

**ÇİZGELER ÜZERİNDE
SOLO TEST OYUNU**

Yüksek Lisans Tezi

Nazlıcan ÇAKMAK

Eskişehir, 2018

ÇİZGELER ÜZERİNDE SOLO TEST OYUNU

NAZLİCAN ÇAKMAK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Cebir ve Sayılar Teorisi Tezli Yüksek Lisans Programı

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Emrah AKYAR

Eskişehir

Anadolu Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Haziran, 2018

Bu tez çalışması BAP Komisyonunca kabul edilen 1709F522 no.lu proje kapsamında desteklenmiştir.

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Nazlıcan Çakmak'ın "Çizgeler Üzerinde Solo Test Oyunu" başlıklı tezi 01/06/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek "Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri uyarınca, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

	<u>Unvanı Adı-Soyadı</u>	<u>İmza</u>
Üye (Tez Danışmanı)	: Prof. Dr. Emrah AKYAR
Üye	: Prof. Dr. Pınar ANAPA
Üye	: Doç. Dr. Aytaç KURTULUŞ

Prof. Dr. Ersin YÜCEL
Enstitü Müdürü

ÖZET

ÇİZGELER ÜZERİNDE SOLO TEST OYUNU

Nazlıcan ÇAKMAK

Matematik Anabilim Dalı

Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Haziran, 2018

Danışman: Prof. Dr. Emrah AKYAR

Solo test oyunu genel olarak piyonlarla oynanan tek kişilik bir masa oyunudur. Bu oyunda bir delik hariç diğer deliklerde piyonlar bulunur. Oyunun kuralı şu şekilde tanımlanır; x ile y iki komşu piyon ve z de bu piyonlara komşu bir delik olsun. Bu durumda x , y 'nin üzerinden atlayarak z 'deki deliğe gelir ve y 'deki piyon alınır. Bu hamlelere eğer mümkünse tek piyon kalana kadar devam edilir. Oyunun sonunda bir tek piyon kalıyorsa oyuna çözülebilirdir denir. Bu oyunu çizgeler üzerine aktarmak da mümkündür. $G = (V, E)$ çizgesi verilsin. x , y ve z G çizgesinin köşe noktaları ve $\{x, y\}$ ile $\{y, z\}$ çizgenin kenarları olmak üzere; x ve y köşelerinde piyonlar bulunurken z köşesinde ise piyon bulunmasın. Bu durumda yukarıdaki gibi x , y 'nin üzerinden atlayarak z 'deki deliğe gelir ve y 'deki piyon alınır. Oyunun sonunda bir tek piyon kalabiliyorsa G çizgesine çözülebilirdir denir.

Bu yüksek lisans tezinde, çizgeler üzerinde solo test oyununun öncelikle literatürde yer alan çözülebilirlik koşulları derlenmiş ve çeşitli çizgelerin çözülebilirliği için gerekli ve yeterli koşullar sunulmuştur. Ayrıca, Sierpinski çizgelerin çözülebilir olduğu kanıtlanmıştır.

Anahtar Sözcükler: Çizge, Solo test oyunu, Sierpinski çizge

ABSTRACT

PEG SOLITAIRE GAME ON GRAPHS

Nazlıcan ÇAKMAK

Mathematics Department

Anadolu University, Graduate School of Sciences, June, 2018

Supervisor : Prof. Dr. Emrah AKYAR

Peg solitaire game is a board game which traditionally begins with pegs in every space except for one which is left empty (hole). The rule of the game can be defined as two adjacent pegs, say x and y , are followed up by a hole z , then the peg x can jump over the peg y into the hole z . Then the peg y is removed and the main goal is to remove every peg but one. If this is achieved, then the board is considered solved. These boards are treated as connected graphs in the combinatorial sense. Let $G = (V, E)$ be a given graph. If there are pegs in vertices x and y and hole in z , then we allow x to jump over y into z such that $\{x, y\}$ and $\{y, z\}$ are edges of G . As described above, the peg y is removed. If the all pegs are removed except one then the graph is called solvable.

In this master thesis, initially the solvability conditions of the peg solitaire game are compiled from the literature and the necessary and sufficient conditions for the solvability of various graphs are presented. Moreover, it is proved that Sierpinski graphs are solvable.

Keywords: Graph, Peg solitaire game, Sierpinski graph

TEŐEKKÖR

Bu tez çalıőmasında; kapısını her çaldığımda bana yardımcı olan ve yol gōsteren değerli danıőman hocam Prof. Dr. Emrah AKYAR'a, yaklaşık iki yıldır ders aőamasından tezin bitimine kadar her daim birlikte çalıőtıđım ve desteğini hep hissettiğim camm ortağım Nilay TORUN'a, bu sūrete yanımda olan sevgili arkadaşlarıma ve elbette eğitim hayatım boyunca her zaman arkamda olan ve beni destekleyen gūzel aileme sonsuz teőekkūrlerimi sunarım.

Nazlıcan ÇAKMAK

Haziran, 2018

01/06/2018

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarda bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilemeyen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmamın Anadolu Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı”yla tarandığını ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm.

Nazlıcan ÇAKMAK

İÇİNDEKİLER

BAŞLIK SAYFASI	i
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR	v
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	x
1 GİRİŞ	1
2 ÖN BİLGİLER	2
2.1 Çizge Kuramı	2
2.2 Bazı Özel Çizgeler	4
2.3 Solo Test Oyunu	8
2.3.1 Klasik solo test oyunu	8
2.3.2 Çizgeler üzerinde solo test oyunu	11
3 ÇEŞİTLİ ÇİZGELER ÜZERİNDE SOLO TEST OYUNU	13
3.1 Tam Çizge İçin Çözülebilirlik Koşulları	13
3.2 Yol Çizge ve Döngü Çizge İçin Çözülebilirlik Koşulları	13
3.3 Yıldız Çizge ve Çift Yıldız Çizge İçin Çözülebilirlik Koşulları	16
3.4 Yel Değirmeni Çizge İçin Çözülebilirlik Koşulları	18
3.5 (n, t) -yıldız Çizge İçin Çözülebilirlik Koşulları	20
3.6 İki Kümeli Tam Çizge İçin Çözülebilirlik Koşulları	21
3.7 İki Çizgenin Toplamı ve Kartezyen Çarpımı İçin Çözülebilirlik Koşulları	24
4 SIERPİNSKİ ÇİZGELER ÜZERİNDE SOLO TEST OYUNU	29
4.1 Sierpinski Çizgeler	29
4.2 Sierpinski Çizge İçin Çözülebilirlik Koşulları	30
KAYNAKÇA	36
ÖZGEÇMİŞ	37

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1	Bir G çizgesi örneği	2
Şekil 2.2	Basit olmayan bir çizge	2
Şekil 2.3	Alt çizge ve G çizgesinin ürettiği alt çizge	3
Şekil 2.4	P_2 , P_3 ve $P_2 \square P_3$ çizgeleri	4
Şekil 2.5	P_2 , P_3 ve $P_2 + P_3$ çizgeleri	4
Şekil 2.6	K_1 , K_2 , K_3 ve K_4 tam çizgeleri	4
Şekil 2.7	C_3 , C_4 ve C_5 döngü çizgeleri	5
Şekil 2.8	P_5 yol çizge	5
Şekil 2.9	$K_{1,8}$ ve $DS(4, 3)$ çizgeleri	5
Şekil 2.10	$W(3)$ rüzgar gülü çizge ve $W(4, 2)$ yel değirmeni çizge	6
Şekil 2.11	C_4 döngü çizge ile $K_{2,2}$ iki kümeli tam çizge	6
Şekil 2.12	Bir ağaç örneği	7
Şekil 2.13	Çapı dört olan bir ağaç örneği $K_{1,3}(3; 2, 2, 1)$	7
Şekil 2.14	4-pençe veya $(4, 3)$ -yıldız	7
Şekil 2.15	<i>“Madame la Princesse de Soubize jouant au jeu de Solitaire”</i>	8
Şekil 2.16	33 delikli İngiliz Masası (The English Board)	9
Şekil 2.17	37 delikli Avrupa Masası (The European Board)	9
Şekil 2.18	45 delikli Wiegleb Masası (The Wiegleb Board)	10
Şekil 2.19	39 delikli Asimetrik Masa (The Asymmetrical English Board)	10
Şekil 2.20	41 delikli Karo Masa (The Diamond Board)	10
Şekil 2.21	15 delikli Üçgensel Masa (Triangular Board)	11
Şekil 2.22	Solo test oyununda bir hamle	11
Şekil 3.23	İki delik yanında iki piyon ve tekrar iki delik	14
Şekil 3.24	P_2 yol çizgesi üzerinde solo test oyunu	15
Şekil 3.25	P_4 yol çizgesi üzerinde solo test oyunu	15
Şekil 3.26	P_5 yol çizgesi üzerinde solo test oyunu	15
Şekil 3.27	Delik merkezde iken $K_{1,8}$ yıldız çizge çözülebilir değildir.	16
Şekil 3.28	Delik merkezde değilken $K_{1,8}$ yıldız çizgesi üzerinde solo test oyunu	17
Şekil 3.29	$W(2)$ çizgesi çözülebilir değildir.	19
Şekil 3.30	$(4, 2)$ -yıldız çizge	21
Şekil 3.31	$K_{2,n+1}$ iki kümeli tam çizge üzerinde solo test oyunu	23
Şekil 3.32	$K_{n+1,m}$ iki kümeli tam çizge üzerinde solo test oyunu	23
Şekil 3.33	$G + H$ çizgesi üzerinde solo test oyunu	24
Şekil 3.34	$G \square H$ çizgesinin çözümü	26
Şekil 3.35	$G \square H$ çizgesinin çözümü	26

Şekil 3.36	G_v kopyalarının çözülebilirliği	27
Şekil 3.37	H_z kopyasındaki piyonlar tamamen alınmıştır.	28
Şekil 3.38	Son piyon (y, v_1) köşesinde bırakılır.	28
Şekil 4.39	$S(2, 3)$ Sierpinski çizge ve $0S(1, 3)$, $1S(1, 3)$ ve $2S(1, 3)$ alt çizgeleri	30
Şekil 4.40	$(6, 2)$ -lolipop çizge	31
Şekil 4.41	Başlangıçta delik 03 köşesinde iken $S(2, 4)$ çizgesi	33
Şekil 4.42	Başlangıç deliği 00 köşesinde iken $S(2, 3)$ Sierpinski çizge üzerinde solo test oyunu	35

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

V	:	Çizgenin köşe noktaları kümesi
E	:	Çizgenin kenarlar kümesi
$d(v)$:	v köşe noktasının derecesi
K_n	:	n köşe noktalı tam çizge
P_n	:	n köşe noktalı yol çizge
C_n	:	n köşe noktalı döngü çizge
$K_{1,n}$:	n köşe noktalı yıldız çizge
$K_{r,s}$:	İki kümeli tam çizge
$DS(L, R)$:	Çift yıldız çizge
$G_1 \square G_2$:	G_1 ve G_2 çizgelerinin Kartezyen çarpımı
$G_1 + G_2$:	G_1 ve G_2 çizgelerinin toplamı
$W(B)$:	B kanatlı yel değirmeni çizge
$W(P, B)$:	B kanatlı, P kenarlı yel değirmeni çizge
$K_{1,n}(c; a_1, a_2, \dots, a_i)$:	Çapı dört olan ağaçlar için genel gösterim
$K_{1,n}(c; 2, 2, \dots, 2)$:	n -pençe çizge
$K_{1,n}(0; t-1, \dots, t-1)$:	(n, t) -yıldız çizge
$[x \cdot \vec{y} \cdot z]$:	Solo test oyununda klasik bir hamle
$S(n, k)$:	K_k tam çizgesinin n iterasyonu ile elde edilen Sierpinski çizge

1 GİRİŞ

Çizge kuramı, 1736 yılında Leonhard Euler'in yazmış olduğu Königsberg'in 7 köprüsü hakkındaki makalesi ile temelleri atılmış olan matematiğin bir alt dalıdır. Günümüzde ise sosyolojiden bilgisayar bilimlerine, işletmeden endüstri mühendisliğine, kimyadan genetik bilimine, coğrafyadan mimariye kadar çok geniş alanlarda kullanımı olan teori, basitçe bir gerçek hayat probleminin çizge ile modellenmesini amaçlamaktadır. Model oluşturulduktan sonra çizge teorisinde bulunan yöntemler kullanılarak problem çözülebilmekte ve ardından da tekrar gerçek hayata uygulanabilmektedir. Örneğin; bir şehirden başka bir şehire en ucuz maliyetle telefon kabloları nasıl döşenir, toplam fayda maksimum olacak şekilde n tane iş n tane işçiyle nasıl doldurulabilir, bir maç sezonu en kısa sürecek şekilde nasıl programlanabilir, her harita komşu ülkeler ya da şehirler farklı renkte olacak şekilde 4 farklı renk kullanılarak boyanabilir mi gibi sorulara cevaplar verebilen bir alandır.

Solo test oyunu çoğu kişi tarafından bilinen tek kişilik bir masa oyunudur. Oyun, bir oyun tahtası üzerinde deliklere yerleştirilmiş piyonlarla oynanır ve oyunun amacı piyonları birbirinin üzerinden atlatarak oyunun sonunda mümkünse tek piyon bırakmaktır. [1], [6], [7], ve [11] referanslarında solo test oyununun nasıl çözüleceğiyle ilgili ayrıntılı bilgiler mevcuttur.

2011 yılında Beeler ve Hoilman solo test oyununu çizgeler üzerine aktararak, [4] çalışmasında bilinen temel birkaç çizge üzerinde solo test oyununun çözülebilirliği ile ilgili gerekli ve yeterli koşulları sunmuştur. Beeler ve Hoilman [3] referansında solo test oyununun yel değirmeni ve çift yıldız çizge için çözülebilirlik koşullarını vermiştir. [5] çalışmasında ise Beeler ve çalışma arkadaşları solo test oyununu çapı dört olan ağaçlar üzerine aktarıp bu çizgeler için çözülebilirlik koşulları sunmuştur. Beeler ve çalışma arkadaşları [2] çalışmasında köşe noktalarının sayısı yedi ve yediden az olan çizgeler üzerinde solo test oyunu için çözülebilirlik koşullarını vermişlerdir. Engbers ve Stocker [8] ile verilen çalışmada çizgeler üzerinde solo test oyununu tersine çevirerek çözülebilirlik koşullarını yeniden incelemişlerdir.

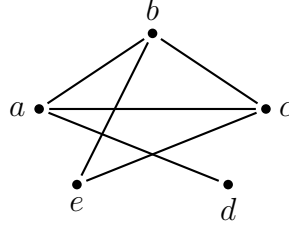
Dört bölümden oluşan bu çalışmanın ikinci bölümünde çizge kuramı ve çizgeler üzerinde solo test oyunu ile ilgili temel tanım, teorem ve gösterimler verilmiştir. Üçüncü bölümde ise tam çizge, yol çizge, döngü çizge, yıldız çizge, iki kümeli çizge gibi çeşitli özel çizgelerin çözülebilirliği ile serbest çözülebilirliği incelenmiştir. Son bölüm olan dördüncü bölümde ise Sierpinski çizgeler tanımlanarak Sierpinski çizgeler üzerinde solo test oyunu ele alınmış ve bu çizgelerin serbest çözülebilir olduğu kanıtlanmıştır.

