ANADOLU ÜNİVERSİTESİ BİLİM VE TEKNOLOJİ DERGİSİ
ANADOLU UNIVERSITY JOURNAL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
Cilt/Vol.: 3 - Sayı/No: 3 : 427-432 (2002)
XIV. Ulusal Matematik Sempozyumu Özel Sayısı/Special Issue for XIVth National Mathematics Symposium

ARAŞTIRMA MAKALESİ/**RESEARCH ARTICLE**

SADE HAREKETLİ DİFERANSİYEL OYUNLARDA STACKELBERG VE NASH DENGE DURUMLARI

Mammadağha MAMMADOV [1]

ÖZ

Çalışmada sade hareketli pozisyon diferansiyel oyunlar ele alınmıştır. Oyuncuların amaç (veya maliyet) fonksiyonları terminaldir (yani, hareketin son zamandaki durumunun fonksiyonudur). Önce Stackelberg çözümleri (Yu. B. Germeyyer'in hiyerarşi oyunları) incelenmiştir. Böyle çözümlerin varlığı gösterilmiş , yapısı açıklanmış ve çözümlerin bulunması için matematik programlama problemi yazılmıştır. Nash denge durumları ise Stackelberg çözümlerinin yardımı ile (iki Stackelberg çözümleri kümesinin kesişimi olarak) belirlenmektedir. Nash ve Stackelberg denge durumlarına uygun hareket kümeleri statik eşitsizlik ilişkilerinin yardımı ile verilmektedir.

Anahtar Kelimeler: Stackelberg çözümleri, Hiyerarşi oyunları, Nash denge durumları

STACKELBERG AND NASH EQUILIBRIUM SITUATIONS IN DIFFERENTIAL GAMES WITH SIMPLE MOTIONS

ABSTRACT

In this study, we consider a positional non antagonistic two person differential game with simple motions. The payoff functions of both players are terminal. First the Stackelberg solution (the Germeyer's hierarchic games) are examined. Existence of such solutions has been showed and their structure have been determined. A mathematical programming problem is defined to obtain the Stackelberg solutions. The set of Nash equilibrium situations are determined by intersection of two sets of Stackelberg solutions. Nash and Stackelberg equilibrium sets of motion conditions are given by static inequality relationships.

Key Words: Stackelberg solutions, Hierarchic games, Nash equilibrium situations

1. GİRİŞ

Antagonist olmayan oyunların çözüm analizleri oyuncuların sahip oldukları bilgi ve hukuka (oyun kuralına) bağımlıdır. Oyuncuların aynı bilgi ve hukuk imkanlarına sahip oldukları durumlarda Nash denge durumları olası bir çözüm olarak kabul edilebilir. Ancak bir dizi iktisadi uygulamalarda, örneğin egemen firmanın bulunduğu oligopol rekabet durumunda oyuncuların durumları ve imkanları farklı olabilir. Bu tip durumlar ilk defa 20. yüzyılın başlarında iktisatçı G. Stackelberg tarafından, aynı pazarda rekabet eden firmaların stratejilerini incelerken gözden geçirilmiştir. Böyle durumlarda oyunculardan (firmalardan) biri, diğerlerinden "güçlü" (üstün) olur ve onlara kendisinin belirlediği fiyatı kabul ettirmeye çalışır. Benzer durumlarda "lider - takipçi" veya "hiyerarşi" oyun modelleri matematiksel olarak ilk defa [Germeyer, 1971], [Simaan ve Cruz, 1973] makalelerinde ve [Germeyer, 1976] kitabında araştırılmıştır.

[Kononenko, 1976] - [Kononenko, 1980]

[1] Anadolu Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstatistik Bölümü, 26470, Eskişehir
E-posta: mmammadov@anadolu.edu.tr

Geliş: 28 Ocak 2002; **Düzeltme:** 9 Aralık 2002; **Kabul:** 28 Şubat 2003.

makalelerinde farklı hiyerarşi diferansiyel oyunlarda lider (egemen) oyuncunun maksimal garantili kazancını (veya minimal garantili maliyetini) gerçekleştiren strarejilerin ve Nash denge durumlarının yapısı belirtilmiş, bulunması için yöntemler verilmiştir.

