

ELASTİK ORTAMLARDA YAYILAN YÜZEY VE KENAR DALGALARI  
İÇİN DURAĞAN VE HAREKETLİ YÜK PROBLEMLERİNİN  
ASİMPOTİK ANALİZİ

GÖKÇE KILIÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı  
Danışman: Doç. Dr. Nihal EGE

Eskişehir  
Anadolu Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Mayıs, 2017

## JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Gökçe Kılıç'ın "Elastik Ortamlarda Yayılan Yüzey ve Kenar Dalgaları için Durağan ve Hareketli Yük Problemlerinin Asimptotik Analizi" başlıklı tezi 23/05/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek "Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği" nin ilgili maddeleri uyarınca, Matematik Anabilim Dalında Yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

	Adı-Soyadı	İmza
Üye(Tez Danışmanı)	: Doç. Dr. Nihal EGE	.....
Üye	: Doç. Dr. Barış ERBAŞ	.....
Üye	: Doç. Dr. Dursun IRK	.....

.....  
Enstitü Müdürü

**ÖZET**  
**ELASTİK ORTAMLARDA YAYILAN YÜZEY VE KENAR**  
**DALGALARI İÇİN DURAĞAN VE HAREKETLİ YÜK**  
**PROBLEMLERİNİN ASİMPTOTİK ANALİZİ**

**Gökçe KILIÇ**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Mayıs, 2017**

**Danışman : Doç. Dr. Nihal EGE**

Bu yüksek lisans tezinde, elastik katılarda meydana gelen yüzey ve kenar dalga problemleri için geliştirilen asimptotik modellerin formülasyonları çalışılmıştır. Sırasıyla elastik yarı uzaydaki Rayleigh(yüzey) dalgası için hiperbolik-eliptik bir model geliştirilmiş, bu model ile yüzey dalga problemleri, karışık sınır koşullarıyla birleştirilip ele alınmıştır. Devamında bu model steady-state ve transient yük problemlerine de uygulanmıştır. Son olarak da yüzeyde görülen hiperbolik-eliptik dualitenin aksine, ince elastik plakaların kenarında meydana gelen dalgalar için parabolik-eliptik dualiteyi gösteren bir parabolik-eliptik model elde edilmiştir. Sonuç olarak her iki dalga tipinde de sınırda sırasıyla hiperbolik ve parabolik denklemler, elastik cismin içinde ise eliptik denklemlerin elde edildiği görülmüştür.

**Anahtar Sözcükler:** Rayleigh dalgası, Kenar dalgaları, Asimptotik model, Pertürbasyon methodu.

**ABSTRACT**  
**ASYMPTOTICAL ANALYSIS OF STEADY-STATE AND MOVING  
LOAD PROBLEMS FOR SURFACE AND EDGE WAVES IN ELASTIC  
MEDIUMS**

**Gökçe KILIÇ**

**Mathematics Department**

**Anadolu University, Graduate School of Sciences, May, 2017**

**Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Nihal EGE**

In this master thesis, It has been studied formulations of asymptotic models developed for surface and edge wave problems in elastic solids. Respectively, a hyperbolic-elliptic model is developed for the Rayleigh(surface) waves in the elastic half-space. Surface wave problems with this model are incorporated with mixed boundary conditions. This model has also been applied to stationary and moving load problems. Finally, whereas hyperbolic-elliptic duality seen on the surface, a parabolic-elliptic duality is obtained for waves forming at the edge of thin elastic plates. As a result, in both wave types respectively hyperbolic and parabolic equations are found in the boundary and elliptic equations are found in the elastic body.

**Keywords:** Rayleigh waves, Edge bending waves, Asymptotic model,  
Perturbation method.

## TEŞEKKÜR

Tez çalışmam boyunca bilgi, birikim ve tecrübeleriyle bana yol gösteren ve desteklerini esirgemeyen değerli danışman hocam sayın Doç. Dr. Nihal EGE'ye, ilgisini ve önerilerini hiçbir zaman göstermekten kaçınmayan sayın Doç. Dr. Barış ERBAŞ'a, yardımları için sayın Araş. Gör. Dr. Onur ŞAHİN'e, lisans ve yüksek lisans eğitimim boyunca eğitimime katkıda bulunan Matematik bölümündeki tüm hocalarıma, her daim yanımda olan yol arkadaşım Melike PALSÜ' ye ve maddi manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan aileme, ilgi ve desteğini hiç esirgemeyen, başta Aydan PAMUK olmak üzere tüm arkadaşlarıma sonsuz teşekkürler ederim.

Gökçe KILIÇ

Mayıs, 2017

## **ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ**

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarda bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilemeyen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmamın Anadolu Üniversitesi tarafından kullanılan "bilimsel intihal tespit programı"yla tarandığımı ve hiçbir şekilde "intihal içermediğini" beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm.

.....

Gökçe KILIÇ

# İÇİNDEKİLER

BAŞLIK SAYFASI . . . . .	i
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI . . . . .	ii
ÖZET . . . . .	iii
ABSTRACT . . . . .	iv
TEŞEKKÜR . . . . .	v
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ . . . . .	vi
İÇİNDEKİLER . . . . .	viii
ŞEKİLLER DİZİNİ . . . . .	ix
TABLolar DİZİNİ . . . . .	x
<b>1 GİRİŞ . . . . .</b>	<b>1</b>
<b>2 ÖN BİLGİLER . . . . .</b>	<b>3</b>
2.1 Elastisite Kavramı . . . . .	3
2.1.1 Stres kavramı . . . . .	3
2.1.2 Gerilme kavramı . . . . .	4
2.1.3 Stres-Gerilme ilişkisi . . . . .	5
2.2 Gradyant ve Vektörel Çarpımın Bazı Özellikleri . . . . .	6
2.2.1 Özellikler . . . . .	6
2.3 Hareket Denklemleri . . . . .	7
2.4 Harmonik Fonksiyonlar ve Cauchy-Riemann Denklemleri . . . . .	8
2.5 Asimptotik Yaklaşım . . . . .	8
2.6 Konvolüsyon . . . . .	10
2.6.1 Konvolüsyonun bazı özellikleri . . . . .	10
2.7 Dalga Operatörü için Temel Çözüm . . . . .	10
2.8 Yarı-Uzay için Poisson Formülü . . . . .	11
<b>3 YÜZEY DALGASI . . . . .</b>	<b>12</b>

3.1	Linear Elastodinamiğin Denklemleri . . . . .	12
3.2	Düzlem Harmonik Rayleigh Dalgası . . . . .	12
3.3	Keyfi Profil İçin Yüzey Dalgası . . . . .	17
3.4	Hiperbolik-Eliptik Model . . . . .	18
3.5	Karışık Tipteki Yüzey Problemleri . . . . .	24
<b>4</b>	<b>HAREKETLİ YÜK PROBLEMLERİ . . . . .</b>	<b>27</b>
4.1	Sabit Hızlı Noktasal Yük . . . . .	27
4.2	Noktasal Bir Yük İçin Transient Hareket Problemi . . . . .	30
<b>5</b>	<b>KENAR BÜKÜLME DALGASI . . . . .</b>	<b>40</b>
5.1	Dağılım İlişkisi . . . . .	40
5.2	Keyfi Profile Sahip Kenar Bükülme Dalgası . . . . .	42
5.3	Parabolik-Eliptik Model . . . . .	44
	<b>KAYNAKLAR . . . . .</b>	<b>53</b>
	<b>ÖZGEÇMİŞ . . . . .</b>	<b>54</b>



# ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1	<i>Gerilme bileşenleri</i> . . . . .	4
Şekil 3.1	<i>Normal yöndeki yükün etki ettiği katı yapı</i> . . . . .	25
Şekil 3.2	<i>Uzamayan membran</i> . . . . .	26
Şekil 4.1	<i>Yarı-düzleme etkileyen hareketli noktasal yük</i> . . . . .	27
Şekil 4.2	<i>Hızın durumuna göre <math>\phi</math> potansiyeli ve <math>s</math> hareketli koordinatının <math>x_3 = 0</math> yüzeyinde: (a)sub – Rayleigh durum (<math>c &lt; c_R</math>), (b)super – Rayleigh durum (<math>c &gt; c_R</math>), (c)rezonans durum (<math>c = c_R</math>)</i> . . . . .	33
Şekil 4.3	<i>Sub-Rayleigh(<math>c &lt; c_R</math>) durumunda <math>v = 0,9</math> için (a) yatay yöndeki (4.2.16), (b) dikey yöndeki (4.2.17) yerdeğiştirmeleri ve (4.2.19) limit durumu</i> . . . . .	39
Şekil 4.4	<i>Super-Rayleigh(<math>c &gt; c_R</math>) durumunda <math>v = 0,95</math> için (a) yatay yöndeki (4.2.16), (b) dikey yöndeki (4.2.17) yerdeğiştirmeleri ve (4.2.19) limit durumu</i> . . . . .	39
Şekil 4.5	<i>Rezonans (<math>c = c_R</math>) durumunda <math>v = v_R</math> için (a) yatay yöndeki (4.2.30), (b) dikey yöndeki (4.2.30) yerdeğiştirmeleri</i> . . . . .	39
Şekil 5.1	<i>Elastik ince plaka</i> . . . . .	40
Şekil 5.2	<i><math>Q</math> ve Poisson oranı arasındaki ilişki</i> . . . . .	50

# TABLolar DİZİNİ

<b>Tablo 2.1</b>	<i>Elastik materyal sabitlerinin arasındaki ilişkiler</i>	7
------------------	---	---

# 1 GİRİŞ

Elastik katı cisimlerin yüzeylerinde ortaya çıkan dalgaların matematiksel analizi Lord Rayleigh'in 1885 yılında yayınladığı çalışma [21] ile incelenmeye başlanmıştır ve günümüzde hala aktif bir araştırma alanı olarak güncelliğini korumaktadır. Rayleigh, çalışmasında elastik bir yarı-uzayın yüzeyi(sınırı) boyunca etkili olan ve yüzeyden uzaklaştıkça etkisi kaybolan dalgaların varlığını göstermiştir. Rayleigh bu çalışmasında, yer kabuğunun altında meydana gelen depremler sonucunda ortaya çıkan enerjinin hesaplanmasında kütle dalgalarının toplam enerjisinin sismograflarla elde edilen verilerin örtüşmemesi nedeniyle yüzeyde etkili olan bir başka dalga türünün var olabileceği varsayımı üzerine kurulmuş ve Rayleigh yüzey dalgası adı ile anılan yeni bir dalga tipi ortaya çıkmıştır. Dinamik dalga problemlerinin matematiksel modellemelerinde her ne kadar kütle dalgaları açıkça ortaya çıkmakta ise de yüzey dalgaları "gizli" kalmışlardır. Bahsi geçen dalga tipinin bir elastik katının yüzeyinde neden olduğu tahribat kütle dalgalarından çok daha fazla olduğundan günümüzde dahi yüzey dalgalarının fiziksel analizi büyük önem taşımaktadır. Benzer dalga tipleri farklı materyal özelliklerine sahip, temas halindeki elastik katıların arayüzünde(Stonoley dalgası); katmanlı yapıların yüzeylerinde(Love dalgası); elastik ince plakaların kenar yüzeylerinde (Konenkov dalgası) gözlemlenmektedir [2]. Ne yazık ki bahsi geçen problemlerin matematiksel modelleri ya analitik çözümlere sahip değildirler, ya da var olan analitik çözümler gerçek hayat problemlerini modellemekte yetersiz kalmakta, yahut da bu çözümler genellikle kapalı formda olduklarından problemlerin fiziksel analizlerini imkansız kılmaktadırlar.

Bu çalışmada, Kaplunov tarafından Rayleigh yüzey dalgası ile Konenkov dalgasının etkisini açık olarak inceleyebilmek için Kaplunov [11], [12], [13], [14] geliştirilen bir asimptotik modelin inşası ve bu modelin birçok durağan ve hareketli yük problemlerine uygulaması incelenecektir. Model, Friedlander [8] ve Chadwick [3]' in çalışmalarını baz almaktadır. Friedlander, elastik yarı-düzlem için kendine çözümleri keyfi harmonik fonksiyonlar cinsinden ifade edebilmiş; Chadwick ise Friedlander' in gözden kaçan bu çalışmasını genişleterek problemin bir harmonik fonksiyon çifti tarafından değil de tek bir harmonik fonksiyon ile ifade edilebileceğini göstermiştir. Bu sayede dinamik dalga problemleri için verilen vektör denklemler bir çift skaler denkleme indirgenebilmiştir. Kaplunov tarafından geliştirilen asimptotik model ise kütle dalgalarının etkisinin göz ardı edilmesini sağlayan sadece Rayleigh(yüzey) etkisinin incelenebileceği, homojen yüzey

dalgası için kendine benzer çözümlerin yavaş zamana göre pertürbe edilmesine dayanır. Metod, hareket denklemlerini Rayleigh dalgaları için hiperbolik-eliptik bir formülasyona; Konenkov dalgaları için ise parabolik-eliptik bir formülasyona indirgemektedir. Bu her iki dalga tipinde de sınırda sırası ile hiperbolik ve parabolik denklemler elde edildiğini, elastik cismin içinde ise eliptik denklemler elde edildiği anlamına gelmektedir. O halde problemin çözümü yüzeyde hiperbolik ya da parabolik bir denklemle ifade edilen Dirichlet probleminin çözümüne indirgenmiş olur. Benzer şekilde 3-boyutlu kaplamalı ya da kaplamasız elastik dalga problemleri için de Radon dönüşümü kullanılmak suretiyle ele alınan problemler 2-boyutlu problemlere indirgenmekte ve çözümler çok daha rahatlıkla elde edilebilmektedir.

Yapmış olduğumuz bu çalışmadaki 3. Bölümde elastik yüzey dalgaları incelenmiştir. 3.1 Alt Bölümünde lineer elastodinamiğin denklemleri genel halleriyle verilmiş, 3.2 Alt Bölümünde bu denklemler aracılığıyla elde edilecek olan hareket denklemlerinin çıkarılışı ile bu denklemlere çözüm olabilecek özel seçilmiş  $\phi$  ve  $\psi$  dalga potansiyeli çözümleriyle düzlem harmonik Rayleigh dalgası incelenmiştir. Alt Bölüm 3.3'te ise keyfi alınan  $\phi$  ve  $\psi$  dalga potansiyelleri için Friedlander[8] ve Chadwick [3] yaklaşımlarına bağlı olarak sinüsoidal Rayleigh dalga çözümü sınırda elde edilip düzlemin tüm iç bölgesine genişletilebileceğinden bahsedilmiştir. 3.4 Alt Bölümünde yüzeyde meydana gelen gerilmeler için yavaş zamanda pertürbe edilen Rayleigh dalgası özçözümleri ile hiperbolik-eliptik bir model elde edilmiştir. Model, içeride pseudo-statik eliptik denklemden dolayı eliptik özellik gösterirken yüzeyde ise Rayleigh dalgasının yayılımını tanımlayan yüzey gerilme koşulları altında, Dirichlet sınır koşullarına bağlı hiperbolik bir denklem ile ifade edilmiştir. Bu olgu Rayleigh dalgasının hiperbolik-eliptik dualitesinin yanısıra yapılabilecek nümerik hesaplar için de avantajlar sağlamıştır. Alt Bölüm 3.5'te ise 3.4'teki bilgiler ışığında çatlaklı elastik yüzeyde ve kaplamalı elastik yüzeylerde karışık tipte verilen dinamik problemleri ele alınmıştır. 4. Bölümde hareketli bir noktasal yükün elastik yarı-düzleme etki etmesiyle rezonans durumu, eliptik-hiperbolik modelin gözönüne alınarak irdelenmiştir. 5. Bölümde üzerinde herhangi bir yük buldurmamayan, elastik ince bir plakada doğası gereği gerçekleşen bükülmenin, plakanın kenar yüzeyinde meydana getirdiği dalganın yayılımı pertürbasyon metodu uygulanarak geliştirilmiş parabolik-eliptik bir modelle açıklanmıştır [10].

## 2 ÖN BİLGİLER

### 2.1 Elastisite Kavramı

Elastisite ya da elastiklik; bir katı maddeye etki eden kuvvet yada yük etkisiyle katı maddenin şeklinin değişip, kuvvet etkisi ortadan kalktıktan sonra katı maddenin şeklinin eski haline dönebilmesi özelliğidir. Elastisite teorisi continuum mekaniğin bir alt dalıdır ve dış etki altında şekil değiştiren, ancak etki kaldırılınca eski formuna dönebilen cisimleri inceler.

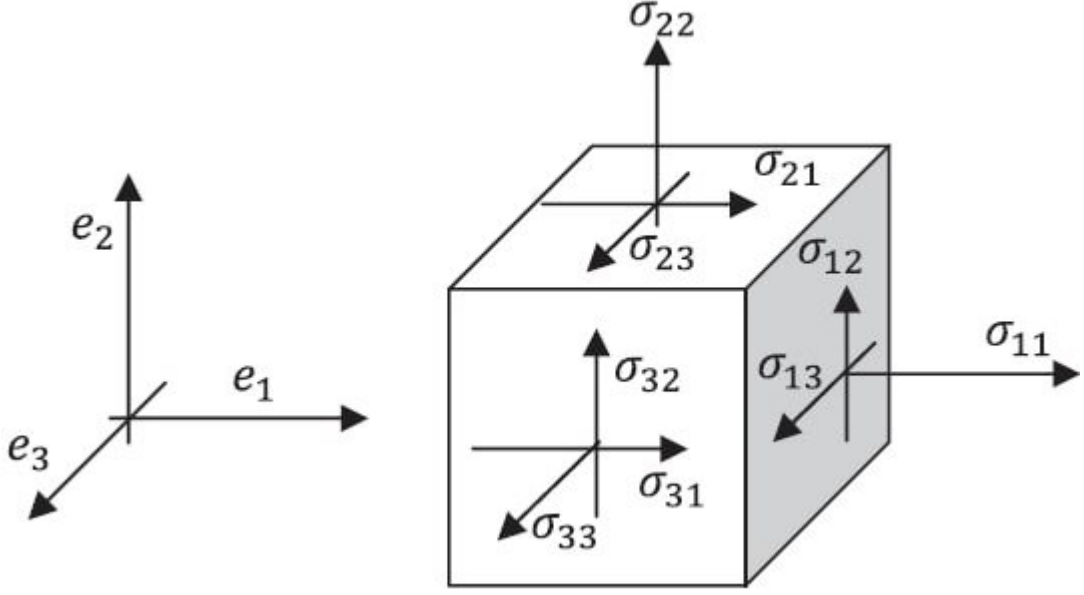
Bu bölümde tezde yer alan elastisiteyle ilgili basit tanımlamalara ve bilgilere yer verilecektir.

#### 2.1.1 Stres kavramı

**Tanım 1.** *Bir katı cisme,  $\mathbf{n}$  düzlem normal vektörü yönünde bir kuvvet etki ettiği düşünülün. Bu katı cismin yüzeyindeki birim alanların toplamı  $\Delta A_n$  ve bu birim alanlara etkiyen kuvvetlerin toplamı  $\Delta F_n$  ile gösterilsin. Stres vektörü, kuvvet vektörü ile cismin yüzey alanına oranının limitidir ve aşağıdaki şekilde ifade edilir:*

$$\lim_{\Delta A_n \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}_n}{\Delta A_n} = \frac{d\mathbf{F}_n}{dA_n} = \mathbf{T}_n. \quad (2.1.1)$$

Burada  $\mathbf{T}_n$  vektörü, birim yüzeye etkiyen normal ve teğetsel stresin toplamı olarak görülebilir. Dahası Şekil 2.1' de görüleceği gibi Cauchy tarafından geliştirilen, bir küp üzerinde altı stres bileşeni yardımıyla stres bileşenleri kavramı daha basit şekilde tanımlanabilir. Burada kartezyen koordinatların herbiri  $\mathbf{e}_i$  birim vektörüdür. Şekil 2.1' de  $\mathbf{T}_i$  stres vektörü kübün herbir  $i$  yüzündeki streslerin bileşke stres vektörü demektir.



Şekil 2.1: Gerilme bileşenleri

Buradan herbir stres bileşeni için kartezyen koordinatlar

$$\mathbf{T}_i = \sigma_{ij}e_j, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.1.2)$$

formunda yazılır. Buradaki  $\sigma_{ij}$  katsayıları Cauchy gerilme tensörü olarak bilinen  $3 \times 3$ 'lük bir matristir ve  $\boldsymbol{\sigma}$  ile gösterilir:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.1.3)$$

$\boldsymbol{\sigma}$  matrisinde  $\sigma_{ij}$  bileşenlerindeki  $i$  bileşeni  $\mathbf{T}_i$  vektörünün yüzeydeki normaline,  $j$  bileşeni ise  $\mathbf{T}_i$  gerilmesinin yönüne karşılık gelmektedir. Ayrıca  $\sigma_{ii}$  stres bileşeni normal stres ve  $\sigma_{ij}(i \neq j)$  teğetsel stres olarak adlandırılmaktadır.

### 2.1.2 Gerilme kavramı

**Tanım 2.** Bir katı cisme iç ya da dış kuvvetin etkimesiyle katı cismin üzerinde oluşacak şekil değişikliğine karşın cisimdeki noktalardaki değişim ilişkisine gerilme denir. Gerilme  $\varepsilon$  ile gösterilir. Materyalin birim uzunluğundaki değişim miktarı  $\Delta l$  ve materyalin birim uzunluğu  $l$  olmak üzere:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (2.1.4)$$

olarak tanımlanır. Gerilme, eğer cisim esnetilirse pozitif, sıkıştırılırsa negatiftir. Ayrıca gerilmenin stresten farkı boyutsuz bir ifade olmasıdır.

$\mathbf{u}(\mathbf{x})$  bir vektör alanı olsun ve  $u_i(x_1, x_2, x_3)$  bileşenleri ile ifade edilsin.  $u_i(x_1, \dots, x_n)$  fonksiyonu türevlenebilsin ve yerdeğiştirmenin kısmi türevleri  $u_{i,j} = \partial u_i / \partial x_j$  indis notasyonu ile gösterilsin. Nitekim gerilme-yerdeğiştirme ilişkisi indis notasyonu ile

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{ij} + u_{ji}) \quad (2.1.5)$$

olarak ifade edilir.

