

SIERPINSKI ÇİZGELERİN ÖZELLİKLERİ

Yüksek Lisans Tezi

Nilay TORUN

Eskişehir 2018

SIERPINSKI ÇİZGELERİN ÖZELLİKLERİ

NİLAY TORUN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Topoloji Tezli Yüksek Lisans Programı

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Emrah AKYAR

Eskişehir

Anadolu Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Haziran, 2018

Bu tez çalışması BAP Komisyonunca kabul edilen 1707F457 no.lu proje kapsamında desteklenmiştir.

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Nilay Torun'un "Sierpinski Çizgelerin Özellikleri" başlıklı tezi 01/06/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek "Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği"nin ilgili maddeleri uyarınca, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

| | <u>Unvanı Adı-Soyadı</u> | <u>İmza</u> |
|---------------------|---------------------------|-------------|
| Üye (Tez Danışmanı) | : Prof. Dr. Emrah AKYAR | |
| Üye | : Prof. Dr. Pınar ANAPA | |
| Üye | : Doç. Dr. Aytaç KURTULUŞ | |

Prof. Dr. Ersin YÜCEL
Enstitü Müdürü

ÖZET

SIERPINSKI ÇİZGELERİN ÖZELLİKLERİ

Nilay TORUN

Matematik Anabilim Dalı

Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Haziran, 2018

Danışman: Prof. Dr. Emrah AKYAR

Çizge, kabaca köşe noktalar ve bu köşe nokta çiftlerini birleştiren kenarlar kümesinden oluşan bir yapıdır. Literatürde Sierpinski çizge ile birlikte çok sayıda çizge yer almaktadır. Sierpinski çizgeler ilginç özellikleri ile birçok araştırmacının ilgisini çekmiş ve bu çizgeler üzerinde çalışılmasına yol açmıştır. Bu çalışmada Sierpinski çizgelerin literatürde yer alan önemli özellikleri derlenmiştir. İlk olarak Sierpinski çizgeler ile Hanoi çizgeler arasındaki bağlantı verilip daha sonra $k \geq 3$ için $S(n, k)$ Sierpinski çizgelerin Hamilton çizgesi olduğu kanıtlanmıştır. Sierpinski çizgelerin düzlemsel olup olmadığı incelenerek bu çizgelerin dış merkezlik, çap, yarıçap, merkez, köşe noktalar arasındaki uzaklık gibi çeşitli metrik özellikleri sunulmuştur. Son olarak Sierpinski çizgelerin boyama ile ilgili özellikleri araştırılarak bu çizgelerin kromatik sayısı, kromatik indeksi, total kromatik sayısı, oyun renk sayısı ve oyun kromatik sayısı verilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Çizge, Sierpinski çizge, Hanoi çizge

ABSTRACT

PROPERTIES OF SIERPINSKI GRAPHS

Nilay TORUN

Mathematics Department

Anadolu University, Graduate School of Sciences, June, 2018

Supervisor : Prof. Dr. Emrah AKYAR

A graph is a structure formed by a set of vertices and edges joining pairs of those vertices. There are many types of graphs in the literature and one of them is the Sierpinski graphs. Sierpinski graphs has attracted the attention of many researchers with its interesting properties and has led them to research further on these graphs. In this study, important properties of Sierpinski graphs in literature are compiled. Firstly, the link between Sierpinski graphs and Hanoi graphs are given, and it is also proved that for $k \geq 3$, $S(n, k)$ graphs are Hamiltonian graphs. It has been examined whether Sierpinski graphs are planar or not and its various metric features such as eccentricity, diameter, radius, center, and distance between vertices are presented. Lastly, properties related to coloring of Sierpinski graphs are investigated and their properties such as chromatic number, chromatic index, total chromatic number, game color number and game chromatic number are given.

Keywords: Graph, Sierpinski graph, Hanoi graph

TEŐEKKÖR

Yüksek lisans eğitimim boyunca bilgi ve birikimi ile yol gösteren, desteğini esirgemeyen ve çalışmalarımızda göstermiş olduğu özveri ve sabrından dolayı değerli danışmanım sayın Prof. Dr. Emrah AKYAR'a, lisans ve yüksek lisans eğitimim boyunca eğitimime katkıda bulunan Matematik bölümündeki değerli hocalarıma, tez çalışmalarımızı beraber yürüttüğümüz sevgili ortağım Nazlıcan ÇAKMAK'a, bu günlere gelmemde büyük pay sahibi ve her daim yanımda olan aileme ve tüm dostlarıma teşekkürlerimi sunarım.

01/06/2018

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarda bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilemeyen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Anadolu Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı”yla tarandığını ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm.

Nilay TORUN

İÇİNDEKİLER

| | |
|--|-----------|
| BAŞLIK SAYFASI | ii |
| JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI | iii |
| ÖZET | iii |
| ABSTRACT | iv |
| TEŞEKKÜR | v |
| ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ | vi |
| İÇİNDEKİLER | vii |
| ŞEKİLLER DİZİNİ | x |
| TABLolar DİZİNİ | xi |
| SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ | xii |
| 1 GİRİŞ | 1 |
| 2 ÖN BİLGİLER | 2 |
| 2.1 Çizge Kuramı | 2 |
| 2.2 Sierpinski Çizgeler | 10 |
| 3 HANOI VE SIERPINSKI ÇİZGELER | 14 |
| 3.1 Hanoi Çizgeler | 14 |
| 3.2 Değişmeli Hanoi Çizgeler | 16 |
| 4 SIERPINSKI ÇİZGELERİN BAZI TEMEL ÖZELLİKLERİ | 19 |
| 4.1 Sierpinski Çizgelerin Hamiltonluk Özelliği | 19 |
| 4.2 Sierpinski Çizgelerin Düzlemsellik Özelliği | 20 |
| 4.3 Sierpinski Çizgelerin Bazı Metrik Özellikleri | 21 |
| 5 SIERPINSKI ÇİZGELERİN BOYAMA ÖZELLİKLERİ | 31 |
| 5.1 Sierpinski Çizgelerin Kromatik Sayısı, Kromatik İndeksi ve Total Kromatik Sayısı | 31 |
| 5.2 Sierpinski Çizgelerin Oyun Renk ve Oyun Kromatik Sayıları | 36 |

KAYNAKÇA

42

ÖZGEÇMİŞ

43

ŞEKİLLER DİZİNİ

| | | |
|------------|---|----|
| Şekil 2.1 | Bir çizge örneği | 2 |
| Şekil 2.2 | Çoklu bir çizge örneği | 3 |
| Şekil 2.3 | Köşe noktaları dereceleri ile isimlendirilmiş bir G çizgesi | 3 |
| Şekil 2.4 | 1-regüler, 2-regüler ve 3-regüler çizgeler | 3 |
| Şekil 2.5 | K_5 tam çizge, K_5 tam çizge için bir alt çizge ve K_5 tam çizgenin ürettiği alt çizge | 4 |
| Şekil 2.6 | Komşuluk matrisi A olan G çizgesi | 5 |
| Şekil 2.7 | Euler çizge | 6 |
| Şekil 2.8 | Hamilton çizge | 6 |
| Şekil 2.9 | e kenarı G çizgesinde bir köprüdür. | 6 |
| Şekil 2.10 | P_5 yol çizge | 7 |
| Şekil 2.11 | K_1, K_2, K_3, K_4 ve K_5 tam çizgeleri | 7 |
| Şekil 2.12 | Bir G çizgesinin iki kümeli $K_{3,3}$ tam çizge ile olan çizimi | 7 |
| Şekil 2.13 | İzomorfik G ve H çizgeleri | 8 |
| Şekil 2.14 | Homeomorf G ve H çizgeleri | 8 |
| Şekil 2.15 | Kelebek çizge ve K_4 tam çizgesi düzlemsel çizgelerdir | 9 |
| Şekil 2.16 | $K_{3,3}$ iki kümeli tam çizgesi ve K_5 tam çizgesi | 9 |
| Şekil 2.17 | Sierpinski çizgede komşu iki köşe nokta | 10 |
| Şekil 2.18 | $S(3, 3)$ ve $S(2, 4)$ Sierpinski çizgeleri | 10 |
| Şekil 2.19 | $S(2, 5)$ Sierpinski çizgesi | 11 |
| Şekil 2.20 | $S(n + 1, 3)$ Sierpinski çizgesi | 12 |
| Şekil 2.21 | $S(1, 3), S(2, 3)$ ve $S(3, 3)$ Sierpinski çizgeleri | 13 |
| Şekil 3.22 | 5 disk ve 3 direk için mükemmel ve mükemmel olmayan düzenli durumlar | 14 |
| Şekil 3.23 | H_3^1, H_3^2 ve H_3^3 Hanoi çizgeleri | 16 |
| Şekil 3.24 | STH bulmacasında uygun bir hareket | 16 |
| Şekil 4.25 | $S(1, 4)$ ve $S(2, 4)$ çizgelerinin düzlemde kenarları kesişmeyecek şekilde bir çizimi | 20 |
| Şekil 4.26 | $S(3, 4)$ çizgesinin düzlemde 12 kesişmeli bir çizimi | 21 |
| Şekil 4.27 | Yarıçapı 1 ve çapı 2 olan G çizgesi | 22 |
| Şekil 5.28 | Petersen çizgenin 3 renk boyaması ile 4 renk boyaması | 31 |
| Şekil 5.29 | K_5 tam çizgesi için 5 renk köşe boyama, 5 renk kenar boyama ve 5 renk total boyama örneği | 33 |
| Şekil 5.30 | K_3 tam çizgesi yardımıyla K_4 tam çizgesinin 3 renk kenar boyaması | 33 |
| Şekil 5.31 | K_5 tam çizgesi yardımıyla K_4 tam çizgesinin 5 renk total boyaması | 33 |

| | |
|--|----|
| Şekil 5.32 $S(2, 3)$ Sierpinski çizgesi ve bu çizgenin C_6 alt çizgesi | 38 |
| Şekil 5.33 $S(n, 3)$ Sierpinski çizgesinin bir $S(2, 3)$ alt çizgesi | 40 |

TABLolar DİZİNİ

| | | |
|-----------|---|----|
| Tablo 5.1 | K_5 tam çizgesinde komşuluk matrisi yardımıyla 5 renk köşe boyama, 5 renk kenar boyama ve 5 renk total boyama gösterimi . . . | 33 |
| Tablo 5.2 | $S(2, 4)$ Sierpinski çizgesinin komşuluk matrisi yardımıyla 4 renk kenar boyaması | 35 |
| Tablo 5.3 | Alice'in bazı ikinci hamleleri için Bob'un verdiği cevaplar . . . | 39 |
| Tablo 5.4 | Alice'in bazı üçüncü hamleleri için Bob'un verdiği cevaplar . . | 39 |
| Tablo 5.5 | Alice'in bazı üçüncü hamleleri için Bob'un verdiği cevaplar . . | 40 |
| Tablo 5.6 | Alice'in bazı ikinci hamleleri için Bob'un verdiği cevaplar . . . | 41 |

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

| | |
|----------------|--|
| $G = (V, E)$ | : Köşe noktaları kümesi V ve kenarlar kümesi E olan bir G çizgesi |
| $d(v)$ | : v köşesinin derecesi |
| $\Delta(G)$ | : G çizgesinin maksimum derecesi |
| $\delta(G)$ | : G çizgesinin minimum derecesi |
| $\chi(G)$ | : G çizgesinin kromatik sayısı |
| $\chi'(G)$ | : G çizgesinin kromatik indeksi |
| $\chi''(G)$ | : G çizgesinin total kromatik sayısı |
| K_n | : n köşe noktalı tam çizge |
| $K_{m,n}$ | : İki kümeli tam çizge |
| P_n | : n köşe noktalı yol çizge |
| $G \cong H$ | : G çizgesi H çizgesine izomorf |
| $cr(G)$ | : G çizgesinin kenarlarının kesişme sayısı |
| \mathbb{N} | : $\{1, 2, \dots\}$ kümesi |
| \mathbb{N}_0 | : $\{0, 1, \dots\}$ kümesi |
| $[k]$ | : $\{1, \dots, k\}$ kümesi |
| $[k]_0$ | : $\{0, \dots, k-1\}$ kümesi |
| $S(n, k)$ | : K_k tam çizgesinin n iterasyonu ile elde edilen Sierpinski çizge |
| $S(n, 3)$ | : K_3 tam çizgesinin n iterasyonu ile elde edilen Sierpinski çizge |
| H_3^n | : n diskli 3 direkli Hanoi çizge |
| STH | : n diskli k direkli değişmeli Hanoi Kuleleri bulmacası ile ilişkilendirilen çizge |
| $diam(G)$ | : G çizgesinin çapı |
| $rad(G)$ | : G çizgesinin yarıçapı |
| $C(G)$ | : G çizgesinin merkezi |
| $d(s, t)$ | : s ile t köşe noktası arasındaki uzaklık |
| $e(v)$ | : G çizgesinde bir v köşe noktasının dış merkezliği |
| $\chi_g(G)$ | : Bir G çizgesinin oyun kromatik sayısı |
| $col_g(G)$ | : Bir G çizgesinin oyun renk sayısı |

1 GİRİŞ

Çizge kuramının temelleri, 1736 yılında Leonard Euler tarafından, Königsberg'in 7 köprüsü problemine bulduğu yöntem sayesinde atılmıştır. Son yıllarda çok farklı disiplinleri kapsayan çizge kuramına olan ilgi hızla artmaktadır. Bu artışın sebebi günlük hayatta karşılaşılan karmaşık ve geniş kapsamlı birçok problemin çizge kuramı yardımıyla daha kolay ve anlaşılır hale gelmesi ve bu problemlerin çizge kuramının yöntemleri yardımıyla çözüme ulaştırılabilmesidir.

Literatürde çok farklı tipte çizge mevcuttur. Bu çalışmada, Sierpinski çizge ve özellikleri incelenmiştir. Sierpinski çizge ilk kez Klavzar ve Milutinovic tarafından tanıtılmıştır (Bkz.[7]). Çalışmanın ikinci bölümünde öncelikle çizge kuramının genel kavramlarına, temel teoremler ile gösterimlerine yer verilmiş ve Sierpinski çizgenin yanı sıra bazı özel çizgeler de tanıtılmıştır.

Hanoi Kuleleri bulmacası ile ilişkilendirilen Hanoi çizge, ilk kez Scorer tarafından [11] çalışmasında ele alınmış, [9] çalışmasında ise Guan ve Lu tarafından n diskli 3 direkli Hanoi çizge H_3^n ile gösterilmiştir. Çalışmanın üçüncü bölümünde $S(n, k)$ Sierpinski çizgesinin n diskli k direkli STH çizgesine ve $S(n, 3)$ Sierpinski çizgesinin n diskli 3 direkli H_3^n çizgesine izomorf olduğunu gösteren teoremlerin kanıtları verilmiştir (Bkz. [7]).

Sierpinski çizgelerin bazı temel özelliklerinin ele alındığı dördüncü bölümde öncelikle $n \geq 1$ ve $k \geq 3$ için Sierpinski çizgenin Hamilton çizge olduğu kanıtlanmıştır (Bkz. [7]). Daha sonra Sierpinski çizgelerin düzlemselliği incelenmiştir. Yine çalışmanın dördüncü bölümünde, Sierpinski çizgelerin Parisse tarafından verilen dış merkezlik, çap, yarıçap, merkez, köşe noktalar arasındaki uzaklık gibi çeşitli metrik özellikleri verilmiştir (Bkz. [10]).

