KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLERİN OPTİMİZASYON YÖNTEMLERİ

Doktora Tezi

Emrah KARAMAN

Eskişehir, 2017

KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLERİN OPTİMİZASYON YÖNTEMLERİ

Emrah KARAMAN

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalı
Danışmanlar: Yard. Doç. Dr. İlknur ATASEVER GÜVENÇ
Yard. Doç. Dr. Mustafa SOYERTEM

Eskişehir
Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Kasım, 2017

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Emrah KARAMAN'ın **"Küme Değerli Dönüşümlerin Optimizasyon Yöntemleri"** başlıklı tezi **20/11/2017** tarihinde, aşağıdaki juri tarafından değerlendirilerek "Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği"nin ilgili maddeleri uyarınca, **Matematik** Anabilim dalında Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

		Unvanı-Adı Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	:	Yard. Doç. Dr. İlknur ATASEVER GÜVENÇ	....
Üye	:	Prof. Dr. İdris ZORLUTUNA	....
Üye	:	Prof. Dr. Taner BÜYÜKKÖROĞLU	....
Üye	:	Doç. Dr. Hakan ÇEVİKALP	....
Üye	:	Yard. Doç. Dr. Ümmühan BAŞARAN FİLİK	....

Enstitü Müdürü

ÖZET

KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLERİN OPTİMİZASYON YÖNTEMLERİ

Emrah KARAMAN

Matematik Anabilim Dalı

Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kasım, 2017

Danışmanlar: Yard. Doç. Dr. İlknur ATASEVER GÜVENÇ

Yard. Doç. Dr. Mustafa SOYERTEM

Bu çalışmada küme değerli dönüşümlerin optimizasyon yöntemleri incelenmiştir. Kümeleri azaltma (set less) bağıntısına göre verilen küme değerli optimizasyon problemleri için Gerstewitz fonksiyonu kullanılarak vektörizasyon fonksiyonları verilmiştir. Kümeleri karşılaştırmak için sıralama bağıntıları tanımlanmıştır. Tanımlanan sıralama bağıntılarının sıralama konisine bağlı olarak boştan farklı sınırlı kümeler ailesi üzerinde birer kısmi sıralama bağıntısı oldukları gösterilmiştir. Bu bağıntılara göre verilen küme değerli optimizasyon problemleri için skalerizasyon yöntemleri elde edilmiştir. Bunlara ek olarak, küme değerli dönüşümler için bir yönlü türev tanımlanmıştır. Yönlü türevin bazı özellikleri incelenmiş ve varlık teoremleri elde edilmiştir. Kısmi sıralama bağıntısına göre verilen küme değerli optimizasyon problemleri için yönlü türev yardımıyla gerekli ve yeterli optimallik koşulları çalışılmıştır.

Anahtar Sözcükler: Küme değerli optimizasyon, Optimallik koşulları, Küme sıralaması, Vektörizasyon, Skalerizasyon, Yönlü türev.

ABSTRACT

OPTIMIZATION METHODS OF SET-VALUED MAPS

Emrah KARAMAN

Department of Mathematics

Anadolu University, Graduate School of Sciences, November, 2017

Supervisors: Asst. Prof. Dr. İlknur ATASEVER GÜVENÇ

Asst. Prof. Dr. Mustafa SOYERTEM

In this study, some methods for set-valued optimization problems are examined. Vectorization functions are given for set-valued optimization problems with respect to set less order relation by using Gerstewitz function. Set order relations are defined to compare sets. It is shown that depending on the corresponding cone, these order relations are partial orders on the family of nonempty, bounded sets. Scalarization methods are obtained for set optimization problems with respect to these order relations. Additionally, a directional derivative is defined for set-valued maps. Some properties of the directional derivative are examined and existence theorems are obtained. By using the directional derivative, necessary and sufficient optimality conditions are studied for set-valued optimization problems with respect to partial order relation defined in this study.

Keywords: Set-valued optimization, Optimality condition, Set order, Vectorization, Scalarization, Directional derivative.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında büyük emekleri olan ve her türlü desteklerini benden esirgemeyen değerli danışman hocalarım Yard. Doç. Dr. İlknur ATASEVER GÜVENÇ ve Yard. Doç. Dr. Mustafa SOYERTEM'e, değerli hocalarım Prof. Dr. Mahide KÜÇÜK, Prof. Dr. Yalçın KÜÇÜK ve Araş. Görv. Dr. Didem TOZKAN'a ve doktora çalışmam boyunca her zaman yanımda olan sevgili eşime, oğluma ve aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

Emrah KARAMAN

Kasım 2017

20/11/2017

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilemeyen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Anadolu Üniversitesi tarafından kullanılan "bilimsel intihal tespit programı"yla tarandığını ve hiçbir şekilde "intihal içermediğini" beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm.

Emrah KARAMAN

İÇİNDEKİLER

Sayfa

TABLOLAR DİZİNİ

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}$	: Gerçel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	: n boyutlu gerçel vektörler kümesi
$\mathbb{B}_n$	: $\mathbb{R}^n$'nin açık birim yuvarı
$\overline{\mathbb{B}}_n$	: $\mathbb{R}^n$'nin kapalı birim yuvarı
$B_n(x, \varepsilon)$	: x merkezli ε yarıçaplı açık yuvar
$\overline{B}_n(x, \varepsilon)$	: x merkezli ε yarıçaplı kapalı yuvar
$\mathcal{P}_0(Y)$	: Y'nin boştan farklı alt kümelerinin ailesi
$\mathcal{P}^0_{\mp C}(Y)$	: Y'nin C ve $-C$ konisine göre has olan kümeleri ailesi
$\mathcal{B}^*(Y)$	: Y'nin boştan farklı sınırlı alt kümelerinin ailesi
$int(A)$	: A kümesinin topolojik içi
$bd(A)$	: A kümesinin sınırı
$cl(A)$	: A kümesinin kapanışı
$\leq_C$	: C sıralama konisine göre tanımlanan sıralama bağıntısı
(P)	: Optimizasyon problemi
(VOP)	: Vektör optimizasyon problemi
(SOP)	: Küme değerli optimizasyon problemi
$\mathbb{R}^n_+$	: $\mathbb{R}^n$ uzayının tüm bileşenleri pozitif veya 0 olan alt kümesi
0_n	: $\mathbb{R}^n$ uzayının tüm bileşenleri 0 olan elemanı
$convA$	: A kümesinin konveks zarfı
$\preceq^{\ell}_C$	: C konisine göre alttan sıralama bağıntısı
$\preceq^{u}_C$	: C konisine göre üstten sıralama bağıntısı
$\preceq^{s}_C$	: C konisine göre kümeleri azaltma bağıntısı
$\preceq^{m_1}_C$	: C konisine göre m_1-sıralama bağıntısı
$\preceq^{m_2}_C$	: C konisine göre m_2-sıralama bağıntısı
$D_M F(x, d)$	: F küme değerli dönüşümünün x noktasında d yönündeki M-yönlü türevi

1. GİRİŞ

Günlük hayatta karşılaştığımız problemlerin bir çoğu, var olan seçenekler arasından en iyiyi bulmaya yöneliktir. Seçeneklerimizi girdiler, bunlara karşılık elde edeceğimiz sonuçları da çıktılar olarak düşündüğümüzde bir fonksiyon elde ederiz ve bu fonksiyonun belli koşullarda en iyi değerleri araştırılır. Yani günlük hayatta karşılaştığımız problemlerin bir çoğu matematiksel optimizasyon problemleri olarak ifade edilebilir. Doğal olarak çözmeye çalıştığımız bu problemlerin çözüm yöntemleri başta matematik olmak üzere, mühendislik, ekonomi, bilgisayar bilimleri, iktisat, işletme gibi bir çok alanda çalışan araştırmacıların uzun yıllardır ilgisini çekmektedir.

Gerçel değerli bir optimizasyon problemi, X bir gerçel normlu uzay, A, X'in boştan farklı bir alt kümesi ve $f : X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere

$$(P) \begin{cases} \text{min(maks)} \quad f(x) \\ \quad x \in A \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Burada f fonksiyonuna (P) probleminin amaç fonksiyonu, A kümesine de uygun çözümler kümesi denir. Bu problemi çözmek için bir çok yöntem kullanılır. Örneğin (P) problemi doğrusal optimizasyon problemi olduğunda simpleks yöntemi [1] bu problemi çözmek için kullanılabilir. Amaç fonksiyonu ve A kümesini belirleyen kısıt fonksiyonlarının türevlenebilir olduğu durumlarda Karush-Kuhn-Tucker [1] veya Lagrange çarpanları yöntemlerinden [1] de yararlanılır. Diğer taraftan f, A'nın bir iç noktası olan x_0 noktasında türevlenebilir ve x_0, (P) probleminin bir yerel çözümü ise $f'(x_0) = 0$ olur [2]. Bu eşitlik de fonksiyonun türevlenebilir olduğu noktaların optimalliği için bir gerekli koşuldur ve (P) probleminin çözüm adaylarını bulmak için yaptığımız işlemlerden bir tanesidir. Amaç fonksiyonunun türevlenemediği optimizasyon problemleri de vardır. Amaç fonksiyonunun konveks fakat türevlenemediği durumlarda optimallik koşullarını vermek için Moreau [3] tarafından tanımlanan subdiferansiyel kavramından da yararlanılmıştır. Bu durumda yukarıda bahsettiğimiz yeterli koşul, "$\bar{x}$'nin (P) probleminin bir çözümü olması için gerek ve yeter koşul $\mathbf{0}$'ın amaç fonsiyonunun $\bar{x}$ noktasındaki subdiferansiyeline ait olmasıdır" şeklinde ifade edilir [3, 4]. Konveks olmayan optimizasyon problemlerini çözebilmek için Azimov ve Kasimov [5, 6] fonksiyonun epigrafını hiperdüzlemlerle değil de konik yüzeylerle destekleme fikrinden yola çıkarak zayıf subdiferansiyel kavramını tanımlamışlar ve optimallik koşulları vermişlerdir.

(P) probleminde amaç fonksiyonu bir vektör değerli fonksiyon olduğunda ortaya çıkan optimizasyon problemine vektör optimizasyon problemi denir. Yukarıda tanımlanan gerçel değerli (P) probleminin minimumu veya maksimumu gerçel sayılardaki sıralamaya göre bulunur. Ancak amaç fonksiyonu vektör değerli fonksiyon olduğunda görüntü uzayında gerçel sayılardaki gibi doğal bir sıralama yoktur. Problemin yapısı gereği görüntü uzayı üzerinde bir sıralama olmalıdır. Bu sıralama belli koşullar altında görüntü uzayının alt kümesi ile aşağıdaki şekilde ilişkilendirilir:

Y üzerinde bir $\leq$ kısmi sıralama bağıntısı (toplama ve skaler çarpmayla uyumlu, yansıyan, ters simetrik ve geçişken) verilsin ve bu sıralama yardımıyla $C_{\leq} = \{y \in Y \mid 0 \leq y\}$ kümesi tanımlansın. $\leq$ toplama ile uyumlu ($\forall x, y, z \in Y$ için $x \leq y \Longleftrightarrow x + z \leq y + z$) olduğundan

$$x \leq y \Longleftrightarrow y - x \in C_{\leq},$$

$\leq$ skaler çarpmayla uyumlu ($\forall x, y \in Y$ ve $\forall \lambda > 0$ için $x \leq y \Longleftrightarrow \lambda x \leq \lambda y$) olduğundan $C_{\leq}$ kümesi koni ($\forall x \in C_{\leq}$ ve $\forall \lambda > 0$ için $\lambda x \in C_{\leq}$), yansıyan olduğundan $0 \in C_{\leq}$, ters simetrik olduğundan $C_{\leq}$ sivri (pointed) ($C_{\leq} \cap (-C_{\leq}) \subset \{0\}$) ve geçişken olduğundan $C_{\leq}$ konveks küme olur. Dolayısıyla $\leq$ bir kısmi sıralama bağıntısı iken buna karşılık gelen $C_{\leq}$ kümesi sıfırı içeren bir konveks, sivri koni olur.

Tersine, Y uzayında herhangi bir sıfırı içeren C konveks, sivri konisi verildiğinde bu koni yardımıyla bir $\leq_C$ kısmi sıralama bağıntısı

$$x \leq_C y \Longleftrightarrow y - x \in C$$

denkliği ile verilir. $\leq_C$ sıralamasına göre bir kümenin minimal ve maksimal elemanlarının farklı tanımları verilmiştir [7–10].

Y, C konveks, sivri konisi ile kısmi sıralı bir gerçel vektör uzayı, X bir küme, A, X'in boştan farklı bir alt kümesi ve $f : X \to Y$ vektör değerli bir fonksiyon olsun.

Bir vektör optimizasyon problemi

$$(VOP)\begin{cases} \text{min(maks)} \quad f(x) \\ x \in A \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Vektör optimizasyon problemlerini çözebilmek için kullanılan yöntemlerden biri skalerizasyondur [7, 8, 11]. Vektör optimizasyon problemlerinin skaler problemlere dönüştürülerek çözülmesine skalerizasyon denir. Gerçel değerli optimizasyon problemlerini çözmek için verilen yollar analizde çok iyi bilindiğinden, yeni elde edilen problemi çözmek vektör optimizasyon problemini çözmekten daha kolaydır. Skalerizasyondan elde edilen çözümler aynı zamanda vektör optimizasyon probleminin de çözümleridir. Kullanılan bazı skalerizasyon yöntemleri Ağırlıklandırılmış Toplam [7,8], ε-kısıt [7], Karma (Hybrid) [7], Benson [7] ve Konik skalerizasyon [11] yöntemleridir.

Vektör optimizasyon problemlerinin optimallik koşullarını elde etmek için amaç fonksiyonunun çeşitli türevlerinden yararlanılır. (VOP) probleminin kısıtlı olduğu durumda, amaç ve kısıt fonksiyonlarının Fréchet türevlenebilir olması ve bazı ek koşullar altında vektör optimizasyon problemlerinin optimallik koşullarını vermek için önemli çalışmalar yapılmıştır [8, 9, 12]. Fonksiyonun Fréchet türevlenemediği durumda daha genel türev kavramlarına ihtiyaç duyulmuştur. Bunlardan biri de Gâteaux türev kavramıdır. Amaç fonksiyonun Gâteaux türevlenebilir olması durumunda da optimallik koşulları elde edilmiştir [13]. Vektör değerli fonksiyonlar için başka türev kavramları da verilmiştir [8–10, 14, 15].

Vektör değerli fonksiyonlar için bir genelleştirilmiş türev kavramı ise subdiferansiyel kavramıdır [8, 9, 14]. En küçük değeri araştırılan bir vektör optimizasyon probleminde $\mathbf{0}$'ın, amaç fonksiyonunun bir $\bar{x}$ noktasındaki subdiferansiyeline ait olması, $\bar{x}$ noktasının vektör optimizasyon probleminin çözümü olması için bir gerek ve yeter koşuldur. Fakat amaç fonksiyonu her zaman subdiferansiyellenemeyebilir. Bu durumda optimallik koşullarını verebilmek için Küçük vd. [16] tarafından tanımlanan genelleştirilmiş zayıf subdiferansiyel kavramından da yararlanılmıştır. Bu kavram gerçel değerli fonksiyonlar için tanımlanan zayıf subdiferansiyel kavramının vektör değerli fonksiyonlara bir genelleştirmesidir. Subdiferansiyel ile probleme doğrusal olarak yaklaşılırken, genelleştirilmiş zayıf subdiferansiyel ile konik bir yaklaşım yapılmaktadır. Küçük vd. $\bar{x}$ noktasının minimum olmasını, amaç fonksiyonun $\bar{x}$ noktasındaki genelleştirilmiş zayıf subdiferansiyelinin $(\mathbf{0}, 0)$ noktasını içermesi ile karakterize etmişlerdir.

Son yıllarda oyun teorisi, mühendislik, kontrol teorisi, finans, ekonomi gibi bir çok uygulama alanı bulan bir diğer önemli konu ise küme değerli optimizasyondur [17–21]. Küme değerli optimizasyon, vektör optimizasyonun bir genelleştirmesidir. Bu yüzden vektör değerli optimizasyon için kullanılan kavramların küme değerli optimizasyona genelleştirilmesi bir çok araştırmacının ilgisini çekmiştir. Chen, Huang ve Yang [10], Klein ve Thompson [19], Aubin ve Frankowska [22], Aubin ve Cellina [23], Chen ve Jahn [24], Jahn ve Ha [25] ve Kuroiwa [26–28] gibi araştırmacılar küme değerli analiz ve optimizasyonu üzerine önemli çalışmalar yapmışlardır.

Y, C sıralama konisi ile kısmi sıralı gerçel topolojik vektör uzayı, X herhangi bir küme, A, X'in boştan farklı bir alt kümesi ve $F : X \rightrightarrows Y$ boştan farklı değer alan bir küme değerli dönüşüm olsun. Bu durumda bir küme değerli optimizasyon problemi,

$$(SOP) \begin{cases} \text{min(maks)} \quad F(x) \\ \quad x \in A \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Bu çalışmada, (SOP)'nin vektör yaklaşımı ve küme yaklaşımına göre çözümleri ele alınacaktır.

Vektör yaklaşımında, $\bigcup\limits_{x \in A} F(x)$ kümesinin minimal (maksimal) elemanları araştırılır. Bu minimal (maksimal) elemanlardan en az birini bulunduran görüntü kümelerinin öngörüntülerindeki her bir eleman (SOP)'nin bir çözümüdür.

Kuroiwa tarafından ortaya konulan ve (SOP)'nin çözümlerinin elde edilmesinde kullanılan yeni bir yaklaşım da küme yaklaşımıdır. Bu yaklaşım F'nin değerlerini karşılaştırmaya dayanmaktadır [26, 28]. Bu karşılaştırmayı yapabilmek için $\mathcal{P}_0(Y)$ üzerinde sıralama bağıntılarına ve bu sıralama bağıntılarına göre bir ailenin etkin elemanları tanımına ihtiyaç vardır. Bilinen bazı sıralama bağıntıları ve bu sıralama bağıntılarının etkin elemanları ile ilgili daha fazla bilgi çeşitli kaynaklarda yer almaktadır [25, 27, 29]. Bu yaklaşımda $\mathcal{F} = \{F(x) \mid x \in A\}$ ailesinin minimal kümeleri araştırılmaktadır. Bu minimal kümelerin öngörüntülerinin her bir elemanı (SOP)'nin küme yaklaşımına göre bir çözümüdür. Yaklaşımlar arasındaki bu farklılık doğal olarak farklı çözümler verebilir.

Vektör optimizasyon problemlerinde olduğu gibi küme değerli optimizasyon problemlerini çözmek için de farklı skalerizasyon yöntemleri kullanılmaktadır [29–31]. Küme değerli optimizasyon problemlerinde Gerstewitz fonksiyonu kullanılarak elde edilen skalerizasyon yöntemleri son yıllarda daha fazla ilgi görmüştür [29–32]. Hernández ve Rodríguez-Marín [29], Gerstewitz fonksiyonları yardımı ile $\preceq^{\ell}$ sıralamasına göre verilen optimizasyon problemleri için optimallik koşulları elde etmişlerdir. Uzaklık fonksiyonu yardımıyla lineer olmayan küme değerli optimizasyon problemleri için optimallik koşulları Xu ve Li [33] tarafından verilmiştir.

Küme değerli optimizasyon problemlerini çözmek için kullanılan başka bir yöntem ise vektörizasyondur. Bu yöntemle küme değerli optimizasyon problemi vektör optimizasyon problemine indirgenir. Daha sonra elde edilen vektör optimizasyon probleminin çözümü, bilinen yöntemler yardımı ile bulunur. Bu çözüm, küme değerli optimizasyon probleminin de bir çözümü olur. 2011 yılında Küçük vd. [34–36] koni kapalı ve koni sınırlı kümelerin tam sıralama konisine göre minimal elemanının varlığı ve tekliğinden yararlanarak ilk vektörizasyon fonksiyonunu tanımlamışlardır. Bu vektörizasyon fonksiyonunun bir noktada aldığı değer, küme değerli dönüşümün bu noktadaki değerinin tam sıralama konisine göre minimal elemanıdır.

2013 yılında Jahn [37], koni kapalı ve koni konveks kümeleri bir hiperdüzlem ile ayırma teoreminden yararlanarak kümeleri azaltma bağıntısı (set less) için görüntü uzayı $\mathbb{R}^2$ de olan ve minmax sıralama bağıntısı için görüntü uzayı $\mathbb{R}^4$ de olan farklı vektörizasyon fonksiyonları tanımlamıştır. Buna ek olarak, küme değerli optimizasyon probleminin vektörizasyonu ile elde edilen yeni vektör optimizasyon probleminin çözümleri ile asıl problemin çözümleri arasındaki ilişkileri incelemiştir.

Küme değerli optimizasyon problemlerinin küme yaklaşımına göre optimallik koşullarını elde etmek için küme değerli dönüşümlerin yönlü türevlerinden de yararlanılır. Küme değerli dönüşümlerin yönlü türevlerinden yararlanarak kümeleri alttan azaltma (lower set less) ve kümeleri azaltma bağıntılarına göre verilen küme değerli optimizasyon problemleri için optimallik koşulları elde edilmiştir [38–41].

2. GERSTEWITZ VEKTÖRİZASYON

Bu bölümde küme değerli optimizasyon problemlerinin küme yaklaşımına göre çözümlerinin elde edilmesi için kullanılan temel tanım ve teoremler verildikten sonra bir skalerizasyon fonksiyonu tanımlanacaktır. Bu skalerizasyon fonksiyonu yardımıyla üstten sıralama bağıntısına (upper set less) göre verilen küme değerli optimizasyon problemleri için bir skalerizasyon yöntemi elde edilecektir. Son olarak bir vektörizasyon fonksiyonu tanımlanacaktır. Vektörizasyon fonksiyonunun monotonluk başta olmak üzere bazı özellikleri incelendikten sonra fonksiyon yardımıyla kümeleri azaltma bağıntısına göre verilen küme değerli optimizasyon problemleri için vektörizasyon yöntemleri elde edilecektir.

2.1. Temel Tanım ve Teoremler

Bu kısımda X herhangi bir küme, Y, sıfırı içeren, kapalı, konveks, sivri ve içi boştan farklı bir $C \subset Y$ konisi ile kısmi sıralı bir topolojik vektör uzayı olarak alınacaktır.

C konisi yardımıyla Y üzerinde bir sıralama bağıntısı $\forall y, y' \in Y$ için

$$\begin{aligned} y \leq_C y' &\iff \; y' - y \in C \\ y <_C y' &\iff \; y' - y \in int(C). \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

$A \subset Y$ ve $a \in A$ olsun. $A \cap (a - C) = \{a\}$ $(A \cap (a + C) = \{a\})$ ise a'ya A kümesinin C konisine göre minimal (maksimal) elemanı denir ve A'nın minimal (maksimal) elemanlarının kümesi $\min A$ (maks$A$) ile gösterilir. $A \cap (a - int(C)) = \emptyset$ $(A \cap (a + int(C)) = \emptyset)$ ise a'ya A kümesinin C konisine göre zayıf minimal (zayıf maksimal) elemanı denir ve A'nın zayıf minimal (zayıf maksimal) elemanlarının kümesi $W\min A$ (Wmaks$A$) ile gösterilir. Ayrıca $\min A \subset W\min A$ ve maks$A \subset W$maks$A$ olduğu açıktır.

$f : X \to Y$ vektör değerli bir fonksiyon olmak üzere

$$(VOP) \begin{cases} \min(\text{maks}) f(x) \\ x \in X \end{cases}$$

problemi dikkate alınsın. $\bar{x} \in X$ için $f(x) \leq_C f(\bar{x})$ $(f(\bar{x}) \leq_C f(x))$ ve $f(x) \neq f(\bar{x})$ olacak şekilde $x \in X$ yoksa $\bar{x}$'ye (VOP)'nin bir çözümü denir. Ayrıca her $x \in X$ için $f(\bar{x}) \leq_C f(x)$ $(f(x) \leq_C f(\bar{x}))$ oluyorsa $\bar{x}$'ye (VOP)'nin bir güçlü çözümü denir. Her $x \in X \setminus \{\bar{x}\}$ için $f(\bar{x}) <_C f(x)$ $(f(x) <_C f(\bar{x}))$ oluyorsa $\bar{x}$'ye (VOP)'nin kesin çözümü denir.

Tanım 2.1.1. *$A, B \in \mathcal{P}_0(Y)$ olsun.O halde*

(i) $A + B = \{a + b \mid a \in A$ *ve* $b \in B\}$ *kümesine A ve B kümelerinin cebirsel toplamı,*

(ii) $A - B = \{a - b \mid a \in A$ *ve* $b \in B\}$ *kümesine A ve B kümelerinin cebirsel farkı denir.*

$A+C$ kapalı ise A'ya C-kapalı, 0'ın her bir U komşuluğu için $A \subset tU + C$ olacak şekilde t pozitif sayısı varsa A'ya C-sınırlı, A'nın her $\{U_\alpha + C \mid U_\alpha$ açık, $\alpha \in I\}$ örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa A'ya C-kompakt denir. Bir küme C-kompakt ise C-kapalı ve C-sınırlıdır [9]. Yukarıda, C konisi yardımıyla ifade edilen tanımlarda $-C$ konisi alındığında A kümesine sırasıyla -C-kapalı, -C-sınırlı, -C-kompakt küme denir [33]. $A \in \mathcal{P}_0(Y)$ kümesi, Y de C-sınırlı ve $-C$-sınırlı ise $\mp C$-sınırlı; C-kapalı ve $-C$-kapalı ise $\mp C$-kapalı; C-kompakt ve $-C$-kompakt ise $\mp C$-kompakt küme olarak adlandırılacaktır. $A + C \neq Y$ olan $A \in \mathcal{P}_0(Y)$ kümesine C konisine göre has küme (C-proper) denir ve C konisine göre has olan kümelerin ailesi $\mathcal{P}_{0C}(Y)$ ile gösterilir [29]. Bu tanımda C konisi yerine $-C$ konisi alınırsa $A \in \mathcal{P}_0(Y)$ kümesine $-C$ konisine göre has küme denir ve $-C$ konisine göre has olan kümelerin ailesi $\mathcal{P}_{0-C}(Y)$ ile gösterilir [33]. Y'nin C ve $-C$ konisine göre has olan kümeleri ailesi $\mathcal{P}^0_{\mp C}(Y)$ ile gösterilecektir. Yani $\mathcal{P}^0_{\mp C}(Y) = \mathcal{P}_{0C}(Y) \cap \mathcal{P}_{0-C}(Y)$'dir.

$F : X \rightrightarrows Y$ bir küme değerli dönüşüm olsun. N, Y üzerinde herhangi bir kümesel özellik olmak üzere, $\forall x \in X$ için $F(x)$ kümeleri Y üzerinde N-özelliğini sağlıyorsa F'ye N-değerli denir. Örneğin, $\forall x \in X$ için $F(x) + C$ kapalı ise F ye C-kapalı değerli denir.

Her $x \in X$ için $F(x) \neq \emptyset$ olsun.

$$(SOP) \begin{cases} \min(\text{maks}) F(x) \\ x \in X \end{cases}$$

ile verilen küme değerli optimizasyon problemi göz önüne alınsın. Bu problemin çözümlerinin araştırılmasında kullanılan yaklaşımlardan biri olan vektör yaklaşımında, $\bigcup\limits_{x\in X} F(x)$ kümesinin minimal (maksimal) elemanları araştırılır. Bu minimal (maksimal) elemanlardan en az birini bulunduran görüntü kümelerinin öngörüntülerindeki her bir eleman (SOP)'nin bir çözümüdür. Yani bu yaklaşıma göre, $F(X) = \bigcup\limits_{x\in X} F(x)$ olmak üzere

$$F(x_0) \cap \min F(X) \neq \emptyset \quad \Big(F(x_0) \cap \text{maks} F(X) \neq \emptyset\Big)$$

koşulunu sağlayan $x_0 \in X$ elemanına küme değerli optimizasyon probleminin bir çözümü denir [27]. (SOP)'nin vektör yaklaşımına göre incelendiği durumda problemi $(v - SOP)$ ile gösterilecektir. Benzer şekilde

$$F(x_0) \cap W \min F(X) \neq \emptyset \quad \Big(F(x_0) \cap W \text{maks} F(X) \neq \emptyset\Big)$$

koşulunu sağlayan $x_0 \in X$ elemanına $(v - SOP)$'nin bir zayıf çözümü denir [29].

(SOP)'nin çözümlerinin elde edilmesinde kullanılan diğer bir yaklaşım olan küme yaklaşımı ise F'nin değerleri olan kümeler arasındaki karşılaştırmaya dayanmaktadır ve Kuroiwa [27] tarafından ortaya konulmuştur. Bu karşılaştırmayı yapabilmek için $\mathcal{P}_0(Y)$ üzerinde sıralama bağıntılarına ihtiyaç duyulmaktadır. Bu sıralama bağıntılarından bazıları bu kısımda sunulmuştur. Kümeleri sıralamak için verilen bağıntılar ile ilgili daha fazla bilgi çeşitli kaynaklarda yer almaktadır [25, 27].