### 2.1.3 Stres-Gerilme ilişkisi

En genel haliyle stres tensörü ve gerilme tensörü arasında lineer bir ilişki vardır ve bu ilişki(Hooke Yasası)

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\delta_{ij}\varepsilon_{kl} \quad (2.1.6)$$

ile tanımlanır. Burada

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{klij} = C_{ijkl} \quad (2.1.7)$$

81 bileşenli elastik sabitlerdir ve  $C_{ijkl}$  elastik sabitleri

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (2.1.8)$$

olarak ifade edilir. Burada  $\delta_{ij}$  Kronecker delta fonksiyonu olup

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \text{ ise} \\ 0, & i \neq j \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlanır. Bütün bunlarla birlikte Hooke Yasası en bilinen formuyla aşağıdaki şekilde verilir:

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}. \quad (2.1.9)$$

Bu ifadede  $\lambda$  ve  $\mu$  Lamé elastik sabitleridir [1]. Bu ifade ayrıca

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.1.10)$$

olarak da yazılabilir. Daha açık yazmak gerekirse  $\sigma_{ij}$  tensör bileşenleri

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, & \sigma_{12} &= \mu \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), & \sigma_{13} &= \mu \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \sigma_{21} &= \mu \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right), & \sigma_{22} &= \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, & \sigma_{23} &= \mu \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \sigma_{31} &= \mu \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right), & \sigma_{32} &= \mu \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right), & \sigma_{33} &= \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{aligned}$$

şeklindedir.

## 2.2 Gradyant ve Vektörel Çarpımın Bazı Özellikleri

**Tanım 3.** Üç boyutlu kartezyen koordinat sisteminde  $(i, j, k)$  birim vektör olmak üzere bir  $f(x, y, z)$  fonksiyonunun gradyanı

$$\text{grad}(f) = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial y}j + \frac{\partial f}{\partial z}k$$

olarak tanımlanır.

**Tanım 4.** Üç boyutlu kartezyen koordinatlarda, sürekli ve türemlenebilir bir  $\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$  vektörel fonksiyonun diverjansı

$$\text{div}\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (F_x, F_y, F_z) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

olarak skaler değerli bir fonksiyon olarak tanımlanır.

**Tanım 5.**  $\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$  vektörel fonksiyonu için kartezyen koordinatlarda vektörel çarpım

$$\text{curl}(\mathbf{F}) = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

ile tanımlanır.

### 2.2.1 Özellikler

$\mathbf{A}$  ile  $\mathbf{B}$  vektör alanlar ve  $\phi$  skaler alan olmak üzere gradyant ve vektörel çarpım ile ilgili bazı özellikler şöyledir:

1.  $\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B}$
2.  $\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B}$
3.  $\nabla \cdot (\phi\mathbf{A}) = \phi(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla\phi)$
4.  $\nabla \times (\phi\mathbf{A}) = \phi(\nabla \times \mathbf{A}) + (\nabla\phi) \times \mathbf{A}$
5.  $\nabla \times (\nabla\phi) = \mathbf{0}$
6.  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$
7.  $\nabla^2\phi = \nabla \cdot (\nabla\phi)$
8.  $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla^2\mathbf{A}$



Tablo 2.1: *Elastik materyal sabitlerinin arasındaki ilişkiler*

**Kaynak:** *Achenbach, 1973, s.54*

	$E, \nu$	$E, \mu$	$\lambda, \mu$
$\lambda$	$\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\frac{\mu(E-2\mu)}{3\mu-E}$	$\lambda$
$\mu$	$\frac{E}{2(1+\nu)}$	$\mu$	$\mu$
$E$	$E$	$E$	$\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$
$K$	$\frac{E}{3(1-2\nu)}$	$\frac{\mu E}{3(3\mu-E)}$	$\lambda + \frac{2}{3}\mu$
$\nu$	$\nu$	$\frac{E-2\mu}{2\mu}$	$\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$

## 2.3 Hareket Denklemleri

Homojen izotropik elastik bir katı madde için kartezyen tensör notasyonları

$$\sigma_{ij,j} + \rho f_i = \rho \ddot{u}_i, \quad (2.3.1)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (2.3.2)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.3.3)$$

olarak özetlenir. Burada  $\sigma_{ij}$  Cauchy stress tensörü,  $u_i$  yerdeğiştirme vektörü,  $\mathbf{f}$  kuvvet,  $\rho$  yoğunluk,  $\varepsilon_{ij}$  gerilme tensörüdür.

Lineer elastisitede pek çok elastik materyal sabiti yer almaktadır.  $\lambda$  ve  $\mu$  Lamé modülü olması yanısıra, Young modülü  $E$ , Bulk modülü  $K$ , Poisson oranı  $\nu$  ve Tablo 2.1'de gösterilen bu elastik materyaller arasındaki ilişkiler de çoğu kez kullanılmaktadır.

Stres-gerilme ilişkisi olarak bilinen (2.1.9) ifadesi ile gerilme için verilen (2.3.3) ifadesi (2.3.1) eşitliğinde yerine yazılıp ifade düzenlendiğinde **Navier Denklemi** olarak bilinen aşağıdaki denklem elde edilir:

$$(\lambda + \mu)u_{j,ji} + \mu u_{i,jj} + \rho f_i = \rho \ddot{u}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.3.4)$$

Bu denklemin vektörel karşılığı ise

$$(\lambda + \mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} + \mu\nabla^2\mathbf{u} + \rho\mathbf{f} = \rho\ddot{\mathbf{u}} \quad (2.3.5)$$

olarak yazılabilir. Bu yazım pek çok yönden avantajdır. Öncelikle **Helmholtz Teoremi** [9] olarak bilinen

$$\mathbf{u} = \nabla\Phi + \nabla \times \mathbf{\Psi}, \quad \nabla \cdot \mathbf{\Psi} \quad (2.3.6)$$

ifadesinden  $\Phi$  skaler,  $\mathbf{\Psi}$  vektörel dalga potansiyellerine bağlı hareket denklemleri elde edilebilir. Bu elde etme ile ilgili detaylar 3.2 Alt Bölümünde yer almaktadır.

## 2.4 Harmonik Fonksiyonlar ve Cauchy-Riemann Denklemleri

**Tanım 6.** *Kapalı bir  $D$  bölgesinde  $f(z)$  fonksiyonu  $z_0$  noktasında türevlenebilir ve bu  $f(z)$  fonksiyonu  $z_0$  noktasının her komşuluğundaki her  $z$  noktasında da türevlenebiliyorsa  $f$  fonksiyonuna **analitik fonksiyon** denir.*

**Tanım 7.**  *$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$   $D$  bölgesinde analitik bir fonksiyon olsun. Eğer  $f$ , bu  $D$  bölgesinde analitikse,  $u(x, y)$  ve  $v(x, y)$  fonksiyonları  $D$  bölgesinde türevlenebilirdir ve aşağıda verilen **Cauchy-Riemann Denklemlerini** sağlar:*

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

**Tanım 8.**  *$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  fonksiyonu  $D \subset \mathbb{C}$  bölgesinde sürekli ve  $f$  fonksiyonu birinci ve ikinci mertebeden türevlenebiliyor olsun. Eğer verilen bu  $D$  bölgesinde  $f$  fonksiyonu*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

*ile verilen Laplace denklemini sağlıyorsa  $f$  fonksiyonu **harmonik fonksiyondur** denir.*

## 2.5 Asimptotik Yaklaşım

Bazen yapılan çalışmalarda problemlerin çözümlerini araştırırken karşılaşılan integral veya diferansiyel denklemlerde analitik çözüm bulabilmek pek mümkün olamamaktadır. Bu yüzden bu tip çalışmalarda yaklaşık çözüm tekniğinin geliştirilmesiyle asimptotik analiz kavramı geliştirilmiştir. Öncelikle 1886 yılında Poincaré asimptotik açılım tanımlamasını yapmış ve böylelikle asimptotik analizin temelleri atılmıştır [17].

Çoğu bilim insanı fiziksel ve matematiksel problemlerde integral ve diferansiyel denklemler için hesaplama yaparken asimptotik analiz metotlarından faydalanmıştır. Bu metotlar başta Watson Lemma, durgun faz metodu ve steepest descent metodu... olmak üzere kullanılmaktadır [19].

**Tanım 9.**  $f(z)$  ve  $g(z)$  bir  $D$  bölgesinde tanımlı kompleks değerli iki fonksiyon olsun.  
 $z \rightarrow z_0$  iken

$$|f| \leq K|g|, \quad 0 < |z - z_0| < \delta$$

olacak şekilde  $K$  ve  $\delta$  sabitleri varsa  $f(z) = \mathcal{O}(g(z))$  şeklinde gösterilir ve  $z \rightarrow z_0$  iken  $f, g$ 'nin "büyük  $O$ " mertebesindedir denir.

$$f(z) = \mathcal{O}(g(z)) \Rightarrow \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{g(z)} = 0$$

**Tanım 10.**  $f(z)$  ve  $g(z)$  bir  $D$  bölgesinde tanımlı kompleks değerli iki fonksiyon olsun.  
 $z \rightarrow z_0$  iken

$$|f| \leq \varepsilon|g|, \quad 0 < |z - z_0| < \delta$$

olacak şekilde her pozitif  $\varepsilon$  değeri için  $\varepsilon$ ' dan bağımsız bir  $\delta$  değeri varsa  $f(z) = o(g(z))$  şeklinde gösterilir ve  $z \rightarrow z_0$  iken  $f, g$ 'nin "küçük  $o$ " mertebesindedir denir.

Dolayısıyla  $z \rightarrow z_0$  iken  $f(z) = \mathcal{O}(g(z))$ ,  $f/g \rightarrow 0$  anlamına gelmektedir. Öte yandan  $f(z) = o(g(z))$  ise  $z \rightarrow z_0$  iken  $f/g$ 'nin sınırlı olması anlamına gelmektedir.

Dahası  $\lim_{z \rightarrow z_0} f/g = 1$  oluyorsa,  $z \rightarrow z_0$  limiti altında  $f$  ve  $g$  fonksiyonları birbirinin asimptotik eşitidir denir ve aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = 1 \Rightarrow f(z) \sim g(z), \quad z \rightarrow z_0.$$

**Tanım 11.**  $z \rightarrow z_0$  iken  $\phi_{n+1}(z) = o(\phi_n(z))$  için

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \phi_{n+1}/\phi_n = 0$$

oluyorsa,  $\{\phi_n(z)\}_n$ ,  $n = 1, 2$ , sonlu ya da sonsuz fonksiyonlar dizisine asimptotik dizi denir [17].

**Tanım 12.** Eğer  $z \rightarrow z_0$  iken  $\{\phi_n(z)\}$  bir asimptotik dizi ise  $a_n$  sabit olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(z)$$

ifadesine bir **asimptotik açılım** denir yada her  $N$  için

$$f(z) = \sum_{n=1}^N a_n \phi_n(z) + o(\phi_N(z)), \quad z \rightarrow z_0$$

ifadesine  $f(z)$  fonksiyonunun **asimptotik yaklaşımı** denir.

Asimptotik metotlar kesin çözümü bulunamayan diferansiyel ve integral hesaplamalarında yaklaşık çözüm bulabilmek için sıklıkla kullanılırlar. Bu yaptığımız çalışmadaki 3.4 Alt Bölümü ile 4. ve 5. Bölümlerinde de asimptotik açılım kavramından yararlanılmıştır.

## 2.6 Konvolüsyon

**Tanım 13.**  $f(x)$  ve  $g(x)$  integrallenebilir iki fonksiyon olsun.  $f$  ve  $g$  nin konvolüsyonu

$$(f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \xi)g(\xi)d\xi$$

olarak tanımlanır[7].

### 2.6.1 Konvolüsyonun bazı özellikleri

$f(x), g(x)$  fonksiyonları integrallenebilir fonksiyonlar,  $\delta$ ; Dirac delta fonksiyonu ve  $a$  bir sabit olmak üzere  $f(x), g(x)$  fonksiyonlarının konvolüsyonu için bazı özellikler aşağıda verilmiştir:

- i.  $f(x) * g(x) = g(x) * f(x)$
- ii.  $a(f(x) * g(x)) = (af(x)) * g(x) = (ag(x)) * f(x)$
- iii.  $\int_{-\infty}^{\infty} (f(t) * g(t))dt = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(u)du \right] \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g(u)du \right]$
- iv.  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - t)dx = f(t)$

## 2.7 Dalga Operatörü için Temel Çözüm

Çözümü  $G(x, t)$  olan ve özel başlangıç değerleri bulunduran dalga problemi aşağıdaki şekilde verilsin:

$$\begin{cases} G_{tt} = c^2 G_{xx} & -\infty < x < \infty, t > 0 \text{ ise} \\ G(x, 0) = 0, \quad G_t(x, 0) = \delta(x), & -\infty < x < \infty \text{ ise} \end{cases}$$

Bu problemin çözümü

$$G(x, t) = \begin{cases} 1/2c & |x| < ct, t > 0 \\ 0, & |x| > ct, t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

şeklinde verilir. Bu çözüm, başlangıç koşulları verilen dalga denkleminin genel çözümlerini bulmak için kullanılabilir. Ayrıca homojen olmayan dalga denklemleri için çözüm formülü de  $G(x, t)$  ile yazılabilir. Bu bağlamda verilen bu özel  $G(x, t)$  çözümü dalga denkleminin **temel çözümü** adını alır ve

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + p(x, t) & -\infty < x < \infty, t > 0 \text{ ise} \\ u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), & -\infty < x < \infty \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde genel bir problem verildiğinde çözüm:

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \int_{-\infty}^{\infty} G(x - \xi, t) g(\xi) d\xi + \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} G(x - \xi, t) f(\xi) d\xi + \\ & + \int_{\tau=0}^{\infty} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} G(x - \xi, t - \tau) p(\xi, \tau) d\xi d\tau \end{aligned}$$

olarak yazılır. Bu ifade daha bilindik şekilde

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi) d\xi + \frac{f(x+ct) - f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{\tau=0}^t \int_{\xi=x-ct+c\tau}^{x+ct-c\tau} p(\xi, \tau) d\xi d\tau$$

olarak yazılabilir ve bu çözüme **D'Alembert Çözümü** adı verilir[1].

## 2.8 Yarı-Uzay için Poisson Formülü

**Teorem 1.**  $A \subset \mathbb{R}^n$  yarı-uzayında  $g$  fonksiyonu sürekli ve sınırlı olsun ve bu yarı uzayda bir Dirichlet problemi aşağıdaki gibi verilsin:

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in A; \quad u(x) = g(x), \quad x \in \partial A.$$

Bu problem için sınırlı çözüm

$$u(x) = \frac{2x_n}{n\alpha_n} \int_{\partial A} \frac{g(y)}{|x - y|^n} dS_y$$

formülü ile verilir. Eğer  $A \subset \mathbb{R}^n$  uzayı bir yarı düzlem ise çözüm,

$$u(x, y) = \frac{y}{x} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(z, 0)}{(x - z)^2 + y^2} dz$$

formülü ile verilir.

Bu formüle **Poisson formülü** adı verilmektedir [5].

### 3 YÜZEY DALGASI

Bu bölümde Rayleigh yüzey dalgası için bir asimptotik hiperbolik-eliptik model elde edilecek ve yüzeyde meydana gelen düzlem gerilme hareketi, karışık sınır değer problemleriyle detaylı bir şekilde incelenecektir.

#### 3.1 Lineer Elastodinamiğin Denklemleri

Aşağıda verildiği gibi lineer, izotropik, elastik bir yarı-düzlem ele alınsın:

$$H_3^+ = \{(x_1; x_2; x_3) \mid -\infty < x_1 < +\infty, \quad -\infty < x_2 < +\infty, \quad 0 < x_3 < +\infty\}.$$

Elastik dalgaların üç boyuttaki hareket denklemleri aşağıdaki eşitlik ile verilir: [1]

$$\frac{\partial \sigma_{im}}{\partial x_m} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.1.1)$$

Burada  $\rho$  yoğunluğu,  $t$  zamanı,  $u_i$  yerdeğiştirme vektörü bileşenlerini,  $\sigma_{im}$  gerilme tensörü bileşenlerini ifade etmektedir. Problem bir serbest yüzey problemi olarak ele alınacaktır. Dolayısıyla  $x_3 = 0$  yüzeyinde sınır koşulları verilecektir yani gerilme tensör bileşenleri  $\sigma_{3i} = 0$ , ( $i = 1, 2, 3$ ) olacaktır. Gerilme tensör bileşenleri

$$\sigma_{ik} = \delta_{ik} \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right), \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.1.2)$$

eşitliği ile ifade edilir. Bu eşitlikte  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  yerdeğiştirme vektörü,  $\delta_{ik}$  Kronecker delta,  $\lambda$  ve  $\mu$  Lamé elastik modulüdür. (3.1.2) tensör bileşenlerinin açık ifadesi Alt Bölüm 2.1.3' te verilmiştir. Gerilme tensör bileşenleri, (3.1.1) hareket denklemlerinde yerlerine yazılırsa, yerdeğiştirme bileşenleri cinsinden

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \Delta_3 \mathbf{u} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \quad (3.1.3)$$

hareket denklemleri tekrar yazılmış olur. Burada  $\Delta_3 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$  üç boyutta Laplace operatörüdür.

#### 3.2 Düzlem Harmonik Rayleigh Dalgası

$$H_2^+ = \{(x_1; x_2) \mid -\infty < x_1 < +\infty, 0 \leq x_3 < +\infty\}$$

yarı düzlemi için iki boyutlu problem verilsin. Burada düzlem gerilme koşullarını yer değiştirme bileşenlerinde

$$u_2 = 0, \quad u_i = u_i(x_1, x_3, t), \quad (i = 1, 3)$$

biçiminde ele alınsın. Bu durumda  $\{u_1, u_3\}$  yerdeğiştirme bileşenleri,  $\phi$  skaler bir potansiyel ve  $\boldsymbol{\psi}(0, 0, \psi)$  vektör potansiyeli olmak üzere Helmholtz ayrışma teoreminden [9]  $\mathbf{u}$  yerdeğiştirme vektörü, bir skalerin gradyanı ve bir vektörün vektörel çarpımı olarak aşağıdaki biçimde yazılır:

$$\mathbf{u} = \nabla\phi + \nabla \times \boldsymbol{\psi}$$

Dolayısıyla  $H_2^+$  yarı düzleminde  $\mathbf{u}$  yerdeğiştirmesi için

$$\mathbf{u} = \nabla\phi + \nabla \times \boldsymbol{\psi} = \left( \frac{\partial\phi}{\partial x_1} - \frac{\partial\psi}{\partial x_3}, 0, \frac{\partial\phi}{\partial x_3} - \frac{\partial\psi}{\partial x_1} \right)$$

vektörel eşitliği yazılır. O zaman yerdeğiştirme bileşenleri

$$u_1 = \frac{\partial\phi}{\partial x_1} - \frac{\partial\psi}{\partial x_3}, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = \frac{\partial\phi}{\partial x_3} - \frac{\partial\psi}{\partial x_1} \quad (3.2.1)$$

eşitlikleriyle ifade edilmiş olur. Yerdeğiştirmelerin potansiyeller cinsinden ifadesi (3.1.3) hareket denklemlerinde yerine yazıldığında

$$\mu\nabla^2\mathbf{u} + (\lambda + \mu)\nabla \cdot \nabla\mathbf{u} = \rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}.$$

denklemini elde edilir. Bu denklemde (3.2.1) ile verilen yerdeğiştirme bileşenleri yerlerine yazılırsa, hareket denklemini  $\phi$  ve  $\boldsymbol{\psi}$  potansiyelleri cinsinden aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\mu\nabla^2[\nabla\phi + \nabla \times \boldsymbol{\psi}] + (\lambda + \mu)\nabla \cdot \nabla[\nabla\phi + \nabla \times \boldsymbol{\psi}] = \rho\frac{\partial^2(\nabla\phi + \nabla \times \boldsymbol{\psi})}{\partial t^2}.$$

Burada gradyant ve vektörel çarpımın Bölüm 2.2.1'de bahsedilen bazı özellikleri kullanılırsa

$$\nabla \left[ \mu\nabla^2\phi + (\lambda + \mu)\nabla^2\phi - \rho\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \right] + \nabla \times \left[ \mu\nabla^2\boldsymbol{\psi} - \rho\frac{\partial^2\boldsymbol{\psi}}{\partial t^2} \right] = \mathbf{0}$$

vektör eşitliği elde edilir. Bu vektörel eşitliğin sağlanabilmesi için

$$(\lambda + 2\mu)\nabla^2\phi - \rho\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0, \quad \mu\nabla^2\boldsymbol{\psi} - \rho\frac{\partial^2\boldsymbol{\psi}}{\partial t^2} = 0, \quad (3.2.2)$$

eşitliklerinin olması gerekir. 3.2.2 denklemlerinin ilk denklemini olan

$$(\lambda + 2\mu)\nabla^2\phi - \rho\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0$$

eşitliğinin her iki tarafı  $(\lambda + 2\mu)$  ile bölüldüğünde

$$\nabla^2 \phi - \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$$

elde edilir. Burada  $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$  olmak üzere (3.2.2)<sub>1</sub> hareket denklemi  $\phi$  potansiyeli cinsinden aşağıdaki şekilde ifade edilmiş olur:

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0. \quad (3.2.3)$$

(3.2.2)<sub>2</sub> denklemi dikkate alındığında  $\psi$  potansiyeli için  $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$  olmak üzere

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (3.2.4)$$

denklemi elde edilmiş olur. Elde edilen (3.2.3), (3.2.4) hareket denklemlerinde sırasıyla  $c_1$  boyuna dalga hızını ve  $c_2$  enine dalga hızını ifade etmektedir [1].

