YİNELENEN TUTUKLU İKİLEMİ

Yüksek Lisans Tezi

Gökhan AKALİN

Şubat, 2018

YİNELENEN TUTUKLU İKİLEMİ

Gökhan Akalin

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Serkan ALİ DÜZCE

Eskişehir
Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Şubat, 2018

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Gökhan AKALİN'in **"YİNELENEN TUTUKLU İKİLEMİ"** başlıklı tezi **9/2/2018** tarihinde, aşağıdaki juri tarafından değerlendirilerek "Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği"nin ilgili maddeleri uyarınca, **Matematik** Anabilim dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

		Unvanı-Adı Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	:	Prof. Dr. Serkan ALİ DÜZCE	....
Üye	:	Prof. Dr. Emrah AKYAR	....
Üye	:	Doç. Dr. Ali Serdar NAZLIPINAR	....

Enstitü Müdürü

ÖZET

YiNELENEN TUTUKLU İKİLEMi

Gökhan AKALİN

Matematik Anabilim Dalı
Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Şubat, 2018

Danışman: Prof. Dr. Serkan ALİ DÜZCE

Bu çalışmada, yinelenen tutuklu ikilemi ve bu oyunda, oyuncular arasındaki iş birliğini teşvik edici, zorlayıcı, çeşitli stratejilerden bahsedilmiştir. Yinelenen tutuklu ikilemine yeni bir bakış açısıyla oyuncuların getirileri arasında doğrusal bir ilişki kuran sıfır determinantlı strateji uzayı tanıtılmıştır. Bir başka bakış açısıyla, etkileşim içindeki taraflara iş birlikçi olmayı nasıl dayatabiliriz sorusuna bir cevap niteliğindeki iyi stratejiler ele alınmıştır. Son olarak sıfır determinantlı stratejiler ve iyi stratejilerden yola çıkarak iş birlikçi davranışa teşvik eden ve iş birliğini daha kararlı hale getiren cömert sıfır determinantlı stratejiler incelenmiştir.

Anahtar Sözcükler: Yinelenen Tutuklu İkilemi, ZD Stratejiler,
İyi stratejiler, Cömert Stratejiler.

ABSTRACT

ITERATED PRISONER'S DILEMMA

Gökhan AKALİN

Department of Mathematics

Anadolu University, Graduate School of Sciences, February, 2018

Supervisor: Prof. Dr. Serkan ALİ DÜZCE

In this study, the iterated prisoner's dilemma and the various strategies that are encouraging, challenging, and promoting cooperation between players in this game are mentioned. A new deterministic strategy space, which establishes a linear relationship between the players' payoffs, is introduced to the iterated prisoner's dilemma. From another point of view, good strategies as an answer to the question of how we can challenge cooperating parties are discussed. Finally, it is examined generous zero-determinant strategies that are driven by zero determinant strategies and good strategies, which encourage cooperative behavior and make the cooperation more stable.

Keywords: Iterated Prisoner's Dilemma, ZD strategies
Good Strategies, Generous Strategies

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında büyük emekleri olan ve her türlü desteklerini benden esirgemeyen herkese en içten teşekkürlerimi sunarım.

Gökhan AKALİN

Şubat 2018

9/2/2018

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilemeyen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Anadolu Üniversitesi tarafından kullanılan "bilimsel intihal tespit programı"yla tarandığını ve hiçbir şekilde "intihal içermediğini" beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm.

Gökhan AKALİN

İÇİNDEKİLER

Sayfa

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}$	: Gerçel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	: n boyutlu gerçel vektörler kümesi
p_1	: X oyunucunun bir önceki oyunda cc çıktısına karşılık c oynama olasılığı
Adj(M)	: M matrisinin adjoint matrisi
$\tilde{\mathrm{p}}$	: p vektörüne karşılık gelen Press Dyson vektörü
S_X	: X oyuncusunun getiri vektörü
s_X	: X oyuncusunun getirisi
v	: Oyunun durağan vektörü
v_{cc}	: Yinelenen oyunda cc çıktısının meydana gelme sıklığı
χ	: Zorbalık faktörü

1. GİRİŞ

1944'te John von Neumann ve Oskar Morgenstern "Oyun Teorisi ve Ekonomik Davranış" kitabını yayınladılar [1]. Bu kitap ile bir bilim dalı olarak adı konan "Oyun Teorisi" nin, matematikten biyolojiye, sosyolojiden psikolojiye, ekonomiden siyasete inanılmaz çeşitlilikteki bir yelpazede hemen hemen tüm bilimlerin gelişimi üzerindeki etkisi büyük oldu [2]- [17]. Bu bilim dalının en önemli problemlerinden biri olan tutuklu ikileminin yapısıyla ilgili bulmacalar, Rand Corporation'ın oyun teorisi araştırmalarının bir parçası olarak 1950'lerde Merrill Flood ve Melvin Dresher tarafından tasarlandı. "Tutuklu ikilemi" başlığı ve hapis cezaları ödenek olarak verilen versiyon, Flood ve Dresher'ın fikirlerini daha erişilebilir kılmak isteyen Stanford psikologlarından Albert Tucker'dan kaynaklanmaktadır. Flood ve Dresher kendi makalelerinde fikirlerini duyurmak için acele etmemesine rağmen, bulmaca farkedildiğinden beri çeşitli disiplinlerde yaygın ve artan ilgi görmüştür. [12]

Rekabet kavramına dayalı Darwinci ilkeye göre iş birlikçi ve fedakar davranışlar bir sorun gibi görülür fakat bu doğada görülebilir büyük ölçütlü iş birliklerini açıklamaya yetmez. Bugün hem insan toplumunda, hem de evrim biyolojisinde meydana gelen rekabetler ve iş birlikleri ikilemler doğurur. Bu ikilemler özel çıkarların, ortaklaşa çıkarlarla çatışmasıyla ortaya çıkar. Bugün ikilemlerin, iş birliğinin, rekabetin analizinde matematikçiler oyun teorisini temel araç olarak kullanmaktadır. Tek seferlik bir etkileşimde (oyunda) oyuncular her zaman rakibinin stratejisini gözardı ederek bencil stratejiler seçer. Böylece iş birlikçi ikilem doğar. Bu iş birliğinin çöküşü " trajedinin " basit bir modeli olarak görülebilir [17]. Trajediden kaçmak için tek bir geçerli yaklaşım, uzun vadeli ilişkiler kurmaktır. Diğer bir değişle, oyunu tekrar oynamaktır. Tekrarlanan etkileşimde gelecekteki ödül ve tehdit vaatleri bugünkü iyi davranışı belirleyebilir. Bu yüzden tekrarlanan bir etkileşimde(oyunda) bir oyuncu sosyal normlara ve itibara sahip oyunculardan geri gelecek bildirimleri hesaba katması gerekir. Bu anlamda, yinelenen tutuklu ikilemi 80'lerden bu yana iş birliğinin gelişimi adına artan bir ilgi ile incelenmektedir [2]- [16].

2.Bölümde oyun teorisi ile ilgili temel kavram ve bilgilere yer verilmiş, klasik tutuklu ikileminin çözümü ele alınmıştır. 3.Bölümde yinelenen tutuklu ikilemi tanıtılmış, yinelenen tutuklu ikileminde oyunculaın getirileri arasında doğrusal bir ilişki kuran yeni bir strateji uzayından bahsedilmiştir. 4.Bölümde yinelenen tutuklu ikilemi oyununda, oyuncular iş birlikçi stratejiler kullanmaya nasıl zorlanabilir sorusuna yanıt aranmıştır. Yinelenen tutuklu ikileminde iyi stratejiler tanımlanmıştır. 5.Bölümde sıfır determinantlı (ZD) stratejiler ve iyi stratejilerden yola çıkılarak tarafları daha cömert davranışa teşvik eden ve iş birliği tutumunu kararlı hale getiren stratejiler ele alınmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. İki Kişilik Sıfır Toplamlı Olmayan Sonlu Oyunlar

İki kişilik sonlu bir $n \times m$ oyun ele alalım. $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \ldots, \mathrm{I}_n$, I. oyuncunun saf stratejileri, $\mathrm{II}_1, \mathrm{II}_2, \ldots, \mathrm{II}_m$, II. oyuncunun saf stratejileri olsun. I. oyuncu I_i, II. oyuncu II_j stratejisi ile oynadığında, I. oyuncunun getirisi $g^1_{ij} = g^1(\mathrm{I}_i, \mathrm{II}_j)$, II. oyuncunun getirisi ise $g^2_{ij} = g^2(\mathrm{I}_i, \mathrm{II}_j)$ olsun. I. oyuncu I_i, II. oyuncu II_j stratejisi ile oynadığında, oyunun getirisi olarak $(g^1_{ij}, g^2_{ij}) = (g^1(\mathrm{I}_i, \mathrm{II}_j), g^2(\mathrm{I}_i, \mathrm{II}_j))$ sıralı ikilisini alacağız. Sıfır toplamlı olmayan oyunda, oyuncuların getirilerini

$$G = \begin{array}{c} \\ \mathrm{I}_1 \\ \mathrm{I}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{I}_\mathrm{n} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathrm{II}_1 & \mathrm{II}_2 & \ldots & \mathrm{II}_\mathrm{m} \end{array} \\ \begin{pmatrix} (g^1_{11}, g^2_{11}) & (g^1_{12}, g^2_{12}) & \ldots & (g^1_{1m}, g^2_{1m}) \\ (g^1_{21}, g^2_{21}) & (g^1_{22}, g^2_{22}) & \ldots & (g^1_{2m}, g^2_{2m}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (g^1_{n1}, g^2_{n1}) & (g^1_{n2}, g^2_{n2}) & \ldots & (g^1_{nm}, g^2_{nm}) \end{pmatrix} \end{array} \tag{2.1}$$

tablosu ile göstereceğiz. (2.1) tablosuna ele alınan oyunun *bimatrisi* denir.

$$X_n = \left\{ \mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) : \forall\ i = 1, 2, \ldots, n \text{ için } x_i \geq 0 \text{ ve } \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\}$$

kümesine, I. oyuncunun karma stratejiler kümesi,

$$Y_m = \left\{ \mathrm{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m) : \forall\ j = 1, 2, \ldots, m \text{ için } y_j \geq 0 \text{ ve } \sum_{j=1}^{m} y_j = 1 \right\}$$

kümesine de II. oyuncunun karma stratejiler kümesi denir.

Oyunda I. oyuncu $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X_n$ karma stratejisi, II. oyuncu $\mathrm{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \in Y_m$ karma stratejisi ile oynadığında, I. oyuncunun getirisi

$$g_1(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} x_i g^1_{ij} y_j \ ,$$

II. oyuncunun getirisi ise

$$g_2(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} x_i g_{ij}^2 y_j$$

olarak alınır.

Önerme 2.2. *[14]* $(\mathrm{x},\mathrm{y}) \to g_1(\mathrm{x},\mathrm{y}) : X_n \times Y_m \to \mathbb{R}$ *ve* $(\mathrm{x},\mathrm{y}) \to g_2(\mathrm{x},\mathrm{y}) : X_n \times Y_m \to \mathbb{R}$ *fonksiyonları* (x,y) *değişkenlerine göre süreklidir. Ayrıca her sabitlenmiş* $\mathrm{x} \in X_n$ *için* $\mathrm{y} \to g_1(\mathrm{x},\mathrm{y})$, $\mathrm{y} \to g_2(\mathrm{x},\mathrm{y})$ *ve her sabitlenmiş* $\mathrm{y} \in Y_m$ *için* $\mathrm{x} \to g_1(\mathrm{x},\mathrm{y})$, $\mathrm{x} \to g_2(\mathrm{x},\mathrm{y})$ *doğrusal fonksiyonlardır.*

Oyunda I. oyuncunun amacı karma $\mathrm{x} \in X_n$ stratejilerini seçerek kendi $g_1(\mathrm{x},\mathrm{y})$ getirisini maksimalleştirmek, II. oyuncunun amacı ise karma $\mathrm{y} \in Y_m$ stratejilerini seçerek kendi $g_2(\mathrm{x},\mathrm{y})$ getirisini maksimalleştirmektir.

Oyunun getiri bimatrisinden, sadece I. oyuncunun getirilerini yazarsak

$$G_1 = \begin{array}{c} \\ \mathrm{I}_1 \\ \mathrm{I}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{I}_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathrm{II}_1 & \mathrm{II}_2 & \dots & \mathrm{II}_m \end{array} \\ \begin{pmatrix} g_{11}^1 & g_{12}^1 & \cdots & g_{1m}^1 \\ g_{21}^1 & g_{22}^1 & \cdots & g_{2m}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1}^1 & g_{n2}^1 & \cdots & g_{nm}^1 \end{pmatrix} \end{array} \tag{2.2}$$

matrisini elde ederiz. Eğer oyunun getiri bimatrisinden, sadece II. oyuncunun getirilerini yazarsak

$$G_2 = \begin{array}{c} \\ \mathrm{I}_1 \\ \mathrm{I}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{I}_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathrm{II}_1 & \mathrm{II}_2 & \dots & \mathrm{II}_m \end{array} \\ \begin{pmatrix} g_{11}^2 & g_{12}^2 & \cdots & g_{1m}^2 \\ g_{21}^2 & g_{22}^2 & \cdots & g_{2m}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1}^2 & g_{n2}^2 & \cdots & g_{nm}^2 \end{pmatrix} \end{array} \tag{2.3}$$

matrisini elde ederiz. (2.2) ile verilen G_1 matrisine I. oyuncunun, (2.3) ile verilen G_2 matrisine ise II. oyuncunun getiri matrisi denir. Şimdi getiri matrisi (2.2) ile verilen sıfır toplamlı oyunu ele alalım. Bu oyunda I. oyuncu $\mathrm{x} \in X_n$ karma stratejisini seçerek $g_1(\mathrm{x},\mathrm{y})$ getirisini maksimalleştirmeye, II. oyuncu ise $\mathrm{y} \in Y_m$ karma stratejisini seçerek $g_1(\mathrm{x},\mathrm{y})$ getirisini minimalleştirmeye çalışır. Bu oyunun $(\mathrm{x}_1^*, \mathrm{y}_1^*, \nu_1)$ çözümü vardır. Burada x_1^*, I. oyuncunun optimal stratejisi, y_1^*, II. oyuncunun optimal stratejisi, ν_1 ise oyunun değeridir. O halde

$$\text{keyfi } \ \mathrm{y} \in Y_m \text{ için } g_1(\mathrm{x}_1^*, \mathrm{y}) \geq \nu_1$$

olur. Yani oyunda I. oyuncu x_1^* stratejisi ile oynarsa, kendisi için en az ν_1 getirisini garantilemiş olur.