2 ÖN BİLGİLER

2.1 Çizge Kuramı

Çizge, kabaca köşe noktaları ve bu köşe noktalarının bazıları arasında çizilen kenarlardan oluşan bir yapıdır.

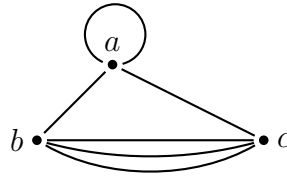
Bir G çizgesi, elemanları köşe noktası olarak adlandırılan boş kümeden farklı, sonlu bir V kümesi ile elemanları kenar olarak adlandırılan V kümesinin iki elemanlı alt kümelerinden oluşan E kümesi yardımıyla tanımlanır. Bu durumda G çizgesi $G = (V, E)$ şeklinde yazılır. Örneğin, köşe noktaları kümesi $V = \{a, b, c, d, e\}$ ve kenarlar kümesi $E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, e\}, \{c, e\}\}$ olan $G = (V, E)$ çizgesi aşağıdaki diyagram ile de gösterilir.



Şekil 2.1: Bir G çizgesi örneği

Gösterim kolaylığı olması açısından u ve v , G çizgesinin iki farklı köşe noktası olmak üzere; eğer varsa, bu köşeler arasındaki kenar kısaca uv olarak gösterilir.

Bir G çizgesinde iki köşe noktası arasında en fazla bir kenar varsa ve bir köşe noktasından kendisine kenar yoksa bu G çizgesine *basit çizge* denir.



Şekil 2.2: Basit olmayan bir çizge

Bir G çizgesinin u ve v gibi iki köşesi arasında bir kenar varsa bu köşelere *komşu köşeler*, iki kenarın ortak bir köşesi varsa da bu kenarlara *komşu kenarlar* denir. Bir v köşesine bağlı olan kenar sayısına v köşe noktasının *derecesi* denir ve $d(v)$ ile gösterilir. Örneğin Şekil 2.1 için, a ve b komşu köşeler, ab ve bc komşu kenarlardır, ayrıca $d(a) = 3$, $d(e) = 2$.

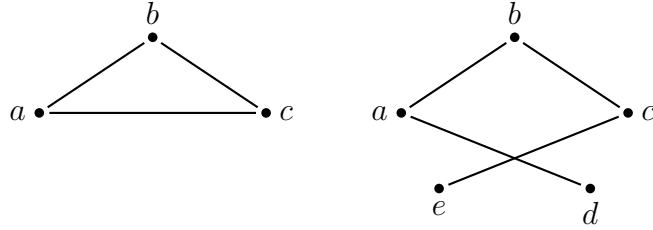
Teorem 2.1.1 (El Sıkışma Teoremi ([13])). *Bir $G = (V, E)$ çizgesinde tüm köşe*

noktalarının dereceleri toplamı, kenar sayısının iki katına eşittir. Yani,

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

Bir $G = (V, E)$ çizgesinde iki ardışık kenarın oluşturduğu $v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{k-1}v_k \in E$ şeklinde ki sonlu kenarlar dizisine v_0 ile v_k köşelerini birleştiren bir *yolculuk*, kenar sayısına ise yolculuğun uzunluğu denir. Eğer yolculuğun tüm kenarları farklı ise bu yolculuğa *tur* denir. Tüm köşe noktalarının farklı olduğu tura ise G içerisinde bir *yol* denir. Eğer turun başlangıç ve bitiş noktaları aynı ise bu tura *kapalı tur*, yol için ise bu duruma *döngü* denir. Bir çizgenin keyfi iki köşe noktası arasında bir yol varsa bu çizgeye *tek parça* çizge denir. Bir çizgede, her kenardan bir kere geçmek şartıyla, tura başlanan köşe noktasına geri dönülebiliyorsa bu çizgeye *Eulerian* çizge, eğer her köşeden bir kere geçen kapalı bir tur varsa bu çizgeye de *Hamiltonian* çizge denir.

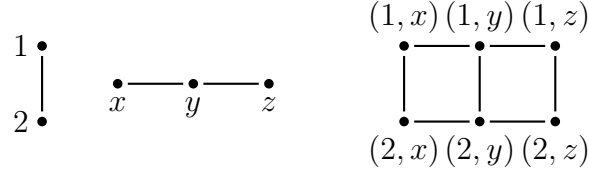
$G = (V, E)$ çizgesi verilsin. $W \subset V$ ve $F \subset E$ olmak üzere; $H = (W, F)$ çizgesine G çizgesinin bir *alt çizgesi* denir. G çizgesinin bütün köşelerini içeren fakat bazı kenarlarının silinmesiyle oluşan alt çizgeye G çizgesinin *ürettiği alt çizge* denir. Aşağıda Şekil 2.1 ile verilen çizge için sırasıyla bir alt çizge ve G çizgesinin ürettiği alt çizge örneği verilmiştir.



Şekil 2.3: Alt çizge ve G çizgesinin ürettiği alt çizge

$G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ iki çizge olsun. $v_1, v_2 \in V_1$ köşe noktaları G_1 çizgesinde komşu köşeler ve $\phi(v_1), \phi(v_2) \in V_2$ köşe noktaları G_2 çizgesinde komşu köşeler olacak şekilde bir $\phi : V_1 \rightarrow V_2$ birebir dönüşümü varsa G_1 ve G_2 çizgelerine *izomorf çizgeler* denir. Bu durumda G_1 ve G_2 çizgeleri aynı çizgeymiş gibi düşünülebilir.

$G = (V_1, E_1)$ ve $H = (V_2, E_2)$ iki çizge olsun. G ve H çizgelerinin *Kartezyen çarpımı* $G \square H$ ile gösterilir. Kartezyen çarpımın köşe noktaları kümesi ise $V_1 \times V_2$ olur. $u = (u_1, u_2)$ ve $v = (v_1, v_2)$, $G \square H$ çizgesinin köşe noktaları olsun. u ve v köşelerinin komşu olması için gerek ve yeter şart; ya $u_1 = v_1$ ve u_2 ile v_2 köşeleri H çizgesinde komşu köşeler ya da $u_2 = v_2$ ve u_1 ile v_1 köşeleri G çizgesinde komşu köşeler olmasıdır. Bu durumda G çizgesi n köşeli, H çizgesi de m köşeli olmak üzere $G \square H$ çizgesi de nm köşeli olur.



Şekil 2.4: P_2 , P_3 ve $P_2 \square P_3$ çizgeleri

G_1 ve G_2 iki çizge olmak üzere, bu *iki çizgenin toplamı*; G_1 çizgesindeki bütün köşelerin G_2 çizgesindeki bütün köşelere kenarlarla bağlanması olarak tanımlanır ve $G_1 + G_2$ şeklinde gösterilir. Bu durumda bu $G_1 + G_2$ çizgesinin kenar sayısı, iki çizgenin kenar sayıları toplamına ek olarak iki çizgenin köşe sayılarının çarpımı ilave edilerek bulunur. Örneğin, P_2 ve P_3 çizgelerinin toplamı Şekil 2.5’de verilmiştir.

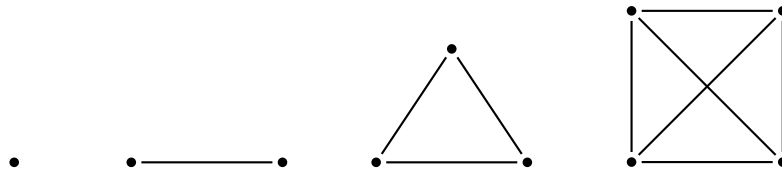


Şekil 2.5: P_2 , P_3 ve $P_2 + P_3$ çizgeleri

2.2 Bazı Özel Çizgeler

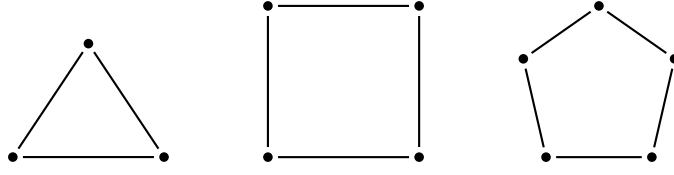
Bu bölümde, sonraki bölümlerde incelenecek olan bazı özel çizgelerin tanımları verilecektir.

Tanım 2.2.1. Herhangi iki köşe noktası arasında bir kenar olan çizgelere **tam çizge** denir ve n köşeli bir tam çizge K_n ile gösterilir (bkz. Şekil 2.6). Bu durumda n köşesi olan bir tam çizgenin $\binom{n}{2}$ tane kenarı vardır.



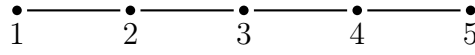
Şekil 2.6: K_1 , K_2 , K_3 ve K_4 tam çizgeleri

Tanım 2.2.2. Tüm köşe noktalarının derecesi iki olan tek parça çizgeye **döngü çizge** denir. $n \geq 3$ olmak üzere n köşe noktalı döngü çizge C_n ile gösterilir (bkz. Şekil 2.7). Açıktaır ki, n köşesi olan döngü çizgenin n tane de kenarı vardır.



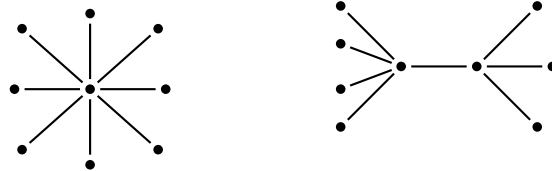
Şekil 2.7: C_3 , C_4 ve C_5 döngü çizgeleri

Tanım 2.2.3. Döngü çizgeden bir kenar silinerek elde edilen çizgeye **yol çizge** denir ve n köşe noktalı yol çizge P_n ile gösterilir (bkz. Şekil 2.8). Tanım gereği n köşesi olan bir yol çizgenin $(n - 1)$ tane kenarı vardır.



Şekil 2.8: P_5 yol çizge

Tanım 2.2.4. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, bir köşe noktasının derecesi $(n - 1)$, diğer köşelerinin derecesi 1 olan çizgeye n köşe noktalı **yıldız çizge** denir ve $K_{1,n}$ veya S_n ile gösterilir ayrıca n köşe noktalı yıldız çizgenin $(n - 1)$ kenarı vardır. Derecesi $(n - 1)$ olan köşe noktasına merkez köşe noktası denir. Eğer merkez köşe noktası iki tane ise bu çizgeye **çift yıldız çizge** denir ve $DS(L, R)$ ile gösterilir. Burada L ve R ifadeleri merkez köşe noktalarına kaç adet köşe ve kenar eklendiğini belirtmektedir ve bu eklenen kenarlara sarkıt denir (bkz. Şekil 2.9). Çift yıldız çizgenin genellikle, merkez köşe noktalarından biri u_l diğeri ise u_r olarak adlandırılır ve u_l köşesine bağlanan sarkıtların köşeleri l_1, \dots, l_L ve u_r köşesine bağlanan sarkıtların köşeleri ise r_1, \dots, r_R şeklinde adlandırılır. Böylece çift yıldız çizgenin $L + R + 2$ köşe noktası ve $L + R + 1$ kenarı vardır.



Şekil 2.9: $K_{1,8}$ ve $DS(4, 3)$ çizgeleri

Tanım 2.2.5. K_n tam çizgesinin m kopyasının bir merkez köşe noktası olarak adlandırılan u köşe noktasına eklenmesi ile elde edilen çizgeye **rüzgar gülü çizge**

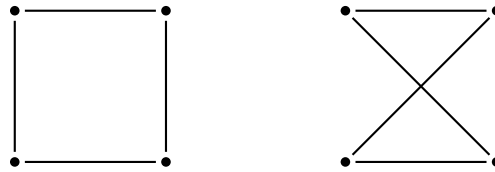
denir. Burada özel olarak tam çizge K_3 seçildiği zaman elde edilen çizgeye **yel değirmeni çizge** denir. Böylece her bir K_3 tam çizgesi kanat olarak adlandırılır ve yel değirmeni çizge $W(B)$ ile gösterilir. Buradaki B notasyonu merkez köşe noktasına eklenen kanat sayısını belirtir. Kanatlarda bulunan köşe noktaları $i = 1, \dots, B$ olmak üzere b_1, \dots, b_{2B} şeklinde adlandırılır ve $b_{2i-1}b_{2i} \in E$ olur. $W(B)$ çizgesinin $3B - 2$ tane köşe noktası, $3B$ tane de kenarı vardır.

Bu çizgenin başka bir versiyonu da, merkez u köşe noktasına kanatlarla birlikte p_1, \dots, p_P olarak adlandırılan P tane köşe noktasının birer kenar ile bağlanmasıyla oluşan çizgedir ve $W(P, B)$ şeklinde gösterilir. $W(P, B)$ çizgesinin $3B + P - 2$ tane köşe noktası, $3B + P$ tane de kenarı vardır (bkz. Şekil 2.10).



Şekil 2.10: $W(3)$ rüzgar gülü çizge ve $W(4,2)$ yel değirmeni çizge

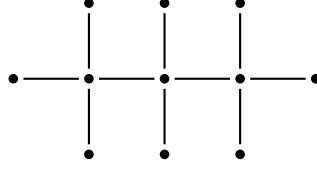
Tanım 2.2.6. Bir çizgenin tüm köşe noktaları kendi aralarında kenar olmayacak şekilde iki kümeye ayrılabilirse bu çizgeye **iki kümeli çizge** denir. Bu iki kümeye A ve B denirse ve A kümesindeki her köşe noktasından B kümesindeki her köşe noktasına bir kenar varsa bu çizgeye **iki kümeli tam çizge** denir. A kümesinin eleman sayısı r , B kümesinin eleman sayısı da s olmak üzere iki kümeli tam çizge $K_{r,s}$ şeklinde gösterilir. İki kümeli tam çizgenin $r + s$ tane köşe noktası ve rs tane de kenarı vardır. Ayrıca, eğer $r = 1$ alınırsa yıldız çizge elde edilir.



Şekil 2.11: C_4 döngü çizge ile $K_{2,2}$ iki kümeli tam çizge

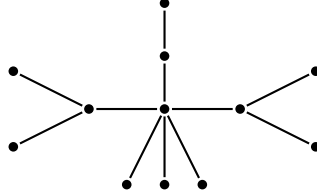
Örneğin Şekil 2.11 ile C_4 döngü çizgenin iki kümeli tam çizge olarak çizimi verilmiştir. Böylece $C_4 \cong K_{2,2}$ olduğu görülür.