Bu çalışmada elastik ortamların yüzeylerinde etkili olan dalga hareketi konu edildiği için  $x_3 \rightarrow \infty$  iken, diğer bir deyişle elastik-yarı düzlemden derine inildikçe, etkisi kaybolan(sönen) çözümler aranacaktır. Dolayısıyla  $\phi$  ve  $\psi$  potansiyelleri,  $k$  dalga sayısını,  $c$  dalga hızını göstermek üzere ilerleyen dalga formunda aşağıdaki biçimde aranacaktır:

$$\phi = \phi(x_1 - ct, \alpha x_3) = A \exp[ik(x_1 - ct) - k\alpha x_3], \quad (3.2.5)$$

$$\psi = \psi(x_1 - ct, \beta x_3) = B \exp[ik(x_1 - ct) - k\beta x_3]. \quad (3.2.6)$$

(3.2.5)  $\phi$  potansiyeli (3.2.3) hareket denkleminde yazıldığında

$$Ak^2 \left( \alpha^2 - 1 + \frac{c^2}{c_1^2} \right) \exp \left[ ik(x_1 - ct) - k\alpha x_3 \right] = 0$$

eşitliği sağlanır ve buradan  $\alpha = \sqrt{1 - c^2/c_1^2}$  olmalıdır. Benzer biçimde (3.2.6) formunda alınan  $\psi$  potansiyeli de (3.2.4) hareket denkleminde yazılırsa

$\beta = \sqrt{1 - c^2/c_2^2}$  elde edilir.

(3.2.5) ve (3.2.6) ifadelerindeki  $\phi$  ve  $\psi$  fonksiyonlarının her biri  $H_2^+$  lineer elastik-yarı düzleminde harmoniktir. Ayrıca burada  $\phi$  ve  $\psi$  potansiyelleri  $x_1 - ct$  ifadesine bağlıdır. Bu ifade dalganın  $x_1$  ekseninin pozitif yönünde ilerlediği anlamına gelmektedir. Benzer şekilde  $x_1 + ct$  ifadesi ile  $x_1$  ekseninin negatif yönü boyunca ilerleyen dalgaları ifade etmektedir.

Şimdi  $\mathbf{u}\{u_1, 0, u_3\}$   $x_1$  ve  $x_3$  yönündeki yerdeğiştirmeleri,  $x_3 = 0$  yüzeyinde de  $\sigma_{31} = \sigma_{33} = 0$  sınır koşulu dikkate alınsın. Bu durumda  $\sigma_{31} = 0$

$$\mu \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_3} + \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \right) \right) = 0, \quad (3.2.7)$$



biçiminde olur ve bu eşitlik düzenlenirse

$$2\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1\partial x_3} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2} = 0 \quad (3.2.8)$$

olan sınır koşulu elde edilir. Benzer biçimde  $\sigma_{33} = 0$  sınır koşulu dalga potansiyeller cinsinden yazılırsa

$$\lambda\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1} - \frac{\partial\psi}{\partial x_3}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_3} + \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)\right) + 2\mu\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_3} + \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)\right) = 0$$

eşitliği olur ve eşitlik düzenlenirse

$$\lambda\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2} + 2\mu\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial x_3} = 0 \quad (3.2.9)$$

şeklinde sınır koşulu elde edilir.  $\lambda$  ve  $\mu$  Young modülleri için

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

eşitlikleri, (3.2.9) koşulunda yazılırsa

$$\frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2} + \left[\frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} + \frac{E}{(1 + \nu)}\right]\frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2} + \frac{E}{(1 + \nu)}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial x_3} = 0$$

olur ve burada  $(1 - 2\nu)$  ile payda eşitlenirse

$$\frac{2\nu}{(1 - 2\nu)}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2} + \frac{(2 - 2\nu)}{(1 - 2\nu)}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2} + 2\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial x_3} = 0$$

eşitliği elde edilir. Burada  $\nu$  Poisson oranı ve  $\kappa = \frac{c_1}{c_2} = \sqrt{\frac{2 - 2\nu}{1 - 2\nu}}$  olmak üzere son elde edilen sınır koşulu

$$(\kappa^2 - 2)\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2} + \kappa^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2} + 2\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial x_3} = 0 \quad (3.2.10)$$

formunda tekrar yazılmış olur.

Şimdi (3.2.5) ve (3.2.6) eşitlikleri ile verilen çözümler sınır koşullarında yazılsın.

Bunun için

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1\partial x_3} = -Aik^2 \exp[ik(x_1 - ct) - k\alpha x_3],$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} = -Bk^2 \exp[ik(x_1 - ct) - k\beta x_3],$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2} = -Bk^2\beta^2 \exp[ik(x_1 - ct) - k\beta x_3]$$

olduğundan (3.2.8) sınır koşulu için

$$k^2(-2\alpha iA - B - B\beta^2) \left[ \exp[ik(x_1 - ct) - k\alpha x_3] \right] = 0.$$

eşitliği elde edilir ve bu eşitlik

$$2\alpha iA + (1 + \beta^2)B = 0$$

olmasını gerektirir. (3.2.10) sınır koşulu için de benzer işlemler yapılacak olursa, (3.2.5) ve (3.2.6) potansiyelleri için

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} = -Ak^2 \exp[ik(x_1 - ct) - k\alpha x_3],$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3^2} = Ak^2 \alpha^2 \exp[ik(x_1 - ct) - k\alpha x_3],$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_3} = -Bik^2 \beta \exp[ik(x_1 - ct) - k\alpha x_3]$$

ifadeleri (3.2.10) sınır koşulunda yazılırsa, (3.2.10) sınır koşulu için

$$k^2(-\kappa^2 A + 2A + \kappa^2 A^2 \alpha^2 - 2Bi\beta) \left[ \exp ik(x_1 - ct) - k\alpha x_3 \right] = 0$$

eşitliği elde edilir.  $\kappa^2 = \frac{1 - \beta^2}{1 - \alpha^2}$  olduğundan bu eşitliğin sağlanabilmesi için

$$A(1 + \beta^2) - 2Bi\beta = 0$$

eşitliği sağlanmalıdır. O halde (3.2.8) ve (3.2.10) sınır koşullarından

$$2\alpha iA + (1 + \beta^2)B = 0,$$

$$(1 + \beta^2)A - 2i\beta B = 0, \quad (3.2.11)$$

homojen denklem sistemi yazılır. Bu denklem sisteminin aşikar olmayan çözümünün olabilmesi için katsayılar determinantı sıfır olmalıdır yani

$$4\alpha\beta - (1 + \beta^2)^2 = 0 \quad (3.2.12)$$

eşitliğinin sağlanması gerekir. Bu ifade (1885) çalışmasında Lord Rayleigh [21] tarafından yazılmıştır ve Rayleigh denklemi olarak adlandırılmaktadır. (3.2.12) denkleminde  $\alpha$  ve  $\beta$  değerleri yerine yazılırsa Rayleigh denklemi

$$4\sqrt{1 - \frac{c^2}{c_1^2}} \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_2^2}} = \left(2 - \frac{c^2}{c_2^2}\right)^2$$

formunda tekrar yazılır. Bu denklemin  $c = c_R$  olan tek bir reel kökü vardır. Bu denklem ve bu denklemin köklerinin bulunuşu ile ilgili detaylı bilgi için Achenbach'ın [1] çalışmasına bakılabilir. O halde  $c = c_R$  için

$$\alpha = \alpha_R = \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_1^2}}, \quad \beta = \beta_R = \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_1^2}}.$$

olarak alınır.

### 3.3 Keyfi Profil İçin Yüzey Dalgası

Önceki bölümde özel seçilmiş  $\phi$  ve  $\psi$  potansiyelleri için çözümün aşıkâr çözümden farklı olabilmesi için Rayleigh denkleminin sağlanması gerektiğini görüldü. Bu bölümde Friedlander [8] ve Chadwick'in [3] çalışmalarında verilen yaklaşımlar kullanılarak keyfi profildeki yüzey harmonik  $\phi$  ve  $\psi$  potansiyelleri için  $x_3 = 0$  sınırında sinüsoidal Rayleigh dalga çözümü elde edilip bu çözüm tüm düzleme genişletilecektir [20].

Öncelikle düzlem harmonik  $\phi$  ve  $\psi$  potansiyelleri

$$\phi = \phi(x_1 - ct, \alpha x_3), \quad \psi = \psi(x_1 - ct, \beta x_3) \quad (3.3.1)$$

şeklinde verilsin. Daha önce tanımlanan  $\alpha = \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_1^2}}$  ve  $\beta = \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_2^2}}$  ifadeleri ile  $\phi$  ve  $\psi$  keyfi düzlem harmonik fonksiyonları (3.2.3) ve (3.2.4) hareket denklemlerinde yazılırsa,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3^2} + \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2} + \beta^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} = 0 \quad (3.3.2)$$

denklemleri elde edilir. Ayrıca  $\phi$  ve  $\psi$  düzlem harmonik fonksiyonları  $x_3 = 0$  yüzeyinde verilen (3.2.8) ve (3.2.10) sınır koşullarında yazılırsa,

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial^2 \phi(x_1 - ct, 0)}{\partial x_1 \partial x_3} + (1 + \beta^2) \frac{\partial^2 \psi(x_1 - ct, 0)}{\partial x_1^2} &= 0, \\ -(1 + \beta^2) \frac{\partial^2 \phi(x_1 - ct, 0)}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi(x_1 - ct, 0)}{\partial x_1 \partial x_3} &= 0 \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

eşitliklerine ulaşılır. Bu bölüm boyunca çok sık kullanılacak olan ve Alt Bölüm 2.4'te verilen Cauchy-Riemann eşitlikleri herhangi bir düzlem harmonik  $f(x, ky)$  fonksiyonu için aşağıdaki şekilde verilmektedir.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -k \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{k} \frac{\partial \bar{f}}{\partial y}, \quad \bar{\bar{f}} = -f. \quad (3.3.4)$$

Burada  $\bar{f}$  ifadesi  $f$  fonksiyonunun harmonik eşleniğidir ve (3.3.4) eşitlikleri yardımıyla (3.3.3) koşulları aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\begin{aligned} 2\alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + (1 + \beta^2) \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x_1^2} &= 0, \\ (1 + \beta^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + 2\beta \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x_1^2} &= 0. \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

(3.3.5) homojen denklem sisteminin sıfır çözümü dışında çözümünün olabilmesi için katsayılar determinantının sıfır olması gerekir. Bu durum ise bize Rayleigh denklemini verir. (3.2.6) ve (3.2.5) eşitlikleri ile verilen özel  $\phi$  ve  $\psi$  potansiyellerinden ziyade, keyfi olan  $\phi$  ve  $\psi$  düzlem harmonik potansiyel çözümleri için de (3.2.12) Rayleigh denkleminin yazılabilmesi anlamına gelir. O halde

$$\phi = \phi(x_1 - c_R t, \alpha_R x_3), \quad \psi = \psi(x_1 - c_R t, \beta_R x_3) \quad (3.3.6)$$

harmonik öz fonksiyonları için  $x_3 = 0$  sınırında, (3.3.3) koşullarından görüleceği gibi  $\phi$  ve  $\psi$  potansiyelleri arasında

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = -\frac{2}{1 + \beta_R^2} \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \quad (3.3.7)$$

bağıntısı elde edilir. Ayrıca sadece  $x_3 = 0$  sınırında geçerli olan (3.3.7) bağıntısı, Hilbert dönüşümü kullanılarak  $H_2^+$  yarı düzleminin tüm iç bölgesine

$$\begin{aligned} \psi(x_1 - c_R t, \beta_R x_3) &= \frac{2\alpha_R}{1 + \beta_R^2} \bar{\phi}(x_1 - c_R t, \beta_R x_3) \\ \phi(x_1 - c_R t, \alpha_R x_3) &= -\frac{2\beta_R}{1 + \beta_R^2} \bar{\psi}(x_1 - c_R t, \alpha_R x_3). \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

eşitlikleriyle genişletilir. Bu genişleme ile ilgili detaylı bilgi Chadwick [3] tarafından verilmiştir.

### 3.4 Hiperbolik-Eliptik Model

Bu bölümde,  $H_{(2)}^+$  yarı düzleminin  $x_3 = 0$  sınırı boyunca homojen olmayan sınır koşulları ile verilen bir yüzey gerilme problemi ele alınacaktır [12],[19]. Homojen olmayan sınır koşulları

$$\sigma_{31} = Q(x_1, t), \quad \sigma_{33} = P(x_1, t) \quad (3.4.1)$$

biçiminde verilsin. (3.4.1) ile verilen sınır koşulları, dalga potansiyelleriyle (3.2.8) ve (3.2.10) eşitlikleriyle aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1\partial x_3} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2} &= \frac{Q(x_1, t)}{\mu}, \\ (\kappa^2 - 2)\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2} + \kappa^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2} + 2\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial x_3} &= \frac{P(x_1, t)}{\mu}. \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

Şimdi (3.3.6) eşitlikleri ile verilen özfonksiyonları  $\tau = \varepsilon t$  ( $\varepsilon \ll 1$ ) yavaş zaman parametresine göre pertürbe edilsin. Öncelikle (3.2.3) ve (3.2.4) hareket denklemi için  $\alpha = \alpha_R$  ve  $\beta = \beta_R$  olmak üzere

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2} + \left(\frac{\alpha_R^2 - 1}{c_R^2}\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0$$

eşitliği yazılır. Buradan  $\tau$  yavaş parametresi kullanılarak

$$\frac{\partial}{\partial t} = -c_R\frac{\partial}{\partial x_1} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial \tau}$$

operatörü (3.2.3) hareket denkleminde uygulanırsa (3.2.3) hareket denklemi

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2} + \frac{\alpha_R^2 - 1}{c_R^2} \left( c_R^2 \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2} - \varepsilon c_R \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1\partial \tau} - \varepsilon c_R \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1\partial \tau} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2\phi}{\partial \tau^2} \right) = 0$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifadede gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2} + \alpha_R^2 \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2} + 2\frac{\varepsilon}{c_R}(1 - \alpha_R^2)\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1\partial \tau} - \frac{\varepsilon^2}{c_R^2}(1 - \alpha_R^2)\frac{\partial^2\phi}{\partial \tau^2} = 0 \quad (3.4.3)$$

olduğu görülür. Benzer işlemler (3.2.4) hareket denklemi için tekrarlanırsa

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2} + \beta_R^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} + 2\frac{\varepsilon}{c_R}(1 - \beta_R^2)\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial \tau} - \frac{\varepsilon^2}{c_R^2}(1 - \beta_R^2)\frac{\partial^2\psi}{\partial \tau^2} = 0 \quad (3.4.4)$$

pertürbe denklemi elde edilir. Şimdi  $\phi$  ve  $\psi$  dalga potansiyellerini

$$\phi(x_1 - c_R t, x_3, \tau) = \phi_0(x_1 - c_R t, \alpha_R x_3, \tau) + \varepsilon \phi_1(x_1 - c_R t, x_3, \tau) + \dots, \quad (3.4.5)$$

$$\psi(x_1 - c_R t, x_3, \tau) = \psi_0(x_1 - c_R t, \beta_R x_3, \tau) + \varepsilon \psi_1(x_1 - c_R t, x_3, \tau) + \dots$$

asimptotik seri açılımları biçiminde yazalım. Burada  $\phi_0$  ve  $\psi_0$  terimleri asimptotik açılımın esas terimleri olup, (3.3.6) özfonksiyonlarının pertürbe edilmiş halleriyle örtüşmektedir.  $\phi$  ve  $\psi$  potansiyellerinin (3.4.5) asimptotik açılımları (3.4.3) ve (3.4.4) sınır denklemlerinde yerine yazılır ve sadece  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  mertebesinde terimler alınır

$$\frac{\partial^2\phi_1}{\partial x_3^2} + \alpha_R^2 \frac{\partial^2\phi_1}{\partial x_1^2} + \frac{2}{c_R}(1 - \alpha_R^2)\frac{\partial^2\phi_0}{\partial x_1\partial \tau} = 0, \quad (3.4.6)$$

$$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x_3^2} + \beta_R^2 \frac{\partial^2\psi_1}{\partial x_1^2} + \frac{2}{c_R}(1 - \beta_R^2)\frac{\partial^2\psi_0}{\partial x_1\partial \tau} = 0, \quad (3.4.7)$$

denklemleri elde edilir. (3.4.6) ve (3.4.7) denklemlerinin çözümlerini aşağıdaki biçimde ararız:

$$\phi_1 = \phi_{10} + x_3\phi_{11}, \quad \psi_1 = \psi_{10} + x_3\psi_{11} \quad (3.4.8)$$

Burada  $\phi_{10}$ ,  $\phi_{11}$  ve  $\psi_{10}$ ,  $\psi_{11}$  fonksiyonları keyfi düzlem harmonik fonksiyonlardır. Öncelikle (3.4.8) çözümleri (3.4.3) denkleminde yazılırsa

$$\frac{\partial^2 \phi_{10}}{\partial x_3^2} + 2\frac{\partial \phi_{11}}{\partial x_3} + x_3 \frac{\partial^2 \phi_{11}}{\partial x_3^2} + \alpha_R^2 \frac{\partial \phi_{10}^2}{\partial x_1^2} + \alpha_R^2 x_3 \frac{\partial^2 \phi_{11}}{\partial x_1^2} = \frac{-2}{c_R} (1 - \alpha_R^2) \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x_1 \partial \tau}$$

elde edilir. Bu denklemde  $\phi_{10}$ ,  $\phi_{11}$  fonksiyonları harmonik olduğundan

$$\frac{\partial \phi_{11}}{\partial x_3} = \frac{1 - \alpha_R^2}{c_R} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x_1 \partial \tau},$$

ifadesi bulunur. Bu eşitlikte (3.3.4) ile verilen Cauchy-Riemann eşitlikleri kullanılırsa

$$\frac{\partial \phi_{11}}{\partial x_3} = -\frac{1 - \alpha_R^2}{\alpha_R c_R} \frac{\partial^2 \overline{\phi_0}}{\partial x_3 \partial \tau}$$

yazılır ve  $x_3$  bileşenine göre integre edilirse

$$\phi_{11} = -\frac{1 - \alpha_R^2}{\alpha_R c_R} \frac{\partial^2 \overline{\phi_0}}{\partial \tau},$$

bulunur.  $\phi_{11}$  için elde edilen bu ilişki (3.4.8) ile verilen çözümünde yerine yazıldığında

$$\phi_1 = \phi_{10} - x_3 \frac{1 - \alpha_R^2}{\alpha_R c_R} \frac{\partial^2 \overline{\phi_0}}{\partial \tau} \quad (3.4.9)$$

ilişkisi elde edilir. Benzer işlemlerle (3.4.8) eşitliği (3.4.7) denkleminde yazılıp  $\psi_{10}$  ve  $\psi_{11}$  fonksiyonlarının harmoniklik özelliği kullanılırsa

$$\psi_1 = \psi_{10} - x_3 \frac{1 - \beta_R^2}{\beta_R c_R} \frac{\partial^2 \overline{\psi_0}}{\partial \tau}, \quad (3.4.10)$$

bağıntısı elde edilir. Şimdi (3.4.2) sınır koşulları altında problem, normal yük ( $Q = 0$ ,  $P \neq 0$ ) ve teğetsel yük ( $P = 0$ ,  $Q \neq 0$ ) problemi olacak şekilde iki alt probleme ayrılarak incelenecektir.