Tanım 2.1.2. *$\mathcal{S} \subset \mathcal{P}_0(Y)$ üzerinde $\preceq$ bağıntısı verilsin ve $A, B, D \in \mathcal{S}$ olsun.*

(i) Her $A \in \mathcal{S}$ için $A \preceq A$ oluyorsa $\preceq$ bağıntısı $\mathcal{S}$ üzerinde yansıma özelliğine sahiptir,

(ii) $A \preceq B$ ve $B \preceq D$ iken $A \preceq D$ oluyorsa $\preceq$ bağıntısı $\mathcal{S}$ üzerinde geçişme özelliğine sahiptir,

(iii) $A \preceq B$ ve $B \preceq A$ iken $A = B$ oluyorsa $\preceq$ bağıntısı $\mathcal{S}$ üzerinde ters simetrik özelliğine sahiptir,

(iv) $\preceq$ bağıntısı $\mathcal{S}$ ailesi üzerinde yansıma ve geçişme özelliklerine sahip ise bu

bağıntıya önsıralama bağıntısı,

(v) $\preceq$ *bağıntısı* $\mathcal{S}$ *ailesi üzerinde yansıma, geçişme ve ters simetrik özelliklerine sahip ise bu bağıntıya kısmi sıralama bağıntısı,*

(vi) $A \preceq B$ *olsun. Her* $E \in \mathcal{S}$ *için* $A+E \preceq B+E$ *oluyorsa* $\preceq$ *bağıntısına toplama ile uyumlu,*

(vii) $A \preceq B$ *olsun. Her* $\lambda > 0$ *için* $\lambda A \preceq \lambda B$ *oluyorsa* $\preceq$ *bağıntısına skaler çarpma ile uyumludur denir.*

Tanım 2.1.3. *[27, 29]* $A, B \in \mathcal{P}_0(Y)$ *olmak üzere,*

(i) $\preceq_C^{\ell}$ *alttan sıralama bağıntısı,*

$$A \preceq_C^{\ell} B \Longleftrightarrow B \subset A + C,$$

(ii) $\prec_C^{\ell}$ *kesin alttan sıralama bağıntısı,*

$$A \prec_C^{\ell} B \Longleftrightarrow B \subset A + int(C),$$

(iii) $\sim_C^{\ell}$ *denklik bağıntısı,*

$$A \sim^{\ell} B \Longleftrightarrow A \preceq_C^{\ell} B \text{ ve } B \preceq_C^{\ell} A \Longleftrightarrow A + C = B + C$$

şeklinde tanımlanır. Bu denklik bağıntısına göre denklik sınıflarının ailesi $[\cdot]^{\ell}$ *ile gösterilir.*

Tanım 2.1.4. *[25, 27, 29, 33]* $A, B \in \mathcal{P}_0(Y)$ *olmak üzere,*

(i) $\preceq_C^{u}$ *üstten sıralama bağıntısı,*

$$A \preceq_C^{u} B \Longleftrightarrow A \subset B - C,$$

(ii) $\prec_C^{u}$ *kesin üstten sıralama bağıntısı,*

$$A \prec_C^{u} B \Longleftrightarrow A \subset B - int(C),$$

(iii) $\sim^u$ *denklik bağıntısı,*

$$A \sim^u B \Longleftrightarrow A \preceq^u_C B \text{ ve } B \preceq^u_C A \Longleftrightarrow A - C = B - C$$

şeklinde tanımlanır. Bu denklik bağıntısına göre denklik sınıflarının ailesi $[\cdot]^u$ *ile gösterilir.*

Tanım 2.1.5. *[25]* $A, B \in \mathcal{P}_0(Y)$ *olmak üzere,*

(i) $\preceq^s_C$ *kümeleri azaltma bağıntısı,*

$$A \preceq^s_C B \Longleftrightarrow A \preceq^\ell_C B \text{ ve } A \preceq^u_C B,$$

(ii) $\prec^s_C$ *kümeleri kesin azaltma bağıntısı,*

$$A \prec^s_C B \Longleftrightarrow A \prec^\ell_C B \text{ ve } A \prec^u_C B,$$

(iii) $\sim^s$ *denklik bağıntısı,*

$$A \sim^s B \Longleftrightarrow A \sim^\ell B \text{ ve } A \sim^u B \Longleftrightarrow A + C = B + C \text{ ve } A - C = B - C$$

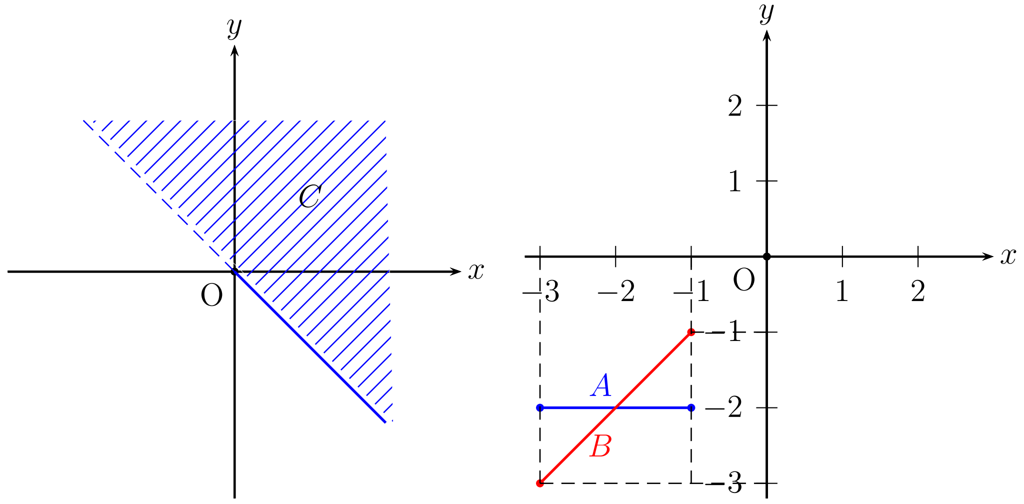
şeklinde tanımlanır. Bu denklik bağıntısına göre denklik sınıflarının ailesi $[\cdot]^s$ *ile gösterilir.*

Uyarı 2.1.6. *[25]* $\preceq^\ell_C$, $\preceq^u_C$ *ve* $\preceq^s_C$ *sıralama bağıntıları* $\mathcal{P}_0(Y)$ *de önsıralama bağıntılarıdır.*

Uyarı 2.1.7. Y*,* C *tam sıralama konisi ile sıralı topolojik vektör uzayı olsun. Bu durumda, uzaydan alınan iki farklı alt küme bu koni ve kümeleri azaltma bağıntısına göre karşılaştıralamayabilir. Yani* C *tam sıralama konisi iken kümeleri azaltma bağıntısı tam sıralama olmak zorunda değildir. Bu durum Örnek 2.1.8 de gösterilmiştir.*

Örnek 2.1.8. *$Y = \mathbb{R}^2$ uzayı*

$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq -x\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0,\ y > -x\}$ tam sıralama konisi ile sıralı ve $A = conv\{(-1, -2), (-3, -2)\}$, $B = conv\{(-1, -1), (-3, -3)\}$ olsun.



Şekil 2.1: *$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq -x\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0,\ y > -x\}$ tam sıralama konisi ve $A = conv\{(-1, -2), (-3, -2)\}$, $B = conv\{(-1, -1), (-3, -3)\}$ kümeleri*

Şekil 2.1'den de görülebileceği gibi $B \not\subset A + C$ olduğundan $A \not\preceq^{\ell}_{C} B$ olur. Böylece $A \not\preceq^{s}_{C} B$ elde edilir. $B \not\subset A - C$ olduğundan $B \not\preceq^{u}_{C} A$ olur. Böylece $B \not\preceq^{s}_{C} A$ elde edilir. Yani A ve B kümeleri kümeleri azaltma bağıntısına göre karşılaştırılamazdır.

Bu sıralama bağıntıları için minimal, maksimal, zayıf minimal ve zayıf maksimal küme kavramları aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 2.1.9. *[25, 29, 33] $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}_0(Y)$, $A \in \mathcal{S}$ ve $\sharp \in \{\ell, u, s\}$ olsun.*

(i) $B \preceq^{\sharp}_{C} A$ olan her $B \in \mathcal{S}$ için $A \preceq^{\sharp}_{C} B$ oluyorsa A'ya $\mathcal{S}$ ailesinin bir $\sharp$-minimal kümesi denir. $\mathcal{S}$'nin $\sharp$-minimal kümelerinin ailesi $\sharp - \min \mathcal{S}$ ile gösterilir.

(ii) $A \preceq^{\sharp}_{C} B$ olan her $B \in \mathcal{S}$ için $B \preceq^{\sharp}_{C} A$ oluyorsa A'ya $\mathcal{S}$ ailesinin bir $\sharp$-maksimal kümesi denir. $\mathcal{S}$'nin $\sharp$-maksimal kümelerinin ailesi $\sharp - \mathrm{maks}\mathcal{S}$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.10. *[29] $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}_0(Y)$, $A \in \mathcal{S}$ ve $\sharp \in \{\ell, u, s\}$ olsun.*

(i) $B \prec^{\sharp}_{C} A$ olan her $B \in \mathcal{S}$ için $A \prec^{\sharp}_{C} B$ oluyorsa A'ya $\mathcal{S}$ ailesinin bir zayıf $\sharp$-minimal kümesi denir. $\mathcal{S}$'nin zayıf $\sharp$-minimal kümelerinin ailesi $\sharp - W\min \mathcal{S}$ ile gösterilir.

(ii) $A \prec_C^\sharp B$ *olan her* $B \in \mathcal{S}$ *için* $B \prec_C^\sharp A$ *oluyorsa* A*'ya* $\mathcal{S}$ *ailesinin bir zayıf* $\sharp$*-maksimal kümesi denir.* $\mathcal{S}$*'nin zayıf* $\sharp$*-maksimal kümelerinin ailesi* $\sharp\!-\!W\text{maks}\mathcal{S}$ *ile gösterilir.*

$\sharp \in \{\ell, u, s\}$ olmak üzere (SOP)'nin $\preceq_C^\sharp$ bağıntısı kullanılarak küme yaklaşımına göre incelendiği durumda problem $(\sharp - SOP)$ ile gösterilir.

$\mathcal{F}(X) = \{F(x) \mid x \in X\}$ ve $\sharp \in \{\ell, u, s\}$ olmak üzere, $(\sharp - SOP)$ verildiğinde $F(x_0)$ $\mathcal{F}(X)$ ailesinin bir $\sharp$-minimal ($\sharp$-maksimal) kümesi ise x_0'a $(\sharp - SOP)$'nin bir çözümü denir.

Benzer olarak, $(\sharp - SOP)$ verildiğinde $F(x_0)$ $\mathcal{F}(X)$ ailesinin bir zayıf $\sharp$-minimal (zayıf $\sharp$-maksimal) kümesi ise x_0'a $(\sharp - SOP)$'nin bir zayıf çözümü denir.

Uyarı 2.1.11. *$\sharp \in \{\ell, u, s\}$ olmak üzere, $\sharp$-minimallik kavramı, C sıralama konisine göre minimallik kavramının kümelere bir genelleştirmesidir. Böylece F'nin vektör değerli bir fonksiyon olduğu durumda $(v - SOP)$ ile $(\sharp - SOP)$'nin çözümleri aynı olur.*

Aşağıda $\mathcal{P}_0(Y)$ üzerinde tanımlı gerçel değerli fonksiyonların monotonluğu tanımı verilmiştir.

Tanım 2.1.12. *[29] $\sharp \in \{\ell, u\}$ ve $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}_0(Y)$ olsun. $T : \mathcal{P}_0(Y) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda*

(i) $A \preceq_C^\sharp B$ *olan* $A, B \in \mathcal{S}$ *için* $T(B) \leq T(A)$ $(T(A) \leq T(B))$ *oluyorsa* T*'ye* $\mathcal{S}$ *üzerinde* $\sharp$*-azalan (*$\sharp$*-artan) fonksiyon denir.*

(ii) $A \prec_C^\sharp B$ *olan* $A, B \in \mathcal{S}$ *için* $T(B) < T(A)$ $(T(A) < T(B))$ *oluyorsa* T*'ye* $\mathcal{S}$ *üzerinde kesin* $\sharp$*-azalan (kesin* $\sharp$*-artan) fonksiyon denir.*

Hernández ve Rodríguez-Marín [29], $e \in -int(C)$ ve $A \in \mathcal{P}_0(Y)$ olduğunda $\phi^\ell_{e,A}(y) = \inf\{t \in \mathbb{R} \mid y \in te + A + C\}$ olmak üzere $G^\ell_e(A, B) = \sup\limits_{b \in B}\{\phi^\ell_{e,A}(b)\}$ şeklinde tanımlanan fonksiyonun bazı özelliklerini incelemiş ve bu fonksiyon yardımı ile $(\ell - SOP)$ için optimallik koşulları elde etmişlerdir. Bu fonksiyonun bazı gerekli özellikleri aşağıdaki önermelerde verilmiştir.

Önerme 2.1.13. *[29] $A, B \in \mathcal{P}_{0C}(Y)$ olsun. Bu durumda*

(i) A, C-sınırlı ise, B'nin C-sınırlı olması için gerek ve yeter koşul $G_e^{\ell}(A, B) < \infty$ olmasıdır,

(ii) $B \in [A]^{\ell}$ ise $G_e^{\ell}(A, \cdot) = G_e^{\ell}(B, \cdot)$ ve $G_e^{\ell}(\cdot, A) = G_e^{\ell}(\cdot, B)$'dir,

(iii) $B \in [A]^{\ell}$ ise $G_e^{\ell}(A, B) = G_e^{\ell}(B, A)$'dır,

(iv) $G_e^{\ell}(\cdot, A)$, $\mathcal{P}_{0C}(Y)$ üzerinde ℓ-artandır,

(v) $G_e^{\ell}(A, \cdot)$, $\mathcal{P}_{0C}(Y)$ üzerinde ℓ-azalandır.

Önerme 2.1.14. *[29] $A \in \mathcal{P}_{0C}(Y)$ ve A, C-kompakt küme olsun. Bu durumda*

(i) $G_e^{\ell}(\cdot, A)$, C-kompakt kümeler ailesi üzerinde kesin ℓ-artandır,

(ii) $G_e^{\ell}(A, \cdot)$, C-kompakt kümeler ailesi üzerinde kesin ℓ-azalandır.

Önerme 2.1.15. *[29] $A \in \mathcal{P}_{0C}(Y)$ ve A, C-kapalı olsun. Bu durumda*

(i) $G_e^{\ell}(A, A) = 0$,

(ii) $B \in [A]^{\ell}$ ise $G_e^{\ell}(A, B) = G_e^{\ell}(B, A) = 0$,

(iii) $A \preceq_C^{\ell} B \Longleftrightarrow G_e^{\ell}(A, B) \leq 0$

olur.

Önerme 2.1.16. *[29] $A, B \subset Y$, C-kompakt kümeler olsun. Bu durumda*

(i) $A \prec_C^{\ell} B \Longleftrightarrow G_e^{\ell}(A, B) < 0$,

(ii) $A \not\prec_C^{\ell} B \Longleftrightarrow G_e^{\ell}(A, B) \geq 0$,

(iii) $A \not\prec_C^{\ell} B$ ve $A \preceq_C^{\ell} B \Longleftrightarrow G_e^{\ell}(A, B) = 0$

olur.

2.2. Bir Skalerizasyon Fonksiyonu

Bu kısımda ilk olarak $\preceq_C^u$ sıralama bağıntısına göre tanımlanan küme değerli optimizasyon problemleri için Gerstewitz fonksiyonu yardımı ile Hernández ve Rodríguez-Marín [29]'in verdiği yöntemlere benzer bazı konveks olmayan skalerizasyon yöntemleri elde edilmiştir. Daha sonra herhangi bir konvekslik kabulü olmadan, $(u - SOP)$ için gerekli ve yeterli optimallik koşulları elde edilmiştir.

Önerme 2.2.1 ve Önerme 2.2.2, [29] da $\preceq_C^\ell$ sıralama bağıntısı için verilen özelliklerin $\preceq_C^u$ ve $\preceq_C^s$ sıralama bağıntıları için de geçerli olduğunu göstermektedir.

Önerme 2.2.1. *$\sharp \in \{u, s\}$ olmak üzere, $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}_0(Y)$, $A \in \mathcal{S}$, $\mathcal{S}$'nin bir $\sharp$-minimali ($\sharp$-maksimali) olsun. Bir $B \in \mathcal{S}$ için $B \in [A]^\sharp$ oluyorsa B de $\mathcal{S}$'nin $\sharp$-minimali ($\sharp$-maksimali) olur.*

Kanıt. A, $\mathcal{S}$'nin $\sharp$-minimali, $B \in \mathcal{S}$ ve $B \in [A]^\sharp$ olsun. $D \preceq_C^\sharp B$ olacak şekilde bir $D \in \mathcal{S}$ alınsın. $B \in [A]^\sharp$ olduğundan $B \preceq_C^\sharp A$ ve $A \preceq_C^\sharp B$'dir. O halde $D \preceq_C^\sharp B \preceq_C^\sharp A$ olur. A, $\mathcal{S}$'nin $\sharp$-minimali ve $D \preceq_C^\sharp A$ olduğundan $A \preceq_C^\sharp D$'dir. $B \preceq_C^\sharp A$ olduğundan $B \preceq_C^\sharp D$ elde edilir. O halde B, $\mathcal{S}$'nin $\sharp$-minimalidir. $\square$

Önerme 2.2.2. *$\sharp \in \{u, s\}$, $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}_0(Y)$ ve $A \in \mathcal{S}$ olsun. Bu durumda*

(i) A, $\mathcal{S}$ ailesinin bir $\sharp$-minimal kümesi ise $\mathcal{S}$ ailesinin bir zayıf $\sharp$-minimal kümesidir.

(ii) A, $\mathcal{S}$ ailesinin bir $\sharp$-maksimal kümesi ise $\mathcal{S}$ ailesinin bir zayıf $\sharp$-maksimal kümesidir.

Kanıt. $\sharp = u$ olduğu durum için kanıtlansın. $\sharp = s$ olduğu durum için ise $\preceq_C^\ell$ ve $\preceq_C^u$ bağıntıları yardımı ile kolayca kanıtlanabilir.

(i) Kabul edelim ki A, $\mathcal{S}$ kümesinin u-minimali olsun. $B \prec_C^u A$ olan keyfi $B \in \mathcal{S}$ alalım. $B \prec_C^u A$ olduğundan

$$B \subset A - int(C) \subset A - C \tag{2.1}$$

olur. Yani $B \preceq_C^u A$'dır. $A \in u - \min S$ olduğundan $A \preceq_C^u B$'dir. Yani

$$A \subset B - C \tag{2.2}$$

ve dolayısıyla $B \in [A]^u$'dir. Böylece

$$A - C = B - C \tag{2.3}$$

elde edilir. (2.1) ve (2.2)'den

$$A \subset B - C \subset A - int(C) \tag{2.4}$$

elde edilir. Diğer yandan (2.3) eşitliğinin her iki yanına $-int(C)$ eklenerek

$$A - int(C) = B - int(C) \tag{2.5}$$

elde edilir. (2.4) ve (2.5)'den $A \subset B - int(C)$ yani $A \prec_C^u B$ olur. Böylece $A \in u - W\min S$ olur.

(ii) Benzer şekilde kanıtlanır.

□

Bir kümeler ailesinin $\preceq_C^u$ sıralama bağıntısına göre minimal, maksimal, zayıf minimal ve zayıf maksimal elemanlarının nasıl bulunacağı aşağıdaki örnek üzerinde incelenmiştir.

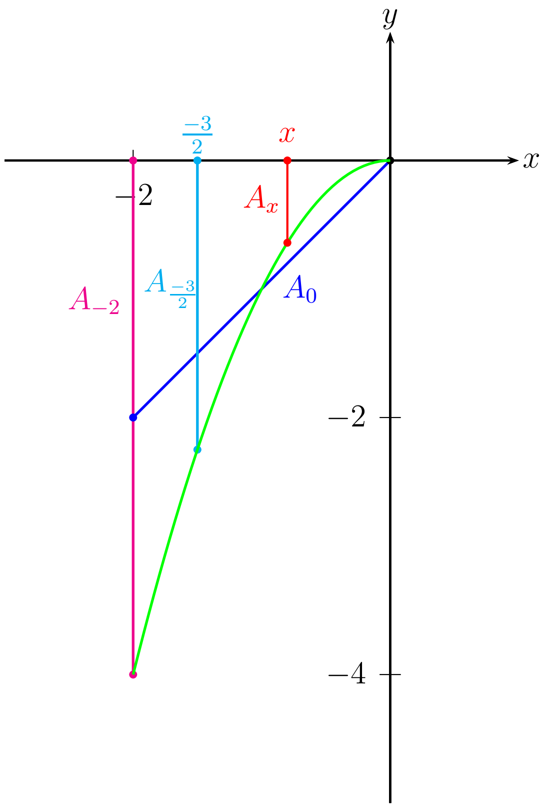
Örnek 2.2.3. *$Y = \mathbb{R}^2$, $C = \mathbb{R}^2_+$ ile kısmi sıralı,*

$$A_x = \begin{cases} \text{conv}\{(-2,-2),(0,0)\} & , \ x = 0 \\ \text{conv}\{(\text{x},0),(\text{x},-\text{x}^2)\} & , \ x \neq 0 \end{cases}$$

olmak üzere $\mathcal{S} = \{A_x \mid x \in \mathbb{R},\ x \in [-2,0]\}$ kümeler ailesi verilsin. $\mathcal{S}$ ailesinin u-minimal, zayıf u-minimal, u-maksimal ve zayıf u-maksimal elemanları bulalım.

Şekil 2.2'den de görülebileceği gibi, $A_x \preceq_C^u A_{-2}$ olacak şekilde $x \in (-2,0]$ olmadığından $A_{-2} \in u - \min\mathcal{S}$ olur. $x \in (-2,0)$ olsun. $y < x$ ve $y \in (-2,0)$ iken $A_y \preceq_C^u A_x$ ve $A_x \npreceq_C^u A_y$ olduğundan $A_x \notin u - \min\mathcal{S}$'dir. $A_{-2} \preceq_C^u A_0$ ve $A_0 \npreceq_C^u A_{-2}$ olduğundan $A_0 \notin u - \min\mathcal{S}$ olur. O halde $u - \min\mathcal{S} = \{A_{-2}\}$ elde edilir.

$x \in [-2,0]$ alalım. $A_x \prec_C^u A_y$ olacak şekilde $y \in [-2,0]$ olmadığından $A_x \in u - W\min\mathcal{S}$ elde edilir. O halde $u - W\min\mathcal{S} = \mathcal{S}$ bulunur.



Şekil 2.2: $\mathcal{S} = \{A_x \mid x \in \mathbb{R},\ x \in [-2, 0]\}$ *kümeler ailesinin bazı elemanları*

Her $x \in [-2, 0)$ için $A_0 \npreceq^u_C A_x$ olduğundan A_0, $\mathcal{S}$'nin u-maksimali olur. $y \in [-2, 0)$ alınsın. $x > y$ iken $A_y \preceq^u_C A_x$ ve $A_x \npreceq^u_C A_y$ olduğundan A_y, $\mathcal{S}$'nin u-maksimali olamaz. Sonuç olarak $u - \text{maks}\ \mathcal{S} = \{A_0\}$ elde edilir.

Her $x \in [-2, 0]$ için $A_x \prec^u_C A_y$ olacak şekilde $y \in [-2, 0]$ olmadığından $u - W\text{maks}\ \mathcal{S} = \mathcal{S}$ elde edilir.

Yardımcı Teorem 2.2.4. *$\mathcal{S} \subset \mathcal{P}_0(Y)$, $A \in \mathcal{S}$ ve $W\text{maks}\ A \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda A'nın $\mathcal{S}$ ailesinin bir zayıf u-minimali (zayıf u-maksimali) olması için gerek ve yeter koşul $B \prec^u_C A$ ($A \prec^u_C B$) olacak şekilde $B \in \mathcal{S}$ kümesinin bulunmamasıdır.*

Kanıt. ($\Longrightarrow$) A, $\mathcal{S}$'nin zayıf u-minimali ve $W\text{maks}\ A \neq \emptyset$ olsun. Varsayalım ki $B \prec^u_C A$ olacak şekilde bir $B \in \mathcal{S}$ kümesi bulunsun. $B \prec^u_C A$ ve A zayıf u-minimal olduğundan $A \prec^u_C B$ olur. O halde $A \subset B - int(C)$ ve $B \subset A - int(C)$ olur. Böylece

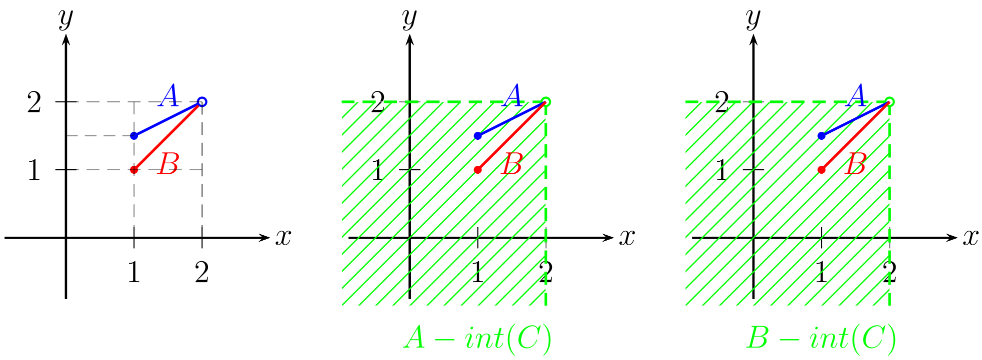
$$A \subset B - int(C) \subset A - int(C)$$

olur. O halde $A \subset A - int(C)$ elde edilir. Bu bir iç noktanın zayıf maksimal olacağı anlamına gelir. Bu ise bir çelişkidir.

($\Longleftarrow$) $B \prec_C^u A$ olacak şekilde hiç bir $B \in \mathcal{S}$ olmasın. O zaman A, $\mathcal{S}$'nin bir zayıf u-minimal elemanı olur. $\square$

Aşağıdaki örnek Yardımcı Teorem 2.2.4'deki $W\text{maks}\ A \neq \emptyset$ koşulunun gerekli bir koşul olduğunu göstermektedir.

Örnek 2.2.5. *$Y = \mathbb{R}^2$, $C = \mathbb{R}^2_+$, $A = conv\{(1,3/2),(2,2)\} \setminus \{(2,2)\}$, $B = conv\{(1,1),(2,2)\} \setminus \{(2,2)\}$ verilsin. $W\text{maks}\ A = \emptyset$ olduğu açıktır. $\mathcal{S} = \{A,B\}$ olsun.*



Şekil 2.3: *$A = conv\{(1,3/2),(2,2)\} \setminus \{(2,2)\}$, $B = conv\{(1,1),(2,2)\} \setminus \{(2,2)\}$ doğru parçaları ve $A - int(C)$ ve $B - int(C)$ kümeleri*

Şekil 2.3'den de görülebileceği gibi, $A \subset B - int(C)$ ve $B \subset A - int(C)$ olduğundan sırasıyla $A \prec_C^u B$ ve $B \prec_C^u A$ olur. $A \in u - W\text{maks}\ \mathcal{S}$ olduğu halde $A \prec_C^u B$ olacak şekilde $B \in \mathcal{S}$ vardır. Bunun sebebi ise $W\text{maks}\ A = \emptyset$ olmasıdır.

Uyarı 2.2.6. *$A \in \mathcal{S}$, $\mathcal{S}$'nin bir zayıf u-minimali (zayıf u-maksimali), $B \in \mathcal{S}$ ve $B \in [A]^u$ ise B de $\mathcal{S}$'nin bir zayıf u-minimali (zayıf u-maksimali) olur.*

Kanıt. A, $\mathcal{S}$'nin zayıf u-minimali ve $B \in [A]^u$ olsun. Dolayısıyla, $A - C = B - C$'dir. Eşitliğin her iki yanına $-int(C)$ eklenirse $A - int(C) = B - int(C)$ olur.

B'nin zayıf u-minimal olduğunu gösterilsin. $D \prec_C^u B$ olan bir $D \in \mathcal{S}$ alınsın. $D \prec_C^u B$ olduğundan $D \subset B - int(C)$ olur. $D \subset B - int(C) = A - int(C)$ olduğundan $D \prec_C^u A$ elde edilir. A zayıf u-minimal olduğundan $A \prec_C^u D$ olur. $B \preceq_C^u A$ ve $A \prec_C^u D$ olduğundan $B \subset A - C \subset D - int(C)$ elde edilir ve buradan $B \prec_C^u D$'dir. Dolayısıyla B de zayıf u-minimaldir. $\square$

Önerme 2.2.7 de $(v - SOP)$'nin zayıf çözümleri ve $(u - SOP)$'nin zayıf çözümleri arasındaki ilişki verilmiştir.