Şimdi getiri matrisi (2.3) ile verilen sıfır toplamlı oyunu ele alalım. Bu oyunda II. oyuncu $\mathrm{y} \in Y_m$ karma stratejisini seçerek $g_2(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ getirisini maksimalleştirmeye, I. oyuncu ise $\mathrm{x} \in X_n$ karma stratejisini seçerek $g_2(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ getirisini minimalleştirmeye çalışır. Bu oyunun $(\mathrm{y}_2^*, \mathrm{x}_2^*, \nu_2)$ şeklinde bir çözümü vardır. Burada y_2^* ve x_2^* sırasıyla II. ve I. oyuncunun optimal stratejileri, ν_2 ise oyunun değeridir. O halde

$$\text{keyfi } \ \mathrm{x} \in X_n \text{ için } g_2(\mathrm{x}, \mathrm{y}_2^*) \geq \nu_2$$

olur. Yani oyunda II. oyuncu y_2^* stratejisi ile oynarsa, kendisi için en az ν_2 getirisini garantilemiş olur.

Yaptığımız yorumlara uygun olarak, G getiri bimatrisi (2.1) ile verilen iki kişilik sonlu oyunun maksimin değerini ve oyuncuların maksimin stratejilerini tanımlayalım.

Tanım 2.3. *[14] Bimatrisi (2.1) ile verilen iki kişilik sonlu oyunu ele alalım.*

$$\nu_1 = \max_{\mathrm{x} \in X_n} \min_{\mathrm{y} \in Y_m} g_1(\mathrm{x}, \mathrm{y}), \quad \nu_2 = \max_{\mathrm{y} \in Y_m} \min_{\mathrm{x} \in X_n} g_2(\mathrm{x}, \mathrm{y})$$

olsun. ν_1 *sayısına* I. *oyuncunun maksimin değeri,* ν_2 *sayısına* II. *oyuncunun maksimin değeri denir.* (ν_1, ν_2) *sıralı ikilisine oyunun* maksimin değeri *denir.*

Ayrıca

$$\nu_1 = \min_{\mathrm{y} \in Y_m} g_1(\mathrm{x}_1^*, \mathrm{y})$$

olacak biçimdeki $\mathrm{x}_1^* \in X_n$ *stratejisine* I. *oyuncunun maksimin stratejisi,*

$$\nu_2 = \min_{\mathrm{x} \in X_n} g_2(\mathrm{x}, \mathrm{y}_2^*)$$

olacak biçimdeki $\mathrm{y}_2^* \in Y_m$ *stratejisine ise* II. *oyuncunun maksimin stratejisi denir.*

(x_1^*, y_2^*) *ikilisine de oyunun* maksimin stratejileri *denir.*

(ν_1, ν_2) ikilisi oyunun maksimin değeri, (x_1^*, y_2^*) ikilisi oyunun maksimin stratejileri olsun. Bu durumda Tanım 2.3 gereği, I. oyuncu $x_1^* \in X_n$ stratejisi ile oynarsa kendisi için her zaman en az ν_1 getirisini, II. oyuncu ise $y_2^* \in Y_m$ stratejisi ile oynarsa kendisi için her zaman en az ν_2 getirisini garantiler.

Başka deyişle, eğer (ν_1, ν_2) ikilisi oyunun maksimin değeri, (x_1^*, y_2^*) ikilisi oyunun maksimin stratejileri ise I. oyuncu $x_1^* \in X_n$ stratejisi ile oynarken her zaman en fazla $-\nu_1$ kadar, II. oyuncu ise $y_2^* \in Y_m$ stratejisi ile oynarken her zaman en fazla $-\nu_2$ kadar kayıp verebilir.

Örnek 2.4 (Tutuklu İkilemi). *[14] Biri sabit küçük, diğeri sabit olmayan büyük olmak üzere iki suçtan, iki kişi gözaltına alınmıştır ve ayrı odalarda tutularak sorgulanmaktadır. Sorgulanan kişilerin sessiz kalarak iş birliği (cooperate) veya suçu karşısındakinin yaptığını söyleyerek kaçmak (defect) şeklinde iki seçeneği vardır.*

Eğer ikisi de iş birliği yaparak susmayı tercih ederse, her biri sabit küçük suçlarından ötürü birer yıl hapis cezası alacaktır. Eğer biri iş birliği yaparak susmayı tercih ederken, diğeri suçun diğer kişi tarafından işlendiğini söyleyerek kaçmayı (defect) tercih ederse, iş birliği yapmayı tercih eden beş yıl hapis cezası alacak, kaçmayı tercih eden serbest bırakılacaktır. Eğer her ikisi de suçun diğeri tarafından işlendiğini söyleyerek kaçmayı seçerse, her biri üçer yıl hapis cezası alacaktır.

Bu durumda bu kişiler nasıl davranmalıdır?

Bu oyunda I. ve II. oyuncunun stratejileri aşağıdaki gibidir:

I_1(c): I. şüpheli II. şüpheli ile iş birliği yapmayı tercih ediyor;

I_2(d): I. şüpheli kaçmayı tercih ediyor.

II_1(c): II. şüpheli I. şüpheli ile iş birliği yapmayı tercih ediyor;

II_2(d): II. şüpheli kaçmayı tercih ediyor.

Oyunun kuralları gereği, oyuncular saf stratejilerle oynadıklarında, getirileri

$$g^1_{cc} = -1, \quad g^1_{cd} = 0, \quad g^1_{dc} = -5, \quad g^1_{dd} = -3,$$

$$g^2_{cc} = -1, \quad g^2_{cd} = -5, \quad g^2_{dc} = 0, \quad g^2_{dd} = -3$$

olur. Bu durumda oyunun getiri bimatrisi

$$G = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} (-1,-1) & (-5,-0) \\ (0,-5) & (-3,-3) \end{pmatrix} \end{array}$$

olur.

Şimdi getiri bimatrisi G olan oyunda, oyuncuların maksimin stratejilerini ve oyunun maksimin değerini bulalım.

I. oyuncunun getiri matrisi

$$G_1 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \end{array}$$

biçimindedir. Bu oyunda, I. oyuncunun amacı getirisini maksimalleştirmek, II. oyuncunun amacı ise I. oyuncunun getirisini minimalleştirmektir. Getiri matrisi G_1 olan oyunda bastırılan stratejileri atarak oyunu sadeleştirirsek,

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c c} & d \\ \begin{array}{c} c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c c} & d \\ d & \begin{pmatrix} -3 \end{pmatrix} \end{array}$$

olur. Böylece, sadeleştirilmiş oyunun çözümü $(d, d, -3)$ üçlüsüdür. Sadeleştirilmiş oyunun çözümü aynı zamanda oyunun çözümü olduğu için, $(d, d, -3)$ üçlüsü getiri matrisi G_1 matrisi olan sıfır toplamlı oyunun çözümü olur.

Böylece, getiri bimatrisi olan oyunda, yani tutuklu ikileminde, I. oyuncunun maksimin stratejisi I_2, maksimin değeri ise $\nu_1 = -3$ olur.

Tutuklu ikileminde II. oyuncunun getiri matrisi

$$G_2 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} \end{array}$$

biçimindedir. Bu oyunda, II. oyuncunun amacı getirisini maksimalleştirmek, I. oyuncunun amacı ise II. oyuncunun getirisini minimalleştirmektir. Getiri matrisi G_2 olan oyunda bastırılan stratejileri atarak oyunu sadeleştirirsek,

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cc} & d \\ \begin{array}{c} c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cc} & d \\ d & \begin{pmatrix} -3 \end{pmatrix} \end{array}$$

olur. Böylece, sadeleştirilmiş oyunun çözümü $(d, d, -3)$ üçlüsüdür. O halde $(d, d, -3)$ üçlüsü getiri matrisi G_2 matrisi olan sıfır toplamlı oyunun çözümü olur.

Böylece, getiri bimatrisi olan oyunda, yani tutuklu ikilemi, II. oyuncunun maksimin stratejisi d, maksimin değeri ise $\nu_2 = -3$ olur.

Sonuç olarak, getiri bimatrisi olan oyunda, yani tutuklu ikilemi oyunun maksimin stratejileri (d, d) ikilisi, maksimin değeri ise $(\nu_1, \nu_2) = (-3, -3)$ ikilisi olur.

3. YİNELENEN TUTUKLU İKİLEMİ

Tutuklu ikilemi, tekrarlanırsa ne olur? Arka arkaya belirlenen tur sayısında tutuklu ikilemi oyununu oynayan taraflar için nasıl stratejiler belirlenmelidir? Robert Axelrod, yaklaşık 40 yıl önce düzenlediği bir turnuva ile Yinelenen Tutuklu İkilemi (IPD-Iterated Prisoner's Dilemma) kavramını tüm dünyaya tanıttı. Axelrod tarafından oyun teorisi ile ilgilenen her daldan insanı, belli sayıda bir turda diğer tüm katılanların algoritmalarıyla karşılaşarak, tutuklu ikilemini ard arda oynayacak bir turnuva düzenledi. Bu turnuvanın kazananı, Anatol Rapport'un *Her zaman iş birliği ile başla, sonra rakibin ne yaparsa sen de onu yap* şeklinde tanımlanan Tit-For-Tat (TFT-Kısasa Kısas) stratejisi oldu. Axelrod, elde ettiği sonuçları "The Evolution of Cooperation" isimli kitabında 1984 yılında yayınlandı [13]. Daha sonra ilgi çeken IPD analiz edilmeye böyle başlandı.

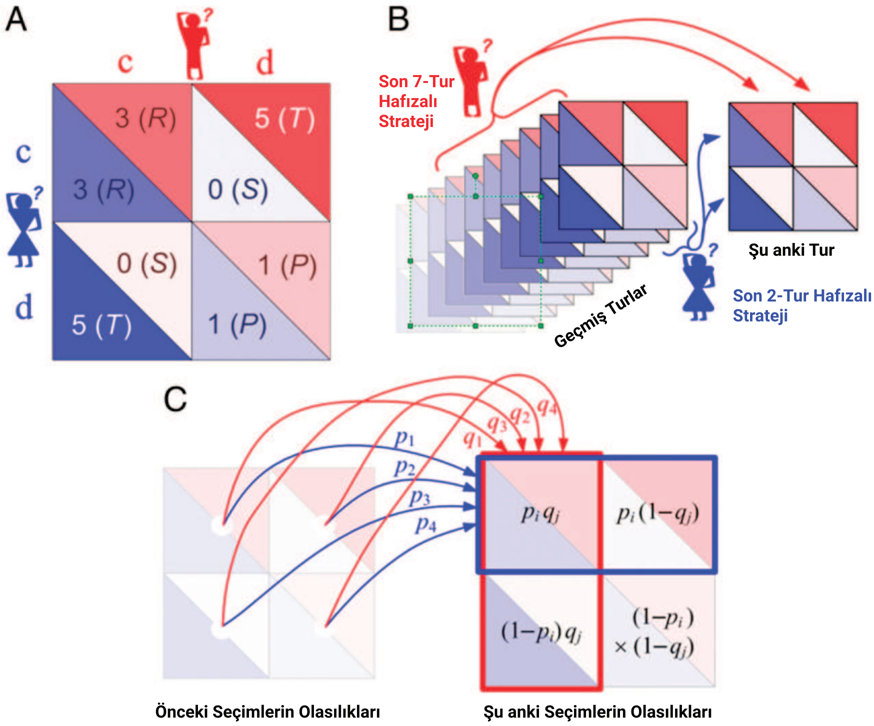
Yinelenen tutuklu ikilemi, iş birliğinin gelişimi için uzunca bir dönem boyunca incelendi. Yakın zamanda Press ve Dyson stratejilerin, sıfır determinantlı (ZD) stratejiler adını verdiği yeni bir sınıfını keşfetti [8]. Yinelenen oyunlarda ZD stratejisi kullanarak, bir oyunu tek taraflı olarak rakibinin beklenen değerini arzuladığı değere getirebilir veya doğrusal bir ilişki uygulayarak rakibini zorlayabilir. Böylece ZD stratejisi oyuncuya tek taraflı kontrol sağlar.