İlk olarak normal yönde uygulanan  $P$  yükünü  $P = \varepsilon P_\varepsilon$  ile normalize ederek, yükün etkisi incelensin. (3.4.5) asimptotik açılımları ile (3.4.9) ve (3.4.10) bağıntıları kullanılarak  $\phi_1$

ve  $\psi_1$  fonksiyonlarının türevleri aşağıdaki biçimde yazılır:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi_1}{\partial x_1} &= \frac{\partial\phi_{10}}{\partial x_1} - x_3 \frac{1 - \alpha_R^2}{\alpha_R c_R} \frac{\partial^2 \bar{\phi}_0}{\partial x_1 \partial \tau} \\ \frac{\partial\phi_1}{\partial x_1 \partial x_3} &= \frac{\partial^2 \phi_{10}}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{1 - \alpha_R^2}{\alpha_R c_R} \frac{\partial^2 \bar{\phi}_0}{\partial x_1 \partial \tau} \\ \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} &= \frac{\partial\psi_{10}}{\partial x_1} - x_3 \frac{1 - \beta_R^2}{\beta_R c_R} \frac{\partial^2 \bar{\psi}_0}{\partial x_1 \partial \tau} \\ \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_1^2} &= \frac{\partial^2 \psi_{10}}{\partial x_1^2} - x_3 \frac{1 - \beta_R^2}{\beta_R c_R} \frac{\partial^3 \bar{\psi}_0}{\partial x_1^2 \partial \tau} \\ \frac{\partial\psi_1^2}{\partial x_3^2} &= \frac{\psi_{10}^2}{\partial x_3^2} - \frac{2(1 - \beta_R^2)}{\beta_R c_R} \frac{\partial^2 \bar{\psi}_0}{\partial x_3 \partial \tau}.\end{aligned}$$

Bu türevler (3.4.2) sınır koşullarında yazılır ve (3.3.4) Cauchy-Riemann eşitlikleri kullanılırsa

$$2 \frac{\partial^2 \phi_{10}}{\partial x_1 \partial \tau} - 2 \frac{(1 - \alpha_R^2)}{c_R \alpha_R} \frac{\partial^2 \bar{\phi}_0}{\partial x_1 \partial \tau} + \frac{\partial^2 \psi_{10}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \psi_{10}}{\partial x_3^2} + 2 \frac{(1 - \beta_R^2)}{\beta_R c_R} \frac{\partial^2 \bar{\psi}_0}{\partial x_3 \partial \tau} = 0$$

eşitliği ve bu eşitlikte (3.3.7) bağıntısı dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}2 \frac{\partial^2 \phi_{10}}{\partial x_1 \partial x_3} + (1 + \beta_R^2) \frac{\partial^2 \bar{\psi}_{10}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{(1 - \alpha_R^2)}{c_R \alpha_R} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x_1 \partial \tau} \\ + 2 \frac{(1 - \beta_R^2)}{\beta_R c_R} \frac{\partial^2 \bar{\psi}_0}{\partial x_3 \partial \tau} = 0\end{aligned}\quad (3.4.11)$$

denklemini elde edilmiş olur. Yine benzer şekilde (3.4.2) sınır koşullarındaki ikinci sınır koşulunda yazmak üzere  $\phi_1$  ve  $\psi_1$  fonksiyonları için türevler aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x_3^2} &= \frac{\partial^2 \phi_{10}}{\partial x_3^2} - 2 \frac{(1 - \alpha_R^2)}{\alpha_R c_R} \frac{\partial^2 \bar{\phi}_0}{\partial x_3 \partial \tau}, \\ \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_1 \partial x_3} &= \frac{\partial^2 \psi_{10}}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{(1 - \beta_R^2)}{\beta_R c_R} \frac{\partial^2 \bar{\psi}_0}{\partial x_1 \partial \tau}.\end{aligned}$$

Bu ifadeler (3.4.2) sınır koşulunda yazılırsa

$$\begin{aligned}(\kappa^2 - 2) \frac{\partial^2 \phi_{10}}{\partial x_1^2} + \kappa^2 \frac{\partial^2 \phi_{10}}{\partial x_3^2} - 2\kappa^2 \frac{(1 - \alpha_R^2)}{\alpha_R c_R} \frac{\partial^2 \bar{\phi}_0}{\partial x_3 \partial \tau} + 2 \frac{\partial^2 \psi_{10}}{\partial x_1 \partial x_3} \\ - 2 \frac{(1 - \beta_R^2)}{\beta_R c_R} \frac{\partial^2 \bar{\psi}_0}{\partial x_1 \partial \tau} = \frac{P_\varepsilon}{\mu}\end{aligned}$$

denklemini elde edilir. Bulunan bu denklem ifade düzenlenirse aşağıdaki biçimde tekrar yazılır:

$$\begin{aligned}\kappa^2 (1 - \alpha_R^2) \frac{\partial^2 \phi_{10}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \phi_{10}}{\partial x_1^2} - 2\kappa^2 \frac{(1 - \alpha_R^2)}{\alpha_R c_R} \frac{\partial^2 \bar{\phi}_0}{\partial x_3 \partial \tau} \\ - 2 \frac{(1 - \beta_R^2)}{\beta_R c_R} \frac{\partial^2 \bar{\psi}_0}{\partial x_1 \partial \tau} = \frac{P_\varepsilon}{\mu}.\end{aligned}$$

Burada  $\kappa = \sqrt{\frac{c_1^2}{c_2^2}} = \frac{\sqrt{1 - \beta_R^2}}{\sqrt{1 - \alpha_R^2}}$  olduğundan  $\kappa^2(1 - \alpha_R^2) = 1 - \beta_R^2$  olur. Bu sonuç elde edilen denklemde kullanılırsa sınır koşulu

$$\begin{aligned} -(1 + \beta_R^2) \frac{\partial^2 \phi_{10}}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi_{10}}{\partial x_1 \partial x_3} - 2\kappa^2 \frac{(1 - \alpha_R^2)}{\alpha_R c_R} \frac{\partial^2 \bar{\phi}_0}{\partial x_3 \partial \tau} \\ - 2 \frac{(1 - \beta_R^2)}{\beta_R c_R} \frac{\partial^2 \bar{\psi}_0}{\partial x_1 \partial \tau} = \frac{P_\varepsilon}{\mu} \end{aligned} \quad (3.4.12)$$

biçiminde yazılır. (3.3.4) Cauchy-Riemann eşitliklerinden elde edilen

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_0(x_1 - c_R t, 0) &= -\frac{2\alpha_R}{1 + \beta_R^2} \phi_0(x_1 - c_R t, 0) \\ &= -\frac{1 + \beta_R^2}{2\beta_R} \phi_0(x_1 - c_R t, 0) \end{aligned} \quad (3.4.13)$$

bağıntısı (3.4.11) sınır koşulunda yazılsın. O zaman

$$2 \frac{\partial^2 \phi_{10}}{\partial x_1 \partial x_3} + (1 + \beta_R^2) \frac{\partial^2 \psi_{10}}{\partial x_1^2} = \frac{2}{c_R} \left[ \frac{(1 - \alpha_R^2)}{\alpha_R} \frac{\partial^2 \bar{\phi}_0}{\partial x_1 \partial \tau} - \frac{(1 - \beta_R^2)}{\beta_R} \frac{\partial^2 \bar{\psi}_0}{\partial x_3 \partial \tau} \right]$$

yazılır ve burada eşitliğin her iki tarafında eşlenik alınırsa

$$2 \frac{\partial^2 \bar{\phi}_{10}}{\partial x_1 \partial x_3} + (1 + \beta_R^2) \frac{\partial^2 \bar{\psi}_{10}}{\partial x_1^2} = \frac{2}{c_R} \left[ \frac{(1 - \beta_R^2)}{\beta_R} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x_3 \partial \tau} - \frac{(1 - \alpha_R^2)}{\alpha_R} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x_1 \partial \tau} \right]$$

ifadesi elde edilir. Ayrıca

$$\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x_3 \partial \tau} = -\beta_R \frac{\partial^2 \bar{\psi}_0}{\partial x_1 \partial \tau} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial^2 \bar{\psi}_0}{\partial x_1 \partial \tau} = -\frac{(1 + \beta_R^2)}{2\beta_R} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x_1 \partial \tau}$$

yazılabildiğinden

$$\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x_3 \partial \tau} = -\frac{(1 + \beta_R^2)}{2} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x_1 \partial \tau} \quad \text{elde edilir ve} \quad \alpha \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 \bar{\phi}_0}{\partial x_1 \partial x_3}$$

olduğu da göz önüne alınıp bu ifadeler (3.4.11) sınır koşulunda yazılırsa

$$2\alpha \frac{\partial^2 \phi_{10}}{\partial x_1^2} + (1 + \beta_R^2) \frac{\partial^2 \bar{\psi}_{10}}{\partial x_1^2} = \frac{2}{c_R} \left[ \frac{1 - \beta_R^4}{2\beta_R} - \frac{1 - \alpha_R^2}{\alpha_R} \right] \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x_1 \partial \tau} \quad (3.4.14)$$

elde edilmiş olur. Benzer olarak (3.4.13) bağıntısı (3.4.12) sınır koşulunda yazılırsa

$$-(1 + \beta_R^2) \frac{\partial^2 \phi_{10}}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi_{10}}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{2}{c_R} \left[ \kappa^2 \frac{(1 - \alpha_R^2)}{\alpha_R} \frac{\partial^2 \bar{\phi}_0}{\partial x_3 \partial \tau} + \frac{(1 - \beta_R^2)}{\beta_R} \frac{\partial^2 \bar{\psi}_0}{\partial x_1 \partial \tau} \right] = \frac{P_\varepsilon}{\mu}$$

olur ve Cauchy-Riemann eşitlikleri kullanılırsa (3.4.12) sınır koşulu

$$\begin{aligned} -(1 + \beta_R^2) \frac{\partial^2 \phi_{10}}{\partial x_1^2} - 2\beta_R \frac{\partial^2 \bar{\psi}_{10}}{\partial x_1^2} &= \frac{2}{c_R} \left[ (1 - \beta_R^2) - \frac{1 - \beta_R^4}{2\beta_R^2} \right] \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x_1 \partial \tau} + \\ &+ \frac{P_\varepsilon}{\mu} \end{aligned} \quad (3.4.15)$$



biçiminde tekrar yazılır. Dikkat edilecek olursa (3.4.14) ve (3.4.15) denklemlerinin sol tarafının determinanı sifıra eşittir. O zaman çözülebilirlik koşulundan (3.4.14) denklemi  $2\beta_R$  ile çarpılıp, (3.4.15) denklemi de  $(1 + \beta_R)$  ile çarpılıp elde edilen ifadeler taraf tarafa toplanırsa

$$\frac{2}{c_R} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x_1 \partial \tau} \left[ (1 - \beta_R^4) - \frac{\beta_R}{\alpha_R} (1 - \alpha_R^2) - \frac{\alpha_R (1 - \beta_R^2)}{\beta_R} \right] = - \frac{(1 + \beta_R^2) P_\varepsilon}{2\mu} \quad (3.4.16)$$

eşitliği elde edilir. Buradan sistemin çözümü

$$\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x_1 \partial \tau} = \frac{(1 + \beta_R^2) c_R P_\varepsilon}{4\mu B} \quad (3.4.17)$$

olarak yazılır. Burada  $B$ :

$$B = \frac{\beta_R}{\alpha_R} (1 - \alpha_R^2) + \frac{\alpha_R}{\beta_R} (1 - \beta_R^2) - (1 - \beta_R^4) \quad (3.4.18)$$

olarak alınmıştır. (3.4.16) denkleminin sağ tarafında  $P_\varepsilon$  yükünü  $p_\varepsilon = p_\varepsilon(x_1 - c_R t, \tau)$  olmak üzere yavaş zaman parametresine göre

$$P_\varepsilon(x_1, t) = \frac{\partial^2 p_\varepsilon}{\partial \tau \partial x_1} \quad (3.4.19)$$

olacak biçimde alalım. (3.4.19) ifadesi (3.4.17) denkleminde yerine yazılıp,  $x_1$  ve  $\tau$  değişkenine göre inrege edilirse

$$\phi_0 = \frac{(1 + \beta_R^2) c_R}{4\mu B} p_\varepsilon \quad (3.4.20)$$

sonucuna varılır. Dikkat edilirse  $\phi_0 = \phi_0(x_1 - c_R t, \tau)$  en başta varsayıldığı gibidir.

Sonuç olarak keyfi normal  $P$  yükü için (3.4.17) denkleminin çözümü daha genel bir profilde elde edilmiş olur. Bununla birlikte bu denklem overall dynamic response için Rayleigh dalga katkısının tam bir doğrulamasıdır. Dahası geliştirilen pertürbasyon metodu, Rayleigh dalga kutbuna karşılık gelen rezidünün hesabına karşılık gelir. Son olarak

$$\frac{2\varepsilon}{c_R} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial \tau} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{1}{c_R^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (3.4.21)$$

asimptotik operatör bağıntısı (3.4.17) denkleminde  $\phi = \phi_0$  için uygulanırsa orjinal değişkenlerde (3.4.17) denklemi aşağıdaki gibi tekrar yazılır:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} - \frac{1}{c_R^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{1 + \beta_R^2}{2\mu B} P. \quad (3.4.22)$$

Dolayısıyla Rayleigh dalgası için asimptotik formülasyon (3.3.2) ile verilen pseudo-eliptik denklem için skaler bir probleme indirgenir. Bahsi geçen eliptik denklem daha önceki alt bölümde (3.4.22) dalga denklemi formunda olan  $x_3 = 0$  sınırında verilen Dirichlet sınır koşulu ile verilir.

Yatay teğetsel yük durumunda ise (3.3.2) denklemi için  $x_3 = 0$  sınırında bir skaler problem içeren benzer asimptotik bir model aşağıdaki hiperbolik denklemle verilir:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} - \frac{1}{c_R^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{1 + \beta_R^2}{2\mu B} Q. \quad (3.4.23)$$

Burada  $\psi$  potansiyeli (3.3.8) denkleminde Hilbert dönüşümü ile elde edilir. Model Rayleigh dalgasının etkisi olduğu yüzey civarı dinamik problemlerinde oldukça kullanışlıdır. Dikkat edilirse elde edilen yaklaşık formülasyon Rayleigh dalgasına yöneliktir ve kütleli dalga etkisini içermez.

Bu düşünce altında Rayleigh dalgasının eliptik-hiperbolik doğası ortaya çıkmaktadır. Sınırdaki hiperbolik, içeride eliptik davranış söz konusudur. Ancak yerdeğıştirmenin bütün bileşenleri yüzey boyunca olan hareketi göstermektedir. Özel olarak normal yük problemi için sadece yatay yerdeğıştirme bileşeni (3.4.21) ilişkisi ile elde edilen hiperbolik denklemden  $u_1$  bulunur.

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - \frac{1}{c_R^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{2\varepsilon}{c_R} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial \tau}.$$

Burada eşitliğin sağ tarafındaki ifade (3.2.1) eşitliğinde  $u_1$  yerdeğıştirmesinin  $x_1$  bileşenine göre türevi alınıp elde edilebilir ve bu ifadede (3.4.17) ve (3.3.8) eşitliklerinden yararlanılarak

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - \frac{1}{c_R^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{1 - \beta_R^4}{4\mu B} \frac{\partial P}{\partial x_1}$$

olarak yazılır.

### 3.5 Karışık Tipteki Yüzey Problemleri

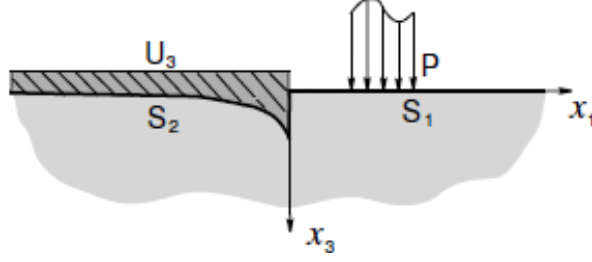
Bir önceki bölümde geliştirilen asimptotik model zımba ve çatlak problemlerinde ortaya çıkan karışık sınır değer problemlerine de uygulanabilir. Bu bölümde bir önceki başlıkta incelenen hiperbolik-eliptik modelin ışığı altında karışık sınır koşullarıyla verilen iki tür problem ele alınacaktır. İlk olarak  $H_2^+$  lineer elastik yarı uzayın sınırında normal yönde uygulanan yük problemini ele alalım.  $x_3 = 0$  sınırında teğetsel gerilme sıfır yani

$\sigma_{31} = 0$  olsun.  $P$  normal stres, düşey yerdeğiştirme  $U_3$  olmak üzere

$$\sigma_{33} = P(x_1, t), \quad x_1 \in S_1, \quad (3.5.1)$$

$$u_3 = U_3(x_1, t), \quad x_1 \in S_2, \quad (3.5.2)$$

sınır koşulları verilsin. Yani lineer elastik yarı düzlem  $S_1$  ve  $S_2$  şeklinde iki parça olarak düşünölsün. (3.3.2) eliptik denklemleri (3.3.8) eşitlikleri ve (3.4.22) denkleminde



Şekil 3.1: Normal yöndeki yükün etkisi ettiği katı yapı

**Kaynak:** *Dynamic Localization Phenomena in Elasticity, Acoustics and Electromagnetism, 2013, s.84*

yararlanarak  $x_3 = 0$  yüzeyinde

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3^2} + \alpha_R^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} = 0 \quad (3.5.3)$$

eliptik denklemi için karışık sınır değer problemine ulaşılır [6]). Bunlardan biri olan  $P$  yükünün yaratmış olduğu gerilmenin  $S_1$  yüzeyine olan etkisi aşağıdaki hiperbolik denklemle verilir:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} - \frac{1}{c_R^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{1 + \beta_R^2}{2\mu B} P. \quad (3.5.4)$$

Diğer koşul ise yüzeyin geriye kalan kısmında yani  $S_2$  sınırında  $P$  yükünün etkisiyle oluşmuş dalganın sebep olduğu yerdeğiştirme, (3.5.2) koşulunda (3.2.1) yerdeğiştirmesi yazılıp burada (3.3.7) ilişkisi uygulanırsa aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3^2} = \frac{1 + \beta_R^2}{1 - \beta_R^2} U_3. \quad (3.5.5)$$

Dolayısıyla  $\phi$  hacimsel potansiyelden gelen Rayleigh dalga alanına katkısı sırasıyla  $S_1$  ve  $S_2$  sınırlarına karşılık gelen (3.5.4) ve (3.5.5) karışık sınır koşullarını sınır koşulu kabul eden (3.5.3) eliptik denkleminin sonucudur.

Benzer bir formülasyon  $H_2^+$  lineer elastik yarı düzlemin bir kısmının esneyen fakat

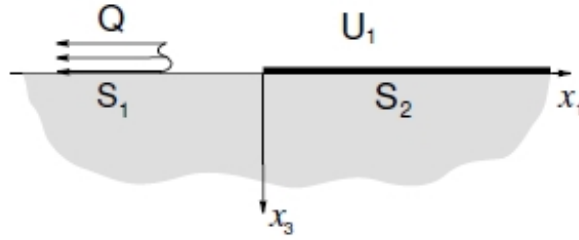
uzamayan bir zarla kaplı olan ve yatay yönde gerilmeye ve yerdeğiştirmeye sebep olacak bir yük problemi için de elde edilir. Sınır koşulları aşağıdaki şekilde verilir.

$$\sigma_{33} = 0, \quad x_3 = 0, \quad (3.5.6)$$

$$\sigma_{31} = Q(x_1, t), \quad x_1 \in S_1, \quad (3.5.7)$$

$$u_1 = U_1(x_1, t), \quad x_1 \in S_2. \quad (3.5.8)$$

Burada  $x_3 = 0$  yüzeyinde  $Q$ ;  $S_1$  düzlemindeki yatay gerilme ve  $U_1$ ;  $S_2$  düzlemindeki yerdeğiştirmedir.



şekil 3.2: Uzamayan membran

**Kaynak:** *Dynamic Localization Phenomena in Elasticity, Acoustics and Electromagnetism, 2013, s.85*

Burada  $\psi$  potansiyeli için ise skaler problem aşağıdaki eliptik denklem ile ifade edilir.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2} + \beta_R^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} = 0. \quad (3.5.9)$$

Sınır koşulları ise bir önceki probleme benzer olarak aşağıdaki şekilde verilir.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} - \frac{1}{c_R^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{1 + \beta_R^2}{2\mu B} Q, \quad x_1 \in S_1, \quad (3.5.10)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_3} = \frac{1 + \beta_R^2}{1 - \beta_R^2} U_1, \quad x_1 \in S_2. \quad (3.5.11)$$

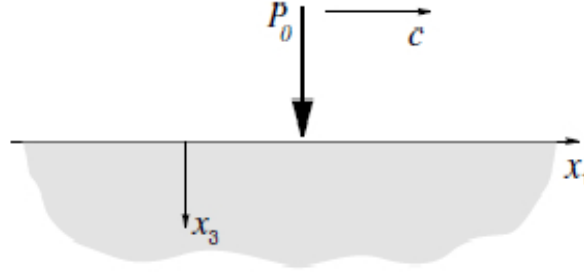
Burada yazılan (3.5.11) ifadesi (3.5.8) koşulunda (3.2.1) yerdeğiştirmesi yazılıp burada (3.3.7) ilişkisinin uygulanmasıyla elde edilmiştir. Bu durumda  $\psi$  kayma potansiyelinin katkısı (3.3.8) eşitliğinden elde edilir.

## 4 HAREKETLİ YÜK PROBLEMLERİ

Bu bölümde hareketli yüklerin yakın-rezonans durumu için Rayleigh dalgası formülasyonunda hiperbolik-eliptik modelin ne kadar kullanışlı olduğu gösterilecektir. Beklenildiği üzere Rayleigh hızına yakın hızlarda hareket eden yükün neden olduğu dinamik tepkinin, hacim dalgalarından pek de etkilenmediği görülecektir.

### 4.1 Sabit Hızlı Noktasal Yük

Bu kısımda lineer elastik bir yarı düzlemde sabit hızla hareket eden noktasal bir yük için klasik bir yüzey gerilme problemi ele alınacaktır [4]. Şekilde de görüldüğü gibi elastik



Şekil 4.1: Yarı-düzleme etkiyen hareketli noktasal yük

**Kaynak:** *Dynamic Localization Phenomena in Elasticity, Acoustics and Electromagnetism, 2013, s.92*

yarı düzleme etkiyen  $P_0$  noktasal yükü  $c$  sabit hızıyla  $x_1$  yönünde hareket etmektedir. (3.3.2) eliptik denklemiyle verilen problemin  $x_3 = 0$  yüzeyinde sınır koşulları aşağıdaki şekildedir:

$$\sigma_{31} = 0, \quad \sigma_{33} = P_0 \delta(x_1 - ct). \quad (4.1.1)$$

Rayleigh dalgası için asimptotik model 3.4 Alt Bölümünde inşa edilmişti. Burada da benzer olarak  $s = (x_1 - ct)$  hareketli koordinat sistemine geçilirse yarı-düzlem içerisinde

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3^2} + \alpha_R^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} = 0 \quad (4.1.2)$$

eliptik denklemi,  $x_3 = 0$  sınırında ise

$$\left(1 - \frac{c^2}{c_R^2}\right) \frac{\partial \phi^2}{\partial s^2} = \frac{1 + \beta_R^2}{2\mu B} P_0 \delta(s) \quad (4.1.3)$$

hiperbolik denklemi ile ifade edilen sınır-değer problemi elde edilir. Dikkat edilirse (4.1.3) ifadesinde  $c = c_R$  olduğunda rezonans etki gözlemlenebilir. Bu skaler problemi  $\phi_s = \frac{\partial \phi}{\partial s}$  olarak Dirichlet problemi şeklinde yazmaya çalışalım:

$$\frac{\partial^2 \phi_s}{\partial x_3^2} + \alpha_R^2 \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial s^2} = 0, \quad (4.1.4)$$

İçeride verilen eliptik denklemin  $s'$  ye göre türevi alınrsa (4.1.4) denklemi yazılabilir. Sınır koşulunu  $\phi_s$  cinsinden yazmak bu kadar kolay değildir. Bunun için şu yolu izleyelim: (4.1.3) hiperbolik sınır koşulunun  $s$  değişkenine göre integrali alınrsa

$$\frac{c_R^2 - c^2}{c_R^2} \int_0^s \frac{\partial \phi_s}{\partial s} ds = \frac{1 + \beta_R^2}{2\mu B} P_0 \int_0^s \delta(s) ds$$

ifadesi elde edilir. Burada  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$  özelliği kullanılırsa

$$\frac{c_R^2 - c^2}{c_R^2} \phi_s(s, 0) = \frac{1 + \beta_R^2}{2\mu B} P_0 \left( \int_{-\infty}^s \delta(s) ds - \int_{-\infty}^0 \delta(s) ds \right)$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafında parantezin içi  $s > 0$  iken 1,  $s > 0$  iken 0 olduğundan  $x_3 = 0$  sınırında  $\phi_s(s, 0)$  potansiyeli aşağıdaki gibi yazılır:

$$\phi_s(s, 0) = \frac{(1 + \beta_R^2)c_R^2 P_0}{(c_R^2 - c^2)2\mu B} \left( H(s) - \frac{1}{2} \right) \quad (4.1.5)$$