Önerme 2.2.7. *x_0, $(v-SOP)$'nin bir zayıf maksimal çözümü ise $(u-SOP)$'nin de bir zayıf maksimal çözümü olur.*

Kanıt. x_0 $(v-SOP)$'nin bir zayıf çözümü olsun. O zaman, $y_0 \in W\text{maks } F(X)$ olacak şekilde $y_0 \in F(x_0)$ vardır. Kabul edelim ki x_0, $(u-SOP)$'nin zayıf maksimal çözümü olmasın. Bu durumda Yardımcı Teorem 2.2.4'den $F(x_0) \prec_C^u F(x')$ yani

$$F(x_0) \subset F(x') - int(C)$$

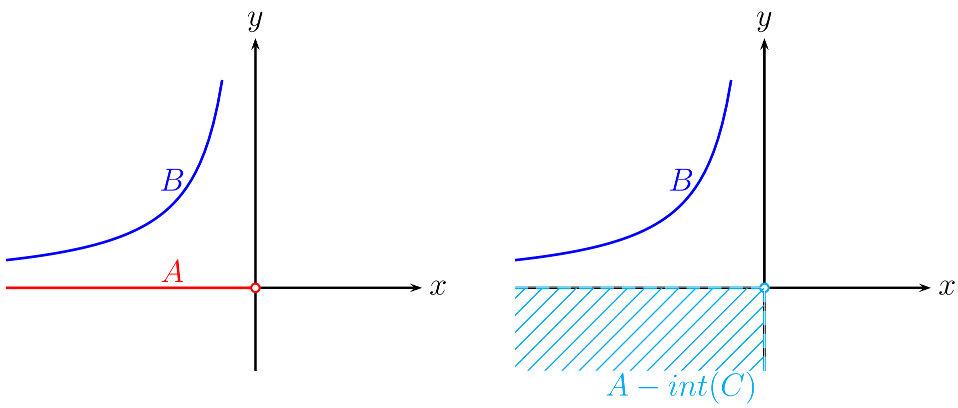
olacak şekilde en az bir $x' \in X$ vardır. O halde $y_0 \in F(x') - int(C)$ elde edilir. Bu durumda $y_0 <_C y$ olacak şekilde en az bir $y \in F(x')$ vardır. Bu ise $y_0 \in W\text{maks } F(X)$ oluşu ile çelişir. Sonuç olarak x_0, $(u-SOP)$'nin bir zayıf maksimal çözümüdür. □

Önerme 2.2.7'nin tersi her zaman doğru değildir. Yani $x_0 \in X$, $(u-SOP)$'nin bir zayıf maksimal çözümü ise $(v-SOP)$'nin bir zayıf maksimal çözümü olmayabilir. Bu durumla ilgili bir örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek 2.2.8. *$Y = \mathbb{R}^2$, $C = \mathbb{R}^2_+$, $A = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\}$, $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0,\ y = -1/x\}$, $\mathcal{S} = \{A, B\}$ olmak üzere, $F : \{1,2\} \rightrightarrows \mathcal{S}$ küme değerli dönüşümü $F(1) = A$, $F(2) = B$ ile tanımlansın ve*

$$(SOP)\begin{cases} \text{maks}F(x) \\ x \in \{1,2\} \end{cases}$$

problemi verilsin.



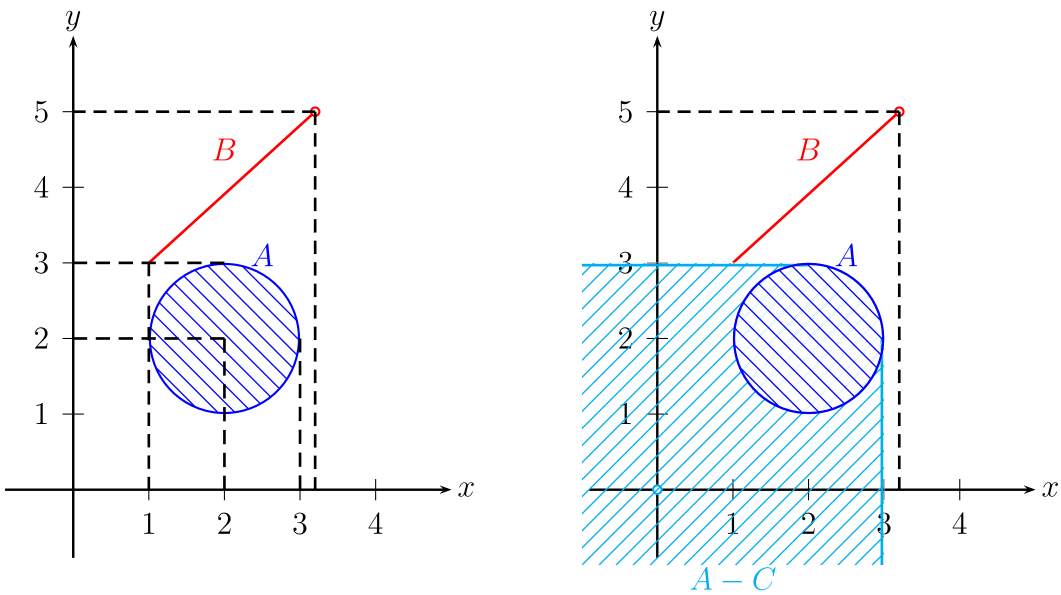
Şekil 2.4: $A = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\}$, $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0, y = -1/x\}$ *ve* $A - int(C)$ *kümeleri*

Şekil 2.4'den de görülebileceği gibi, $B \not\preceq^u_C A$ olur. O halde B, $\mathcal{S}$'nin zayıf u-maksimali olur. Dolayısıyla $x_0 = 2$, $(u - SOP)$'nin bir zayıf çözümü olur. Fakat $A \cup B$ kümesinin zayıf maksimal elemanı yoktur. Yani $W\text{maks}\,\{A \cup B\} = \emptyset$'dir. O halde $(v - SOP)$'nin zayıf çözümü yoktur.

Uyarı 2.2.9. *$x_0 \in X$, $(u - SOP)$'nin bir maksimal çözümü ise $(v - SOP)$'nin bir maksimal çözümü olmayabilir.*

Örnek 2.2.10 bu duruma ilişkin bir örnektir.

Örnek 2.2.10. *$Y = \mathbb{R}^2$, $C = \mathbb{R}^2_+$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 2)^2 + (y - 2)^2 \leq 1\}$, $B = conv\{(1, 3), (3.2, 5)\} \setminus \{(3.2, 5)\}$, $\mathcal{S} = \{A, B\}$ olmak üzere $F : \{1, 2\} \rightrightarrows \mathcal{S}$ küme değerli dönüşümü $F(1) = A$, $F(2) = B$ olarak tanımlansın.*



Şekil 2.5: $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 1\}$, $B = conv\{(1, 3), (3.2, 5)\} \setminus \{(3.2, 5)\}$ *ve $A - C$ kümeleri*

$B \not\preceq^u_C A$ olduğu Şekil 2.5'den görülmektedir. O halde B, $\mathcal{S}$'nin u-maksimalidir. Dolayısıyla $x_0 = 2$, $(u - SOP)$'nin bir çözümü olur. Ancak $\text{maks}\,\{A \cup B\} = \emptyset$ olduğundan $(v - SOP)$'nin bir çözümü yoktur.

$$(SOP)\begin{cases} \text{maks} F(x) \\ x \in X \end{cases}$$

şeklinde bir küme değerli optimizasyon problemi verildiğinde $v - sol[F, X]$ problemin vektör yaklaşımına göre çözümlerinin, $v - Wsol[F, X]$ problemin vektör yaklaşımına göre zayıf çözümlerinin ve $u - Wsol[F,X]$ problemin $\preceq_C^u$ sıralamasına göre zayıf çözümlerinin kümesi olmak üzere, $(v - SOP)$ ve $(u - SOP)$'nin çözüm kümeleri arasında

$$v - sol[F,X] \subset v - Wsol[F,X] \subset u - Wsol[F,X]$$

şeklinde bir ilişki vardır.

Uyarı 2.2.11. *Önerme 2.2.7, (SOP)'nin zayıf minimal çözümleri için geçerli değildir. Yani*

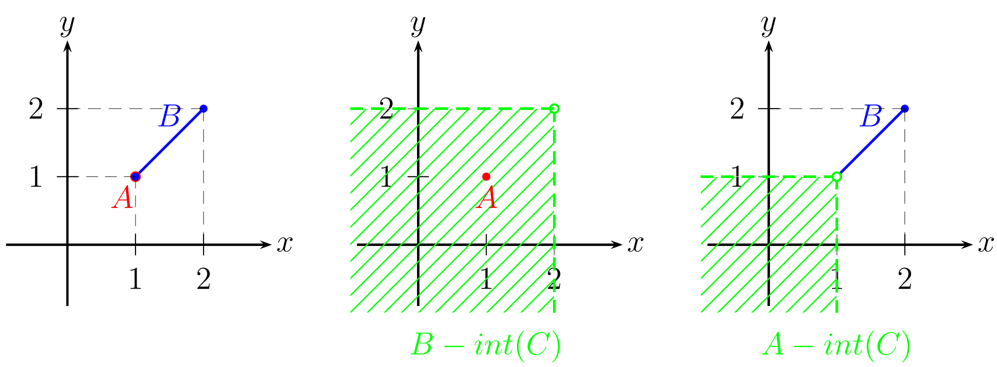
$$(SOP)\begin{cases} \min F(x) \\ x \in X \end{cases}$$

problemi için x_0, $(v - SOP)$'nin bir zayıf minimal çözümü ise $(u - SOP)$'nin bir zayıf minimal çözümü olmayabilir. Bu aşağıdaki örnek üzerinde görülebilir.

Örnek 2.2.12. *$Y = \mathbb{R}^2$, $C = \mathbb{R}^2_+$, $A = \{(1,1)\}$, $B = conv\{(1,1),(2,2)\}$, $\mathcal{S} = \{A, B\}$ olmak üzere $F : \{1,2\} \rightrightarrows \mathcal{S}$ küme değerli dönüşümü $F(1) = A$, $F(2) = B$ ile tanımlansın.*

$$(SOP)\begin{cases} \min F(x) \\ x \in X \end{cases}$$

problemi göz önüne alınsın.



Şekil 2.6: *$A = \{(1,1)\}$, $B = conv\{(1,1),(2,2)\}$, $B - int(C)$ ve $A - int(C)$ kümeleri*

$x_0 = 1$ ve $x_0 = 2$'nin $(v - SOP)$'nin zayıf minimal çözümleri olduğu Şekil 2.6'dan görülmektedir. Fakat $A \prec_C^u B$ ve $B \not\prec_C^u A$ olduğundan $x_0 = 2$ $(u - SOP)$'nin bir zayıf çözümü olmaz.

Tanım kümesi $\mathcal{P}_0(Y)$, görüntü kümesi $\mathbb{R}^2$ olan vektör değerli fonksiyonların monotonluğu aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 2.2.13. *$\mathcal{S} \subset \mathcal{P}_0(Y)$, $\mathbb{R}^2$ uzayı $\mathbb{R}^2_+$ ile kısmi sıralı, $T : \mathcal{P}_0(Y) \to \mathbb{R}^2$ fonksiyonu verilsin.*

(i) $A \preceq^s_C B$ olan $A, B \in \mathcal{S}$ için $T(A) \leq_{\mathbb{R}^2_+} T(B)$ $(T(B) \leq_{\mathbb{R}^2_+} T(A))$ oluyorsa T'ye $\mathcal{S}$ üzerinde s-artan (s-azalan) fonksiyon denir.

(ii) $A \prec^s_C B$ olan $A, B \in \mathcal{S}$ için $T(A) <_{\mathbb{R}^2_+} T(B)$ $(T(B) <_{\mathbb{R}^2_+} T(A))$ oluyorsa T'ye $\mathcal{S}$ üzerinde kesin s-artan (kesin s-azalan) fonksiyon denir.

Şimdi $\phi^\ell_{e,a}(\cdot)$ fonksiyonuna benzer olarak $\phi^u_{e,a}(\cdot)$ fonksiyonunu tanımlanacaktır.

Tanım 2.2.14. *Herhangi bir $a \in Y$ ve $e \in -int(C)$ için*

$$\phi^u_{e,a}(y) = \text{maks}\{t \in \mathbb{R} \mid y \in te + a - C\}$$

şeklinde tanımlanan $\phi^u_{e,a} : Y \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ fonksiyonuna u-Gerstewitz fonksiyonu denir.

Aşağıda, u-Gerstewitz fonksiyonunun bazı özellikleri verilmiştir:

Teorem 2.2.15. *Herhangi bir $a \in Y$ için $\phi^u_{e,a} : Y \to \mathbb{R}$ fonksiyonu süreklidir.*

Kanıt. $\phi^u_{e,a}(\cdot)$'nın herhangi bir $x \in Y$ noktasında sürekli olduğu gösterilsin. $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu durumda

$$U \subset (\varepsilon e + C) \cap (-\varepsilon e - C) \tag{2.6}$$

olacak şekilde 0'ın bir U komşuluğu vardır. $\forall y \in x + U$ için

$$|\phi^u_{e,a}(x) - \phi^u_{e,a}(y)| < 2\varepsilon$$

olduğunu gösterelim. $\phi^u_{e,a}$'nın tanımından

$$y \in (\phi^u_{e,a}(y) - \varepsilon)e + a - C$$

ve

$$y \notin (\phi^u_{e,a}(y) + \varepsilon)e + a - C$$

olur. $\forall y \in x+U$ için $y = x+u$ olacak şekilde $u \in U$ vardır. O halde (2.6)'dan

$$x \in (\phi^u_{e,a}(y) - 2\varepsilon)e + a - C$$

ve

$$x \notin (\phi^u_{e,a}(y) + 2\varepsilon)e + a - C$$

olur. Böylece

$$\phi^u_{e,a}(x) > \phi^u_{e,a}(y) - 2\varepsilon$$

ve

$$\phi^u_{e,a}(x) < \phi^u_{e,a}(y) + 2\varepsilon$$

bulunur. O halde

$$\phi^u_{e,a}(y) - 2\varepsilon < \phi^u_{e,a}(x) < \phi^u_{e,a}(y) + 2\varepsilon$$

elde edilir. Dolayısıyla $|\phi^u_{e,a}(x) - \phi^u_{e,a}(y)| < 2\varepsilon$ olur. Yani $\phi^u_{e,a}(\cdot)$, x noktasında süreklidir. $x \in Y$ keyfi seçildiğinden $\phi^u_{e,a}(\cdot)$ fonksiyonu Y üzerinde süreklidir. □

Önerme 2.2.16. *Herhangi bir $a \in Y$ için $\phi^u_{e,a} : Y \to \mathbb{R}$ fonksiyonu kesin azalandır.*

Kanıt. $y <_C y'$, $\phi^u_{e,a}(y) = \alpha$, $\phi^u_{e,a}(y') = \beta$ olsun ve $\alpha > \beta$ olduğu gösterilsin.

$$\phi^u_{e,a}(y') = \text{maks}\{t \in \mathbb{R} \mid y' \in te + a - C\} = \beta$$

olduğundan $y' \in \beta e + a - C$ olur.

$$\phi^u_{e,a}(y) = \text{maks}\{t \in \mathbb{R} \mid y' \in te + a - C\} = \alpha$$

dolayısıyla $y \in \alpha e + a - C$ olur. $y <_C y'$ olduğundan $y \in y' - int(C)$ olur. Böylece $y \in y' - int(C) \subset \beta e + a - C - int(C) = \beta e + a - int(C)$ elde edilir. Yardımcı Teorem 2.2.21 (i)'den $\phi^u_{e,a}(y) = \alpha > \beta$ olur. □

Önerme 2.2.17. *Herhangi bir $y \in Y$ için $\phi^u_{e,\cdot}(y)$ fonksiyonu kesin artandır.*

Kanıt. $a' <_C a$, $\phi^u_{e,a}(y) = m$, $\phi^u_{e,a'}(y) = n$ olsun ve $m > n$ olduğunu gösterelim.

$$\phi^u_{e,a}(y) = m$$

olduğundan $y \in me + a - C$ olur.

$$\phi^u_{e,a'}(y) = n$$

dolayısıyla $y \in ne + a' - C$ elde edilir. $a' <_C a$ olduğu için $a' - a \in -int(C)$ elde edilir. Böylece $y \in ne+a'-C \subset ne+a-int(C)-C = ne+a-int(C)$'dir. Yardımcı Teorem 2.2.21 (i)'den $\phi^u_{e,a}(y) = m > n$ bulunur. $\square$

u-Gerstewitz fonksiyonunda a yerine $A \in \mathcal{P}_0(Y)$ alındığı zaman

$$\phi^u_{e,A}(y) = \sup\{t \in \mathbb{R} \mid y \in te + A - C\}$$

şeklinde tanımlanan $\phi^u_{e,A} : Y \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ fonksiyonu elde edilir. Bu fonksiyon da sürekli ve kesin azalandır.

Önerme 2.2.18. *Her $y \in Y$ için*

$$\phi^u_{e,A}(y) = \sup_{a \in A}\{\phi^u_{e,a}(y)\} \tag{2.7}$$

olur.

Kanıt. $\phi^u_{e,A}(y) = r$ olsun. O halde $\forall\varepsilon > 0$ için $y \in (r-\varepsilon)e+A-C$'dir. Bu durumda $\forall\varepsilon > 0$ için $y \in (r-\varepsilon)e + a_\varepsilon - C$ olacak şekilde $\exists a_\varepsilon \in A$ vardır. Yardımcı Teorem 2.2.21 (ii)'den

$$\phi^u_{e,a_\varepsilon}(y) \geq r - \varepsilon$$

ve

$$\sup_{a \in A}\{\phi^u_{e,a}(y)\} \geq r - \varepsilon$$

elde edilir. Son eşitsizlikte $\varepsilon \downarrow 0$ iken limit alınırsa $\sup_{a\in A}\{\phi^u_{e,a}(y)\} \geq r$ olur.

Kabul edelim ki $\sup_{a\in A}\{\phi^u_{e,a}(y)\} > r$ olsun. Bu durumda $\phi^u_{e,\bar{a}}(y) > r$ olacak şekilde $\exists\bar{a} \in A$ vardır. Yardımcı Teorem 2.2.21 (i)'den

$$y \in re + \bar{a} - int(C) \subset re + A - int(C)$$

elde edilir ve $\phi^u_{e,A}(y) > r$ olur. Bu ise $\phi^u_{e,A}(y) = r$ oluşu ile çelişir. Dolayısıyla

$$\phi^u_{e,A}(y) = r = \sup_{a\in A}\{\phi^u_{e,a}(y)\}\text{'dir.}$$

□

u-Gerstewitz fonksiyonu yardımıyla bir kümenin $-C$ konisine göre has olup olmadığı karakterizasyonu aşağıda verilmiştir.

Yardımcı Teorem 2.2.19. *$A \in \mathcal{P}_0(Y)$ olsun. Bu durumda A'nın $-C$ konisine göre has olması için gerek ve yeter koşul $\forall y \in Y$ için $\phi^u_{e,A}(y) < \infty$ olmasıdır.*

Kanıt. ($\Longrightarrow$) Kabul edelim ki A, $-C$ konisine göre has olsun fakat $\exists y \in Y$ için $\phi^u_{e,A}(y) = \infty$ olsun. $Y \subset A - C$ olduğu gösterilsin. $y' \in Y$ alınsın. $\phi^u_{e,A}(y) = \infty$ olduğundan $\forall t \in \mathbb{R}$ için $y \in te + A - C$ olur. Buradan da

$$y - te - C \subset A - C \tag{2.8}$$

elde edilir. $e \in -int(C)$ olduğundan $\exists \varepsilon > 0$ için $B(e, \varepsilon) \subset -int(C)$'dır. Buradan

$$\frac{y' - y}{||y' - y||}\varepsilon + e \in B(e, \varepsilon) \subset -int(C) \tag{2.9}$$

olur. $t = \dfrac{||y' - y||}{\varepsilon}$ pozitif sayısı ile (2.9) kapsamının her iki tarafı çarpılırsa

$$y' - y + te \in -int(C)$$

elde edilir. (2.8) kapsamı da kullanılarak

$$y' \in y - te - int(C) \subset y - te - C \subset A - C$$

elde edilir. O halde $Y \subseteq A - C$ bulunur. Bu ise A'nın $-C$ konisine göre has küme oluşu ile çelişir. Dolayısıyla $\forall y \in Y$ için $\phi^u_{e,A}(y) < \infty$'dur.

($\Longleftarrow$) Varsayalım ki $\forall y \in Y$ için $\phi^u_{e,A}(y) < \infty$ ancak A, $-C$ konisine göre has olmasın. O zaman, $A - C = Y$ olur. Bir $y \in Y$ için

$$\phi^u_{e,A}(y) = \sup\{t \in \mathbb{R} \mid y \in te + A - C\} = \sup\{t \in \mathbb{R} \mid y \in te + Y\}$$

olur. $\forall t \in \mathbb{R}$ için $y \in te + Y = Y$ olduğundan

$$\phi^u_{e,A}(y) = \sup\{t \in \mathbb{R} \mid y \in te + Y\} = \infty\text{'dur.}$$

Bu ise, hipotez ile çelişir. O halde A, $-C$ konisine göre has kümedir. $\square$

Uyarı 2.2.20. *Bir $x_0 \in X$ için $F(x_0)$, $-C$ konisine göre has değilse x_0, $(u - SOP)$'nin bir u-maksimal çözümüdür. Gerçekten $F(x_0) \preceq^u_C F(x)$ olacak şekilde $x \in X$ seçilsin. $F(x_0)$, $-C$ konisine göre has olmadığından $F(x_0) - C = Y$'dir. Dolayısıyla $F(x) \subset Y = F(x_0) - C$ yani $F(x) \preceq^u_C F(x_0)$ elde edilir ve buradan x_0'ın u-maksimal çözüm olduğu elde edilir. O halde x_0 $(u - SOP)$'nin u-maksimal çözümü olur. Buna ek olarak, bu x_0 elemanı denklik sınıflarındaki elemanlar hariç $(u - SOP)$'nin tek çözümüdür. Yani $x' \in X$, $(u - SOP)$'nin bir diğer çözümü ise $F(x') \in [F(x_0)]^u$'dir. Bu yüzden $\forall x \in X$ için $F(x)$'in $-C$ konisine göre has küme olduğunu kabul edebiliriz. Diğer durumda çözüm doğrudan elde edilmiş olur.*

Yardımcı Teorem 2.2.21. *$A \in \mathcal{P}_{0-C}(Y)$ ve $r \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda $\forall y \in Y$ için*

(i) $\phi^u_{e,A}(y) > r \iff y \in re + A - int(C)$,

(ii) $\phi^u_{e,A}(y) \geq r \iff y \in re + cl(A - C)$,

(iii) $\phi^u_{e,A}(y) = r \iff y \in re + bd(A - C)$,

olur.

Kanıt. (i) $(\Longrightarrow)$ $\phi^u_{e,A}(y) > r$, $\phi^u_{e,A}(y) = k$ ve $k - r = \varepsilon$ olsun. O halde $\phi^u_{e,A}$'nın tanımından $y \in \lambda e + A - C$ ve $\lambda > k - \varepsilon = r$ olacak şekilde $\lambda \in \mathbb{R}$ vardır. $y \in \lambda e + A - C$ olduğundan, her $\alpha < \lambda$ için $y \in \alpha e + A - C$ olur. $\lambda - \alpha > 0$ olduğundan $(\lambda - \alpha)e \in -int(C)$ bulunur. O halde

$$y - \alpha e = y - \lambda e + (\lambda - \alpha)e \in A - C - int(C) = A - int(C)$$

olur. Böylece $y \in \alpha e + A - int(C)$ olur. $\alpha = r$ alınırsa $y \in re + A - int(C)$ elde edilir.

$(\Longleftarrow)$ $y \in re + A - int(C)$ olsun. Bu durumda $y = re + a - c$ olacak şekilde $a \in A$ ve $c \in int(C)$ vardır. $-me <_C c$ olacak şekilde bir $m > 0$ vardır. $0 <_C c + me$ olduğundan $-c - me \in -int(C)$'dir.

$$\lambda := r + m$$

alınsın.

$$y = re + a - c = (r + m)e + a - c - me \in \lambda e + A - int(C)$$

olur. Böylece $\phi^u_{e,A}(y) \geq \lambda > r$ ve dolayısıyla $\phi^u_{e,A}(y) > r$ elde edilir.

(ii) $(\Longrightarrow)$ $\phi^u_{e,A}(y) \geq r$ olsun. $k_n \to r$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\phi^u_{e,A}(y) > k_n$ olan $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ dizisi alalım. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $y \in k_n e + A - C$ olur. $n \to \infty$ iken limit alınırsa $y \in re + cl(A - C)$ bulunur.

$(\Longleftarrow)$ $y \in re + cl(A - C)$ olsun. $y = re + b$ olacak şekilde $b \in cl(A - C)$ vardır. Bu durumda en az bir $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A - C$ dizisi vardır öyle ki $b_n \to b$ olur. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $y_n := re + b_n$ olsun. O halde $y_n \to y$ olur. Aynı zamanda $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\phi^u_{e,A}(y_n) \geq r$ dir. $\phi^u_{e,A}(\cdot)$ sürekli olduğundan

$$\phi^u_{e,A}(y) = \lim_{n\to\infty} \phi^u_{e,A}(y_n) \geq r$$

elde edilir.

(iii) $(\Longrightarrow)$ $\phi^u_{e,A}(y) = r$ olsun. Böylece $\phi^u_{e,A}(y) \leq r$ ve $\phi^u_{e,A}(y) \geq r$ dir. Bu durumda (ii)'den $y \in re + cl(A - C)$ olur. $\phi^u_{e,A}(y) \leq r$ olduğundan (i)'den $y \notin re + A - int(C)$ bulunur. Buradan,

$$y \in re + [cl(A - C)\backslash int(A - C)]$$

elde edilir. Böylece $y \in re + bd(A - C)$'dir.

($\Longleftarrow$) $y \in re + bd(A-C)$ olsun. O halde

$$y \in re + [cl(A-C) \backslash int(A-C)]\text{'dır.}$$

Yani $y \in re + cl(A-C)$ ve $y \notin re + A - int(C)$ olur. O halde (i) ve (ii) özelliklerinden $\phi^u_{e,A}(y) \geq r$ ve $\phi^u_{e,A}(y) \leq r$ elde edilir. Dolayısıyla $\phi^u_{e,A}(y) = r$ olur.

□

Önerme 2.2.22. *$A, B \in \mathcal{P}_{0-C}(Y)$ ve $y \in Y$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır:*

(i) A, $-C$-kapalı ise $\phi^u_{e,A}(y) = \operatorname*{maks}_{a \in A}\{\phi^u_{e,a}(y)\}$ olur.

(ii) $A \preceq^u_C B$ ise $\phi^u_{e,A}(y) \leq \phi^u_{e,B}(y)$ olur. Özel olarak $A \in [B]^u$ ise $\phi^u_{e,A}(y) = \phi^u_{e,B}(y)$'dir.

(iii) $A \prec^u_C B$ ve A, $-C$-kapalı ise $\phi^u_{e,A}(y) < \phi^u_{e,B}(y)$ olur.

Kanıt. (i) $A \in \mathcal{P}_{0-C}(Y)$ olduğundan $\phi^u_{e,A}(y) < \infty$'dur. O halde $\phi^u_{e,A}(y) = \sup_{a \in A}\{\phi^u_{e,a}(y)\} = r$ olacak şekilde $r \in \mathbb{R}$ vardır. Varsayalım ki $\forall a \in A$ için $\phi^u_{e,a}(y) < r$ olsun. Bu durumda $\forall a \in A$ için Yardımcı Teorem 2.2.21 (ii)'den $y \notin re + a - C$ olur. Dolayısıyla $\forall a \in A$ için $y \notin re + a - C$ olduğundan $y \notin re + A - C$ olur. $A - C$ kapalı olduğundan $y \notin re + cl(A-C)$ elde edilir. Böylece Yardımcı Teorem 2.2.21 (ii)'den $\phi^u_{e,A}(y) < r$ elde edilir. Bu ise, $\phi^u_{e,A}(y) = r$ oluşu ile çelişir.

(ii) $A \preceq^u_C B$ ve $\phi^u_{e,A}(y) = r$ olsun. O zaman Yardımcı Teorem 2.2.21 (iii)'den $y \in re + bd(A-C)$ olur. $A \preceq^u_C B$ olduğundan $A \subset B - C$ dolayısıyla $A - C \subset B - C$'dir. Buradan, $bd(A-C) \subset cl(B-C)$ elde edilir. $re + bd(A-C) \subset re + cl(B-C)$ olduğundan $y \in re + cl(B-C)$ olur. Böylece $\phi^u_{e,A}(y) = r \leq \phi_{e,B}(y)$ elde edilir.

$A \in [B]^u$ ise $A - C = B - C$ olur. Böylece

$$\phi^u_{e,A}(y) = \sup\{t \in \mathbb{R} \mid y \in te + A - C\} = \sup\{t \in \mathbb{R} \mid y \in te + B - C\} = \phi^u_{e,B}(y)$$

olur.

(iii) $A \prec^u_C B$ ve A, $-C$-kapalı olsun. $A \prec^u_C B$ olduğundan

$$A \subset B - int(C) \tag{2.10}$$

ve A, $-C$-kapalı olduğundan $A - C$ kapalı olur. $\phi^u_{e,A}(y) = r$ olsun. Bu durumda Yardımcı Teorem 2.2.21 (iii)'den $y \in re + bd(A - C)$'dır. $A - C$ kapalı olduğundan ve (2.10) kullanılarak

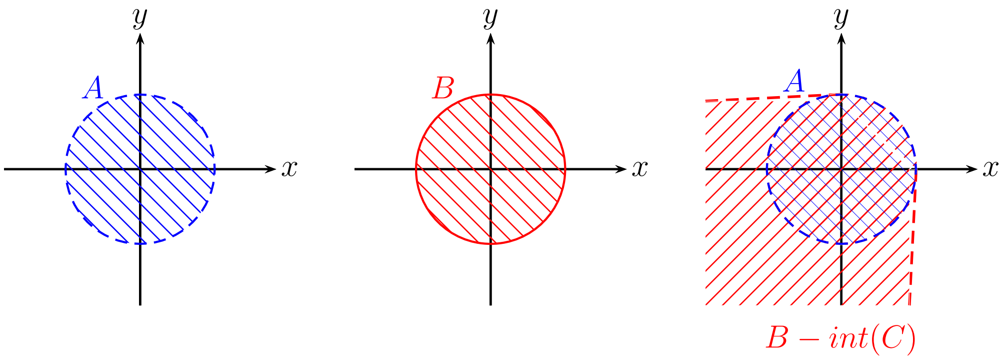
$$y \in re + bd(A - C) \subset re + cl(A - C) = re + A - C \subset re + B - int(C)$$

elde edilir. Böylece $\phi^u_{e,A}(y) = r < \phi^u_{e,B}(y)$ olur.