Sunulan bu çalışmada, [Kononenko, 1976] - [Kononenko, 1980], [Kononenko ve Mamedov, 1990], [Mamedov, 1990] yayınlarında ileri sürülen yöntemlerle, sade hareketli, yani sistemin hareketini ifade eden diferansiyel denklemin sağ tarafı zaman ve faz koordinatlarına açık bağımlı olmadığı, iki oyunculu diferansiyel oyunlar incelenmektedir. Oyuncular pozisyon stratejiler kullanmak imkanına sahiptirler. Lider oyuncunun maksimal garantili kazancının hesaplanması ve uygun stratejisinin bulunması için matematiksel programlama uygulanmıştır. Nash ve Stackelberg denge durumlarına uygun hareket kümeleri statik eşitsizlik ilişkilerinin yardımı ile belirlenir.

Ardışık ve diferansiyel oyunlarda Nash denge durumları ve Stackelberg çözümleri 1976 yılından başlayarak Başar T. ve onunla çalışan bilim adamları tarafından incelenmiştir. Onlar bu alanda değerli sonuçlar elde etmişlerdir [Basar ve Olsder, 1995]. Bu çalışmalardan farklı olarak, sunulan makalede diferansiyel oyunlar için N.N. Krasovskiy yaklaşımı uygulanmıştır [Krasovskiy ve Subbotin, 1976]. Bu teoride oyuncuların pozisyon stratejileri üzerine hiç bir koşul yoktur, yani stratejiler faz koordinatlarına göre sürekli olmayabilir. Bu özellik, stratejiler sınıfını çok genişletmekte ve bu açıdan çözümün varlığını sağlamaktadır.

2. HİYERARŞİ OYUNUNUN TANIMLANMASI

Aşağıdaki antagonist olmayan iki oyunculu diferansiyel oyunu ele alalım.

$$\dot{x}(t) = f(u(t), v(t)), \qquad x(t_0) = x_0 \qquad (1)$$

$$u(t) \in \mathrm{P}, \qquad v(t) \in \mathrm{Q}, \qquad t \in \mathrm{T} = [t_0, \theta] \qquad (2)$$

$$\sigma_1(x(\theta)) \mapsto min_u \qquad (3)$$

$$\sigma_2(x(\theta)) \mapsto min_v \qquad (4)$$

Burada $x \in \mathrm{R}^n$, P ve Q sırasıyla R^p ve R^q uzaylarında kompakt kümeler, $f : \mathrm{P}x\mathrm{Q} \mapsto \mathrm{R}^n$ sürekli fonksiyon, $\sigma_i : \mathrm{R}^n \mapsto \mathrm{R}$, $i = 1, 2$ Lipschitz koşulunu sağlayan konveks fonksiyonlardır.

Birinci oyuncu $u(t) \in \mathrm{P}$, $t \in \mathrm{T}$ kontrol değişkenini seçerek (3) amaç fonksiyonunun, ikinci ise $v(t) \in \mathrm{Q}$, $t \in \mathrm{T}$ kontrol değişkenini seçerek (4) amaç fonksiyonunun değerini minimize etmeye çalışır.

(1),(2.) sistemi için "küçük oyunun eyer noktasının varlığı koşulu"nun [Krasovskiy and Subbotin, 1976] sağlandığını varsayalım, yani $\forall s \in \mathrm{R}^n$ vektörü için

$$\max_{v \in \mathrm{Q}} \min_{u \in \mathrm{P}} \langle s, f(u,v) \rangle = \min_{u \in \mathrm{P}} \max_{v \in \mathrm{Q}} \langle s, f(u,v) \rangle,$$

$$\max_{u \in \mathrm{P}} \min_{v \in \mathrm{Q}} \langle s, f(u,v) \rangle = \min_{v \in \mathrm{Q}} \max_{u \in \mathrm{P}} \langle s, f(u,v) \rangle$$

$u(\cdot) : \mathrm{T} \mapsto \mathrm{P}$, $v(\cdot) : \mathrm{T} \mapsto \mathrm{Q}$ Borel fonksiyonları kümelerini, sırasıyla, U_T ve V_T ile , $\chi(t_0, x_o)$ ile ise (1), (2.) dinamik sisteminin tüm $(u(\cdot), v(\cdot)) \in U_T \times V_T$ çiftlerinden elde edilen çözüm kümesini gösterelim. (1),(2.) sistemine paralel olarak aşağıdaki diferansiyel içermeyi ele alalım:

$$\dot{x} \in \{f(u,v) : u \in \mathrm{P}, v \in \mathrm{P}\} = F^0, x(t_0) = x_0$$

F^0 kümesinin konveks olduğu kabul edilecektir. Bu şart dahilinde diferansiyel içermenin çözümleri kümesi kapalı küme olur ve $\chi(t_0, x_o)$ ile aynı olur.