Çalışmanın son bölümünde, [6] çalışmasında yer alan Sierpinski çizgeler için köşe boyama, kenar boyama ve total boyama problemleri ele alınmıştır. Bu boyama problemleri önce tam çizgelerde incelenmiş olup daha sonra tam çizgeler yardımı ile Sierpinski çizgelere aktarılmış ve Sierpinski çizgelerin kromatik sayısı, kromatik indeksi ve total kromatik sayısını veren teoremlerin ispatları sunulmuştur. Ayrıca ilk olarak Bodlaender iki kişilik sonlu bir oyun ile bir çizgenin oyun kromatik sayısını, Guan ve Zhu iki kişilik sonlu bir oyun ile çizgenin oyun renk sayısını tanımlamıştır. $S(n, k)$ çizgesinin oyun renk sayısı ve $S(n, 3)$ çizgesinin oyun kromatik sayısı verilmiştir (Bkz.[1, 2, 3]).

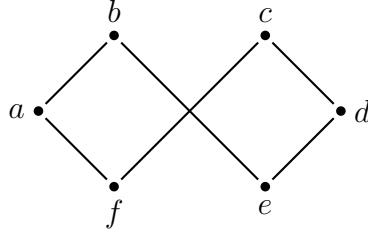
2 ÖN BİLGİLER

2.1 Çizge Kuramı

Bu bölümde çizgeler ile ilgili, sonraki bölümler için gerekli olan temel tanım, teorem ve gösterimler verilecektir.

Çizge tanımını aşağıdaki gibi verilebilir.

Tanım 2.1.1. Çizge, kabaca köşe noktalar ve bu köşe noktaların bazıları arasında çizilen kenarlardan oluşan bir yapıdır. Bir G çizgesi, elemanları köşe noktası olarak adlandırılan boş kümeden farklı, sonlu bir V kümesi ile elemanları kenar olarak adlandırılan V kümesinin iki elemanlı alt kümelerinden oluşan E kümesi yardımıyla tanımlanır. Bu durumda G çizgesi $G = (V, E)$ şeklinde yazılır.



Şekil 2.1: Bir çizge örneği

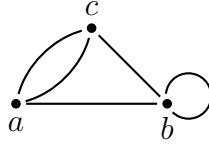
Şekil 2.1 ile verilen çizgeye göre, çizgenin köşe noktaları kümesi $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ ve kenarlar kümesi $E = \{ab, be, cd, de, af, cf\}$ olur.

Bir G çizgesinde $u, v \in V$ köşe noktaları için $uv \in E$ ise yani G çizgesinde u ile v köşe noktalarını birleştiren bir kenar var ise u ile v köşe noktalarına komşu köşe noktaları denir. Benzer olarak, eğer iki kenarın ortak bir köşe noktası varsa bu kenarlara da komşu kenarlar denir.

Tanım 2.1.2. İki köşe noktası arasında birden fazla kenar içermeyen ve bir köşe noktasından kendisine kenar bulundurmayan çizgelere basit çizge denir.

Tanım 2.1.3. Bir çizgenin iki köşe noktasını birleştiren birden fazla sayıda kenar olabileceği gibi bir köşe noktasının kendisinden kendisine de bir kenar çizilebilir. Bu tür çizgelere çoklu çizge (multigraph) denir (Bkz. Şekil 2.2).

Tanım 2.1.4. Bir $G = (V, E)$ çizgesinde bir $v \in V$ köşe noktasının derecesi diye v köşe noktasından çıkan kenar sayısına denir ve $d(v)$ ile gösterilir. Bir başka ifadeyle bir köşe noktasının derecesi, o noktaya komşu olan köşe noktalarının sayısına eşittir.



Şekil 2.2: Çoklu bir çizge örneği

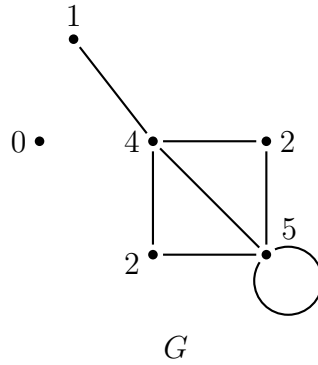
Açıktır ki, n tane köşe noktası olan bir basit çizgede alınan her v köşe noktasının derecesi

$$0 \leq d(v) \leq n - 1$$

eşitsizliğini sağlar.

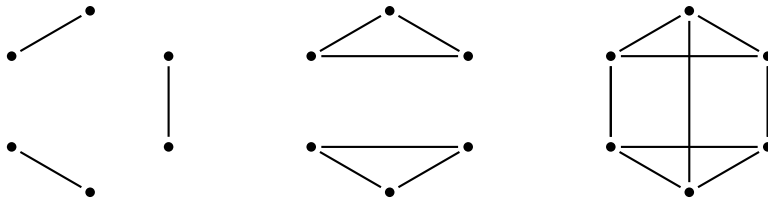
G çizgesinin maksimum derecesi ve minimum derecesi, çizgenin tüm köşe noktalarının maksimum ve minimum derecesidir ve sırasıyla $\Delta(G)$ ve $\delta(G)$ ile gösterilir.

Örneğin, Şekil 2.3 ile verilen çizgede, maksimum derece $\Delta(G) = 5$ ve minimum derece $\delta(G) = 0$ olur.



Şekil 2.3: Köşe noktaları dereceleri ile isimlendirilmiş bir G çizgesi

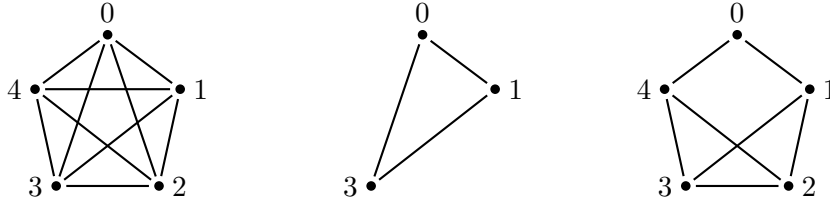
Tanım 2.1.5. Her köşe noktasının aynı sayıda komşuya sahip olduğu yani her köşe noktasının derecesinin aynı olduğu çizgelere regüler çizgeler denir. Köşe noktalarının derecesi k olan regüler çizgeye k -regüler çizge denir. (Bkz. Şekil 2.4)



Şekil 2.4: 1-regüler, 2-regüler ve 3-regüler çizgeler

Tanım 2.1.6. $G = (V, E)$ herhangi bir çizge olsun. $W \subseteq V$ ve $F \subseteq E$ olmak üzere, $H = (W, F)$ çizgesine, G çizgesinin bir alt çizgesi denir. G çizgesinin bütün köşelerini içeren fakat bazı kenarlarının silinmesiyle oluşan alt çizgeye G çizgesinin ürettiği alt çizge denir.

Aşağıda Şekil 2.5 ile verilen örnek K_5 tam çizgesi için sırasıyla bir alt çizge ve K_5 tam çizgesinin ürettiği alt çizge örneği verilmiştir.



Şekil 2.5: K_5 tam çizge, K_5 tam çizge için bir alt çizge ve K_5 tam çizgenin ürettiği alt çizge

Aşağıdaki teorem bir çizgede kenar sayısı ile köşe noktaların dereceleri arasındaki ilişkiyi vermektedir.

Teorem 2.1.7 (El Sıkışma Teoremi, [12]). Bir $G = (V, E)$ çizgesinde

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$

eşitliği geçerli olur.

Buradan her basit çizgenin çift sayıda tek dereceli köşe noktasına sahip olduğu sonucu çıkarılır.

Tanım 2.1.8. Bir çizgede tüm kenarları sayılarla etiketlenmiş olan çizgeye ağırlıklı çizge (weighted graph) denir.

Bir çizgenin, komşuluk matrisi (adjacency matrix) sonlu bir çizgeyi temsil etmek için kullanılan kare bir matristir ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.1.9. n tane köşe noktası olan yönsüz basit bir G çizgesinin komşuluk matrisi, girdileri 0, 1 sayılarından oluşan $n \times n$ boyutunda bir matristir. Eğer i ve j köşe noktaları bir kenar ile bağlıysa $a_{ij} = 1$ olur, i ve j köşe noktaları arasında kenar yoksa $a_{ij} = 0$ olur.

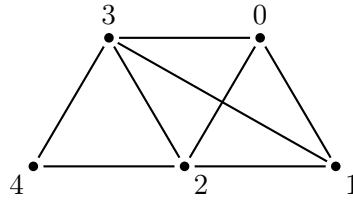
Komşuluk matrisinde ilgili satır veya sütundaki değerlerin toplamı alınacak olursa karşılık gelen köşe noktasının derecesi elde edilir.

Komşuluk matrisi aynı zamanda ağırlıklı çizgeleri temsil etmek için de kullanılır. $a_{ij} = w$ ise i köşe noktası ile j köşe noktası ağırlığı w olan kenar ile bağlıdır.

Örneğin,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

komşuluk matrisine karşılık gelen G çizgesi Şekil 2.6 ile verilmiştir.



Şekil 2.6: Komşuluk matrisi A olan G çizgesi

Tanım 2.1.10. Bir $G = (V, E)$ çizgesinde $v_0, v_1, \dots, v_k \in V$ olmak üzere

$$v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{k-1}v_k$$

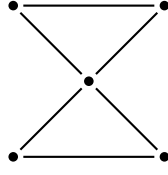
şeklinde ardışık kenarlar komşu ya da özdeş olacak biçimdeki kenarların sonlu dizisine G içinde v_0 ve v_k noktalarını birleştiren bir yolculuk (walk) denir. v_0 ve v_k köşe noktalarını birleştiren yolculuk, $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_{k-1} \rightarrow v_k$ şeklinde de gösterilir. Bir yolculuktaki kenar sayısına ise o yolculuğun uzunluğu denir.

Bir G çizgesinde verilen yolculuğun tüm kenarları farklı ise bu yolculuğa bir tur (trail) denir. Eğer turun tüm köşe noktaları da farklıysa o zaman bu tura bir yol (path) denir.

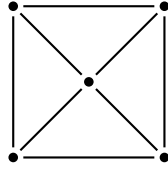
Başlangıç ve bitiş noktaları aynı olan yola ise döngü (cycle) denir. Eğer yolculuk ve turun başlangıç ve bitiş noktaları aynı ise bu yolculuk ve tura sırasıyla kapalı yolculuk ve kapalı tur denir.

Tanım 2.1.11. Bir çizge içerisinde çizgenin bütün kenarlarını bulunduran bir tur varsa çizgeye Euler çizgesi, bu tura da Euler turu denir. (Bkz. Şekil 2.7)

Tanım 2.1.12. Bir çizge içerisinde çizgenin tüm köşe noktalarını içeren döngü varsa çizgeye Hamilton çizge, bu döngüye ise Hamilton döngüsü denir. (Bkz. Şekil 2.8)



Şekil 2.7: Euler çizge

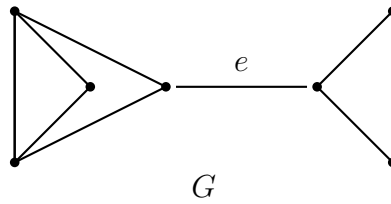


Şekil 2.8: Hamilton çizge

Tanım 2.1.13. Bir G çizgesinde alınan herhangi iki köşe noktası arasında bir yol bulunabiliyorsa bu G çizgesine tek parçadır ya da bağlantılıdır (connected) denir.

Örneğin, Şekil 2.2 ile verilen çizge tek parça iken Şekil 2.3 ile verilen çizge tek parça değildir.

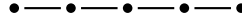
Tanım 2.1.14. Tek parça bir G çizgesinden bir e kenarı çıkarıldığında kalan çizge tek parça olmuyorsa bu e kenarına köprü (bridge) denir. (Bkz. Şekil 2.9)



Şekil 2.9: e kenarı G çizgesinde bir köprüdür.

Tanım 2.1.15. Döngü bulundurmeyen tek parça çizgeye ağaç denir. Bir ağacın herhangi iki köşe noktası birbirine tam olarak tek bir yolla bağlıdır.

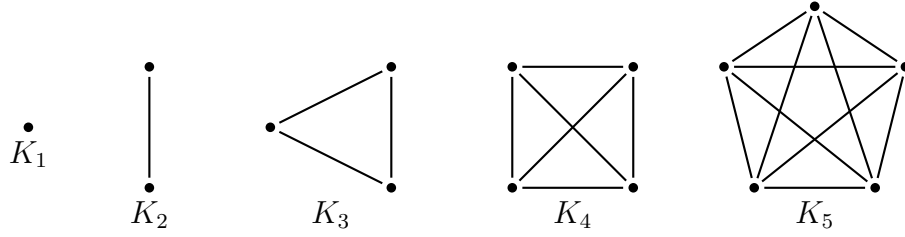
Tanım 2.1.16. İki köşe noktasının derecesi 1, diğer $(n - 2)$ tane köşe noktasının derecesi ise 2 olan bir ağaca n köşe noktalı yol çizge denir. Yol çizge P_n simgesi ile gösterilir (Bkz. Şekil 2.10).



P_5

Şekil 2.10: P_5 yol çizge

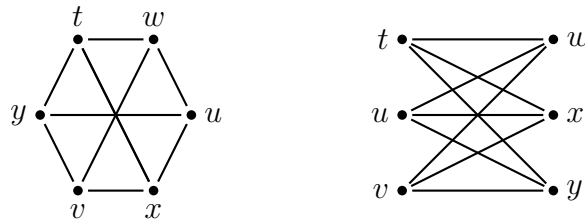
Tanım 2.1.17. Bir çizgenin herhangi iki noktası arasında bir kenar varsa bu çizgeye tam çizge denir. n tane köşe noktası olan bir tam çizge K_n simgesi ile gösterilir (Bkz. Şekil 2.11).



Şekil 2.11: K_1, K_2, K_3, K_4 ve K_5 tam çizgeleri

Tanım 2.1.18. Bir çizgenin köşe noktaları, aralarında kenar olmayacak şekilde A ve B gibi iki kümeye ayrılabilirse bu çizgeye iki kümeli çizge denir.

Eğer A kümesindeki her köşe noktası ile B kümesindeki her köşe noktası arasında bir kenar varsa bu çizgeye iki kümeli tam çizge denir ve $|A| = m$, $|B| = n$ ise bu çizge $K_{m,n}$ şeklinde gösterilir. $K_{m,n}$ iki kümeli tam çizgesinin $m \cdot n$ kenarı vardır (Bkz. Şekil 2.12).

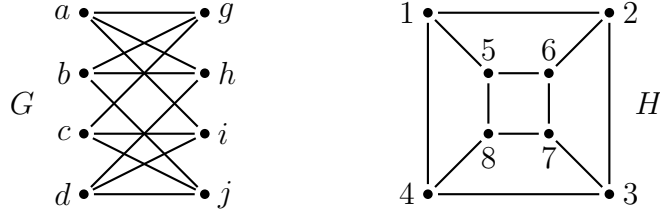


Şekil 2.12: Bir G çizgesinin iki kümeli $K_{3,3}$ tam çizge ile olan çizimi

Tanım 2.1.19. $G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ çizgeleri verilsin. Eğer

$$\begin{array}{l} a, b \in V_1 \text{ köşe noktaları, } G_1 \\ \text{çizgesinde komşu köşe noktalar} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \phi(a), \phi(b) \in V_2 \text{ köşe noktaları, } G_2 \\ \text{çizgesinde komşu köşe noktalar} \end{array}$$

olacak şekilde bir $\phi : V_1 \rightarrow V_2$ birebir dönüşümü varsa, G_1 ve G_2 çizgelerine izomorf çizgeler denir ve $G_1 \cong G_2$ ile gösterilir.



Şekil 2.13: İzomorfik G ve H çizgeleri

Örneğin, Şekil 2.13 ile verilen çizgeler için $f(a) = 1, f(b) = 6, f(c) = 8, f(d) = 3, f(g) = 5, f(h) = 2, f(i) = 4, f(j) = 7$ şeklinde tanımlanan f dönüşümü bir izomorfizm olur.