□

Teorem 2.2.22 (iii)'de A, $-C$-kapalı bir küme olmadığı zaman $\phi^u_{e,A}(y) < \phi^u_{e,B}(y)$ eşitsizliği gerçeklenmeyebilir. Şimdi bununla ilgili bir örnek verilecektir.

Örnek 2.2.23. *$Y = \mathbb{R}^2$, $C = \mathbb{R}^2_+$ $A \subset \mathbb{R}^2$ açık birim yuvar, $B \subset \mathbb{R}^2$ kapalı birim yuvar, $y = (1, 0)$, $e = (-1, -1)$ olsun. A, $-C$-kapalı değildir.*



Şekil 2.7: *$A = B(0, 1)$, $B = \overline{B}(0, 1)$ ve $B - int(C)$ kümeleri*

Şekil 2.7'den de görüldüğü gibi, $A \subset B - int(C)$ olduğundan $A \prec^u_C B$ olur. $\phi^u_{e,A}(y) = \sup\{t \in \mathbb{R} \mid y \in te + A - C\} = 0$ elde edilir. Gerçekten $\forall t \in (-\infty, 0)$ için $y \in te + A - C$ olur. Dolayısıyla $\phi^u_{e,A}(y) = 0$'dır. $\forall t \in (-\infty, 0)$ için $y \in te + B - C$ olduğundan $\phi^u_{e,B}(y) = 0$ olur. O halde $\phi_{e,A}(y) \nless \phi_{e,B}(y)$ olur.

Bir noktanın zayıf maksimal eleman olması için bir yeterli koşul Önerme 2.2.24 ile verilmiştir.

Önerme 2.2.24. *$A \in \mathcal{P}_{0-C}(Y)$, $y \in Y$ ve $\phi^u_{e,A}(y) = t_0$ olsun. Bu durumda*

$$\{a \in A \mid \phi^u_{e,a}(y) \geq t_0\} \subset W\text{maks } A$$

olur.

Kanıt. Varsayalım ki en az bir $a \in A$ için $\phi_{e,a}(y) \geq t_0$, fakat $a \notin W\text{maks } A$ olsun. Bu durumda $a <_C a'$ olacak şekilde en az bir $a' \in A$ vardır. O halde $a \in a' - int(C)$'dir.

$$\begin{aligned}
\phi^u_{e,a}(y) \geq t_0 &\implies y \in t_0 e + a - C \\
&\implies y \in t_0 e + a' - int(C) - C \\
&\implies y \in t_0 e + a' - int(C)
\end{aligned}$$

olur. Böylece $\phi^u_{e,a'}(y) > t_0 = \phi^u_{e,A}(y)$'dir. Bu ise, $\phi^u_{e,A}(y) = \sup_{a \in A}\{\phi^u_{e,a}(y)\}$ oluşu ile çelişir. Dolayısıyla $a \in W\text{maks } A$ olur. □

Sıradaki önermede, bir $A \in \mathcal{P}_{0-C}(Y)$ kümesinin maksimal ve zayıf maksimal elemanları ile $\phi^u_{e,A}(\cdot)$ fonksiyonu arasındaki ilişkiler verilmiştir.

Önerme 2.2.25. *$A \in \mathcal{P}_{0-C}(Y)$ ve $a_0 \in A$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler gerçeklenir:*

(i) *$a_0 \in W\text{maks } A$ olması için gerek ve yeter koşul $\min_{a \in A}\{\phi^u_{e,A}(a)\} = \phi^u_{e,A}(a_0)$ olmasıdır.*

(ii) *$a_0 \in \text{maks } A$ ise $\underset{a \in A}{\text{maks}}\{\phi^u_{e,a}(a_0)\} = 0$ olur,*

(iii) *$a_0 \in \text{maks } A$ olması için gerek ve yeter koşul a_0'ın $\underset{a \in A}{\text{maks}}\{\phi^u_{e,a}(a_0)\}$ probleminin tek çözümü olmasıdır.*

Kanıt. (i) ($\Longrightarrow$) $a_0 \in W\text{maks } A$ olsun. O halde $\forall a \in A$ için $a_0 \not<_C a$ olur. Dolayısıyla $\forall a \in A$ için $a - a_0 \notin int(C)$ olur. Böylece $a_0 \notin A - int(C)$ elde edilir. O halde Yardımcı Teorem 2.2.21 (i)'den

$$\phi^u_{e,A}(a_0) \leq 0 \tag{2.11}$$

olur. Diğer yandan $\forall a \in A$ için $a \in 0 \cdot e + A - C$ olduğundan

$$\phi^u_{e,A}(a) \geq 0 \tag{2.12}$$

olur. (2.11) ve (2.12)'den $\phi^u_{e,A}(a_0) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla (2.12) eşitsizliğinden ve $a_0 \in A$ olduğundan

$$\min_{a \in A}\{\phi^u_{e,A}(a)\} = \phi^u_{e,A}(a_0) = 0$$

olur.

($\Longleftarrow$) $\min_{a \in A}\{\phi^u_{e,A}(a)\} = \phi^u_{e,A}(a_0)$ olsun. Kabul edelim ki $a_0 \notin W$maks A olsun. O zaman $a_0 <_C \bar{a}$ olan $\exists \bar{a} \in A$ vardır. $\phi^u_{e,A}(\cdot)$ kesin azalan olduğundan

$$\phi^u_{e,A}(\bar{a}) < \phi^u_{e,A}(a_0)$$

olur. Bu ise hipotez ile çelişir. Dolayısıyla $a_0 \in W$maks A elde edilir.

(ii) $a_0 \in$ maks A olsun. O zaman, $\forall a \in A \backslash \{a_0\}$ için $a_0 \not\leq_C a$ olur. Böylece $\forall a \in A \backslash \{a_0\}$ için $a - a_0 \notin C$ ve dolayısıyla $a - a_0 \notin int(C)$ olur. $a_0 \notin a - int(C)$ olduğundan Yardımcı Teorem 2.2.21 (i)'den $\phi^u_{e,a}(a_0) \leq 0$ elde edilir. O halde $\phi^u_{e,a_0}(a_0) = 0$ olduğundan $\text{maks}_{a \in A}\{\phi^u_{e,a}(a_0)\} = \phi^u_{e,a_0}(a_0) = 0$ elde edilir.

(iii) ($\Longrightarrow$) $a_0 \in$ maks A olsun. (ii)'den a_0, problemin bir çözümü olur. Bu çözümün tek olduğunu gösterelim. Varsayalım ki $\bar{a} \in A \backslash \{a_0\}$ problemin başka bir çözümü olsun. $a_0 \in$ maks A olduğundan $a_0 \not\leq_C \bar{a}$ olur. Böylece $a_0 \notin \bar{a} - C$ olur. C, kapalı olduğundan Yardımcı Teorem 2.2.21 (ii)'den $\phi^u_{e,\bar{a}}(a_0) < 0$ elde edilir. Bu ise $\phi^u_{e,a_0}(a_0) = 0 = \phi^u_{e,\bar{a}}(a_0)$ oluşu ile çelişir.

($\Longleftarrow$) a_0, problemin tek çözümü olsun. O halde $\forall \bar{a} \in A \backslash \{a_0\}$ için

$$0 = \phi_{e,a_0}(a_0) > \phi_{e,\bar{a}}(a_0)$$

olur. Dolayısıyla $\forall \bar{a} \in A \backslash \{a_0\}$ için $a_0 \notin \bar{a} - C$ elde edilir. Buradan $a_0 \in$ maks A elde edilir.

$\square$

Şimdi, u-Gerstewitz fonksiyonunun farklı bir genişlemesi verilecektir. Bu genişleme yardımı ile $(u - SOP)$ için optimallik koşulları elde edilmiştir.

$G_e^u(\cdot,\cdot) : \mathcal{P}_{0-C}(Y) \times \mathcal{P}_{0-C}(Y) \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ fonksiyonu her $A, B \in \mathcal{P}_{0-C}(Y)$ için

$$G_e^u(A,B) = \inf_{b \in B} \{\phi_{e,A}^u(b)\} \tag{2.13}$$

şeklinde tanımlansın.

$A, B \in \mathcal{P}_{\mp C}^0(Y)$ olmak üzere $G_e^u(\cdot,\cdot)$ ve $G_e^\ell(\cdot,\cdot)$ fonksiyonları arasında

$$G_e^u(A,B) = -G_e^\ell(-A,-B)$$

şeklinde bir eşitlik vardır.

Önerme 2.2.26, $G_e^u(A,B)$'nin bir karakterizasyonunu vermektedir.

Önerme 2.2.26. *$B \in \mathcal{P}_{0-C}(Y)$, A, $-C$-kapalı küme ve $r \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda*

$$G_e^u(A,B) \geq r \iff B \subset re + A - C \tag{2.14}$$

olur.

Kanıt. $A - C$'nin kapalılığı ve $G_e^u(\cdot,\cdot)$ fonksiyonunun tanımı kullanılarak,

$$\begin{aligned} G_e^u(A,B) \geq r \quad &\iff \forall b \in B \text{ için } \phi_{e,A}^u(b) \geq r \\ &\iff \forall b \in B \text{ için } \ b \in re + A - C \\ &\iff B \subset re + A - C \end{aligned}$$

elde edilir. □

Önerme 2.2.27. *$A, B \in \mathcal{P}_{0-C}(Y)$ ve A, $-C$-kapalı olsun. $G_e^u(A,B) > -\infty$ ise*

$$G_e^u(A,B) = \text{maks}\{t \in \mathbb{R} \mid \ B \subset te + A - C\}$$

olur.

Kanıt.

$$T = \{t \in \mathbb{R} \mid \ B \subset te + A - C\}$$

kümesi tanımlansın. O halde Önerme 2.2.26'dan ve $G_e^u(A,B) > -\infty$ olduğundan

$$T = \{t \in \mathbb{R} \mid \ B \subset te + A - C\} = \{t \in \mathbb{R} \mid G_e^u(A,B) \geq t\} = (-\infty, G_e^u(A,B)]$$

olur. Dolayısıyla maks $T = G_e^u(A,B)$ elde edilir. □

Önerme 2.2.28. *$A, B \in \mathcal{P}_{0-C}(Y)$, A, $-C$-kapalı, B, $-C$-kompakt ve $G_e^u(A,B) > -\infty$ olsun. O halde*

$$G_e^u(A,B) = \min_{b \in B}\{\phi_{e,A}^u(b)\}$$

olur.

Kanıt. $G_e^u(A,B) = \inf_{b \in B}\{\phi_{e,A}^u(b)\} = m$ ve kabul edelim ki her $b \in B$ için $\phi_{e,A}^u(b) > m$ olsun. Böylece

$$b \in (m - \lambda_b)e + A - C \tag{2.15}$$

olacak şekilde $\lambda_b < 0$ vardır. A'nın

$$U_b = A + \frac{\lambda_b}{2}e - int(C) \tag{2.16}$$

komşulu göz önüne alınsın. $\forall b \in B$ için (2.15)'den $b \in (m - \lambda_b)e + U_b - C$ olur. Böylece

$$B \subset \bigcup_{\lambda_b} (m - \lambda_b)e + U_b - C$$

elde edilir. Dolayısıyla $\{(m - \lambda_b)e + U_b - C \mid b \in B\}$ B'nin bir açık örtüsüdür. B, $-C$-kompakt olduğundan bu örtünün sonlu bir alt örtüsü vardır. Yani

$$B \subset \bigcup_{i=1}^{r} (m - \lambda_{b_i})e + U_{b_i} - C$$

koşulunu sağlayan sonlu sayıda $\lambda_{b_1}, ..., \lambda_{b_r}$ vardır. Genelliği bozmadan, her $i \in 1, ..., r$ için $\lambda_{b_i} = \lambda_i$ alınarak (2.16)'dan

$$B \subset \bigcup_{i=1}^{r} (m - \lambda_i + \frac{\lambda_i}{2})e + A - int(C)$$

olur.

$$\min_i\{\lambda_i\} := \lambda_0$$

olsun. Bu durumda

$$B \subset (m - \frac{\lambda_0}{2})e + A - int(C) \tag{2.17}$$

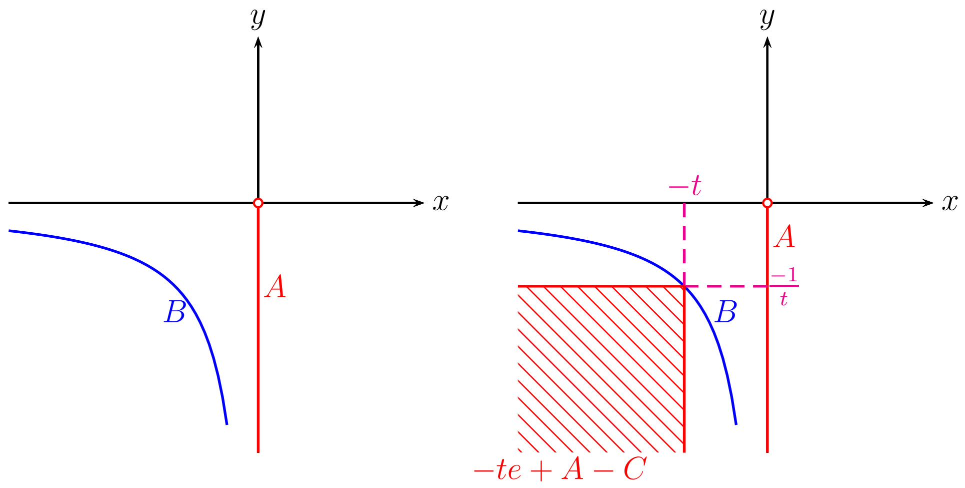
olur. $m' = m - \frac{\lambda_0}{2}$ alınırsa (2.17)'den

$$B \subset m'e + A - C$$

elde edilir. O halde Önerme 2.2.26'dan $m = G_e^u(A, B) \geq m'$ elde edilir. Bu ise, $m' > m$ oluşu ile çelişir. Sonuç olarak, $\phi_{e,A}^u(b) = m$ koşulunu sağlayan en az bir $b \in B$ vardır. Dolayısıyla $G_e^u(A, B) = \min_{b\in B}\{\phi_{e,A}^u(b)\}$ olur. □

A, $-C$-kapalı değil ise $G_e^u(A, B) = \min_{b\in B}\{\phi_{e,A}^u(b)\}$ eşitliği gerçeklenmeyebilir. Örnek 2.2.29 buna bir örnek olarak verilmiştir.

Örnek 2.2.29. *$Y = \mathbb{R}^2$, $C = \mathbb{R}^2_+$, $A = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0,\ y = 1/x\}$ ve $e = (-1, -1)$ olsun. Bu durumda $B \subset A - C$ olur.*



Şekil 2.8: $A = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0,\ y = 1/x\}$ *ve* $-te + A - C$ *kümeleri*

Şekil 2.8'den de görülebileceği gibi, $t > 0$ olmak üzere $b' = (-t, -\frac{1}{t}) \in B$ için $\phi_{e,A}^u(b') \in (0, 1)$ olur. O halde $\forall b \in B$ için $\phi_{e,A}^u(b) \in (0, 1)$ olur. Dolayısıyla $\inf_{b\in B}\{\phi_{e,A}^u(b)\} = 0$ elde edilir. Fakat bu infimum değer kümeye ait olmadığından istenen eşitlik gerçeklenmez.

Yardımcı Teorem 2.2.30. *$B \in \mathcal{P}_{0-C}(Y)$ olsun. Bu durumda B'nin $-C$-sınırlı olması için gerek ve yeter koşul $G_e^u(-C, B) > -\infty$ olmasıdır.*

Kanıt. ($\Longrightarrow$) B, $-C$-sınırlı olsun. Bu durumda 0'ın $U = -e - int(C)$ komşuluğu için $B \subset \alpha(-e - int(C)) - C \subset -\alpha e - C$ olacak şekilde $\alpha > 0$ vardır. Böylece $\forall b \in B$ için $\phi_{e,-C}^u(b) \geq -\alpha$ olur. O halde $G_e^u(-C, B) \geq -\alpha > -\infty$ elde edilir.

($\Longleftarrow$) $G_e^u(-C, B) > -\infty$ olsun. Bu durumda $\forall b \in B$ için $\phi_{e,-C}^u(b) > r$ olacak şekilde $r \in \mathbb{R}$ vardır. O halde $b \in re - C - int(C) = re - int(C)$ olur. Yani $B \subset re - int(C)$ elde edilir. U' 0'ın herhangi bir komşuluğu olsun. Böylece $re \in \lambda U'$ olacak şekilde $\lambda > 0$ vardır. Buradan $B \subset re - int(C) \subset \lambda U' - C$ olur. Yani B $-C$-sınırlıdır. □

Teorem 2.2.31. *A $-C$-sınırlı bir küme ve $B \in \mathcal{P}_{0-C}(Y)$ olsun. Bu durumda B'nin $-C$-sınırlı olması için gerek ve yeter koşul $G_e^u(A, B) > -\infty$ olmasıdır.*

Kanıt. ($\Longrightarrow$) B, $-C$-sınırlı olsun. Her $b \in B$ için

$$\phi_{e,A}^u(b) = \sup_{a \in A}\{\phi_{e,a}^u(b)\}\text{'dir.} \tag{2.18}$$

$\phi_{e,a}^u(b) = \phi_{e,0}^u(b - a) = \phi_{e,-C}^u(b - a)$ olduğu kolayca görülebilir. Böylece (2.18)'den

$$\phi_{e,A}^u(b) = \sup_{a \in A}\{\phi_{e,-C}^u(b - a)\}$$

elde edilir. $a_0 \in A$ elemanı sabitlenirse $\forall b \in B$ için

$$\phi_{e,A}^u(b) \geq \phi_{e,-C}^u(b - a_0)$$

olur. Böylece her iki tarafın B üzerinde infimumu alınırsa

$$G_e^u(A, B) = \inf_{b \in B}\{\phi_{e,A}^u(b)\} \geq \inf_{b \in B}\{\phi_{e,-C}^u(b - a_0)\} = G_e^u(-C, B - a_0) \tag{2.19}$$

olur. B, $-C$-sınırlı olduğundan $B - a_0$ da $-C$-sınırlı olur ve Yardımcı Teorem 2.2.30'dan $G_e^u(-C, B - a_0) > -\infty$ olur. Dolayısıyla (2.19)'dan $G_e^u(A, B) > -\infty$ elde edilir.

($\Longleftarrow$) $r \in \mathbb{R}$ için $G_e^u(A,B) = r$ olsun. O zaman, $\forall b \in B$ için $\phi_{e,A}^u(b) \geq r$ olur. $\alpha > 0$ olsun. Bu durumda $\phi_{e,A}^u(b) > r - \alpha$'dır. Yardımcı Teorem 2.2.21 (i)'den $\forall b \in B$ için $b \in (r-\alpha)e + A - int(C)$ elde edilir. Böylece

$$B \subset (r-\alpha)e + A - int(C) \subset (r-\alpha)e + A - C \tag{2.20}$$

olur. U, 0'ın herhangi bir komşuluğu olsun. A, $-C$-sınırlı olduğundan $(r-\alpha)e+A$'da $-C$-sınırlı olur. O halde

$$(r-\alpha)e + A \subset \lambda U - C$$

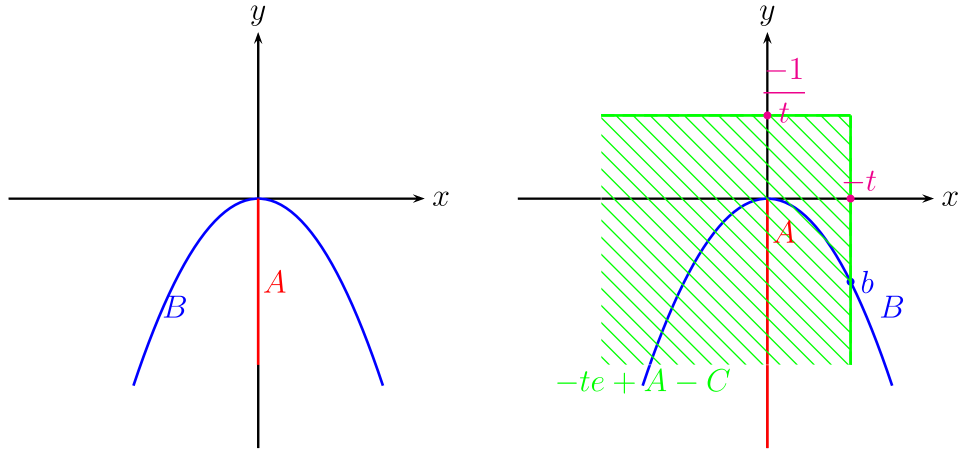
olacak şekilde bir $\lambda > 0$ vardır. (2.20)'de kullanılarak

$$B \subset \lambda U - C$$

elde edilir. Dolayısıyla B, $-C$-sınırlıdır. □

Teorem 2.2.31 de B'nin $-C$-sınırlı olma koşulu kaldırılırsa $G_e^u(A,B) > -\infty$ olmayabilir. Buna dair bir örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek 2.2.32. *$Y = \mathbb{R}^2$, $C = \mathbb{R}^2_+$, $e = (-1,-1)$, $A = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 0\}$ ve $B = \{(x,-x^2) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$ olsun.*



Şekil 2.9: *$A = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 0\}$, $B = \{(x,-x^2) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$ ve $-te + A - C$ kümeleri*

Şekil 2.9'dan da görülebileceği gibi, A $-C$-sınırlı, $B \in \mathcal{P}_{0-C}(Y)$ ve B $-C$-sınırlı değildir. $\forall t \in (-\infty, 0)$ için $\phi_{e,A}^u(b) = t$ olacak şekilde $b \in B$ vardır. Dolayısıyla $G_e^u(A,B) = -\infty$ elde edilir.

Şimdi, $G_e^u(\cdot, A)$ ve $G_e^u(A, \cdot)$'nın bazı özellikleri verilecektir.

Teorem 2.2.33. *$A, B \in \mathcal{P}_{0-C}(Y)$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler gerçeklenir:*

(i) $B \in [A]^u \Longrightarrow G_e^u(A, \cdot) = G_e^u(B, \cdot)$,

(ii) $G_e^u(A, \cdot)$, *$\mathcal{P}_{0-C}(Y)$'de u-azalandır,*

(iii) $B \in [A]^u \Longrightarrow G_e^u(\cdot, B) = G_e^u(\cdot, A)$,

(iv) $B \in [A]^u \Longrightarrow G_e^u(A, B) = G_e^u(B, A)$,

(v) $G_e^u(\cdot, A)$, *$\mathcal{P}_{0-C}(Y)$'de u-artandır.*

Kanıt. (i) $B \in [A]^u$ olsun. Bu durumda $A \preceq_C^u B$ ve $B \preceq_C^u A$ olur. $D \in \mathcal{P}_{0-C}(Y)$ olsun. $\forall y \in D$ için $\phi_{e,\cdot}^u(y)$ u-artan olduğundan

$$A \preceq_C^u B \Longrightarrow \phi_{e,A}^u(y) \leq \phi_{e,B}^u(y)$$

ve

$$B \preceq_C^u A \Longrightarrow \phi_{e,B}^u(y) \leq \phi_{e,A}^u(y)$$

olur. Dolayısıyla $\forall y \in D$ için $\phi_{e,A}^u(y) = \phi_{e,B}^u(y)$ elde edilir. Böylece

$$\inf_{y \in D}\{\phi_{e,A}^u(y)\} = \inf_{y \in D}\{\phi_{e,B}^u(y)\} \Longrightarrow G_e^u(A, D) = G_e^u(B, D)$$

elde edilir. Bu eşitlik $\forall D \in \mathcal{P}_{0-C}(Y)$ için sağlandığından $G_e^u(A, \cdot) = G_e^u(B, \cdot)$ bulunur.

(ii) $D, E \in \mathcal{P}_{0-C}(Y)$ ve $D \preceq_C^u E$ olsun. O halde $D \subset E - C$ olur. Bu durumda $\forall d \in D$ için $d \leq_C \alpha_d$ olacak şekilde en az bir $\alpha_d \in E$ vardır. $\phi_{e,A}^u(\cdot)$ azalan olduğundan,

$$\phi_{e,A}^u(\alpha_d) \leq \phi_{e,A}^u(d)$$

elde edilir. Böylece

$$G_e^u(A, D) = \inf_{d \in D}\{\phi_{e,A}^u(d)\} \geq \inf_{\alpha_d \in E}\{\phi_{e,A}^u(\alpha_d)\} \geq \inf_{h \in E}\{\phi_{e,A}^u(h)\} = G_e^u(A, E)$$

olur. Bu ise, $G_e^u(A,E) \leq G_e^u(A,D)$ olması demektir. Dolayısıyla $G_e^u(A,\cdot)$ u-azalandır.

(iii) $B \in [A]^u$ olduğundan $A \preceq_C^u B$ ve $B \preceq_C^u A$ olur. $D \in \mathcal{P}_{0-C}(Y)$ olsun. (ii)'den $B \preceq_C^u A$ olduğundan $G_e^u(D,A) \leq G_e^u(D,B)$ ve $A \preceq_C^u B$ olduğundan $G_e^u(D,B) \leq G_e^u(D,A)$ olur. Böylece $G_e^u(D,B) = G_e^u(D,A)$ elde edilir. $D \in \mathcal{P}_{0-C}(Y)$ keyfi olduğundan $G_e^u(\cdot,B) = G_e^u(\cdot,A)$ bulunur.

(iv) (i)'den $G_e(A,\cdot) = G_e(B,\cdot)$ ve (iii)'den $G_e(\cdot,A) = G_e(\cdot,B)$ olduğundan $G_e(A,A) = G_e(B,A) = G_e(A,B)$ olur.

(v) $D,E \in \mathcal{P}_{0-C}(Y)$ ve $D \preceq_C^u E$ olsun. $A \in \mathcal{P}_{0-C}(Y)$ ve $\forall y \in A$ için $\phi_{e,\cdot}^u(y)$ u-artan olduğundan

$$\phi_{e,D}^u(y) \leq \phi_{e,E}^u(y)$$

olur. Dolayısıyla

$$\inf_{y\in A}\{\phi_{e,D}^u(y)\} \leq \inf_{y\in A}\{\phi_{e,E}^u(y)\} \text{ 'dir.}$$

Böylece $G_e^u(D,A) \leq G_e^u(E,A)$ olur. O halde $G_e^u(\cdot,A)$ u-artandır.

$\square$

Teorem 2.2.34. *A, $-C$-kompakt küme olsun. Bu durumda*

(i) $G_e^u(A,\cdot)$, $-C$-kompakt kümeler ailesi üzerinde kesin u-azalandır.

(ii) $G_e^u(\cdot,A)$, $-C$-kompakt kümeler ailesi üzerinde kesin u-artandır.

Kanıt. (i) B ve D, $-C$-kompakt kümeler ve $B \prec_C^u D$ olsun. B ve D $-C$ kompakt olduğundan $-C$ sınırlıdır. O halde Teorem 2.2.31 ve Önerme 2.2.28'den

$$G_e^u(A,B) = \min_{b\in B}\{\phi_{e,A}(b)\} \tag{2.21}$$

olur. Dolayısıyla $G_e^u(A,B) = \phi_{e,A}^u(b')$ olacak şekilde en az bir $b' \in B$ vardır. Diğer yandan, $B \subset D - int(C)$ olduğundan

$$b' = d' - c$$

olan en az bir $d' \in D$ ve $c \in int(C)$ vardır. $\phi^u_{e,A}(\cdot)$ fonksiyonu kesin azalan ve $b' <_C d'$ olduğundan

$$\phi^u_{e,A}(d') < \phi^u_{e,A}(b')$$

olur ve

$$G^u_e(A, D) = \min_{d \in D}\{\phi^u_{e,A}(d)\} \leq \phi^u_{e,A}(d') < \phi^u_{e,A}(b') = G^u_e(A, B)$$

bulunur. Böylece $G^u_e(A, D) < G^u_e(A, B)$ elde edilir.

(ii) (i)'ye benzer olarak kanıtlanır.

□

Teorem 2.2.35. *$A \in \mathcal{P}_{0-C}(Y)$, $-C$-kapalı bir küme olsun. O halde*

(i) $G^u_e(A, A) = 0$,

(ii) $A \in [B]^u \Longrightarrow G^u_e(A, B) = G^u_e(B, A) = 0$,

(iii) $B \preceq^u_C A \Longleftrightarrow G^u_e(A, B) \geq 0$

olur.