Bir kez oynanan tutuklu ikilemini bir daha ele alınırsa; eğer tutukluların her ikisi de iş birliği (c=cooperate) yaparak susmayı tercih ederse, her ikisi de ödül olan getiriyi R (Reward for mutual cooperation) kazanır. Eğer tutuklulardan biri suçlamayı (d=defect), diğeri susmayı (c) tercih ederse, suçlayan en büyük getiri olan T'yi (Temptation to defect) kazanırken, iş birliğini tercih eden en küçük getiri olan S'yi (Sucker's payoff) alır. Son olarak, her ikisi de suçlamayı (d) tercih ederse, P (Punishment for mutual cooperation) getirisinine sahip olurlar. Burada

$$\mathrm{T} > \mathrm{R} > \mathrm{P} > \mathrm{S},$$

$$2\mathrm{R} > \mathrm{T} + \mathrm{S}$$

eşitsizliklerinin sağlanması gerekir. İlk eşitsizlik oyuncuların karşılıklı olarak birbirini suçlamayı tercih ederek ulaşacakları Nash dengesini garanti ederken, ikinci



Şekil 3.1: *(A) Tutuklu ikileminin tek oyuncusu. Oyuncular X ve Y, (en yaygın sayısal değerlerle birlikte) gösterilen R, T, S veya P getirileri ile (c) işbirliği yapmayı veya (d) kaçmayı seçerler. (B) Yinelenen tutuklu ikileminde (IPD), aynı iki oyuncu, aynı oyunu keyfi olarak birçok kez oynar; her biri önceki oyunların sonlu bir hafızasına dayanan bir stratejiye sahiptir. (C) İki hafıza örneği - bir oyuncu. Her oyuncunun stratejisi, önceki hareketin dört sonucuna göre dört olasılık (işbirliği) vektörüdür.*

eşitsizlik karşılıklı iş birliğinin, toplamda, taraflar için en iyi getiri olmasını sağlar. Uygulamalarda, yaygın olarak $(\mathrm{T}, \mathrm{R}, \mathrm{P}, \mathrm{S}) = (5, 3, 1, 0)$ olarak alınır.

$$G = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} (\mathrm{R}, \mathrm{R}) & (\mathrm{S}, \mathrm{T}) \\ (\mathrm{T}, \mathrm{S}) & (\mathrm{P}, \mathrm{P}) \end{pmatrix} \end{array} \tag{3.1}$$

Yinelenen tutuklu ikilemi oyununda rakiplerin önceki turlarda kullandıkları stratejilerin tamamanı hatırlamaları zor olmasının dışında, şu anki oyundan kazanç sağlamak için bir önceki turu hatırlamanın yeterli olacağı, daha önceki adımları hatırlamanın, sonuçlara çok etkisi olmadığı ispatlanmıştır [8]. Burada da, her iki oyuncunun sadece bir önceki turu hatırlayacağı hafızaya sahip olduğu varsayılacaktır. Bu durum, oyunun tek-tur hafızalı olması olarak adlandırılır.

O halde (c) iş birliğini, (d) kaçmayı temsil etmek üzere bir önceki oyunda

$$cc, cd, dc, dd$$

şeklinde dört durum meydana gelmesi mümkündür. Yani cd sonucu ortaya çıktıysa X'in iş birliğini Y'nin kaçmayı tercih ettiği anlaşılmalıdır. X oyuncusunun her zaman önce oynadığı varsayılsın. O zaman şu anki oyunda X'in iş birliği için koşullu olasılıkları

$$\left\{P\left(X=\frac{c}{cc}\right), P\left(X=\frac{c}{cd}\right), P\left(X=\frac{c}{dc}\right), P\left(X=\frac{c}{dd}\right)\right\}.$$

şeklinde yazılabilir.

Bunun yerine, X'in stratejisi p : (p_1, p_2, p_3, p_4) notasyonu kullanılacaktır. Benzer şekilde Y'nin stratejisi kendi açısından q : (q_1, q_2, q_3, q_4) ya da q : (q_1, q_3, q_2, q_4) yazılabilir. Burada Y karşılık veren olarak düşünüldüğü için q_3 ve q_2'nin sırası değişmiştir.

3.1. Sıfır Determinantlı (ZD) Strateji

Y oyuncusunun p'ye karşı q stratejisini oynaması için oyunun her adımını hatırlaması gerekli değildir. Yukarıda tanımladığımız p ve q koşullu olasılıkları bize şu anki turdan bir sonraki tur için oyuncuların oynayacağı stratejiler hakkında fikir verir. Örneğin ilk oyunda cc sonucu ortaya çıkmışsa, bir sonraki oyunda

p_1q_1	:	Her ikisinin de iş birliğini tercih ettiğini,
$p_1(1-q_1)$	:	X'in iş birliğini Y'nin kaçmayı tercih ettiğini,
$(1-p_1)q_1$	:	X'in kaçmayı Y'nin işbiriliğini tercih ettiğini,
$(1-p_1)(1-q_1)$	:	Her ikisinin de kaçmayı tercih ettiğini gösterir.

Başlangıç oyununda çıkan 4 durumun herbiri için 4 koşullu olasılığı mevcut olacağı için bize $4 \times 4 = 16$ geçiş olasılığı verir.Buda 4×4 geçiş matrisi olarak ifade edilebilir.

$$
\mathbf{M} = \begin{bmatrix} p_1q_1 & p_1(1-q_1) & (1-p_1)q_1 & (1-p_1)(1-q_1) \\ p_2q_3 & p_2(1-q_3) & (1-p_2)q_3 & (1-p_2)(1-q_3) \\ p_3q_2 & p_3(1-q_2) & (1-p_3)q_2 & (1-p_3)(1-q_2) \\ p_4q_4 & p_4(1-q_4) & (1-p_4)q_4 & (1-p_4)(1-q_4) \end{bmatrix} \tag{3.2}
$$

M matrisi bir Markov matrisidir. Çünkü zaman içerisindeki bir durumdan diğer bir duruma olasılıklı olarak geçen bir sistemdir. Ayrıca gelecekteki durumun koşullu olasılığı şimdiki duruma bağlı olup geçmişteki durumdan bağımsızdır. Ve şu özellikleri sağlar:

- M matrisinin her bir bileşeninin değeri 0 ile 1 arasındadır.
- M matrisinin her bir satırındaki bileşenlerin toplamı 1 olur.

O halde M matrisi ard arda kendisi ile çarpılırsa denge durumuna ulaşacaktır. Yani, yeterince uzun bir geçiş sürecinden sonra sabit değere yaklaşma eğilimi gösterir ve kararlı hale gelir.

$$
\lim_{n\to\infty} M^n = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{bmatrix}
$$

$\mathrm{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ bu matrisin durağan vektörü olmak üzere $\mathrm{v^n} = \mathrm{v^{n-1}M}$ limit durumunda $\mathrm{v^n} = \mathrm{v^{n-1}} = \mathrm{v}$ olacağı için $\mathrm{M} = \mathrm{vM}$ olur.
M'nin özdeğeri bir olduğu için $\mathrm{M'} = \mathrm{M} - \mathrm{I}$ singüler matristir. Yani, M′nin determinantı sıfıra eşittir. Durağan vektörü v olan Markov matrisi

$$
\mathrm{v\ M} = \mathrm{v} \qquad \text{veya} \qquad \mathrm{v\ M'} = 0. \tag{3.3}
$$

Kramer kuralını $\mathrm{M'}$ matrisine uygularsak

$$
\mathrm{Adj(M')M'} = \mathrm{det(M')I} = 0 \tag{3.4}
$$

olur. (3.3) ve (3.4) eşitlikleri bize M′'nin adjoint matrisinin her bir satırının v vektörü ile orantılı olduğu sonucunu verir. Press ve Dyson [8], $< \mathrm{v}, \mathrm{f} >$ iç çarpımını, Adj(M′)’nin herhangi bir satırı ile f’nin iç çarpımının eşit olacağı gözlemini yapar. Adj(M′)’nin 4.satırı kullanılırsa,

$$< \mathrm{v}, \mathrm{f} >= \mathrm{C}_{14}f_1 + \mathrm{C}_{24}f_2 + \mathrm{C}_{34}f_3 + \mathrm{C}_{44}f_4$$

olur. Buradan

$$< \mathrm{v}, \mathrm{f} >= \det \begin{bmatrix} p_1q_1 - 1 & p_1(1-q_1) & (1-p_1)q_1 & f_1 \\ p_2q_3 & p_2(1-q_3) - 1 & (1-p_2)q_3 & f_2 \\ p_3q_2 & p_3(1-q_2) & (1-p_3)q_2 - 1 & f_3 \\ p_4q_4 & p_4(1-q_4) & (1-p_4)q_4 & f_4 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Burada 1.sütunu 2. ve 3. sütuna eklendiğinde determinant değişmediği için

$$< \mathrm{v}, \mathrm{f} >= \det \begin{bmatrix} p_1q_1 & -1+p_1 & -1+q_1 & f_1 \\ p_2q_3 & -1+p_2 & -1+q_3 & f_2 \\ p_3q_2 & p_3 & q_2 & f_3 \\ p_4q_4 & p_4 & q_4 & f_4 \end{bmatrix} \equiv \mathrm{D}(\tilde{\mathrm{p}}, \tilde{\mathrm{q}}, \mathrm{f})$$

olur. 2. ve 3. sütunlara bakıldığında

$$\tilde{\mathrm{p}} = (-1+p_1, -1+p_2, p_3, p_4) \tag{3.5}$$

sadece X’in kontrolü altındadır. Benzer şekilde

$$\tilde{\mathrm{q}} = (-1+q_1, -1+q_3, q_2, q_4) \tag{3.6}$$

tamamen Y’nin kontrolü altındadır. Ayrıca son sütun 4. sütunun tamamen f’ye bağlıdır. X’in getiri vektörü $\mathrm{S_X} = (\mathrm{R}, \mathrm{S}, \mathrm{T}, \mathrm{P})$ iken Y’nin getirisi $\mathrm{S_Y} = (\mathrm{R}, \mathrm{T}, \mathrm{S}, \mathrm{P})$’dir. O zaman, durağan durumda X ve Y’nin kazançları sırasıyla

$$s_X = \frac{< \mathrm{v}, \mathrm{S_X} >}{< \mathrm{v}, 1 >} = \frac{D(\mathrm{p}, \mathrm{q}, S_X)}{D(\mathrm{p}, \mathrm{q}, 1)} \qquad s_Y = \frac{< \mathrm{v}, \mathrm{S_Y} >}{< \mathrm{v}, 1 >} = \frac{D(\mathrm{p}, \mathrm{q}, S_Y)}{D(\mathrm{p}, \mathrm{q}, 1)} \tag{3.7}$$

olur. Burada, 1, bütün bileşenleri 1 olan bir vektördür. Eşitlik (3.7)’deki s kazançları arasında doğrusal bir ilişki vardır. Benzer şekilde onların arasında doğrusal bir kombinasyon kurulması da doğrudur.

$$\alpha s_X + \beta s_Y + \gamma = \frac{D(\mathrm{p}, \mathrm{q}, \alpha \mathrm{S_X} + \beta \mathrm{S_Y} + \gamma 1)}{D(\mathrm{p}, \mathrm{q}, 1)} \tag{3.8}$$

Eşitlik 3.8 bize bazı faydalar sağlar çünkü X ve Y sadece kendilerine bağlı stratejiler seçerek determinantı sıfır yapabilir. Yani X,

$$\tilde{\mathrm{p}} = \alpha \mathrm{S_X} + \beta \mathrm{S_Y} + \gamma 1$$

veya Y,

$$\tilde{\mathrm{q}} = \alpha \mathrm{S_X} + \beta \mathrm{S_Y} + \gamma 1$$

stratejilerini seçerlerse determinant sıfır olur. O zaman, iki kazanç arasında kurulan doğrusal ilişki

$$\alpha s_X + \beta s_Y + \gamma = 0 \tag{3.9}$$

eşitliğini sağlar. Bu doğrusal ilişkide taraflar birbirlerini zorlayabilirler veya bir oyuncu tek taraflı olarak rakibinin beklenen kazancını arzuladığı değere getirebilir. Press ve Dyson [8] bu kavramı, ZD (sıfır-determinant) strateji olarak tanımlamıştır.

3.1.1. X'in tek başına Y'nin getirisini belirlemesi

ZD stratejisinin özel bir sınıfı da X'e tek başına Y'nin stratejisini ayarlamaya imkan vermesidir. Burada X'in yapması gereken tek şey $\tilde{\mathrm{p}} = \beta \mathrm{S_Y} + \gamma 1$ (yani, eşitlik 3.9'daki $\alpha = 0$ olarak seçilmesi) eşitliğini sağlayan sabitleyici stratejiyi seçmesidir. Çünkü

$$\beta s_Y + \gamma = \frac{D(\beta \mathrm{S_Y} + \gamma 1, \mathrm{q}, \beta \mathrm{S_Y} + \gamma 1)}{D(\mathrm{p}, \mathrm{q}, 1)} = 0$$

olacağından, Y'nin kazancını $\mathrm{s_Y} = -\frac{\gamma}{\beta}$ olarak sabitler. Burada X, Y'nin kendi stratejisinden bağımsız olarak Y'nin kazancını belirler.

$$\tilde{\mathrm{p}} = \beta \mathrm{S}_Y + \gamma$$

ise

$$(-1+p_1,-1+p_2,p_3,p_4)=(\beta\mathrm{R}+\gamma,\beta\mathrm{T}+\gamma,\beta\mathrm{S}+\gamma,\beta\mathrm{P}+\gamma)$$

ve

$$\begin{aligned}p_1 &= 1+\beta\mathrm{R}+\gamma\\ p_2 &= 1+\beta\mathrm{T}+\gamma\\ p_3 &= \beta\mathrm{S}+\gamma\\ p_4 &= \beta\mathrm{P}+\gamma\end{aligned}$$

olur. Bu eşitliklerde β ve γ'dan kurtulmak için β ve γ değerleri p_1 ve p_4 cinsinden yazılır. Sonra p_2 ve p_3'te yerine yazılırsa

$$p_2=\frac{p_1(\mathrm{T}-\mathrm{P})-(1+p_4)(\mathrm{T}-\mathrm{R})}{\mathrm{R}-\mathrm{P}} \text{ ve } p_3=\frac{(1-p_1)(\mathrm{P}-\mathrm{S})+p_4(\mathrm{R}-\mathrm{S})}{\mathrm{R}-\mathrm{P}} \tag{3.10}$$

elde edilir. Ayrıca

$$s_Y=-\frac{\gamma}{\beta}=\frac{(1-p_1)\mathrm{P}+p_4\mathrm{R}}{(1-p_1)+p_4} \tag{3.11}$$

olur. Eşitlik 3.11'a dikkat edilirse karşılıklı iş birliği olmadan X tarafından

$$\mathrm{P}<\mathrm{s}_Y<\mathrm{R}$$

olacak şekilde Y'nin kazancı sabitlenir. Y bu aralıkta kazançlar elde edebilir. Fakat X, Y'nin herhangi bir q stratejisinden bağımsız olarak sabitleyici p stratejisi ile Y'nin kazanç aralığını daraltabilir. Örneğin, p_1 ve p_4 değerlerini küçültmeye giderse bu X'in ceza vermek için daha kararlı ve sert olduğunu gösterir.