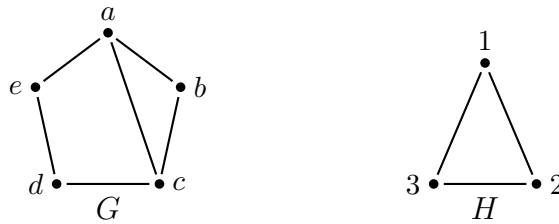
Tanım 2.1.20. G ve H gibi iki çizgenin homeomorf olmaları aşağıdaki gibi tanımlanır:

G ve H çizgelerinin köşe noktaları kümesi arasında bir

$$f : V(G) \rightarrow V(H)$$

örten dönüşüm vardır öyle ki, G çizgesinden alınan herhangi u ve v gibi iki köşe noktası G çizgesinde komşu köşe noktalar ise $f(u)$ ve $f(v)$ köşe noktaları da H çizgesinde komşu köşe noktalardır.

Örneğin, Şekil 2.14 ile verilen çizgeler için $f(a) = 1, f(b) = 2, f(c) = 3, f(d) = 2, f(e) = 3$ şeklinde tanımlanan f dönüşümü bir homeomorfizm olur.

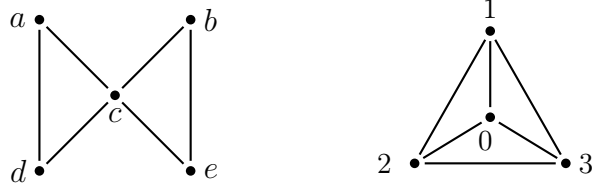


Şekil 2.14: Homeomorf G ve H çizgeleri

Tanım 2.1.21. Bir G çizgesinin kenarları sadece çizgenin köşe noktalarında kesişecek biçimde düzlemde çizilebiliyorsa G çizgesine düzlemsel çizge denir.

Örneğin, Şekil 2.15 ile verilen çizgeler düzlemsel çizgedir.

Euler formülü olarak bilinen aşağıdaki önemli teorem düzlemsel bir çizge düzlemde kenarları kesişmeyecek şekilde nasıl çizilirse çizilsin bu çizgenin düzlemde belirlediği bölgelerin sayısı ile çizgenin kenar ve köşe nokta sayısı arasındaki ilişkiyi vermektedir.

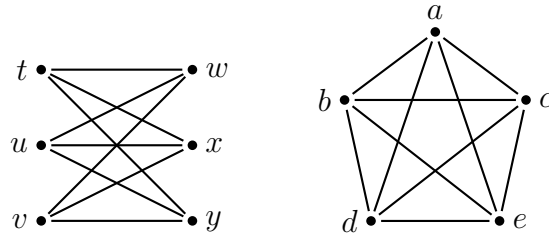


Şekil 2.15: Kelebek çizge ve K_4 tam çizgesi düzlemsel çizgelerdir

Teorem 2.1.22 (Euler Formülü [4]). *Tek parça ve düzlemsel bir çizge düzlemde kenarları kesişmeyecek şekilde çizildiğinde çizgenin düzlemde belirlediği bölge sayısı f , kenar sayısı e ve köşe nokta sayısı v ise $f - e + v = 2$ eşitliği geçerlidir.*

Euler formülünden aşağıdaki sonuç hemen elde edilebilir.

Sonuç 2.1.23. *İki kümeli $K_{3,3}$ tam çizgesi ve K_5 tam çizgesi düzlemsel değildir (Bkz. Şekil 2.16).*



Şekil 2.16: $K_{3,3}$ iki kümeli tam çizgesi ve K_5 tam çizgesi

Aşağıdaki teorem bir çizgenin düzlemsel olup olmadığının belirlenmesinde önemli bir araçtır.

Teorem 2.1.24 (Kuratowski Teoremi ([4])). *Sonlu bir G çizgesinin düzlemsel olması için gerek ve yeter koşul G çizgesinin K_5 veya $K_{3,3}$ çizgelerine homeomorf bir alt çizgesinin olmamasıdır.*

Tanım 2.1.25. *Bir G çizgesinin kesişme (crossing) sayısı $cr(G)$, G çizgesi düzlemde çizildiğinde kenarların kesişim sayısının en küçüğüdür. Örneğin, düzlemsel bir çizgede kesişme sayısı sıfırdır.*

2.2 Sierpinski Çizgeleri

$n, k \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere, $S(n, k)$ şeklinde gösterilen Sierpinski çizgenin köşe noktaları kümesi

$$V(S(n, k)) = \{0, 1, \dots, k-1\}^n$$

şeklinde olup, $u = u_1u_2 \dots u_n$ ve $v = v_1v_2 \dots v_n$ gibi iki farklı köşe noktasının komşu olması için gerek ve yeter koşul bir $h \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ için

1. $t < h$ iken $u_t = v_t$,
2. $u_h \neq v_h$,
3. $t > h$ iken $u_t = v_h$ ve $v_t = u_h$

olmasıdır.

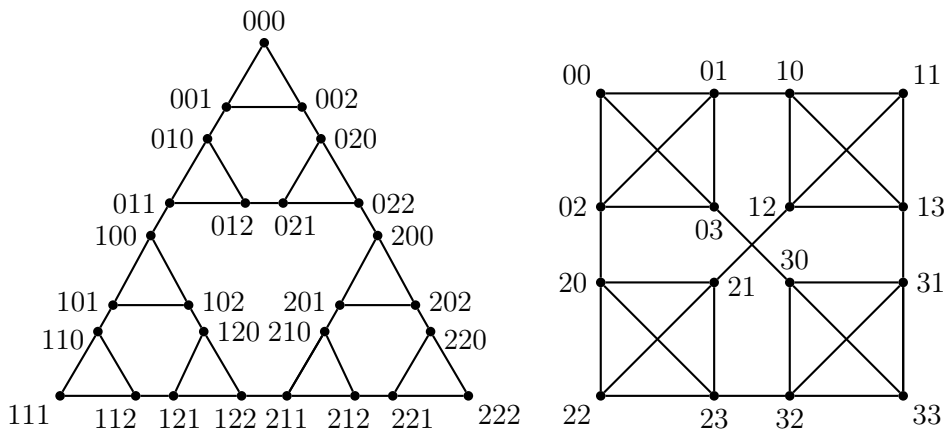
Örneğin, Şekil 2.17 ile Sierpinski çizgenin herhangi iki komşu köşe noktaları arasındaki ilişki gösterilmiştir.

$$u = \begin{array}{|c|c|c|} \hline w & x & y \dots y \\ \hline \end{array}$$

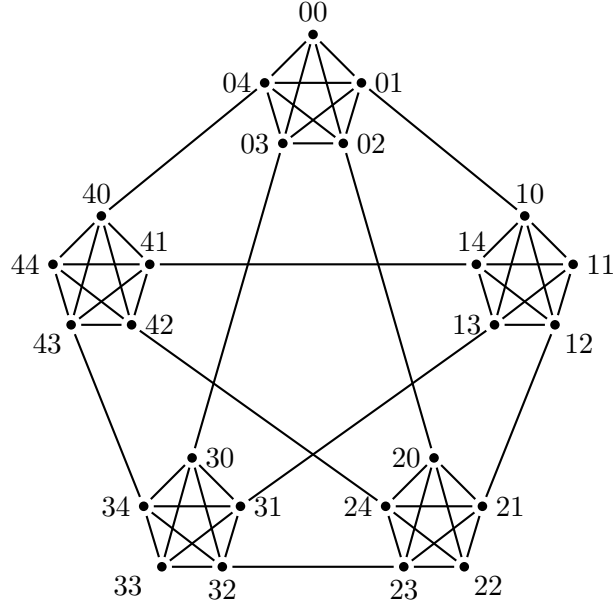
$$v = \begin{array}{|c|c|c|} \hline w & y & x \dots x \\ \hline \end{array}$$

Şekil 2.17: Sierpinski çizgede komşu iki köşe nokta

Köşeleri adlandırılmış $S(3, 3)$ ve $S(2, 4)$ Sierpinski çizgeleri Şekil 2.18 ile verilmiştir. Şekil 2.19 ile ise $S(2, 5)$ Sierpinski çizgesi verilmektedir.



Şekil 2.18: $S(3, 3)$ ve $S(2, 4)$ Sierpinski çizgeleri



Şekil 2.19: $S(2, 5)$ Sierpinski çizgesi

$S(n, k)$ Sierpinski çizgesinde herhangi bir köşe noktası $u = u_1 \dots u_n$ şeklinde gösterilir. Tanımı gereğince Sierpinski çizgelerin köşe noktalarının sayısı

$$|V(S(n, k))| = |\{0, 1, \dots, k-1\}^n| = k^n \quad (1)$$

olur. Köşe noktaları kümesinde $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ olmak üzere $ii \dots i$ formundaki köşe noktalar ekstrem köşe noktası, diğer köşe noktalar ise inner köşe noktası olarak adlandırılır. Ekstrem köşe noktalarının sayısı k tane olup bu köşe noktalarının derecesi $k-1$ olur. Inner köşe noktalarının sayısı $k^n - k$ tane olup bu köşe noktalarının derecesi ise k olur. Buradan el sıkışma teoremine göre $S(n, k)$ çizgesinin kenar sayısı

$$|E(S(n, k))| = \frac{1}{2} (k(k-1) + (k^n - k)k) = \frac{k}{2} (k^n - 1) \quad (2)$$

elde edilir.

$n \in \mathbb{N}$ için $S(n, 1)$ Sierpinski çizge bir köşe noktalı K_1 tam çizgeye ve $S(n, 2)$ Sierpinski çizgesi 2^n köşe noktalı P_{2^n} yol çizgeye izomorftur. $k \geq 1$ olmak üzere $S(1, k)$ Sierpinski çizgesi, k köşe noktalı K_k tam çizgesine izomorftur.

$n \geq 2$ ve $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ olmak üzere $S(n, k)$ Sierpinski çizgesinin $iv_2 \dots v_n$ formundaki köşe noktalarından oluşan alt çizge $iS(n-1, k)$ şeklinde gösterilir. Bu alt çizgeler alt kopya olarak da adlandırılabilir.

Açıktır ki, $S(n, k)$ Sierpinski çizgesinin herhangi iki alt kopyası yalnız bir kenar ile bağlıdır. Bu tür kenarların sayısı $\binom{k}{2}$ kadardır.

$$|E(S(1, k))| = \binom{k}{2}, \quad |E(S(n, k))| = \frac{k}{2} (k^n - 1) \text{ ve } S(1, k) \cong K_k$$

olduğundan $S(n, k)$ çizgesinin kenar sayısı

$$|E(S(n+1, k))| = k|E(S(n, k))| + \binom{k}{2}$$

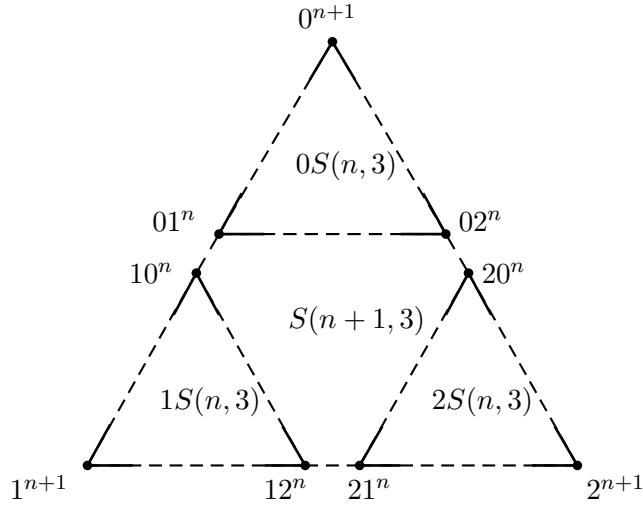
rekursif bağıntısıyla da verilebilir.

Sierpinski çizgesinin kenar kümesinin rekursif tanımı aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} E(S(0, k)) &= \emptyset \\ E(S(1, k)) &:= \left\{ \{i, j\} \mid i, j \in [k]_0, i \neq j \right\} \end{aligned}$$

ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} E(S(n+1, k)) &:= \left\{ \{iu, iv\} \mid i \in [k]_0, \{uv\} \in S(n, k) \right\} \\ &\cup \left\{ \{ij \dots j, ji \dots i\} \subset \{0, 1, \dots, k-1\}^n \mid i, j \in [k]_0, i \neq j \right\} \end{aligned}$$



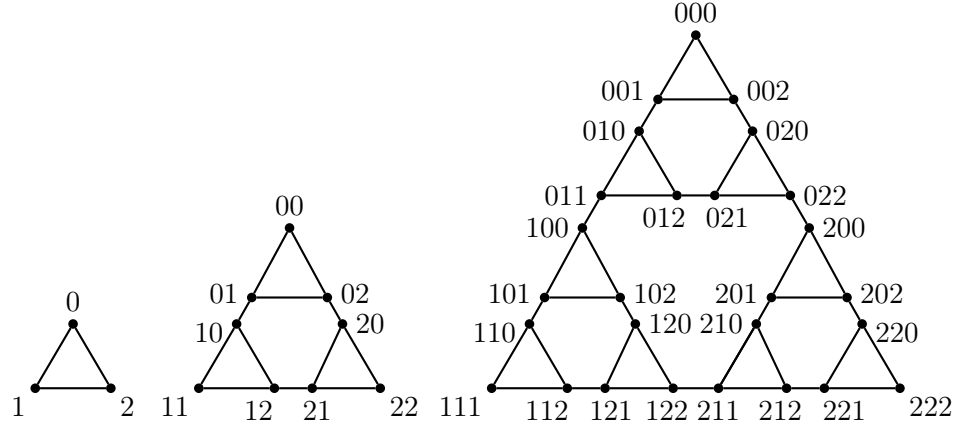
Şekil 2.20: $S(n+1, 3)$ Sierpinski çizgesi

$k \geq 3$ için $S(n, 3)$ Sierpinski çizgelerinin kenar kümesinin rekursif tanımı

$$\begin{aligned} E(S(0, 3)) &= \emptyset \\ E(S(n+1, 3)) &= \left\{ \{ir, is\} \mid i \in \{0, 1, 2\}, \{r, s\} \in E(S(n, 3)) \right\} \\ &\cup \left\{ \{ij^n, ji^n\} \mid i, j \in \{0, 1, 2\}, i \neq j \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

olup, çizge Şekil 2.20 ile verilmiştir.

$S(n, 3)$ Sierpinski çizgenin bu tanıma göre $n = 1, 2, 3$ için elde edilen çizgeler Şekil 2.21 ile gösterilmiştir.



Şekil 2.21: $S(1,3)$, $S(2,3)$ ve $S(3,3)$ Sierpinski çizgeleri

Ayrıca $S(n,3)$ Sierpinski çizgesi, 3 çubuklu n diskli H_3^n Hanoi çizgesine ve $n \geq 1$ ve $k \geq 1$ için $S(n,k)$ Sierpinski çizgesi, n diskli k direkli STH çizgesine izomorftur. Bir sonraki bölümde bu çizgelerin izomorf oldukları gösterilecektir.

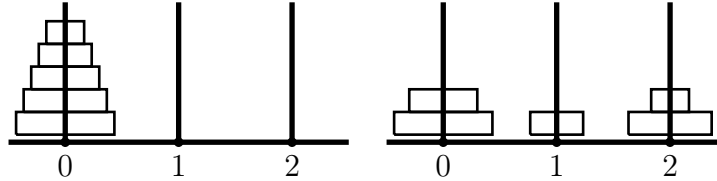
3 HANOI VE SIERPINSKI ÇİZGELER

3.1 Hanoi Çizgeleri

Fransız matematikçi Edouard Lucas tarafından 1883 yılında ortaya atılan Hanoi Kuleleri bulmacası, boyutları farklı olan belirli bir sayıda diskler ile bu disklerin yerleştirilebildiği 3 adet direkten oluşmaktadır. Bu diskler aşağıda verilen kurallar gözetilerek başka bir direğe aktarılabilir.