Kanıt. (i) $A \in [A - C]^u$ olduğundan Teorem 2.2.33 (iv) ve Teorem 2.2.33 (i)'den $G^u_e(A, A) = G^u_e(A, A-C)$ olur. $G^u_e(A, A-C) = 0$ olduğunu ispatlamak yeterli olacaktır. $A-C \subset 0 \cdot e + A - C$ olduğundan Önerme 2.2.26'dan $G_e(A, A-C) \geq 0$ olur. Diğer yandan A, $-C$ konisine göre has küme olduğundan $bd(A - C) \neq \emptyset$ olur. Böylece en az bir $y \in bd(A - C)$ vardır. Böylece $\phi^u_{e,A}(y) = 0$ olur. Buradan da $G^u_e(A, A - C) = 0$ elde edilir.

(ii) Teorem 2.2.33 (iv)'den $B \in [A]^u$ ise $G^u_e(A, B) = G^u_e(B, A)$ olur. (i)'den $G^u_e(A, A) = 0$ olduğundan $G^u_e(A, B) = G^u_e(B, A) = G^u_e(A, A) = 0$ elde edilir.

(iii) ($\Longleftarrow$) $G^u_e(A, B) \geq 0$ olsun. $G^u_e(A, B) > -\infty$ ve A, $-C$-kapalı olduğundan Önerme 2.2.27'den

$$G^u_e(A, B) = \text{maks}\{t \in \mathbb{R} \mid B \subset te + A - C\} \geq 0$$

olur. Böylece $B \subset 0e + A - C$ olduğundan $B \preceq_C^u A$ elde edilir.

($\Longrightarrow$) $B \preceq_C^u A$ olsun. $G_e^u(A, \cdot)$, u-azalan olduğundan

$$0 = G_e^u(A, A) \leq G_e^u(A, B)\text{'dir.}$$

□

Sonuç 2.2.36. *$A, B \subset Y$ $-C$-kompakt kümeler olsun. O halde*

(i) $G_e^u(A, B) > 0 \Longleftrightarrow B \prec_C^u A$,

(ii) $G_e^u(A, B) = 0 \Longleftrightarrow B \preceq_C^u A$ *ve* $B \not\prec_C^u A$

olur.

Kanıt. (i) ($\Longrightarrow$) $G_e^u(A, B) > 0$ ise $\forall b \in B$ için $\phi_{e,A}^u(b) > 0$ olur. Böylece Yardımcı Teorem 2.2.21 (i)'den $\forall b \in B$ için $b \in 0e + A - int(C)$ olur. Dolayısıyla $B \subset A - int(C)$ elde edilir. Buradan $B \prec_C^u A$ olur.

($\Longleftarrow$) $B \prec_C^u A$ ve $G_e^u(A, \cdot)$ $-C$-kompakt kümeler üzerinde kesin u-azalan olduğundan $G_e^u(A, B) > G_e^u(A, A)$ olur. Teorem 2.2.35 (i)'den $G_e^u(A, A) = 0$'dır. Dolayısıyla $G_e^u(A, B) > 0$ elde edilir.

(ii) ($\Longrightarrow$) $G_e^u(A, B) = 0$ olsun. O zaman, $G_e^u(A, B) \geq 0$ ve $G_e(A, B) \leq 0$ olur. (i)'den $B \not\prec_C^u A$ ve Teorem 2.2.35 (iii)'den $B \preceq_C^u A$ elde edilir.

($\Longleftarrow$) (ii)'den $B \not\prec_C^u A \Longrightarrow G_e^u(A, B) \leq 0$ ve Teorem 2.2.35 (iii)'den $B \preceq_C^u A$ ise $G_e^u(A, B) \geq 0$ olur. Dolayısıyla $G_e^u(A, B) = 0$'dır.

□

2.3. $(\mathbf{u} - \mathbf{SOP})$ İçin Optimallik Koşulları

Hernández ve Rodríguez-Marín [29], $G_e^\ell(\cdot, \cdot)$ fonksiyonu yardımı ile $(\ell - SOP)$ için optimallik koşullarını elde etmişlerdir. Çalışmanın bu kısmında $G_e^u(\cdot, \cdot)$ fonksiyonu yardımı ile $(u - SOP)$ için bir skalerizasyon verilmiştir. Bu skalerizasyon yardımıyla hiçbir konvekslik kabulü olmadan $(u - SOP)$ için optimallik koşulları elde edilmiştir.

Burada $\mathcal{P}_{0-C}(Y)$'den $\mathbb{R}$'ye tüm fonksiyonların kümesi $\mathcal{M}(\mathcal{P}_{0-C}(Y), \mathbb{R})$ ile gösterilecektir.

Aşağıda bir noktanın $(u-SOP)$'nin çözümü olması için bir gerek ve yeter koşul elde edilmiştir.

Teorem 2.3.1. *$F : X \rightrightarrows Y$ $-C$-kapalı, $-C$-sınırlı değerli ve $x_0 \in X$ olsun. x_0'ın $(u-SOP)$'nin bir u-maksimal çözümü olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{P}_{0-C}(Y)$ üzerinde u-artan ve*

(i) $x \in X$ ve $F(x) \in [F(x_0)]^u \Longrightarrow T(F(x)) = 0$,

(ii) $x \in X$ ve $F(x) \notin [F(x_0)]^u \Longrightarrow T(F(x)) < 0$,

(iii) $A \in \mathcal{P}_{0-C}(Y)$ ve $F(x_0) \preceq_C^u A$ ise $T(A) \geq 0$

özelliklerini sağlayan en az bir $T \in \mathcal{M}(\mathcal{P}_{0-C}(Y), \mathbb{R})$ fonksiyonunun var olmasıdır.

Kanıt. ($\Longrightarrow$) x_0, $(u-SOP)$'nin bir u-maksimal çözümü olsun. $e \in -int(C)$ alınıp sabitlensin. $T(\cdot) = G_e^u(\cdot, F(x_0)) \in \mathcal{M}(\mathcal{P}_{0-C}(Y), \mathbb{R})$ fonksiyonu göz önüne alınsın. Teorem 2.2.33 (v)'den $T(\cdot)$ fonksiyonu $\mathcal{P}_{0-C}(Y)$ üzerinde u-artandır. T fonksiyonunun (i)-(iii) koşullarını sağladığı gösterilsin.

(i) $F(x) \in [F(x_0)]^u$ ise Teorem 2.2.35 (ii)'den $T(F(x)) = G_e^u(F(x), F(x_0)) = 0$ elde edilir.

(ii) x_0, $(u-SOP)$'nin bir u-maksimal çözümü olduğundan $F(x) \notin [F(x_0)]^u$ olan her $x \in X$ için $F(x_0) \npreceq_C^u F(x)$ olur. Böylece Teorem 2.2.35 (iii)'den

$$T(F(x)) = G_e^u(F(x), F(x_0)) < 0$$

elde edilir.

(iii) $A \in \mathcal{P}_{0-C}(Y)$ ve $F(x_0) \preceq_C^u A$ olsun. O zaman Teorem 2.2.35 (iii)'den $T(A) = G_e^u(A, F(x_0)) \geq 0$ elde edilir.

($\Longleftarrow$) $\mathcal{P}_{0-C}(Y)$ de u-artan $T \in \mathcal{M}(\mathcal{P}_{0-C}(Y), \mathbb{R})$ fonksiyonu (i)-(iii) koşullarını sağlasın. Kabul edelim ki x_0, $(u-SOP)$'nin bir u-maksimal çözümü olmasın. O zaman, en az bir $x' \in X$ için $F(x_0) \preceq_C^u F(x')$ ve $F(x') \npreceq_C^u F(x_0)$ olur. Böylece $F(x') \notin [F(x_0)]^u$ elde edilir. Dolayısıyla $F(x') \notin [F(x_0)]^u$ olduğundan (ii)'den $T(F(x')) < 0$ olur. $F(x_0) \preceq_C^u F(x')$ olduğundan (iii)'den $T(F(x')) \geq 0$ elde edilir. O halde $T(F(x')) < 0$

ve $T(F(x')) \geq 0$ elde edilmiş olur. Bu ise çelişkidir. Dolayısıyla x_0, $(u - SOP)$'nin bir u-maksimal çözümüdür. $\square$

Uyarı 2.3.2. *u-minimal çözümlerin karakterizasyonu da u-azalan ve Teorem 2.3.1'deki (i), (ii) koşulları ile $A \in \mathcal{P}_{0-C}(Y)$ ve $A \preceq_C^u F(x_0)$ ise $T(A) \geq 0$ özelliğini sağlayan bir $T \in \mathcal{M}(\mathcal{P}_{0-C}(Y), \mathbb{R})$ fonksiyonunun var olması ile benzer şekilde verilir.*

F $-C$-kompakt değerli alındığında Teorem 2.2.34 yardımıyla $G_e^u(\cdot, A)$ $(G_e^u(A, \cdot))$ fonksiyonu ile $(u - SOP)$'nin zayıf u-maksimal (zayıf u-minimal) çözümlerinin bir karakterizasyonu elde edilir. Teorem 2.3.3'de bu karakterizasyon verilmektedir.

Teorem 2.3.3. *$F : X \rightrightarrows Y$, $-C$-kompakt değerli ve $x_0 \in X$ olsun. x_0'ın $(u - SOP)$'nin zayıf u-maksimal çözümü olması için gerek ve yeter koşul $-C$-kompakt kümeler ailesi üzerinde kesin u-artan ve*

(i) $x \in X$ ve $F(x) \in [F(x_0)]^u$ ise $T(F(x)) = 0$,

(ii) $x \in X$ ve $F(x) \notin [F(x_0)]^u$ ise $T(F(x)) \leq 0$,

(iii) $A \in \mathcal{P}_{0-C}(Y)$, $-C$-kompakt küme ve $F(x_0) \prec_C^u A$ ise $T(A) > 0$

özelliklerini sağlayan en az bir $T \in \mathcal{M}(\mathcal{P}_{0-C}(Y), \mathbb{R})$ fonksiyonunun var olmasıdır.

Kanıt. $(\Longrightarrow)$ x_0, $(u - SOP)$'nin bir zayıf u-maksimal çözümü olsun. $e \in -int(C)$ alınıp sabitlensin. $T(\cdot) = G_e^u(\cdot, F(x_0)) \in \mathcal{M}(\mathcal{P}_{0-C}(Y), \mathbb{R})$ olsun. Teorem 2.2.34 (ii)'den T fonksiyonu $-C$-kompakt kümeler ailesi üzerinde kesin u-artandır. T fonksiyonu (i)-(iii) koşullarını sağlar. Gerçekten,

(i) $F(x) \in [F(x_0)]^u$ ise Teorem 2.2.35 (ii)'den $T(F(x)) = G_e^u(F(x), F(x_0)) = 0$ elde edilir.

(ii) x_0, $(u - SOP)$'nin bir zayıf u-maksimal çözümü olduğundan $F(x) \notin [F(x_0)]^u$ olan her $x \in X$ için $F(x_0) \not\prec_C^u F(x)$ olur. Böylece Sonuç 2.2.36 (i)'den $T(F(x)) = G_e^u(F(x), F(x_0)) \leq 0$ olur.

(iii) $A \in \mathcal{P}_{0-C}(Y)$ ve $F(x_0) \prec_C^u A$ olsun. O zaman, Sonuç 2.2.36 (i)'den $T(A) = G_e^u(A, F(x_0)) > 0$ elde edilir.

($\Longleftarrow$) $-C$-kompakt kümeler ailesi üzerinde kesin u-artan $T \in \mathcal{M}(\mathcal{P}_{0-C}(Y), \mathbb{R})$ fonksiyonu (i)-(iii) koşullarını sağlasın. Ancak, x_0, $(u - SOP)$'nin bir zayıf u-maksimal çözümü olmasın. O zaman en az bir $x' \in X$ için $F(x_0) \prec_C^u F(x')$ ve $F(x') \notin [F(x_0)]^u$ olur. Böylece $F(x') \notin [F(x_0)]^u$ olduğundan (ii)'den $T(F(x')) \leq 0$ ve $F(x_0) \prec_C^u F(x')$ olduğundan (iii)'den $T(F(x')) > 0$ elde edilir. O halde $T(F(x')) \leq 0$ ve $T(F(x')) > 0$ elde edilmiş olur. Bu ise çelişkidir. Dolayısıyla x_0 $(u - SOP)$'nin bir zayıf u-maksimal çözümüdür. □

Uyarı 2.3.4. *Zayıf u-minimal çözümlerin karakterizasyonu da kesin u-azalan ve Teorem 2.3.3'deki (i), (ii) koşulları ile* $A \in \mathcal{P}_{0-C}(Y)$, *$-C$-kompakt küme ve* $A \prec_C^u F(x_0)$ *ise* $T(A) > 0$ *özelliğini sağlayan bir* $T \in \mathcal{M}(\mathcal{P}_{0-C}(Y), \mathbb{R})$ *fonksiyonunun var olması ile benzer şekilde verilir.*

$F : X \rightrightarrows Y$ $-C$ konisine göre has değerli bir küme değerli dönüşüm ve $T \in \mathcal{M}(\mathcal{P}_{0-C}(Y), \mathbb{R})$ olsun. $G_e^u(\cdot, \cdot)$ skalerizasyon fonksiyonu yardımıyla $(u - SOP)$

$$(SP_T^u) \begin{cases} \text{maks } T(F(x)) \\ x \in X \end{cases}$$

skaler problemine dönüştürülebilir. Buna göre $(u - SOP)$ ve (SP_T^u)'nin çözümleri arasında ilişki kurulabilir. Bu ilişki Teorem 2.3.5 ve Uyarı 2.3.6 de verilmiştir.

Teorem 2.3.5. *$F : X \rightrightarrows Y$ $-C$-kapalı ve $-C$-sınırlı değerli ve $x_0 \in X$ olsun. x_0'ın $(u - SOP)$'nin bir u-maksimal çözümü olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{P}_{0-C}(Y)$ üzerinde u-artan ve*

(i) x_0'ın (SP_T^u)'nin bir çözümü,

(ii) her $x \in X$ için

$$F(x) \in [F(x_0)]^u \Longleftrightarrow T(F(x)) = 0$$

özelliklerini sağlayan en az bir $T \in \mathcal{M}(\mathcal{P}_{0-C}(Y), \mathbb{R})$ fonksiyonunun var olmasıdır.

Kanıt. ($\Longrightarrow$) x_0, $(u - SOP)$'nin bir u-maksimal çözümü ve $e \in -int(C)$ olsun. $T \in \mathcal{M}(\mathcal{P}_{0-C}(Y), \mathbb{R})$ fonksiyonu $T(\cdot) = G_e^u(\cdot, F(x_0))$ olarak tanımlansın. T fonksiyonunun $\mathcal{P}_{0-C}(Y)$ üzerinde u-artan olduğu açıktır. Aynı zamanda (i) ve (ii) koşullarını sağlar. Gerçekten,

(i) x_0'ın (SP_T^u)'nun çözümü olması için $\forall x \in X$ için $T(F(x)) \leq T(F(x_0))$ olduğu gösterilmelidir. $\forall x \in X$ için $F(x_0) \preceq_C^u F(x)$ veya $F(x_0) \not\preceq_C^u F(x)$ olur.

- $F(x_0) \preceq_C^u F(x)$ olsun. Bu durumda x_0, u-maksimal çözüm olduğundan $F(x) \preceq_C^u F(x_0)$ elde edilir. Böylece $F(x) \in [F(x_0)]^u$ bulunur. Buradan da $T(F(x)) = 0$ elde edilir. $T(F(x_0)) = 0$ olduğundan

$$T(F(x)) = T(F(x_0))\text{'dır.} \tag{2.22}$$

- $F(x_0) \not\preceq_C^u F(x)$ olsun. Bu durumda Teorem 2.2.35 (iii)'den $G_e^u(F(x), F(x_0)) < 0$ olduğundan

$$T(F(x)) < 0 = T(F(x_0))\text{'dır.} \tag{2.23}$$

Sonuç olarak, (2.22) ve (2.23)'den $\forall x \in X$ için $T(F(x)) \leq T(F(x_0))$ elde edilir. O halde x_0 (SP_T^u)'nun bir çözümüdür.

(ii) $F(x) \in [F(x_0)]^u$ ise Teorem 2.2.35 (ii)'den $G_e^u(F(x), F(x_0)) = T(F(x)) = 0$ elde edilir. $T(F(x)) = 0$ olsun. $F(x_0)$, $-C$-kapalı ve $G_e^u(F(x), F(x_0)) > -\infty$ olduğundan Önerme 2.2.27'den

$$G_e^u(F(x), F(x_0)) = \text{maks}\{t \in \mathbb{R} \mid F(x_0) \subset te + F(x) - C\}$$

ve $F(x_0) \subset 0e + F(x) - C$ elde edilir. Böylece $F(x_0) \preceq_C^u F(x)$ bulunur. x_0 u-maksimal çözüm olduğundan $F(x) \preceq_C^u F(x_0)$ olur. Buradan da $F(x) \in [F(x_0)]^u$ elde edilir. Dolayısıyla x_0, (SP_T^u)'nun bir çözümüdür.

$(\Longleftarrow)$ T fonksiyonu (i) ve (ii) koşullarını sağlasın. Kabul edelim ki x_0, $(u-SOP)$'nin u-maksimal çözümü olmasın. O zaman en az bir $x' \in X$ için $F(x_0) \preceq_C^u F(x')$ ve $F(x') \not\preceq_C^u F(x_0)$ olur. Böylece $F(x') \notin [F(x_0)]^u$ bulunur. O halde (ii)'den $T(F(x')) \neq 0$ elde edilir. T u-artan ve $F(x_0) \preceq_C^u F(x')$ olduğundan $T(F(x')) \geq T(F(x_0)) = 0$ bulunur. Böylece $T(F(x')) > T(F(x_0)) = 0$ elde edilir. Bu ise, x_0'ın (SP_T^u)'nun çözümü olması ile çelişir. Dolayısıyla x_0, $(u-SOP)$'nin u-maksimal çözümüdür. $\square$

Uyarı 2.3.6. *u-minimal çözümlerin karakterizasyonu da u-azalan, Teorem 2.3.5'deki (i) ve (ii) koşullarını sağlayan en az bir* $T \in \mathcal{M}(\mathcal{P}_{0-C}(Y), \mathbb{R})$ *fonksiyonunun var olması ile benzer şekilde elde edilir.*

Sonuç 2.3.7. $F : X \rightrightarrows Y$ $-C$*-kapalı ve* $-C$*-sınırlı değerli ve* $x_0 \in X$ *olsun.* x_0*'ın* $(u-SOP)$*'nin bir u-maksimal (u-minimal) çözümün olması için gerek ve yeter koşul* x_0*'ın*

$$\begin{cases} \text{maks} G_e^u(F(x), F(x_0)) \\ x \in X \end{cases} \qquad \left(\begin{cases} \text{maks} G_e^u(F(x_0), F(x)) \\ x \in X \end{cases} \right)$$

skaler problemin bir çözümü ve her $x \in X$ *için*

$$F(x) \in [F(x_0)]^u \iff G_e^u(F(x), F(x_0)) = 0 \ (G_e^u(F(x_0), F(x)) = 0)$$

olmasıdır.

Teorem 2.3.8. $F : X \rightrightarrows Y$ $-C$*-kompakt değerli ve* $x_0 \in X$ *olsun.* $(u - SOP)$*'yi göz önüne alalım.* x_0*'ın* $(u - SOP)$*'nin bir zayıf u-maksimal çözümü olması için gerek ve yeter koşul* $-C$*-kompakt kümeler üzerinde kesin u-artan ve*

(i) x_0*'ın* (SP_T^u)*'nun bir çözümü,*

(ii) $T(F(x_0)) = 0$

olacak şekilde en az bir $T \in \mathcal{M}(\mathcal{P}_{0-C}(Y), \mathbb{R})$ *fonksiyonunun var olmasıdır.*

Kanıt. ($\Longrightarrow$) x_0 $(u - SOP)$'nin bir zayıf u-maksimal çözümü olsun ve sabit bir $e \in -int(C)$ alınsın. $T(\cdot) = G_e^u(\cdot, F(x_0))$ fonksiyonunu göz önüne alınsın. T fonksiyonu $\mathcal{P}_{0-C}(Y)$ üzerinde u-artan ve $-C$-kompakt kümeler üzerinde kesin u-artandır. T fonksiyonunun (i) ve (ii) koşullarını sağladığı gösterilsin.

(i) x_0'ın (SP_T^u)'nun çözümü olması için $\forall x \in X$ için $T(F(x)) \leq T(F(x_0))$ olduğu gösterilmelidir. $\forall x \in X$ için $F(x_0) \prec_C^u F(x)$ veya $F(x_0) \not\prec_C^u F(x)$ olur. Bu iki durum incelensin.

– $F(x_0) \prec_C^u F(x)$ olsun. Bu durumda x_0, zayıf u-maksimal çözüm olduğundan $F(x) \prec_C^u F(x_0)$ elde edilir. Böylece $F(x_0) \preceq_C^u F(x)$ ve $F(x) \preceq_C^u F(x_0)$ olduğundan $F(x) \in [F(x_0)]^u$ bulunur. Buradan da $T(F(x)) = 0$ elde edilir. $T(F(x_0)) = 0$ olduğundan

$$T(F(x)) = T(F(x_0))\text{'dır.} \tag{2.24}$$

– $F(x_0) \not\prec_C^u F(x)$ olsun. Bu durumda Teorem 2.2.36 (i)'den $G_e^u(F(x), F(x_0)) \leq 0$ olduğundan

$$T(F(x)) \leq T(F(x_0)) = 0\text{'dır.} \tag{2.25}$$

Sonuç olarak (2.24) ve (2.25)'den $\forall x \in X$ için $T(F(x)) \leq T(F(x_0))$ elde edilir. O halde x_0 (SP_T^u)'nun bir çözümüdür.

(ii) $F(x_0) \in [F(x_0)]^u$ ise Teorem 2.2.35 (ii)'den

$$G_e^u(F(x_0), F(x_0)) = T(F(x_0)) = 0$$

elde edilir.

($\Longleftarrow$) T fonksiyonu (i) ve (ii) koşullarını sağlasın. Kabul edelim ki x_0 $(u - SOP)$'nin zayıf u-maksimal çözümü olmasın. O zaman $\exists x' \in X$ için $F(x_0) \prec_C^u F(x')$ ve $F(x') \not\prec_C^u F(x_0)$ elde edilir. T, kesin u-artan olduğundan $0 = T(F(x_0)) < T(F(x'))$ bulunur. Böylece $T(F(x')) > 0$ elde edilir. Bu ise x_0'ın (SP_T^u)'nun çözümü olması ile çelişir. Dolayısıyla x_0, $(u - SOP)$'nin zayıf u-maksimal çözümüdür. □

Uyarı 2.3.9. *Zayıf u-minimal çözümlerin karakterizasyonu kesin u-azalan, Teorem 2.3.8'deki (i) ve (ii) koşullarını sağlayan en az bir $T \in \mathcal{M}(\mathcal{P}_{0-C}(Y), \mathbb{R})$ fonksiyonunun var olması ile benzer şekilde elde edilir.*

2.4. (s – SOP) İçin Gerstewitz Vektörizasyon Fonksiyonu

Bu kısımda $\preceq_C^{\ell}$ ve $\preceq_C^{u}$ sıralamaları yardımıyla tanımlanan kümeleri azaltma (set less) bağıntısı göz önüne alınacaktır. Buna ek olarak, u-Gerstewitz fonksiyonunun bir genişlemesi yardımı ile $\mathcal{P}^0_{\mp C}(Y) \times \mathcal{P}^0_{\mp C}(Y)$'den $\mathbb{R}^2$'ye bir fonksiyon tanımlanacak ve bu fonksiyonun monotonluğu ve bazı özellikleri incelenecektir. Bir sonraki kısımda bu fonksiyon herhangi bir konvekslik kabulü olmadan $(s - SOP)$'nin optimallik koşullarını elde etmek için kullanılacaktır.

Şimdi $(s - SOP)$ için verilen vektörizasyon fonksiyonunu tanımlansın.

Tanım 2.4.1. *Her $A, B \in \mathcal{P}^0_{\mp C}(Y)$ için*

$$w_e(A, B) = (-G_e^{\ell}(A, B), G_e^{u}(B, A)) \tag{2.26}$$

olarak tanımlanan $w_e(\cdot,\cdot) : \mathcal{P}^0_{\mp C}(Y) \times \mathcal{P}^0_{\mp C}(Y) \to \bar{\mathbb{R}}^2$ fonksiyonuna Gerstewitz vektörizasyon fonksiyonu denir.

Öncelikle Gerstewitz vektörizasyon fonksiyonunun monotonluğu ve bazı özellikleri incelenecektir.

Teorem 2.4.2. $\mathbb{R}^2$ *uzayı* $\mathbb{R}^2_+$ *ile kısmi sıralı, $A, B \in \mathcal{P}^0_{\mp C}(Y)$ olmak üzere Gerstewitz vektörizasyon fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir:*

(i) A, B, $\mp C$-sınırlı ise $w_e(A, B) \in \mathbb{R}^2$'dir,

(ii) $A \in [B]^s$ ise $w_e(A, \cdot) = w_e(B, \cdot)$ ve $w_e(\cdot, A) = w_e(\cdot, B)$'dir,

(iii) $A \in [B]^s$ ise $w_e(A, B) = w_e(B, A)$'dır,

(iv) $w_e(\cdot, A)$ $\mathcal{P}^0_{\mp C}(Y)$ üzerinde s-azalandır,

(v) $w_e(A, \cdot)$ $\mathcal{P}^0_{\mp C}(Y)$ üzerinde s-artandır.

Kanıt. (i) A ve B, $\mp C$-sınırlı olduğundan hem C-sınırlı hem de $-C$-sınırlıdır. Dolayısıyla Önerme 2.1.13 (i)'den ve Teorem 2.2.31'den sırasıyla $G_e^{\ell}(A, B) \in \mathbb{R}$ ve $-G_e^{u}(B, A) \in \mathbb{R}$ elde edilir. O halde $w_e(A, B) \in \mathbb{R}^2$'dir.

(ii) $A \in [B]^s$ olduğundan $A \in [B]^\ell$ ve $A \in [B]^u$'dır. Dolayısıyla Önerme 2.1.13 (ii)'den ve Teorem 2.2.33 (iii)'den sırasıyla $-G_e^\ell(A,\cdot) = -G_e^\ell(B,\cdot)$ ve $G_e^u(\cdot,A) = G_e^u(\cdot,B)$ elde edilir. Böylece $w_e(A,\cdot) = w_e(B,\cdot)$ olur.

$A \in [B]^s$ olduğundan $A \in [B]^\ell$ ve $A \in [B]^u$'dır. Dolayısıyla Önerme 2.1.13 (ii)'den ve Teorem 2.2.33 (i)'den $-G_e^\ell(\cdot,A) = -G_e^\ell(\cdot,B)$ ve $G_e^u(A,\cdot) = G_e^u(B,\cdot)$ elde edilir. Böylece $w_e(\cdot,A) = w_e(\cdot,B)$ bulunur.

(iii) $A \in [B]^s$ olduğundan $A \in [B]^\ell$ ve $A \in [B]^u$'dır. Dolayısıyla Önerme 2.1.13 (iii)'den ve Teorem 2.2.33 (iv)'den $-G_e^\ell(A,B) = -G_e^\ell(B,A)$ ve $G_e^u(A,B) = G_e^u(B,A)$ elde edilir. Böylece $w_e(A,B) = w_e(B,A)$ olur.

(iv) $B, D \in \mathcal{P}_{0\mp C}(Y)$ ve $B \preceq_C^s D$ olsun. Bu durumda $B \preceq_C^\ell D$ ve $B \preceq_C^u D$ olur. O halde Önerme 2.1.13 (iv)'den ve Teorem 2.2.33 (ii)'den $-G_e^\ell(D,A) \leq -G_e^\ell(B,A)$ ve $G_e^u(A,D) \leq G_e^u(A,B)$ elde edilir. Dolayısıyla $w_e(D,A) \leq_{\mathbb{R}^2_+} w_e(B,A)$ olur ve böylece $w_e(\cdot,A)$, $\mathcal{P}^0_{\mp C}(Y)$ üzerinde s-azalandır.

(v) $B, D \in \mathcal{P}_{0\mp C}(Y)$ ve $B \preceq_C^s D$ olsun. Bu durumda $B \preceq_C^\ell D$ ve $B \preceq_C^u D$ olur. Önerme 2.1.13 (v)'den ve Teorem 2.2.33 (v)'den $-G_e^\ell(A,B) \leq -G_e^\ell(A,D)$ ve $G_e^u(B,A) \leq G_e^u(D,A)$ elde edilir. Böylece $w_e(A,B) \leq_{\mathbb{R}^2_+} w_e(A,D)$ olur. Dolayısıyla $w_e(A,\cdot)$, $\mathcal{P}^0_{\mp C}(Y)$ üzerinde s-artandır.

□

Teorem 2.4.3. *$\mathbb{R}^2$ uzayı $\mathbb{R}^2_+$ ile kısmi sıralı, $A \in \mathcal{P}^0_{\mp C}(Y)$ ve $\mp C$-kompakt küme olsun. Bu durumda*

(i) $w_e(\cdot,A)$, $\mp C$-kompakt kümeler ailesi üzerinde kesin s-azalandır,

(ii) $w_e(A,\cdot)$, $\mp C$-kompakt kümeler ailesi üzerinde kesin s-artandır.