Burada  $H(s)$  fonksiyonu Heaviside fonksiyonudur. Dolayısıyla (4.1.4) problemi (4.1.5) ifadesiyle  $x_3 = 0$  sınırında verilen bir Dirichlet problemine dönüşmüş olur.  $x_3 = 0$  sınırında geçerli olan (4.1.5) potansiyeli Poisson formülü ile tüm yarı düzleme genişletilebilir. Şimdi  $\phi_s(s, 0)$  ifadesi Poisson formülünde yerine yazılırsa  $\phi_s$  potansiyelinin yarı-düzlem içerisindeki ifadesi

$$\phi_s(s, x_3) = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha_R x_3 c_R^2 (1 + \beta_R^2) P_0}{2\mu B (c_R^2 - c^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(r - s)^2 + \alpha_R^2 x_3^2} \left( H(r) - \frac{1}{2} \right) dr \quad (4.1.6)$$

integral eşitliği ile yazılır. Bu integral ifade Heaviside fonksiyonunu içerdiği için aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\phi_s(s, x_3) = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha_R x_3 c_R^2 (1 + \beta_R^2) P_0}{2\mu B (c_R^2 - c^2)} \left[ \int_0^{+\infty} \frac{1}{(r - s)^2 + \alpha_R^2 x_3^2} dr - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(r - s)^2 + \alpha_R^2 x_3^2} dr \right].$$

İntegraller hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \phi_s(s, x_3) = & \frac{1}{\pi} \frac{c_R^2(1 + \beta_R^2)P_0}{2\mu B(c_R^2 - c^2)} \left[ \lim_{r \rightarrow \infty} \arctan\left(\frac{r-s}{\alpha_R x_3}\right) - \arctan\left(\frac{-s}{\alpha_R x_3}\right) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \left( \lim_{r \rightarrow \infty} \arctan\left(\frac{r-s}{\alpha_R x_3}\right) - \lim_{r \rightarrow -\infty} \arctan\left(\frac{r-s}{\alpha_R x_3}\right) \right) \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla Dirichlet probleminin tüm yarı-düzlemdeki çözümü

$$\phi_s(s, x_3) = \frac{1}{\pi} \frac{c_R^2(1 + \beta_R^2)P_0}{2\mu B(c_R^2 - c^2)} \arctan\left(\frac{s}{\alpha_R x_3}\right) \quad (4.1.7)$$

eşitliği ile verilmiş olur. Şimdi  $\psi_s$  potansiyelini elde edeceğiz.

$$\phi_s = \frac{\partial \phi}{\partial s} = \frac{1}{\pi} \frac{c_R^2(1 + \beta_R^2)P_0}{2\mu B(c_R^2 - c^2)} \arctan\left(\frac{s}{\alpha_R x_3}\right) \quad (4.1.8)$$

eşitliğinin sırası ile  $s$  değişkenine göre integrali,  $x_3$  değişkenine göre türevi alınır

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_3} = \frac{-(1 + \beta_R^2)P_0 c_R^2 \alpha_R}{4\mu B(c_R^2 - c^2)} \ln(s^2 + \alpha_R^2 x_3^2) \quad (4.1.9)$$

olduğu görülür. (3.3.7) ve (3.3.8) eşitlikleri, (4.1.9) ifadesine uygulanırsa

$$\psi_s(s, x_3) = \frac{\partial \psi}{\partial s} = -\frac{\alpha_R P_0 c_R^2}{2\pi \mu B(c_R^2 - c^2)} \ln(s^2 + \beta_R^2 x_3^2). \quad (4.1.10)$$

elde edilir. (4.1.9) ve (4.1.10) ifadelerine de (3.3.8) eşitlikleri uygulandığında aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1} = \frac{\partial \phi}{\partial s} = \frac{(1 + \beta_R^2)P_0 c_R^2}{2\pi \mu B(c_R^2 - c^2)} \arctan\left(\frac{s}{\alpha_R x_3}\right) \quad (4.1.11)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_3} = \frac{2\alpha_R \beta_R P_0 c_R^2}{2\pi \mu B(c_R^2 - c^2)} \arctan\left(\frac{s}{\beta_R x_3}\right) \quad (4.1.12)$$

Sabit hızlı noktasal yük için dalga potansiyellerinin  $x_1$  ve  $x_3$  bileşenlerine göre türevleri elde edildiğine göre bu dalga potansiyelleri kullanılarak yerdeğiştirmeler de hesaplanabilir.  $u_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi}{\partial x_3}$  ifadesinde (4.1.11) ve (4.1.12) eşitlikleri yazılırsa

$$u_1^{st} = \frac{(1 + \beta_R^2)P_0 c_R^2}{2\pi \mu B(c_R^2 - c^2)} \left[ \arctan\left(\frac{s}{\alpha_R x_3}\right) - \frac{2\alpha_R \beta_R}{1 + \beta_R^2} \arctan\left(\frac{s}{\beta_R x_3}\right) \right]$$

elde edilir. Burada Rayleigh denklemi,  $2\alpha_R \beta_R = \frac{(1 + \beta^2)^2}{2}$  kullanılırsa  $u_1^{st}$  yerdeğiştirmesi

$$u_1^{st} = \frac{(1 + \beta_R^2)P_0 c_R^2}{2\pi \mu B(c_R^2 - c^2)} \left[ \arctan\left(\frac{s}{\alpha_R x_3}\right) - \frac{1 + \beta_R}{2} \arctan\left(\frac{s}{\beta_R x_3}\right) \right] \quad (4.1.13)$$

şeklinde yazılır. Benzer biçimde  $u_3$  yerdeğiştirmesi için  $u_3 = \frac{\partial\phi}{\partial x_3} + \frac{\partial\psi}{\partial x_1}$  eşitliğinde

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_3} = -\frac{(1 + \beta_R^2)P_0c_R^2\alpha_R}{4\pi\mu B(c_R^2 - c^2)} \ln(s^2 + \alpha_R^2x_3^2) \quad (4.1.14)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1} = \frac{\alpha_R^2P_0c_R^2}{2\pi\mu B(c_R^2 - c^2)} \ln(s^2 + \beta_R^2x_3^2) \quad (4.1.15)$$

ifadeleri yazılırsa

$$u_3^{st} = -\frac{(1 + \beta_R^2)P_0c_R^2\alpha_R}{4\pi\mu B(c_R^2 - c^2)} \left[ \ln(s^2 + \alpha_R^2x_3^2) - \frac{2}{1 + \beta_R^2} \ln(s^2 + \beta_R^2x_3^2) \right] \quad (4.1.16)$$

yerdeğiştirmesi elde edilmiş olur. Bu elde edilen (4.1.13) ve (4.1.16) yerdeğiştirmelerine

$$\xi = \frac{s}{x_3}, \quad v = \frac{c}{c_2}, \quad v_R = \frac{c_R}{c_2} \quad (4.1.17)$$

boyutsuzlaştırma parametreleri uygulanırsa,  $u_1^{st}$  ve  $u_3^{st}$  yerdeğiştirmeleri boyutsuzlaştırılmış olarak aşağıdaki gibi tekrar yazılır.

$$u_1^{st} = \frac{(1 + \beta_R^2)P_0v_R^2}{2\pi\mu B(v_R^2 - v^2)} \left[ \arctan \frac{\xi}{\alpha_R} - \frac{1 + \beta_R^2}{2} \arctan \frac{\xi}{\beta_R} \right], \quad (4.1.18)$$

$$u_3^{st} = -\frac{(1 + \beta_R^2)P_0v_R^2\alpha_R}{4\pi\mu B(v_R^2 - v^2)} \left[ \ln(\xi^2 + \alpha_R^2) - \frac{2}{1 + \beta_R^2} \ln(\xi^2 + \beta_R^2) \right]. \quad (4.1.19)$$

Yukarıda elde edilen yerdeğiştirmelerin  $c = c_R$  Rayleigh dalga hızının rezonans durumunda Cole&Huth' un çalışmasındaki tam çözümün Taylor açılımındaki esas terim olduğu gösterilebilir [4].

## 4.2 Noktasal Bir Yük İçin Transient Hareket Problemi

Bu bölümde  $H_2^+$  lineer elastik yarı uzayı için  $x_3 = 0$  düzlemine anlık etki yapan noktasal yük problemine karşılık gelen transient problem incelenecektir [13]. Bu durumda  $x_3 = 0$  sınır koşulu

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial s^2} - \frac{1}{c_R^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = \frac{1 + \beta_R^2}{2\mu B} P_0\delta(s) \quad (4.2.1)$$

şeklinde ele alınacaktır. (4.2.1) hiperbolik denkleminin temel çözümü,  $H$  Heaviside fonksiyonu ve  $s = x_1 - ct$  hareketli koordinatı olmak üzere

$$\phi(x_1, t) = \frac{c_R}{2} [H(x_1 - c_Rt) - H(x_1 + c_Rt)] \quad (4.2.2)$$



şeklinde olduğu bilinmektedir [5]. (4.2.1) hiperbolik denkleminin sağ tarafı ile (4.2.2) temel çözümünün konvolüsyonununundan

$$\phi(s, 0, t) = B_1 \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ H((s - \xi) + c(t - \tau) - c_R(t - \tau)) - H((s - \xi) + c(t - \tau) + c_R(t - \tau)) \right] \delta(\xi) d\xi d\tau$$

çözümü elde edilir. Burada  $B_1 = \frac{(1 + \beta_R^2)c_R P_0}{4\mu B}$  olmak üzere son eşitlik düzenlenirse

$$\phi(s, 0, t) = B_1 \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} [H(\xi + (c - c_R)(t - \tau)) - H(\xi + (c + c_R)(t - \tau))] \delta(s - \xi) d\xi d\tau$$

olur. Bu ifadede Dirac-delta fonksiyonunun  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - y) f(x) dx = f(y)$  özelliği kullanılırsa  $\phi$  potansiyeli

$$\phi(s, 0, t) = -B_1 \int_0^t [H(s + (c - c_R)(t - \tau)) - H(s + (c + c_R)(t - \tau))] d\tau$$

şeklinde ifade edilir. Burada  $r = t - \tau$  değişken değişimi yapılırsa  $\phi$  potansiyeli

$$\phi(s, 0, t) = B_1 \int_0^t [H(s + (c - c_R)r) - H(s + (c + c_R)r)] dr. \quad (4.2.3)$$

formunda yazılır. (4.2.3) ifadesinin analizi sonucu  $c$  ve  $c_R$  hızlarının birbiriyle olan ilişkisine göre *sub-Rayleigh* ( $c < c_R$ ), *super-Rayleigh* ( $c > c_R$ ) ve son olarak *rezonans* ( $c = c_R$ ) durumları ortaya çıkacaktır.

$$s_1 = t(c_R - c), \quad s_2 = -t(c_R + c)$$

olmak üzere:

1. *sub-Rayleigh* ( $c < c_R$ ) durumunda  $\phi$  çözümü

$$\phi(s, 0, t) = \begin{cases} B_1 \frac{s - s_1}{c_R - c}, & 0 \leq s < s_1; \\ -B_1 \frac{s - s_2}{c_R + c}, & s_2 < s < 0; \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (4.2.4)$$

2. *super - Rayleigh* ( $c > c_R$ ) durumunda  $\phi$  çözümü

$$\phi(s, 0, t) = \begin{cases} 2B_1 \frac{c_R s}{c^2 - c_R^2}, & s_1 \leq s \leq 0; \\ -B_1 \frac{s - s_2}{c_R + c}, & s_2 < s < s_1; \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (4.2.5)$$

3. *rezonans* ( $c = c_R$ ) durumunda  $\phi$  çözümü  $s_2 = -2c_R t$  olmak üzere

$$\phi(s, 0, t) = \begin{cases} -B_1 \frac{s - s_2}{2c_R}, & s_2 \leq s \leq 0; \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (4.2.6)$$

şeklinde elde edilir.  $x_3 = 0$  yüzeyinde hızın durumuna göre elde edilmiş olan (4.2.4), (4.2.5) ve (4.2.6) çözümleri orijinal problemin fiziksel analizi için öngörü sağlar. Özellikle Şekil 4.2'da verilen grafiklerde görüldüğü gibi (4.2.6) çözümünün, grafiği diğer durumlardan farklıdır. Yani  $c \neq c_R$  iken çözümler  $s$  koordinatına göre süreklidir. Fakat hareketli noktasal yük altında rezonans durumu gösteren grafikte,  $s = 0$  noktasında, zaman doğrusal olarak ilerledikçe süreksizlik görülür. Sonuç olarak  $c = c_R$  iken sabit hızlı noktasal yük için gözlemlenmiş durum beklenemez. Dolayısıyla hareketli bir yükün etki ettiği yarı-sonsuz bir yapının analizi Rayleigh dalgasıyla ilişkili olarak ortaya çıkar.

$x_3 = 0$  yüzeyinde geçerli olan  $\phi$  çözümleri düzlemin içerisine Poisson formülü kullanılarak genişletilir. Öncelikle *sub - Rayleigh* durum için  $s_1 = t(c_R - c)$  ve  $s_2 = -t(c_R + c)$  olmak üzere  $x_3 = 0$  yüzeyindeki  $\phi$  çözümünü Poisson formülünde yazılın:

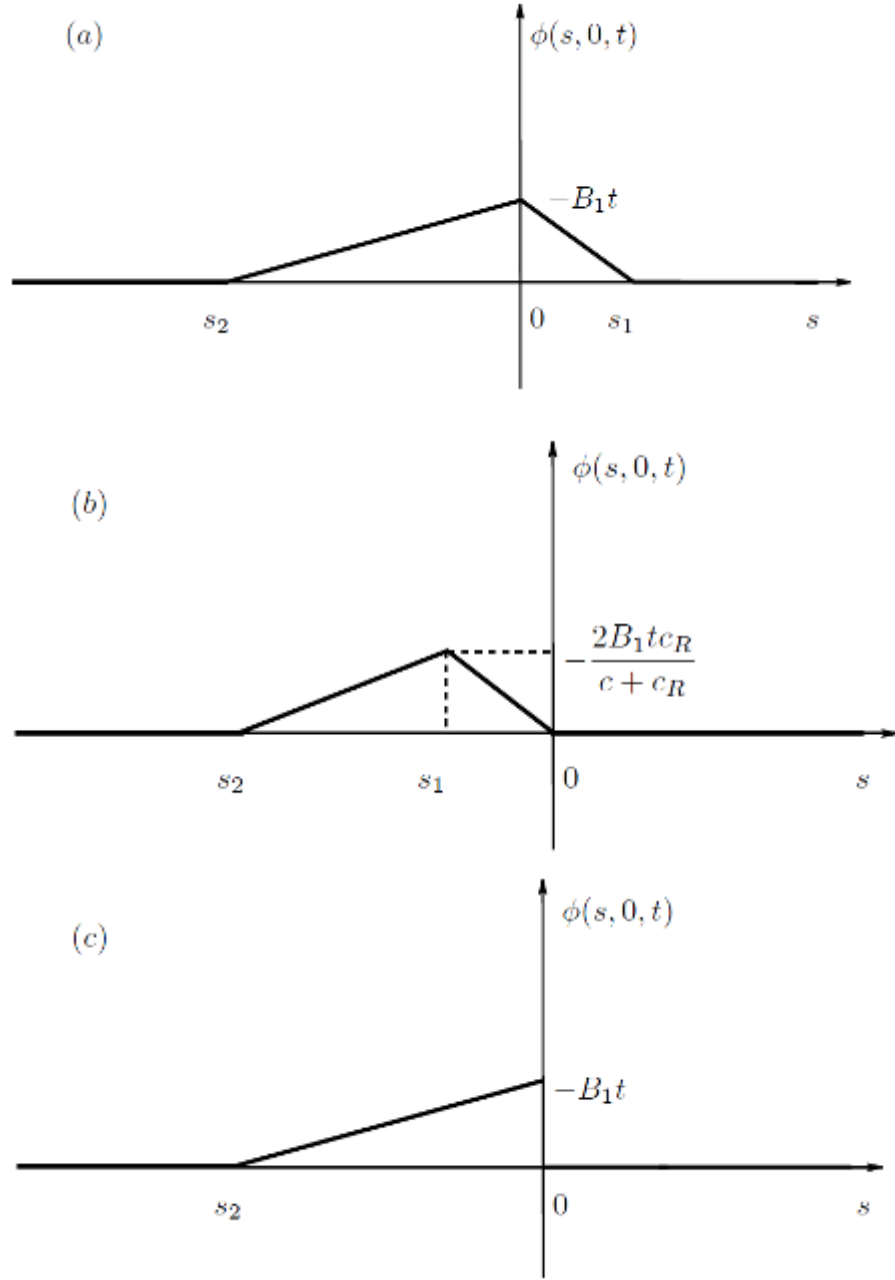
$$\phi(s, x_3, t) = \frac{1}{\pi} \int_{s_2}^{s_1} \frac{\alpha_R x_3}{(r - s)^2 + \alpha_R^2 x_3^2} \phi(r, 0, t) dr. \quad (4.2.7)$$

Dolayısıyla

$$\phi(s, x_3, t) = \frac{-\alpha_R x_3 B_1}{\pi(c_R + c)} \int_{s_2}^0 \frac{r - s_2}{(r - s)^2 + \alpha_R^2 x_3^2} dr + \frac{\alpha_R x_3 B_1}{\pi(c - c_R)} \int_0^{s_1} \frac{r - s_1}{(r - s)^2 + \alpha_R^2 x_3^2} dr$$

elde edilir. Bu integraller alınıp gerekli düzenlemeler yapıldığında  $\phi$  çözümü aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\phi(s, x_3, t) = \frac{B_1}{\pi(c_R + c)} \eta(s, x_3, s_2) + \frac{B_1}{\pi(c_R - c)} \eta(s, x_3, s_1) \quad (4.2.8)$$



Şekil 4.2: Hızın durumuna göre  $\phi$  potansiyeli ve  $s$  hareketli koordinatının  $x_3 = 0$  yüzeyinde: (a)sub – Rayleigh durum ( $c < c_R$ ), (b)super – Rayleigh durum ( $c > c_R$ ), (c)rezonans durum ( $c = c_R$ )

**Kaynak:** *Dynamic Localization Phenomena in Elasticity, Acoustics and Electromagnetism*, 2013, s.95

Burada

$$\eta(s, x_3, z) = \frac{\alpha_R x_3}{2} \ln \frac{(s-z)^2 + \alpha_R^2 x_3^2}{s^2 + \alpha_R^2 x_3^2} + s \arctan \frac{s}{\alpha_R x_3} - (s-z) \arctan \frac{s-z}{\alpha_R x_3}$$

olarak ifade edilmektedir. Şimdi  $\phi(s, x_3, t)$  potansiyelinin  $x_3$  bileşenine göre türevi alınırsa

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_3} = \frac{B_1 \alpha_R}{2\pi} \left[ \frac{1}{c_R + c} \ln \frac{(s-s_2)^2 + \alpha_R^2 x_3^2}{s^2 + \alpha_R^2 x_3^2} + \frac{1}{c_R - c} \ln \frac{(s-s_1)^2 + \alpha_R^2 x_3^2}{s^2 + \alpha_R^2 x_3^2} \right] \quad (4.2.9)$$

ifadesi yazılır. (4.2.9) ifadesinin  $s$  bileşenine göre türevini alıp,  $x_3$  bileşenine göre integralini alırsak da

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = \frac{B_1}{\pi} \left[ \frac{1}{c_R + c} \left( \arctan \frac{\alpha_R x_3}{s-s_2} - \arctan \frac{\alpha_R x_3}{s} \right) + \frac{1}{c_R - c} \left( \arctan \frac{\alpha_R x_3}{s-s_1} - \arctan \frac{\alpha_R x_3}{s} \right) \right] \quad (4.2.10)$$

eşitliği elde edilir. Yerdeğiştirmelerin ifade edilebilmesi için  $\psi(s, x_3, t)$  potansiyelinin de bulunması gerekir. Potansiyeller arasında verilen

$$\psi_s(s, 0, t) = -\frac{2}{(1 + \beta_R^2)} \phi_s(s, 0, t)$$

bağıntısından yararlanılırsa  $\psi_s(s, x_3, t)$  potansiyeli

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = -\frac{B_1 \alpha_R}{\pi(1 + \beta_R^2)} \left[ \frac{1}{c_R + c} \ln \frac{(s-s_2)^2 + \beta_R^2 x_3^2}{s^2 + \beta_R^2 x_3^2} + \frac{1}{c_R - c} \ln \frac{(s-s_1)^2 + \beta_R^2 x_3^2}{s^2 + \beta_R^2 x_3^2} \right].$$

biçiminde yazılır.  $\phi$  potansiyeline benzer olarak (4.2.11) ifadesinin de  $x_3$  bileşenine göre türevi alınıp,  $s$  bileşenine göre integrali alınırsa  $\psi_{x_3}$  aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_3} = -\frac{B_1 2\alpha_R \beta_R}{\pi(1 + \beta_R^2)} \left[ \frac{1}{c_R + c} \left( \arctan \left( \frac{s-s_2}{\beta_R x_3} \right) - \arctan \left( \frac{s}{\beta_R x_3} \right) \right) + \frac{1}{c_R - c} \left( \arctan \left( \frac{s-s_1}{\beta_R x_3} \right) - \arctan \left( \frac{s}{\beta_R x_3} \right) \right) \right]. \quad (4.2.11)$$