1. Bulmaca en küçük disk yukarıda olacak şekilde, belli bir direkte disklerin tamamı küçükten büyüğe dizilmiş olarak başlar ve tüm diskler başlangıç direğinden farklı bir direğe başlangıç durumunda dizildiği gibi taşındığı zaman biter.
2. Küçük bir diskin üzerine büyük bir disk yerleştirilemez.
3. Aynı anda sadece tek bir disk taşınabilir.

Bulmacanın herhangi bir anında disklerin direkler üzerindeki dağılımına (büyük disk küçük diskin üzerinde olmayacak şekilde) bulmacanın düzenli durumu (regular state) denir. Tüm disklerin aynı direkte olduğu düzenli durum bir mükemmel durum (perfect state) olur.



Şekil 3.22: 5 disk ve 3 direk için mükemmel ve mükemmel olmayan düzenli durumlar

Direkleri 0, 1, 2 ile adlandıralım. Diskler de çaplarının artan sırasına göre 1' den n 'ye adlandırılınsın. Her bir düzenli durum $s = s_n \dots s_1 \in \{0, 1, 2\}^n$ gibi tek bir eleman ile temsil edilebilir. Burada s_d , d diskinin olduğu direği gösterir. Örneğin Şekil 3.22 ile verilen şekilde mükemmel durum 00000 (0^5) ile mükemmel olmayan düzenli durum ise 02012 ile temsil edilir.

n diskli Hanoi kulelerinin bütün düzenli durumlarının $\{0, 1, 2\}^n$ ile bağdaştırıldığı köşe noktaları kümesinden alınan iki köşe noktası (yani iki düzenli durum) bir diskin uygun hareketiyle birbirinden elde edilebiliyorsa bu iki köşe noktası komşudur. Bu

şekilde tanımlanan çizgeye 3^n köşeli noktalı Hanoi çizge denir. Bu çizge ilk kez [11] çalışmasında ele alınmış ve [9] çalışmasında n diskli 3 direkli Hanoi çizge H_3^n ile gösterilmiştir.

Hanoi çizgenin köşe noktaları kümesi

$$V(H_3^n) = \{0, 1, 2\}^n$$

Hanoi kuleleri bulmacasının bütün düzenli durumlarının oluşturduğu kümedir. Köşe noktaları kümesinde $i \in \{0, 1, 2\}$ olmak üzere iii formundaki köşe noktası ekstrem köşe noktası olarak adlandırılır. Ekstrem köşe noktalar oyundaki bir mükemmel durumu temsil eder.

Hanoi çizgenin kenar kümesi de Hanoi kuleleri bulmacasına göre aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

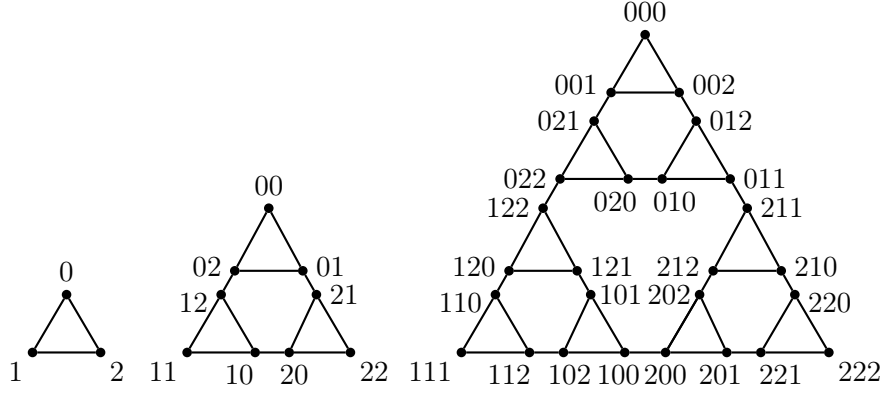
$$E(H_3^n) = \left\{ \{ \underline{s}i(3-i-j)^{d-1}, \underline{s}j(3-i-j)^{d-1} \} \mid i, j \in \{0, 1, 2\}, \right. \\ \left. i \neq j, d \in \{1, 2, \dots, n\}, \underline{s} \in \{0, 1, 2\}^{n-d} \right\}$$

Burada her kenar d diskinin daha büyük disklerin \underline{s} dağılımından (yani dipteki $n-d$ diskten) bağımsız i ve j direği arasındaki uygun hareketini temsil etmektedir. Buradan H_3^1 Hanoi çizge ile 3 köşeli K_3 tam çizgenin izomorf olduğu Hanoi çizgenin tanımından açıkça görülür.

Hanoi çizgelerin kenarlarının rekursif tanımı aşağıda verilmiştir.

$$E(H_3^0) = \emptyset \text{ ve } \forall n \in \mathbb{N} \text{ için,} \\ E(H_3^{n+1}) = \left\{ \{ir, is\} \mid i \in \{0, 1, 2\}, \{r, s\} \in E(H_3^n) \right\} \\ \cup \left\{ \{i(3-i-j)^n, j(3-i-j)^n\} \mid i, j \in \{0, 1, 2\}, i \neq j \right\} \quad (4)$$

Köşe noktaları adlandırılmış H_3^1 , H_3^2 ve H_3^3 Hanoi çizgeleri Şekil 3.23 ile verilmiştir.

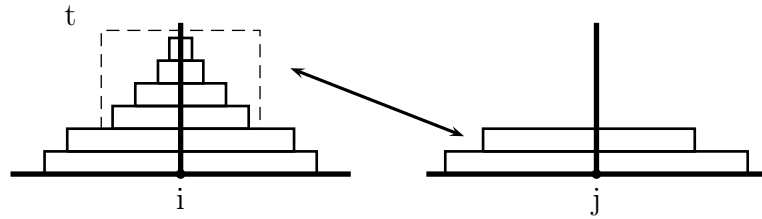


Şekil 3.23: H_3^1 , H_3^2 ve H_3^3 Hanoi çizgeleri

3.2 Değişmeli Hanoi Çizgeleri

Değişmeli Hanoi Kuleleri bulmacası (Switching Tower of Hanoi Puzzle) olarak adlandırılan, Hanoi Kuleleri bulmacasının n diskli k direkli kuralları aşağıdaki gibi değiştirilen bir versiyonu ele alınsın. Bu versiyonda düzenli durum ve mükemmel durum klasik bulmacadaki gibidir. Ancak bu bulmacada uygun hareketler aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

1. i direğinde en üstteki disklerin ($t \geq 0$) en küçük t disk olduğu düzenli durumda olduğumuzu varsayalım. Eğer i direğinden farklı bir j direğinde ($t + 1$). küçük disk varsa, i direğindeki t tane disk ile j direğindeki ($t + 1$). küçük diskin yer değiştirilmesine izin verilsin (Bkz. Şekil 3.24).
2. $t = 0$ ise en küçük diskin herhangi bir hareketi uygun harekettir.



Şekil 3.24: *STH* bulmacasında uygun bir hareket

Değiştirme operasyonu terslenebilir ve düzenli durumu koruduğundan Değişmeli Hanoi Kuleleri bulmacası çizgesi yönsüz olarak tanımlanabilir. Bu çizgenin köşe noktaları tüm düzenli durumları belirtir. Eğer bir düzenli durumdan bir diğer düzenli

duruma uygun bir hareket ile geçebiliyorsa, bu düzenli durumları belirten iki köşe noktası komşudur. Değişmeli Hanoi Kuleleri bulmacasının çizgesi STH ile gösterilir.

[7] çalışmasında kanıtlanan $S(n, k)$ Sierpinski çizgesinin n diskli k direkli STH çizgesine ve $S(n, 3)$ Sierpinski çizgesinin n diskli 3 direkli H_3^n çizgesine izomorf olduğunu gösteren teoremler aşağıda verilmiştir.

Teorem 3.2.1 ([7]). $n \geq 1$ ve $k \geq 1$ için n diskli k direkli STH çizgesi $S(n, k)$ Sierpinski çizgesine izomorftur.

Kanıt. j . büyük disk h direğinde anlamına gelen $i_j = h$ girdisi yorumuna göre

$$i_1 i_2 \dots i_n \in \{0, 1, \dots, k-1\}^n$$

dizileri ile STH çizgesinin düzenli durumları birebir olarak örtüşür. $S(n, k)$ Sierpinski çizgenin tanımından kolayca görülebilir ki, STH çizgesinin herhangi iki köşe noktasının komşu olması için gerek ve yeter koşul, bulmacanın düzenli durumlarına karşılık gelen köşe noktaları dizilerinin $S(n, k)$ Sierpinski çizgesinde komşu olmasıdır.

Oyundaki değiştirme hareketi Sierpinski çizgede alt kopyaları birleştiren yani $ij \dots j$ ile $ji \dots i$ köşe noktalarını birleştiren kenarı temsil eder. \square

Teorem 3.2.2 ([7]). Herhangi bir $n \geq 1$ için, $S(n, 3)$ Sierpinski çizgesi H_3^n Hanoi çizgesine izomorftur.

Kanıt. H_3^n Hanoi çizgenin (4) ile verilen rekursif tanımı ile $S(n, 3)$ Sierpinski çizgenin (3) ile verilen rekursif tanımı $S(n, 3)$ çizgesinden H_3^n çizgesine bir izomorfizm tanımlanmasına olanak verir.

H_3^n Hanoi çizgelerinin köşe noktaları

$$i_1 i_2 \dots i_n \in \{0, 1, 2\}^n$$

şeklindeki dizilerdir öyle ki, $i_j = h$ girdisi j . küçük disk h direğinde anlamına gelir. n üzerinden tümevarımla

$$f_n : S(n, 3) \rightarrow H_3^n$$

izomorfizmaları aşağıdaki gibi inşa edilebilir:

$n = 1$ için her iki çizge de 3 köşeli tam çizgedir.

$n \geq 2$ olsun. $V(S(n, 3))$ köşe noktaları kümesinin V_0, V_1, V_2 kümelerine parçalanışı düşünölsün öyle ki V_i kümesi $i = 0, 1, 2$ olmak üzere i ile başlayan tüm köşe noktalarını içeren küme olsun. Herhangi $i \neq j$ için V_i ve V_j arasında yalnız bir

kenar vardır. Bu kenar $ij\dots j$ ile $ji\dots i$ köşe noktaları arasındaki kenardır. Bu kenar köprü kenar olarak adlandırılır.

Benzer yolla $V(H_3^n)$ köşe noktaları kümesinin W_0, W_1, W_2 kümelerine parçalanışı düşünülün öyle ki W_i kümesi $i = 0, 1, 2$ olmak üzere i ile biten tüm köşe noktalarını içeren küme olsun. Herhangi $i \neq j$ için W_i ve W_j arasında yalnız bir köprü kenar vardır. Bu kenar $k\dots kj$ ile $k\dots ki$ ($k \neq i, k \neq j$) köşe noktaları arasındaki kenardır.

Buradan f_{n-1} ile H_3^{n-1} çizgesinin uygun bir otomorfizmasını kullanarak ($\{0, 1, 2\}$ kümesinin bir permütasyonu ile belirtilmiş) köprü kenar uçlarının köprü kenarların uçlarına karşılık gelecek şekilde eşlenen, V_i kümesinden W_i kümesine örten izomorfik bir dönüşüm elde edilebilir. Üç dönüşüm dikkate alınarak $V(S(n, 3))$ kümesinden $V(H_3^n)$ kümesine istenen f_n dönüşümünü elde edilir. \square

4 SIERPINSKI ÇİZGELERİN BAZI TEMEL ÖZELLİKLERİ

Bu kesimde Sierpinski çizgelerin Hamilton çizge olduğu kanıtlandıktan sonra, Sierpinski çizgelerin düzlemselliği ile ilgili sonuçlar verilecektir. Daha sonra Sierpinski çizgelerin dış merkezliği, çapı, yarıçapı, merkezi, köşe noktalar arasındaki uzaklıklar gibi metrik özellikleri sunulacaktır.

4.1 Sierpinski Çizgelerin Hamiltonluk Özelliği

Önerme 4.1.1 ([7]). $n \geq 1$ ve $k \geq 3$ için $S(n, k)$ Sierpinski çizgesi Hamilton çizgedir.

Kanıt. $n = 1$ için $S(1, k) \cong K_k$ olduğundan çizgenin Hamilton çizge olduğu açıktır.

$n \geq 2$ olsun. P_1 yolu, $1kk \dots k$ köşe noktası ile $122 \dots 2$ köşe noktalarını birleştiren bir yol, $i = 2, 3, \dots, k - 1$ olmak üzere P_i yolu

$$i(i-1) \dots (i-1) \quad \text{ve} \quad i(i+1) \dots (i+1)$$

köşe noktaları arasında bir yol ve P_k yolu ise

$$k(k-1) \dots (k-1) \quad \text{ve} \quad k1 \dots 1$$

köşe noktaları arasında bir yol olmak üzere P_1, P_2, \dots, P_k yollarının dizisini ele alalım. $i = 1, 2, \dots, k$ olmak üzere bu şekilde inşa edilen P_i yolları i ile başlayan tüm köşe noktalarını içerir. Bu iddiayı kanıtlamak için herhangi i, j ve g için $j \neq g$ olmak üzere $ij \dots j$ ve $ig \dots g$ köşe noktaları arasında i ile başlayan tüm köşe noktalarından geçen bir yol olduğunu göstermek yeterlidir.

Genelliği bozmaksızın $j = 1$ ve $g = k$ olduğu varsayalım. Tümevarım hipotezinden 1 ile başlayan tüm köşe noktalarından geçen $1 \dots 1$ köşe noktasından $12 \dots 2$ köşe noktasına bir yol bulunabilir. Bu yola $12 \dots 2$ ve $21 \dots 1$ köşe noktaları arasındaki kenar eklensin. Aynı argümanla 2 ile başlayan tüm köşe noktalarından geçen $21 \dots 1$ köşe noktası ile $23 \dots 3$ köşe noktası arasında bir yol bulunabilir. Bu prosedür $(k-1)k \dots k$ köşesine kadar devam ettirilsin. $(k-1)k \dots k$ köşe noktası ile $k(k-1) \dots (k-1)$ köşe noktası arasındaki kenar da eklensin. $k(k-1) \dots (k-1)$ köşe noktası ile $k \dots k$ köşe noktası arasında k ile başlayan tüm köşe noktalarından geçen bir yol elde edilir. Sonuç olarak

$$P_1, P_2, \dots, P_k$$

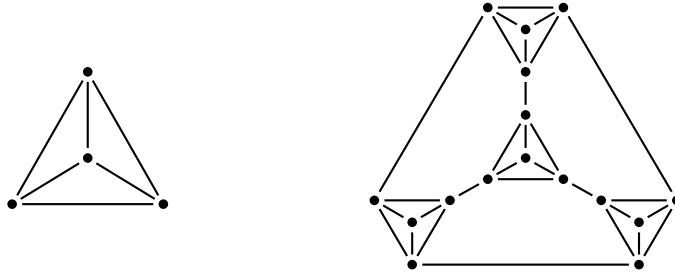
formunda oluşturulan yollar sırayla takip edildiğinde bir Hamilton döngüsü elde edilir. Kanıt burada biter. \square

4.2 Sierpinski Çizgelerin Düzlemsellik Özelliği

$S(n, 1)$ çizgesi 1 köşeli K_1 tam çizgesine izomorf, $S(n, 2)$ çizgeleri 2^n köşeli P_{2^n} yol çizgelerine izomorf olup K_1 ve P_{2^n} çizgelerinin düzlemselliğinden $S(n, 1)$ ve $S(n, 2)$ çizgelerinin de düzlemsel olduğu sonucu hemen elde edilir.