Kanıt. (i) $B, D \in \mathcal{P}^0_{\mp C}(Y)$, $\mp C$-kompakt kümeler ve $B \prec_C^s D$ olsun. Bu durumda $B \prec_C^\ell D$ ve $B \prec_C^u D$ olur. Önerme 2.1.14 (i)'den ve Teorem 2.2.34 (i)'den sırasıyla $-G_e^\ell(D,A) < -G_e^\ell(B,A)$ ve $G_e^u(A,D) < G_e^u(A,B)$ elde edilir. Böylece $w_e(D,A) <_{\mathbb{R}^2_+} w_e(B,A)$ olur. Dolayısıyla $w_e(\cdot,A)$, $\mp C$-kompakt kümeler ailesi üzerinde kesin s-azalandır.

(ii) $B, D \in \mathcal{P}^0_{\mp C}(Y)$, $\mp C$-kompakt kümeler ve $B \prec_C^s D$ olsun. Bu durumda $B \prec_C^\ell D$ ve $B \prec_C^u D$ elde edilir. Önerme 2.1.14 (ii)'den ve Teorem 2.2.34

(ii)'den $-G_e^\ell(A,B) < -G_e^\ell(A,D)$ ve $G_e^u(B,A) < G_e^u(D,A)$ elde edilir. Böylece $w_e(A,B) <_{\mathbb{R}^2_+} w_e(A,D)$ olur. Dolayısıyla $w_e(A,\cdot)$, $\mp C$-kompakt kümeler ailesi üzerinde kesin s-artandır.

$\square$

Teorem 2.4.4. $\mathbb{R}^2$ *uzayı* $\mathbb{R}^2_+$ *ile kısmi sıralı,* $A \in \mathcal{P}^0_{\mp C}(Y)$ *ve* $\mp C$*-kapalı küme olsun. Bu durumda Gerstewitz vektörizasyon fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir:*

(i) $w_e(A,A) = (0,0)$*'dır,*

(ii) $A \in [B]^s$ *ise* $w_e(A,B) = w_e(B,A) = (0,0)$*'dır,*

(iii) $A \preceq^s_C B \;\Leftrightarrow (0,0) \leq_{\mathbb{R}^2_+} w_e(A,B)$*'dir.*

Kanıt. (i) Önerme 2.1.15 (i)'den $-G_e^\ell(A,A) = 0$ ve Teorem 2.2.35 (i)'den $G_e^u(A,A) = 0$ olduğundan

$$w_e(A,A) = (-G_e^\ell(A,A), G_e^u(A,A)) = (0,0)$$

elde edilir.

(ii) $A \in [B]^s$ ise $A \in [B]^\ell$ ve $A \in [B]^u$ elde edilir. Böylece Önerme 2.1.15 (ii)'den ve Teorem 2.2.35 (ii)'den sırasıyla $-G_e^\ell(A,B) = -G_e^\ell(B,A) = 0$ ve $G_e^u(A,B) = G_e^u(B,A) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla

$$w_e(A,B) = w_e(B,A) = (-G_e^\ell(A,B), G_e^u(B,A)) = (0,0)$$

olur.

(iii) ($\Longrightarrow$) $A \preceq^s_C B$ olsun. Bu durumda $A \preceq^\ell_C B$ ve $A \preceq^u_C B$ olur. O halde Önerme 2.1.15 (iii)'den ve Teorem 2.2.35 (iii)'den sırasıyla $-G_e^\ell(A,B) \geq 0$ ve $G_e^u(B,A) \geq 0$ elde edilir. Böylece

$$(0,0) \leq_{\mathbb{R}^2_+} (-G_e^\ell(A,B), G_e^u(B,A)) = w_e(A,B)$$

olur.

($\Longleftarrow$) $(0,0) \leq_{\mathbb{R}^2_+} w_e(A,B)$ olsun. O zaman, $G^\ell_e(A,B) \leq 0$ elde edilir. Böylece Önerme 2.1.15 (iii)'den $A \preceq^\ell_C B$ bulunur. $G^u_e(A,B) \geq 0$ olduğundan Teorem 2.2.35 (iii)'den $A \preceq^u_C B$ bulunur. $A \preceq^\ell_C B$ ve $A \preceq^u_C B$ olduğundan $A \preceq^s_C B$'dir.

□

Teorem 2.4.5. $\mathbb{R}^2$ *uzayı* $\mathbb{R}^2_+$ *ile kısmi sıralı,* $A, B \in \mathcal{P}^0_{\mp C}(Y)$ *ve* $\mp C$*-kompakt kümeler olsun. Bu durumda Gerstewitz vektörizasyon fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir:*

(i) $(0,0) <_{\mathbb{R}^2_+} w_e(A,B) \Longleftrightarrow A \prec^s_C B,$

(ii) $w_e(A,B) = (0,0) \Longleftrightarrow A \not\prec^s_C B$ *ve* $A \preceq^s_C B.$

Kanıt. (i) ($\Longrightarrow$) $(0,0) <_{\mathbb{R}^2_+} w_e(A,B)$ olsun. Bu durumda $G^\ell_e(A,B) < 0$ ve $G^u_e(B,A) > 0$ olur. Dolayısıyla Önerme 2.1.16 (i)'den ve Sonuç 2.2.36 (i)'den sırasıyla $A \prec^\ell_C B$ ve $A \prec^u_C B$ elde edilir. Böylece $A \prec^s_C B$'dir.

($\Longleftarrow$) $A \prec^s_C B$ olsun. Bu durumda $A \prec^\ell_C B$ ve $A \prec^u_C B$ olur. O halde Önerme 2.1.16 (i)'den ve Sonuç 2.2.36 (i)'den sırasıyla $G^\ell_e(A,B) < 0$ ve $G^u_e(B,A) > 0$ elde edilir. Böylece $(0,0) <_{\mathbb{R}^2_+} w_e(A,B)$ olur.

(ii) ($\Longrightarrow$) $w_e(A,B) = (0,0)$ olsun. Bu durumda $(0,0) \leq_{\mathbb{R}^2_+} w_e(A,B)$ ve $w_e(A,B) \leq_{\mathbb{R}^2_+} (0,0)$ elde edilir. $w_e(A,B) \leq_{\mathbb{R}^2_+} (0,0)$ olduğundan (i)'den $A \not\prec^s_C B$ elde edilir. $(0,0) \leq_{\mathbb{R}^2_+} w_e(A,B)$ olduğundan Teorem 2.4.4 (iii)'den $A \preceq^s_C B$ elde edilir. Böylece $A \not\prec^s_C B$ ve $A \preceq^s_C B$ olur.

($\Longleftarrow$) $A \preceq^s_C B$ ve $A \not\prec^s_C B$ olsun. $A \not\prec^s_C B$ olduğundan (ii)'den $w_e(A,B) \leq_{\mathbb{R}^2_+} (0,0)$ elde edilir. $A \preceq^s_C B$ olduğundan Teorem 2.4.4 (iii)'den $(0,0) \leq_{\mathbb{R}^2_+} w_e(A,B)$ olur. $w_e(A,B) \leq_{\mathbb{R}^2_+} (0,0)$ ve $(0,0) \leq_{\mathbb{R}^2_+} w_e(A,B)$ olduğundan $w_e(A,B) = (0,0)$ bulunur.

□

2.5. (s – SOP) İçin Gerstewitz Vektörizasyon Fonksiyonu İle Optimallik Koşulları

Bu kısımda $(s-SOP)$'nin optimallik koşullarını elde etmek için Gerstewitz vektörizasyon fonksiyonu yardımı ile $(s-SOP)$ vektör değerli problemlere dönüştürülmüş, elde edilen vektör optimizasyon problemi ile $(s-SOP)$ arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Jahn [37]'ın tanımladığı vektörizasyon fonksiyonu doğrusal yaklaşım kullanılarak tanımlandığından optimallik koşullarını vermek için konvekslik şartı gereklidir. Fakat tanımladığımız Gerstewitz vektörizasyon fonksiyonunda konik bir yaklaşım olduğundan optimallik koşullarını vermek için konvekslik şartı gerekmemektedir. Dolayısıyla Gerstewitz vektörizasyon fonksiyonu doğrusal yaklaşımın yapıldığı küme optimizasyon problemlerinden daha geniş problemlere uygulanabilir. Böylece Gerstewitz vektörizasyon fonksiyonu ile elde edilen optimallik koşulları Jahn [37]'ın çalışmasındaki küme optimizasyonu problemleri için de geçerlidir.

Teorem 2.5.1. *$\mathbb{R}^2$ uzayı $\mathbb{R}^2_+$ ile kısmi sıralı, $F : X \rightrightarrows Y$, $\mp C$-kapalı, $\mp C$-sınırlı değerli ve $x_0 \in X$ olsun. x_0'ın $(s-SOP)$'nin bir s-maksimal çözümü olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{P}_{0\mp C}(Y)$ üzerinde s-artan ve*

(i) $x \in X$ ve $F(x) \in [F(x_0)]^s$ ise $T(F(x)) = (0,0)$,

(ii) $x \in X$ ve $F(x) \notin [F(x_0)]^s$ ise $(0,0) \not\leq_{\mathbb{R}^2_+} T(F(x))$,

(iii) $A \in \mathcal{P}_{0\mp C}(Y)$ ve $F(x_0) \preceq^s_C A$ ise $(0,0) \leq_{\mathbb{R}^2_+} T(A)$

özelliklerini sağlayan en az bir $T : \mathcal{P}^0_{\mp C}(Y) \to \mathbb{R}^2$ fonksiyonunun var olmasıdır.

Kanıt. $(\Longrightarrow)$ x_0, $(s-SOP)$'nin bir s-maksimal çözümü ve $e \in -int(C)$ olsun.

$$T(\cdot) = w_e(F(x_0), \cdot) = (-G^\ell_e(F(x_0), \cdot), G^u_e(\cdot, F(x_0)))$$

fonksiyonu göz önüne alınsın. Teorem 2.4.2 (v)'den T fonksiyonu $\mathcal{P}^0_{\mp C}(Y)$ üzerinde s-artandır. T fonksiyonu (i)-(iii) koşullarını sağlar. Gerçekten,

(i) $F(x) \in [F(x_0)]^s$ olsun. O halde Teorem 2.4.4 (ii)'den

$$T(F(x)) = w_e(F(x_0), F(x)) = (0,0)$$

elde edilir.

(ii) $F(x) \notin [F(x_0)]^s$ olsun. O halde x_0, $(s - SOP)$'nin bir s-maksimal çözümü olduğundan $F(x) \notin [F(x_0)]^s$ olan her $x \in X$ için $F(x_0) \not\preceq_C^s F(x)$ olur. Böylece Teorem 2.4.4 (iii)'den

$$(0,0) \not\leq_{\mathbb{R}^2_+} w_e(F(x_0), F(x)) = T(F(x))$$

elde edilir.

(iii) $F(x_0) \preceq_C^s A$ olsun. Bu durumda Teorem 2.4.4 (iii)'den

$$(0,0) \leq_{\mathbb{R}^2_+} w_e(F(x_0), A) = T(A)$$

bulunur.

$(\Longleftarrow)$ $\mathcal{P}^0_{\mp C}(Y)$ üzerinde s-artan bir $T : \mathcal{P}^0_{\mp C}(Y) \to \mathbb{R}^2$ fonksiyonu (i)-(iii) koşullarını sağlasın.

Kabul edelim ki x_0, $(s - SOP)$'nin bir s-maksimal çözümü olmasın. O zaman en az bir $x' \in X$ için $F(x_0) \preceq_C^s F(x')$ ve $F(x') \not\preceq_C^s F(x_0)$ olur. Böylece $F(x') \notin [F(x_0)]^s$ elde edilir. O halde (ii)'den

$$(0,0) \not\leq_{\mathbb{R}^2_+} T(F(x')) \tag{2.27}$$

elde edilir. $F(x_0) \preceq_C^s F(x')$ olduğundan (iii)'den

$$(0,0) \leq_{\mathbb{R}^2_+} T(F(x'))$$

olur. Bu ise (2.27) ile çelişir. Dolayısıyla x_0, $(s - SOP)$'nin s-maksimal çözümüdür.

□

Teorem 2.5.2. *$\mathbb{R}^2$ uzayı $\mathbb{R}^2_+$ ile kısmi sıralı, $F : X \rightrightarrows Y$ $\mp C$-kapalı, $\mp C$-sınırlı değerli ve $x_0 \in X$ olsun. x_0'ın $(s - SOP)$'nin bir s-minimal çözümü olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{P}_{0 \mp C}(Y)$ üzerinde s-azalan ve*

(i) $x \in X$ ve $F(x) \in [F(x_0)]^s$ ise $T(F(x)) = (0,0)$,

(ii) $x \in X$ *ve* $F(x) \notin [F(x_0)]^s$ *ise* $(0,0) \not\leq_{\mathbb{R}^2_+} T(F(x))$,

(iii) $A \in \mathcal{P}_{0\mp C}(Y)$ *ve* $A \preceq^s_C F(x_0)$ *ise* $(0,0) \leq_{\mathbb{R}^2_+} T(A)$

özelliklerini sağlayan en az bir $T : \mathcal{P}^0_{\mp C}(Y) \to \mathbb{R}^2$ *fonksiyonunun var olmasıdır.*

Kanıt. Teorem 2.5.1'in kanıtına benzer şekilde elde edilir. □

Teorem 2.5.3. *$\mathbb{R}^2$ uzayı $\mathbb{R}^2_+$ ile kısmi sıralı, $F : X \rightrightarrows Y$ $\mp C$-kompakt değerli ve $x_0 \in X$ olsun. x_0'ın $(s - SOP)$'nin bir zayıf s-maksimal çözümü olması için gerek ve yeter koşul $\mp C$-kompakt kümeler ailesi üzerinde kesin s-artan ve*

(i) $x \in X$ *ve* $F(x) \in [F(x_0)]^s$ *ise* $T(F(x)) = (0,0)$,

(ii) $x \in X$ *ve* $F(x) \notin [F(x_0)]^s$ *ise* $T(F(x)) \leq_{\mathbb{R}^2_+} (0,0)$,

(iii) $A \in \mathcal{P}^0_{\mp C}(Y)$, *$\mp C$-kompakt küme ve* $F(x_0) \prec^s_C A$ *ise* $(0,0) <_{\mathbb{R}^2_+} T(A)$

özelliklerini sağlayan en az bir $T : \mathcal{P}^0_{\mp C}(Y) \to \mathbb{R}^2$ *fonksiyonunun var olmasıdır.*

Kanıt. ($\Longrightarrow$) x_0 $(s - SOP)$'nin bir zayıf s-maksimal çözümü ve $e \in -int(C)$ olsun. $T : \mathcal{P}^0_{\mp C}(Y) \to \mathbb{R}^2$ fonksiyonu

$$T(\cdot) = w_e(F(x_0), \cdot) = (-G^\ell_e(F(x_0), \cdot), G^u_e(\cdot, F(x_0)))$$

olarak tanımlansın. Teorem 2.4.3 (ii)'den T fonksiyonu $\mp C$-kompakt kümeler ailesi üzerinde kesin s-artandır. T fonksiyonunun (i)-(iii) koşullarını sağladığı gösterilsin.

(i) $F(x) \in [F(x_0)]^s$ olsun. O halde Teorem 2.4.4 (ii)'den

$$T(F(x)) = w_e(F(x_0), F(x)) = (0,0)$$

elde edilir.

(ii) $F(x) \notin [F(x_0)]^s$ olsun. O halde x_0, $(s - SOP)$'nin bir s-maksimal çözümü olduğundan $F(x) \notin [F(x_0)]^s$ olan her $x \in X$ için $F(x_0) \not\prec^s_C F(x)$ olur. Böylece Teorem 2.4.5 (ii)'den

$$T(F(x)) = w_e(F(x_0), F(x)) \leq_{\mathbb{R}^2_+} (0,0)$$

elde edilir.

(iii) $F(x_0) \prec_C^s A$ olsun. Bu durumda Teorem 2.4.5 (i)'den

$$(0,0) <_{\mathbb{R}^2_+} w_e(F(x_0), A) = T(A)$$

bulunur.

($\Longleftarrow$) $\mp C$-kompakt kümeler ailesi üzerinde kesin s-artan bir $T : \mathcal{P}^0_{\mp C}(Y) \to \mathbb{R}^2$ fonksiyonu (i)-(iii) koşullarını sağlasın.

Kabul edelim ki x_0 $(s - SOP)$'nin bir zayıf s-maksimal çözümü olmasın. O zaman, en az bir $x' \in X$ için $F(x_0) \prec_C^s F(x')$ ve $F(x') \not\prec_C^s F(x_0)$ olur. Böylece $F(x') \notin [F(x_0)]^s$ olur. O halde (ii)'den

$$T(F(x')) \leq_{\mathbb{R}^2_+} (0,0) \tag{2.28}$$

elde edilir. $F(x_0) \prec_C^s F(x')$ olduğundan (iii)'den

$$(0,0) <_{\mathbb{R}^2_+} T(F(x'))$$

olur. Bu ise, (2.28) ile çelişir. Dolayısıyla x_0, $(s - SOP)$'nin zayıf s-maksimal çözümüdür. $\square$

Teorem 2.5.4. $\mathbb{R}^2$ *uzayı* $\mathbb{R}^2_+$ *ile kısmi sıralı,* $F : X \rightrightarrows Y$ $\mp C$*-kompakt değerli ve* $x_0 \in X$ *olsun.* x_0*'ın* $(s - SOP)$*'nin bir zayıf s-minimal çözümü olması için gerek ve yeter koşul* $\mp C$*-kompakt kümeler ailesi üzerinde kesin s-azalan ve*

(i) $x \in X$ *ve* $F(x) \in [F(x_0)]^s$ *ise* $T(F(x)) = (0,0)$,

(ii) $x \in X$ *ve* $F(x) \notin [F(x_0)]^s$ *ise* $T(F(x)) \leq_{\mathbb{R}^2_+} (0,0)$,

(iii) $A \in \mathcal{P}^0_{\mp C}(Y)$, $\mp C$*-kompakt küme ve* $A \prec_C^s F(x_0)$ *ise* $(0,0) <_{\mathbb{R}^2_+} T(A)$

özelliklerini sağlayan en az bir $T : \mathcal{P}^0_{\mp C}(Y) \to \mathbb{R}^2$ *fonksiyonunun var olmasıdır.*

Kanıt. Teorem 2.5.3'in kanıtına benzer şekilde elde edilir. $\square$

Teorem 2.5.5. *$F : X \rightrightarrows Y$ $\mp C$-kapalı, $\mp C$-sınırlı değerli ve $x_0 \in X$ olsun. x_0'ın $(s - SOP)$'nin bir s-maksimal (s-minimal) çözümü olması için gerek ve yeter koşul $w_e(\cdot,\cdot)$ Gerstewitz vektörizasyon fonksiyonu olmak üzere x_0'ın $\mathbb{R}^2_+$ sıralama konisine göre*

$$(VOP^s_w)\begin{cases} \text{maks } w_e(F(x_0), F(x)) \\ x \in X \end{cases} \qquad \left(\begin{cases} \text{maks } w_e(F(x), F(x_0)) \\ x \in X \end{cases}\right)$$

vektör optimizasyon probleminin bir çözümü olmasıdır.

Kanıt. ($\Longrightarrow$) Teorem 2.5.1 ve Teorem 2.5.2'den açık bir şekilde görülmektedir.

($\Longleftarrow$) Kabul edelim ki x_0, (VOP^s_w)'nin bir çözümü olsun fakat $(s - SOP)$'nin s-maksimal çözümü olmasın. O zaman, en az bir $x' \in X$ için $F(x_0) \preceq^s_C F(x')$ ve $F(x') \not\preceq^s_C F(x_0)$ olur. Böylece $F(x') \notin [F(x_0)]^s$ elde edilir. $F(x') \notin [F(x_0)]^s$ olduğundan Teorem 2.4.4 (iii)'den

$$(0,0) \not\leq_{\mathbb{R}^2_+} w_e(F(x_0), F(x')) \tag{2.29}$$

bulunur. $F(x_0) \preceq^s_C F(x')$ ve $w_e(F(x_0), \cdot)$ s-artan olduğundan

$$w_e(F(x_0), F(x_0)) = (0,0) \leq_{\mathbb{R}^2_+} w_e(F(x_0), F(x'))$$

bulunur. Bu ise (2.29) ile çelişir. Dolayısıyla x_0, $(s - SOP)$'nin bir s-maksimal çözümüdür. $\square$

Teorem 2.5.6. *$F : X \rightrightarrows Y$ $\mp C$-kompakt değerli ve $x_0 \in X$ olsun. x_0'ın $(s - SOP)$'nin bir zayıf s-maksimal (zayıf s-minimal) çözümü olması için gerek ve yeter koşul $w_e(\cdot,\cdot)$ Gerstewitz vektörizasyon fonksiyonu olmak üzere x_0'ın $\mathbb{R}^2_+$ sıralama konisine göre*

$$(VOP^s_w)\begin{cases} \text{maks } w_e(F(x_0), F(x)) \\ x \in X \end{cases} \qquad \left(\begin{cases} \text{maks } w_e(F(x), F(x_0)) \\ x \in X \end{cases}\right)$$

probleminin bir çözümü olmasıdır.

Kanıt. ($\Longrightarrow$) Teorem 2.5.3 ve Teorem 2.5.4'den açık bir şekilde görülmektedir.

($\Longleftarrow$) Kabul edelim ki x_0, (VOP_w^s)'nin bir çözümü olsun fakat $(s-SOP)$'nin zayıf s-maksimal çözümü olmasın. O zaman, en az bir $x' \in X$ için $F(x_0) \prec_C^s F(x')$ ve $F(x') \not\prec_C^s F(x_0)$ olur. Böylece $F(x') \notin [F(x_0)]^s$ elde edilir ve Teorem 2.4.4 (iii)'den

$$(0,0) \not\leq_{\mathbb{R}^2_+} w_e(F(x_0), F(x')) \tag{2.30}$$

bulunur. $F(x_0) \prec_C^s F(x')$ ve $w_e(F(x_0), \cdot)$ kesin s-artan olduğundan

$$w_e(F(x_0), F(x_0)) = (0,0) <_{\mathbb{R}^2_+} w_e(F(x_0), F(x'))$$

bulunur. Bu ise, (2.30) ile çelişir. Dolayısıyla x_0, $(s-SOP)$'nin bir zayıf s-maksimal çözümüdür. $\square$

Örnek 2.5.7. *$Y = \mathbb{R}^2$, $C = \mathbb{R}^2_+$, $X = [0,2]$, $F : X \rightrightarrows Y$ küme değerli dönüşümü*

$$F(x) = \begin{cases} ([x-2, x] \times [x-2, x]) \cup \{(6+x, 6+x)\} & , x \in [0,2) \\ \text{conv}\{(-5,0),(6,6)\} \cup \text{conv}\{(0,-5),(6,6)\} & , x = 2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

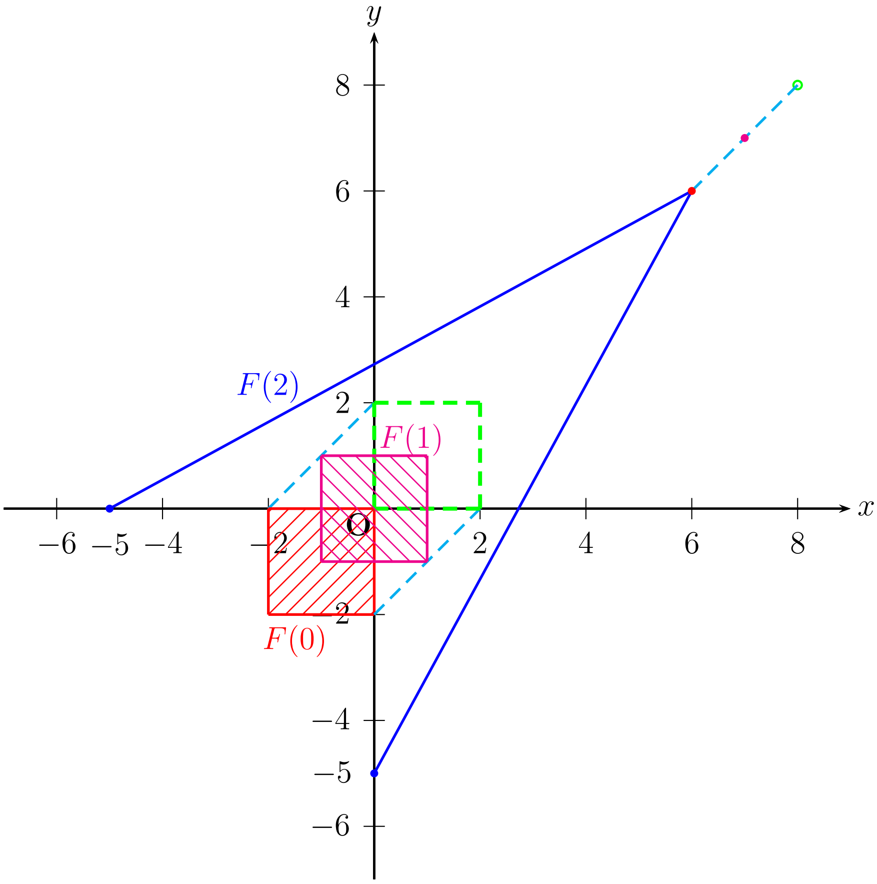
$$(s-SOP) \begin{cases} \min F(x) \\ x \in X \end{cases}$$

problemini göz önüne alalım.

Şekil 2.10'dan da görülebileceği gibi, $\forall x \in [0,2)$ için $F(x) \not\preceq_C^\ell F(2)$ olduğundan $F(x) \not\preceq_C^s F(2)$ elde edilir. Dolayısıyla $x_0 = 2$ problemin bir s-minimal çözümüdür. $\forall x \in (0,2]$ için $F(x) \not\preceq_C^\ell F(0)$ olduğundan $F(x) \not\preceq_C^s F(0)$ elde edilir. Böylece $x_0 = 0$ problemin bir diğer s-minimal çözümüdür. $x \in (0,2)$ alalım. $y < x$ ve $y \in (0,2)$ için $F(y) \preceq_C^\ell F(x)$ ve $F(x) \not\preceq_C^\ell F(y)$, $F(y) \preceq_C^u F(x)$ ve $F(x) \not\preceq_C^u F(y)$ olduğundan $F(y) \preceq_C^s F(x)$ olur fakat $F(x) \not\preceq_C^s F(y)$ elde edilir. Böylece x problemin bir s-minimal çözümü olamaz.

O halde $(s-SOP)$'nin çözümü $x_0 = 0$ ve $x_0 = 2$'dir.

Jahn [37]'ın verdiği optimallik koşullarını kullanarak bu problemi çözmek mümkün değildir. Çünkü verdiği optimallik koşullarındaki ön şart olan $F(x) + C$ ve $F(x) - C$ kümelerinin konveksliği bu örnekte sağlanmamaktadır.



Şekil 2.10: *Örnek 2.5.7'deki F küme değerli dönüşümünün görüntü ailelerinin bazı elemanları*

Şimdi bu probleme karşılık gelen Gerstewitz vektörizasyon fonksiyonu oluşturulsun.

$e = (-1,-1)$ *olsun.* $x_0 = 1$*'in problemin bir çözümü olması için Teorem 2.5.2'nin koşullarının sağlanıp sağlanmadığını araştırmak amacıyla* $T(\cdot) = w_e(\cdot, F(1))$ *fonksiyonu gözönüne alınsın. Teorem 2.5.2 (ii)'den* $F(x) \notin [F(1)]^s$ *ise* $(0,0) \not\leq_{\mathbb{R}^2_+} T(F(x))$ *olmalıdır.* $F(0) \notin [F(1)]^s$ *olduğu açıktır. Buradan,*

$$T(F(0)) = w_e(F(0), F(1)) = (-G_e^{\ell}(F(0), F(1)), G_e^u(F(1), F(0))) = (1,1)$$

olduğundan Teorem 2.5.2 (ii) koşulu sağlanmaz. O halde $x_0 = 1$ *problemin bir çözümü değildir.*

$x_0 = 2$*'nin Teorem 2.5.2'nin (i) ve (iii) koşullarını sağladığı açıktır. O halde (ii) koşulunun sağlandığı gösterilmelidir.* $F(x) \notin [F(2)]^s$ *ise* $(0,0) \not\leq_{\mathbb{R}^2_+} T(F(x))$

olmalıdır. $\forall x \in [0,2)$ *için* $F(x) \notin [F(2)]^s$*'dir.* $\forall x \in [0,2)$ *için*

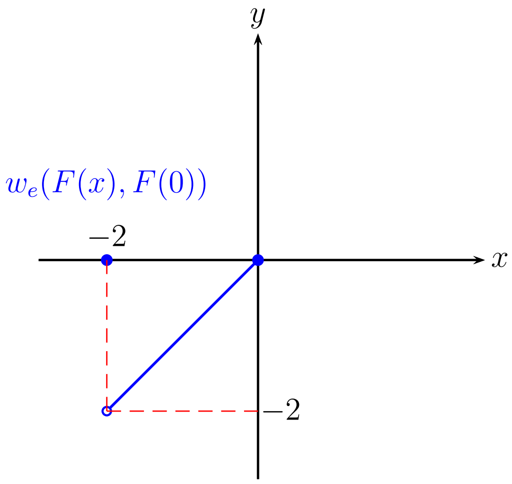
$$T(F(x)) = w_e(F(x), F(2)) = (-G_e^{\ell}(F(x), F(2)), G_e^u(F(2), F(x))) = (-3-x, -x)$$

elde edilir ve $\forall x \in [0,2)$ *için* $(0,0) \not\leq_{\mathbb{R}^2_+} T(F(x))$ *bulunur. Dolayısıyla (ii) koşulu sağlanmış olur. O halde* $x_0 = 2$, $(s - SOP)$*'nin bir çözümüdür.*

Teorem 2.5.5 kullanılarak $x_0 = 0$*'ın bir çözüm olduğu gösterilecektir.*

$$\begin{aligned} w_e(F(x), F(0)) &= (-G_e^{\ell}(F(x), F(0)), G_e^u(F(0), F(x))) \\ &= \begin{cases} (-x, -x) & , x \neq 2 \\ (-2, 0) & , x = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

olur.



