact spreads and unitals in topological translation planes. *Geom. Dedicata* 83, 95-104.

Salzmann, H., Betten, D., Grundhöfer, T., Hähl, H., Löwen, R. ve Stroppel, M. (1995). *Compact Projective Planes*. De Gruyter, Berlin.

Thas, J.(1992). A combinatorial characterization of Hermitian curves. *J. Algebraic Combin.* 1, 97-102.

Emine SOYTÜRK

1980 yılında A.Ü.F.F. Matematik bölümünden mezun oldu. 1982 yılında yüksek lisansını, 1989 yılında doktorasını tamamladı. Halen Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü'nde öğretim üyesidir.