Elde edilen  $\frac{\partial \psi}{\partial s}$  ifadesinin  $s$  bileşenine göre integrali alınırsa  $\psi$  potansiyeli

$$\psi(s, x_3, t) = \frac{B_1 \alpha_R}{\pi(1 + \beta_R^2)} \left[ \frac{1}{c_R + c} \zeta(s, x_3, s_2) + \frac{1}{c_R - c} \zeta(s, x_3, s_1) \right] \quad (4.2.12)$$

eşitliği ile verilir. Burada  $\zeta(s, x_3, z)$  fonksiyonu

$$\zeta(s, x_3, z) = (s-z) \ln \frac{(s-z)^2 + \beta_R^2 x_3^2}{s^2 + \beta_R^2 x_3^2} + 2\beta_R x_3 \left[ \arctan \frac{s}{\beta_R x_3} - \arctan \frac{s-z}{\beta_R x_3} \right]$$

biçiminde tanımlanır. Yerdeğiştirme bileşeni  $u_1$  için (4.2.10) ve (4.2.11) ifadeleri (3.2.1) eşitliğinde yazılırsa

$$u_1 = \frac{B_1}{\pi} \left[ \frac{1}{c_R + c} \left( \arctan \left( \frac{s - s_2}{\beta_R x_3} \right) - \arctan \left( \frac{s}{\beta_R x_3} \right) \right) + \frac{1}{c_R - c} \left( \arctan \left( \frac{s - s_1}{\beta_R x_3} \right) - \arctan \left( \frac{s}{\beta_R x_3} \right) \right) \right] \quad (4.2.13)$$

yerdeğiştirmesi elde edilir. (4.2.13) yerdeğiştirmesinde

$$\xi = \frac{s}{x_3}, \quad \tau = \frac{c_2 t}{x_3}, \quad v = \frac{c}{c_2}, \quad v_R = \frac{c_R}{c_2}, \quad (4.2.14)$$

$$\xi_1 = \frac{s_1}{x_3} = (v_1 - v)\tau, \quad \xi_2 = \frac{s_2}{x_3} = -(v + v_R)\tau \quad (4.2.15)$$

boyutsuz parametreleri kullanılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$u_1(\xi, \tau) = \frac{-B_1}{\pi c_2 (v_R + v)} \left[ \arctan \frac{\xi - \xi_2}{\alpha_R} - \frac{2\alpha_R \beta_R}{1 + \beta_R^2} \arctan \frac{\xi - \xi_2}{\beta_R} \right] - \frac{B_1}{\pi c_2 (v_R - v)} \left[ \arctan \frac{\xi - \xi_1}{\alpha_R} - \frac{2\alpha_R \beta_R}{1 + \beta_R^2} \arctan \frac{\xi - \xi_1}{\beta_R} \right] + \frac{2B_1 v_R}{\pi c_2 (v_R^2 - v^2)} \left[ \arctan \frac{\xi}{\alpha_R} + \frac{2\alpha_R \beta_R}{1 + \beta_R^2} \arctan \frac{\xi}{\beta_R} \right] \quad (4.2.16)$$

elde edilir. Benzer olarak  $u_3$  yerdeğiştirmesi için de (3.2.1) ifadesinde (4.2.9) ve (4.2.11) eşitlikleri yazılırsa

$$u_3(\xi, \tau) = \frac{B_1 \alpha_R}{2\pi} \left[ \frac{1}{c_R + c} \ln \frac{(s - s_2)^2 + \alpha_R^2 x_3^2}{s^2 + \alpha_R^2 x_3^2} + \frac{1}{c_R - c} \ln \frac{(s - s_1)^2 + \alpha_R^2 x_3^2}{s^2 + \alpha_R^2 x_3^2} \right] - \frac{B_1 \alpha_R}{\pi(1 + \alpha_R^2)} \left[ \frac{1}{c_R + c} \ln \frac{(s - s_2)^2 + \beta_R^2 x_3^2}{s^2 + \beta_R^2 x_3^2} + \frac{1}{c_R - c} \ln \frac{(s - s_1)^2 + \beta_R^2 x_3^2}{s^2 + \beta_R^2 x_3^2} \right].$$

yerdeğiştirmesi elde edilir. Normal yerdeğiştirme bileşeni  $u_3$ , (4.2.14) ve (4.2.15) ile verilen parametrelerin uygulanmasıyla aşağıdaki şekilde yazılır:

$$u_3(\xi, \tau) = \frac{B_1 \alpha_R}{2\pi c_2 (v_R + v)} \left[ \ln \frac{(\xi - \xi_2)^2 + \alpha_R^2}{\xi^2 + \alpha_R^2} - \frac{2}{1 + \beta_R^2} \ln \frac{(\xi - \xi_2)^2 + \beta_R^2}{\xi^2 + \beta_R^2} \right] + \frac{B_1 \alpha_R}{2\pi c_2 (v_R - v)} \left[ \ln \frac{(\xi - \xi_1)^2 + \alpha_R^2}{\xi^2 + \alpha_R^2} - \frac{2}{1 + \beta_R^2} \ln \frac{(\xi - \xi_1)^2 + \beta_R^2}{\xi^2 + \beta_R^2} \right]. \quad (4.2.17)$$

Elde edilen yerdeğiştirmelerin geçerlilik aralığı (4.2.14) ile tanımlanan boyutsuz parametreler cinsinden aşağıdaki biçimde belirlenir:

$$|v_R - v| \ll 1, \quad \tau \gg 1, \quad |\xi| \ll \tau. \quad (4.2.18)$$

(4.2.18) rezonans durumuna karşılık gelmektedir. (4.2.16) ve (4.2.17) ile verilen yaklaşık çözümler problemin özellikleri hakkında bilgi verir. Özellikle zaman yeterince büyüdüğünde yani  $\tau \rightarrow \infty$  iken aşağıdaki davranışlar elde edilir:

$$u_i(\xi, \tau) \sim u_i^\infty(\xi, \tau), \quad u_i^\infty = u_i^{st}(\xi) + u_i^r(\tau) \quad (i = 1, 2). \quad (4.2.19)$$

Burada

$$u_1^{st}(\xi, \tau) = \frac{2B_1v_R}{\pi c_2(v_R^2 - v^2)} \left[ \arctan \frac{\xi}{\alpha_R} - \frac{2\alpha_R\beta_R}{1 + \beta_R^2} \arctan \frac{\xi}{\beta_R} \right] \quad (4.2.20)$$

olarak tanımlıdır ve (4.2.16) ve (4.2.17) eşitlikleri

$$\arctan \left( \frac{\xi - \xi_2}{\alpha_R} \right) \rightarrow \frac{\pi}{2}, \quad \xi \rightarrow \infty$$

olduğundan elastik yarı-düzlemin yerdeğiştirme bileşeni  $u_1^r(\tau) = u_1^{r0}$  olmak üzere

$$u_1^r(\tau) = \frac{B_1v(1 - \beta_R^2)}{2c_2(v_R^2 - v^2)} \quad (4.2.21)$$

olarak bulunur ki bu da katı cismin hareketine karşılık gelir. Dolayısıyla  $u_1$  yerdeğiştirmesi *sub - Rayleigh* ( $c < c_R$ ) durum için yaklaşık olarak

$$u_1(\xi, \tau) = \frac{2B_1v_R}{\pi c_2(v_R^2 - v^2)} \left[ \arctan \frac{\xi}{\alpha_R} - \frac{2\alpha_R\beta_R}{1 + \beta_R^2} \arctan \frac{\xi}{\beta_R} \right] + \frac{B_1v(1 - \beta_R^2)}{2c_2(v_R^2 - v^2)} \quad (4.2.22)$$

şeklinde yayılır. Benzer şekilde (4.2.17) ifadesi yani  $u_3$  yerdeğiştirmesi için de  $\tau \rightarrow \infty$  ve  $\xi \rightarrow \infty$  durumları incelenecektir.

$y \rightarrow \pm\infty$  iken  $\ln \frac{(x - y)^2 + a^2}{x^2 + b^2} \sim 2 \ln y - \ln(x^2 + b^2)$  davranışından yerdeğiştirme yaklaşık olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$u_2^\infty(\xi, \tau) \sim \frac{B_1\alpha_R}{2\pi c_2(v_R + v)} \left[ 2 \ln \xi_2 - \ln(\xi^2 + \alpha_R^2) - \frac{2}{1 + \beta_R^2} \left( 2 \ln \xi_2 - \ln(\xi^2 + \beta_R^2) \right) \right] + \frac{B_1\alpha_R}{2\pi c_2(v_R - v)} \left[ 2 \ln \xi_1 - \ln(\xi^2 + \alpha_R^2) - \frac{2}{1 + \beta_R^2} \left( 2 \ln \xi_1 - \ln(\xi^2 + \beta_R^2) \right) \right] \quad (4.2.23)$$

(4.2.23) ifadesinde cebirsel sadeleştirmeler yapıldığında

$$u_2^\infty(\xi, \tau) \sim -\frac{B_1\alpha_R}{2\pi c_2(v_R^2 - v^2)} \left[ \ln(\xi^2 + \alpha_R^2) - \frac{2}{1 + \beta_R^2} \ln(\xi^2 + \beta_R^2) \right] - \frac{B_1\alpha_R}{2\pi c_2} \left( \frac{1 - \beta_R^2}{1 + \beta_R^2} \right) \left[ \frac{\ln \xi_2^2}{v_R + v} + \frac{\ln \xi_1^2}{v_R - v} \right] \quad (4.2.24)$$

elde edilir. Ayrıca (4.2.24)ifadesinde  $\xi_1 = (v_R - v)\tau$  ve  $\xi_2 = (v_R + v)\tau$  değişkenleri yerlerine yazılırsa

$$u_2^\infty(\xi, \tau) \sim -\frac{B_1\alpha_R}{2\pi c_2(v_R^2 - v^2)} \left[ \ln(\xi^2 + \alpha_R^2) - \frac{2}{1 + \beta_R^2} \ln(\xi^2 + \beta_R^2) \right] - \frac{B_1\alpha_R}{2\pi c_2} \left( \frac{1 - \beta_R^2}{1 + \beta_R^2} \right) \left[ \frac{\ln(v_R + v)}{v_R + v} + \frac{\ln|v_R - v|}{v_R - v} \right] - \frac{2B_1\alpha_R v_R(1 - \beta_R^2)}{\pi c_2(v_R^2 - v^2)(1 + \beta_R^2)} \ln \tau \quad (4.2.25)$$

asimptotik eşitliği elde edilir. Burada  $u_2^\infty = u_2^{st}(\xi) + u_2^r(\tau)$  ve  $u_2^r(\tau) = u_2^{r0} + u_2^{r\tau}(\tau)$  yazılabileceğinden *sub - rayleigh* durum için yerdeğiştirme

$$u_3^{st}(\xi) = -\frac{B_1\alpha_R}{2\pi c_2(v_R^2 - v^2)} \left[ \ln(\xi^2 + \alpha_R^2) - \frac{2}{1 + \beta_R^2} \ln(\xi^2 + \beta_R^2) \right] \quad (4.2.26)$$

$$u_3^{r0}(\tau) = -\frac{B_1\alpha_R}{2\pi c_2} \left( \frac{1 - \beta_R^2}{1 + \beta_R^2} \right) \left[ \frac{\ln(v_R + v)}{v_R + v} + \frac{\ln|v_R - v|}{v_R - v} \right] \quad (4.2.27)$$

$$u_3^{r\tau}(\tau) = -\frac{2B_1\alpha_R v_R(1 - \beta_R^2)}{\pi c_2(v_R^2 - v^2)(1 + \beta_R^2)} \ln \tau \quad (4.2.28)$$

sonuçlarına ulaşılır. Bahsedilen  $u_i^r(i = 1, 2)$ , elastik yarı düzlemin katı cisim hareketinin sırasıyla  $x_1$  ve  $x_3$  yönündeki yerdeğiştirme bileşenleridir. Ayrıca en çok dikkat çeken şey katı cisim hareketinin düşey eksen boyunca zamanla logaritmik bir büyüme göstermesidir. Bunun anlamı ise bir önceki altbaşlıkta yer alan sabit hızlı noktasal yük probleminde yeterince uzun zamanda sterady-state duruma ulaşamayacağıdır. *Super - Rayleigh* durumunda ise (4.2.19), (4.2.20), (4.2.26), (4.2.27) ve (4.2.28) aynen geçerli olup  $\xi \rightarrow \infty$  iken katı cisim hareketinin  $x_1$  yönündeki yerdeğiştirme bileşeni

$$u_1^{r0} = -\frac{B_1 v_R(1 - \beta_R^2)}{2c_2(v_R^2 - v^2)} \quad (4.2.29)$$

olarak elde edilir.

*Rezonans* durumda yani  $c = c_R$  durumunda ise  $u_1$  ve  $u_2$  yerdeğiştirmeleri (4.2.16) ve (4.2.17)'den yararlanılarak

$$u_1(\xi, \tau) = \frac{B_1\alpha_R\tau}{\pi c_2} \left[ \frac{1}{\xi^2 + \alpha^2} - \frac{2\beta_R^2}{(1 + \beta_R^2)(\xi^2 + \beta_R^2)} \right] + \frac{B_1}{2\pi c_2 v_R} \left[ \arctan \frac{\xi}{\alpha_R} - \arctan \frac{\xi - \xi_2}{\alpha_R} \right] - \frac{B_1(1 + \beta_R^2)}{4\pi c_2 v_R} \left[ \arctan \frac{\xi}{\beta_R} - \arctan \frac{\xi - \xi_2}{\beta_R} \right], \quad (4.2.30)$$

$$u_3(\xi, \tau) = \frac{B_1\alpha_R\xi\tau}{\pi c_2} \left[ \frac{2\beta_R^2}{(1 + \beta_R^2)(\xi^2 + \beta_R^2)} - \frac{1}{\xi^2 + \alpha^2} \right] + \frac{B_1\alpha_R}{4\pi c_2 v_R} \left[ \ln \frac{(\xi - \xi_2)^2 + \alpha_R^2}{\xi^2 + \alpha_R^2} - \frac{2}{1 + \beta_R^2} \ln \frac{(\xi - \xi_2)^2 + \beta_R^2}{\xi^2 + \beta_R^2} \right]$$

şeklinde elde edilir.  $\tau \rightarrow \infty$  iken

$$u_i(\xi, \tau) \sim u_i^\infty(\xi, \tau) \quad (i = 1, 2) \quad (4.2.31)$$

olmak üzere  $u_1$  ve  $u_3$  yerdeğiştirmelerinin yaklaşık ifadeleri aşağıdaki gibidir:

$$u_1^\infty(\xi, \tau) = \frac{B_1 \alpha_R \tau}{\pi c_2} \left[ \frac{1}{\xi^2 + \alpha_R^2} - \frac{2\beta_R^2}{(1 + \beta_R^2)(\xi^2 + \beta_R^2)} \right], \quad (4.2.32)$$

$$u_2^\infty(\xi, \tau) = \frac{B_1 \alpha_R \xi \tau}{\pi c_2} \left[ \frac{2}{(1 + \beta_R^2)(\xi^2 + \beta_R^2)} - \frac{1}{\xi^2 + \alpha_R^2} \right] + \frac{B_1 \alpha_R (\beta_R^2 - 1)}{4\pi c_2 v_R (\beta_R^2 + 1)} \ln \tau. \quad (4.2.33)$$

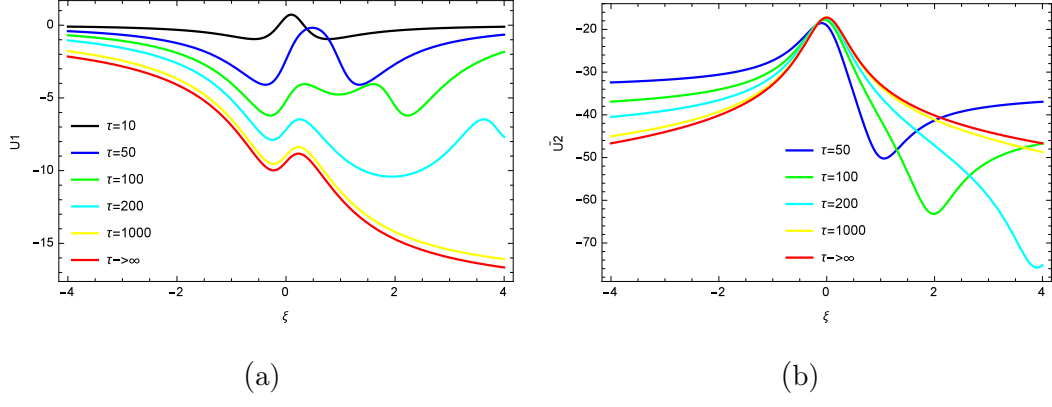
Dolayısıyla yerdeğiştirmeler, normal yerdeğiştirmenin  $\xi = 0$ 'daki değeri hariç, zamana göre  $\ln \tau$  şeklinde doğrusal olarak büyümektedir.

$$U_k = \frac{\pi \mu u_k}{P_0}, \quad \tilde{U}_2 = \frac{\pi \mu}{P_0} (u_2(\xi, \tau) - u_2^{r\tau}(\tau))$$

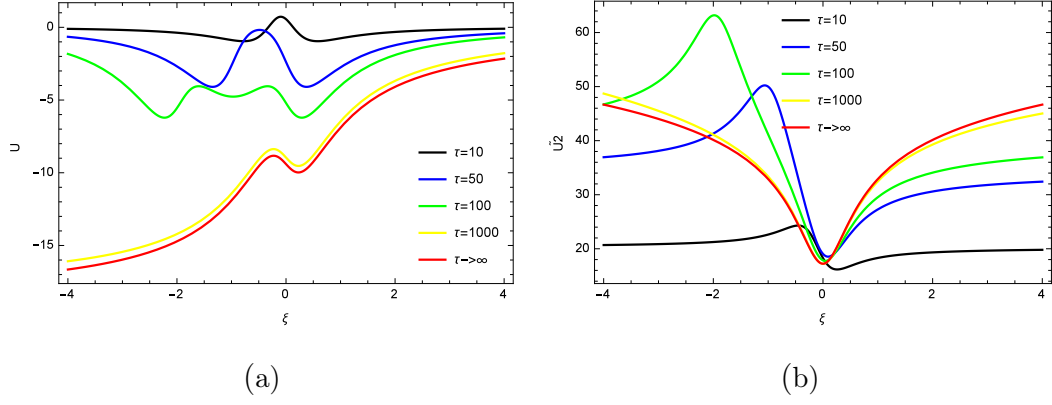
boyutsuzlaştırması kullanılarak Poisson oranı  $\nu = 0,25$  ve  $v_R \approx 0,9194$  için elde edilen nümerik gözlemler Şekil4.3-4.5'te gösterilmiştir. (4.2.28)' de görüleceği gibi normal yerdeğiştirme olan  $u_2(\xi, \tau)$ 'dan logaritmik büyümeye sahip olan  $u_2^{r\tau}(\tau)$  çıkarılmıştır. Bu durumda, bu ifadeyi sınırlı bir zaman bileşeninin  $\tau \rightarrow \infty$  yani uzun zamanda yakınsama göstermesi için ifade ederiz.

(4.2.16) ve (4.2.17) sub-Rayleigh durumdaki yerdeğiştirmeleri  $v = 9$  için ve  $\tau$  'nun çeşitli değerleri için Şekil4.3'da çizilmiştir. Benzer sonuçlar  $v = 0,95$  için super-Rayleigh durumu gösteren Şekil4.4'de elde edilmiştir. Grafiklerdeki kırmızı çizgi  $\tau \rightarrow \infty$  limit durumunu göstermektedir. Buradan da beklendiği gibi anlık yerdeğiştirmeler zaman ilerledikçe limit durumuna yaklaşır.

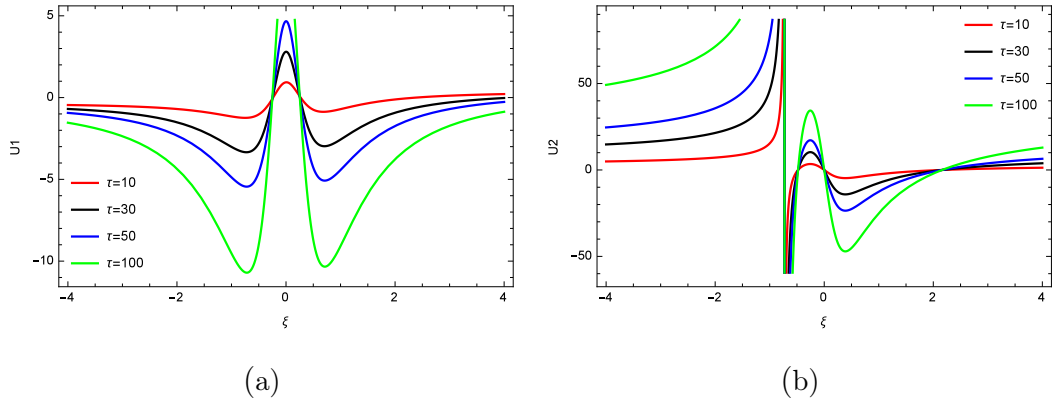




Şekil 4.3: *Sub-Rayleigh* ( $c < c_R$ ) durumunda  $v = 0,9$  için (a) yatay yöndeki (4.2.16), (b) dikey yöndeki (4.2.17) yerdeğiştirmeleri ve (4.2.19) limit durumu



Şekil 4.4: *Super-Rayleigh* ( $c > c_R$ ) durumunda  $v = 0,95$  için (a) yatay yöndeki (4.2.16), (b) dikey yöndeki (4.2.17) yerdeğiştirmeleri ve (4.2.19) limit durumu



Şekil 4.5: *Rezonans* ( $c = c_R$ ) durumunda  $v = v_R$  için (a) yatay yöndeki (4.2.30), (b) dikey yöndeki (4.2.30) yerdeğiştirmeleri

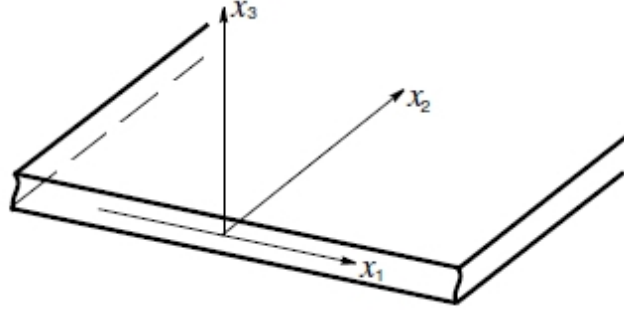
**Kaynak:** *Dynamic Localization Phenomena in Elasticity, Acoustics and Electromagnetism*, 2013, s.98, 99

## 5 KENAR BÜKÜLME DALGASI

Bu bölümde yarı sonsuz ince elastik bir plakanın kenarı boyunca yayılan bükülme dalgaları için asimptotik bir model geliştirilecektir. Non-dispersive olan yüzey ve arayüz dalgalarının hiperbolik-eliptik formülasyonunun aksine kenar dalgalarının dispersif oldukları ve parabolik-eliptik denklem çifti ile ifade edilebilecekleri gösterilecektir.