Tanım 2.2.7. Döngü içermeyen tek parça çizgelere **ağaç** denir (bkz. Şekil 2.12). Ağaçta derecesi bir olan köşe noktalarına ağacın yaprakları denir. n noktalı bir ağacın $(n - 1)$ tane kenarı vardır.

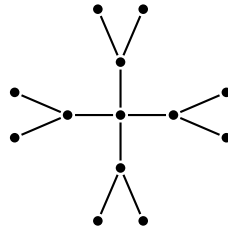


Şekil 2.12: *Bir ağaç örneği*

Bu çalışmada özel olarak çapı dört olan ağaçlar incelenecektir. Çapı dört olan ağaçlar için $K_{1,n}(c; a_1, a_2, \dots, a_i)$ gösterimi kullanılmaktadır. Burada c sayısı $K_{1,n}$ çizgesinin x merkez köşe noktasına bağlanan köşe sayısını temsil etmekte ve $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere a_i sayıları ise merkez dışındaki köşe noktalarına bağlanan köşe sayısını göstermektedir (bkz.2.13). Bu köşe noktaları $X = \{x_1, \dots, x_c\}$ ve $i = 1, \dots, n$ olmak üzere $Y = \{y_{i,1}, \dots, y_{i,a_i}\}$ notasyonları ile gösterilecektir. Her bir y_i köşesi destek köşesi olarak adlandırılır. Özel olarak $K_{1,n}(0; 2, 2, \dots, 2)$ çizgesine n -pençe ve $K_{1,n}(0; t-1, t-1, \dots, t-1)$ çizgesine de (n, t) -yıldız adı verilir (bkz. Şekil 2.14).



Şekil 2.13: *Çapı dört olan br ağaç örneği $K_{1,3}(3; 2, 2, 1)$*



Şekil 2.14: *4-pençe veya $(4, 3)$ -yıldız*

Çizge kuramı ile ilgili daha ayrıntılı bilgi için [12] ve [13] referanslarından faydalanılabilir.

2.3 Solo Test Oyunu

2.3.1 Klasik solo test oyunu

Orijinal adı *Solitaire* veya *Peg Solitaire* olarak bilinen solo test oyunu, tek kişi ile oynanan bir yapboz oyunudur. Bu yapboz oyunu bir tahta üzerinde deliklerden ve piyonlardan oluşmaktadır.

Oyunun aslında nereden geldiği kesin olarak bilinmemektedir. Çok yaygın olarak duyulan bir efsaneye göre; oyunun Fransız bir asilzade tarafından bir hapisane hücrelerinde icat edildiği düşünülmektedir. Araştırmacılar kesinlik olmadığını belirtmektedirler. Benzer şekilde ispatlanmamış fakat *Encyclopedie methodique: dictionnaire des jeux mathematiques*(1799) yer alan bilgiye göre bu oyunun Kızılderililer'in avlanırken oklarıyla oynadıkları bir oyun olduğudur (bkz. [1]). Alman geleneğinde ise rahibelerin ya da keşişlerin oynadığı bir oyun olarak düşünülmektedir. Birçok yazarın ortak düşüncesine göre de, oyunun Çin, Chaldaea ya da Eski Roma' da doğduğu düşünülmektedir.

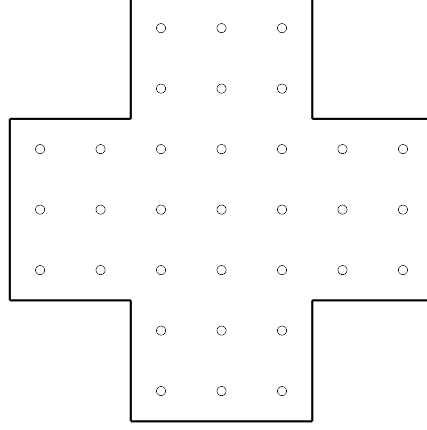
Oyun ile ilgili bilinen en eski ve açık kanıt; 1697 tarihli Claude-Auguste Bery tarafından yapılan ve üzerinde "*Madame la Princesse de Soubize jouant au jeu de Solitaire*"(Soubize prensesi Solitaire oynuyor) yazan oyma resimdir (bkz. Şekil 2.15). Fakat resim incelendiğinde prensesin kıyafetlerinin o tarihlere göre daha modern olması gerektiği düşünülmüş ve aslında oyunun varlığının XIV. Louis zamanına dayandığı ispatlanmıştır.



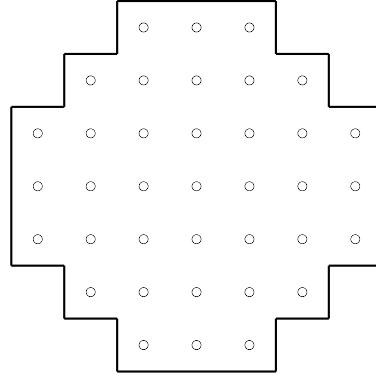
Şekil 2.15: “Madame la Princesse de Soubize jouant au jeu de Solitaire”

Oyunun nasıl oynanacağına dair bilinen en eski kanıt 1710 yılında Leibniz tarafından yazılmış bir rapordur. Leibniz, günümüzde hala oyunun standart şekli

olarak bilinen 33-delikli *English Board* için bir yöntem verirken, Berey'in yaptığı oyma resimdeki oyunda 37 delik olduğunu farketmiştir ki aslında bu da oyunun daha eskiye dayandığını gösterir.

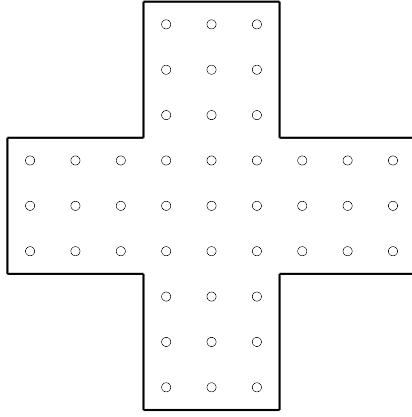


Şekil 2.16: 33 delikli İngiliz Masası

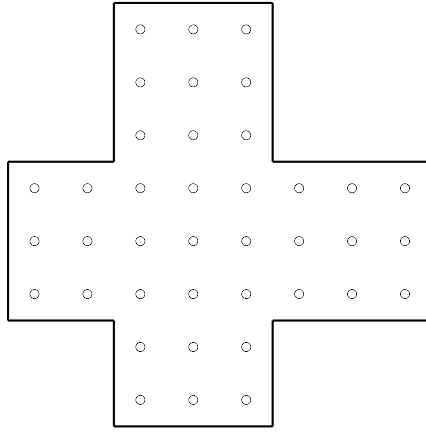


Şekil 2.17: 37 delikli Avrupa Masası

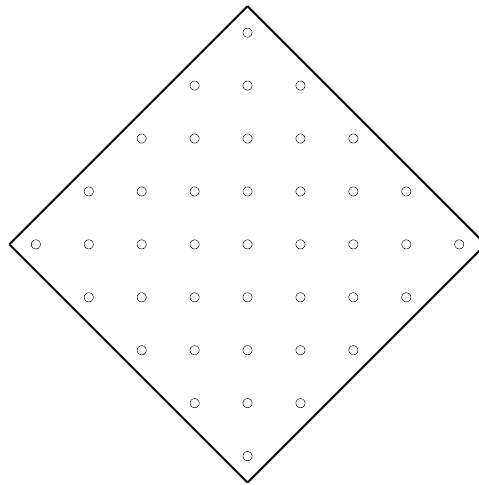
Bu oyun hakkında araştırmalar yapan Beasley için referans olan en eski kaynak, 1779 yılında J.C. Wiegleb tarafından yazılan *Unterricht in der natürlichen Magie* ansiklopedisinin ilk cildir. Burada 33-delikli *English Board* (bkz. Şekil 2.16), 37-delikli *European Board* (bkz. Şekil 2.17) ve 45-delikli *Wiegleb Board* (bkz. Şekil 2.18) oyunlarına örnekler yer almaktadır. Ayrıca oyunun 39-delikli *Asymmetrical English Board* (bkz. Şekil 2.19), 41-delikli *Diamond Board* (bkz. Şekil 2.20) ve 15-delikli *Triangular Board* (bkz. Şekil 2.21) versiyonları da mevcuttur. Bu oyunların çözümlerinin ayrıntıları için [6] ve [11] referansları incelenebilir.



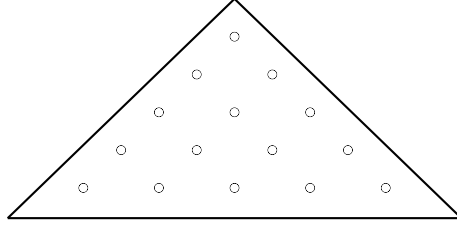
Şekil 2.18: 45 delikli Wiegleb Masası



Şekil 2.19: 39 delikli Asimetrik Masa



Şekil 2.20: 41 delikli Karo Masa



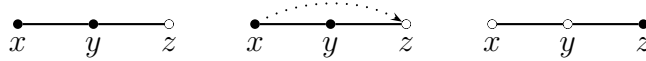
Şekil 2.21: 15 delikli Üçgensel Masa

Solo test oyunu; piyonların ve bir deliğin olduğu, bir oyuncu tarafından oynanan bir masa oyunudur. Oyunun herhangi satır ya da sütunundan alınan, üç delik x , y ve z olarak adlandırılısın ve x ile y ve y ile z komşu olacak şekilde alınsın. Bu deliklerden x ve y de piyonlar bulunurken z boş olsun. x 'deki piyon y 'deki piyonun üzerinden atlayarak z 'deki deliğe gelsin. Bu hamle ile y 'deki piyon alınır. Oyunun amacı, bu hamlelerle en az sayıda piyon bırakmaktır. Eğer oyunun sonunda tek bir piyon kalırsa oyun *çözülmüş* olarak adlandırılır.

Solo test oyunu ile ilgili daha ayrıntılı bilgi için [1] ve [5]'den yararlanınız.

2.3.2 Çizgeler üzerinde solo test oyunu

Yukarıda tanımlanan solo test oyunu kombinatorik anlamda çizgeler üzerine aktarılabilir. G çizgesi; V köşe noktaları kümesi ve E kenarlar kümesi olmak üzere $G = (V, E)$ olarak alınsın. xy ve yz , G çizgesinde komşu kenarlar olmak üzere; x ve y köşelerinde piyonlar ve z köşesinde delik olsun. Bu durumda, x köşesindeki piyon y köşesindeki piyonun üzerinden z köşesindeki deliğe gelir ve y köşesindeki piyon alınır (bkz. Şekil 2.22). Eğer oyunun sonunda sadece bir köşe noktasında piyon kalırsa çizge *çözülebilir* olarak adlandırılır.



Şekil 2.22: Solo test oyununda bir hamle

$S \subset V$ kümesi oyunun başlangıcında deliklerin olduğu köşe noktalarını içeren başlangıç durumu, $T \subset V$ kümesi de oyunun sonunda kalan piyonların olduğu köşe noktalarını içeren bitiş durumu olarak adlandırılır. Eğer bazı s köşeleri için $\{s\} = S$ olup oyunun sonunda T kümesinde tek bir piyon kalıyorsa, G çizgesine *çözülebilirdir* denir. Eğer $\forall s$ için $\{s\} = S$ olup oyunun sonunda T kümesinde tek bir piyon kalıyorsa, G çizgesine *serbest çözülebilirdir* (freely solvable) denir. Eğer bazı s köşeleri için $\{s\} = S$ olup oyunun sonunda T kümesinde k tane komşu

olmayan piyon kalıyorsa G çizgesine k çözülebilirdir denir. Özellikle, bazı s köşeleri için $\{s\} = S$ olup oyunun sonunda T kümesinde birbirinden iki birim uzaklıkta sadece iki piyon kalıyorsa G çizgesine 2 -mesafeli çözülebilirdir (distance-2 solvable) denir.

3 ÇEŞİTLİ ÇİZGELER ÜZERİNDE SOLO TEST OYUNU

Bu bölümde yukarıda tanımlanan bazı özel çizgeler üzerinde oynanan solo test oyununun çözülebilir olması için gerekli koşullar verilecektir.

3.1 Tam Çizge İçin Çözülebilirlik Koşulları

Teorem 3.1.1 ([4]). $n \geq 2$ için K_n tam çizgesi serbest çözülebilirdir ve oyun $(n-2)$ hamlede biter.

Kanıt. Oyunun başlangıcında delik herhangi bir z köşe noktasında olsun. K_n tam çizgesinde bütün köşe noktaları birbirine komşu olduğu için, $[x \cdot \overrightarrow{y} \cdot z]$ hamlesi yapılacak şekilde x ve y köşe noktalarında piyon her zaman vardır. Oyunun her aşamasında bu durum söz konusu olacağı için sonuçta oyunda bir tek piyon kalır. Başlangıçta delik nerede olursa olsun bu hamleler geçerlidir. O halde tam çizge serbest çözülebilirdir. \square

Önerme 3.1.2. $n \geq 2$ için K_n tam çizgesinde başlangıçtaki deliğin yeri sabit olmak üzere oyun,

$$\prod_{k=1}^{(n-2)} k \cdot (n-k) \cdot (n-k-1)$$

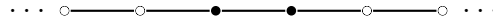
farklı şekilde oynanır.

Kanıt. n köşe noktalı tam çizge üzerinde oyunu oynansın. Bu durumda $(n-1)$ tane köşe noktasında piyon olacaktır. İlk hamleyi yapabilmek için bu $(n-1)$ köşe noktasından biri seçilsin. Geriye $(n-2)$ tane üzerinden atlanacak piyon kalır. Bu köşe noktalarından birinde de delik olacağı için ilk hamle $(n-1)(n-2)1$ farklı şekilde yapılabilir. İkinci hamle için, $(n-2)$ tane piyon kalır ve yine biri seçildiğinde $(n-3)$ tane üzerinden atlanabilecek piyon kalır ve ikinci hamle için iki delik vardır. O halde ikinci hamle $(n-2)(n-3)2$ farklı şekilde yapılabilir. Bu şekilde devam ederek k . hamle için; $(n-k)$ tane piyondan biri seçildiğinde geriye $(n-k-1)$ tane üzerinden atlanacak piyon kalır ve k tane de delik vardır. Yani k . hamle için $(n-k)(n-k-1)k$ tane farklı seçenek mevcuttur. Bütün hamle olasılıklarının çarpımı da bize istenilen sonucu verir. \square

3.2 Yol Çizge ve Döngü Çizge İçin Çözülebilirlik Koşulları

Yardımcı Teorem 3.2.1 ([4]). $n > 1$ için P_{2n} yol çizge serbest çözülebilir değildir ve P_{2n+1} yol çizge ise çözülebilir değildir.