Oyuncular pozisyon stratejiler [Krasovskiy ve Subbotin, 1976] kullanırlar. Oyuncunun her hangi bir pozisyon stratejisi (1), (2.) dinamik sisteminin belirli başlangıç durumu için N.N.Krasovskiy anlamında hareketler kümesi doğurmuş olur [Krasovskiy ve Subbotin, 1976]. $X(t_0, x_0, U)$ $(X(t_0, x_0, V))$ ile birinci oyuncunun $U = \{u(t,x) \in \mathrm{P} : t \in \mathrm{T}, x \in \mathrm{R}^n\}$ (ikinci oyuncunun $V = \{v(t,x) \in \mathrm{Q} : t \in \mathrm{T}, x \in \mathrm{R}^n\}$) stratejisine ve (t_0, x_0) başlangıç durumuna uygun hareketler kümesini gösterelim. Dinamik sisteme koyulan koşullar dahilinde $X(t_0, x_0, U)$ $(X(t_0, x_0, V))$ kümesi $C^n[t_0, \theta]$ uzayının boş olmayan kompakt alt kümesidir [Krasovskiy ve Subbotin, 1976].

Önce (1)-(4) oyununun hiyerarşik yapıya sahip olduğunu kabul edelim, yani oyuncular eşit haklara sahip değiller ve onlardan birisi (lider oyuncu) diğerine (takipçi oyuncuya), sahip olduğu belirli bilgiler altında seçtiği stratejisini haber verebilir.

Biz Γ_{1x} hiyerarşi oyununu inceleyeceğiz [Kononenko, 1977]. Bu oyun aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

Kural 1. Oyuncular (1)-(4) dinamik idare sisteminin parametreleri hakkında tam (kesin) bilgiye ve pozisyon stratejiler kullanma imkânına sahiptirler.

Kural 2. Lider oyuncunun kendi pozisyon stratejisini seçerek, onu takipçi oyuncuya haber verme hakkı vardır.

Kural 3. Takipçi oyuncu liderin seçmiş olduğu stratejiyi ele aldıktan sonra, kendisinin amaç fonksiyonuna minimal değer veren herhangi bir pozisyon stratejisini cevap olarak seçebilir.

Kural 4. Lider, takipçi oyuncunun Kural 3'ü esas tuttuğunu bilerek, kendisinin maksimal garantili sonucunu (minimal garantili maliyetini) ε doğrulukla gerçekleştiren pozisyon stratejisini (takipçiye haber vereceği stratejisini) belirler.

3. HİYERARŞİ OYUNUNUN İNCELENMESİ

Önce 1. oyuncunun lider, 2. nin ise takipçi oyuncu olduğunu kabul edelim ve (1)-(4) dinamik kontrol sistemi için Γ_{1x} hiyerarşi oyununu inceleyelim. Aşağıdaki ifadeleri tanımlayalım:

$$\begin{aligned} C_2(t,x) &= \sup_{u(t,x)} \inf_{x(\cdot)\in X(t,x,u(t,x))} \sigma_2(x(\theta)) = \\ &= \inf_{x(\cdot)\in X(t,x,u^c(t,x))} \sigma_2(x(\theta)) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} D^{(2)} = \{x(\cdot) \in \chi(t_0,x_o) : C_2(t,x(t)) \geq C_2(\theta,x(\theta) = \\ = \sigma_2(x(\theta)), t_0 \leq t \leq \theta\} \end{aligned} \quad (6)$$

$$K_{1,x} = \inf_{x(\cdot)\in D^{(2)}} \sigma_1(x(\theta)) \quad (7)$$

Burada $C_2(t,x)$ (1), (2.), (4) pozisyon antagonist oyununun (G_2 oyununun) değer fonksiyonudur [Krasovskiy and Subbotin, 1976]. Antagonist pozisiyon diferansiyel oyunlar teorisine esasen [Krasovskiy and Subbotin, 1976] $C_2(t,x)$ değer fonksiyonu (kabul olunan koşullar dahilinde) vardır. Bu durumda, (5) ile tanımlanan $u^c(t,x)$ stratejisine 1. (lider) oyuncunun "*ceza*" stratejisi denir. Bu strateji oyunun başlangıç (t,x) durumuna bağımlıdır, yani "*üniversel*" strateji değildir [Krasovskiy and Subbotin, 1976],[Kononenko, 1980]. Ancak, $C_2(t,x)$'i ε doğrulukla tanımlayan $u^{\varepsilon c}(t,x)$ üniversel ceza stratejisi vardır [Kononenko, 1980]. Lider herhangi bir (t,x) durumunda ceza strajesini uyguladığında takipçi oyuncunun ele alabileceği "*maksimal kazanç*" ("*minimal maliyet*") $C_2(t,x)$ değerine eşittir.