### 5.1 Dağılım İlişkisi

Şekli aşağıdaki gibi verilen  $-\infty < x_1 < \infty$ ,  $0 \leq x_2 < \infty$ ,  $-h \leq x_3 \leq h$  bölgesine yerleştirilmiş  $2h$  kalınlığında bir ince elastik tabaka alınsın. Öncelikle klasik



Şekil 5.1: Elastik ince plaka

**Kaynak:** *Dynamic Localization Phenomena in Elasticity, Acoustics and Electromagnetism*,  
2013, s.103

Kirchoff teorisinde plaka bükülmeleri, yaklaşık olarak ifade edilen iki boyutlu

$$D\Delta^2 W + 2\rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0, \quad (5.1.1)$$

denklemiyle başlayacağız. Burada  $W(x_1, x_2, t)$  plakanın  $t$  anında  $(x_1, x_2)$  noktasındaki yerdeğiştirme miktarını,  $\rho$  yoğunluğu,  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$  iki boyutta Laplace operatörünü ve

$$D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} \quad (5.1.2)$$

bükülme direncini  $E$  Young modülü ve  $\nu$  Poisson oranı cinsinden ifade etmektedir.

$M = M(x_1, t)$  bükülme momentini ve  $N = N(x_1, t)$  kayma kuvvetini göstermek

üzere  $x_2 = 0$  kenarındaki sınır koşulları

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} &= -\frac{M}{D}, \\ \frac{\partial^3 W}{\partial x_2^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 W}{\partial x_1^2 \partial x_2} &= -\frac{N}{D}.\end{aligned}\quad (5.1.3)$$

eşitlikleriyle yazılır.  $x_2 = 0$  kenarı boyunca yayılan,  $x_2$  eksenini boyunca sönen dalga çözümleri arandığından (ki bunlar kenar dalgalarına karşılık gelmektedir)  $W$  yerdeğiştirilmesi

$$W(x_1, x_2, t) = \sum_{j=1}^2 C_j \exp i(kx_1 - \omega t) - k\lambda_j x_2, \quad (5.1.4)$$

biçiminde aranacaktır. Burada  $\omega$  açısal frekans ve  $k$  dalga sayısı olmak üzere  $\lambda_j$  parametresi

$$\lambda_j = \sqrt{1 + (-1)^j \sqrt{\frac{2\rho h}{D} \frac{\omega}{k^2}}}, \quad j = 1, 2 \quad (5.1.5)$$

eşitliği ile verilir.

Şimdi (5.1.4) biçiminde verilen çözüm  $M = N = 0$  kabulü altında (5.1.3) sınır koşullarında yerine yazılsın. Bu durumda denklemlerdeki ifadeler aşağıdaki şekilde hesaplınsın:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} &= c_1 k^2 \lambda_1^2 \exp[i(kx_1 - \omega t) - k\lambda_1 x_2] + c_2 k^2 \lambda_2^2 \exp[i(kx_1 - \omega t) - k\lambda_2 x_2], \\ \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} &= -c_1 k^2 \exp[i(kx_1 - \omega t) - k\lambda_1 x_2] - c_2 k^2 \exp[i(kx_1 - \omega t) - k\lambda_2 x_2], \\ \frac{\partial^3 W}{\partial x_2^3} &= -c_1 k^3 \lambda_1^3 \exp[i(kx_1 - \omega t) - k\lambda_1 x_2] - c_2 k^3 \lambda_2^3 \exp[i(kx_1 - \omega t) - k\lambda_2 x_2], \\ \frac{\partial^3 W}{\partial x_1^2 \partial x_2} &= c_1 k^3 \lambda_1 \exp[i(kx_1 - \omega t) - k\lambda_1 x_2] + c_2 k^3 \lambda_2 \exp[i(kx_1 - \omega t) - k\lambda_2 x_2].\end{aligned}$$

Bu ifadeler (5.1.3) sınır koşullarında yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}(\lambda_1^2 - \nu)k^2 c_1 \exp[i(kx_1 - \omega t) - k\lambda_1 x_2] + \\ + (\lambda_2^2 - \nu)k^2 c_2 \exp[i(kx_1 - \omega t) - k\lambda_2 x_2] &= 0 \\ (-\lambda_1^3 + (2 - \nu)\lambda_1)k^3 c_1 \exp[i(kx_1 - \omega t) - k\lambda_1 x_2] + \\ + (-\lambda_2^3 + (2 - \nu)\lambda_2)k^3 c_2 \exp[i(kx_1 - \omega t) - k\lambda_2 x_2] &= 0\end{aligned}\quad (5.1.6)$$

denklemleri elde edilir. (5.1.6) denklemleri  $c_1, c_2$  bilinmeyenlerine göre lineer homojen bir denklem sistemi oluşturur ve bu sistemin aşikar çözümden farklı çözümlerinin varlığı için katsayılar matrisinin determinanı sıfır olmalıdır. Bu determinant

$$(\lambda_1^2 - \nu)(-\lambda_2^3 + (2 - \nu)\lambda_2) - (\lambda_2^2 - \nu)(-\lambda_1^3 + (2 - \nu)\lambda_1) = 0. \quad (5.1.7)$$

eşitliği ile verilir.  $\lambda_1 = \sqrt{1 - \sqrt{\frac{2\rho h}{D} \frac{\omega}{k^2}}}$  ve  $\lambda_2 = \sqrt{1 + \sqrt{\frac{2\rho h}{D} \frac{\omega}{k^2}}}$  ifadeleri (5.1.7) denkleminde yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$1 - \frac{2\rho h \omega^2}{D k^4} = \nu^2 - (2 - 2\nu) \sqrt{1 - \frac{2\rho h \omega^2}{D k^4}} \quad (5.1.8)$$

eşitliği elde edilir. Burada kolaylık olması açısından  $\chi = \sqrt{1 - \frac{2\rho h \omega^2}{D k^4}}$  dersek ve bu ifadeyi (5.1.8) denkleminde yerine koyarsak (5.1.8) denklemi aşağıdaki biçimi alır:

$$\chi^2 + (2 - 2\nu)\chi - \nu^2 = 0 \quad (5.1.9)$$

Bu denklem  $\chi$  değişkenine göre çözülürse

$$\chi = \frac{-(2 - 2\nu) + \sqrt{(2 - 2\nu)^2 + 4\nu^2}}{2}$$

kökleri elde edilir.  $\chi$  yerine eşiti yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$2\rho h \omega^2 = Dk^4(1 - \nu) \left[ (3\nu - 1) + 2\sqrt{2\nu^2 - 2\nu + 1} \right]$$

bağıntısı elde edilir.

$$\gamma_e = (1 - \nu) \left[ (3\nu - 1) + 2\sqrt{2\nu^2 - 2\nu + 1} \right]^{1/4} \quad (5.1.10)$$

denilirse dağılım ilişkisi en sade hali ile aşağıdaki şekilde ifade edilmiş olur:

$$Dk^4 \gamma_e^4 = 2\rho h \omega^2. \quad (5.1.11)$$

Bulunan (5.1.11) dağılım ilişkisi ile ilgili detaylar için [15], [16], [18] çalışmalarına bakılabilir. Dikkat edilirse (5.1.11) ilişkisindeki  $\gamma_e$  sayısı sadece  $\nu$  Poisson oranına bağlıdır. Ayrıca (5.1.5) özdeğerleri  $\gamma_e$  sayısına bağlı olarak aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\lambda_j = \lambda_{j0} = \sqrt{1 + (-1)^j \gamma_e^2}, \quad j = 1, 2. \quad (5.1.12)$$

## 5.2 Keyfi Profile Sahip Kenar Bükülme Dalgası

Bir önceki altbaşlıkta (5.1.1) bükülme denklemi için (5.1.4) ile verilen özel yapıda bir çözüm aranmıştı. Bu bölümde ise plakannın bükülmesi sonucu plakannın kenarında meydana gelen dalga için keyfi düzlem harmonik fonksiyon ile ifade edilen çözümler incelenecektir. (5.1.1) denklemi

$$\zeta_i = \frac{x_i}{h}, \quad t_h = \frac{t}{h} \sqrt{\frac{E}{3\rho(1 - \nu^2)}}, \quad i = 1, 2 \quad (5.2.1)$$

boyutsuz parametreleri cinsinden yazıldığında

$$\Delta^2 W + \frac{\partial^2 W}{\partial t_h^2} = 0 \quad (5.2.2)$$

boyutsuz bükülme denklemi elde edilir. Burada  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \zeta_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta_2^2}$  iki boyutlu Laplace operatörüdür.

$\gamma$  boyutsuz bir parametre olmak üzere

$$\gamma^4 \frac{\partial^4 W}{\partial \zeta_1^4} + \frac{\partial^2 W}{\partial t_h^2} = 0 \quad (5.2.3)$$

eşitliğini varsayalım, bu varsayım (5.2.2) parabolik denklemini aşağıda yapılan dönüşümler altında eliptik bir denkleme dönüştürülecek kritik bir varsayımdır ve çözümünü düzlem harmonik fonksiyon olarak aramamıza olanak sağlayacaktır. (5.2.3) ile verilen kabulün altında yatan düşünce 3.3 Alt Bölümündeki düşünce ile aynıdır.

(5.2.3) kabulü altında (5.2.2) denklemi

$$(1 - \gamma^4) \frac{\partial^4 W}{\partial \zeta_1^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial \zeta_1^2 \partial \zeta_2^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial \zeta_2^4} = 0$$

denklemine dönüşür ve bu denklem aşağıdaki gibi iki eliptik denklemin çarpımı şeklinde yazılabilir:

$$\left( (1 - \gamma^2) \frac{\partial^2 W}{\partial \zeta_1^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \zeta_2^2} \right) \left( (1 + \gamma^2) \frac{\partial^2 W}{\partial \zeta_1^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \zeta_2^2} \right) = 0. \quad (5.2.4)$$

$\lambda_j^2 = 1 + (-1)^j \gamma^2$  özfonksiyonları ve  $\Delta_j = \frac{\partial^2}{\partial \zeta_2^2} + \lambda_j^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta_1^2}$ , ( $j = 1, 2$ ) olduğu gözönüne alınırsa (5.2.4) denklemi operatör formda aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\Delta_1 \Delta_2 W = 0. \quad (5.2.5)$$

Elde edilen (5.2.5) denkleminin  $W$  çözümü  $\zeta_2 \rightarrow \infty$  iken azalan  $W_j$  keyfi düzlem harmonik fonksiyonları cinsinden

$$W = \sum_{j=1}^2 W_j(\zeta_1, \lambda_j \zeta_2, t_h). \quad (5.2.6)$$

biçiminde ifade edilir. Bu çözüm homojen (5.1.3) sınır koşullarında yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} (\nu - \lambda_1^2) \frac{\partial^2 W_1}{\partial \zeta_1^2} + (1 - \lambda_2^2) \frac{\partial^2 W_2}{\partial \zeta_1^2} &= 0, \\ \lambda_1(\lambda_1^2 - 2 + \nu) \frac{\partial^3 W_1}{\partial \zeta_1^3} + \lambda_2(\lambda_2^2 - 2 + \nu) \frac{\partial^3 W_2}{\partial \zeta_1^3} &= 0, \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinantı alınır ve  $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 2$  olması gözönünde bulundurulursa

$$\lambda_2(\nu - \lambda_1^2)^2 - \lambda_1(\nu - \lambda_2^2)^2 = 0 \quad (5.2.8)$$

denklemini elde edilir. Burada  $\lambda_1 = \sqrt{1 - \gamma^2}$  ve  $\lambda_2 = \sqrt{1 + \gamma^2}$  ifadeleri yerlerine yazıldığında bir önceki bölümde elde edilmiş olan

$$1 - \gamma^4 - (2\nu - 2)\sqrt{1 - \gamma^4} - \nu^2 = 0 \quad (5.2.9)$$

eşitliği karşımıza çıkar. Bu ifadede  $\theta = \sqrt{1 - \gamma^4}$  yazılırsa (5.2.9) denklemi

$$\theta^2 - (2\nu - 2)\theta - \nu^2 = 0$$

olur. Bu denklem  $\theta$  değişkenine göre çözülür ve düzenlenirse

$$\gamma^4 = (1 - \nu)(3\nu - 1 + 2\sqrt{2\nu^2 - 2\nu + 1}) = \gamma_e^4 \quad (5.2.10)$$

ifadesi elde edilir. Görüldüğü gibi bir önceki bölümde özel yapıda çözümlerin alınmasıyla elde edilen sonuçlar keyfi düzlem harmonik fonksiyonlar ile ifade edilen çözümler için varılan sonuçlarla aynıdır. Ayrıca 3.3 Alt Bölümündekine benzer olarak  $W_1$  ve  $W_2$  harmonik fonksiyonları için (5.2.7)<sub>1</sub> sınır koşulundan elde edilen

$$W_2 = -\frac{(\nu - \lambda_1^2)}{\nu - \lambda_2^2} W_1 \quad (5.2.11)$$

bağıntısı kullanılarak  $W$  çözümü  $1 \leq j \neq m \leq 2$  olmak üzere tek bir harmonik fonksiyon cinsinden

$$W(x_1, x_2, t) = W_j(x_1, \lambda_{j0}x_2, t) - \frac{\nu - \lambda_{j0}^2}{\nu - \lambda_{m0}^2} W_j(x_1, \lambda_{m0}x_2, t) \quad (5.2.12)$$

şeklinde yazılır. Bu çözüm harmonik eşlenik fonksiyonlar içermediğinden Chadwick' in (1976) [3] çalışmasında karşılık gelen Rayleigh dalgası çözümünden daha basittir.

### 5.3 Parabolik-Eliptik Model

Bu bölümde elastik ince plakalarda meydana gelen bükülmenin plakanın kenar yüzeyinde meydana gelen dalgaların etkisini anlayabilmek için açık bir model geliştirilecektir ([15], [16], [18],[14]). 3.4 Alt Bölümündeki konuya paralel olarak (5.1.1) denklemi pertürbasyon yöntemi kullanılarak 5.2 Alt Bölümündeki yapılar elde edilecektir. Yani

yavaş ve hızlı zaman parametreleri oluşturularak denklem zamana göre iki parametrelilik olarak ifade edilecektir. Hızlı zaman parametresi olarak  $\tau_f = t_h$  ve yavaş zaman parametresi olarak  $\tau_s = \varepsilon t_h$  ( $\varepsilon \ll 1$ ) alınacaktır. Dolayısıyla  $t_h(\tau_f, \tau_s/\varepsilon)$  değişken değişimi ile (5.2.2) denklemi

$$\Delta^2 W + \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \tau_f^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2 W}{\partial \tau_f \partial \tau_s} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \tau_s^2} \right) = 0 \quad (5.3.1)$$

olarak ifade edilebilir. Burada  $W$  bükülmesi asimptotik açılım olarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$W = \frac{h^2}{D} \left( W^{(0)} + \varepsilon W^{(1)} + \dots \right). \quad (5.3.2)$$

Burada (5.3.2) açılımı (5.3.1) denklemine yazılıp  $\mathcal{O}(1)$  mertebeden terimler alınır

$$\Delta^2 W^{(0)} + \frac{\partial^2 W^{(0)}}{\partial \tau_f^2} = 0 \quad (5.3.3)$$

denklemi elde edilir. (5.2.3) varsayımı altında,  $\gamma = \gamma_e$  alındığında (5.3.3) denklemi aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$(1 - \gamma_e) \frac{\partial^4 W^{(0)}}{\partial \zeta_1^4} + 2 \frac{\partial^4 W^{(0)}}{\partial \zeta_1^2 \partial \zeta_2^2} + \frac{\partial^4 W^{(0)}}{\partial \zeta_2^4} = 0. \quad (5.3.4)$$

(5.3.4) denkleminin çözümü olan  $W, W_j^0$  harmonik fonksiyonlarının bir kombinasyonu olarak aşağıdaki gibi verilir:

$$W^{(0)} = \sum_{j=1}^2 W_j^{(0)}(\zeta_1, \lambda_{j0} \zeta_2, \tau_f, \tau_s). \quad (5.3.5)$$

Burada ölçeklendirme parametresi  $\lambda_{j0}$  ( $j = 1, 2$ ), (5.1.12) eşitliği ile tanımlıdır. (5.3.1) denklemine  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  mertebesindeki terimler alınır,

$$\Delta^2 W^{(1)} + \frac{\partial^2 W^{(1)}}{\partial \tau_f^2} + 2 \frac{\partial^2 W^{(0)}}{\partial \tau_f \partial \tau_s} = 0 \quad (5.3.6)$$

ifadesi elde edilir ve bu ifadede (5.2.3) varsayımı kullanıldığında

$$(1 - \gamma_e^4) \frac{\partial^4 W^{(1)}}{\partial \zeta_1^4} + 2 \frac{\partial^4 W^{(1)}}{\partial \zeta_1^2 \partial \zeta_2^2} + \frac{\partial^4 W^{(1)}}{\partial \zeta_2^4} = -2 \frac{\partial^2 W^{(0)}}{\partial \tau_f \partial \tau_s} \quad (5.3.7)$$

olarak yazılabilir ve bu ifadede  $\Delta_j = \frac{\partial^2}{\partial \zeta_2^2} + \lambda_j^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta_1^2}$ , ( $j = 1, 2$ ) göz önüne alınarak, (5.3.7) eşitliği, operatör formunda aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\Delta_1 \Delta_2 W^{(1)} = -2 \frac{\partial^2 W^{(0)}}{\partial \tau_f \partial \tau_s}. \quad (5.3.8)$$

Kesinlik adına (5.2.3) eşitliğiyle verilen kabulü aşağıdaki gibi ifade edelim:

$$i\gamma_e^2 \frac{\partial^2 W_j^{(0)}}{\partial \zeta_1^2} + \frac{\partial W_j^{(0)}}{\partial \tau_f} = 0, \quad j = 1, 2. \quad (5.3.9)$$

(5.3.8) denklemini daha yakından incelenebilmesi için,  $W^{(1)}$  fonksiyonu  $W_j^{(1)}, j = 1, 2$  olarak ayrı iki harmonik fonksiyon olarak düşünülecektir. Burada öncelikle  $W_1^{(1)}$  fonksiyonu üzerinde durulacaktır. Harmonik fonksiyonların özellikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \Delta_2 W_1^{(0)} &= \lambda_{20}^2 \frac{\partial^2 W_1^{(0)}}{\partial \zeta_1^2} + \frac{\partial^2 W_1^{(0)}}{\partial \zeta_2^2} \\ &= \lambda_{20}^2 \frac{\partial^2 W_1^{(0)}}{\partial \zeta_1^2} - \lambda_{10}^2 \frac{\partial^2 W_1^{(0)}}{\partial \zeta_1^2} \\ &= (\lambda_2^2 - \lambda_1^2) \frac{\partial^2 W_1^{(0)}}{\partial \zeta_1^2} \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Buradan  $\lambda_{20}^2 - \lambda_{10}^2 = 2\gamma^2$  olduğundan ve (5.3.9) kabulünden

$$\Delta_2 W_1^{(0)} = 2i \frac{\partial W_1^{(0)}}{\partial \tau_f} \quad (5.3.10)$$

elde edilmiş olur. Şimdi (5.3.8) denklemini farklı bir formda yazalım. O zaman (5.3.8) denklemi için

$$\Delta_1 \Delta_2 (W_1^{(1)} + W_2^{(1)}) = -2 \frac{\partial^2 (W_1^{(0)} + W_2^{(0)})}{\partial \tau_f \partial \tau_s}$$

ilişisini, diğer bir deyişle

$$\Delta_1 \Delta_2 W_1^{(1)} + \Delta_1 \Delta_2 W_2^{(1)} = -2 \frac{\partial^2 W_1^{(0)}}{\partial \tau_f \partial \tau_s} - 2 \frac{\partial^2 W_2^{(0)}}{\partial \tau_f \partial \tau_s}$$

eşitliğini yazabiliriz. Buradan

$$\Delta_1 \Delta_2 W_1^{(1)} = -2 \frac{\partial^2 W_1^{(0)}}{\partial \tau_f \partial \tau_s}, \quad \Delta_1 \Delta_2 W_2^{(1)} = -2 \frac{\partial^2 W_2^{(0)}}{\partial \tau_f \partial \tau_s} \quad (5.3.11)$$

elde edilir. (5.3.10) eşitliği (5.3.11)<sub>1</sub> eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\frac{\partial}{\partial \tau_s} \left( -2 \frac{\partial W_1^{(0)}}{\partial \tau_f} \right) = \frac{\partial}{\partial \tau_s} \left( \frac{-1}{i} \Delta_2 W_1^{(0)} \right) = \Delta_2 \left( i \frac{\partial W_1^{(0)}}{\partial \tau_s} \right) \quad (5.3.12)$$

olduğu görülür. O zaman

$$\Delta_1 \Delta_2 W_1^{(1)} = \Delta_2 (\Delta_1 W_1^{(1)}) = \Delta_2 \left( i \frac{\partial W_1^{(0)}}{\partial \tau_s} \right) \quad (5.3.13)$$

olduğu, buradan da

$$\Delta_1 W_1^{(1)} = i \frac{\partial W_1^{(0)}}{\partial \tau_s} \quad (5.3.14)$$



sonucu elde edilir. Burada

$$\frac{\partial}{\partial \zeta_2} \left( \Delta_1 W_1^{(1)} \right) = \Delta_1 \frac{\partial W_1^{(1)}}{\partial \zeta_2} = i \frac{\partial^2 W_1^{(0)}}{\partial \tau_s \partial \zeta_2} \quad (5.3.15)$$

olur ve  $\Phi_1^{(1)} = \frac{\partial W_1^{(1)}}{\partial \zeta_2}$  denirse

$$\Delta_1 \Phi_1^{(1)} = i \frac{\partial^2 W_1^{(0)}}{\partial \tau_s \partial \zeta_2} \quad (5.3.16)$$

olarak yazılır.  $W_2^{(1)}$  için de harmonik fonksiyonların özellikleri kullanılarak

$$\Delta_1 W_2^{(0)} = (\lambda_{10}^2 - \lambda_{20}^2) \frac{\partial^2 W_2^{(0)}}{\partial \zeta_1^2} = -2\gamma^2 \frac{\partial^2 W_2^{(0)}}{\partial \zeta_1^2} = -2i \frac{\partial W_2^{(0)}}{\partial \tau_f} \quad (5.3.17)$$

eşitliği yazılır ve (5.3.11)<sub>2</sub> eşitliği için de yukarıdaki işlemler tekrarlanırsa

$$\Delta_2 W_2^{(1)} = -i \frac{\partial W_2^{(0)}}{\partial \tau_s} \quad (5.3.18)$$

ifadesi elde edilir. Burada  $\Phi_2^{(1)} = \frac{\partial W_2^{(1)}}{\partial \zeta_2}$  olarak alınır ve (5.3.18) eşitliğinin her iki tarafında  $\zeta_2$ 'ye göre türev alınır

$$\Delta_2 \Phi_2^{(1)} = -i \frac{\partial^2 W_2^{(0)}}{\partial \tau_s \partial \zeta_2} \quad (5.3.19)$$

eşitliğine ulaşılır. Şimdi (5.3.16) ve (5.3.19) denklemlerinin yaklaşık çözümleri elde edilecektir. Öncelikle, (5.3.16) denkleminin çözümü (3.4.9) ifadesine benzer olarak  $\Phi_1^{(1)} = \Phi_1^{(1,0)} + \zeta_2 \Phi_1^{(1,1)}$  olmak üzere  $\Phi_1 = \Phi_1^{(0)} + \varepsilon (\Phi_1^{(1,0)} + \zeta_2 \Phi_1^{(1,1)})$  şeklinde aranacaktır. Burada  $\Phi_1^{(1)}$  fonksiyonunun  $\zeta_1$  ve  $\zeta_2$ 'ye göre iki kez türevi alındığında