3.1.2. X Kendi Kazancını Ayarlamaya Çalışırsa

X kazancını arzuladığı değere getirmeye çalışırsa ne olur?

$$\tilde{\mathrm{p}}=\alpha\mathrm{S}_{\mathrm{X}}+\gamma 1$$

denklemi çözülürse,

$$\begin{aligned} p_1 &= 1 + \alpha\mathrm{R} + \gamma \\ p_2 &= 1 + \alpha\mathrm{S} + \gamma \\ p_3 &= \alpha\mathrm{T} + \gamma \\ p_4 &= \alpha\mathrm{P} + \gamma \end{aligned}$$

olur. Bu eşitliklerde α ve γ'dan kurtulmak için α ve γ değerleri p_1 ve p_4 cinsinden yazılır. Sonra p_2 ve p_3'te yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{(1+p_4)(\mathrm{R}-\mathrm{S}) - p_1(\mathrm{P}-\mathrm{S})}{\mathrm{R}-\mathrm{P}} \geq 1 \\ p_3 &= \frac{-(1-p_1)(\mathrm{T}-\mathrm{P}) - p_4(\mathrm{T}-\mathrm{R})}{\mathrm{R}-\mathrm{P}} \leq 0 \end{aligned} \tag{3.12}$$

eşitsizliklerine ulaşılır. Bu stratejinin tek mümkün çözümü $\mathrm{p} = (1,1,0,0)$ "Her zaman iş birliği yapmayı ya da hiçbir zaman iş birliği yapmamayı" söyler. Böylece IPD'de X tek başına kendi kazancını belirleyemez.

3.1.3. X Zorba Strateji ile Aşırı Taleplerini Karşılarsa

X karşılıklı iş birliği olmayan P değerinden daha fazla getiriyi zorba bir strateji ile elde edebilir mi? X bunu zorba faktörü $\chi \geq 1$ olmak üzere

$$\tilde{\mathrm{p}} = \phi\left[(\mathrm{S}_X - <\mathrm{P},1>) - \chi(\mathrm{S}_Y - <\mathrm{P},1>)\right] \tag{3.13}$$

seçerek yapabilir. Bu 4 eşitliği çözersek p

$$\begin{aligned} p_1 &= 1 - \phi(\chi-1)\frac{\mathrm{R}-\mathrm{P}}{\mathrm{P}-\mathrm{S}} \\ p_2 &= 1 - \phi\left(1 + \chi\frac{\mathrm{T}-\mathrm{P}}{\mathrm{P}-\mathrm{S}}\right) \\ p_3 &= \phi\left(\chi + \frac{\mathrm{T}-\mathrm{P}}{\mathrm{P}-\mathrm{S}}\right) \\ p_4 &= 0 \end{aligned} \tag{3.14}$$

eşitliklerini verir. Sonuç olarak herhangi χ ve yeterince küçük ϕ değerleri için strateji vardır. Eşitliklerden kolay olarak ϕ'nin uzandığı aralığın aşağıdaki gibi olduğu söylenebilir.

$$0 < \phi \leq \frac{(\mathrm{P}-\mathrm{S})}{(\mathrm{P}-\mathrm{S})+\chi(\mathrm{T}-\mathrm{P})} \tag{3.15}$$

Bu zorba strateji altında, X'in skoru Y'nin stratejisi q ya bağlıdır. Ayrıca her ikisinin skorunun maksimum olması için Y'nin her zaman iş birliği yapması, yani $\mathrm{q} = (1,1,1,1)$ olması gerekir. Eğer Y her zaman iş birliği yaparak getirisini en büyük yapmaya çalışırsa, bu strateji altında X'in getirisi

$$s_X = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{T}-\mathrm{R})+\chi\,[\,\mathrm{R}(\mathrm{T}-\mathrm{S})-\mathrm{P}(\mathrm{T}-\mathrm{R})]}{(\mathrm{T}-\mathrm{R})+\chi(\mathrm{R}-\mathrm{S})} \tag{3.16}$$

olur. Pay ve payda katsayıları, $\mathrm{T} > \mathrm{R} > \mathrm{P} > \mathrm{S}$'nin bir sonucu olarak hepsi pozitiftir. $\phi = 0$ alınırsa bu yalnız $\mathrm{p} = (1,1,0,0)$ stratejisini üretir.

Yukarıdaki tartışma, geleneksel IPD değerleri $(5,3,1,0)$'e odaklanarak daha somut bir şekilde yapılabilir. O zaman eşitlik(3.14)

$$\mathrm{p} = (1-2\phi(\chi-1), 1-\phi(4\chi+1), \phi(\chi+4), 0) \tag{3.17}$$

halini alır. $0 < \phi \leq (4\chi+1)^{-1}$ için uygulanabilir ve zorba bir çözüm vardır. $\chi > 1$ için X ve Y'nin sırasıyla en iyi skorları

$$s_X = \frac{2+13\chi}{2+3\chi}, \qquad s_Y = \frac{12+3\chi}{2+3\chi} \tag{3.18}$$

olur. Burada X'in getirisinin daima karşılıklı iş birliğinin değeri olan 3'ten fazla ve Y'nin getirisinin de daima daha az olduğu sonucuna ulaşılır. $x \to \infty$ iken X'in limit skoru 13/3 tür. Bununla birlikte Y'in getirisi daima 1 dir. Bu nedenle Y'nin X ile iş birliği yapması için herhangi bir teşvik yoktur. X'in açgözlülüğü, Y'ye bir miktar teşvik sağlanması gereği ile sınırlıdır. Tekil vakaların aşırı değerlerinde daha olası olduğu hariç olmak üzere, ϕ değeri önemsizdir. Somutlaştırıma yoluyla, $\chi = 3$ iken

ϕ'nin ortalama değeri için X'in zorba stratejisi

$$\mathrm{p} = \left(\frac{11}{13}, \frac{1}{2}, \frac{7}{26}, 0\right)$$

için yaklaşık olarak $s_X = 3.73$ ve $s_Y = 1.91$ olur.

Özel durumda $\chi = 1$ ve $\phi = \frac{1}{5}$ (sınır değerlerinden biri) için (3.17), iyi bilinen kısasa kısas (TFT) stratejisine indirgenir. ZD stratejileri arasında sadece TFT bilen biri, X'in deterministik olarak Y'ye getirisini bağladığı stratejilerin her zaman simetrik olması gerektiğini, dolayısıyla adil olmasını ve X ile Y'nin eşit olarak ödüllendirilmesi gerektiğini düşünebilir. Ancak genel ZD stratejilerinin varlığı bunun böyle olmadığını gösterir.

4. YİNELENEN TUTUKLU İKİLEMİ İÇİN İYİ STRATEJİLER VE DİNAMİKLERİ

Tutuklu ikilemi, sosyal olayların çözümlenmesinde basit bir model olarak kullanılan iki kişilik bir oyundur. Bu simetrik oyunda X ve Y oyuncularının c ve d olmak üzere iki stratejisi vardır. Böylece, sırasıyla cc, cd, dc, dd olmak üzere 4 durum ortaya çıkar. Örneğin cd durumu, X'in c, Y'nin ise d oynadığı durumdur. Aşağıdaki tablo X ve Y'nin getirilerini tanımlar.

$$G = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} c & \quad d \end{array} \\ \begin{array}{c} c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} (\mathrm{R},\mathrm{R}) & (\mathrm{S},\mathrm{T}) \\ (\mathrm{T},\mathrm{S}) & (\mathrm{P},\mathrm{P}) \end{pmatrix} \end{array} \tag{4.1}$$

Alternatif olarak, her iki oyuncunun getiri vektörleri

$$\mathrm{S_X} = (\mathrm{R},\mathrm{S},\mathrm{T},\mathrm{P}) \quad \text{ve} \quad \mathrm{S_Y} = (\mathrm{R},\mathrm{T},\mathrm{S},\mathrm{P}) \tag{4.2}$$

şeklindedir. Her iki oyuncuda ortaya çıkan p durumu karşısında c oynama koşullu olasılığı $\mathrm{p_c}$ iken bunun tamamlayıcısı olan d oynama koşullu olasılığı $1 - \mathrm{p_c}$ olur. Ayrıca getirilerin

$$\mathrm{T} > \mathrm{R} > \mathrm{P} > \mathrm{S} \quad \text{ve} \quad 2\mathrm{R} > \mathrm{T} + \mathrm{S} \tag{4.3}$$

şartlarını sağlaması gerektiğini daha önce söylemiştik.

4.3'deki $2\mathrm{R} > \mathrm{T} + \mathrm{S}$ eşitsizliği toplam getirilerin eşit şekilde paylaşılması sonucu, karşılıklı iş birliği ile elde edilen getirinin, cd veya dc durumunda elde edilen getiriden daha fazla olduğunu ifade eder. Böylece, maksimum toplam getiri cc durumunda elde edilir. Her biri iş birliği yaparak c oynarsa, her biri R alırdı. Ancak, oyun öncesinde bir anlaşma yapmış olsa bile, ayrı odalarda sorgulanırken, oyuncuların her biri, karşısındakinin diğer seçeneği uygulayabileceğini gözönüne alarak bir strateji belirler. Bu şartlar altında tek sefer oynandığında tutuklu ikilemi oyununun çözümünü bölüm 1'de ele almıştık. Ve sonucun, her birine P kazandıracak dd durumu olduğunu biliyoruz.

Şaşırtıcı sonuçları olan bir araştırma bizi yinelenen oyunlara (IPD) odaklıyor. X ve Y aynı oyunu tekrarlanan turlarla oynar. Her turda oyuncuların seçenekleri bağımsız şekilde yapılır. Fakat şu anki turu oynarken bir önceki turun farkındadırlar. Umut edilen geçmişteki ilişkinin şekli şu anki turda kaçmaya verilen cezalarla mümkün kılınmasıdır.

Bölüm 3'de yinelenen tutuklu ikilemi oyununun gelişiminden bahsedilmişti. Benzer şekilde, bu bölümde bazı tanımlar verip, Markov süreçlerinden bahsedip 3.2 geçiş matrisini elde etmiştik.(bkz. İtere tutuklu ikilemine yeni bir bakış.) Şimdi bunların üzerine yeni tanımlar ekleyerek devam edeceğiz.

İlk turda oyunun seçimi *başlangıç oyunudur.* Bir strateji, başlangıç oyun seçimi ile birlikte bir plandan oluşur. Plan, birinci turdan sonra, önceki turdaki olası sonuçlara yanıt vermek için oyunun seçimidir. TFT, cevabı tamamen bir önceki turun sonucuna dayanan bir tek-hafızalı planın bir örneğidir. TFT stratejisi başlangıç oyunu c ile birlikte TFT planından oluşur.

p planına, $p_1 = 1$ olduğu zaman p *kabul edilebilir* ve $p_4 = 0$ olduğu zaman ise *katı* plan denir. Yani *kabul edilebilir* plan cc ye her zaman c ile cevap verirken, *katı* bir plan dd ye her zaman d ile karşılık verir. TFT, hem *kabul edilebilir* hem de *katı* bir plandır.

Kabul edilebilir strateji, c başlangıç oyunu ile *kabul edilebilir* plandan meydana gelir. Eğer her iki oyuncu da *kabul edilebilir strateji* kullanırsa o zaman oyun cc'de sabitlenir. Yani oyuncular her oyunda iş birliği seçiminin getirisi R'yi alır.

IPD'de, sonsuza kadar oynanan bir dizi oyun düşünelim ve k.turdaki iki oyuncunun kazançları s_X^k, s_Y^k olsun. Her bir oyuncu için uzun vadeli ortalama kazanç ile ilgileneceğiz. X için

$$s_X = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} s_X^k, \tag{4.4}$$

benzer şekilde Y için de düşünebiliriz.

Eğer her bir oyuncu başlangıç oyunu kullanırsa ve bunu *sabitlenmiş tek-hafızalı plan* ile sürdürürse Markov zinciri k. adımda çıktılar üzerine olasılık dağılım vektörü v^{k} ve

$$\mathrm{v} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{v}^{\mathrm{k}} \tag{4.5}$$

ile verilen ortalama limit dağılım vektörü v olur.

Ortaya çıkan durumlar kümesi üzerinde olasılık dağılım vektörü v, i $= 1, 2, 3, 4$ olmak üzere $v_i \geq 0$ ve $< \mathrm{v}, 1 >= 1$ şeklindedir. Örneğin v_2, X'in c ve Y'nin d oynama olasılığıdır. Daha özel bir örnek verirsek, $v_1 + v_2$ X'in c oynama olasılığıdır. v'ye göre X ve Y'nin beklenen getirileri s_X ve s_Y ise

$$s_X =< \mathrm{v}, S_X > \quad \text{ve} \quad s_Y =< \mathrm{v}, S_Y > \tag{4.6}$$

olur.