$S(n, 3)$ çizgelerinin düzlemselliği Şekil 2.21 ve Şekil 2.20 ile açıkça görülmektedir.

$n = 1$ ve $k = 4$ iken $S(1, 4)$ Sierpinski çizgesi K_4 tam çizgesine izomorf olduğundan $S(1, 4)$ çizgesinin de düzlemsel olduğu elde edilir. Diğer taraftan, $n = 2$ ve $k = 4$ iken $S(2, 4)$ çizgenin düzlemsel olduğu Şekil 4.25 yardımıyla görülmektedir.



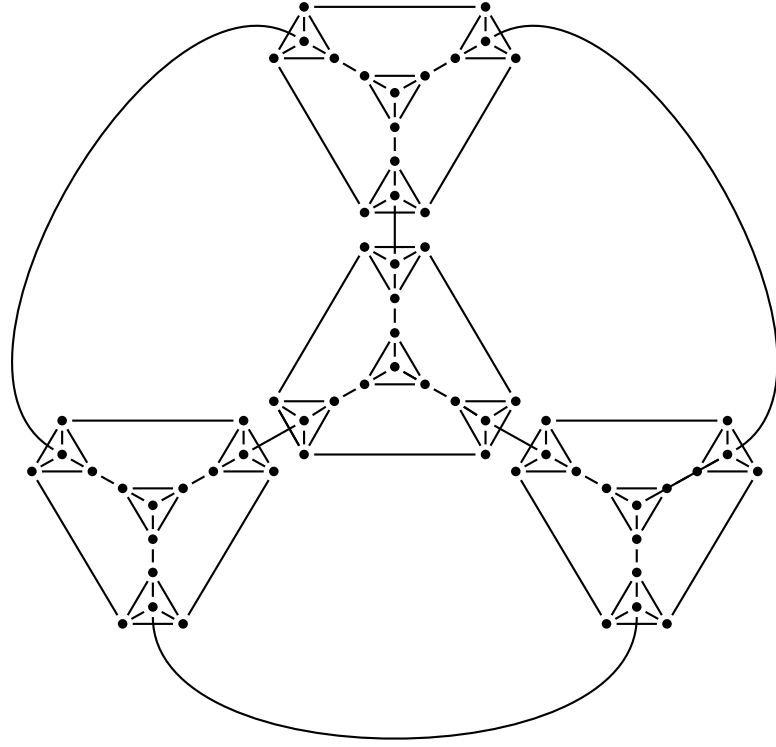
Şekil 4.25: $S(1, 4)$ ve $S(2, 4)$ çizgelerinin düzlemde kenarları kesişmeyecek şekilde bir çizimi

$n \geq 3$ için $S(n, 4)$ çizgeleri de düzlemsel değildir. Gerçekten de $S(n, 4)$ çizgelerin crossing sayısı [8] çalışmasında $n \geq 3$ için

$$\frac{3}{16}4^n \leq cr(S(n, 4)) \leq \frac{1}{3}4^n - \frac{4}{3}(3n - 2)$$

olarak hesaplanmıştır. Özel olarak, $cr(S(3, 4)) = 12$ olduğundan bu çizge düzlemsel olamaz. $S(3, 4)$ çizgesinin düzlemde sadece 12 kesişme ile çizilmiş hali Şekil 4.26 ile verilmiştir.

Kuratowski teoreminden bir çizgenin K_5 ve $K_{3,3}$ çizgelerine homeomorf bir alt çizgesi varsa bu çizge düzlemsel değildir. O halde $k \geq 5$ için $S(n, k)$ Sierpinski çizgeleri düzlemsel değildir.



Şekil 4.26: $S(3,4)$ çizgesinin düzlemde 12 kesişmeli bir çizimi

4.3 Sierpinski Çizgelerin Bazı Metrik Özellikleri

Bu bölümde Sierpinski çizgelerin Parisse tarafından verilen çeşitli metrik özellikleri ele alınmıştır (Bkz. [10]).

G tek parça basit bir çizge olsun. $V(G)$ köşe noktalar kümesindeki her u ve v köşesi için u ile v arasındaki uzaklık, u ve v köşe noktalarını birleştiren tüm yolların kenar sayılarının minimumudur ve bu uzaklık $d(u, v)$ ile gösterilir.

Bir $v \in V(G)$ köşe noktasının dış merkezliği,

$$e(v) := \max\{d(u, v) | u \in V(G)\}$$

şeklinde tanımlanır. Yani v köşe noktasının dış merkezliği çizgede v köşe noktasından en uzak köşe noktaya (ya da köşe noktalarına) olan uzaklıktır.

Bir G çizgesinin yarıçapı

$$\text{rad}(G) := \min\{e(v) | v \in V(G)\}$$

şeklinde, çapı ise

$$\begin{aligned} \text{diam}(G) &:= \max\{e(v) | v \in V(G)\} \\ &:= \max\{d(u, v) | u, v \in V(G)\} \end{aligned}$$

olarak tanımlanır. Eğer

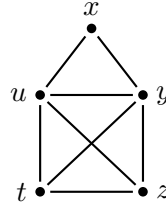
$$e(v) = \text{rad}(G)$$

ise v köşe noktasına G çizgesinin merkezil köşe noktası denir. Tüm merkezil köşe noktaları tarafından belirlenmiş

$$C(G) := \{v \in V(G) | e(v) = \text{rad}(G)\}$$

köşe noktalar kümesine G çizgesinin merkezi denir.

Örneğin, Şekil 4.27 ile verilen G çizgesinde x, y, z, t, u köşe noktaları için dış merkezlikler sırasıyla $e(x) = 2, e(y) = 1, e(z) = 2, e(t) = 2, e(u) = 1$ olarak hesaplanmıştır. Çizgenin yarıçapı ve çapı sırasıyla $\text{rad}(G) = 1$ ve $\text{diam}(G) = 2$ olur. Buradan u ve y köşe noktalarının merkezil köşe noktalar olduğu görülür.



Şekil 4.27: Yarıçapı 1 ve çapı 2 olan G çizgesi

Önerme 4.3.1 ([5]). $j \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ olmak üzere keyfi bir j^n ekstrem köşe noktası ve $s \in V(S(n, k))$ köşe noktası arasındaki uzaklık

$$d(s, j^n) = \sum_{d=1}^n (s_d \neq j)(2^{d-1})$$

olup s ile j^n arasındaki en kısa yol bir tanedir. Özel olarak $j \neq i$ için $d(i^n, j^n) = 2^n - 1$ olur.

Kanıt. Kanıtı n üzerinden tümevarımla yapalım. $n = 1$ için s, K_k tam çizgesinin keyfi bir köşe noktası olsun. Bu s köşesi ile j ekstrem köşe noktası arasındaki uzaklık

$$d(s, j) = (s \neq j)(2^{1-1}) = \begin{cases} 0 & , i = j \\ 1 & , i \neq j \end{cases}$$

şeklinde elde edilir.

n için ifade doğru olsun. $n + 1$ için de doğru olduğunu gösterelim. $S(n + 1, k)$ çizgesinden $s = s_{n+1}\tilde{s}$ keyfi köşe noktasını alalım.

Eğer $s_{n+1} = j$ ise \tilde{s} köşe noktasından j^n ekstrem köşe noktasına $S(n, k)$ çizgesindeki en kısa yol kullanılıp yoldaki her bir köşe noktasının önüne j eklenerek $S(n + 1, k)$ çizgesinde s ile j^{n+1} arasındaki en kısa yol elde edilmiş olur. Buradan

$$d(s, j^{n+1}) = \sum_{d=1}^{n+1} (s_d \neq j)(2^{d-1})$$

olur.

Eğer $s_{n+1} \neq j$ ise s köşe noktasından j^{n+1} ekstrem köşe noktasına giderken önce $s = s_{n+1}\tilde{s}$ köşe noktasından $s_{n+1}j^n$ köşe noktasına en kısa yoldan gidildikten sonra $j s_{n+1}^n$ köşe noktasına ekstra bir kenar ile ulaşalım. Son olarak da buradan j^{n+1} ekstrem köşe noktasına ulaşılır. Bunlar birleştirilecek olursa,

$$d(s, j^{n+1}) \leq \sum_{d=1}^{n+1} (s_d \neq j)(2^{d-1})$$

olur. Şimdi bu şekildeki yolların en kısa yol olduğunu gösterelim. Açıktır ki, s köşe noktasından j^{n+1} ekstrem köşe noktasına giden en kısa yol, $s_{n+1} \neq l \neq j$ olmak üzere $lS(n, k)$ alt çizgesine uğramaz. Eğer en kısa yol $lS(n, k)$ alt çizgesine uğrasaydı bu yol için

- bu alt çizgedeki li^n köşe noktasına ulaşmak için bir kenar ($l \neq i \neq j$),
- li^n köşe noktasından lj^n köşe noktasına bir yol,
- $\{lj^n, jl^n\}$ kenarı,
- jl^n köşe noktasından j^{n+1} ekstrem köşe noktasına bir yol

gerekirdi. Tümevarım hipotezinden bu yolun uzunluğu da en az

$$1 + (2^n - 1) + 1 + (2^n - 1) = 2^{n+1}$$

olurdu. Bu yolun uzunluğu yukarıda inşa edilen yolun uzunluğundan daha fazla olduğundan bu yol optimal olamaz. Böylece kanıt biter. \square

Önerme 4.3.1 yardımıyla aşağıdaki sonuçlar hemen elde edilir.

Sonuç 4.3.2 ([10]). $v := lv_2 \dots v_n$, $w := lw_2 \dots w_n$ $S(n, k)$ çizgesinin köşe noktaları ve $l \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ olsun. $n \geq 1$ için

$$d(lv_2 \dots v_n, lw_2 \dots w_n) = d(v_2 \dots v_n, w_2 \dots w_n)$$

olur.

Sonuç 4.3.3 ([10]). Her $n \in \mathbb{N}$ ve $k > 1$ için $\text{diam}(S(n, k)) = 2^n - 1$ olur.

Önerme 4.3.4 ([10]). $n, k \in \mathbb{N}$ ve $v \in S(n, k)$ olsun. v köşesinin dış merkezliği

$$e(v) := \max\{d(v, ii \dots i) \mid i \in \{0, 1, \dots, k-1\}\}$$

olarak hesaplanır.

Kanıt. Keyfi bir $v \in S(n, k)$ alalım. Kanıtı tamamlamak için her $w \in S(n, k)$ köşe noktası için $S(n, k)$ çizgesinin

$$d(v, w) \leq d(v, ii \dots i)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $ii \dots i$ ekstrem köşe noktası olduğu gösterilmelidir. Kanıtı n üzerinden tümevarım ile yapalım.

$n = 1$ durumu açıktır. $S(1, k) \cong K_k$ olduğundan her bir $v \in S(n, k)$ köşe noktası için herhangi bir $w \in S(n, k)$ köşe noktası ile arasındaki uzaklık 1 olur. $S(1, k)$ çizgesinde her köşe noktası ekstrem köşe noktası olduğundan, her bir v köşe noktası ile ekstrem köşe noktası arasındaki uzaklık 1 olacağından $d(v, w) \leq d(v, i)$ eşitsizliği sağlanır.

$n \geq 1$ için varsayım doğru olsun. $S(n + 1, k)$ çizgesinden $v := v_1 v_2 \dots v_{n+1}$ ve $w := w_1 w_2 \dots w_{n+1}$ gibi keyfi iki köşe noktası alalım. Aldığımız bu v ve w köşe noktaları $v_1 = w_1$ ise aynı alt kopyadadır, $v_1 \neq w_1$ ise farklı alt kopyadadır.

$v_1 = w_1$ ise Sonuç 4.3.2 kullanılarak v ile w arasındaki uzaklık

$$\begin{aligned} d(v, w) &= d(v_1 v_2 \dots v_{n+1}, w_1 w_2 \dots w_{n+1}) \\ &= d(v_2 \dots v_{n+1}, w_2 \dots w_{n+1}) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Tümevarım hipotezinden

$$d(v_2 \dots v_{n+1}, w_2 \dots w_{n+1}) \leq d(v_2 \dots v_{n+1}, ii \dots i)$$

olacak şekilde bir $ii \dots i \in S(n, k)$ ekstrem köşe noktası vardır. Bunlar birleştirilir ve son adımda Önerme 4.3.1 kullanılırsa

$$\begin{aligned} d(v, w) &= d(v_1 v_2 \dots v_{n+1}, w_1 w_2 \dots w_{n+1}) \\ &= d(v_2 \dots v_{n+1}, w_2 \dots w_{n+1}) \\ &\leq d(v_2 \dots v_{n+1}, ii \dots i) \\ &\leq d(v, ii \dots i) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

$v_1 \neq w_1$ iken v ile w köşe noktaları arasındaki uzaklık

$$d(v, w) \leq d(v, v_1 w_1 \dots w_1) + 1 + d(w_1 v_1 \dots v_1, w)$$

eşitsizliği şeklinde yazılabilir (Bkz. [7]).

$d(w_1 v_1 \dots v_1, w)$ uzaklığı ele alınırsa tümevarım hipotezinden

$$\begin{aligned} d(w_1 v_1 \dots v_1, w) &= d(v_1 \dots v_1, w_2 \dots w_{n+1}) \\ &\leq d(\underbrace{v_1 \dots v_1}_n, \underbrace{w_1 \dots w_1}_n) \end{aligned}$$

olan $w_1 \dots w_1 \in S(n, k)$ ekstrem köşe noktası vardır.

$$d(v_1 \dots v_1, w_1 \dots w_1) = d(\underbrace{w_1 v_1 \dots v_1}_{n+1}, \underbrace{w_1 \dots w_1}_{n+1})$$

olup sonuç olarak $d(w_1 v_1 \dots v_1, w) \leq d(w_1 v_1 \dots v_1, w_1 \dots w_1)$ elde edilir. Elde edilen ifade yerine yazılırsa

$$d(v, w) \leq d(v, v_1 w_1 \dots w_1) + 1 + d(w_1 v_1 \dots v_1, w_1 \dots w_1)$$

eşitsizliğinin sağ tarafı $d(v, w_1 \dots w_1)$ değerine eşit olur ve kanıt biter. \square

Sonuç 4.3.5 ([5]). $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere bir $s \in \{0, \dots, k-1\}^n$ için

$$\sum_{i=0}^{k-1} d(s, i^n) = (k-1)(2^n - 1)$$

olur. $\mu \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$ olmak üzere μ bir köşe noktasının ekstrem köşe noktasına olan uzaklığı belirtir. Ayrıca $q(\mu)$, μ değerinin ikilik gösteriminde sıfırdan farklı girdilerin sayısını belirtsin. Bu durumda

$$|\{s : d(s, j^n) = \mu, s \in \{0, \dots, k-1\}^n\}| = (k-1)^{q(\mu)}$$

olur ve sonuç olarak $S(n, k)$ çizgesinin köşe nokta sayısı

$$\sum_{\mu=0}^{2^n-1} (k-1)^{q(\mu)} = k^n$$

elde edilir.