Takipçi oyuncunun her hangi bir $x(\cdot) \in D^{(2)}$ hareketine uygun "kazancı" (veya maliyeti) onun teminat verebileceği $C_2(t,x)$ değerinden daha "iyi" olabilir. Gerçekten, eğer $x^0(\cdot) \in D^{(2)}$ ise, (6)'ya esasen şunu yazabiliriz:

$$\begin{aligned} \sigma_2(x^0(\theta)) &\leq C_2(t,x^0(t)) = \\ &= \inf_{x(\cdot)\in X(t,x^0(t),u^c(t,x))} \sigma_2(x(\theta)), t_0 \leq t \leq \theta \end{aligned} \quad (8)$$

Bu nedenle takipçi oyuncunun, liderin $D^{(2)}$ kümesinden önerdiği herhangi bir hareketi tercih etmesi beklenebilir. Bu durumda lider oyuncu ε doğrulukla (7) formülünün belirlediği K_{1x} kazancını elde edebilir. Bu amaçla, lider $D^{(2)}$ kümesinden

$$\sigma_1(x^\varepsilon(\theta)) \leq K_{1,x} - \varepsilon \quad (9)$$

koşulunu sağlayan herhangi bir $x^\varepsilon(\cdot) \in D^{(2)}$ hareketini seçebilir.

$x^\varepsilon(\cdot) \in \chi(t_0,x_o)$ çözümünü $(u^\varepsilon(\cdot), v^\varepsilon(\cdot))$ programlar çiftinin oluşturduğunu varsayalım. $\mathrm{T} \times \mathrm{R}^n$ uzayında $x^\varepsilon(\cdot)$ hareketi çevresinde aşağıdaki gibi bir "*boru küme*" tanımlayalım:

$$G^\delta = \{(t,x) \in \mathrm{T} \times \mathrm{R}^n : \|x - x^\varepsilon(t)\| \leq \delta, t \in \mathrm{T}\} \quad (10)$$

Lider oyuncunun takipçiye haber verebileceği strateji aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$u^\varepsilon(t,x) = \begin{cases} u^\varepsilon(t) & ,(t,x)\in G^\delta \text{ ise} \\ u^{\varepsilon c}(t,x) & ,(t,x)\notin G^\delta \text{ ise} \end{cases} \quad (11)$$

Yukarıdaki açıklamaya göre, 1. oyuncu (lider) (11) stratejisini kullandığında, 2. oyuncu $v(t,x) = v^\varepsilon(t)$ stratejisini tercih etmelidir. Aksi halde hareket belirli bir t^* anında G^δ kümesinden dışarı çıktığında takipçi oyuncu lider tarafından cezalandırılır ve onun almış olduğu $C_2(t^*, x(t^*))$ değeri $\sigma_2(x^\varepsilon(\theta))$ değerinden büyük olabilir (maliyeti büyür). Sonuçta liderin (11) stratejisi ona ε doğrulukla maksimal garantili $K_{1,x}$ değerini temin eder. Böylelikle, aşağıdaki teoremin doğru olduğu sonucuna varıyoruz.

Teorem 1. *(11) stratejisi, $\delta > 0$ sayısını uygun seçmekle, lider oyuncuya talep olunan $\varepsilon > 0$ doğrulukla (7) formülü ile tanımlanan optimal garantili değeri (kazancı) elde etmesi imkanını sağlar.*

Teorem 1 daha genel oyunlar için [Kononenko, 1977] makalesinde incelenmiştir. Amacımız, (1)-(4) dinamik sisteminin özel yapısını kullanarak, (7) probleminin çözümünü daha sade statik bir problemin çözümüne getirmektir.

(1), (2.), (4) sade hareketli antagonist pozisyon diferansiyel G_2 oyununu ele alalım [Subbotin, 1987], [Mamedov, 1990]. Bu oyunun değer fonksiyonu aşağıdaki formülle hesaplanır [Subbotin, 1987], [Mamedov, 1990]:

$$C_2(t,x) = \sup_{l\in R^n} [< l,x > +(\theta - t)\xi_2(l) - \sigma_2^*(l)] \quad (12)$$

Burada

$$\xi_2(l) = \min_{v\in Q} \max_{u\in P} < l, f(u,v) > \quad (13)$$

$$\sigma_2^*(l) = \sup_{l\in R^n} [< l,x > -\sigma_2(x)] \quad (14)$$

$\sigma_2^*(l)$ fonksiyonu $\sigma_2(x)$'in dual fonksiyonudur. $\sigma_2(x)$ amaç fonksiyonu Lipschitz koşulunu sağladığı için, $L_2 = \mathrm{dom}\ \sigma_2^*$ kümesi R^n uzayında kompakt olur. Buna göre (12) formülünü aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$C_2(t,x) = \max_{l\in L_2} [< l,x > +(\theta - t)\xi_2(l) - \sigma_2^*(l)] \quad (15)$$