Şekil 2.11: *Örnek 2.5.7'deki* $w_e(F(x), F(0))$ *fonksiyonunun görüntü kümesi*

Şekil 2.11'den de görülebileceği gibi, $w_e(F(0), F(0)) \leq_{\mathbb{R}^2_+} w_e(F(x), F(0))$ *olacak şekilde hiçbir* $x \in (0,2]$ *yoktur. O halde* $x_0 = 0$

$$(VOP_w^s) \begin{cases} \text{maks } w_e(F(x), F(0)) \\ x \in [0,2] \end{cases}$$

vektör optimizasyon probleminin bir çözümü olur. Dolayısıyla Teorem 2.5.5'den $x_0 = 0$, $(s - SOP)$*'nin bir çözümüdür.*

2.6. Tek Değişkenli Gerstewitz Vektörizasyon Fonksiyonu

Bu kısımda, $G_e^{\ell}(\cdot,\cdot)$ ve $G_e^{u}(\cdot,\cdot)$ fonksiyonları yardımı ile tek değişkenli, yeni bir vektörizasyon fonksiyonu elde edilmiş ve bu fonksiyonun monotonluğu ve bazı özellikleri incelenmiştir. Bunlara ek olarak, küme değerli optimizasyon problemi ve vektörizasyonu ile elde edilen vektör optimizasyon probleminin çözümleri arasındaki ilişkiler araştırılmıştır. Ayrıca herhangi bir konvekslik kabulü olmadan, küme değerli optimizasyon problemleri için gerekli ve yeterli optimallik koşulları elde edilmiştir.

Tanım 2.6.1. *Her $A \in \mathcal{P}^0_{\mp C}(Y)$ için*

$$v_e(A) = \big(-G_e^{\ell}(\{0\}, A), G_e^{u}(A, \{0\})\big)$$

olarak tanımlanan $v_e : \mathcal{P}^0_{\mp C}(Y) \to \overline{\mathbb{R}}^2$ fonksiyonuna tek değişkenli Gerstewitz vektörizasyon fonksiyonu denir.

Teorem 2.6.2. *$\mathbb{R}^2$ uzayı $\mathbb{R}^2_+$ ile kısmi sıralı olsun. Bu durumda $v_e(\cdot)$ fonksiyonu $\mathcal{P}^0_{\mp C}(Y)$ üzerinde s-artandır.*

Kanıt. $A, B \in \mathcal{P}^0_{\mp C}(Y)$ ve $A \preceq^s_C B$ olsun. Bu durumda $A \preceq^{\ell}_C B$ ve $A \preceq^u_C B$ elde edilir. Önerme 2.1.13 (v)'den $-G_e^{\ell}(\{0\}, A) \leq -G_e^{\ell}(\{0\}, B)$ ve Teorem 2.2.33 (v)'den $G_e^u(A, \{0\}) \leq G_e^u(B, \{0\})$ olur. Böylece $v_e(A) \leq_{\mathbb{R}^2_+} v_e(B)$ elde edilir. Dolayısıyla $v_e(\cdot)$, $\mathcal{P}^0_{\mp C}(Y)$ üzerinde s-artandır. □

Teorem 2.6.3. *$\mathbb{R}^2$ uzayı $\mathbb{R}^2_+$ ile kısmi sıralı olsun. Bu durumda $v_e(\cdot)$ fonksiyonu $\mp C$-kompakt kümeler ailesi üzerinde kesin s-artandır.*

Kanıt. $A, B \in \mathcal{P}^0_{\mp C}(Y)$, $\mp C$-kompakt kümeler ve $A \prec^s_C B$ olsun. Bu durumda $A \prec^{\ell}_C B$ ve $A \prec^u_C B$ elde edilir. Önerme 2.1.14 (ii)'den $-G_e^{\ell}(\{0\}, A) < -G_e^{\ell}(\{0\}, B)$ ve Teorem 2.2.34 (ii)'den $G_e^u(A, \{0\}) < G_e^u(B, \{0\})$ olur. Böylece $v_e(A) <_{\mathbb{R}^2_+} v_e(B)$ elde edilir. Dolayısıyla $v_e(\cdot)$, $\mp C$-kompakt kümeler ailesi üzerinde kesin s-artandır. □

Önerme 2.6.4. *$\mathbb{R}^2$ uzayı $\mathbb{R}^2_+$ ile kısmi sıralı ve $A, B \in \mathcal{P}^0_{\mp C}(Y)$ $\mp C$-kapalı ve $\mp C$-sınırlı olsun. Bu durumda $A \in [B]^s$ ise $v_e(A) = v_e(B)$ olur.*

Kanıt. $A \in [B]^s$ olsun. O zaman $A \preceq_C^s B$ ve $B \preceq_C^s A$ olur. $v_e(\cdot)$ fonksiyonu s-artan olduğundan $v_e(A) \leq_{\mathbb{R}^2_+} v_e(B)$ ve $v_e(B) \leq_{\mathbb{R}^2_+} v_e(A)$'dır. Böylece $v_e(A) = v_e(B)$ elde edilir. □

Bu önermenin tersi her zaman doğru değildir. Yani $v_e(A) = v_e(B)$ ise $A \in [B]^s$ olmak zorunda değildir. Aşağıda buna ilişkin bir örnek verilmiştir.

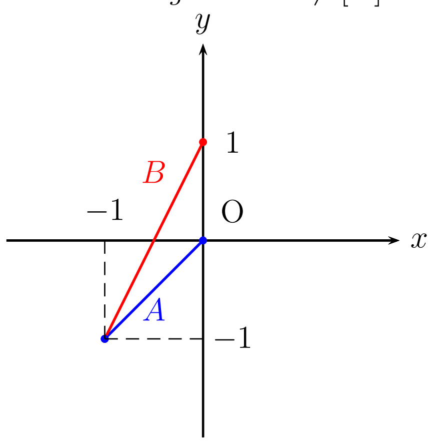
Örnek 2.6.5. *$Y = \mathbb{R}^2$, $C = \mathbb{R}^2_+$, $A = conv\{(0,0),(-1,-1)\}$, $B = conv\{(0,1),(-1,-1)\}$ ve $e = (-1,-1)$ olsun. Bu durumda*

$$v_e(A) = \left(-G_e^\ell(\{0\}, A), G_e^u(A, \{0\})\right) = (-1, 0)$$

ve

$$v_e(B) = \left(-G_e^\ell(\{0\}, B), G_e^u(B, \{0\})\right) = (-1, 0)$$

bulunur. Böylece $v_e(A) = v_e(B) = (-1,0)$ olmasına rağmen Şekil 2.12'den de görülebileceği gibi $A - C \neq B - C$ olduğundan $A \notin [B]^s$'dir.



Şekil 2.12: $A = conv\{(0,0),(-1,-1)\}$ *ve* $B = conv\{(0,1),(-1,-1)\}$ *kümeleri*

2.7. (s − SOP) İçin Optimallik Koşulları

Bu kısımda bir önceki kısımda tanımlanan vektörizasyon fonksiyonu yardımıyla $(s - SOP)$ vektör optimizasyon problemine indirgenmiştir. Buna ek olarak, konvekslik şartına gerek olmadan $(s - SOP)$ için gerekli ve yeterli optimallik koşulları verilmiş ve $(s-SOP)$ ile vektörizasyon yardımıyla elde edilen

$$(VOP_v^s)\begin{cases}\text{maks }(\min)v_e(F(x))\\ \qquad x\in X\end{cases}$$

vektör optimizasyon probleminin çözümleri arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Teorem 2.7.1. $\mathbb{R}^2$ *uzayı* $\mathbb{R}^2_+$ *ile kısmi sıralı,* $F : X \rightrightarrows Y$ *küme değerli dönüşümü* $\mp C$*-kapalı,* $\mp C$*-sınırlı değerli ve her* $x, y \in X$ *için* $F(x) \preceq^s_C F(y)$ *veya* $F(y) \preceq^s_C F(x)$ *olsun.* $x_0 \in X$*,* $(s-SOP)$*'nin s-maksimal (s-minimal) çözümü ise*

$$(VOP_v^s)\begin{cases}\text{maks }(\min)v_e(F(x))\\ \qquad x\in X\end{cases}$$

probleminin de bir güçlü çözümü olur.

Kanıt. x_0, $(s-SOP)$'nin s-maksimal çözümü olsun. $x \in X$ alalım. Her $x, y \in X$ için $F(x) \preceq^s_C F(y)$ veya $F(y) \preceq^s_C F(x)$ olduğundan $F(x_0) \preceq^s_C F(x)$ veya $F(x) \preceq^s_C F(x_0)$ olur. $F(x_0) \preceq^s_C F(x)$ ise x_0'ın s-maksimalliğinden $F(x) \preceq^s_C F(x_0)$ olur. Dolayısıyla $x \in X$ keyfi eleman olduğundan $\forall x \in X$ için $F(x) \preceq^s_C F(x_0)$ elde edilir. $v_e(\cdot)$ fonksiyonu $\mathcal{P}^0_{\mp C}(Y)$ ailesi üzerinde s-artan olduğundan

$$v_e(F(x)) \leq_{\mathbb{R}^2_+} v_e(F(x_0))$$

bulunur. Böylece x_0, (VOP_v^s)'nin bir güçlü çözümü olur. □

Uyarı 2.7.2. *Teorem 2.7.1'deki her* $x, y \in X$ *için* $F(x) \preceq^s_C F(y)$ *veya* $F(y) \preceq^s_C F(x)$ *olma koşulu gerekli bir koşuldur. Yani* $F : X \rightrightarrows Y$ *küme değerli dönüşümü* $\mp C$*-kapalı,* $\mp C$*-sınırlı değerli ve* $x_0 \in X$ *olsun.*

$$(s-SOP)\begin{cases}\text{maks }F(x)\\ \quad x\in X\end{cases}$$

problemi göz önüne alınsın. x_0*,* $(s-SOP)$ *probleminin bir s-maksimal çözümü ise*

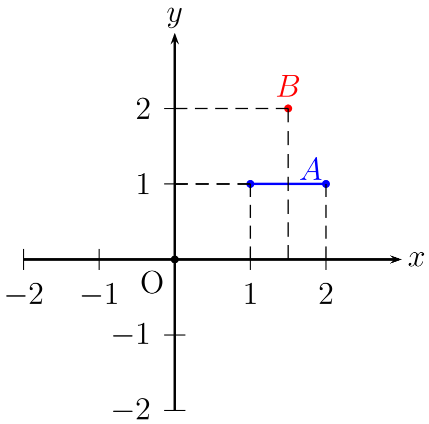
$$(VOP_v^s)\begin{cases}\text{maks }v_e(F(x))\\ \qquad x\in X\end{cases}$$

probleminin bir güçlü çözümü olmayabilir. Aşağıda buna ilişkin bir örnek verilmiştir.

Örnek 2.7.3. *$Y = \mathbb{R}^2$, $C = \mathbb{R}^2_+$, $X = \{1,2\}$, $A = [1,2] \times \{1\}$, $B = \left\{\left(\frac{3}{2}, 2\right)\right\}$, $F : X \rightrightarrows Y$ ve $F(1) = A$, $F(2) = B$ olsun.*

$$(s - SOP) \begin{cases} \text{maks } F(x) \\ x \in X \end{cases}$$

problemini göz önüne alalım.



Şekil 2.13: $F(1) = A = [1,2] \times \{1\}$ *ve* $F(2) = B = \left\{\left(\frac{3}{2}, 2\right)\right\}$ *kümeleri*

Şekil 2.13'den de görülebileceği gibi $A \not\preceq^s_C B$ olduğundan A, $\{A, B\}$ ailesinin bir s-maksimali olur. Dolayısıyla 1 problemin bir s-maksimal çözümüdür.

Benzer şekilde $B \not\preceq^s_C A$ olduğundan B, $\{A, B\}$ ailesinin bir s-maksimali olur. Dolayısıyla 2 de problemin bir s-maksimal çözümüdür.

O halde problemin s-maksimal çözümleri 1 ve 2 olur.

$e = (-1,-1) \in -int(C)$ alalım.

$$v_e(F(1)) = \left(-G^\ell_e(\{0\}, F(1)), G^u_e(F(1), \{0\}\right) = (1,1)$$

ve

$$v_e(F(2)) = \left(-G^\ell_e(\{0\}, F(2)), G^u_e(F(2), \{0\})\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \text{'dir.}$$

$v_e(F(1)) \leq_{\mathbb{R}^2_+} v_e(F(2))$ olduğundan

$$(VOP_v^s)\begin{cases} \text{maks } v_e(F(x)) \\ x \in X \end{cases}$$

probleminin güçlü çözümü 2'dir. Yani 1, $(s-SOP)$ probleminin çözümü olur fakat (VOP_v^s) probleminin güçlü çözümü olmaz.

Teorem 2.7.4. *$\mathbb{R}^2$ uzayı $\mathbb{R}^2_+$ ile kısmi sıralı, $F : X \rightrightarrows Y$ küme değerli dönüşümü $\mp C$-kapalı, $\mp C$-sınırlı değerli ve her $x, y \in X$ için $F(x) \prec^s_C F(y)$ veya $F(y) \prec^s_C F(x)$ olsun. $x_0 \in X$, $(s-SOP)$'nin bir zayıf s-maksimal (zayıf s-minimal) çözümü ise*

$$(VOP_v^s)\begin{cases} \text{maks } (\text{min}) v_e(F(x)) \\ x \in X \end{cases}$$

probleminin de bir güçlü çözümü olur.

Kanıt. x_0, $(s-SOP)$'nin bir zayıf s-maksimal çözümü ve $x \in X \setminus \{x_0\}$ olsun. Her $x, y \in X$ için $F(x) \prec^s_C F(y)$ veya $F(y) \prec^s_C F(x)$ olduğundan $F(x_0) \prec^s_C F(x)$ veya $F(x) \prec^s_C F(x_0)$ olur. $F(x_0) \prec^s_C F(x)$ olsun. x_0, zayıf s-maksimal çözüm olduğundan $F(x) \prec^s_C F(x_0)$ elde edilir. $x \in X \setminus \{x_0\}$ keyfi bir eleman olduğundan $\forall x \in X \setminus \{x_0\}$ için $F(x) \prec^s_C F(x_0)$ olur. $v_e(\cdot)$ fonksiyonu $\mathcal{P}^0_{\mp C}(Y)$ ailesi üzerinde s-artan olduğundan $\forall x \in X$ için

$$v_e(F(x)) \leq_{\mathbb{R}^2_+} v_e(F(x_0))$$

elde edilir. Böylece x_0, (VOP_v^s) problemin bir güçlü çözümü olur. □

Teorem 2.7.5. *$\mathbb{R}^2$ uzayı $\mathbb{R}^2_+$ ile kısmi sıralı, $F : X \rightrightarrows Y$ küme değerli dönüşümü $\mp C$-kompakt değerli ve her $x, y \in X$ için $F(x) \prec^s_C F(y)$ veya $F(y) \prec^s_C F(x)$ olsun. $x_0 \in X$, $(s-SOP)$'nin bir zayıf s-maksimal (zayıf s-minimal) çözümü ise*

$$(VOP_v^s)\begin{cases} \text{maks } (\text{min}) v_e(F(x)) \\ x \in X \end{cases}$$

probleminin de bir kesin çözümü olur.

Kanıt. x_0, $(s-SOP)$'nin bir zayıf s-maksimal çözümü ve $x \in X \setminus \{x_0\}$ olsun. Her $x, y \in X$ için $F(x) \prec_C^s F(y)$ veya $F(y) \prec_C^s F(x)$ olduğundan $F(x_0) \prec_C^s F(x)$ veya $F(x) \prec_C^s F(x_0)$ olur. $F(x_0) \prec_C^s F(x)$ olsun. x_0, zayıf s-maksimal çözüm olduğundan $F(x) \prec_C^s F(x_0)$ elde edilir. $x \in X \setminus \{x_0\}$ keyfi bir eleman olduğundan $\forall x \in X \setminus \{x_0\}$ için $F(x) \prec_C^s F(x_0)$ elde edilir. $v_e(\cdot)$ fonksiyonu $\mp C$-kompakt kümeler ailesi üzerinde kesin s-artan olduğundan $\forall x \in X \setminus \{x_0\}$ için

$$v_e(F(x)) <_{\mathbb{R}^2_+} v_e(F(x_0))$$

bulunur. Dolayısıyla $x \neq x_0$ için

$$v_e(F(x)) <_{\mathbb{R}^2_+} v_e(F(x_0))$$

olacak şekilde $x \in X \setminus \{x_0\}$ yoktur. Böylece x_0, (VOP_v^s)'nin kesin çözümüdür. □

Teorem 2.7.6. *$\mathbb{R}^2$ uzayı $\mathbb{R}^2_+$ ile kısmi sıralı, $F : X \rightrightarrows Y$ küme değerli dönüşümü $\mp C$-kapalı, $\mp C$-sınırlı değerli ve $\forall x, y \in X$ ve $x \neq y$ için $v_e(F(x)) \neq v_e(F(y))$ olsun. $x_0 \in X$, (VOP_v^s) probleminin bir maksimal (minimal) çözümü ise $(s-SOP)$ probleminin de bir s-maksimal (s-minimal) çözümü olur.*

Kanıt. x_0, (VOP_v^s) probleminin bir maksimal çözümü olsun. Bu durumda $F(x) \notin [F(x_0)]^s$ olan $\forall x \in X$ için

$$v_e(F(x_0)) \not\leq_{\mathbb{R}^2_+} v_e(F(x))$$

olur. $v_e(\cdot)$ fonksiyonu s-azalan olduğundan

$$G_e^\ell(\{0\}, F(x)) \not\leq G_e^\ell(\{0\}, F(x_0))$$

veya

$$G_e^u(F(x_0), \{0\}) \not\leq G_e^u(F(x), \{0\})$$

elde edilir. $G_e^\ell(\{0\}, \cdot)$ ℓ-azalan olduğundan

$$F(x_0) \not\preceq_C^\ell F(x) \tag{2.31}$$

veya $G_e^u(\cdot, \{0\})$ u-artan olduğundan

$$F(x_0) \not\preceq_C^u F(x) \tag{2.32}$$

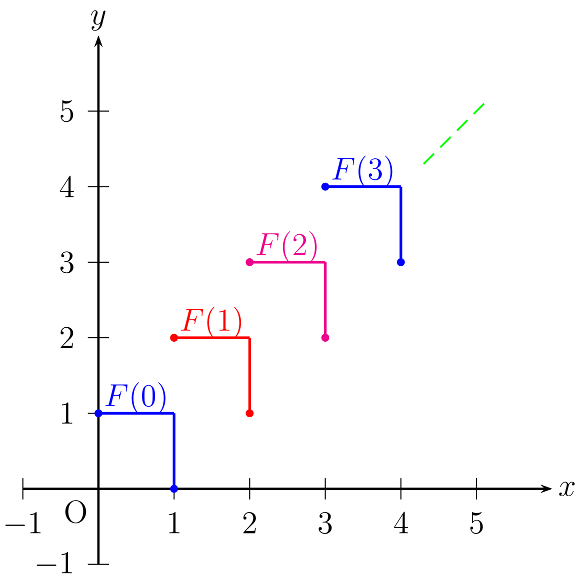
olur. O halde $F(x) \notin [F(x_0)]^s$ olan $\forall x \in X$ için $F(x_0) \not\preceq_C^s F(x)$ elde edilir. Böylece x_0, $(s-SOP)$ probleminin bir s-maksimal çözümü olur. □

Sıradaki örneklerde, vektörizasyon ile çözülen $(s-SOP)$ problemleri verilmiştir.

Örnek 2.7.7. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$, $C = \mathbb{R}^2_+$, $F : \mathbb{N} \rightrightarrows \mathbb{R}^2$ *küme değerli dönüşümü* $A = ([0,1] \times \{1\}) \cup (\{1\} \times [0,1])$ *olmak üzere,* $F(x) = A + \{(x, x)\}$ *şeklinde tanımlansın.*

$$(s-SOP) \begin{cases} \min F(x) \\ x \in \mathbb{N} \end{cases}$$

problemini göz önüne alalım. F'nin bazı görüntü kümeleri Şekil 2.14 de gösterilmiştir.



Şekil 2.14: *Örnek 2.7.7'deki F küme değerli dönüşümünün görüntü ailelerinin bazı elemanları*

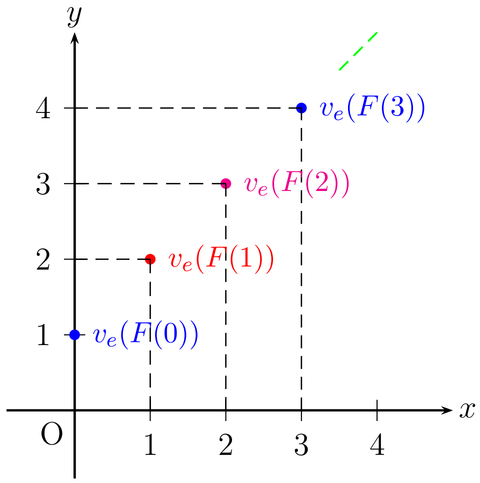
$e \in (-1, -1)$ olmak üzere

$$(VOP_v^s) \begin{cases} \min v_e(F(x)) \\ x \in \mathbb{N} \end{cases}$$

probleminin çözümü araştırılsın. İlk olarak $v_e(F(x))$ *hesaplanırsa*

$$v_e(F(x)) = \big(-G_e^\ell(\{0\}, F(x)), G_e^u(F(x), \{0\})\big) = (x, x+1)$$

bulunur.



Şekil 2.15: *Örnek 2.7.7'deki* $v_e(F(x))$ *vektörizasyon fonksiyonunun bazı görüntüleri*

Şekil 2.15'den de görülebileceği gibi $\forall x, y \in \mathbb{N}$ *ve* $x \neq y$ *için* $v_e(F(x)) \neq v_e(F(y))$*'dir. Ek olarak* $v_e(F(x)) \leq_{\mathbb{R}^2_+} v_e(F(0))$ *olacak şekilde bir* $x \in \mathbb{N}$ *yoktur. Böylece 0,* (VOP_v^s)*'nin bir çözümüdür. Dolayısıyla Teorem 2.7.6'dan 0* $(s-SOP)$*'nin de bir çözümüdür.*

Örnek 2.7.8 de Jahn [37] tarafından tanımlanan $(s-SOP)$ probleminin çözümü bu çalışmada elde edilen sonuçlar yardımıyla bulunmuştur. Böylece Örnek 2.7.8 doğrusal yaklaşımlar ile elde edilen çözümlerin bu çalışmada verilen Gerstewitz yaklaşımıyla da çözülebileceğine dair bir örnektir.

Örnek 2.7.8. $Y = \mathbb{R}^2$, $C = \mathbb{R}^2_+$ *ve* $F : [-1,1] \rightrightarrows Y$ *küme değerli dönüşümü her* $x \in [-1,1]$ *için*

$$F(x) := \big\{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (y_1 - 2x^2)^2 + (y_2 - 2x^2)^2 \leq (x^2+1)^2\big\}$$

şeklinde tanımlansın.

$$(s-SOP)\begin{cases} \min F(x) \\ x \in [-1,1] \end{cases}$$

problemi göz önüne alınsın. Her $x \in [-1,1]$ *için* $F(x) = F(-x)$ *olduğundan*

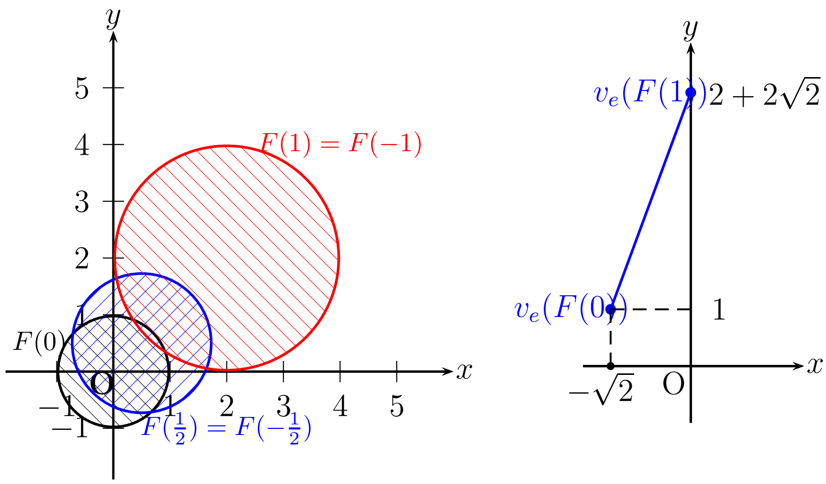
$$(s-SOP)\begin{cases} \min F(x) \\ x \in [0,1] \end{cases}$$

problemine dönüşür. $e = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ *olsun.*

$$(VOP_v^s)\begin{cases} \min v_e(F(x)) \\ x \in [0,1] \end{cases}$$

probleminin çözümü araştırılsın.

Şekil 2.16'dan da görülebileceği gibi $F : X \rightrightarrows Y$ $\mp C$*-kapalı,* $\mp C$*-sınırlı değerli ve* $x \neq y$ *olan her* $x, y \in [0,1]$ *için* $v_e(F(x)) \neq v_e(F(y))$*'dir.*



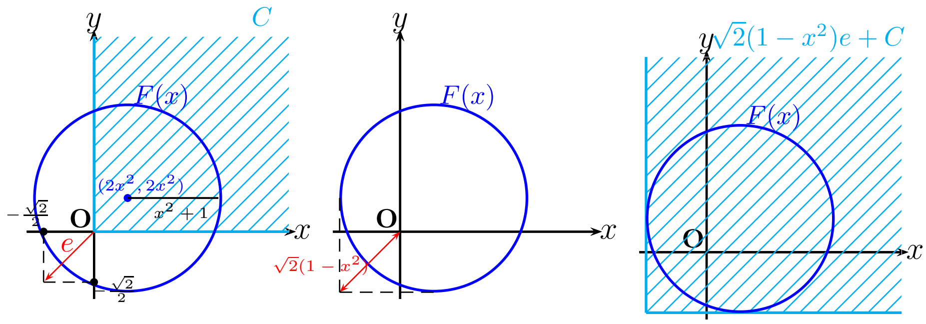
Şekil 2.16: *Örnek 2.7.8 de tanımlanan* F *küme değerli dönüşümünün bazı görüntü kümeleri ve* $v_e(F(x))$*'in görüntü kümesi*

Her $x \in [0,1]$ *için* $v_e(F(x))$ *değeri bulunmalıdır. O halde her* $x \in [0,1]$ *için* $G_e^\ell(\{0\}, F(x))$ *ve* $G_e^u(F(x), \{0\})$ *değerleri hesaplanmalıdır.*

$G_e^\ell(\{0\}, F(x))$ *değerini hesaplamak için*

$$G_e^\ell(\{0\}, F(x)) = \min\{t \in \mathbb{R} \mid F(x) \subset te + C\}$$

formülü kullanılacaktır. Şekil 2.17'den de görülebileceği gibi bu değer $F(x)$*'in merkezinin* (x^2-1, x^2-1) *noktasına uzaklığından merkezin orjine olan uzaklığının çıkarılması ile elde edilir. Böylece* $G_e^\ell(\{0\}, F(x)) = \sqrt{2}(1-x^2)$ *bulunur.*

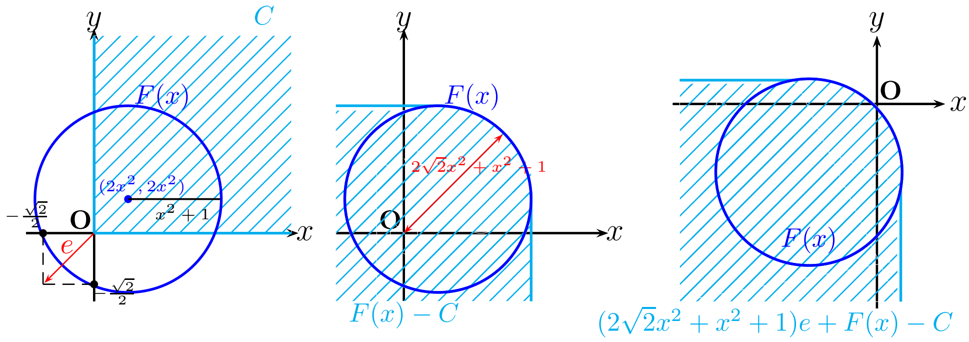


Şekil 2.17: *Örnek 2.7.8'deki* $G_e^{\ell}(\{0\}, F(x))$ *'nin geometrik olarak hesaplanması*

$G_e^u(F(x), \{0\})$ *'ı hesaplamak için*

$$G_e^u(F(x), \{0\}) = \text{maks}\{t \in \mathbb{R} \mid 0 \in te + F(x) - C\}$$

formülü kullanılacaktır. Şekil 2.18'den de görülebileceği gibi bu değer $F(x)$ *'in yarıçapına* $F(x)$ *'in merkezinin orjine olan uzaklığının eklenmesi ile elde edilir. Böylece* $G_e^u(F(x), \{0\}) = 2\sqrt{2}x^2 + x^2 + 1$ *bulunur.*



Şekil 2.18: *Örnek 2.7.8'deki* $G_e^u(F(x), \{0\})$ *'nun geometrik olarak hesaplanması*

Sonuç olarak

$$\begin{aligned} v_e(F(x)) &= \left(-G_e^{\ell}(\{0\}, F(x)), G_e^u(F(x), \{0\})\right) \\ &= \left(\sqrt{2}(x^2-1), 2\sqrt{2}x^2 + x^2 + 1\right) \end{aligned} \tag{2.33}$$

elde edilir.