Kanıt. Öncelikle P_{2n} yol çizgeye bakalım. Başlangıçta delik $(i - 1)$. köşe noktasında olsun. Yapılacak $\left[(i + 1) \cdot \overrightarrow{i} \cdot (i - 1) \right]$ hamlesi ile i . ve $(i + 1)$. köşe noktaları boş kalırken piyon $(i - 1)$. köşe noktasına gelir. Burada komşu iki delik oluşur(empty bridge). Oyun bu konumda iken yapılacak iki hamle mevcuttur. Bunlardan biri, $\left[(i - 2) \cdot \overrightarrow{(i - 1)} \cdot i \right]$ diğeri ise $\left[(i + 3) \cdot \overrightarrow{(i + 2)} \cdot (i + 1) \right]$ hamlesidir. Böylece iki tane komşu delik yanında iki piyon ve tekrar komşu iki delik oluşur. Bu konumdan sonra P_{2n} yol çizge çözülebilir değildir.



Şekil 3.23: İki delik yanında iki piyon ve tekrar iki delik

Eğer başlangıçta delik P_{2n} yol çizgesinin uç noktalarından birinde olsaydı, örneğin 0, yapılacak tek hamle var ki o da $\left[2 \cdot \overrightarrow{1} \cdot 0 \right]$. Aynı şekilde iki komşu delik köşe noktası yan yana gelmiş olacaktır ve oyun bu konumdan sonra çözülebilir değildir. Yani P_{2n} yol çizge serbest çözülebilir değildir.

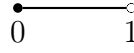
Şimdi P_{2n+1} yol çizgenin çözülebilirliğini inceleyelim. Başlangıçta deliğin yeri nerede olursa olsun, delikle birlikte bu çizge iki gruba ayrılabilir. Bu gruplardaki köşe noktalarının sayısı ya tek ya da çift olacaktır. İki durumda da ilk hamleden sonra bir gruptan alınan piyon diğer gruba eklenecek ve bir grupta çift sayıda köşe noktalı diğer grupta da tek sayıda köşe noktalı yol çizge oluşacaktır. Bu iki grup arasında da iki komşu delik meydana gelecektir. Yapılacak hamle ile tekrar iki komşu delik oluşacak ve bu şekilde oyun devam edecektir. Bu durumda P_{2n+1} yol çizge çözülebilir değildir. \square

Teorem 3.2.2 ([4]). *Yol çizge için genelleştirilmiş durum aşağıdaki gibidir.*

1. P_n yol çizgenin serbest çözülebilir olması için gerek ve yeter şart $n = 2$ olmasıdır.
2. P_n yol çizgenin çözülebilir olması için gerek ve yeter şart n 'nin çift veya $n = 3$ olmasıdır.
3. Diğer durumlarda yol çizge 2-mesafeli çözülebilirdir.

Kanıt. (1) $n = 2$ için P_2 yol çizgesinin bir köşe noktasında delik diğer köşe noktasında ise piyon olacağından ve bu durum zaten oyunda istenilen durum olduğundan kanıt burada biter.

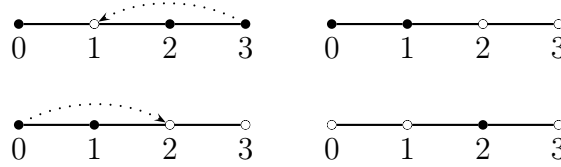
(2) durumu için önce P_3 çizgesini inceleyelim. Eğer başlangıçta delik çizgenin ortasındaki köşe noktasında ise bir olası hamle yoktur. Eğer delik uç noktalardan



Şekil 3.24: P_2 yol çizgesi üzerinde solo test oyunu

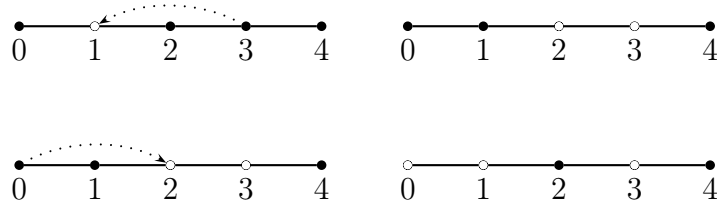
birinde ise tek hamle vardır ve bu hamle sonucunda oyunda tek bir köşe noktasında piyon kalır. O halde P_3 yol çizge çözülebilirdir. Aslında P_3 yol çizge, Şekil 2.22 ile aynıdır.

(3) durumu için öncelikle P_4 yol çizgenin çözülebilir ve P_5 yol çizgenin çözülemez olduğunu görelim. Her iki çizge için de başlangıçta delik $(n - 2)$. köşe noktasında olsun. Yapılacak olan $\left[(n - 4) \cdot \overrightarrow{(n - 3)} \cdot (n - 2) \right]$ ve $\left[(n - 1) \cdot \overrightarrow{(n - 2)} \cdot (n - 3) \right]$ hamleleri sonucunda P_4 çizgesinde son piyon $(n - 3)$. köşe noktasında kalır (bkz. Şekil 3.25).



Şekil 3.25: P_4 yol çizgesi üzerinde solo test oyunu

Aynı hamleler P_5 çizgesi üzerinde yapıldığı zaman 0. ve $(n - 3)$. köşe noktalarında piyon kalır. O halde P_4 yol çizge çözülebilirdir, P_5 yol çizge 2-mesafeli çözülebilirdir



Şekil 3.26: P_5 yol çizgesi üzerinde solo test oyunu

(bkz. Şekil 3.26).

Şimdi n üzerinden tümevarım yaparak ispatı tamamlayalım.

P_n yol çizgesinde, $n \geq 4$ için başlangıçta delik $(n - 2)$. köşe noktasında olmak üzere; n çift iken çözülebilir ve n tek iken de 2-mesafeli çözülebilir olduğunu kabul edelim. P_{n+1} çizgesi düşünülecek olursa; başlangıç deliği $(n - 1)$. köşe noktasında olur ve $\left[(n - 4) \cdot \overrightarrow{(n - 3)} \cdot (n - 2) \right]$ ve $\left[n \cdot \overrightarrow{(n - 1)} \cdot (n - 2) \right]$ hamleleri yapılır. Böylece n .

ve $(n-1)$. köşe noktalarındaki boşluk göz ardı edilirse, bu çizge $(n-1)$ köşe noktalı ve deliği $(n-3)$. köşe noktasında olan yol çizge haline dönüşür. Bu durumda varsayım hipotezinden yol çizgenin çözülebilirliği bilinmektedir. \square

Teorem 3.2.3 ([4]). C_n döngü çizgenin serbest çözülebilir olması için gerek ve yeter şart köşe sayısının çift veya 3 olmasıdır. Diğer durumlarda ise döngü çizge 2-mesafeli çözülebilirdir.

Kanıt. Öncelikle C_{2n+1} döngü çizgenin çözülebilir olmadığını görerek başlayalım. C_n döngü çizge köşe geçişli(vertex transitive) olduğundan başlangıçta deliğin yerinin önemi yoktur. Oyunun başlangıcında ilk iki hamle zorunludur. Genelliği bozmaksızın ilk iki hamle sonrası delikler $(2n-1)$., $(2n)$. ve 1. köşe noktalarında olsun. Oyun bu durumda iken C_5 çözülebilir değildir çünkü yapılabilecek başka hamle yoktur.

Varsayalım ki $n \geq 3$ olsun. Delikler aynı şekilde $(2n-1)$., $(2n)$. ve 1. köşe noktalarında olsun. $(2n-1)$., $(2n)$. köşe noktaları göz ardı edilirse bu çizge P_{2n-1} yol çizgeden farksızdır. Teorem 3.2.2'den, tek sayıda köşe noktalı yol çizge çözülebilir değildir.

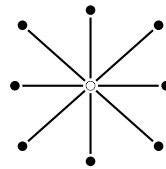
Genel olarak, C_n döngü çizge, P_n yol çizgesini alt çizge olarak bulundurduğundan, döngü çizgenin çözülebilirliği yol çizge ile aynıdır. \square

3.3 Yıldız Çizge ve Çift Yıldız Çizge İçin Çözülebilirlik Koşulları

Önerme 3.3.1 ([3]). $K_{1,n}$ yıldız çizge $(n-1)$ çözülebilirdir.

Kanıt. Yıldız çizge üzerinde oynanan oyun için deliğin konumuna göre iki durum söz konusudur.

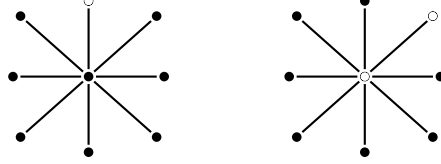
1. durum: Delik merkezde olsun. Bu durumda köşe noktaları üzerinde iki komşu piyon mevcut olmadığından herhangi bir hamle de yoktur (bkz. Şekil 3.27).



Şekil 3.27: Delik merkezde iken $K_{1,8}$ yıldız çizge çözülebilir değildir.

2. durum: Delik çizgenin merkezi hariç herhangi bir köşe noktasında olsun. Bu durumda, $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere herhangi bir v_i köşesindeki piyon için

yapılacak olan $[v_i \cdot \overrightarrow{\text{merkez}} \cdot \text{delik}]$ hamlesi ile v_i köşe noktası ile merkez köşe noktası boş kalırken başlangıçta delik olan köşeye piyon gelmiş olur. Oyunun bu hali de ilk duruma döner. Sonuçta $(n - 1)$ tane dolu köşe noktası olduğu için bu çizge $(n - 1)$ çözülebilirdir (bkz. Şekil 3.28). \square



Şekil 3.28: Delik merkezde değilken $K_{1,8}$ yıldız çizgesi üzerinde solo test oyunu

Teorem 3.3.2 ([3]). 1. $DS(L, R)$ çift yıldız çizgenin serbest çözülebilir olması için gerek ve yeter koşul $L = R$ ve $R \neq 1$ olmasıdır.

2. $DS(L, R)$ çift yıldız çizgenin çözülebilir olması için gerek ve yeter koşul $L \leq R + 1$ olmasıdır.

3. $DS(L, R)$ çift yıldız çizge 2-mesafeli çözülebilir olması için gerek ve yeter koşul $L = R + 2$ olmasıdır.

4. Eğer $L \geq R + 3$ ise $DS(L, R)$ çift yıldız çizge $(L - R)$ çözülebilirdir.

Kanıt. 1. Önce $DS(L, R)$ çizgenin serbest çözülebilir olduğunu kabul edelim. Bu durumda eşitliğin görülmesi gerekir. Başlangıçta deliğin konumu için köşe noktalarının durumuna göre iki seçenek mevcuttur. Delik ya merkez noktalarından birinde ya da sarkıtlardan (pendant) birindedir. Varsayalım delik u_l merkez köşesinde olsun. O halde yapılacak olan $[r_R \cdot \overrightarrow{u_r} \cdot u_l]$ hamlesi ile R sarkıtta $R - 1$ piyon kalmış olacaktır. Sonraki hamle $[l_L \cdot \overrightarrow{u_l} \cdot u_r]$ olur ve bu hamle ile birlikte de L sarkıtta $L - 1$ piyon kalmış olacaktır. Yani her bir hamle karşılıklı olarak sarkıtlardaki piyonları eler. Son hamlede $i = 1, \dots, L$ olmak üzere $[l_i \cdot \overrightarrow{u_l} \cdot u_r]$ olur. Eğer bu çizgede L tane sarkıtın olduğu tarafta bir piyon daha kalmış olsaydı, başka hamle olanaksız olacağından çift yıldız çizge çözülebilir olamazdı. Bu durum ise başlangıçtaki kabulle çelişeceğiinden dolayı iki taraftaki sarkıtların sayısı eşit olmalıdır.

Şimdi deliğin herhangi bir sarkıtta olduğunu kabul edelim ve genelliği bozmaksızın $i = 1, \dots, R$ için delik r_i 'de olsun. Yapılacak ilk hamle

$[r_R \cdot \vec{u}_r \cdot r_i]$ olacaktır ve böylece bu hamle ile oyun bir önceki duruma gelir. O halde yukarıdaki sebeplerden dolayı sarkıt sayıları eşit olmalıdır.

Eğer $R = 1$ olursa; genelliği bozmaksızın delik u_l köşesinde olsun. $[r_1 \cdot \vec{u}_r \cdot u_l]$ hamlesi yapıldıktan sonra, r_1 köşesindeki delik göz ardı edilirse kalan çizge $K_{1,L}$ yıldız çizgesine dönüşür. Yıldız çizgenin çözülebilir olmadığı Önerme 3.3.1'de gösterilmiştir. O halde $R = 1$ olamaz.

2. Şimdi de $DS(L, R)$ çift yıldız çizgenin çözülebilir olması için $L = R$ ya da $L = R + 1$ olduğu görülmelidir. Eğer $R = 0$ ise $DS(0, 0) \cong P_2$ ve $DS(1, 0) \cong P_3$ olur ve bu çizgeler çözülebilirdir. $R = k$ için, $DS(k, k)$ ve $DS(k + 1, k)$ çizgelerinin başlangıçta delik u_r köşesinde olduğu zaman çözülebilir olduğunu kabul edelim. Eğer başlangıç delikleri u_r köşesinde olan $DS(k + 1, k + 1)$ ve $DS(k + 2, k + 1)$ çizgeleri düşünülecek olursa, iki durumda da $[l_{k+1} \cdot \vec{u}_l \cdot u_r]$ ve $[r_{k+1} \cdot \vec{u}_r \cdot u_l]$ hamleleri sonrasında l_{k+1} ve r_{k+1} köşelerindeki delikler göz ardı edilirse bu çizgeler $DS(k, k)$ ve $DS(k + 1, k)$ çizgelerinden farksızdır. O halde her iki çizge de çözülebilirdir.

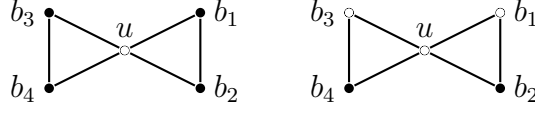
Eğer $L > R + 1$ ise; biliyoruz ki r_R köşelerinden her biri l_L köşelerinden birini eleyecektir. Kalan piyonlar ve u_r köşesinden oluşan çizge $K_{1,L-R+1}$ yıldız çizgesine izomorf olacaktır. O halde bu çizge $L - R$ çözülebilirdir. Buradan eğer $L = R + 2$ ise oyunun sonunda kalan iki piyon arasındaki uzaklık iki birim olur ki bu durumda da çizge 2-mesafeli çözülebilirdir. \square

3.4 Yel Değirmeni Çizge İçin Çözülebilirlik Koşulları

Teorem 3.4.1 ([3]). *Her B pozitif tamsayısı için $W(B)$ yel değirmeni çizge çözülebilirdir. $B \neq 2$ için ise $W(B)$ serbest çözülebilirdir.*

Kanıt. Kanıtı öncelikle $W(2)$ yel değirmeni çizgenin serbest çözülebilir olmadığını görerek başlayalım. Bunun için, başlangıçta delik merkez u köşe noktasında olsun. Sırasıyla, $[b_1 \cdot \vec{b}_2 \cdot u]$ ve $[b_4 \cdot \vec{u} \cdot b_2]$ hamleleri yapılsın. Bu iki hamle sonrasında bir piyon b_2 köşe noktasında diğer bir piyon da b_4 köşe noktasında kalır (bkz. Şekil 3.29). O halde $B = 2$ ve delik merkez köşesinde iken yel değirmeni çizge çözülebilir değildir. Bu yüzden çizge serbest çözülebilir değildir.