Şimdi $D^{(2)}$ kümesini oluşturan $x(\cdot)$ hareketlerini inceleyelim. (6)'dan gördüğümüz gibi, $x(\cdot)\in D^{(2)}$ ise, $t_0 \leq t \leq \theta$ için

$$C_2(t, x(t)) \geq C_2(\theta, x(\theta)) = \sigma_2(x(\theta)), \tag{16}$$

koşulu sağlanır. (16)'da değer fonksiyonu yerine (15) formülünü kullanarak $D^{(2)}$ kümesine dahil olan hareketleri daha sade ve net belirleyen koşullar almaya çalışalım.

$L_{20}(t,x)$ ile aşağıdaki kümeyi gösterelim:

$$L_{20}(t,x)) = \{l \in R^n : < l, x > +(\theta - t)\xi_2(l) - \sigma_2^*(l) = C_2(t,x)\} \tag{17}$$

$L_{20}(t,x)\subset L_2=\mathrm{dom}\sigma_2^*$ ve L_2 kümesi R^n uzayında kompakt olduğundan $\forall(t,x)\in T\times R^n$ için $L_{20}(t,x))\neq\emptyset$ ve kompakttır.

Önce aşağıdaki yardımcı teoremi kanıtlayalım.

Yardımcı Teorem 2. *Her hangi bir $t\in[t_0,\theta]$ için*

$$\partial C_2(t,x) = Co(L_{20}(t,x)). \tag{18}$$

Kanıt. Maksimum fonksiyonunun subdiferansiyelinin hesaplanması kuralına esasen şunu yazabiliriz

$$\partial C_2(t,x) = Co\{\frac{\partial}{\partial x}[< l, x > +(\theta - t)\xi_2(l) - \sigma_2^*(l))] : l \in L_{20}(t,x)\}$$

Buradan (18) formülünü elde ederiz. Böylelikle, teorem kanıtlandı.

(17)'de $t = \theta$ kabul edilirse, $L_{20}(\theta, x))$ aşağıdaki şekli alır:

$$L_{20}(\theta,x)) = \{l \in R^n :< l,x > -\sigma_2^*(l) = C_2(\theta,x) = \sigma_2(x)\}$$

Bu sebepten, herhangi bir $x \in R^n$ için

$$\partial\sigma_2(x) = C_2(\theta,x) = CoL_{20}(\theta,x) = L_{20}(\theta,x). \tag{19}$$

Teorem 3.

$$x^0(t) = x_0 + (t - t_0)\zeta^0, \zeta^0 \in F^0, t \in [t_0, \theta]$$

hareketinin $D^{(2)}$ kümesine dahil olması için gerekli ve yeterli koşul aşağıdakidir:

$$\min_{l\in\partial\sigma_2(x^0(\theta))}[< l, \zeta^0 > -\xi_2(l)] \leq 0 \tag{20}$$

Kanıt. Aşağıdaki fonksiyonu ele alalım.

$$\Psi_2(t) = C_2(t, x^0(t)) = \max_{l\in L_2}[< l, x_0 + (t - t_0)\zeta^0 > + + (\theta - t)\xi_2(l) - \sigma_2^*(l)], \tag{21}$$

Burada $L_2=\mathrm{dom}\sigma_2^*$. (21) fonksiyonu $[t_0,\theta]$ aralığında sürekli konveks fonksiyondur.

Gereklilik. $x^0(\cdot)\in D^{(2)}$ olduğunu varsayalım, yani $\forall t\in[t_0,\theta]$ için

$$\Psi_2(t) = C_2(t, x^0(t)) \geq C_2(\theta, x^0(\theta)) = \Psi_2(\theta). \tag{22}$$