Kanıt. $d \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $s_d \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ olmak üzere k tane

$$\rho_{s_d,0}, \rho_{s_d,1}, \dots, \rho_{s_d,k-1}$$

girdinin yalnız bir tanesi sıfır geri kalan $k-1$ tane girdi 1'e eşittir. μ değerinin ikilik gösteriminde sıfırdan farklı her girdi için $k-1$ ihtimal varken, sıfır için 1 ihtimal vardır. Sonuç olarak Önerme 4.3.1 kullanılarak

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k-1} d(s, i^n) &= \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{d=1}^n (s_d \neq i) \cdot 2^{d-1} \\ &= \sum_{d=1}^n \sum_{i=0}^{k-1} (s_d \neq i) \cdot 2^{d-1} \\ &= \sum_{d=1}^n (k-1) \cdot 2^{d-1} \\ &= (k-1)(2^n - 1) \end{aligned}$$

elde edilir ve toplam sayı $(k-1)^{q(\mu)}$ olur. Bu sayıyı her μ için 0'dan $2^n - 1$ 'e kadar toplayarak $S(n, k)$ çizgesinin köşe nokta sayısı k^n elde edilir. \square

Her $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ olmak üzere bir ekstrem köşe noktasının ortalama değeri (mean vertex deviation)

$$\mu_{(n,k)}(ii \dots i) := \frac{1}{|V(S(n, k))|} \sum_{v \in S(n,k)} d(v, ii \dots i)$$

şeklinde tanımlanır. Buna göre Önerme 4.3.5 ile aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.3.6 ([10]). $n, k \in \mathbb{N}$ ve $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ olmak üzere $S(n, k)$ çizgesinde bir $ii \dots i$ ekstrem köşe noktasının ortalama değeri

$$\mu_{(n,k)}(ii \dots i) = \frac{k-1}{k}(2^n - 1)$$

olur.

Kanıt. Önerme 4.3.5 yardımıyla

$$\sum_{i=0}^{k-1} d(v, i^n) = (k-1)(2^n - 1)$$

olur. k tane eşit toplamdan

$$\begin{aligned} k \sum_{v \in S(n,k)} d(v, ii \dots i) &= \sum_{v \in S(n,k)} \left(\sum_{j=0}^{k-1} d(v, jj \dots j) \right) \\ &= \sum_{v \in S(n,k)} (k-1)(2^n - 1) \\ &= (k-1)(2^n - 1)k^n \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\sum_{v \in S(n,k)} d(v, ii \dots i) = \frac{k-1}{k}(2^n - 1)k^n$$

ya da

$$\mu_{(n,k)}(ii \dots i) = \frac{1}{k^n} \sum_{v \in S(n,k)} d(v, ii \dots i) = \frac{k-1}{k}(2^n - 1)$$

olur. \square

Teorem 4.3.7 ([10]). $S(n, k)$ Sierpinski çizgesinin yarıçapı

$$\text{rad}(S(n, k)) = \lfloor 2^{n-k+1}(2^{k-1} - 1) \rfloor = \begin{cases} 2^n - 1 & , n < k \\ 2^{n-k+1}(2^{k-1} - 1) & , n \geq k \end{cases} , \quad (5)$$

merkezi

$$C(S(n, k)) = \begin{cases} S(n, k) & , \quad n < k \\ \tilde{C}(n, k) & , \quad n \geq k \end{cases}, \quad (6)$$

merkezindeki köşe noktası sayısı

$$|V(C(S(n, k)))| = \begin{cases} k^n & , \quad n < k \\ k! & , \quad n \geq k \end{cases} \quad (7)$$

ve kenar sayısı

$$|E(C(S(n, k)))| = \begin{cases} \frac{k}{2}(k^n - 1) & , \quad n < k \quad \text{veya} \quad k = 1 \\ \frac{k!}{2} & , \quad n \geq k \end{cases} \quad (8)$$

olur. Burada $n, k \in \mathbb{N}$ ve $n \geq k$ için

$$\tilde{C}(n, k) := \left\{ z \in S(n, k) \mid z = z_1 \dots z_{k-1} z_k \dots z_n, \{z_1, \dots, z_k\} = \{0, 1, \dots, k-1\} \right\}$$

şeklindedir.

Özel olarak, $n \geq k > 1$ için, $S(n, k)$ çizgesinin merkezi $\frac{k!}{2}$ kenarı olan, tek parça olmayan, 1-regüler bir çizgedir.

Kanıt. $k = 1$ için açıktır. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $S(n, 1)$ çizgesi bir köşe noktalı ve kenarı olmayan K_1 tam çizgesine izomorf olduğundan $\text{rad}(S(n, 1)) = 0$ elde edilir.

$n \in \mathbb{N}$ için $\tilde{C}(n, 1) = S(n, 1) = \{11 \dots 1\}$ olduğundan $C(S(n, 1)) = S(n, 1)$ olup merkezde bir köşe noktası vardır ve hiç kenar yoktur.

$k \geq 2$ olsun. $n \leq k - 1$ olduğunu varsayalım. Bir köşenin isimlendirilmesi n uzunluğuna sahip olduğundan isimlendirmede n sayısından büyük k değerleri vardır. Herhangi bir $v \in S(n, k)$ için $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ olmak üzere

$$d(v, ii \dots i) = (11 \dots 1)_2 = 2^n - 1$$

olan bir $ii \dots i$ ekstrem köşe noktası daima vardır. Önerme 4.3.4 kullanılırsa, $\text{rad}(S(n, k)) = 2^n - 1$ olur.

$n \geq k$ iken herhangi bir $v \in S(n, k)$ için

$$d(v, 00 \dots 0), d(v, 11 \dots 1), \dots, d(v, ii \dots i)$$

değerlerinden en az biri $(\underbrace{11 \dots 1}_{k-1} \dots)_2$ ile başlar. Önerme 4.3.1 den bir v köşe noktasının dış merkezliği için bu uzaklıklara bakmak yeterlidir. Dış merkezliklere bakıldığında en küçük dış merkezliğin

$$(\underbrace{11 \dots 1}_{k-1} \underbrace{00 \dots 0}_{n-k+1})_2$$

formunda olduğu görülür. Dolayısıyla dış merkezlik

$$\begin{aligned}
(\underbrace{11\dots 1}_{k-1}\underbrace{00\dots 0}_{n-k+1})_2 &= d(v_1v_2\dots v_{n+1}, w_1w_2\dots w_{n+1}) \\
&= 2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2^{n-k+1} \\
&= 2^{n-k+1}(2^{k-2} + 2^{k-3} + \dots + 2 + 1) \\
&= 2^{n-k+1}(2^{k-1} - 1)
\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır ve $\text{rad}(S(n, k)) = 2^{n-k+1}(2^{k-1} - 1)$ elde edilir. Böylece eşitlik (5) elde edilmiş olur.

(6) eşitliğini kanıtlamak için $n \leq k - 1$ olduğunu varsayalım. Önerme 4.3.3 ve eşitlik (5) den

$$\text{rad}(S(n, k)) = 2^n - 1 = \text{diam}(S(n, k))$$

olduğu elde edilir. Bu eşitliğin anlamı herhangi bir $v \in S(n, k)$ için v köşesinin dış merkezliği çapa eşit ve $C(S(n, k)) = S(n, k)$ olmasıdır.

$n \geq k$ olsun. O halde

$$e(v) = \text{rad}(S(n, k)) = 2^{n-k+1}(2^{k-1} - 1)$$

eşitliği çözülmelidir. Herhangi bir $z \in \tilde{C}(n, k)$ için Önerme 4.3.1'den

$$d(z, z_k z_k \dots z_k) = (\underbrace{11\dots 1}_{k-1}\underbrace{00\dots 0}_{n-k+1})_2 = (2^{k-1} - 1)2^{n-k+1}$$

olup $i \in \{0, 1, \dots, k - 1\} \setminus \{z_k\}$ için $z_1 z_2 \dots z_{k-1}$ en az bir pozisyonda i ye eşit olacağından

$$d(z, ii\dots i) \leq d(z, z_k \dots z_k)$$

olur. Bunun anlamı $\tilde{C}(n, k) \subset C(S(n, k))$ olmasıdır.

Şimdi $C(S(n, k)) \subset \tilde{C}(n, k)$ olduğunu göstermek için

$$z := z_1 z_2 \dots z_{k-1} z_k z_{k+1} \dots z_n \in C(S(n, k))$$

alalım. Çizgenin merkezinde bir köşe noktası olma tanımından ve (5) ifadesinden

$$e(z) = \text{rad}(S(n, k)) = (\underbrace{11\dots 1}_{k-1}\underbrace{0\dots 0}_{n-k+1})_2$$

olduğu söylenir. Yani Önerme 4.3.1'den

$$\max\{d(z, ii\dots i) | i \in \{0, 1, \dots, k - 1\}\} = (\underbrace{11\dots 1}_{k-1}\underbrace{0\dots 0}_{n-k+1})_2$$

olur. Buradan $z_k = z_{k+1} = \dots = z_n$ olduğu söylenir. Üstelik $l \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ olmak üzere $\sigma_{z_l, z_k} = 1$ 'den $z_l \neq z_k$ olduğunu yani $\{z_1, z_2, \dots, z_k\} = \{1, 2, \dots, k\}$ olduğu elde edilir. Aksi takdirde $j \in \{1, 2, \dots, k\} \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_k\}$ için

$$d(z, jj \dots j) > 2^n - 1 > \text{rad}(S(n, k))$$

olurdu. Dolayısıyla (6) ifadesi kanıtlanmış olur. (6) ifadesindeki eşitlikten (7) ifadesi kolayca elde edilir.

Son olarak $n \geq k$ için $z = z_1 z_2 \dots z_{k-1} z_k \dots z_k \in C(S(n, k))$ köşe noktası $C(S(n, k))$ kümesinde yalnız bir komşu köşe noktasına sahiptir. Bu komşu köşe $z_1 z_2 \dots z_k z_{k-1} \dots z_{k-1}$ formundadır ve sayısı $\frac{k!}{2}$ kadardır.

$n < k$ için (6) eşitliğinde $C(S(n, k)) = S(n, k)$ olduğundan $S(n, k)$ çizgesinin merkezindeki kenar sayısı $\frac{k(k^n-1)}{2}$ kadardır. \square

Theorem 4.3.7 yardımıyla $k = 2, 3$ değerleri için aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 4.3.8 ([10]). *Her $n \in \mathbb{N}$ için $S(n, 2)$ çizgesinin yarıçapı*

$$\text{rad}(S(n, 2)) = 2^n - 1 \quad (9)$$

olarak hesaplanır ve merkezinde

$$C(S(n, 2)) = \{0 \underbrace{11 \dots 1}_{n-1}, 1 \underbrace{0 \dots 0}_{n-1}\} \quad (10)$$

2 köşe noktası ve 1 kenar vardır.

Sonuç 4.3.9 ([10]). *Her $n \in \mathbb{N}$ için $S(n, 3)$ çizgesinin yarıçapı*

$$\text{rad}(S(n, 3)) = \lfloor 3(2^{n-2}) \rfloor = \begin{cases} 2^n - 1 & , n < 3 \\ 3(2^{n-2}) & , n \geq 3 \end{cases} \quad (11)$$

olarak hesaplanır ve merkezi

$$C(S(n, k)) = \begin{cases} S(n, 3) & , n < 3 \\ \{12 \underbrace{00 \dots 0}_{n-2}, 21 \underbrace{00 \dots 0}_{n-2}, 02 \underbrace{11 \dots 1}_{n-2}\} & , \\ \{20 \underbrace{11 \dots 1}_{n-2}, 01 \underbrace{22 \dots 2}_{n-2}, 10 \underbrace{22 \dots 2}_{n-2}\} & , n \geq 3 \end{cases} \quad (12)$$

şeklinde belirlenir. $S(n, 3)$ çizgesinin merkezindeki köşe nokta sayısı

$$|V(C(S(n, 3)))| = \begin{cases} 3^n & , n < 3 \\ 6 & , n \geq 3 \end{cases} \quad (13)$$

ve kenar sayısı

$$|E(C(S(n, 3)))| = \begin{cases} \frac{3}{2}(3^n - 1) & , n < 3 \\ 3 & , n \geq 3 \end{cases} \quad (14)$$

şeklinde hesaplanır.

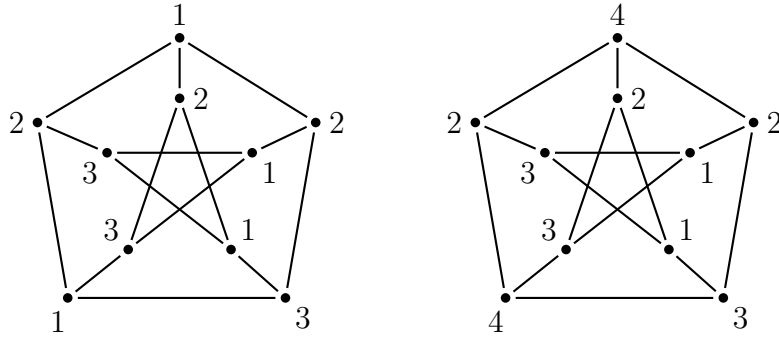
5 SIERPINSKI ÇİZGELERİN BOYAMA ÖZELLİKLERİ

5.1 Sierpinski Çizgelerin Kromatik Sayısı, Kromatik İndeksi ve Total Kromatik Sayısı

Çizge kuramının en önemli dallarından biri olan çizge boyama ilk olarak Dört Renk Problemi ile başlamış ve zamanla köşe boyama, kenar boyama, alan boyama gibi çeşitli alt problemlere ayrılmıştır.

Bu bölümde Sierpinski çizgeleri için köşe boyama, kenar boyama ve total boyama problemleri ele alınmıştır. Bu boyama problemleri önce tam çizgelerde incelenmiş olup daha sonra tam çizgeler yardımı ile Sierpinski çizgelere aktarılmıştır. Bu boyama problemlerine ilişkin temel tanımlar aşağıdaki gibi tanımlanır:

Bir G çizgesinin köşe noktaları, komşu köşe noktalar farklı renklerde olacak şekilde k renkle boyanabiliyorsa G çizgesine k renk boyanabilir denir (Bkz. Şekil 5.28). Eğer çizge k renk boyanabilir fakat $(k - 1)$ renk boyanabilir değilse, G çizgesinin kromatik sayısı k olur ve $\chi(G) = k$ ile gösterilir.



Şekil 5.28: Petersen çizgesinin 3 renk boyaması ile 4 renk boyaması

Bir G çizgesinin kenarları, komşu kenarlar farklı renklerde olacak şekilde k renkle boyanabiliyorsa k renk kenar boyanabilir denir. Eğer çizge k renk kenar boyanabilir fakat $(k - 1)$ renk kenar boyanabilir değilse, G çizgesinin kromatik indeksi k olur ve $\chi'(G) = k$ ile gösterilir.

Bir G çizgesinin komşu köşe noktaları, komşu kenarları ve kenarların değdiği köşe noktalar kenarlarla farklı renklerde olacak şekilde k renkle boyansın. Bu boyamayı yapmak için gereken en küçük k renk sayısına çizgenin total kromatik sayısı denir

ve $\chi''(G) = k$ ile gösterilir.

Aşağıdaki teorem tam çizgelerin kromatik sayısı, kromatik indeksi ve total kromatik sayısını vermektedir.

Teorem 5.1.1 ([6]). $k \geq 1$ için

$$\begin{aligned}\chi(K_k) &= k, \\ \chi'(K_k) &= k - (k \text{ çift}), \\ \chi''(K_k) &= k + (k \text{ çift})\end{aligned}$$

olur.