Kanıtı her B pozitif tamsayısı için $W(B)$ yel değirmeni çizgenin çözülebilir olduğunu görerek devam edelim. Bunun için oyunun başlangıcında b_{2B} köşe noktasında delik olduğunu kabul edelim. Eğer $B = 1$ ise yel değirmeni çizgenin tanımı gereği $W(1) \cong K_3$ olacağından $W(1)$ çözülebilirdir. B üzerinden tümevarım ile varsayalım ki $B > 1$ için $W(B)$ yel değirmeni çizge çözülebilir olsun ve



Şekil 3.29: $W(2)$ çizgesi çözülebilir değildir.

$W(B + 1)$ çizgesini düşünelim. O halde $W(B + 1)$ çizgesi üzerinde başlangıç deliği b_{2B+2} köşe noktasında olacaktır. Sırasıyla, $[b_{2B} \cdot \vec{u} \cdot b_{2B+2}]$ ve $[b_{2B+2} \cdot \vec{b}_{2B+1} \cdot u]$ hamleleri yapılsın. Bu hamleler sonrasında b_{2B+1} ve b_{2B+2} köşe noktaları göz ardı edilirse, oyunun geriye kalan kısmı, başlangıç deliği b_{2B} köşe noktasında olan $W(B)$ çizgesinden farksızdır ve tümevarım hipotezinden çözülebilirdir.

Şimdi $B \geq 3$ için $W(B)$ yel değirmeni çizgenin serbest çözülebilir olduğunu görelim. Bunun için çizgenin, başlangıçta deliği u merkez köşe noktasında iken çözülebilir olduğunu görmek yeterlidir. Öncelikle $W(3)$ çizgesi için düşünelim. Sırasıyla; $[b_6 \cdot \vec{b}_5 \cdot u]$, $[b_4 \cdot \vec{u} \cdot b_5]$, $[b_1 \cdot \vec{b}_2 \cdot u]$, $[b_5 \cdot \vec{u} \cdot b_4]$ ve $[b_4 \cdot \vec{b}_3 \cdot u]$ hamleleri ile oyun sonunda $W(3)$ yel değirmeni çizge üzerinde son ve tek piyon u köşe noktası üzerinde kalır. O halde çözülebilirdir. Benzer şekilde $W(4)$ yel değirmeni çizge çözülebilirdir.

Varsayalım ki, $B \geq 3$ ve $W(B)$ başlangıç deliği u merkez köşe noktası üzerinde iken yel değirmeni çizge çözülebilir olsun. $W(B + 2)$ çizgesini düşünelim. Sırasıyla; $[b_{2B} \cdot \vec{b}_{2B-1} \cdot u]$, $[b_{2B+4} \cdot \vec{u} \cdot b_{2B}]$, $[b_{2B+1} \cdot \vec{b}_{2B+2} \cdot u]$ ve $[b_{2B+3} \cdot \vec{u} \cdot b_{2B-1}]$ hamleleri yapılsın. Bu hamleler sonrasında kalan çizge, deliği u köşe noktasında olan $W(B)$ yel değirmeni çizgesinden farksızdır. Böylece kanıt biter. \square

Teorem 3.4.2 ([3]). 1. $W(P, B)$ çizgesinin çözülebilir olması için gerek ve yeter koşul $P \leq 2B$ olmasıdır.

2. $W(P, B)$ çizgesinin serbest çözülebilir olması için gerek ve yeter koşul $P \leq 2B - 1$ ve $(P, B) \neq (0, 2)$ olmasıdır.

3. $W(P, B)$ çizgesinin 2-mesafeli çözülebilir olması için gerek ve yeter koşul $P = 2B + 1$ olmasıdır.

4. Eğer $P > 2B + 1$ ise $W(P, B)$ çizgesi $(P - 2B + 1)$ çözülebilirdir.

Kanıt. (1) Varsayalım ki, b_{2i-1} ve b_{2i} köşe noktalarının ikisi de delik olsun. Yapılacak $[p_j \cdot \vec{u} \cdot b_{2i-1}]$ ve $[p_l \cdot \vec{u} \cdot b_{2i}]$ hamleleri ile her bir sarkıttaki köşe noktası kanattaki bir köşe noktasındaki piyonu almak için kullanılmaktadır. O halde $P \leq 2B$ olması gereklidir.

(2) Şimdi $W(P, B)$ yel değirmeni çizgesinin serbest çözülebilir olduğunu görelim. Eğer oyunun başlangıcında delik b_{2B} köşe noktasında ise; yapılacak olan ilk hamle $[p_P \cdot \vec{u} \cdot b_{2B}]$ olacaktır. Eğer sonraki hamle için u köşe noktasındaki delik tercih edilirse; $[b_{2B} \cdot \overrightarrow{b_{2B-1}} \cdot u]$ hamlesi yapılır. Bu hamle sonrasında iki seçenek mevcuttur:

1. $[b_{2B-2} \cdot \vec{u} \cdot b_{2B}]$ ve $[b_{2B-4} \cdot \overrightarrow{b_{2B-5}} \cdot u]$ hamleleri sonrası b_{2B-4} ve b_{2B-5} köşe noktalarındaki delikler göz ardı edilirse kalan çizge $W(P, B - 2)$ olur.
2. $[p_P \cdot \vec{u} \cdot b_{2B-1}]$ ve $[b_{2B-2} \cdot \overrightarrow{b_{2B-3}} \cdot u]$ hamleleri sonrasında b_{2B-2} ve b_{2B-3} köşe noktalarındaki delikler göz ardı edilirse kalan çizge $W(P - 1, B - 1)$ olur.

Böylece $W(P, B)$ yel değirmeni çizgenin serbest çözülebilir olması için $P \leq 2B - 1$ olması zorunludur. Diğer gerekli koşullar Teorem 3.4.1'in sonucudur. \square

3.5 (n, t) -yıldız Çizge İçin Çözülebilirlik Koşulları

Teorem 3.5.1 ([5]). $K_{1,n}(c; 2, 2, \dots, 2)$ n -pençe çizge üzerinde oynanan solo test oyunu $(n + 1)$ çözülebilirdir.

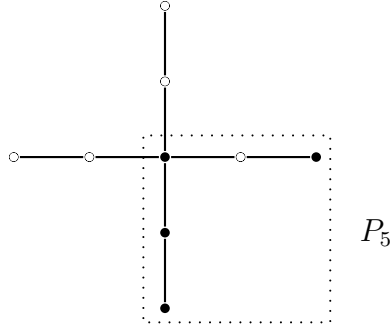
Kanıt. Oyunun herhangi bir aşamasında; $y_{i,j}$ köşesindeki piyonu almak için yapılması gereken hamle $[y_{i,j} \cdot \vec{y}_i \cdot u]$ olur. Böylece bu hamle ile y_i köşe noktasındaki piyon da alınmış olur. Yani her destek köşesi bir yaprağı elemiş olur. n tane destek köşe noktası olduğundan $2n$ tane de yapraklara bağlı köşe noktası vardır. Bunların n tanesindeki piyonlar destek köşeleri tarafından alınacak ve son piyon da x merkez köşesinde kalacaktır. Böylece $2n - n + 1$ piyon oyun sonunda kalır. Bu da gösterir ki n -pençe çizge üzerinde oyun $(n + 1)$ çözülebilirdir. \square

Teorem 3.5.2 ([5]). $K_{1,n}(0; t - 1, t - 1, \dots, t - 1)$ (n, t) -yıldız çizge üzerinde oyun $(nt - 2n + 1)$ çözülebilirdir.

Kanıt. Teorem 3.5.1'de kullanılan tekniği ele alalım. (n, t) -yıldız çizgenin n tane destek köşesi, her bir destek köşesinde de $(t - 1)$ tane yaprak vardır. O halde toplamda $n(t - 1)$ tane köşe noktası vardır. Her bir destek köşesindeki piyon yapraklardaki piyonları alacak ve sonuçta bir piyon da merkez köşe noktasında kalmış olacaktır. O halde, $n(t - 1) - n + 1$ piyon oyun sonunda kalacaktır. O halde (n, t) -yıldız çizge üzerinde oyun $(nt - 2n + 1)$ çözülebilirdir. \square

Teorem 3.5.3 ([5]). $K_{1,n}(0; 1, 1, \dots, 1)$ $(n, 2)$ -yıldız çizge üzerinde oynanan solo test oyunu, delik merkezde değilken ve $n \neq 2$ iken çözülebilirdir. Diğer durumlarda oyun 2-mesafeli çözülebilirdir.

Kanıt. $(n, 2)$ -yıldız çizge için başlangıçta delik merkezde olmasın. Kanıtı bu durum üzerinden yapalım. Varsayalım ki delik herhangi bir destek köşesi olan y_1 köşesinde olsun. Sırasıyla $[y_2 \cdot \vec{x} \cdot y_1]$ ve $[y_{1,1} \cdot \vec{y}_1 \cdot x]$ hamleleri yapıldığında, y_1 ve $y_{1,1}$ köşe noktalarındaki piyonlar alınmış olur. Oluşan delikleri göz ardı edersek kalan çizge $(n - 1, 2)$ -yıldız çizge olur. Bu hamleler $(2, 2)$ -yıldız çizge kalana kadar yapılır (bkz. Şekil 3.30). $(2, 2)$ -yıldız çizge ile P_5 yol çizge izomorf olduğundan çizge 2-mesafeli çözülebilirdir. O halde delik destek köşelerinden birinde ise $(n, 2)$ -yıldız çizge çözülebilir değildir.



Şekil 3.30: $(4, 2)$ -yıldız çizge

Şimdi varsayalım ki delik $y_{1,1}$ köşe noktasında olsun. Sırasıyla, $[x \cdot \vec{y}_1 \cdot y_{1,1}]$ ve $[y_{2,1} \cdot \vec{y}_2 \cdot x]$ hamlelerinin yapılması zorunludur. Bu iki hamle sonrasında, y_2 ve $y_{2,1}$ köşelerindeki piyonlar alınmış olur. Buradaki delikler göz ardı edilirse; başlangıç deliği y_1 destek köşesinde olan $(n - 1, 2)$ -yıldız çizge kalmış olur. Bu durum ispatın ilk kısmında verilmiştir. O halde delik $y_{i,j}$ köşe noktalarından birinde ise de çizge çözülebilir değildir.

□

Çapı dört olan ağaçlar için daha ayrıntılı bilgi [5]'de verilmiştir.

3.6 İki Kümeli Tam Çizge İçin Çözülebilirlik Koşulları

İki kümeli tam çizgelerin çözülebilirlik koşulları verilmeden önce aşağıdaki yardımcı teoremler verilmelidir.

Teorem 3.6.1 ([4]). *H çizgesi G çizgesinin ürettiği bir alt çizge olsun. H çizgesi k-çözülebilir ise G çizgesi de en az k-çözülebilirdir.*

Kanıt. H çizgesi G çizgesinin ürettiği bir alt çizge olduğundan, bu çizgelerin kenarları ve köşeleri arasında $V(H) = V(G)$ ve $E(H) \subseteq E(G)$ ilişkisi olduğu

açıktır. H çizgesinin k -çözülebilir olduğu bilindiğinden, G çizgesi içinde H çizgesi çözülür ve k tane piyon kalmış olur. Eğer G çizgesinde H çizgesine ek en az bir kenar daha varsa en az bir hamle daha yapılabilir ve bir piyon daha alınabilir. Fakat kenar yoksa G çizgesi de k -çözülebilir olur. O halde G çizgesi de en az k -çözülebilirdir. \square

Teorem 3.6.2 ([10]). *G çizgesi çift sayıda köşe noktası olan ve Hamiltonian bir çizge ise serbest çözülebilirdir. Eğer G çizgesi Hamiltonian ve bir üçgen içeriyorsa çözülebilirdir.*

Kanıt. Kanıtın ilk kısmında, G çizgesi çift sayıda köşe noktası olan ve Hamiltonian bir çizge olduğundan C_{2n} döngü çizmeyi üretilen alt çizge olarak bulundurulur. C_{2n} döngü çizge serbest çözülebilir olduğundan Teorem 3.6.1'den dolayı G çizgesi de serbest çözülebilirdir.

Kanıtın ikinci kısmı için G çizgesinin tek sayıda köşe noktası olduğunu kabul edelim. Ayrıca G çizgesi Hamiltonian olduğundan, C_{2n+1} döngü çizmeyi üretilen alt çizge olarak bulundurulur. C_{2n+1} çizgesi çözüldüğü zaman çizge üzerinde iki piyon kalmış olacaktır ve kalan iki piyon G çizgesinin içerdiği üçgenin iki köşe noktasında olacaktır. O halde yapılacak son hamle ile G çizgesi çözülmüş olur. \square

Teorem 3.6.3 ([10]). *$n \geq 2$ için $K_{2,n}$ iki kümeli tam çizge serbest çözülebilirdir.*

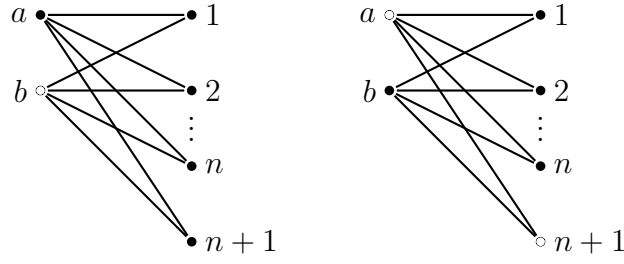
Kanıt. Kanıtı başlamadan önce, $X = \{a, b\}$ ve $Y = \{1, 2, \dots, n\}$ kümelerini $K_{2,n}$ iki kümeli tam çizgenin köşe noktaları kümesi olarak tanımlayalım. Kanıtı n üzerinden tümevarım ile yapalım.

$n = 1$ ise $K_{2,1} \cong P_3$ olduğundan çözülebilirdir.

$n = 2$ ise $K_{2,2} \cong C_4$ olduğundan serbest çözülebilirdir.

n için $K_{2,n}$ iki kümeli tam çizge serbest çözülebilir olsun. Bu durumda $K_{2,n+1}$ çizgesinin de serbest çözülebilir olduğunu görelim. Varsayalım ki $K_{2,n+1}$ çizgesinde başlangıçta delik $b \in X$ köşe noktasında olsun. Bu durumda yapılacak olan $[a \cdot \overrightarrow{(n+1)} \cdot b]$ hamlesi ile $(n+1)$. köşe noktasındaki delik göz ardı edilirse (bkz. 3.31) kalan çizge başlangıç deliği a köşe noktasında olan $K_{2,n}$ iki kümeli tam çizge olur ve bu çizge tümevarım hipotezinden dolayı çözülebilirdir.