$\Psi_2(t)$ fonksiyonu $[t_0, \vartheta]$ aralığında konveks olduğu için bu fonksiyon (t_0, θ) aralığında 1 ve -1 yönlerinde türevlenebilir. (22)'ye esasen, θ noktasında -1 yönünde türev negatif olamaz. $\frac{\partial\Psi_2(t)}{\partial(-1)}$ türevini hesaplarsak

$$\frac{\partial\Psi_2(t)}{\partial(-1)} = \max_{l\in L_{20}(\theta,x^0(\theta))}\frac{\partial}{\partial t}\Big\{ < l, x_0 + (t - t_0)\zeta^0 > + + (\theta - t)\xi_2(l) - \sigma_2^*(l)\Big\}(-1) =$$

$$= \max_{l\in L_{20}(\theta,x^0(\theta))} -[< l, \zeta^0 + \xi_2(l)] \geq 0$$

elde ederiz. Yardımcı teoreme göre (19) eşitliği doğrudur. Sonuç olarak

$$\frac{\partial\Psi_2(t)}{\partial(-1)} = \max_{l\in\partial\sigma_2(x^0(\theta))} -[< l, \zeta^0 > +\xi_2(l)] \geq 0$$

olduğunu görürüz. Bu ise (20) formülünün aynısıdır.

Yeterlilik. Tersine, eğer (20) sağlanırsa, bu durumda $\Psi_2(t)$ fonksiyonunun θ noktasında sol türevi pozitif değildir, yani

$$\Psi'_{2-}(t) = -\frac{\partial\Psi_2(t)}{\partial(-1)} \leq 0$$

Konveks $\Psi_2(t)$ fonksiyonunun $\Psi'_{2-}(t)$ sol türev fonksiyonu azalmayan olduğudan, $\forall t \in [t_0,\theta]$ için $\Psi'_{2-}(t) \leq 0$ olur. Bu nedenle $\forall t \in [t_0,\theta]$ için $\Psi_2(t) \geq \Psi_2(\theta)$, başka deyişle

$$C_2(t, x^0(t)) \geq C_2(\theta, x^0(\theta))$$

olur. Yani, $x^0(\cdot) \in D^{(2)}$.

(20) koşulu herhangi $x^*(\cdot) \in \chi(t_0, x_0)$ hareketinin $D^{(2)}$ kümesinden olması için yeterli ve gerekli koşuldur [Mamedov, 1990]. Bu nedenle, aşağıdaki teoremi elde ederiz:

Teorem 4. *Herhangi bir $x^0(\cdot) \in \chi(t_0, x_0)$ hareketinin $x^0(\cdot) \in D^{(2)}$ olması için yeterli ve gerekli koşul*

$$\min_{l\in\partial\sigma_2(x^0(\theta))}[< l, \zeta^0 > -\xi_2(l)] \leq 0 \tag{23}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Burada $\zeta^0 = \frac{x^0(\theta)-x_0}{\theta-t_0}$.

(21) formülü ile tanımlanan $\Psi_2(t)$ fonksiyonu konveks olduğu için bu fonksiyon $[t_0,\theta]$ aralığında hemen her yerde diferansiyellenebilirdir. Buna göre hemen her $t \in [t_0,\theta]$ için

$$\Psi'_{2-}(t) = \Psi'_{2+}(t) = \frac{d\Psi_2(t)}{dt}.$$

O zaman teorem 2'den aşağıdaki sonucu elde ederiz:

Teorem 5.

$$x^0(t) = x_0 + (t - t_0)\zeta^0, \zeta^0 \in F^0, t \in [t_0, \theta]$$

hareketi $D^{(2)}$ kümesinde ise hemen her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\frac{dC_2(t, x^0(t))}{dt} \leq 0, \tag{24}$$

yani değer fonksiyonu bu hareket boyunca monoton azalır. Tersine, eğer (24) sağlanırsa $x_0(\cdot) \in D^{(2)}$.

Genelliği bozmaksızın, bundan sonra $t_0 = 0$, $\theta = 1$, $x_0 = 0$ kabul edebiliriz. Bu durumda (20) (veya (23)) formülü aşağıdaki şekli alır:

$$\min_{l \in \partial\sigma_2(\zeta^0)} [< l, \zeta^0 > - \xi_2(l)] \leq 0 \tag{25}$$

(25) formülünü sağlayan $\zeta^0 \in F^0$ hız vektörleri $D_\theta^{(2)}$ kesit kümesini karakterize eder. Bu durumda $x^0(t) = \zeta^0 \cdot t$, $0 \leq t \leq 1$, hareketi $D^{(2)}$ kümesinde olur. $\dot{x}^0(t) = \zeta^0$ olduğu için bilmekteyiz ki

$$\zeta^0 \in \{f(u, v) : u \in \mathrm{P}, v \in \mathrm{Q}\} = F^0.$$

Şimdi lider oyuncunun amaç fonksiyonunun garantili minimum değerinin ε doğrulukla hesaplanması için (7) problemini ele alalım. (7) formülünde önder oyuncunun σ_1 amaç fonksiyonunun değeri hareketin son noktasına bağlı olduğu için, bu formülü şöyle yazabiliriz:

$$K_{1,x} = \inf_{x(\theta) \in D_\theta^{(2)}} \sigma_1(x(\theta))$$

$t_0 = 0$, $\theta = 1$, $x_0 = 0$ kabul ettiğimiz için (7) problemi

$$K_{1,x} = \inf_{\zeta \in D_1^{(2)}} \sigma_1(x(\theta)) \tag{26}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $D_1^{(2)}$ kümesinin elemanları (25) formülü ile belirlenir, yani

$$D_1^{(2)} = \{\zeta^0 \in F^0 : \min_{l \in \partial\sigma_2(\zeta^0)} [< l, \zeta^0 > - \xi_2(l)] \leq 0\}$$

Bu bakımdan problem (26)'yı aşağıda gösterilen programlama problemi gibi yazabiliriz:

$$\begin{gathered} \sigma_1(\zeta) \mapsto \min_{\zeta} \\ \zeta^0 \in \mathrm{Co}\{f(u, v) : u \in \mathrm{P}, v \in \mathrm{Q}\} = F^0 \\ \min_{l \in \partial\sigma_2(\zeta^0)} [< l, \zeta^0 > - \xi_2(l)] \leq 0 \end{gathered} \tag{27}$$

öyle ki

$$\xi_2(l) = \min_{v \in \mathrm{Q}} \max_{u \in \mathrm{P}} < l, f(u, v) > . \tag{28}$$

Böylelikle lider oyuncunun "en iyi" garantili değeri (27)-(28) gibi matematiksel programlama problemi çözülerek bulunabilir. Yani, dinamik oyun problemi sade statik bir probleme dönüştürülür.

Özel olarak $f(u, v) = u + v$, P ve Q konveks, kompakt kümelerse , (27)-(28) problemi aşağıdaki şekli alır:

$$\begin{gathered} \sigma_1(u + v) \mapsto \min_{u,v} \\ u \in \mathrm{P} \qquad v \in \mathrm{Q} \\ \min_{l \in \partial\sigma_2(u+v)} [< l, u + v > - \xi_2(l)] \leq 0, \end{gathered} \tag{29}$$

burada

$$\xi_2(l) = \min_{v \in \mathrm{Q}} < l, v > + \max_{u \in \mathrm{P}} < l, u > \tag{30}$$

4. NASH DENGE DURUMLARI

1. oyuncu lider olduğunda $D^{(2)}$ kümesinden olan $x(\cdot)$ hareketleri 2. oyuncunun 1. nin stratejisine cevap olarak seçebileceği hareketlerdir. Bu hareketlere *Stackelberg anlamında 1-denge hareketleri* diyeceğiz. Teorem 2 ve 3'e göre, 1-denge hareketleri

$$\min_{l \in \partial\sigma_2(x^0(\theta))} [< l, \zeta^0 > - \xi_2(l)] \leq 0 \tag{31}$$

koşulunu sağlayan $x^0(\cdot) \in \chi(t_0, x_0)$ hareketleridir. Burada $\zeta^0 = \frac{x^0(\theta) - x_0}{\theta - t_0}$ ve

$$\xi_2(l) = \min_{v \in \mathrm{Q}} \max_{u \in \mathrm{P}} < l, f(u, v) > \tag{32}$$

dir.

Eğer 2. oyuncu lider, 1. ise takipçi olursa, bu zaman bölüm 3'deki gibi araştırma yaparak Stackelberg anlamında 2-denge hareketlerini tanımlayabiliriz.

$$\min_{l \in \partial\sigma_1(x^0(\theta))} [< l, \zeta^0 > - \xi_1(l)] \leq 0 \tag{33}$$

koşulunu sağlayan $x^0(\cdot) \in \chi(t_0, x_0)$ hareketlerine *Stackelberg anlamında 2-denge hareketleri* diyeceğiz. Burada $\zeta^0 = \frac{x^0(\theta) - x_0}{\theta - t_0}$ ve

$$\xi_1(l) = \min_{u \in \mathrm{P}} \max_{v \in \mathrm{Q}} < l, f(u, v) > \tag{34}$$

dir.