Önerme 4.1. *Eğer* X *ve* Y *Markov matris* M *yi veren tek-hafızalı planlar kullanırsa oyun için herhangi bir limit dağılım vektörü* v, M *için sabit dağılımdır. Yani* $\mathrm{v}{\cdot}\mathrm{M} = \mathrm{v}$ *olur.*

Kanıt. v_i^{k+1}, $k+1$.turdan sonra i durumunda bulunma olasılığıdır. Bu

$$\sum_{j=1}^{4} v_j^k \mathrm{M}_{ji}$$

toplamına eşittir. Çünkü $v_j^k \mathrm{M}_{ji}$, j durumunda iken k. turda i durumda bulunma koşullu olasığıdır. O halde

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{v^k}\right) \cdot \mathrm{M} - \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{v^k}\right) = \frac{1}{n}(\mathrm{v^{n+1}} - \mathrm{v^1}).$$

$\mathrm{v}^{n+1} - \mathrm{v}^1$ vektörün girdileri en fazla 1 olacağı için ve $n \to \infty$ iken bu ifadenin limiti 0 olur. Öyleyse her limit dağılım $\mathrm{v} \cdot \mathrm{M} - \mathrm{v} = 0$ eşitliğini sağlar. □

Sonuç 4.2. X *ve* Y *sırası ile tek-hafızalı plan vektörleri* p *ve* q*'yu kullansınlar.* $\mathrm{e}_1 = (1, 0, 0, 0)$*,* M *için sabit dağılım olması için yeter ve gerek şart* p *ve* q*'nun her ikisinin de* kabul edilebilir plan *olmasıdır.*

Kanıt. $\mathrm{e}_1{\cdot}\mathrm{M} = \mathrm{e}_1$ eşitliğini sağlar. Tersine M'nin ilk satırı $(1, 0, 0, 0)$ ve $0 \leq p_1, q_1 \leq 1$ olduğu için $p_1 = q_1 = 1$ olmak zorundadır. □

Önerme 4.3. *Eğer v dağılım vektörü ise 4.6 ile tanımlanan her iki oyuncunun getirisi*

$$s_Y - s_X = (v_2 - v_3)(\mathrm{T} - \mathrm{S}) \tag{4.7}$$

eşitliğini sağlar. Buna göre $s_Y = s_X$ *olması için gerek ve yeter koşul* $v_2 = v_3$ *olmasıdır.*

Ek olarak,

$$\frac{1}{2}(s_X + s_Y) \leq \mathrm{R} \tag{4.8}$$

eşitsizliği vardır. Eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter koşul $\mathrm{v} = (1,0,0,0)$ *olmasıdır. Böylece aşağıdakiler denktir.*

(i) $\frac{1}{2}(s_X + s_Y) = \mathrm{R}$

(ii) $v_1 = 1.$

(iii) $(s_X = s_Y) = \mathrm{R}$

Kanıt. 4.7 eşitliğini ispatlamak için v ile $\mathrm{S}_Y - \mathrm{S}_X = (0, \mathrm{T}-\mathrm{S}, \mathrm{S}-\mathrm{T}, 0)$'in iç çarpımının hesaplanması yeterli olacaktır. Diğerleri için ise v ile

$$\frac{1}{2}(\mathrm{S}_Y - \mathrm{S}_X) = \left(\mathrm{R}, \frac{1}{2}(\mathrm{T}+\mathrm{S}), \frac{1}{2}(\mathrm{T}+\mathrm{S}), P\right)$$

iç çarpımını ve burada en büyük bileşenin R olduğunu göz önünde tutulması yeterli olacaktır. □

Press ve Dyson'ın Markov modeli üzerinde yapmış olduklar çalışmadan [8] doğan yeni fikirler insanları şaşırtmıştır ve bu fikirler birçok çalışmaya ilham vermiştir (Örneğin [10], [2]). Press ve Dyson [8]'dan ilham alan Akin [15], İtere Tutuklu İkilemine farklı bir bakış açısı kazandıran iyi (good) stratejileri tanımlamıştır.

Tanım 4.4. X *için tek tur hafızalı kabul edilebilir bir* p *planı,* X*'e göre bir başlangıç oyunu,* Y *tarafından seçilen bir strateji ve sonuçta oluşan bir limit dağılımı için*

$$s_Y \geq \mathrm{R} \;\Rightarrow\; s_Y = \mathrm{R} \;\; ve \;\; s_X = \mathrm{R} \tag{4.9}$$

oluyorsa iyi (good) *olarak adlandırılır.*

Kabul edilebilir ve herhangi bir genel Y *planına karşı*

$$s_Y \geq \mathrm{R} \Rightarrow s_Y = \mathrm{R} \tag{4.10}$$

oluyorsa p *planına* Nash tipi *denir.*

Bir c başlangıç oyunu ile beraber tek tur hafızalı iyi bir plan, tek tur hafızalı iyi bir stratejidir.

Bundan sonra tek tur hafızalı bir iyi strateji yerine iyi strateji ifadesi kullanılacaktır. X oyuncusunun, bir p iyi stratejisini kullandığını varsayalım. Eğer Y, anlaşmaya hazır bir strateji kullanırsa, oyuncular ortak iş birliği getirisine ulaşırlar. Dahası, Y için, p'ye karşı ortak iş birliğinin getirisinden daha fazlasını elde edebileceği hiçbir strateji yoktur. Gerçekten, Y oyuncusunun stratejisi, X oyuncusuna iş birliği getirisinden daha az kazandıracaksa, Y, iş birliği getirisinden daha azını alır.

İyi stratejiler, Tutuklu İkilemi'ni şu bakış açısıyla çözer: Eğer X bir iyi strateji kullanma niyetinde olduğunu duyurursa Y, iş birliği değerinden daha iyi bir getiri elde edemez. Dahası, ortak iş birliği, Y için iş birliği getirisini elde etmesini sağlar. Ortak iş birliği getirisi dengede kalır, çünkü Y anlaşmaya hazır olmadan başka hiçbir davranışı desteklemez ve anlaşmaya hazır olma oldukça güçlü bir teşvik edicidir. Ayrıca, bir duyuru yapmaksızın, başlangıç turlarının istatistikleri, X tarafından kullanılan bir tek tur hafızalı stratejinin girdilerini hesaplamak için kullanılabilir. Bu, X 'in bir iyi strateji kullandığını açığa çıkaracaktır. O halde Y 'nin en iyi uzun dönem cevabı da iyi oynamaya başlamaktır.

Önerme 4.3 uyarınca, $s_Y = s_X = \mathrm{R}$ olması için gerek ve yeter şart ilişkili limit dağılım vektörünün $(1, 0, 0, 0)$ olmasıdır. Tek-hafızalı durumlarda $(1, 0, 0, 0)$ sabit dağılım vektörüdür ancak ve ancak her iki plan da kabul edilebilirdir. Eğer p kabul edilebilir değil ise (4.9) her zaman doğru değildir. Örneğin, eğer X, *Her zaman* $d = (0, 0, 0, 0)$ oynarsa, o zaman herhangi Y karşıtı için $\mathrm{P} \geq s_Y$ olur.

Her iki oyuncu da başlangıçtaki iş birliği ile *kabul edilebilir planlar* kullandığında, yani *kabul edilebilir stratejiler* kullanıldığında karşılıklı iş birliğine ulaşılır. Her iki strateji de *Nash tipi* olduğu zaman bu strateji çifti tam olarak *Nash dengesidir.* Yani, her iki oyuncu da R alır ve her iki oyuncu da alternatif bir strateji oynayarak daha iyi sonuç alamaz. Her iyi strateji bir Nash tipi stratejidir. Biz göreceğiz ki bir Nash dengesi ile Y'nin kendisi için hala R üreten bir alternatifi oynaması mümkündür ancak X için verilen kazanç R'den küçük olur. Yani, Y'nin iş birliği getirisini elde etmek için hiç bir teşviği yoktur. Öte yandan, X iyi bir strateji kullanıyorsa, Y için

R elde eden tek yanıt X için de R üretir.

Tekrar$= (1,1,0,0)$ planı, *kabul edilebilir plan* olmasına karşın *Nash tipi* değildir. Her iki oyuncu *Tekrar* planını kullanırsa oyunun ilk çıktısı sonsuza dek tekrar eder. Eğer başlangıç çıktısı cd ise $s_Y = \mathrm{T}$ ve $s_X = \mathrm{S}$ olur.

Bir p planı için, $\mathrm{e}_{12} = (1,1,0,0)$ olmak üzere *Press-Dyson vektörü* $\tilde{\mathrm{p}} = \mathrm{p} - \mathrm{e}_{12}$ olarak tanımlanır.

Teorem 4.5. X*'in Press-Dyson vektörü* $\tilde{\mathrm{p}}$ *ile* p *stratejisini kullandığını varsayalım. Eğer* Y*,* $\{\mathrm{v}^n\}$ *dağılım dizisini veren bir strateji kullanırsa, o zaman herhangi bir* v *limit dağılım vektörü için*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} < \mathrm{v}^k, \tilde{\mathrm{p}} > = 0 \quad \textit{ve sonuç olarak}$$
$$< \mathrm{v}, \tilde{\mathrm{p}} > = 0 \tag{4.11}$$

Kanıt. $v_{12}^n = v_1^n + v_2^n$, oyunun n.kez oynanması sırasında ya cc ya da cd sonuçlarının ortaya çıkma olasılığı, yani, $v_{12}^n =< \mathrm{v}^n, \mathrm{e}_{12} >$ n.turda c oynama olasılığıdır. Diğer taraftan X'in plan vektörü p ve X'in gelecek turda c oynama olasılığı p_i olduğu için $< \mathrm{v}^n, \mathrm{p} >$, X'in $n+1$.turda c oynama olasılığını verir. Yani, bu v_{12}^{n+1}'dir. Böylece, $v_{12}^{n+1} - v_{12}^n =< \mathrm{v}^n, \tilde{\mathrm{p}} >$ olur. Buradan

$$v_{12}^{n+1} - v_{12}^1 = \sum_{k=1}^{n} < \mathrm{v}^k, \tilde{\mathrm{p}} > \tag{4.12}$$

eşitliği elde edilir. Sol taraf mutlak değerce 1'den küçük ya da eşit olduğu için $n \to \infty$ iken sol taraf 0'a yakınsar. Cesaro ortalamasının alt dizisi ise v'ye yakınsayacağı için ve iç çarpımın sürekliliğinden $< \mathrm{v}, \tilde{\mathrm{p}} >= 0$ olur. □

Sonuç 4.6. $0 < a \leq 1$ *olsun.*

a. Plan p=$aTFT + (1-a)$*Tekrar herhangi bir limit dağılım için* $s_Y = s_X$ *olmakla beraber* iyi *plandır.*

b. Plan p=a*Katı* $+ (1-a)$*Tekrar* iyi *plandır.*

Kanıt. (a)Bu durumda $\tilde{\mathrm{p}} = a(0,-1,1,0)$ olur. Ve böylelikle (4.11) gereği $v_2 = v_3$ olur. Buradan (4.7) den $s_X = s_Y$ olduğu elde edilir. (4.9) gereği p *iyi stratejidir.*

(b)$\tilde{\text{p}} = a(0,-1,0,0)$ olması ve (4.11) gereği $v_2 = 0$ olur. Böylece

$$s_Y = v_1 R + v_3 S + v_4 P$$

ve bu eşitlik $v_3 = v_4 = 0$ ve $v_1 = 1$ olmadıkça R'den küçüktür. O halde, $v_1 = 1$ olduğu zaman (4.3) gereği $s_X = s_Y$ olur. Bu durumda (4.9)'dan p *iyi stratejidir.* □

Teorem 4.7. $\text{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4)$, *Tekrar olmayan, yani* $p_1 = 1$ *fakat* $\text{p} \neq (1,1,0,0)$, *olacak biçimde kabul edilebilir bir plan olsun.* p *planının Nash tipi olması için gerek ve yeter koşul*

$$\frac{\text{T}-\text{R}}{\text{R}-\text{S}}\, p_3 \leq (1-p_2) \quad ve \quad \frac{\text{T}-\text{R}}{\text{R}-\text{P}}\, p_4 \leq (1-p_2) \tag{4.13}$$

eşitsizliklerinin sağlanmasıdır.

Ayrıca p *planının iyi olması için gerek ve yeter koşul her iki eşitsizliğin de kesin olarak sağlanmasıdır.*

Teorem 4.8. *Press-Dyson vektörü*

$$\tilde{\text{p}} = \alpha \text{S}_X + \beta \text{S}_Y + \gamma 1 + \delta \text{e}_{23}$$

olan p *planı ve bu* p *planına karşı* Y *genel bir plan uyguladığı zaman ortaya çıkan limit dağılım* v *ise getirilerin ortalaması aşağıdaki Press-Dyson eşitliğini sağlar.*

$$\alpha s_X + \beta s_Y + \gamma + \delta v_{23} = 0 \tag{4.14}$$

Çalışmak için en elverişli durum $\delta = 0$ olduğu zaman ortaya çıkar. Sıfır-Determinatlı Stratejisiler olarak adlandırılan bu strateji sınıfı Bölüm 2 de detaylı olarak incelendi.

Sıradaki teorem, iyi planın belirlenmesi için basit bir araç verir.