Kanıt. Tam çizgeler için $\chi(K_k) = k$ olduğu açıktır. Gerçekten de her $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ için K_k çizgesinin köşe noktaları $c_k(i) := i$ dönüşümü ile boyanırsa istenen sonuç elde edilir.

k tek iken c'_p kenar-boyama dönüşümü aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:
 $i, j \in [k]_0$ ve $i \neq j$ olmak üzere $\{ij\}$ kenarı

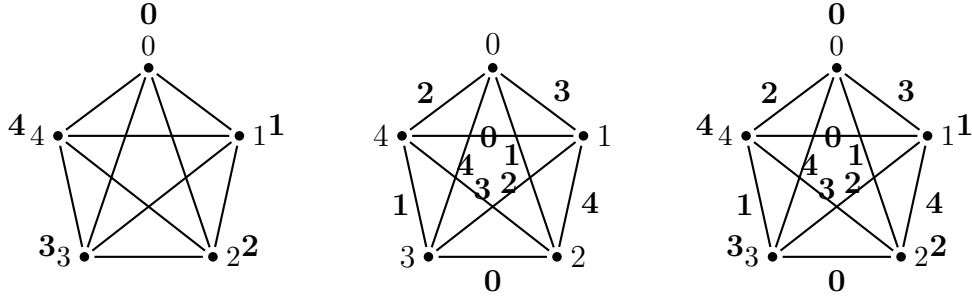
$$c'_k(i, j) := \frac{i(k+1) - j(k-1)}{2} \pmod k$$

dönüşümü yardımıyla boyansın. Bu boyamanın özelliği k rengin hepsini kullanarak her $p \in [k]_0$ ile temsil edilen köşe noktasına bağlı kenarlar p hariç $[k]_0$ kümesindeki renklerle boyanabilmesidir ($c'_k(i, j)$ tanımından $i + j - 2c'_k(i, j) \in \{-k, 0, k\}$ olduğu görülür).

Tek sayıda köşe noktası olan ve yukarıdaki şekilde boyanan tam çizgeye yeni bir köşe noktası daha eklendiğinde, eklenen bu köşe noktasının bağlandığı her p köşe noktası ile oluşturduğu kenar p rengi ile boyanırsa $k+1$ (çift sayıda) tane köşe noktası olan K_{k+1} tam çizgesinin kenar boyaması da k tane renk ile yapılmış olur.

K_k tam çizgesinin total boyaması k tek iken c_k ve c'_k boyama dönüşümlerinin birleşimi ile yapılabilir. k çift ise K_k çizgesinin total boyaması için total boyaması yapılmış $k+1$ (tek sayıda) köşe noktalı K_{k+1} tam çizgesinden $p \in [k+1]_0$ olmak üzere p . renk ile boyanmış köşe noktası ve bu köşe noktasına bağlı kenarlar silindiğinde, total boyaması yapılmış k (çift sayıda) tane köşe noktası olan K_k tam çizgesinin total boyamasının $k+1$ tane renk ile yapıldığı görülür. \square

Örneğin, K_5 tam çizgesi için 5 renk köşe boyama, 5 renk kenar boyama ve 5 renk total boyama Şekil 5.29 ile gösterilmiş ve boyaması yapılmış çizgelerin komşuluk matrisi yardımı ile gösterimi Tablo 5.1 ile verilmiştir. Benzer olarak, K_4 tam çizgesi için de 3 renk kenar boyama ve 5 renk total boyama sırasıyla Şekil 5.30 ve Şekil 5.31 ile gösterilmiştir.



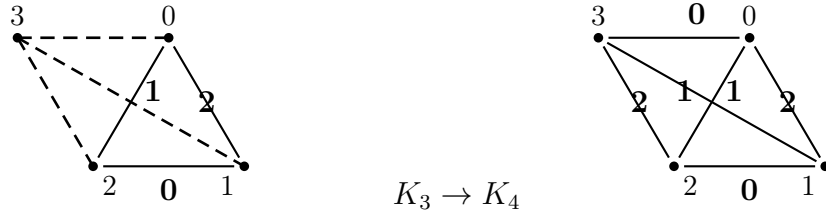
Şekil 5.29: K_5 tam çizgesi için 5 renk köşe boyama, 5 renk kenar boyama ve 5 renk total boyama örneği. Şekilde koyu renk ile yazılmış rakamlar renkleri ifade etmektedir. Örneğin, 0 köşe noktası 0. renk ile boyanmış, $\{0,1\}$ kenarı 3. renk ile boyanmıştır.

Tablo 5.1: K_5 tam çizgesinde komşuluk matrisi yardımıyla 5 renk köşe boyama, 5 renk kenar boyama ve 5 renk total boyama gösterimi

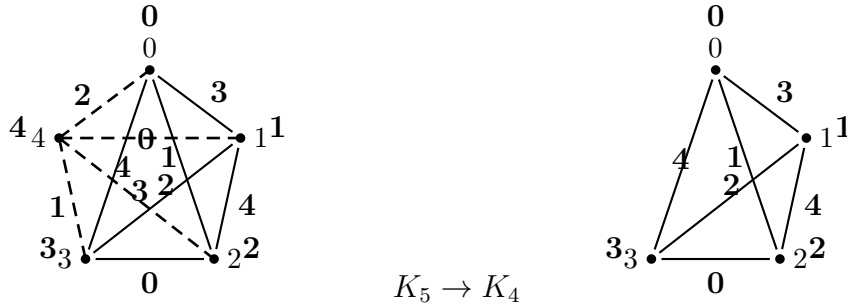
| $i \setminus j$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|-----------------|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | | | | |
| 1 | | 1 | | | |
| 2 | | | 2 | | |
| 3 | | | | 3 | |
| 4 | | | | | 4 |

| $i \setminus j$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|-----------------|---|---|---|---|---|
| 0 | | 3 | 1 | 4 | 2 |
| 1 | 3 | | 4 | 2 | 0 |
| 2 | 1 | 4 | | 0 | 3 |
| 3 | 4 | 2 | 0 | | 1 |
| 4 | 2 | 0 | 3 | 1 | |

| $i \setminus j$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|-----------------|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 3 | 4 | 2 | 1 |
| 1 | 3 | 1 | 0 | 4 | 2 |
| 2 | 4 | 0 | 2 | 1 | 3 |
| 3 | 2 | 4 | 1 | 3 | 0 |
| 4 | 1 | 2 | 3 | 0 | 4 |



Şekil 5.30: K_3 tam çizgesi yardımıyla K_4 tam çizgesinin 3 renk kenar boyaması



Şekil 5.31: K_5 tam çizgesi yardımıyla K_4 tam çizgesinin 5 renk total boyaması

Aşağıdaki teorem Sierpinski çizgelerin kromatik sayısını vermektedir.

Teorem 5.1.2 ([6]). $n \geq 1$ ve $k \geq 1$ olmak üzere $\chi(S(n, k)) = k$ olur.

Kanıt. Aşağıda verilen c boyama dönüşümü ile kanıt kolayca elde edilir.

$$\begin{aligned} c : \{0, 1, \dots, k-1\}^n &\rightarrow \{0, 1, \dots, k-1\} \\ u = u_1 \dots u_n &\mapsto u_n \end{aligned}$$

□

Aşağıdaki teorem Sierpinski çizgelerin kromatik indeksini vermektedir.

Teorem 5.1.3 ([6]). $n \geq 1$ ve $k \geq 1$ olmak üzere $\chi'(S(n, k)) = k$ olur.

Kanıt. $S(n, k)$ çizgesinin kenarları $\{0, 1, \dots, k-1\}$ kümesindeki renklerle aşağıdaki şekilde boyansın. Bu boyama k doğal sayısının tek ve çift olma durumuna göre iki farklı şekilde yapılır.

k çift olsun. Bu durumda $k-1$. renk ile boyanmış kenarlar, ekstrem köşe noktalar ile komşu olmayacak şekilde seçilsin. $S(n, k)$ çizgesinin bütün alt kopyaların birbirine bağlı olduğu kenarlar ise $k-1$ renk ile boyanırken diğer kenarlar $[k-1]_0$ kümesindeki renkler ile K_k çizgesinin yukarıda verilen kenar boyama komşuluk matrisine göre boyansın.

k tek iken boyama $k \in [p]_0$ ile boyanmış kenar k^n ekstrem köşe noktası ile komşu olmayacak şekilde yapılsın. k tek iken K_k çizgesinin kenar boyaması için ekstra bir kenara ihtiyaç olduğundan, $S(n, k)$ çizgesinin kromatik indeksi tümevarım yöntemiyle kanıtlanabilir.

$k = 1$ iken $S(1, k) \cong K_k$ olduğundan Teorem 5.1.1 yardımıyla $\chi'(K_k) = k$ olur.

$n = k$ iken için doğru olsun. $n = k + 1$ için doğruluğunu kanıtlayalım. Önce $\{ij^n, ji^n\}$ kenarlarını K_k çizgesinin komşuluk matrisine göre boyansın. Şimdi bir

$$c \mapsto \frac{c(k+1) - p(k-1)}{2} \pmod{k}$$

dönüşümü tanımlayalım. K_k tam çizgesinin yukarıda tanımlanan doğal kenar boyaması ve tümevarım hipotezinden $S(n+1, k)$ çizgesinin p ile temsil edilen kopya için p rengi belirlenmiş, diğer $k-1$ tane farklı renk tanımlanan c dönüşümü ile her bir kopyada permüte edilerek, elde edilen k tane kopya $S(n, k)$ çizgesinin komşuluk matrisinin köşegeni boyunca yerleştirilir ve kanıt biter. □

Yukarıdaki kanıtta sunulan komşuluk matrisi yardımıyla kenar boyama yöntemi $S(2, 4)$ için Tablo 5.2 ile verilmiştir.

Tablo 5.2: $S(2, 4)$ Sierpinski çizgesinin komşuluk matrisi yardımıyla 4 renk kenar boyaması

| | 00 | 01 | 02 | 03 | 10 | 11 | 12 | 13 | 20 | 21 | 22 | 23 | 30 | 31 | 32 | 33 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 00 | | 2 | 1 | 0 | | | | | | | | | | | | |
| 01 | 2 | | 0 | 1 | 3 | | | | | | | | | | | |
| 02 | 1 | 0 | | 2 | | | | | 3 | | | | | | | |
| 03 | 0 | 1 | 2 | | | | | | | | | | 3 | | | |
| 10 | | 3 | | | | 2 | 1 | 0 | | | | | | | | |
| 11 | | | | | 2 | | 0 | 1 | | | | | | | | |
| 12 | | | | | 1 | 0 | | 2 | | 3 | | | | | | |
| 13 | | | | | 0 | 1 | 2 | | | | | | | 3 | | |
| 20 | | | 3 | | | | | | | 2 | 1 | 0 | | | | |
| 21 | | | | | | | 3 | | 2 | | 0 | 1 | | | | |
| 22 | | | | | | | | | 1 | 0 | | 2 | | | | |
| 23 | | | | | | | | | 0 | 1 | 2 | | | | | 3 |
| 30 | | | | 3 | | | | | | | | | | 2 | 1 | 0 |
| 31 | | | | | | | | 3 | | | | | 2 | | 0 | 1 |
| 32 | | | | | | | | | | | | 3 | 1 | 0 | | 2 |
| 33 | | | | | | | | | | | | | 0 | 1 | 2 | |

Teorem 5.1.4 ([6]). $n \geq 1$ ve $k \geq 1$ olmak üzere $\chi''(S(n, k)) = k + 1$ olur.

Kanıt. Boyama yapılırken $S(n, k)$ çizgesinin köşe noktaları ve kenarları $\{0, 1, \dots, k\}$ kümesindeki renklerle aşağıdaki şekilde yapılabilir:

Boyama k doğal sayısının tek ve çift olma durumuna göre iki farklı şekilde yapılır. k tek ise boyama k . renk ile boyanmış kenar, ekstrem köşe noktalarıyla komşu olmayacak şekilde boyanır. $S(n, k)$ çizgesinin bütün alt kopyaların birbirine bağlı olduğu kenarlar ise $k + 1$. renk ile boyanırken her bir alt kopyadaki diğer kenarlar ve köşe noktalar $\{0, 1, \dots, k - 1\}$ kümesindeki renkler ile K_k çizgesinin yukarıda verilen doğal total boyama komşuluk matrisine göre boyanır. k çift ise boyama k ile boyanmış kenar k^n ekstrem köşe noktası ile komşu olmayacak şekilde yapılır. Bu şekilde yapılan boyama ile $\chi''(S(n, k)) = k + 1$ olduğu elde edilmiş olur. İspat çok detaylı olduğundan detaylar için [6] çalışmasından yararlanılabilir. \square

5.2 Sierpinski Çizgelerin Oyun Renk ve Oyun Kromatik Sayıları

Bir çizgenin oyun kromatik sayısı (game chromatic number) ilk olarak Bodlaender tarafından iki kişilik sonlu bir oyun ile tanımlanmıştır (Bkz. [2]). Sonlu bir G çizgesinde, X renkler kümesi olmak üzere genellikle Alice ve Bob olarak adlandırılan iki oyuncu, oyuna ilk olarak Alice başlamak üzere sırasıyla X renk kümesinden seçtikleri renklerle komşu köşe noktalarını farklı renkte olacak şekilde boyasınlar. Eğer çizgenin köşe noktalarının tümü X kümesindeki renklerle boyanabilirse oyunu Alice kazansın. Eğer oyunun herhangi bir aşamasında X kümesindeki tüm renklerle boyanan köşe noktalarına komşu olan boyanmamış bir köşe noktası kalırsa oyunu Bob kazansın. Oyuncuların optimal stratejileri ile oynanan oyunda oyunun kimin kazanacağı X kümesindeki renklerin sayısına ve çizgenin yapısına bağlıdır. G çizgesinin köşe noktalarının kümesi V olmak üzere eğer $|X| \geq |V|$ ise Alice'in daima oyunu kazanacak bir stratejisi vardır. Fakat X kümesindeki renklerin yeterli olmadığı durumda yani $\chi(G)$ bir G çizgesinin kromatik renk sayısını belirtmek üzere $|X| < \chi(G)$ iken Bob'un daima oyunu kazanacak bir stratejisi vardır. Bir çizgenin oyun kromatik sayısı Alice'in daima kazanabileceği bir stratejinin olduğu X kümesindeki minimum renk sayısı olarak tanımlanır. Bir G çizgesinin oyun kromatik sayısı $\chi_g(G)$ ile gösterilir. Bu tanımlardan

$$\chi(G) \leq \chi_g(G) \leq \Delta(G) + 1$$

eşitsizliği kolayca elde edilir.

Bir çizgenin oyun kromatik sayısını üstten sınırlamak için bazı kavramlar tanımlanmıştır. Yukarıda tanımlanan oyuna benzer iki kişilik bir işaretleme oyunu (marking game), Guan ve Zhu tarafından tanıtılmıştır (Bkz. [3]). Yine bu oyunda da oyuna ilk başlayan Alice olup sırasıyla Bob ile oynamaktadırlar. Bu oyunda oyuncular köşe noktalarını boyamak yerine işaretler. Herhangi bir k pozitif tamsayısı için, oyunun herhangi bir aşamasında işaretlenmemiş bir köşe noktasının kendisinden önce k tane işaretlenmiş köşe noktası varsa oyunu Bob kazanırken oyunun herhangi bir anında kendinden önce işaretlenmiş köşe noktalarının sayısı en fazla $k - 1$ ise oyunu Alice kazanır. Bir çizgenin oyun renk sayısı (game coloring number), Alice'in her zaman kazanabileceği bir stratejinin var olduğu en küçük k sayısına eşittir. Bir çizgenin oyun renk sayısı $col_g(G)$ ile gösterilir. Herhangi bir G çizgesi için

$$\chi_g(G) \leq col_g(G) \tag{15}$$

olduğu açıkça söylenir.

[1] çalışmasında kanıtlanan Sierpinski çizgesinin oyun kromatik sayısını ve oyun renk sayısını veren teoremler aşağıda verilmiştir.

Teorem 5.2.1 ([1]). $n \geq 1$ ve $k \geq 2$ olmak üzere

$$col_g(S(n, k)) = \begin{cases} k & , n = 1 \text{ ise} \\ k + 1 & , n \geq 2 \text{ ise} \end{cases}$$

olur.

Kanıt. $n = 1$ durumu $S(1, k)$ Sierpinski çizgesi k köşeli K_k tam çizgesine izomorf ve $col_g(K_k) = k$ olduğundan açıktır.