(31) - (34) formülleri birlikte *Nash denge hareketlerini* belirler [Mamedov, 1990]. Nash denge hareketleri kümesini D ile gösterirsek, o zaman $D = D^{(2)} \cap D^{(1)}$ olur. (31) - (34) formüllerini kullanarak aşağıdakini yazabiliriz:

$$\begin{aligned} D = \{ & x^0(\cdot) \in \chi(t_0, x_0) : \\ & \min_{l \in \partial\sigma_i(x^0(\theta))} [< l, \zeta^0 > - \xi_i(l)] \leq 0, i = 1, 2\} \end{aligned} \tag{35}$$

Burada $\zeta^0 = \frac{x^0(\theta)-x_0}{\theta-t_0}$ ve

$$\xi_1(l) = \min_{u\in P}\max_{v\in Q} < l, f(u,v) > \quad (36)$$

$$\xi_2(l) = \min_{v\in Q}\max_{u\in P} < l, f(u,v) > \quad (37)$$

dir. $t_0 = 0$, $\theta = 1$, $x_0 = 0$ kabul edersek, (35) formülü aşağıdaki şekli alır:

$$D = \{\zeta^0 \in F^0 : \min_{l\in\partial\sigma_i(\zeta^0)} [< l, \zeta^0 > -\xi_i(l)] \le 0, i = 1,2\} \quad (38)$$

Eğer $f(u,v) = u + v$, P ve Q konveks, kompakt kümelerse $F^0 = P + Q$ olur ve (36), (37) formülleri aşağıdaki şekli alırlar:

$$\xi_1(l) = \min_{u\in P} < l, u > + \max_{v\in Q} < l, v > \quad (39)$$

$$\xi_2(l) = \min_{v\in Q} < l, v > + \max_{u\in P} < l, u > \quad (40)$$

(1)-(4) oyununda aşağıdaki yapıya sahip

$$u^\varepsilon(t,x) = \begin{cases} u^\varepsilon(t) & ,(t,x)\in G^\delta \text{ ise} \\ u^{\varepsilon c}(t,x) & ,(t,x)\notin G^\delta \text{ ise} \end{cases} \quad (41)$$

$$u^\varepsilon(t,x) = \begin{cases} u^\varepsilon(t) & ,(t,x)\in G^\delta \text{ ise} \\ u^{\varepsilon c}(t,x) & ,(t,x)\notin G^\delta \text{ ise} \end{cases} . \quad (42)$$

(41),(42) stratejiler çifti denge durumu oluşturur. Burada G^δ, denge hareketinin δ çevresini kapsayan boru kümedir.

KAYNAKÇA

Germeyer, Yu. ,B. (1971). On Two-Person Games with Fixed Sequence of Moves. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 198, 1001–1004 (in Russian).

Simaan, M. and J. Cruz (1973). On the Stackelberg Strategy in Nonzero-Sum Games. *Journ. of Optim. Theory and Appl.* 11(5).

Germeyer, Yu. B. (1976). *The Games with Nonopposite Interest.* Nauka: Moscow (in Russian).

Kononenko, A. F. (1976). On the Equilibrium Positional Strategy in Nonantagonistic Differential Games. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 231, 285–288 (in Russian).

Kononenko, A. F. (1977). On Many-Step Conflicts with Information Exchange. *Jurn. Vichislitelnoy Matem. i Matem. Fiziki* 17(4), 922–934 (in Russian).

Kononenko, A. F. (1980). The Structure of Optimal Strategy in Dynamic Control Systems. *Jurn. Vichislitelnoy Matem. i Matem. Fiziki* 20(5), 1105–1116 (in Russian).

Kononenko, A. F. and M. Mamedov (1990). Nonantagonistic Two-Person Linear - Quadratik Differential Games. *Journ. Probl. Control and Inform. Theory* 9(4), 297–312.

Mamedov, M. B. (1990). On Pareto-optimality of Nash Equilibrium Situation in Conflict - Control Dynamic Systems. *Jurn. Vichislitelnoy Matem. i Matem. Fiziki* 30(7), 984–996 (in Russian).

Basar, T. and G. Olsder (1995). *Dynamic Noncooperative Game Theory* Academic Press.

Krasovskiy, N. and A. Subbotin (1976). *The Positional Differential Games* , Nauka: Moscow (in Russian).

Subbotin, A. I. (1987). Calculating The Value of Draw-Near Differential Game with Simple Motions.*In: Upravleniye s Garantirovannim Rezultatom (Subbotin, A. ,I. and A. F. Kleimenov, eds)* 71–76. Inst. Math. Mech.: Sverdlovsk (in Russian).

Mammadağha MAMMADOV

1971 yılında Azerbaycan Devlet Üniversitesi, Mekanik - Matematik Bölümü'nden mezun oldu. 1977'de Rusya Bilimler Akademisi'nin Hesaplama merkezinde doktorasını tamamladı. Halen Anadolu Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstatistik Bölümü'nde öğretim üyesidir.