Teorem 4.9. $\text{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ *planı, Press-Dyson vektörü*

$$\tilde{\text{p}} = \alpha \text{S}_X + \beta \text{S}_Y + \gamma 1 + \delta \text{e}_{23}$$

olan, Tekrar planından farklı, yani $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \neq (0,0,0,0)$, *kabul edilebilir bir plan* *olsun.* p *planının Nash Tipi olması için gerek ve yeter koşul*

$$\max\left(\frac{\delta}{\mathrm{T}-\mathrm{S}}, \frac{\delta}{2\mathrm{R}-(\mathrm{T}+\mathrm{S})}\right) \leq \alpha \tag{4.15}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

p *planının iyi olması için gerek ve yeter koşul eşitsizliğin kesin sağlanmasıdır.*

Sonuç: $\mathrm{T}-\mathrm{S} > 2\mathrm{R}-(\mathrm{T}+\mathrm{S}) > 0$ olduğu açıktır. Buradan $\delta < 0$ ise p planının iyi olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{\delta}{(\mathrm{T}-\mathrm{S})} < \alpha$$

olmasıdır. $\delta > 0$ durumunda ise p planının iyi olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{\delta}{2\mathrm{R}-(\mathrm{T}+\mathrm{S})} \leq \alpha$$

olmasıdır.

Bir sonraki bölümde, Press-Dyson vektörlerinin $\{\mathrm{S}_X, \mathrm{S}_Y, 1, e_{23}\}$ olarak alındığında teoremlerin yeni durumları ispatlanacaktır.

4.10. İyi Planlar ve Press-Dyson Analizi

Bu bölümde getirileri normalleştirerek teoremler yeniden ifade edilecektir. Tüm getiri değerlerine ortak bir sayı eklenebilir ve çeşitli stratejiler arasındaki ilişkiyi değiştirmeden ortak pozitif bir sayı ile çarpılabilir. Bu nedenle tüm getiri değerlerinden S çıkarıp, $(\mathrm{T}-\mathrm{S})$ değerine bölünebilir. Bu durumda (4.2) ile verilen getiri vektörleri

$$\mathrm{S}_X = (\mathrm{R}, 0, 1, \mathrm{P}), \quad \mathrm{S}_Y = (\mathrm{R}, 1, 0, \mathrm{P}), \tag{4.16}$$

ve (4.3) ile verilen eşitsizlikler

$$1 > \mathrm{R} > \frac{1}{2}, \quad \text{ve} \quad \mathrm{R} > \mathrm{P} > 0 \tag{4.17}$$

şeklinde ifade edilebilir. Normalleştirmenin ardından 4.7 aşağıdaki halini alır.

Teorem 4.11. $\mathrm{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4)$, *Tekrar olmayan, yani* $p_1 = 1$ *fakat* $\mathrm{p} \neq (1, 1, 0, 0)$, *olacak biçimde kabul edilebilir bir plan olsun.* p *planının Nash tipi olması için gerek ve yeter koşul*

$$\frac{1-\mathrm{R}}{\mathrm{R}}\, p_3 \leq (1 - p_2) \quad \textit{ve} \quad \frac{1-\mathrm{R}}{\mathrm{R}-\mathrm{P}}\, p_4 \leq (1 - p_2) \tag{4.18}$$

eşitsizliklerinin sağlanmasıdır.

Ayrıca p *planının iyi olması için gerek ve yeter koşul her iki eşitsizliğin de kesin olarak sağlanmasıdır.*

Kanıt. İlk olarak $p_2 = 1$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $1 - p_2 = 0$ olur. (4.18) ile verilen eşitsizliklerden dolayı $p_3 = p_4 = 0$ ve p=*Tekrar* olur ki bu durum p planının seçilişi ile çelişir. Diğer taraftan, eğer $p_2 = 1$ ise p=$(1, 1, p_3, p_4)$ olur. Eğer Y bu stratejiye karşı *Herzaman d*=(0,0,0,0) oynarsa, uzun vadede {cd} çıktısı ortaya çıkar ve oyunun dağılım vektörü $(0, 1, 0, 0)$, $s_Y = 1$ ve $s_X = 0$ olur. Bu durumda p Nash tipi değildir. Sonuç olarak $p_2 = 1$ olması durumunda ne eşitsizlikler sağlanır, ne de p planı Nash tipidir. Bu yüzden $p_2 \neq 1$, $1 - p_2 > 0$ olarak alınabilir.

$$\begin{aligned} s_Y - \mathrm{R} &= (v_1\mathrm{R} + v_2 + v_4\mathrm{P}) - (v_1\mathrm{R} + v_2\mathrm{R} + v_3\mathrm{R} + v_4\mathrm{R}) \\ &= v_2(1-\mathrm{R}) - v_3\mathrm{R} - v_4(\mathrm{R}-\mathrm{P}) \end{aligned} \tag{4.19}$$

olduğundan,

$$s_Y >= \mathrm{R} \Longleftrightarrow (1-p_2)v_2(1-\mathrm{R}) >= v_3(1-p_2)\mathrm{R} + v_4(1-p_2)(\mathrm{R}-\mathrm{P}) \tag{4.20}$$

sonucu elde edilir. Burada >= gösterimi, eşitsizliklerin ve eşitliklerin eşdeğer olduğu anlamında kullanılmıştır. $1 - p_1 = 0$ olduğundan (4.11) eşitliği

$$(-1 + p_2)v_2 + p_3 v_3 + p_4 v_4 = 0$$

halini alır. Ve bu yüzden $(p_2 - 1)v_2 = p_3 v_3 + p_4 v_4$ olur. Yukarıdaki eşitsizliklere gerekli eklemeler yapılarak,

$$A = [p_3(1-\mathrm{R}) - (1-p_2)\mathrm{R}] \text{ ve } B = [(1-p_2)(\mathrm{R}-\mathrm{P}) - p_4(1-\mathrm{R})]$$

olmak üzere

$$s_Y >= \mathrm{R} \Longleftrightarrow Av_3 >= Bv_4$$

olur.

(4.18)'deki eşitsizliklerinin $A \leq 0$ ve $B \geq 0$ olmasına eşdeğerdir. İspat, aşağıdaki dört durumun kanıtlanması ile tamamlanır.

Durum(i) $A = 0$, $B = 0$: Bu durumda, herhangi bir Y stratejisi için $Av_3 = Bv_4$ olur. Bu yüzden harhangi bir Y stratejisi için $s_Y = \mathrm{R}$ ve p Nash tipi olur. Y kabul edilebilir bir plan seçmezse, $\{cc\}$ durumların kapalı bir kümesi olmaz ve bu yüzden $v_1 \neq 1$ olur. O halde önerme 4.3 uyarınca $s_X < \mathrm{R}$ olur. Yani p iyi değildir.

Durum(ii) $A < 0$, $B = 0$: $Av_3 \geq Bv_4$ eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul $v_3 = 0$ olmasıdır. $v_3 = 0$ ise $Av_3 = Bv_4$ olacağından $s_Y = \mathrm{R}$ dir. Böylece, p Nash tipidir.

Durum(iia) $B \leq 0$ ve keyfi $A \in \mathbb{R}$: Y kabul edilebilir olmayan ve $v_3 = 0$ olan bir strateji seçtiğini varsayalım. Örneğin, Y, $(0, 0, 0, 0)$ oynarsa, hiçbir durum dc'ye gitmez. Y'nin böyle bir seçimi ile $Av_3 \geq Bv_4$ ve $s_Y \geq \mathrm{R}$ olur. Yukarıdaki gibi, Y kabul edilebilir olmadığı için $v_1 \neq 1$, $s_X < \mathrm{R}$ olur. p iyi bir plan olmaz. Ayrıca, $v_3 = 0$, $v_1 < 1$, $p_2 < 1$ ve $(1 - p_2)v_2 = v_4p_4$ olmasından dolayı $v_4 > 0$ olur. Bu yüzden, eğer $B < 0$ ise $Av_3 > Bv_4$ olur. Yani $s_Y > \mathrm{R}$ ve bu yüzden p planı Nash tipi değildir.

Durum(iii) $A = 0$, $B > 0$: $Av_3 \geq Bv_4$ eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul $v_4 = 0$ olmasıdır. Eğer $v_4 = 0$ ise $s_Y = \mathrm{R}$ olur. Buna göre p planı Nash tipidir.

Durum(iiia) $A \geq 0$, keyfi $B \in \mathbb{R}$: Y kabul edilebilir olmayan ve $v_4 = 0$ olan bir strateji seçtiğini varsayalım. Örneğin, Y, $(0, 1, 1, 1)$ oynarsa , hiçbir durum dd'ye gitmez. Y'nin böyle bir seçimi ile $Av_3 \geq Bv_4$ ve $s_Y \geq \mathrm{R}$ olur. Yukarıdaki gibi, Y kabul edilebilir olmadığı için $v_1 \neq 1$ ve $s_X < \mathrm{R}$ olur ve p iyi bir plan olmaz. Ayrıca, $v_4 = 0$, $v_1 < 1$, $p_2 < 1$ ve $(1 - p_2)v_2 = v_3p_4$ olmasından dolayı $v_3 > 0$ olur. Bu yüzden, eğer $A > 0$ ise $Av_3 > Bv_4$ olur. Yani $s_Y > \mathrm{R}$ ve bu yüzden p planı Nash tipi değildir.

Durum(iv) $A < 0$, $B > 0$: Bu durumda $Av_3 \geq Bv_4$ eşitsizliğinin sağlanması için $v_3 = v_4 = 0$ olması gerekir. Bu yüzden $(1 - p_2)v_2 = v_3p_3 + v_4p_4 = 0$ olur. $p_2 < 1$

olduğu için $v_2 = 0$'dır. Böylece $v_1 = 1$ olur. Yani, bu durumda $s_Y \geq \mathrm{R}$ olması $s_Y = s_X = \mathrm{R}$ olduğu anlamına geldiği için p iyi plandır. □

$1 > \mathrm{R} > \mathrm{P}$ olduğu için $\frac{1-\mathrm{R}}{\mathrm{R}} < 1$ eşitsizliği her zaman doğrudur. Diğer taraftan $\frac{1-\mathrm{R}}{\mathrm{R}-\mathrm{P}} > 1$ olabilir ve bu durumda ikinci eşitsizlik $p_4 \leq \frac{\mathrm{R}-\mathrm{P}}{1-\mathrm{R}}$ olmasını gerektirir. Eğer $p_2 = 0$ ise planın iyi olması için gerek ve yeter koşul $p_4 \leq \frac{\mathrm{R}-\mathrm{P}}{1-\mathrm{R}}$ olmasıdır. Örneğin, **WinStay-LoseShift (WSLS)** olarak geçen $(1, 0, 0, 1)$ planı, ilk eşitsizliği kesin bir şekilde sağlar fakat ikinci eşitsizliği sağlaması için, yani iyi plan olması için gerek ve yeter koşul $1 - \mathrm{R} < \mathrm{R} - \mathrm{P}$ olmasıdır.

Yukarıdaki sonuçlar şu şekilde yorumlanabilir:

Sonuç 4.12. p *kabul edilebilir plan ve* $p_2 < 1$ *olsun.*

(a) Eğer p *iyi bir plan ve* Y *kabul edilebilir olmayan bir* q *planı kullanırsa,* X, Y*'yi,* $s_Y < \mathrm{R}$ *almaya zorlar.*

(b) Eğer p *iyi bir plan değil ise* Y*,* $\mathrm{q} = (0, 0, 0, 0)$*,* $\mathrm{q} = (0, 1, 1, 1)$ *planlarından birini kullanarak* $s_Y \geq \mathrm{R}$ *olacak şekilde bir getiri elde eder ve* X*'i,* $s_X < \mathrm{R}$ *olacak şekilde bir getiri almaya zorlar.*

(c) Eğer p *Nash tipi değil ise* Y*,* $\mathrm{q} = (0, 0, 0, 0)$*,* $\mathrm{q} = (0, 1, 1, 1)$ *planlarından birini kullanarak* $s_Y > \mathrm{R}$ *olacak şekilde bir getiri elde eder ve* X*'i* $s_X < \mathrm{R}$ *olacak şekilde bir getiri almaya zorlar.*

Kanıt. (a)Eğer p iyi plan ise, $s_Y \geq \mathrm{R}$ iken $s_Y = s_X = \mathrm{R}$ olacağı anlamına gelir ve böylece $\mathrm{v} = (1, 0, 0, 0)$ olmasını gerektirir. Bu da hem p 'nin hem de q 'nun kabul edilebilir plan olmasını gerektiren tek durumdur.

(b) ve (c) için yukarıdaki ispattaki durumların analizinden yola çıkılır. □

UYARI: $p_2 = p_1 = 1$ ise p Nash değildir. Teorem 4.11 de gözlemlendiği gibi, eğer Y, $\mathrm{q} = (0, 0, 0, 0)$ oynarsa, $\mathrm{v} = (0, 1, 0, 0)$ durağan vektörü ile beraber *cd* çıktısı ortaya çıkar. Ve bu yüzden $s_Y = 1$, $s_X = 0$ olur. Ayrıca $p_4 = 0$ ise, yani X Tekrar kulanırsa *dd* durumu oluşur. Böylelikle eğer X, $1 - p_4 = p_2 = p_1 = 1$ eşitliğine sahip bir p stratejisi kulanırsa ya $s_Y = 1$, $s_X = 0$ sonucunu veren *cd*, $s_Y = s_X = \mathrm{P}$ sonucuna sahip *dd* durumu meydana gelir. Bu sonuç X'in başlangıç oyunu tarafından belirlenir.

Şimdi (4.16) ile verilen normalleştirmeleri kullanarak p planına karşılık gelen Press-Dyson vektörü $\tilde{p} = \alpha S_X + \beta S_Y + \gamma 1 + \delta e_{23}$ gözönüne alınırsa,

$$\begin{aligned} (\alpha+\beta)R+\gamma &\leq 0 \\ \beta+\gamma+\delta &\leq 0 \\ \alpha+\gamma+\delta &\geq 0 \\ (\alpha+\beta)P+\gamma &\geq 0 \end{aligned} \tag{4.21}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Yardımcı Teorem 4.13. *Eğer* $\tilde{p} = \alpha S_X + \beta S_Y + \gamma 1 + \delta e_{23}$ işaret kısıtlamalarını (4.21) *sağlıyorsa, o zaman*

$$\begin{aligned} \alpha+\beta &\leq 0 \quad ve \quad \gamma \geq 0, \\ \alpha+\beta &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma = 0 \end{aligned} \tag{4.22}$$

olur.