Eğer $n \geq 2$ ise $S(n, k)$ Sierpinski çizgesinin derecesi $k - 1$ olan k tane ve derecesi k olan $k^n - k$ tane köşe noktası vardır. Alice'in seçimi nasıl olursa olsun, Bob en fazla k hamle yaparak (her hamlesinde $k - 1$ dereceli köşe noktalarını seçerek) en son seçilen noktanın derecesinin k olmasını sağlar. Bu yüzden $n \geq 2$ için

$$col_g(S(n, k)) = k + 1$$

olur.

Özel olarak her n pozitif tam sayısı için $k = 1$ ise $S(n, k)$ Sierpinski çizgesi tek köşe noktasından oluşur ve dolayısıyla $col_g(S(n, k)) = 1$ olur. \square

Teorem 5.2.2 ([1]). $n \geq 1$ olmak üzere

$$\chi_g(S(n, 3)) = \begin{cases} 3 & , n = 1 \text{ ise} \\ 4 & , n \geq 2 \text{ ise} \end{cases}$$

olur.

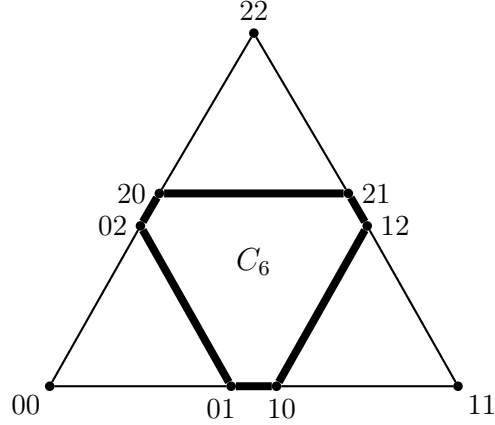
Kanıt. $n = 1$ durumu $S(1, 3)$ Sierpinski çizgesi 3 köşeli K_3 tam çizgesine izomorf ve $\chi_g(K_3) = 3$ olduğundan açıktır.

$n \geq 2$ iken (15) eşitsizliğinden ve Teorem 5.2.1'den

$$\chi_g(S(n, 3)) \leq 4 \tag{16}$$

olur. Şimdi $n = 2$ iken $S(n, 3)$ Sierpinski çizgesinin oyun kromatik sayısının 4 olduğu gösterilsin. $S(2, 3)$ Sierpinski çizgesinin oyun kromatik sayısının alttan da 4 ile sınırlı olduğunu elde etmek için Bob'a 3 renk ile bir kazanma stratejisi verilsin. Buradan da (16) eşitsizliği kullanılarak istenen sonuç elde edilir.

Alice'in ilk hamlesi için iki durum vardır:



Şekil 5.32: $S(2,3)$ Sierpinski çizgesi ve bu çizgenin C_6 alt çizgesi

1.Durum: Alice'in ilk hamlesi $S(2,3)$ Sierpinski çizgesinin alt çizgesi olan uzunluğu 6 birim C_6 döngü çizge üzerinde (Bkz. Şekil 5.32) herhangi bir köşe noktasını 1. renk ile boyamak olsun. Genelliği bozmaksızın Alice'in ilk hamlesinde 01 köşe noktasını boyadığı kabul edilsin. Bu durumda Bob, Alice'in boyadığı köşe noktasından 2 birim uzaklıkta ve C_6 alt çizgesi üzerindeki bir köşe noktasını 2. renk ile boyar. Yine genelliği bozmaksızın Bob'un 12 köşe noktasını 2. renk ile boyadığı kabul edilsin. Bu durumda 10 noktasının komşu iki noktası iki farklı renk ile boyandığından 10 noktası bir kritik nokta olur. Artık Alice ikinci hamlesinde ya bu kritik 10 noktasını ya da onun boyanmamış komşusu olan 11 noktasını boyamak zorundadır. Alice bu köşe noktalarından hangisini boyarsa boyasın Bob, ikinci hamlesinde ilk boyadığı köşe noktasından iki birim uzaklıkta ve C_6 alt çizgesi üzerindeki bir noktayı örneğin 20 köşe noktasını 3. renk ile boyar. Bu durumda 02 ve 21 köşe noktalarının komşu iki noktası iki farklı renk ile boyandığından bu köşe noktaları kritik noktalar olur. Alice aynı anda bu iki kritik noktayı savunamayacağı için Bob, 3 renk ile oyunu kazanır ve sonuç olarak

$$4 \leq \chi_g(S(2,3))$$

elde edilir.

2.Durum: Alice oyuna C_6 alt çizgesi üzerinde olmayan bir noktayı 1. renk ile boyayarak başlasın. Yine genelliği bozmaksızın Alice'in 22 noktasını boyadığı kabul edilsin. Bu durumda Bob ilk hamlesinde geriye kalan ve derecesi 2 olan noktalardan birini 2. renk ile boyar. Genelliği bozmaksızın Bob'un da 00 noktasını 2. renk ile boyadığı kabul edilsin. Buna göre Alice'in Tablo 5.3'de verilen ikinci hamleleri için Bob'un verdiği cevaplar sıralanmıştır. Bob'un verdiği cevaba göre ya Alice'in aynı anda savunamayacağı iki kritik nokta oluşmakta ya da 4. rengin gerekeceği noktalar ortaya çıkmaktadır.

Tablo 5.3: *Alice'in bazı ikinci hamleleri için Bob'un verdiği cevaplar*

| Alice'in ikinci hamlesi | Bob'un cevabı | Oluşan durum |
|------------------------------|------------------------------|--------------------------|
| 21 noktasını 2. renkle boyar | 02 noktasını 3. renkle boyar | 20 için 4. renk gerekir |
| 21 noktasını 3. renkle boyar | 10 noktasını 3. renkle boyar | 12 ve 01 kritik noktalar |
| 20 noktasını 2. renkle boyar | 12 noktasını 3. renkle boyar | 21 için 4. renk gerekir |
| 20 noktasını 3. renkle boyar | 12 noktasını 2. renkle boyar | 21 için 4. renk gerekir |
| 02 noktasını 1. renkle boyar | 10 noktasını 3. renkle boyar | 01 için 4. renk gerekir |
| 02 noktasını 3. renkle boyar | 10 noktasını 1. renkle boyar | 01 için 4. renk gerekir |
| 01 noktasını 1. renkle boyar | 20 noktasını 3. renkle boyar | 02 için 4. renk gerekir |
| 01 noktasını 3. renkle boyar | 12 noktasını 2. renkle boyar | 10 ve 21 kritik noktalar |
| 10 noktasını 1. renkle boyar | 02 noktasını 3. renkle boyar | 01 için 4. renk gerekir |
| 10 noktasını 3. renkle boyar | 02 noktasını 1. renkle boyar | 01 için 4. renk gerekir |
| 11 noktasını 1. renkle boyar | 10 noktasını 3. renkle boyar | 01 ve 12 kritik noktalar |
| 11 noktasını 2. renkle boyar | 12 noktasını 3. renkle boyar | 21 ve 10 kritik noktalar |
| 11 noktasını 3. renkle boyar | 12 noktasını 2. renkle boyar | 21 ve 10 kritik noktalar |
| 12 noktasını 2. renkle boyar | 20 noktasını 3. renkle boyar | 21 için 4. renk gerekir |
| 12 noktasını 3. renkle boyar | 20 noktasını 2. renkle boyar | 21 için 4. renk gerekir |

Eğer Alice ikinci hamlesinde 10 köşe noktasını 2. renk ile boyarsa Bob 01 noktasını 1. renk ile boyar. Bu durumda 02 köşe noktası kritik nokta olur. Bu noktayı savunmak için Alice'in 3. hamlesi için üç durum söz konusudur. Bu durumlar ve Bob'un bunlara cevabı Tablo 5.4'de verilmiştir. Tüm durumlarda 4. rengin gerektiği bir köşe noktası ortaya çıkmaktadır.

Tablo 5.4: *Alice'in bazı üçüncü hamleleri için Bob'un verdiği cevaplar*

| Alice'in üçüncü hamlesi | Bob'un cevabı | Oluşan durum |
|------------------------------|------------------------------|-------------------------|
| 02 noktasını 3. renkle boyar | 21 noktasını 2. renkle boyar | 20 için 4. renk gerekir |
| 20 noktasını 2. renkle boyar | 12 noktasını 3. renkle boyar | 21 için 4. renk gerekir |
| 21 noktasını 3. renkle boyar | 11 noktasını 1. renkle boyar | 12 için 4. renk gerekir |

Eğer Alice ikinci hamlesinde 12 köşe noktasını 1. renkle boyarsa Bob, 21 noktasını 2. renk ile boyar. Bu durumda 20 köşe noktası kritik nokta olur. Bu noktayı savunmak için Alice'in 3. hamlesi için yine üç durum söz konusudur. Bu durumlar ve Bob'un bunlara cevapları Tablo 5.5'de verilmiştir. Bob'un bu cevaplarına göre 4. rengin gerektiği bir nokta ortaya çıkmaktadır.

Sonuç olarak eğer Alice boyamaya C_6 alt çizgesi üzerinde olmayan bir noktadan

Tablo 5.5: Alice'in bazı üçüncü hamleleri için Bob'un verdiği cevaplar

| Alice'in üçüncü hamlesi | Bob'un cevabı | Oluşan durum |
|------------------------------|------------------------------|-------------------------|
| 20 noktasını 3. renkle boyar | 01 noktasını 1. renkle boyar | 02 için 4. renk gerekir |
| 02 noktasını 1. renkle boyar | 10 noktasını 3. renkle boyar | 01 için 4. renk gerekir |
| 01 noktasını 3. renkle boyar | 11 noktasını 2. renkle boyar | 10 için 4. renk gerekir |

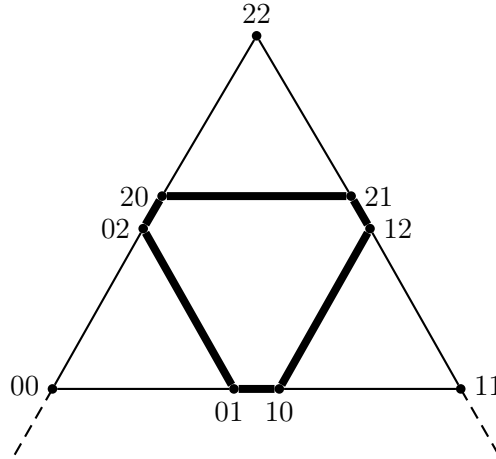
başlarsa her zaman Bob kazanır. Buradan

$$4 \leq \chi_g(S(2, 3))$$

elde edilir. O halde (16) eşitsizliğinden $\chi_g(S(2, 3)) = 4$ olur.

Son olarak $n = 3$ olsun. $S(n, 3)$ Sierpinski çizgesinin oyun kromatik sayısını alttan 4 ile sınırlandırmak için $n = 2$ durumuna benzer olarak yine Bob'a 3 renk ile bir kazanma stratejisi verilmelidir. Alice'in ilk hamlesi için iki durum vardır:

1.Durum : Eğer Alice ilk hamlesinde $S(n, 3)$ Sierpinski çizgesindeki 3^{n-2} tane C_6 alt çizgelerinden herhangi birisi üzerindeki bir köşe noktasını boyarsa Bob, $n = 2$ durumunda olduğu gibi aynı C_6 alt çizgesi üzerinde ve Alice'in boyadığı köşe noktasından 2 birim uzaklıktaki köşe noktasını 2. renkle boyayarak oyunu kazanır.



Şekil 5.33: $S(n, 3)$ Sierpinski çizgesinin bir $S(2, 3)$ alt çizgesi

2.Durum : Alice oyuna C_6 alt çizgelerinden birisi üzerinde olmayan bir köşe noktasını 1. renk ile boyayarak başlasın. Gösterimlerde kısalık açısından Alice'in boyadığı noktayı içeren $S(2, 3)$ alt çizgesini Şekil 5.33 deki gibi adlandıracağız. Genelliği bozmaksızın Alice'in ilk hamlesinde 22 köşe noktasını boyadığı kabul edilsin. Bu durumda Bob, Alice'in boyadığı köşe noktasını içeren $S(2, 3)$ alt çizgesi üzerinde ve Alice'in boyadığı köşe noktasından 2 birim uzaklıkta olan bir köşe

Tablo 5.6: *Alice'in bazı ikinci hamleleri için Bob'un verdiği cevaplar*

| Alice'in ikinci hamlesi | Bob'un cevabı | Oluşan durum |
|------------------------------|------------------------------|--------------------------|
| 20 noktasını 3. renkle boyar | 12 noktasını 2. renkle boyar | 21 için 4. renk gerekir |
| 21 noktasını 2. renkle boyar | 10 noktasını 1. renkle boyar | 12 ve 01 kritik noktalar |
| 12 noktasını 3. renkle boyar | 10 noktasını 1. renkle boyar | 11 ve 01 kritik noktalar |

noktasını 2. renk ile boyar. Yine genelliği bozmaksızın Bob'un 02 köşe noktasını 2. renk ile boyadığı kabul edilsin. Bu durumda 20 noktasının komşu iki noktası iki farklı renk ile boyandığından 20 noktası bir kritik nokta olur. Bu noktayı savunmak için Alice'in 2. hamlesinde üç durum söz konusudur. Bu durumlar ve Bob'un bunlara cevapları Tablo 5.6'de verilmiştir. Bob'un verdiği cevaplara göre ya Alice'in aynı anda savunamayacağı iki kritik nokta oluşmakta ya da 4. rengin gerekeceği noktalar ortaya çıkmaktadır.

Sonuç olarak eğer Alice boyamaya C_6 alt çizgesi üzerinde olmayan bir noktadan başlarsa her zaman Bob kazanır. Buradan

$$4 \leq \chi_g(S(n, 3))$$

elde edilir. Dolayısıyla (16) eşitsizliğinden $\chi_g(S(2, 3)) = 4$ olur ve ispat tamamlanır. \square

KAYNAKÇA

- [1] U. Akcan, E. Akyar, and H. Akyar. Game chromatic number of $W_n \square P_2$. *J. Sci. Arts*, (1(34)):5–12, 2016.
- [2] Hans L. Bodlaender. On the complexity of some coloring games. *Internat. J. Found. Comput. Sci.*, 2(2):133–147, 1991.
- [3] D. J. Guan and Xuding Zhu. Game chromatic number of outerplanar graphs. *J. Graph Theory*, 30(1):67–70, 1999.
- [4] Frank Harary, Robert Z. Norman, and Dorwin Cartwright. *Structural models: An introduction to the theory of directed graphs*. John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1965.
- [5] Andreas M. Hinz, Sandi Klavzar, Uros Milutinovic, and Ciril Petr. *The tower of Hanoi—myths and maths*. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2013.
- [6] Andreas M. Hinz and Daniele Parisse. Coloring Hanoi and Sierpiński graphs. *Discrete Math.*, 312(9):1521–1535, 2012.
- [7] Sandi Klavzar and Uros Milutinovic. Graphs $S(n, k)$ and a variant of the Tower of Hanoi problem. *Czechoslovak Math. J.*, 47(122)(1):95–104, 1997.
- [8] Sandi Klavzar and Bojan Mohar. Crossing numbers of Sierpiński-like graphs. *J. Graph Theory*, 50(3):186–198, 2005.
- [9] X. Lu. Towers of hanoi graphs. *International Journal of Computer Mathematics*, 19:23–38, 1986.
- [10] Daniele Parisse. On some metric properties of the Sierpiński graphs $S(n, k)$. *Ars Combin.*, 90:145–160, 2009.
- [11] R.S. Scorer, P.M. Grundy, and C.A.B. Smith. Some binary games. *Mathematics Magazine*, 280:96–103, 1944.
- [12] Robin J. Wilson. *Introduction to graph theory*. Longman, Harlow, 1996. Fourth edition.