Tersine başlangıç deliği $1 \in Y$ olsun. Yapılacak olan $[(n+1) \cdot \overrightarrow{a} \cdot 1]$ hamlesi ile $(n+1)$. köşe noktasındaki delik göz ardı edilirse kalan çizge başlangıç deliği a köşe noktasında olan $K_{2,n}$ iki kümeli tam çizge olur ve bu çizge tümevarım hipotezinden dolayı çözülebilirdir. O halde $K_{2,n+1}$ iki kümeli tam çizge serbest çözülebilirdir. Böylece kanıt tamamlanır. \square

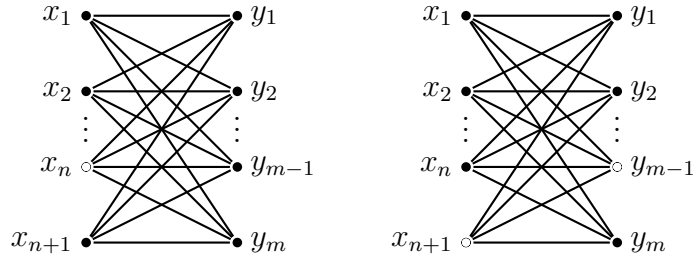


Şekil 3.31: $K_{2,n+1}$ iki kümeli tam çizge üzerinde solo test oyunu

Teorem 3.6.4 ([10]). $n \geq 2$ ve $m \geq 2$ için $K_{n,m}$ iki kümeli tam çizge serbest çözülebilirdir.

Kanıt. $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ve $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ kümelerinin birleşimi olan $V = X \cup Y$ kümesi $K_{n,m}$ iki kümeli tam çizgenin köşe noktaları kümesi olsun. Kanıtı n üzerinden tümevarım ile gösterelim. $n = 2$ durumu için ifadenin doğru olduğu Teorem 3.6.3 ile açıktır. $K_{n,m}$ çizgesinin serbest çözülebilir olduğunu kabul edelim. Bu durumda $K_{n+1,m}$ çizgesinin de serbest çözülebilir olduğunu görelim.

Başlangıçta delik $x_n \in X$ köşe noktasında olsun. Eğer $[x_{n+1} \cdot \overrightarrow{y_{m-1}} \cdot x_n]$ hamlesi yapılırsa ve x_{n+1} köşe noktasındaki delik göz ardı edilirse kalan çizge başlangıç deliği y_{m-1} köşe noktasında olan $K_{n,m}$ iki kümeli tam çizge olur ve çözülebilirdir.



Şekil 3.32: $K_{n+1,m}$ iki kümeli tam çizge üzerinde solo test oyunu

Tersine, başlangıçta delik $y_{m-1} \in Y$ köşe noktasında olsun. Yapılacak olan $[y_m \cdot \overrightarrow{x_{n+1}} \cdot y_{m-1}]$ hamlesi ile x_{n+1} köşe noktasındaki delik göz ardı edilirse kalan çizge başlangıç deliği y_m köşe noktasında olan $K_{n,m}$ iki kümeli tam çizge olur ve çözülebilirdir.

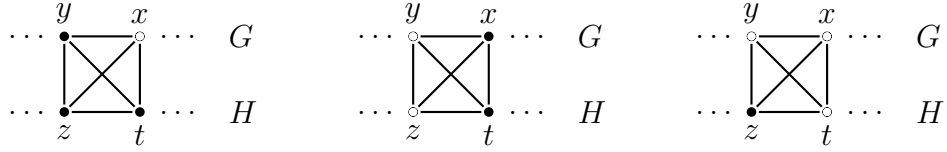
Bu durumda tümevarım hipotezinden dolayı $K_{n+1,m}$ iki kümeli tam çizge serbest çözülebilirdir. \square

3.7 İki Çizgenin Toplamı ve Kartezyen Çarpımı İçin Çözülebilirlik Koşulları

Teorem 3.7.1 ([10]). G ve H serbest çözülebilir iki çizge olmak üzere, $G + H$ çizgesi de serbest çözülebilirdir.

Kanıt. Başlangıçta delik $G + H$ çizgesinin herhangi bir köşe noktasında olsun. Deliğin olduğu köşe noktası aslında, ya G çizgesinin ya da H çizgesinin bir köşe noktasıdır.

Genelliği bozmaksızın delik G çizgesinin bir köşe noktasında olsun. G çizgesi serbest çözülebilir olduğundan H çizgesi göz ardı edilerek G çizgesi çözülür ve G çizgesi üzerinde son piyon y köşe noktasında bırakılır. $xy \in E(G)$, $z \in V(H)$ ve $yz \in E(G + H)$ olmak üzere; $[z \cdot \vec{y} \cdot x]$ hamlesi ile piyon x köşe noktasına gelir ve z köşe noktasında delik oluşur. Şimdi z köşe noktasına komşu bir $t \in V(H)$ ve $xt \in E(G + H)$ için $[x \cdot \vec{t} \cdot z]$ hamlesi yapıldığında, G çizgesindeki bütün piyonlar alınmış olur (bkz. Şekil 3.33). Böylece oyun tamamen H çizgesi üzerine taşınır. H çizgesi serbest çözülebilir olduğundan $G + H$ çizgesi de serbest çözülebilirdir. \square



Şekil 3.33: $G + H$ çizgesi üzerinde solo test oyunu

Teorem 3.7.2 ([10]). G ve H köşe noktalarının sayısı ikiden büyük olan iki çizge olmak üzere; $G + H$ çizgesi serbest çözülebilirdir.

Kanıt. G çizgesinin köşe noktalarının sayısı n ve H çizgesinin köşe noktalarının sayısı m olsun. $K_{n,m}$ çizgesi, $G + H$ çizgesinin ürettiği bir alt çizge olduğundan; Teorem 3.6.1 ve Teorem 3.6.4'den dolayı $G + H$ çizgesi serbest çözülebilirdir. \square

Teorem 3.7.3 ([10]). G serbest çözülebilir (çözülebilir) bir çizge olsun. Bu durumda $G \square K_2$ çizgesi de serbest çözülebilirdir (çözülebilirdir).

Kanıt. $G \square K_2$ çizgesi, G çizgesinin iki tane kopyasından oluşur. Bu kopyalardan birine G_1 diğereine de G_2 diyelim ve $K_2 = \{a, b\}$ olsun. Burada (G_1, a) , G_1 çizgesinin a köşe noktası ile olan Kartezyen çarpımın köşe noktaları olsun.

G çizgesi çözülebilir olduğundan başlangıç deliği u köşe noktasında iken son piyon v köşe noktasında kalmış olsun. O halde $G \square K_2$ çizgesinin başlangıç deliğini (G_1, u)

köşe noktası olarak seçelim. G_1 çizgesini çözerek son piyonu (G_1, v) köşe noktasında bırakalım. Sırasıyla,

$$\left[(G_2, v) \cdot \overrightarrow{(G_2, u)} \cdot (G_1, u) \right] \text{ ve } \left[(G_1, u) \cdot \overrightarrow{(G_1, v)} \cdot (G_2, v) \right]$$

hamleleri yapılır. Böylece oyun G_2 çizgesinde ve deliği u köşe noktasında olan hale dönüşür. G_2 çizgesi de G çizgesinin kopyası olduğundan çözülebilirdir. O halde $G \square K_2$ çizgesi çözülebilirdir. \square

Teorem 3.7.4 ([10]). G ve H çift sayıda köşe noktası olan döngü çizgeler olmak üzere; $G \square H$ çizgesi serbest çözülebilirdir.

Kanıt. G çizgesinin köşe noktalarının sayısı n , H çizgesinin köşe noktalarının sayısı m olsun ve burada m ve n çift sayıdır. Şimdi $G \square H$ çizgesini düşünelim. G ve H çizgeleri çift sayıda köşe noktası olan döngü çizgeler olduğundan Teorem 3.2.3'den dolayı serbest çözülebilirdir.

Genelliği bozmaksızın başlangıç deliği, Kartezyen çarpım çizgesindeki m tane G kopyasından G_1 kopyasında olsun. G_1 serbest çözülebilir olduğundan, G_1 çizgesinde kalan son piyonla ilişkili olarak G_2 kopyasından bir piyon seçelim ve $\left[G_2 \cdot \overrightarrow{G_1} \cdot G_1 \right]$ hamlesini yapalım. Bu hamle ile G_2 kopyasında bir delik açılmış olur. O halde bir sonraki hamle G_1 kopyasındaki piyonu G_2 kopyasındaki piyon üzerinden atlatıp G_2 kopyasındaki deliğe getirmek olur. Böylece G_1 kopyasındaki piyonların hepsi alınır ve oyun G_2 kopyasına taşınır. Bu yöntem $(n - 2)$ kere tekrarlandığında en son G_n kopyası da çözülür ve böylece $G \square H$ çizgesi çözülmüş olur. \square

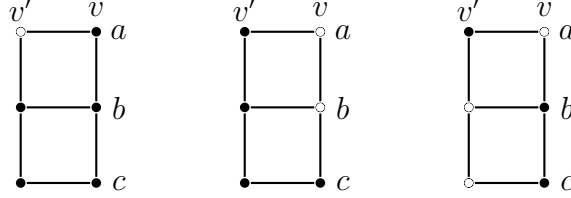
Teorem 3.7.5 ([10]). G ve H çözülebilir iki çizge olmak üzere $G \square H$ çizgesi de çözülebilirdir.

Kanıt. Eğer $H = K_1$ ise, $G \square K_1 = G$ olacağından çözülebilirdir. Eğer $H = K_2$ ise, $G \square K_2$ çizgesi Teorem 3.7.3'den çözülebilirdir.

O halde iki çizgenin köşe noktalarının sayısı da ikiden büyük olsun. G çizgesi çözülebilir olduğundan a ve z gibi iki köşe noktası vardır öyle ki; a köşe noktası başlangıç deliği ve z köşe noktası son piyonun kaldığı köşe noktasıdır. Ayrıca $ab, bc, xy, yz \in E(G)$ olacak şekilde $b, c, x, y \in V(G)$ vardır. Buna göre ilk hamle $\left[c \cdot \overrightarrow{b} \cdot a \right]$ ve son hamle de $\left[x \cdot \overrightarrow{y} \cdot z \right]$ olarak seçilsin. Benzer şekilde H çizgesi de çözülebilir olduğundan u ve v gibi iki köşe noktası vardır öyle ki u başlangıç deliğinin v son piyonun olduğu köşe noktasıdır. Ayrıca u' , u köşesinin komşusu ve v' de v köşesinin komşusu olsun.

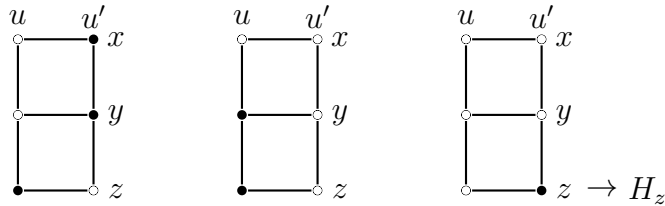
$h \in V(H)$ olmak üzere G_h çizgesi G çizgesinin h kopyası, benzer şekilde $g \in V(G)$ olmak üzere H_g çizgesi H çizgesinin g kopyası olarak gösterilecektir.

$G \square H$ çizgesinin başlangıç deliği (a, u) köşe noktasında olsun. Bu durumda H çizgesi başlangıç deliği u köşesinde iken çözülebilir olduğundan H_a kopyasını çözüp son piyonu (a, v) köşe noktasında bırakalım. Böylece G çizgesinin G_v kopyası hariç bütün kopyalarında a köşesi delik olur. Şimdi sırasıyla $\left[(b, v) \cdot \overrightarrow{(a, v)} \cdot (a, v') \right]$ ve $\left[(c, v') \cdot \overrightarrow{(b, v')} \cdot (b, v) \right]$ hamleleri yapılır.



Şekil 3.34: $G \square H$ çizgesinin çözümü

Bu hamleler sonucunda; $G_{v'}$ kopyasında (b, v') ve (c, v') köşe noktaları delik fakat diğer köşe noktalarında piyonlar vardır. Bu delikler de başlangıçta kabul ettiğimiz $\left[c \cdot \overrightarrow{b} \cdot a \right]$ hamlesi sonucu ortaya çıkabilecek bir durumdur. Böylece $G_{v'}$ kopyası son piyonu (z, v') köşe noktasında kalacak şekilde çözülebilir. Şimdi G çizgesinin $G_{v'}$ kopyası hariç bütün kopyalarında a köşesinde delik olur. O halde $G_{u'}$ kopyası hariç bütün kopyalar çözülür ve son piyon başlangıçta kabul edildiği gibi z köşesinde bırakılır. $G_{u'}$ kopyasında son iki piyon (x, u') ve (y, u') köşelerinde bırakılır ve sırasıyla $\left[(x, u') \cdot \overrightarrow{(y, u')} \cdot y, u \right]$ ve $\left[(y, u) \cdot \overrightarrow{(z, u)} \cdot z, u' \right]$ hamleleri yapılır.



Şekil 3.35: $G \square H$ çizgesinin çözümü

Bu hamleler sonrasında H_z kopyasında (z, u) köşesinde delik ve diğer köşelerde piyonlar vardır. Ayrıca H çizgesinin bütün kopyaları çözülmüştür. Başlangıçtaki kabulden dolayı H_z kopyası delik u köşesinde iken çözülebilirdir ve son piyon v köşesinde kalır. Bu da kanıtı bitirir (bkz. Şekil 3.35). \square

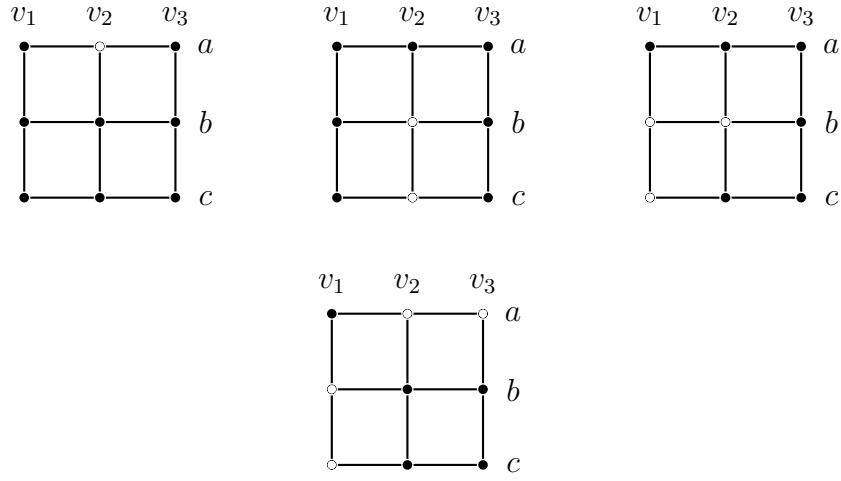
Teorem 3.7.6 ([10]). G yukarıda tarif edildiği gibi çözülebilir bir çizge, H başlangıç deliği u köşesinde ve son iki piyon v_1 ve v_3 köşe noktalarında kalacak şekilde 2-mesafeli çözülebilir bir çizge olsun. Bu durumda $G \square H$ çizgesi de çözülebilirdir.