Kanıt. Dördüncü eşitsizlikten birinci eşitsizliği çıkartılırsa, $(\alpha+\beta)(R-P) \leq 0$ olduğu görülür. Ve $R - P > 0$ olması $(\alpha+\beta) \leq 0$ sonucunu verir. Ayrıca dördüncü eşitsizlik ve $P > 0$ olması da $\gamma \geq 0$ eşitsizliğini verir. Son olarak birinci ve dördüncü eşitsizliklerden dolayı $\alpha + \beta = 0$ olması için gerek ve yeter koşulun $\gamma = 0$ olmasıdır. □

Uyarı: *$\tilde{p}_1$ ve $\tilde{p}_4$ sıfırdır ancak ve ancak $\alpha+\beta = \gamma = 0$ dır. Bu durum* p *planının* kabul edilebilir *ve* katı *olması ile mümkündür.*

Sonuç 4.14. *Eğer* p, *Press-Dyson vektörü* $\tilde{p} = \alpha S_X + \beta S_Y + \gamma 1 + \delta e_{23}$ *olan* kabul edilebilir *plan ise herhangi bir limit dağılıma sahip getiriler*

$$\gamma R^{-1} s_Y + \alpha(s_Y - s_X) - \delta v_{23} = \gamma \tag{4.23}$$

eşitliğini sağlar.

Teorem 4.15. $\mathrm{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4)$, *Press-Dyson vektörü*

$$\tilde{\mathrm{p}} = \alpha \mathrm{S}_X + \beta \mathrm{S}_Y + \gamma 1 + \delta e_{23}$$

olan, Tekrar *planından farklı, yani* $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \neq (0,0,0,0)$, kabul edilebilir *bir plan olsun.* p *planının Nash tipi olması için gerek ve yeter koşul*

$$\max\left(\delta, \frac{\delta}{2\mathrm{R}-1}\right) \leq \alpha \tag{4.24}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

p *planının* iyi *olması için gerek ve yeter koşul eşitsizliğin kesin sağlanmasıdır.*

Kanıt. $\beta = -\alpha - \gamma \mathrm{R}^{-1}$ olduğu için

$$\begin{aligned}
(1-p_2) &= -\tilde{p_2} = -\beta - \gamma - \delta = \alpha + \frac{1-\mathrm{R}}{\mathrm{R}}\gamma - \delta, \\
p_3 &= \tilde{p_3} = \alpha + \gamma + \delta, \\
p_4 &= \tilde{p_4} = \frac{\mathrm{R}-\mathrm{P}}{\mathrm{R}}\gamma
\end{aligned} \tag{4.25}$$

eşitsizlikleri sağlanır. $(1-\mathrm{R})p_3 \leq \mathrm{R}(1-p_2)$ eşitsizliği

$$(1-\mathrm{R})(\alpha+\gamma+\delta) \leq \mathrm{R}\alpha + (1-\mathrm{R})\gamma - \mathrm{R}\delta$$

halini alır. Bu $\delta \leq (2\mathrm{R}-1)\alpha$ eşitsizliğine indirgenir. Benzer şekilde

$$(1-\mathrm{R})p_4 \leq (\mathrm{R}-\mathrm{P})(1-p_2)$$

eşitsizliği $\delta \leq \alpha$ eşitsizliğini verir. □

UYARILAR:

(a) $\delta \leq 0$ iken p planının *iyi* olması için gerek ve yeter koşul $\delta < \alpha$ olmasıdır. $\delta > 0$ iken p planının *iyi* olması için gerek ve yeter koşul $\frac{\delta}{2\mathrm{R}-1} < \alpha$ olmasıdır.

(b) Yukarıdaki ispattan (4.18) eşitsizliklerinin eşitliğe dönüştüğü zaman

$$\delta = \alpha = \frac{\delta}{2\mathrm{R} - 1}$$

durumu meydana gelir. $2\mathrm{R} - 1 < 1$ olduğu için $0 = \delta = \alpha$ eşitliğine indirgenir.

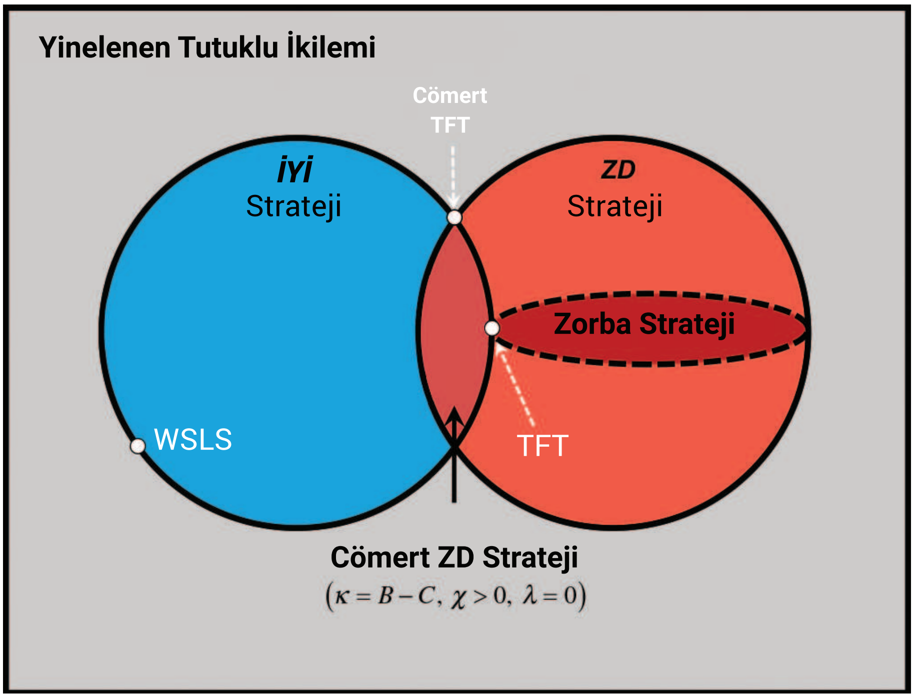
5. CÖMERT ZD STRATEJİLERİ

Bu bölümde, 3. bölümde ele aldığımız Press ve Dyson'ın tanımladığı ZD stratejileri ile 4.bölümde Akin'in [15], Press ve Dyson [8] makalesinde ortaya konan kavramlardan etkilenerek tanımladığı iyi stratejilerin kesişimi olan ve Stewart ve Plotkin [10] tarafından tanımlanan Cömert ZD stratejilerden bahsedeceğiz.

Burada daha önceki bölümlerde tanımladığımız tutuklu ikilemini tekrardan tanımlamaya gerek duymuyoruz. Fakat bu bölümde getiriler

$$\mathrm{T} = \mathrm{B}, \quad \mathrm{R} = \mathrm{B} - \mathrm{C}, \quad \mathrm{P} = 0 \quad \text{ve} \quad \mathrm{S} = -\mathrm{C}$$

olarak alınacaktır. Ayrıca yinelenen tutuklu ikileminde oyuncuların strateji belirlemeleri için tek-hafızaya sahip olmaları yeterlidir. Press ve Dyson [8] ve Stewart ve Plotkin [10] analizlerini tek-hafızalı oyuncular ile sınırlardı.



Şekil 5.1: *Yinelenen tutuklu ikileminde ZD ve iyi stratejiler arasındaki ilişki. ZD ve iyi stratejiler kümesi arasındaki kesişim tam da cömert ZD stratejiler kümesidir. İyi stratejilerin hepsi cömert değildir. Ayrıca, klasik itere tutuklu ikileminin bazı stratejilerinin gösterilmektedir.*

5.1. ZD Stratejileri, Zorbalık ve Cömertlik

Press ve Dyson, tüm tek-hafızalı ZD stratejiler uzayında iki oyuncunun uzun vadeli kazançları arasında sabit, doğrusal ilişki sağlayan ZD stratejilerinin bir alt uzayını tanımladı(bkz. Bölüm 3). Stewart ve Plotkin [10], Press ve Dyson vektörünü yeniden aşağıdaki gibi tanımlar. Y oyuncusu aşağıdaki formu kullanan

$$\begin{aligned} p_1 &= 1 - \phi(1-\chi)(\mathrm{B} - \mathrm{C} - \kappa) \\ p_2 &= 1 - \phi[\chi\mathrm{C} + \mathrm{B} - (1-\chi)\kappa] \\ p_3 &= \phi[\chi\mathrm{B} + \mathrm{C} + (1-\chi)\kappa] \\ p_4 &= \phi(1-\chi)\kappa \end{aligned}$$

X ile karşılaşırsa, oyuncuların getirileri arasında

$$\phi[s_X - \chi s_Y - (1-\chi)\kappa] = 0 \tag{5.1}$$

şeklinde doğrusal bir ilişki sağlanır.

χ ve κ parametreleri, $0 \leq \kappa \leq \mathrm{B} - \mathrm{C}$ ve

$$\max\left(\frac{\kappa - \mathrm{B}}{\kappa + \mathrm{C}}, \frac{\kappa + \mathrm{C}}{\kappa - \mathrm{B}}\right) \leq \chi \leq 1$$

eşitsizliklerinin sağlanması uygun stratejilerin üretilmesi için gereklidir. (5.1) eşitliği Press ve Dyson tarafından tanıtılan tüm ZD stratejilerini tanımlar. Bu uzayda iki alt küme özel ilgi alanıdır. Press ve Dyson [8] tarafından tanımlanan *zorba stratejilerde* $\kappa = \mathrm{P} = 0$ ve $\chi > 0$ iken, Stewart ve Plotkin [10] tarafından tanımlanan *cömert stratejilerde* $\kappa = \mathrm{R} = \mathrm{B} - \mathrm{C}$ ve $\chi > 0$ şeklindedir.

Zorba stratejilerde ya zorba Y rakibi X'ten daha fazla getiri elde eder ($s_Y > s_X$) ya da her iki oyuncu da kaçarak, $s_X = s_Y = 0$ getirisini alır. Buna karşın, cömert stratejiler ile ya her iki oyuncu karşılıklı iş birliği getirisi olan $\mathrm{R} = \mathrm{B} - \mathrm{C}$'yi alır; ya da cömert oyuncu Y, X'ten daha az getiri elde eder.

5.2. İyi Stratejiler

Cömert ZD stratejiler en iyi şekilde, yakın zamanda Akin [15] tarafından tanımlanan ve Bölüm 4'te incelediğimiz *iyi stratejiler* ile karşılaştırılarak anlaşılır. Bu bölümde getiriler farklı bir şekilde ele alındığı için, iyi stratejileri yeniden gözden geçirmekte fayda var. Yeni getirilere uyarlanırsa;

Eğer her iki oyuncu da *iyi strateji* kullanırsa her biri $\mathrm{B}-\mathrm{C}$ alır ve hiçbir oyuncu tek başına strateji değiştirerek kazanamaz.

İyi stratejiler IPD oyuncularının işbirlikçi davranışlarını kararlı hale getirir. Yani tüm *iyi stratejiler* işbirlikçidir. Ayrıca *cömert ZD stratejileri*, *iyi stratejilerin* ve *ZD stratejilerin* kesişimidir. Bu yüzden *cömert ZD stratejileri* de işbirlikçidir.

Stewart ve Plotkin, tek-hafızalı *iyi stratejiler* uzayını aşağıdaki gibi tanımlar.

$$\begin{aligned}
p_1 &= 1-\phi(1-\chi)(\mathrm{B}-\mathrm{C}-\kappa) \\
p_2 &= 1-\phi[\chi\mathrm{C}+\mathrm{B}-(1-\chi)\kappa+\lambda] \\
p_3 &= \phi[\chi\mathrm{B}+\mathrm{C}+(1-\chi)\kappa-\lambda] \\
p_4 &= \phi(1-\chi)\kappa
\end{aligned}$$

Burada $-1 \leq \chi \leq 1$ ve $-(\chi\mathrm{B}+\mathrm{C}) \leq \lambda \leq (\mathrm{B}+\chi\mathrm{C})$ uygun stratejilerin üretilmesi için gerekli koşullardır. İyi staratejilerin G kümesi için yeter koşul,

$$G = \{(\kappa,\chi,\phi,\lambda) : \kappa = \mathrm{B}-\mathrm{C}, \lambda > -(\mathrm{B}-\mathrm{C})\chi, \lambda > -(\mathrm{B}+\mathrm{C})\chi\}$$

kümesindeki uygun stratejiler olmasıdır. Stewart ve Plotkin'in bu yeterli koşulları nasıl tespit ettiğini anlamak için bu kişilerin Akin'i takiben Press ve Dyson vektörünü genelleştirmesinin analizini daha sonra da oyuncuların getirileri üzerinde yaptığı analizi anlamak gereklidir. $\tilde{\mathrm{p}} = (-1+p_1, -1+p_2, p_3, p_4)$ ve $\mathrm{L} = (0,1,1,0)$ olmak üzere, Y oyuncusu için strateji,

$$\tilde{\mathrm{q}} = \phi[\chi\mathrm{S}_Y - \mathrm{S}_X + (1-\chi)\kappa - \lambda\mathrm{L}] \tag{5.2}$$

olarak tanımlansın. IPD'nin uzun vadeli getirilerin sonucu örneğin v_2, oyunda (cd)

oynanma sıklığı olmak üzere

$$\chi s_Y - s_X + (1-\chi)\kappa - \lambda(v_2 + v_3) = 0$$

şeklinde ifade edilebilir. Akin daha önce IPD stratejisinin p'nin bazı $(\phi, \chi, \kappa, \lambda)$ seçimine bağlı olarak üretilebileceğini gösterdi. Burada λ'nın sıfır alınmasıyla Press ve Dyson [8] ile tanımlanan ZD stratejileri türetebileceğimizi unutmayalım. Stewart ve Plotkin kendi analizlerini kolaylaştırmak için Press ve Dyson, Akin'den biraz farklı olarak parametreleri kullanır. Özellikle Akin'in tarafından kullanılan λ, δ ya karşılık gelirken χ Press ve Dyson'ın kullanışının aksinedir.