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi_1^{(1)}}{\partial \zeta_1^2} &= \frac{\partial^2 \Phi_1^{(1,0)}}{\partial \zeta_1^2} + \zeta_2 \frac{\partial^2 \Phi_1^{(1,1)}}{\partial \zeta_1^2}, \\ \frac{\partial^2 \Phi_1^{(1)}}{\partial \zeta_2^2} &= \frac{\partial^2 \Phi_1^{(1,0)}}{\partial \zeta_2^2} + 2 \frac{\partial \Phi_1^{(1,1)}}{\partial \zeta_2} + \zeta_2 \frac{\partial^2 \Phi_1^{(1,1)}}{\partial \zeta_2^2} \end{aligned} \quad (5.3.20)$$

eşitlikleri elde edilir ve bu eşitlikler (5.3.16) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$\lambda_1^2 \frac{\partial^2 \Phi_1^{(1,0)}}{\partial \zeta_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1^{(1,0)}}{\partial \zeta_2^2} + \zeta_2 \left( \lambda_1^2 \frac{\partial^2 \Phi_1^{(1,0)}}{\partial \zeta_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1^{(1,0)}}{\partial \zeta_2^2} \right) + 2 \frac{\partial \Phi_1^{(1,1)}}{\partial \zeta_2} = i \frac{\partial^2 W_1^{(0)}}{\partial \zeta_2 \partial \tau_s}$$

olur. Burada  $\Phi_1$  fonksiyonunun harmonikliği gözönünde bulundurulursa

$$2 \frac{\partial \Phi_1^{(1,1)}}{\partial \zeta_2} = i \frac{\partial^2 W_1^{(0)}}{\partial \zeta_2 \partial \tau_s} \quad (5.3.21)$$

elde edilir. Burada  $\zeta_2$  değişkenine göre integral alınırsa,  $\Phi_1^{(1,1)}$  ifadesi aşağıdaki gibi yazılır:

$$\Phi_1^{(1,1)} = \frac{i}{2} \frac{\partial W_1^{(0)}}{\partial \tau_s}. \quad (5.3.22)$$

Elde edilen (5.3.22) eşitliği  $\Phi_1 = \Phi_1^{(0)} + \varepsilon \left( \Phi_1^{(1,0)} + \zeta_2 \Phi_1^{(1,1)} \right)$  ifadesinde yerine yazılırsa  $\Phi_1$  çözümlü aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\begin{aligned} \Phi_1 = \frac{\partial W_1}{\partial \zeta_2} &= \frac{\partial W_1^{(0)}}{\partial \zeta_2} + \varepsilon \left( \Phi_1^{(1,0)} + \zeta_2 \Phi_1^{(1,1)} \right) \dots \\ &= \frac{\partial W_1^{(0)}}{\partial \zeta_2} + \varepsilon \left( \Phi_1^{(1,0)} + \zeta_2 \frac{i}{2} \frac{\partial W_1^{(0)}}{\partial \tau_s} \right) + \dots \end{aligned} \quad (5.3.23)$$

Benzer işleyiş (5.3.23) denklemi için de geçerlidir. Çözüm,  $\Phi_2^{(1)} = \Phi_2^{(1,0)} + \zeta_2 \Phi_2^{(1,1)}$  olmak üzere  $\Phi_2 = \Phi_2^{(0)} + \varepsilon \left( \Phi_2^{(1,0)} + \zeta_2 \Phi_2^{(1,1)} \right)$  şeklinde aranacaktır ve benzer işlemler (5.3.23) denklemi için de yapıldığında

$$\Phi_2^{(1,1)} = -\frac{i}{2} \frac{\partial W_2^{(0)}}{\partial \tau_s} \quad (5.3.24)$$

elde edilir ve (5.3.24) eşitliği  $\Phi_2$  çözümünde yerine yazılırsa,  $\Phi_2$  çözümlü aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\Phi_2 = \frac{\partial W_2^{(0)}}{\partial \zeta_2} + \varepsilon \left( \Phi_2^{(1,0)} - \frac{i}{2} \frac{\partial W_2^{(0)}}{\partial \tau_s} \right) \dots \quad (5.3.25)$$

Sonuç olarak,  $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$  eşitliği  $\frac{\partial W}{\partial \zeta_2} = \frac{\partial W_1}{\partial \zeta_2} + \frac{\partial W_2}{\partial \zeta_2}$  biçiminde yazılabildiğinden  $\frac{\partial W}{\partial \zeta_2}$  için aşağıdaki açılım elde edilir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \zeta_2} &= \frac{h^2}{D} \left[ \frac{\partial (W_1^{(0)} + W_2^{(0)})}{\partial \zeta_2} + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon \left( \Phi_1^{(1,0)} + \Phi_2^{(1,0)} + i \frac{\zeta_2}{2} \frac{\partial (W_1^{(0)} - W_2^{(0)})}{\partial \tau_s} \right) + \dots \right]. \end{aligned} \quad (5.3.26)$$

şimdi 3.4 Alt Bölümünde olduğu gibi, (5.1.3) homojen olmayan sınır koşulları tekrar düzenlenerek, ele alınan problem iki alt-problem olarak incelenecektir. Bu iki alt-problem sadece bükülme momentini ya da sadece kayma kuvvetini içeren problemler olarak ayrı ayrı incelenecektir. Öncelikle bükülme momentinin etkisine bakılacaktır.  $M = \varepsilon M_\varepsilon$  momenti normalleştirmesi yapılarak  $x_2 = 0$  yüzeyinde  $\zeta_i = \frac{x_i}{h}, i = 1, 2$  boyutsuz parametresine göre sınır koşulları aşağıdaki şekilde tekrar yazılır:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial \zeta_2^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial \zeta_1^2} &= -\frac{\varepsilon h^2}{D} M_\varepsilon, \\ \frac{\partial^3 W}{\partial \zeta_2^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 W}{\partial \zeta_1^2 \partial \zeta_2} &= 0. \end{aligned} \quad (5.3.27)$$

(5.3.27) eşitlikleri ile verilen boyutsuz sınır koşullarında (5.3.26) asimptotik açılımı yazılır ve  $\mathcal{O}(1)$  mertebesindeki terimler alınır

$$\begin{aligned} (\nu - \lambda_{10}^2) \frac{\partial^2 W_1^{(0)}}{\partial \zeta_1^2} + (\nu - \lambda_{20}^2) \frac{\partial^2 W_2^{(0)}}{\partial \zeta_1^2} &= 0, \\ \lambda_{10}(\lambda_{10}^2 - 2 + \nu) \frac{\partial^3 W_1^{(0)}}{\partial \zeta_1^3} + \lambda_{20}(\lambda_{20}^2 - 2 + \nu) \frac{\partial^3 W_2^{(0)}}{\partial \zeta_1^3} &= 0, \end{aligned} \quad (5.3.28)$$

denklemleri elde edilir.  $\mathcal{O}(1)$  mertebesindeki terimlerden elde edilen bu denklemler (5.2.7) ile benzerdir. Şimdi  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  mertebesindeki terimler alınır (5.3.27) sınır koşulları aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W^{(1)}}{\partial \zeta_2^2} + \nu \frac{\partial^2 W^{(1)}}{\partial \zeta_1^2} &= -M_\varepsilon, \\ \frac{\partial^3 W^{(1)}}{\partial \zeta_2^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 W^{(1)}}{\partial \zeta_1^2 \partial \zeta_2} &= 0. \end{aligned} \quad (5.3.29)$$

$\Delta_1$  ve  $\Delta_2$  operatörlerinin tanımı ve (5.3.14), (5.3.16) bağıntılarından

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W_1^{(1)}}{\partial \zeta_1^2} &= \frac{1}{\lambda_{10}^2} \left( \frac{i}{2} \frac{\partial W_1^{(0)}}{\partial \tau_s} - \frac{\partial \Phi_1^{(1,0)}}{\partial \tau_s} \right) \\ \frac{\partial^2 W_2^{(1)}}{\partial \zeta_1^2} &= \frac{1}{\lambda_{20}^2} \left( -\frac{i}{2} \frac{\partial W_2^{(0)}}{\partial \tau_s} - \frac{\partial \Phi_2^{(1,0)}}{\partial \tau_s} \right) \end{aligned} \quad (5.3.30)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa  $\zeta_2 = 0$  yüzeyinde

$$\frac{\partial^2 W^{(1)}}{\partial \zeta_1^2} = \frac{1}{\lambda_{10}^2} \left( \frac{i}{2} \frac{\partial W_1^{(0)}}{\partial \tau_s} - \frac{\partial \Phi_1^{(1,0)}}{\partial \tau_s} \right) - \frac{1}{\lambda_{20}^2} \left( \frac{i}{2} \frac{\partial W_2^{(0)}}{\partial \tau_s} + \frac{\partial \Phi_2^{(1,0)}}{\partial \tau_s} \right) \quad (5.3.31)$$

olur. (5.3.26) asimptotik açılımından aşağıdaki eşitlikler kolayca yazılabilir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W^{(1)}}{\partial \zeta_2^2} &= \frac{\partial \Phi_1^{(1,0)}}{\partial \zeta_2} + \frac{\partial \Phi_2^{(1,0)}}{\partial \zeta_2} + \frac{i}{2} \left( \frac{\partial W_1^{(0)}}{\partial \tau_s} - \frac{\partial W_2^{(0)}}{\partial \tau_s} \right), \\ \frac{\partial^3 W^{(1)}}{\partial \zeta_2^3} &= \frac{\partial^2 \Phi_1^{(1,0)}}{\partial \zeta_2^2} + \frac{\partial^2 \Phi_2^{(1,0)}}{\partial \zeta_2^2} + i \frac{\partial^2 (W_1^0 - W_2^0)}{\partial \tau_s \partial \zeta_2}, \\ \frac{\partial^3 W^{(1)}}{\partial \zeta_1^2 \partial \zeta_2} &= -\frac{1}{\lambda_{10}^2} \frac{\partial^2 \phi_1^{(1,0)}}{\partial \zeta_2^2} - \frac{1}{\lambda_{20}^2} \frac{\partial^2 \phi_2^{(1,0)}}{\partial \zeta_2^2}. \end{aligned}$$

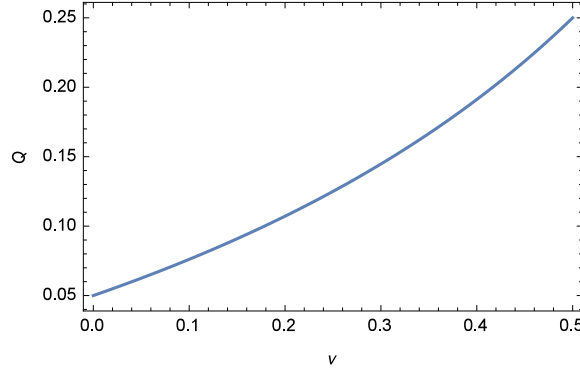
Yukarıda elde edilen bu eşitlikler (5.3.29) sınır koşullarında yerine yazılır ve (5.3.31) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\nu}{\lambda_{10}^2}\right) \frac{\partial \Phi_1^{(1,0)}}{\partial \zeta_2} + \left(1 - \frac{\nu}{\lambda_{20}^2}\right) \frac{\partial \Phi_2^{(1,0)}}{\partial \zeta_2} + \frac{i}{2} \left(1 + \frac{\nu}{\lambda_{10}^2}\right) \frac{\partial W_1^{(0)}}{\partial \tau_s} - \\ - \frac{i}{2} \left(1 + \frac{\nu}{\lambda_{20}^2}\right) \frac{\partial W_2^{(0)}}{\partial \tau_s} = -M_\varepsilon, \\ (2 - \nu - \lambda_{10}^2) \frac{\partial^2 \Phi_1^{(1,0)}}{\partial \zeta_1^2} + (2 - \nu - \lambda_{20}^2) \frac{\partial^2 \Phi_2^{(1,0)}}{\partial \zeta_1^2} + i \frac{\partial^2 W_1^{(0)}}{\partial \zeta_2 \partial \tau_s} - \\ - i \frac{\partial^2 W_2^{(0)}}{\partial \zeta_2 \partial \tau_s} = 0 \end{aligned} \quad (5.3.32)$$

eşitliklerine ulaşılır. (5.3.32) sınır koşullarını tek bir harmonik fonksiyon ile ifade etmek için (5.2.12) bağıntısı kullanılırsa,  $\zeta_2 = 0$  yüzeyinde

$$\frac{2i\gamma_e^2}{Q} \frac{\partial^2 W^{(0)}}{\partial \zeta_1 \partial \tau_s} = -\frac{\partial M_\varepsilon}{\partial \zeta_1} \quad (5.3.33)$$

denklemini elde edilir. Burada  $\eta = \lambda_{10}\lambda_{20} = \sqrt{1 - \gamma_e^4}$  olmak üzere  $Q = \frac{\eta(\nu + \eta)}{1 - \nu + \eta}$  olarak tanımlıdır. Dikkat edilirse Şekil 5.2'da görüldüğü gibi  $Q$  sadece Poisson oranına bağlıdır.



Şekil 5.2:  $Q$  ve Poisson oranı arasındaki ilişki

**Kaynak:** *Dynamic Localization Phenomena in Elasticity, Acoustics and Electromagnetism*, 2013, s.109

Elde edilen (5.3.33) denklemini, oluşan tüm dinamik tepki için kenar dalga katkısının hesaplanmasını sağlar [14]. (5.3.9) kabulü ile geliştirilen

$$\frac{\partial}{\partial \tau_s} = \varepsilon^{-1} \left( i\gamma_e^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta_1^2} + \frac{\partial}{\partial t_h} \right) \quad (5.3.34)$$

operatörü (5.3.33) denkleminde uygulanırsa, denklem  $\zeta_2 = 0$  kenarında

$$\gamma_e^4 \frac{\partial^4 W^{(0)}}{\partial \zeta_1^4} + \frac{\partial^2 W^{(0)}}{\partial t_h^2} = Q \frac{\partial^2 M}{\partial \zeta_1^2} \quad (5.3.35)$$

şeklinde bir parabolik denkleme dönüşür. (5.3.35) denklemini orjinal değişkenlere göre tekrar yazılırsa  $x_2 = 0$  kenarında

$$D\gamma_e^4 \frac{\partial^4 W}{\partial x_1^4} + 2\rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = Q \frac{\partial^2 M}{\partial x_1^2} \quad (5.3.36)$$

olarak elde edilir. Ayrıca oluşturulan (5.3.36) asimptotik formülasyonu  $\Delta_1 \Delta_2 W = 0$  eliptik denklemini içerir. Sonuç olarak yüzeyde geçerli olan bir hiperbolik denklem ile

sınır koşulu olarak kenarda geçerli olan bir parabolik denkleme sahibiz. Ayrıca  $W_1, W_2$  harmonik fonksiyonlarının aralarındaki (5.2.12) bağıntısından yararlanarak  $W$  çözümü

$$W(x, 0, t) = \frac{\lambda_{i0}^2 - \lambda_{j0}^2}{\nu - \lambda_{j0}^2} W_i(x, 0, t), \quad 1 \leq i \neq j \leq 2 \quad (5.3.37)$$

formunda tek bir harmonik fonksiyona bağlı olarak yazılabilir. Sonuç olarak kenar bükülme problemi için açık model

$$\frac{\partial^2 W_j}{\partial y^2} + \lambda_{j0}^2 \frac{\partial^2 W_j}{\partial x^2} = 0, \quad (j = 1, 2) \quad (5.3.38)$$

ile verilen iki pseudo-eliptik denklem için bir Dirichlet problemi olarak verilmektedir. İkinci tip sınır koşulu olarak

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial \zeta_2^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial \zeta_1^2} &= 0, \\ \frac{\partial^3 W}{\partial \zeta_2^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 W}{\partial \zeta_1^2 \partial \zeta_2} &= -\frac{h^3}{D} N, \end{aligned} \quad (5.3.39)$$

denklemlerini alalım. Bu koşullar kayma kuvveti( $N$ ) için verilmiş  $\zeta_2 = 0$  düzlemindeki sınır koşullarıdır. Buradaki işleyiş ve ifadelerin analizi bir önceki durumla benzerlik göstermektedir. Kayma kuvveti söz konusu olduğundan bir dönme açısı meydana geldiği için  $x_2 = 0$  düzleminin kenarında  $\theta = \frac{\partial W}{\partial x_2}$  dönüşümüyle parabolik denklem aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$D\gamma_e^4 \frac{\partial^4 \theta}{\partial x_1^4} + 2\rho h \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = -Q \frac{\partial^2 N}{\partial x_1^2}. \quad (5.3.40)$$

Sonuç olarak bu bölümde ince plakalarda dış etkiye maruz kalmadan doğal durumda oluşan bükülmenin, plakaların kenarında meydana getirdiği dalganın parabolik-eliptik bir davranış gösterdiği asimptotik bir modelle ifade edilebilmiştir.

## KAYNAKLAR

- [1] Achenbach.J.D. (1973). *Wave propagation in elastic solids*. North-Holland, Amsterdam.
- [2] Achenbach J.D.(1998)*Explicit solutions for carrier waves supporting surface waves and plate waves*. Wave Motion 28, 89-97
- [3] Chadwick, P. (1976). *Surface and interfacial waves of arbitrary form in isotropic elastic media*. J. Elast, 6, 73-80.
- [4] Cole, J. H. (1958). *Stresses produced in a half plane by moving loads*. J. Appl. Mech., 25, 433-436.
- [5] Courant R., Hilbert D. *Methods of Mathematical Physics*. (1989). Vol.2, John Wiley-Sons, New York.
- [6] Erbaş B., Kaplunov J. and Prikazchikov D. A. (2012). *The Rayleigh wave field in mixed problems for a half-plane*. . IMA J. Appl. Math., doi: 10.1093/imamat/hxs010.
- [7] Debnath L.,Bhatta D.(2007)*Integral Transforms And Applications* Second Edition,Chapman-Hall/CRC.
- [8] Friedlander, F. G. (1948). *On the total reflection of plane waves*. Quart. J. Mech. Appl. Math., 1, 376-384.
- [9] Graff K., (1975). *Wave motion in elastic solids*. New York, Oxford University Press.
- [10] International Centre for Mechanical Sciences (2013).*Dynamic Localization Phenomena in Elasticity, Acoustics and Electromagnetism*. Courses and Lectures Vol. 547, Italy, Springer.
- [11] Kaplunov J., Prikazchikov D.A. (2013) *Explicit models for surface, interfacial and edge wave in elastic solids*. In Dynamic Localization Phenomena In Elasticity, Acoustics and Electromagnetism.
- [12] Kaplunov J., Zakharov A. and Prikazchikov D. A. (2006). *Explicit models for elastic and piezoelectric surface waves*. IMA J. Appl. Math., 71, 768-782.

- [13] Kaplunov J., Nolde E. and Prikazchikov D. A.(2010). *A revisit to the moving load problem using an asymptotic model for Rayleigh wave*. Wave Motion, 71, 440-451.
- [14] Kaplunov J., Kossovich E. L., Moukhomodiariov and Sorokina O.V.(2013). *Explicit models for bending and interfacial in thin elastic plates*. Izvestia SGU, Math. Mech. Inf., 13(1), 56-63.
- [15] Kononkov K. Yu., *Rayleigh-type bending wave*.(1960). Sov. Phys. Acoust. 6, 122-123.
- [16] Lawrie J.B., Kaplunov J.,(2012). *Edge waves and resonance on elastic structures: an overview*. Math. Mech. Solids 17(1), 4-16(doi:10.1177/1081286511412281).
- [17] Murray J.D.(1984),*Asymptotic Analysis*, Oxford University, Oxford
- [18] Norris A.N., Krylov V.V. and Abrahams I.D.(2000).*Bending edge waves and comments on "A new bending wave solution for the classical plate equation"*. Quart. J. Mech. Appl. Math. 62,19-30.
- [19] Prikazchikov D. A.(2010)*An asymptotic model for surface wave*, Days on Diffraction 2010.
- [20] Prikazchikov D. A., .(2013). *Rayleigh waves of arbitrary profile in anisotropic media*. Mech. Rec. Comm, doi: 10.1016/j.mechrescom.2013.03.009.
- [21] Rayleigh, L., (1885)*On waves propagated along the plane surface of an elastic solid*. Proc. R. Soc. Lond. 17, 4-11.