Kanıt. $G \square H$ çizgesinde başlangıç deliği (a, u) köşe noktasında olsun ve u_1 ile u_2 köşeleri de H çizgesinde başlangıç hamlesi için köşe noktaları olsun. H çizgesi 2-mesafeli çözülebilir olduğundan H_a kopyası delik a köşesinde iken son iki piyon v_1 ve v_2 köşelerinde kalacak şekilde çözülür. Böylece G çizgesinin G_{v_1} ve G_{v_2} kopyaları hariç diğer kopyalarında delik a köşesinde olur.

Sırasıyla

$$\left[(c, v_2) \cdot \overrightarrow{(b, v_2)} \cdot (a, v_2) \right], \quad \left[(b, v_1) \cdot \overrightarrow{(c, v_1)} \cdot (c, v_2) \right] \quad \text{ve} \quad \left[(a, v_3) \cdot \overrightarrow{(a, v_2)} \cdot (b, v_2) \right]$$

hamleleri yapılır.

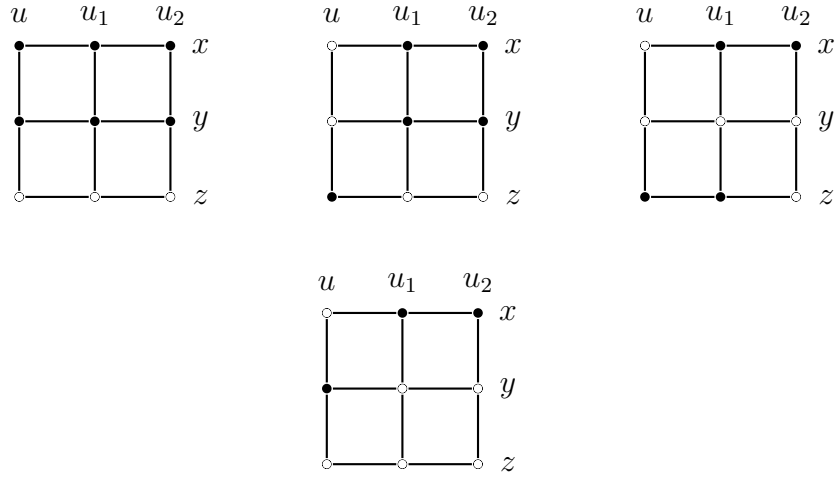


Şekil 3.36: G_v kopyalarının çözülebilirliği

Bu hamleler sonucunda (a, v_1) , (b, v_2) , (b, v_3) , (c, v_2) ve (c, v_3) köşelerinde piyonlar; (a, v_2) , (a, v_3) , (b, v_1) , ve (c, v_1) köşelerinde delikler olur. Böylece G çizgesinin G_{v_1} kopyası hariç bütün kopyalarında delik a köşesinde olur. O halde bu kopyaların hepsi çözülebilirdir.

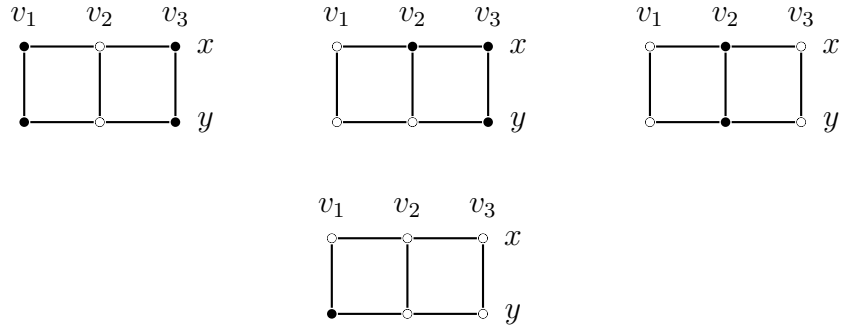
G çizgesinin bütün kopyaları ayrı ayrı son iki piyon komşu x ve y köşelerinde kalacak şekilde çözülür. Sonuçta H çizgesinin H_x ve H_y kopyaları tamamen piyonlarla dolmuş olurken, H_z dahil diğer bütün kopyalar ise tamamen boştur. Şimdi sırasıyla $\left[(x, u) \cdot \overrightarrow{(y, u)} \cdot (z, u) \right]$, $\left[(y, u_2) \cdot \overrightarrow{(y, u_1)} \cdot (z, u_1) \right]$ ve $\left[(z, u_1) \cdot \overrightarrow{(z, u)} \cdot (y, u) \right]$ hamleleri yapılır.

Bu hamleler sonucunda H_x kopyasında (x, u) köşesinde delik varken diğer köşelerde piyon vardır ve 2-mesafeli çözülebilir olduğundan son iki piyon (x, v_1) ve (x, v_3) köşelerinde kalır. Aynı şekilde H_y kopyasında da son iki piyon (y, v_1) ve (y, v_3) köşelerinde kalır. O halde kalan son dört piyona göre sırasıyla



Şekil 3.37: H_z kopyasındaki piyonlar tamamen alınmıştır.

$\left[(y, v_1) \cdot \overrightarrow{(x, v_1)} \cdot (x, v_2) \right]$, $\left[(x, v_3) \cdot \overrightarrow{(y, v_3)} \cdot (y, v_2) \right]$ ve $\left[(x, v_2) \cdot \overrightarrow{(y, v_2)} \cdot (y, v_1) \right]$ hamleleri yapılarak son piyon (y, v_1) köşesinde bırakılır.



Şekil 3.38: Son piyon (y, v_1) köşesinde bırakılır.

Böylece $G \square H$ çizgesi çözülür.

□

4 SIERPİNSKİ ÇİZGELER ÜZERİNDE SOLO TEST OYUNU

Önceki bölümlerde bazı özel çizgeler üzerinde solo test oyununun çözülebilirliği ve serbest çözülebilirliği incelenmiştir. Bunun yanında solo test oyunu çözülebilir ise son piyonun istenilen yerde bırakılabileceği çizgeler var mıdır sorusu da akla gelebilir. Bu bölümde Sierpinski çizgeler üzerinde solo test oyunu ele alınarak, Sierpinski çizgelerin serbest çözülebilir olduğu kanıtlanmış ve son piyonun da istenilen köşe noktasında bırakılabileceği gösterilmiştir.

4.1 Sierpinski Çizgeler

$n, k \geq 1$ olmak üzere, $S(n, k)$ şeklinde gösterilen *Sierpinski çizge* şu şekilde tanımlanır:

$\{0, 1, \dots, k-1\}^n$ Sierpinski çizgenin köşe noktaları kümesi ve $u = (u_1, \dots, u_n)$ ve $v = (v_1, \dots, v_n)$ iki farklı köşe noktaları olsun. u ve v köşe noktalarının komşu köşe noktalar olması için gerek ve yeter koşul, $h \in \{1, 2, \dots, n\}$ olmak üzere;

1. $t < h$ için $u_t = v_t$,
2. $u_h \neq v_h$,
3. $t = h + 1, \dots, n$ için $u_t = v_h$ ve $v_t = u_h$

olmasıdır.

Herhangi bir köşe noktası olan (u_1, \dots, u_n) kısaca $u_1u_2\dots u_n$ şeklinde gösterilecektir. $S(n, k)$ Sierpinski çizgenin tanımından köşe noktalarının sayısının

$$|V(S(n, k))| = k^n$$

ve kenar sayısının

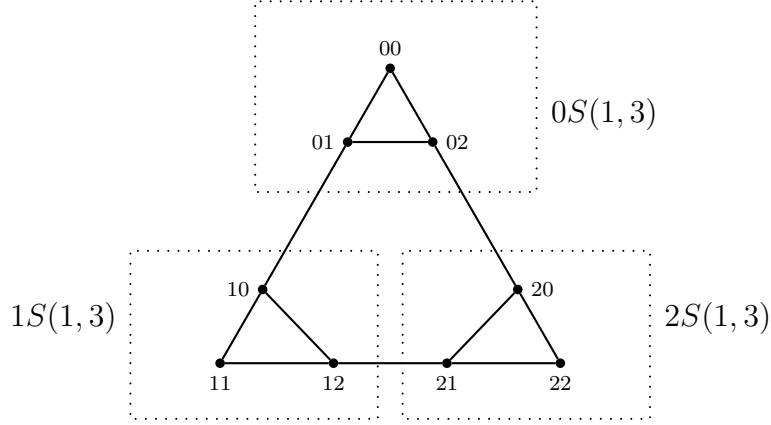
$$|E(S(n, k))| = \frac{k(k^n - 1)}{2},$$

olduğu açıktır.

Ayrıca, $S(1, k) \cong K_k$ ve $S(2, k) \cong P_{2k}$ olur. $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ olmak üzere $ii\dots i$ şeklinde gösterilen köşe noktasına $S(n, k)$ 'nın *extreme köşe noktası* denir ve k tane extreme köşe noktası vardır.

$n \geq 2$ olsun, $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ olmak üzere, $iv_2v_3\dots v_n$ köşe noktasını içeren $S(n, k)$ 'nin alt çizgesi $iS(n-1, k)$ olarak tanımlanır (bkz. Şekil 4.39). $ijj\dots j$, $jii\dots i$ köşe noktaları da $iS(n, k)$ ile $jS(n, k)$ alt çizgeleri arasındaki tek

kenardır ve $e(n)_{ij}$ ya da $e(n)_{ji}$ şeklinde gösterilir. Sierpinski çizge ile ilgili daha ayrıntılı bilgi için [9] referansından yararlanılabilir.



Şekil 4.39: $S(2,3)$ Sierpinski çizge ve $0S(1,3)$, $1S(1,3)$ ve $2S(1,3)$ alt çizgeleri

4.2 Sierpinski Çizge İçin Çözülebilirlik Koşulları

Bu bölümde Sierpinski çizgelerin serbest çözülebilir olduğunu kanıtlamadan önce birkaç yardımcı teoremin kanıtı verilecektir.

Yardımcı Teorem 4.2.1. $n > 4$ iken son piyon K_n tam çizgede istenilen köşe noktasında bırakılabilir. $n = 4$ durumunda ise son piyon başlangıçta deliğin olduğu köşe noktası hariç istenilen köşede bırakılabilir.

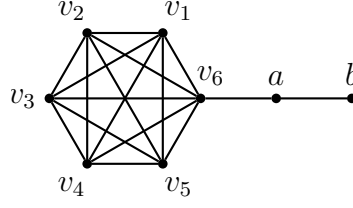
Kanıt. K_n tam çizge serbest çözülebilirdir ve oyun $(n - 2)$ hamlede biter.

v_0 , K_n tam çizgesinde oyunun biteceği köşe noktası olarak seçilsin. Eğer başlangıçta delik v_0 köşe noktasında değilse ilk hamlede v_0 köşesindeki piyon alınmalıdır. Eğer başlangıçta delik v_0 köşe noktasında ise ilk hamle, herhangi iki köşe noktası v_1 ve v_2 için, $[v_1 \cdot \vec{v}_2 \cdot v_0]$ olmalıdır. Sonraki hamle herhangi bir v_3 köşe noktası için $[v_0 \cdot \vec{v}_3 \cdot v_2]$ olur ve bu hamle ile v_0 köşesi boş kalır. v_0 köşe noktasında son piyonu bırakmak için bir hamleye daha ihtiyaç vardır. O halde v_4 herhangi bir köşe noktası olmak üzere yapılacak olan $[v_2 \cdot \vec{v}_4 \cdot v_0]$ hamlesi ile son piyon v_0 köşe noktasına gelmiş olur. Teoremin ikinci kısmı da açıktır. \square

K_n tam çizge ile P_m yol çizgenin bir köprü ile birbirine eklenmesiyle oluşan çizgeye (n, m) -lolipop çizge denir.

Yardımcı Teorem 4.2.2. v_1, v_2, \dots, v_n , K_n tam çizgesinin köşe noktaları, a ve b de P_2 yol çizgesinin köşe noktaları olmak üzere; v_n ile a köşe noktaları köprüünün

uç noktaları olacak şekilde oluşturulan G çizgesi $(n, 2)$ -lolipop çizge olsun. Aşağıdaki koşullar sağlandığında G çizgesi çözülebilirdir.



Şekil 4.40: $(6, 2)$ -lolipop çizge

1. $n \geq 4$ için; eğer başlangıçta delik a köşesinde ise oyun K_n tam çizgesinin herhangi bir köşe noktasında biter.
2. $n = 4$ için; eğer başlangıçta delik b köşe noktasında ise oyun v_4 köşesinde biter.
3. $n = 5$ için; eğer başlangıçta delik b köşe noktasında ise oyun $(5, 2)$ -lolipop çizgenin v_5 köşe noktası hariç herhangi bir köşesinde biter.
4. $n > 5$ için; eğer başlangıçta delik b köşe noktasında ise oyun K_n tam çizgesinin herhangi bir köşesinde biter.

Kanıt. 1. $i = 1, 2, \dots, n - 1$ olmak üzere v_i K_n tam çizgesinin herhangi bir köşe noktası olsun. Delik a köşesinde olduğundan, sırasıyla yapılacak olan $[v_i \cdot \vec{v}_n \cdot a]$ ve $[b \cdot \vec{a} \cdot v_n]$ hamleleri ile oyun K_n tam çizgesi üzerine taşınmış olur. Yardımcı Teorem 4.2.1'den oyun K_n üzerinde herhangi bir köşe noktasında biter.

2. Sırasıyla $[v_4 \cdot \vec{a} \cdot b]$, $[v_1 \cdot \vec{v}_2 \cdot v_4]$, $[v_3 \cdot \vec{v}_4 \cdot a]$, ve $[b \cdot \vec{a} \cdot v_4]$ hamleleri yapıldığında oyunda son piyon v_4 köşe noktasında kalır.

3. Oyunun beş hamlede bittiği açıktır. Tercihe bağlı olarak sırasıyla $[v_5 \cdot \vec{a} \cdot b]$, $[v_2 \cdot \vec{v}_1 \cdot v_5]$, $[v_4 \cdot \vec{v}_5 \cdot a]$, $[b \cdot \vec{a} \cdot v_5]$, ve $[v_5 \cdot \vec{v}_3 \cdot v_2]$ hamleleri yapılabilir. Son hamle için kalan iki piyondan biri mutlaka v_5 köşe noktasında olacağından oyun v_5 köşesinde bitemez.

4. Eğer başlangıçta delik b köşesinde ise (2) durumunda olduğu gibi oyun dört hamlede K_n tam çizgesi üzerine taşınabilir. Yardımcı Teorem 4.2.1'den oyun K_n tam çizgesinin herhangi bir köşe noktasında biter. □

$S(n, k)$ için genel durumun çözülebilirliğini vermeden önce; $n = 3$ ve $n = 4$ durumlarını ayrı ayrı inceleyelim.