İki koordinat düzlemi arasındaki ilişki (5.2)'den

$$\begin{aligned}
p_1 &= 1 - \phi(1-\chi)(\mathrm{B} - \mathrm{C} - \kappa) \\
p_2 &= 1 - \phi(\chi\mathrm{C} + \mathrm{B} - (1-\chi)\kappa + \lambda) \\
p_3 &= \phi[\chi\mathrm{B} + \mathrm{C} + (1-\chi)\kappa - \lambda] \\
p_4 &= \phi(1-\chi)\kappa
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\begin{aligned}
\kappa &= \frac{p_4(\mathrm{B}-\mathrm{C})}{1-p_1+p_4} \\
\chi &= \frac{(\mathrm{B}-\mathrm{C})(1-p_2+p_3) - (\mathrm{B}+\mathrm{C})(1-p_1+p_4)}{(\mathrm{B}-\mathrm{C})(1-p_2+p_3) + (B+C)(1-p_1+p_4)} \\
\lambda &= \frac{(p_4+p_1-p_2-p_3)(\mathrm{B}+\mathrm{C})(\mathrm{B}-\mathrm{C})}{(\mathrm{B}-\mathrm{C})(1-p_2+p_3) + (\mathrm{B}+\mathrm{C})(1-p_1+p_4)} \\
\phi &= \frac{(\mathrm{B}-\mathrm{C})(1-p_2+p_3) + (\mathrm{B}+\mathrm{C})(1-p_1+p_4)}{2(\mathrm{B}+\mathrm{C})(\mathrm{B}-\mathrm{C})}
\end{aligned}$$

olarak verilir. $\kappa = \mathrm{B} - \mathrm{C}$ olması iyi stratejiler için gereklidir. Ayrıca iki oyuncunun uzun-vadeli getirileri arasında

$$s_X = \chi s_Y + (1-\chi)(\mathrm{B}-\mathrm{C}) - \lambda(v_2 + v_3) \tag{5.3}$$

bir lineer ilişki daha elde edilir.

Press ve Dyson vektörünü daha detaylı inceledikten sonra şimdi getiriler ile elde ettikleri diğer ilişkileri inceleyelim. Bu ilişkiler iyi stratejiler kümesi için yeterli koşulların türetilmesi için kullanılacaktır.

5.2.1. Oyuncuların Getileri Üzerindeki Durumlar

Denge durumda kazançlar, X için

$$s_X = (\mathrm{B} - \mathrm{C})v_1 + \mathrm{B}v_2 - \mathrm{C}v_3,$$

Y için

$$s_Y = (\mathrm{B} - \mathrm{C})v_1 - \mathrm{C}v_2 + \mathrm{B}v_3$$

olur.

i. **Getiriler Farkı** Getiriler arasındaki fark

$$|s_X - s_Y| = (\mathrm{B} + \mathrm{C})|v_2 - v_3|.$$

Ayrıca

$$|v_2 - v_3| < v_2 + v_3$$

olduğundan

$$|s_X - s_Y| < (\mathrm{B} + \mathrm{C})(v_2 + v_3) \tag{5.4}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

ii. **Getiriler Toplamı**

Benzer şekilde getirileri toplarsak

$$s_X + s_Y = 2(\mathrm{B} - \mathrm{C})v_1 + (\mathrm{B} - \mathrm{C})(v_2 + v_3)$$

olur. Bu eşitliğin her iki tarafa $(\mathrm{B} - \mathrm{C})(v_2 + v_3)$ eklersek

$$s_X + s_Y + (\mathrm{B} - \mathrm{C})(v_2 + v_3) = 2(\mathrm{B} - \mathrm{C})(v_1 + v_2 + v_3)$$

olur. Ayrıca $v_1 + v_2 + v_3 \leq 1$ olduğundan

$$s_X + s_Y \leq 2(\mathrm{B}-\mathrm{C}) - (\mathrm{B}-\mathrm{C})(v_2+v_3) \tag{5.5}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Şimdi bu eşitsizliklerden iyi bir strateji elde etmek yeterli koşulları Stewart ve Plotkin'in [10] nasıl türettiğini inceleyeceğiz. Daha önce bahsedilen $\kappa = \mathrm{B}-\mathrm{C}$ koşulunun yanı sıra bir IPD stratejisinin iyi olması için yeterli koşulları belirlenmelidir. Bunun için, Y oyuncusunun işbirlikçi stratejisine karşılık X oyuncusunun $s_X \geq \mathrm{B}-\mathrm{C}$ getirisini elde etmek için hangi koşullara ihtiyaç olduğu belirlenecektir. Daha sonra, χ ve λ değerlerinin bazı koşulları sağlaması durumunda, X oyuncusunun herhangi bir stratejisinin bulunamayacağını gösterilebilir. Bu nedenle, Y oyuncusunun bu koşulları sağlayacak herhangi bir stratejisinin iyi olacağı gösterilecektir.

Bir stratejinin iyi olduğunu belirlemek için χ ve λ değerlerinin pozitif ve negatif olmasına bağlı olarak dört durum vardır. Y'nin iyi olması bu durumlardan üçü için gerekli koşulları türetetilmiştir. Bunun için Y'nin ilk olarak işbirlikçi olduğunu yani $\kappa = \mathrm{B}-\mathrm{C}$ olduğunu varsayıyoruz. Çünkü bu Y'nin işbirlikçi olması için gerek koşuldur.

1.Durum: $\chi \geq 0,\ \lambda \geq 0$ iken işbirlikçi bir strateji iyidir.

$\chi \geq 0,\ \lambda \geq 0$ olsun. X'in karşılıklı iş birliği getirisinden daha fazla kazandığını varsayalım. Bir başka deyişle $s_X > \mathrm{B}-\mathrm{C}$ olsun. Buna göre $\chi > 0$ olmalıdır. Bu durumda (5.3)'den

$$\chi s_Y + (1-\chi)(\mathrm{B}-\mathrm{C}) - \lambda(v_2+v_3) > \mathrm{B}-\mathrm{C} \quad \text{ise}$$

$$\chi s_Y > (\mathrm{B}-\mathrm{C})\chi + \lambda(v_2+v_3) \quad \text{ise}$$
$$s_Y > (\mathrm{B}-\mathrm{C}) + \frac{\lambda}{\chi}(v_2+v_3) \quad \text{olur.}$$

Fakat bu mümkün değildir. Çünkü $s_X + s_Y > 2(\mathrm{B}-\mathrm{C})$ olduğu anlamına gelir ki, bu durum (5.5) ile çelişir. O halde bu koşullar altında $s_X \leq \mathrm{B}-\mathrm{C}$ olmak zorundadır. Sonuç olarak bu koşullar altında Y oyuncusunun stratejisinin iyi olduğu anlamına gelir.

2.Durum: $\chi < 0$ ve $\lambda > -(\mathrm{B}+\mathrm{C})\chi$ iken işbirlikçi bir strateji iyidir.

$\chi < 0$ ve $\lambda \geq 0$ olsun. Bir kez daha, $s_X > \mathrm{B}-\mathrm{C}$ olduğunu varsayalım. (5.3)'den

$$s_Y < (\mathrm{B}-\mathrm{C}) + \frac{\lambda}{|\chi|}(v_2+v_3)$$

olur. s_X değeri (5.4) eşitsizliğinde yerine yazılarak

$$s_Y > (\mathrm{B}-\mathrm{C}) - \frac{\mathrm{B}+\mathrm{C}+\lambda}{1+|\chi|}(v_2+v_3)$$

eşitsizliği elde edilir. Açıktır ki, bu iki eşitsizlik sadece

$$\lambda < (\mathrm{B}+\mathrm{C})|\chi|$$

eşitsizliğini veren

$$(\mathrm{B}-\mathrm{C}) - \frac{\mathrm{B}+\mathrm{C}+\lambda}{1+|\chi|}(v_2+v_3) > (\mathrm{B}-\mathrm{C}) + \frac{\lambda}{|\chi|}(v_2+v_3)$$

şu koşul ile mümkündür. Dolayısıyla $\lambda > -(\mathrm{B}+\mathrm{C})\chi$ eşitsizliğini sağlaması koşuluyla herhangi bir strateji iyidir. Çünkü $s_X > \mathrm{B}-\mathrm{C}$ stratejisi için bir çelişki doğurmaktadır.

3.Durum: $\chi \geq 0$ ve $\lambda \geq -(\mathrm{B}-\mathrm{C})\chi$ iken işbirlikçi bir strateji iyidir. Böylece $\chi \geq 0$ ve $\lambda < 0$ olsun. $s_X > \mathrm{B}-\mathrm{C}$ olduğunu varsayalım. Böylece

$$s_Y > (\mathrm{B}-\mathrm{C}) - \frac{|\lambda|}{\chi}(v_2+v_3)$$

olur. O zaman

$$s_X + s_Y > 2(\mathrm{B}-\mathrm{C}) - \frac{|\lambda|}{\chi}(v_2+v_3)...(s_X > (\mathrm{B}-\mathrm{C}))$$

olur. Bunun da (5.5) ile tutarlı olması için $|\lambda| \geq (\mathrm{B}-\mathrm{C})\chi$ olmalı. Böylece $\lambda \geq -(\mathrm{B}-\mathrm{C})\chi$ iken herhangi bir strateji iyidir. Çünkü bir kez daha $s_X > \mathrm{B}-\mathrm{C}$ olması çelişki yaratır.

6. SONUÇ

Bu çalışmada, etkileşim içinde olan oyuncuların getirilerini arzuladıkları değerlere getirmeleri için nasıl stratejiler seçmeleri gerektiğinden bahsedilmiştir. Bu stratejilerden ilk olarak oyuncuların getirileri arasında doğrusal bir ilişki kuran ZD stratejileri ele alınmış ve bu başlık altında iki oyuncudan birinin diğerinin getirisini nasıl sabit tutacağından veya kendi getirisini nasıl daha yüksek tutacağı açıklanmıştır. Daha sonra iş birlikçi olmayı oyunculara (etkileşim içindekilere) nasıl dayatabiliriz sorusuna cevap arayan ve oyuncuların getirileri ya da toplam getirileri arasında doğrudan bir ilişki kuran "iyi strateji"lerden bahsedilmiştir. Bu başlık altında Nash tipi stratejiler tanıtılıp, stratejinin Nash tipi ya da iyi strateji olması için gerek ve yeter şartlar açıklanmıştır. Son olarak yukarıda bahsedilen zorba stratejilerle getirileri arzulanan değere getirmek ya da iş birlikçi davranışı dayatmak yerine bu strateji vektörlerinden yola çıkılarak daha ılıman ve teşvik edici olan cömert ZD stratejiler ele alınmıştır.

KAYNAKÇA

[1] J. Von Neumann, O. Morgenstern, Theory of Games ans Economic Behavior, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1944.

[2] C. Hilbe, M. Nowak, K. Sigmund, (2013) The evolution of extortion in iterated Prisoner's Dilemma games, PNAS, 110 no. 17, 6913-6918.

[3] J. Hofbauer, K. Sigmund, Evolutionary Games and Population Dynamics, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1998.

[4] J. Maynard Smith, Evolution and the Theory of Games, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1982.

[5] Nowak, Evolutionary Dynamics, Harward Univ. Press, Cambridge, MA, 2006.

[6] K. Sigmund, Games of life, Oxford Univ. Press, Oxford, UK, 1993.

[7] K. Sigmund,The Calculus of Selfishness, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2010.

[8] W. Press, F. Dyson (2012) Iterated Prisoner's Dilemma contains strategies that dominate any evolutionary opponent, PNAS, 109 no. 26, 10409-10413.

[9] A. Steward, J. Plotkin, (2012) Extortion and cooperation in the Prisoner's Dilemma, PNAS, 109 no. 26, 10134-10135.

[10] A. J. Steward, Joshua B. Plotkin, (2013) From extortion to generosity, evolution in the Iterated Prisoner's Dilemma, Department of Biology, University of Pennsylvania, Philadelphia, PA 19104.

[11] Boerlijst, M.; Nowak, M.; Sigmund, K. Equal pay for all prisoners. Am. Math. Mon, 1997, 104, 303-305.

[12] K. Steven, "Prisoner's Dilemma", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2017 Edition), Edward N. Zalta (ed.), https://plato.stanford.edu/archives/spr2017/entries/prisoner-dilemma.

[13] R. Axelrod, The Evolution of Cooperation, Basic Books, New York, NY, 1984.

[14] Kh. G. Guseinov, E. Akyar, S. A. Düzce, "Oyun Teorisi: Çatışma ve Anlaşmanın MAtematiksel Modelleri", Seçkin Yayıncılık, 3.Baskı, 2014.

[15] E. Akin, Good Strategies for the Iterated Prisoner's Dilemma, Mathematics Department, The City College, New York, NY 10031, USA, 2012-2013.

[16] Akin, E. Stable Cooperative Solutions for the Iterated Prisoner's Dilemma; 2013, ArXiv-1211.0969v2. arXiv.org e-Print archive. Avaible online: http://arxiv.org/abs/1211.0969 (accessed on 4 April 2015).

[17] G. Hardin, (1968) The tragedy of the commens, Science, 162 1243-1248.