Teorem 4.2.3. *Her n için $S(n, 3)$ serbest çözülebilirdir.*

Kanıt. n üzerinde tümevarım yaparak kanıtlayalım. $n = 1$ için $S(1, 3) \cong K_3$ olduğundan serbest çözülebilirdir.

$n = 2$ durumunda başlangıçta delik $S(n, 3)$ çizgesinin extreme köşesinde olsun. Genelliği bozmaksızın 00 extreme köşesi seçilsin. Sırasıyla $[01 \cdot \vec{02} \cdot 00]$, $[11 \cdot \vec{10} \cdot 01]$, ve $[00 \cdot \vec{01} \cdot 01]$ hamleleri yapıldığında piyonlar $S(2, 3)$ çizgesinin $0S(1, 3)$ alt çizgesinden alınır ve oyun $1S(1, 3)$ alt çizgesine taşınmış olur. Benzer şekilde yapılacak olan $[10 \cdot \vec{12} \cdot 11]$, $[22 \cdot \vec{21} \cdot 12]$, ve $[11 \cdot \vec{12} \cdot 21]$ hamleleri ile kalan piyonlar $1S(1, 3)$ alt çizgesinden $2S(1, 3)$ alt çizgesine taşınır. $2S(1, 3) \cong K_3$ olduğundan serbest çözülebilirdir (bkz. Şekil 4.42).

Başlangıçta delik extreme köşe noktasında olmasın ve genelliği bozmaksızın $02 \in 0S(1, 3)$ köşesinde olsun. $[00 \cdot \vec{01} \cdot 02]$, $[11 \cdot \vec{10} \cdot 01]$, ve $[02 \cdot \vec{01} \cdot 10]$ hamleleri yapıldığında piyonlar $S(2, 3)$ çizgesinin $0S(1, 3)$ alt çizgesinden alınır ve oyun $1S(1, 3)$ alt çizgesine taşınmış olur. Ardından $[11 \cdot \vec{12} \cdot 10]$, $[22 \cdot \vec{21} \cdot 12]$, ve $[10 \cdot \vec{12} \cdot 21]$ hamleleri ile $1S(1, 3)$ alt çizgesinden $2S(1, 3)$ alt çizgesine taşınır. Burada son hamle için birçok seçenek mevcuttur fakat oyunun gidişatına uygun olarak son piyonu 11 ve 22 extreme köşe noktalarına bir birim uzaklıkta olan bir köşe noktasında bırakmayı tercih ediyoruz. Örneğin son hamle $[20 \cdot \vec{21} \cdot 12]$ olabilir.

$n \geq 1$ için $S(n, 3)$ serbest çözülebilir olsun ve son piyon extreme köşe noktasından bir birim uzaklıkta bir köşe noktasında kalmış olsun.

Şimdi de $S(n + 1, 3)$ çizgesinin serbest çözülebilir olduğunu görelim. Genelliği bozmaksızın başlangıçta delik $0S(n, 3)$ alt çizgesinin herhangi bir köşe noktasında olsun. $n = 2$ durumu için verilen yöntem ve tümevarım hipotezinden dolayı son piyon $0S(n, 3)$ alt çizgesinin $(00 \dots 0$ extreme köşe hariç) extreme köşe noktalarına bir birim uzaklıkta bir köşe noktasında bırakılabilir. Bu da oyunun $0S(n, 3)$ alt çizgesinden $j = 1, 2$ olmak üzere $jS(n, 3)$ alt çizgesine taşınabileceğini gösterir. Bu şekilde devam ederek istenilen sonuca ulaşılır. \square

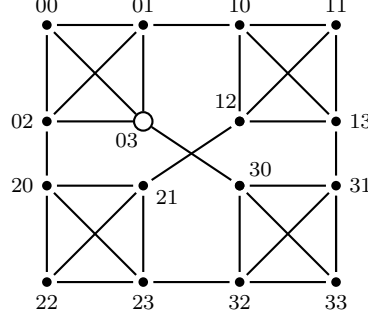
Teorem 4.2.4. *Her n için $S(n, 4)$ serbest çözülebilirdir.*

Kanıt. n üzerinden tümevarım ile kanıtı yapalım. $n = 1$ için $S(1, 4) \cong K_4$ olduğundan serbest çözülebilirdir.

$n = 2$ için, genelliği bozmaksızın, başlangıçta delik $S(2, 4)$ çizgesinin $0S(1, 4)$ alt çizgesinde olsun. Yardımcı Teorem 4.2.1'den son piyon $0S(1, 4)$ çizgesinde deliğin olduğu köşe noktası hariç herhangi bir köşe noktasında bırakılabilir. Böylece son piyon 0 extreme köşesi hariç diğer extreme köşelerine bir birim uzaklıkta bir köşe

noktasında bırakılmış olur. Yardımcı Teorem 4.2.2'den oyun $i = 1, 2, 3$ olmak üzere $iS(1, 4)$ alt çizgesine taşınır.

Örneğin, başlangıçta deliğin 03 köşe noktasında olduğu varsayılırsa;



Şekil 4.41: Başlangıçta delik 03 köşesinde iken $S(2, 4)$ çizgesi

$$\begin{aligned} & \left[00 \cdot \vec{01} \cdot 03 \right], \quad \left[02 \cdot \vec{03} \cdot 00 \right], \quad \left[11 \cdot \vec{10} \cdot 01 \right], \quad \left[00 \cdot \vec{01} \cdot 10 \right], \quad \left[10 \cdot \vec{12} \cdot 11 \right], \\ & \left[13 \cdot \vec{11} \cdot 10 \right], \quad \left[20 \cdot \vec{21} \cdot 12 \right], \quad \left[10 \cdot \vec{12} \cdot 21 \right], \quad \left[22 \cdot \vec{23} \cdot 20 \right], \quad \left[20 \cdot \vec{21} \cdot 22 \right], \\ & \left[30 \cdot \vec{32} \cdot 23 \right], \quad \left[22 \cdot \vec{23} \cdot 32 \right], \quad \left[31 \cdot \vec{32} \cdot 30 \right], \quad \left[30 \cdot \vec{33} \cdot 31 \right] \end{aligned}$$

hamleleri ile oyun çözülmüş olur.

Şimdi $n \geq 4$ için $S(n, 4)$ çizgesinin serbest çözülebilir olduğunu kabul edelim ve $S(n+1, 4)$ çizgesinin serbest çözülebilir olduğunu görelim. Genelliği bozmaksızın başlangıçta delik $0S(n, 4)$ alt çizgesinde olsun. Tümevarım hipotezinden $0S(n, 4)$ serbest çözülebilirdir ayrıca son piyon, $i = 1, 2, \dots, n-1$ olmak üzere $0ii \dots i$ extreme köşesi hariç, extreme köşelere bir birim uzaklıkta bir köşe noktasında bırakılabilir. Böylece Yardımcı Teorem 4.2.2'den dolayı, oyun $0S(n, 4)$ alt çizgesinden $iS(n, 4)$ alt çizgesine taşınır. Bu şekilde devam ederek oyun çözülür. Kanıt burada biter. \square

Teorem 4.2.5. $k \geq 5$ için $S(n, k)$ serbest çözülebilirdir ve son piyon istenilen köşe noktasında bırakılabilir.

Kanıt. n üzerinden tümevarım yaparak ispatı gösterelim.

$n = 1$ durumunda $S(1, k) \cong K_k$ olacağından serbest çözülebilirdir ve son piyon istenilen köşe noktasında bırakılabilir.

$k \geq 5$ için $S(n, k)$ serbest çözülebilir olduğunu ve son piyonun istenilen köşede bırakılabileceğini kabul edelim. $S(n+1, k)$ çizgesinin de serbest çözülebilir olduğunu ve son piyonun istenilen köşe noktasında bırakılabileceğini görelim. Bunun için bir v_0 köşesi son piyonun kalacağı köşe noktası ve genelliği bozmaksızın, sabitlenmiş bir

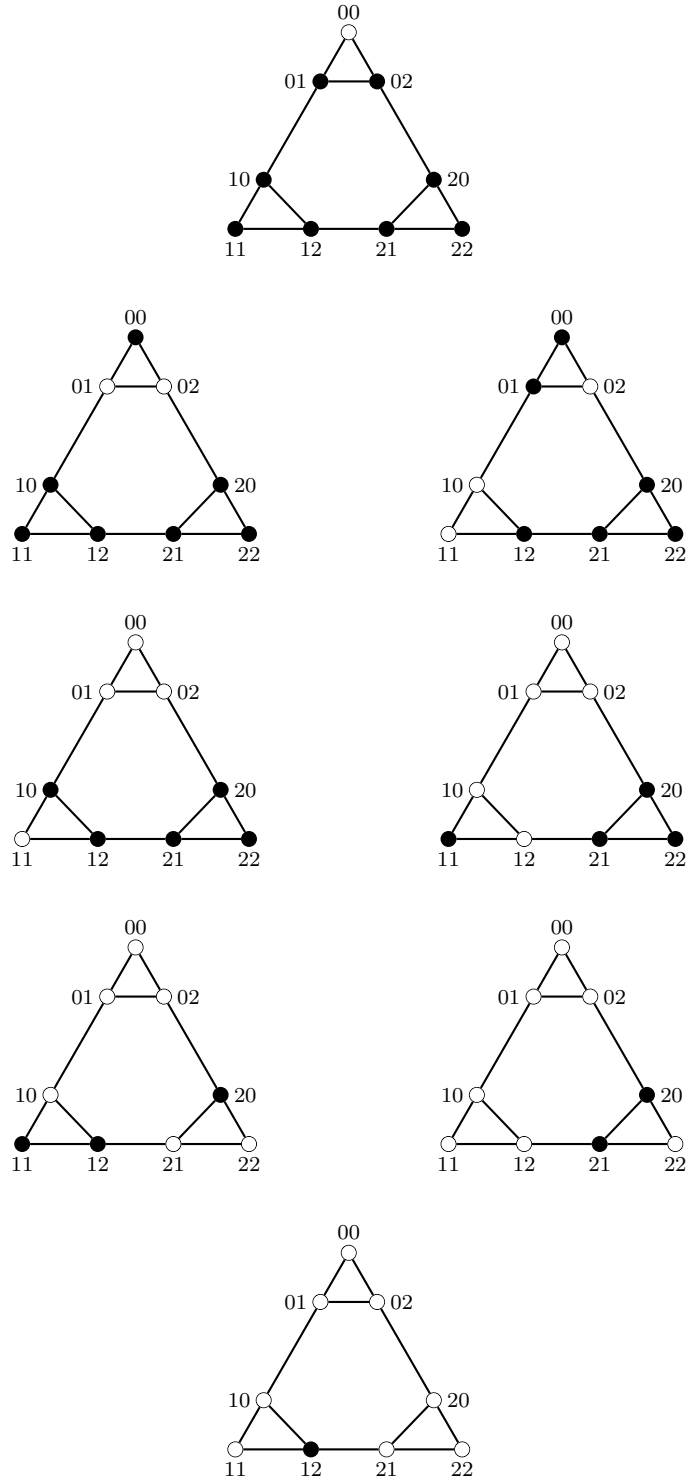
$i^* = 1, 2, \dots, k-1$ için $v_0 \in i^*S(n, k)$ olsun. Daha önceki kanıtlarda da yapıldığı gibi başlangıçta delik $S(n+1, k)$ çizgesinin $0S(n, k)$ alt çizgesinde olsun.

Yardımcı Teorem 4.2.2'den oyun $S(n+1, k)$ çizgesinin $s_1S(n, k)$ alt çizgesine taşınabilir ($s_1 \neq 0, s_1 \neq i^*, s_1 \in \{1, 2, \dots, k-1\}$). Benzer şekilde bir sonraki adımda oyun $s_2S(n, k)$ alt çizgeye taşınabilir ($s_2 \neq 0, s_2 \neq i^*, s_2 \neq s_1, s_2 \in \{1, 2, \dots, k-1\}$). Bu şekilde devam ederek son adımda oyun $S(n+1, k)$ çizgesinin $i^*S(n, k)$ alt çizgesine taşınır. Tümevarım hipotezinden $i^*S(n, k)$ serbest çözülebilirdir ve son piyon istenilen köşe noktasında bırakılabilir. Böylece kanıt tamamlanır. \square

Eğer Teorem 4.2.3, 4.2.4 ve 4.2.5 bir araya getirilirse aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.6. $k \geq 3$ ve her n doğal sayısı için $S(n, k)$ serbest çözülebilirdir.

Yapılan kanıtlara örnek olarak, Teorem 4.2.3'ün ispatında söz edilen $S(2, 3)$ Sierpinski çizge üzerinde solo test oyunu için başlangıçta delik 00 köşesinde iken verilen hamlelerin görseli Şekil 4.42 ile aşağıda verilmiştir.



Şekil 4.42: Başlangıç deliği 00 köşesinde iken $S(2,3)$ Sierpinski çizge üzerinde solo test oyunu

KAYNAKÇA

- [1] John D. Beasley. *The ins and outs of peg solitaire*, volume 2 of *Recreations in Mathematics*. Oxford University Press, Eynsham, 1985.
- [2] Robert A. Beeler and Aaron D. Gray. Peg solitaire on graphs with seven vertices or less. In *Proceedings of the Forty-Third Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing*, volume 211, pages 151–159, 2012.
- [3] Robert A. Beeler and D. Paul Hoilman. Peg solitaire on the windmill and the double star graphs. *Australas. J. Combin.*, 53:127–134, 2012.
- [4] Robert A. Beeler and D. Paul Hoilman. Peg solitaire on graphs. *Discrete Math.*, 311(20):2198–2202, 2011.
- [5] Robert A. Beeler and Clayton A. Walvoort. Peg solitaire on trees with diameter four. *Australas. J. Combin.*, 63:321–332, 2015.
- [6] George I. Bell. Diagonal peg solitaire. *Integers*, 7:G1, 20, 2007.
- [7] George I. Bell. A fresh look at peg solitaire. *Math. Mag.*, 80(1):16–28, 2007.
- [8] John Engbers and Christopher Stocker. Reversible peg solitaire on graphs. *Discrete Math.*, 338(11):2014–2019, 2015.
- [9] Andreas M. Hinz, Sandi Klavžar, Uroš Milutinović, and Ciril Petr. *The tower of Hanoi—myths and maths*. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2013.
- [10] D. Paul Hoilman. *Graph Theorizing Peg Solitaire*. PhD thesis, East Tennessee State University, December 2010.
- [11] Christopher Jefferson, Angela Miguel, Ian Miguel, and S. Armagan Tarim. Modelling and solving English Peg Solitaire. *Comput. Oper. Res.*, 33(10):2935–2959, 2006.
- [12] Douglas B. West. *Introduction to graph theory*. Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, 1996.
- [13] Robin J. Wilson. *Introduction to graph theory*. Longman, Harlow, 1996. Fourth edition.