$v_e(F(x)) \leq_{\mathbb{R}^2_+} v_e(F(0))$ *olacak şekilde bir* $x \in (0,1]$ *olmadığından* $x_0 = 0$ (VOP_v^s) *'nin bir minimal çözümüdür. Böylece Teorem 2.7.6'dan* $x_0 = 0$ $(s{-}SOP)$ *'nin bir çözümü olur.*

3. KÜMELER AİLESİ ÜZERİNDE KISMİ SIRALAMA BAĞINTILARI

Küme değerli optimizasyon problemlerini küme yaklaşımına göre çözebilmek için kümeler ailesi üzerinde sıralama bağıntılarına ihtiyaç vardır. Bunun için kümeler ailesi üzerinde birçok sıralama bağıntısı tanımlanmıştır [25, 42]. Ancak bu sıralama bağıntılarının hiçbiri kısmi sıralama bağıntısı değildir.

Bu bölümde kümeler üzerinde bilinen sıralama bağıntılarından farklı olarak Minkowski (Pontryagin) farkı kullanılarak yeni sıralama bağıntıları tanımlanmıştır. Sıralama konisi konveks, sivri ve uzayın sıfırını bulunduruyorsa tanımlanan sıralama bağıntılarının boştan farklı sınırlı kümeler ailesi üzerinde birer kısmi sıralama bağıntısı olduğu gösterilmiştir. Bu sıralama bağıntıları ile bilinen sıralama bağıntıları arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Daha önce vektörler için kısmi sıralama bağıntıları ile verilen etkin eleman tanımları, kümeler ailesi için bu kısmi sıralama bağıntıları kullanılarak düzenlenmiştir. Bu sıralama bağıntıları ile bir küme değerli problemin çözümleri bu etkin küme tanımlarına göre bir örnek üzerinde incelenmiştir. Son olarak, küme değerli optimizasyon problemlerinin küme yaklaşımına göre çözümleri ile vektör yaklaşımına göre çözümleri arasındaki ilişkiler araştırılmıştır.

3.1. Bir Küme Ailesi Üzerinde Sıralama Bağıntıları

Yeni sıralama bağıntıları aşağıda tanımı ve özellikleri verilen Minkowski fark yardımıyla oluşturulacaktır.

Tanım 3.1.1. *[43] $A, B \in \mathcal{P}_0(Y)$ olsun.*

$$A \dot{-} B = \{x \ \mid x + B \subset A\} = \bigcap_{b \in B} (A - b)$$

kümesine A ve B kümelerinin Minkowski (Pontryagin) farkı denir.

Kümelerin Minkowski farkı aşağıdaki özelliklere sahiptir. Bu konu ile ilgili daha fazla bilgi [43, 44] çalışmalarında bulunabilir.

Önerme 3.1.2. *[44] $A, B \in \mathcal{P}_0(Y)$ ve $k \in Y$ olsun. Bu durumda,*

(i) $(k + A)\dot{-}B = k + (A\dot{-}B)$,

(ii) $A\dot{-}(k + B) = -k + (A\dot{-}B)$,

(iii) $(A\dot{-}B) - k = A\dot{-}B - k$,

(iv) *A kapalı ise $A\dot{-}B$ de kapalıdır.*

Önerme 3.1.3. *$A \in \mathcal{P}_0(Y)$ sınırlı ise $A\dot{-}A = \{0_Y\}$ olur.*

Kanıt. $A \in \mathcal{P}_0(Y)$ sınırlı olsun. $0_Y + A \subset A$ olduğundan $0_Y \in A\dot{-}A$ olur. Kabul edelim ki $x \neq 0_Y$ ve $x \in A\dot{-}A$ yani $x + A \subset A$ olsun. Sabit bir $a \in A$ için $x + a = b_1$ olacak şekilde $b_1 \in A$ vardır. $b_1 \in A$ olduğundan $b_1 + x = b_2$ olacak şekilde $b_2 \in A$ vardır. Bu şekilde devam edilirse her $n \in \mathbb{N}$ için $b_{n-1} + x = b_n$ olacak şekilde $b_n \in A$ vardır. Böylece $b_n = nx + a$ olur. O halde

$$\lim_{n\to\infty} ||nx + a|| = \infty$$

olur. Bu ise A'nın sınırlı olması ile çelişir. Dolayısıyla $A\dot{-}A = \{0_Y\}$ elde edilir. □

Tanım 3.1.4. *$A, B, K \in \mathcal{P}_0(Y)$ olsun.*

(i) *$(B\dot{-}A) \cap K \neq \emptyset$ ise m_1 bağıntısına göre A, B'den önce gelir denir ve $A \preceq_K^{m_1} B$ ile gösterilir. Bu durum $A \preceq_K^{m_1} B \Leftrightarrow (B\dot{-}A) \cap K \neq \emptyset$ şeklinde de ifade edilir.*

(ii) *$(A\dot{-}B) \cap (-K) \neq \emptyset$ ise m_2 bağıntısına göre A, B'den önce gelir denir ve $A \preceq_K^{m_2} B$ ile gösterilir. Bu durum $A \preceq_K^{m_2} B \Leftrightarrow (A\dot{-}B) \cap (-K) \neq \emptyset$ şeklinde de ifade edilir.*

$A, B \in \mathcal{P}_0(Y)$ sınırlı, $A\dot{-}B \neq \emptyset$ ve $B\dot{-}A \neq \emptyset$ ise $A \preceq_K^{m_1} B$ olması için gerek ve yeter koşul $A \preceq_K^{m_2} B$ olmasıdır. Dolayısıyla $A\dot{-}B \neq \emptyset$ ve $B\dot{-}A \neq \emptyset$ olması durumunda $\preceq_K^{m_1}$ ve $\preceq_K^{m_2}$ bağıntıları denktir.

Aşağıda bu bağıntıların özellikleri verilmiştir.

Önerme 3.1.5. *$\preceq_K^{m_1}$ bağıntısı toplama ile uyumludur.*

Kanıt. $A, B, D \in \mathcal{P}_0(Y)$ ve $A \preceq_K^{m_1} B$ olsun. $A \preceq_K^{m_1} B$ olduğundan $(B \dot{-} A) \cap K \neq \emptyset$ olur. O halde $x' \in B \dot{-} A$ olacak şekilde $x' \in K$ vardır. Böylece $x' + A \subset B$'dir. Buradan $x' + A + D \subset B + D$ yani $x' \in (B + D) \dot{-} (A + D)$ olur. $x' \in K$ olduğundan

$$[(B + D) \dot{-} (A + D)] \cap K \neq \emptyset$$

elde edilir ve $A + D \preceq_K^{m_1} B + D$ bulunur. □

Önerme 3.1.6. $\preceq_K^{m_1}$ *bağıntısının skaler çarpma ile uyumlu olması için gerek ve yeter koşul* K*'nın koni olmasıdır.*

Kanıt. ($\Longrightarrow$) $\preceq_K^{m_1}$ bağıntısı skaler çarpma ile uyumlu, $k \in K$ ve $\lambda > 0$ olsun. $k \in \{k\} \dot{-} \{0_Y\}$ olduğundan $\{0_Y\} \preceq_K^{m_1} \{k\}$'dir. $\preceq_K^{m_1}$ bağıntısı skaler çarpma ile uyumlu olduğundan $\{0_Y\} \preceq_K^{m_1} \{\lambda k\}$ elde edilir. O halde $(\{\lambda k\} \dot{-} \{0_Y\}) \cap K \neq \emptyset$'dir. Böylece $\lambda k \in K$ elde edilir. Dolayısıyla K konidir.

($\Longleftarrow$) $A \preceq_K^{m_1} B$ ve K koni olsun. $\forall \lambda > 0$ için $\lambda A \preceq_K^{m_1} \lambda B$ olduğunu göstermeliyiz. $A \preceq_K^{m_1} B$ olduğundan $k \in B \dot{-} A$ yani $k + A \subset B$ olacak şekilde en az bir $k \in K$ vardır. O halde $\lambda k + \lambda A \subset \lambda B$ ve $\lambda k \in K$ olur. Böylece $(\lambda B \dot{-} \lambda A) \cap K \neq \emptyset$ yani $\lambda A \preceq_K^{m_1} \lambda B$ elde edilir. Böylece $\preceq_K^{m_1}$ bağıntısı skaler çarpma ile uyumlu olur.

□

Önerme 3.1.7. $\preceq_K^{m_1}$ *bağıntısının yansımalı olması için gerek ve yeter koşul* $0_Y \in K$ *olmasıdır.*

Kanıt. ($\Longrightarrow$) $\preceq_K^{m_1}$ yansımalı olsun. O halde $\forall A \in \mathcal{P}_0(Y)$ için $A \preceq_K^{m_1} A$ olur. Özel olarak $A = \{a\}$ alınırsa

$$(\{a\} \dot{-} \{a\}) \cap K = \{0_Y\} \cap K \neq \emptyset$$

bulunur. Böylece $\{0_Y\} \cap K \neq \emptyset$ olduğundan $0_Y \in K$ elde edilir.

($\Longleftarrow$) $0_Y \in K$ olsun. $\forall A \in \mathcal{P}_0(Y)$ için $0 \in A \dot{-} A$'dır. Böylece

$$(A \dot{-} A) \cap K \neq \emptyset$$

elde edilir. Dolayısıyla $A \preceq_K^{m_1} A$ olur. Yani $\preceq_K^{m_1}$ yansımalıdır. □

Önerme 3.1.8. *$K \subset Y$ bir koni olsun. Bu durumda $\preceq_K^{m_1}$ bağıntısının geçişmeli olması için gerek ve yeter koşul K'nın konveks olmasıdır.*

Kanıt. ($\Longrightarrow$) $\preceq_K^{m_1}$ geçişmeli olsun. K koni olduğundan $K + K \subset K$ olduğunu göstermek yeterlidir. $a, b \in K$ olsun.

$$a \in K \Longrightarrow \{0_Y\} \preceq_K^{m_1} \{a\} \tag{3.1}$$

ve

$$b \in K \Longrightarrow \{0_Y\} \preceq_K^{m_1} \{b\} \tag{3.2}$$

olur. $\preceq_K^{m_1}$ toplama ile uyumlu olduğundan (5.7)'den

$$\{a\} \preceq_K^{m_1} \{a+b\} \tag{3.3}$$

olur. $\preceq_K^{m_1}$ geçişmeli olduğundan (3.1) ve (3.3)'den

$$\{0_Y\} \preceq_K^{m_1} \{a\},\ \{a\} \preceq_K^{m_1} \{a+b\} \Longrightarrow \{0_Y\} \preceq_K^{m_1} \{a+b\}$$

bulunur. Böylece $(\{a+b\} \dot{-} \{0_Y\}) \cap K \neq \emptyset$ olur. O halde $a + b \in K$ elde edilir. Dolayısıyla $K + K \subset K$ bulunur.

($\Longleftarrow$) K konveks, $A \preceq_K^{m_1} B$ ve $B \preceq_K^{m_1} D$ olsun. $A \preceq_K^{m_1} D$ olduğu gösterilmelidir. $A \preceq_K^{m_1} B$ olduğundan $(B \dot{-} A) \cap K \neq \emptyset$ olur. Yani $\exists\ x_1 \in K$ için

$$x_1 + A \subset B \tag{3.4}$$

olur. $B \preceq_K^{m_1} D$ olduğundan $(D \dot{-} B) \cap K \neq \emptyset$ olur. Yani $\exists\ x_2 \in K$ için

$$x_2 + B \subset D \tag{3.5}$$

olur. (3.4) ve (3.5)'den $x_1 + x_2 + A \subset x_2 + B \subset D$'dir. $x_1 + x_2 + A \subset D$ ve $x_1 + x_2 \in K$ olduğundan $(D \dot{-} A) \cap K \neq \emptyset$ ve $A \preceq_K^{m_1} D$ elde edilir. O halde $\preceq_K^{m_1}$ geçişmelidir. $\square$

Sonuç 3.1.9. *$K \in \mathcal{P}_0(Y)$ konveks koni ve $0_Y \in K$ olduğunda elde edilen $\preceq_K^{m_1}$ bağıntısı $\mathcal{P}_0(Y)$ üzerinde bir önsıralama bağıntısıdır.*

Y'nin boştan farklı, sınırlı kümelerinin ailesi $\mathcal{B}^*(Y)$ ile gösterilsin, yani

$$\mathcal{B}^*(Y) := \{A \in \mathcal{P}_0(Y) \mid A \text{ sınırlı}\}$$

olsun.

Önerme 3.1.10. *$K \in \mathcal{P}_0(Y)$ bir koni olsun. Bu durumda $\preceq_K^{m_1}$ bağıntısının $\mathcal{B}^*(Y)$ ailesi üzerinde ters simetrik olması için gerek ve yeter koşul K'nın sivri olmasıdır.*

Kanıt. ($\Longrightarrow$) $\preceq_K^{m_1}$ ters simetrik, $x \in K \cap (-K)$ ve $A \in \mathcal{B}^*(Y)$ olsun.

$$B = x + A \tag{3.6}$$

olan $B \in \mathcal{B}^*(Y)$ için $A \preceq_K^{m_1} B$ ve $B \preceq_K^{m_1} A$ olur. $\preceq_K^{m_1}$ bağıntısı ters simetrik olduğundan $A = B$'dir. Dolayısıyla (3.6)'dan $x = 0_Y$ olduğu açıktır. O halde $K \cap (-K) \subset \{0_Y\}$ elde edilir.

($\Longleftarrow$) K sivri, $A \preceq_K^{m_1} B$ ve $B \preceq_K^{m_1} A$ olsun. $A \preceq_K^{m_1} B$ olduğundan

$$x_1 + A \subset B \tag{3.7}$$

olacak şekilde bir $x_1 \in K$ vardır. Benzer şekilde $B \preceq_K^{m_1} A$ olduğundan

$$x_2 + B \subset A \tag{3.8}$$

olacak şekilde bir $x_2 \in K$ vardır. Böylece $B \subset A - x_2$ ve $x_1 + A \subset B \subset A - x_2$'dir. Dolayısıyla $x_1 + x_2 \in A \dot{-} A$ olur. Önerme 3.1.3'den $A \dot{-} A = \{0_Y\}$ olur. O zaman $x_1 = -x_2 \in -K$ olur. O halde K sivri olduğundan $x_1 = x_2 = 0_Y$ bulunur. (3.7) ve (3.8)'den $A \subset B$ ve $B \subset A$ olduğundan $A = B$ elde edilir. □

Bu çalışmadaki asıl amaçlardan biri $\mathcal{B}^*(Y)$ ailesi üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı oluşturmaktı. Yukarıdaki önerme $\preceq_K^{m_1}$ bağıntısının ters simetriklik özelliğini sağlamaktadır. Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.11. *$K \in \mathcal{P}_0(Y)$ konveks, sivri koni ve $0_Y \in K$ olduğunda elde edilen $\preceq_K^{m_1}$ bağıntısı $\mathcal{B}^*(Y)$ ailesi üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısıdır.*

$\preceq_K^{m_1}$ bağıntısı için elde edilen özellikler benzer şekilde $\preceq_K^{m_2}$ bağıntısı için de elde edilir.

Önerme 3.1.12. *$K \in \mathcal{P}_0(Y)$ olsun. $\preceq_K^{m_2}$ bağıntısı aşağıdaki özelliklere sahiptir:*

(i) $\preceq_K^{m_2}$ bağıntısı toplama ile uyumludur.

(ii) $\preceq_K^{m_2}$ bağıntısının skaler çarpma ile uyumlu olması için gerek ve yeter koşul K'nın koni olmasıdır.

(iii) $\preceq_K^{m_2}$ bağıntısının yansımalı olması için gerek ve yeter koşul $0_Y \in K$ olmasıdır.

(iv) K bir koni olsun. $\preceq_K^{m_2}$ bağıntısının geçişmeli olması için gerek ve yeter koşul K'nın konveks olmasıdır.

(v) K bir koni olsun. $\preceq_K^{m_2}$ bağıntısının $\mathcal{B}^*(Y)$ ailesi üzerinde ters simetrik olması için gerek ve yeter koşul K'nın sivri olmasıdır.

Sonuç 3.1.13. *$K \in \mathcal{P}_0(Y)$ konveks koni ve $0_Y \in K$ olduğunda elde edilen $\preceq_K^{m_2}$ bağıntısı $\mathcal{P}_0(Y)$ üzerinde bir önsıralama bağıntısıdır.*

Sonuç 3.1.14. *$K \in \mathcal{P}_0(Y)$ konveks, sivri koni ve $0_Y \in K$ olduğunda elde edilen $\preceq_K^{m_2}$ bağıntısı $\mathcal{B}^*(Y)$ ailesi üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısıdır.*

Uyarı 3.1.15. *A ve B kümelerini tek nokta kümesi ve K koni alındığında $\preceq_K^{m_1}$ ve $\preceq_K^{m_2}$ bağıntıları Y üzerindeki $\leq_K$ bağıntısına indirgenir. Dolayısıyla $\preceq_K^{m_1}$ ve $\preceq_K^{m_2}$ bağıntıları Y üzerinde bilinen $\leq_K$ sıralama bağıntısının kümeler ailesi üzerine bir genişlemesidir.*

Tanım 3.1.4'de K kümesi yerine C konisi alındığında elde edilen $\preceq_K^{m_1}$ ve $\preceq_K^{m_2}$ bağıntıları özel olarak $\preceq_C^{m_1}$ ve $\preceq_C^{m_2}$ ile gösterilecektir.

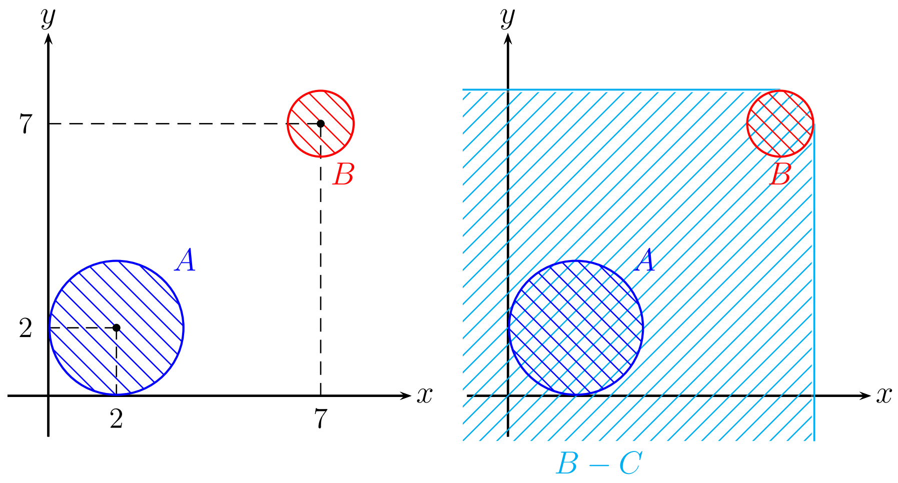
$\preceq_C^{m_1}$ ve $\preceq_C^{u}$ sıralama bağıntıları arasında aşağıdaki gibi bir ilişki vardır.

Önerme 3.1.16. *$A, B \in \mathcal{P}_0(Y)$ olsun. O halde $A \preceq_C^{m_1} B$ ise $A \preceq_C^{u} B$'dir.*

Kanıt. $A \preceq_C^{m_1} B$ olsun. Bu durumda $(B \dot{-} A) \cap C \neq \emptyset$'dir. O halde $x + A \subset B$ olacak şekilde en az bir $x \in C$ vardır. Böylece $\forall a \in A$ için $a + x = b_a$ olacak şekilde en az bir $b_a \in B$ vardır. O halde $\forall a \in A$ ve $\exists b_a \in B$ için $a = b_a - x$ elde edilir. Buradan da $A \subset B - x \subset B - C$ olur. Dolayısıyla $A \preceq_C^{u} B$ elde edilir. □

$A \preceq_C^u B$ ise $A \preceq_C^{m_1} B$ olmak zorunda değildir. Aşağıda buna ilişkin bir örnek verilmiştir.

Örnek 3.1.17. *$Y = \mathbb{R}^2$, $C = \mathbb{R}^2_+$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 4\}$ ve $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-7)^2 + (y-7)^2 \leq 1\}$ olsun.*



Şekil 3.1: $A = \{(x,y) \mid (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 4\}$, $B = \{(x,y) \mid (x-7)^2 + (y-7)^2 \leq 1\}$ *ve $B - C$ kümeleri*

Şekil 3.1'den de görülebileceği gibi $A \subset B - C$ olduğundan $A \preceq_C^u B$ olur. $x + A \subset B$ olacak şekilde $x \in \mathbb{R}^2$ yoktur. O halde $(B \dot{-} A) \cap C = \emptyset$ olur ve $A \npreceq_C^{m_1} B$ elde edilir.

Önerme 3.1.18. *$A, B \in \mathcal{P}_0(Y)$ olsun. O halde $A \preceq_C^{m_2} B$ ise $A \preceq_C^{\ell} B$'dir.*

Kanıt. Önerme 3.1.16'nin kanıtına benzer şekilde elde edilir. □

Aşağıda $\prec_C^{m_1}$ ve $\prec_C^{m_2}$ bağıntıları tanımlanmış ve bunların özellikleri incelenmiştir.

Tanım 3.1.19. *$A, B \in \mathcal{P}_0(Y)$, $C \subset Y$ konveks, sivri koni ve $int(C) \neq \emptyset$ olsun.*

(i) $(B \dot{-} A) \cap (int(C)) \neq \emptyset$ ise m_1 bağıntısına göre A, B'den kesin önce gelir denir ve $A \prec_C^{m_1} B$ ile gösterilir. Bu durum $A \prec_C^{m_1} B \Leftrightarrow (B \dot{-} A) \cap (int(C)) \neq \emptyset$ şeklinde de ifade edilir.

(ii) $(A \dot{-} B) \cap (int(-C)) \neq \emptyset$ ise m_2 bağıntısına göre A, B'den kesin önce gelir denir ve $A \prec_C^{m_2} B$ ile gösterilir. Bu durum $A \prec_C^{m_2} B \Leftrightarrow (A \dot{-} B) \cap (int(-C)) \neq \emptyset$ şeklinde de ifade edilir.

Uyarı 3.1.20. *$\sharp \in \{m_1, m_2\}$ olsun. $\prec_C^\sharp$ bağıntısı $\preceq_C^\sharp$ bağıntısını gerektirir. Yani $A \prec_C^\sharp B$ ise $A \preceq_C^\sharp B$ olur. $\sharp = m_1$ için bunun doğru olduğunu gösterilsin. $A \prec_C^{m_1} B$ olsun. O halde $(B \dot{-} A) \cap int(C) \neq \emptyset$'dir. Böylece $(B \dot{-} A) \cap C \neq \emptyset$ olur ve $A \preceq_C^{m_1} B$ elde edilir.*

Önerme 3.1.21. *$\prec_C^{m_1}$ ve $\prec_C^{m_2}$ bağıntıları aşağıdaki özelliklere sahiptir:*

(i) $\prec_C^{m_1}$ ve $\prec_C^{m_2}$ bağıntıları toplama ile uyumludur.

(ii) $\prec_C^{m_1}$ ve $\prec_C^{m_2}$ bağıntıları skaler çarpma ile uyumludur.

Kanıt. Önermenin kanıtı $\prec_C^{m_1}$ bağıntısı için yapılsın. $\prec_C^{m_2}$ bağıntısı için de benzer şekilde elde edilir.

(i) $A, B, D \in \mathcal{P}_0(Y)$ ve $A \prec_C^{m_1} B$ olsun. $A + D \prec_C^{m_1} B + D$ yani $[(B + D) \dot{-} (A + D)] \cap (int(C)) \neq \emptyset$ olduğu gösterilmelidir. $A \prec_C^{m_1} B$ olduğundan $(B \dot{-} A) \cap (int(C)) \neq \emptyset$ olur. O halde $\exists x' \in int(C)$ için $x' \in B \dot{-} A$ olur. $x' \in B \dot{-} A$ ise $x' + A \subset B$'dir. Böylece $x' + A + D \subset B + D$ yani $x' \in (B + D) \dot{-} (A + D)$ olur. $x' \in int(C)$ olduğundan

$$[(B + D) \dot{-} (A + D)] \cap (int(C)) \neq \emptyset$$

elde edilir.

(ii) $A, B \in \mathcal{P}_0(Y)$ ve $A \prec_C^{m_1} B$ olsun. $\forall \lambda > 0$ için $\lambda A \prec_C^{m_1} \lambda B$ olduğu gösterilmelidir. $A \prec_C^{m_1} B$ olduğundan $c \in B \dot{-} A$ olacak şekilde en az bir $c \in int(C)$ vardır. O halde $c + A \subset B$ olur. Böylece $\lambda c + \lambda A \subset \lambda B$ elde edilir. Buradan $\lambda c \in \lambda B \dot{-} \lambda A$ ve C koni olduğundan $\lambda c \in int(C)$'dir. Dolayısıyla $(\lambda B \dot{-} \lambda A) \cap (int(C)) \neq \emptyset$ elde edilir. O halde $\lambda A \prec_C^{m_1} \lambda B$ bulunur.

□

$C \neq Y$ konisi konveks ve sivri olsa bile $\prec_C^{m_1}$ ve $\prec_C^{m_2}$ bağıntıları yansıma özelliğine sahip değildir. Örnek 3.1.22 buna ilişkin bir örnektir.

Örnek 3.1.22. *$A = \{(1, 1)\}$ tek nokta kümesi ve $C = \mathbb{R}^2_+$ olsun. Bu durumda $A \prec_C^{m_1} A$ olması için $(A \dot{-} A) \cap (int(C)) \neq \emptyset$ olmalıdır. Fakat $A \dot{-} A = \{0\}$ olduğundan $\{0\} \cap int(C) = \emptyset$ olur ve $A \not\prec_C^{m_1} A$ elde edilir. Benzer şekilde $(A \dot{-} A) \cap (int(-C)) = \emptyset$ olduğundan $A \not\prec_C^{m_2} A$ elde edilir.*

3.2. $\mathbf{m_1}$ ve $\mathbf{m_2}$ Sıralama Bağıntıları ile Küme Optimizasyonu

Bu kısımda vektör uzayındaki kısmi sıralama bağıntısına göre verilen etkin eleman tanımı kümeler ailesi üzerindeki m_1 ve m_2 kısmi sıralama bağıntılarına göre uyarlanmıştır. $\preceq_C^{m_1}$ bağıntısına göre verilen bir küme değerli optimizasyon probleminin minimal ve zayıf minimal çözümleri örnekler üzerinde araştırılmıştır. Daha sonra da bir küme değerli optimizasyon probleminin bu bağıntılara göre elde edilen çözümleri ile vektör yaklaşımına göre elde edilen çözümleri arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Çalışmanın geri kalan kısmında C konisinin sivri ve konveks olduğu kabul edilecek ve $\sharp \in \{m_1, m_2\}$ olarak alınacaktır.

Bir kümeler ailesinin kısmi sıralama bağıntısına göre minimal, maksimal, zayıf minimal ve zayıf maksimal küme tanımları aşağıda verilmiştir.

Tanım 3.2.1. *$\mathcal{S} \subset \mathcal{B}^*(Y)$ ve $A \in \mathcal{S}$ olsun. Bu durumda*

(i) $B \preceq_C^{\sharp} A$ ve $A \neq B$ olacak şekilde bir $B \in \mathcal{S}$ kümesi yoksa A'ya $\mathcal{S}$ ailesinin bir $\sharp$-minimal elemanı,

(ii) $A \preceq_C^{\sharp} B$ ve $A \neq B$ olacak şekilde bir $B \in \mathcal{S}$ kümesi yoksa A'ya $\mathcal{S}$ ailesinin bir $\sharp$-maksimal elemanı denir.

(iii) $B \prec_C^{\sharp} A$ olacak şekilde bir $B \in \mathcal{S}$ kümesi yoksa A'ya $\mathcal{S}$ ailesinin bir zayıf $\sharp$-minimal elemanı,

(iv) $A \prec_C^{\sharp} B$ olacak şekilde bir $B \in \mathcal{S}$ kümesi yoksa A'ya $\mathcal{S}$ ailesinin bir zayıf $\sharp$-maksimal elemanı denir.

Sıralama bağıntısı önsıralama bağıntısı olsaydı etkin elemanlar iki aşamada bulunurdu. İlk aşamada aday kümeden daha baskın kümeler araştırılır. İkinci aşamada ise aday kümenin de bu kümelerden daha baskın olup olmadığı araştırılır. Tanım 3.2.1'den de görülebileceği gibi kısmi sıralama bağıntılarında ise etkin elemanlar tek aşamada belirlenmektedir.

(SOP)'yi $\preceq_C^{\sharp}$ bağıntısı kullanarak küme optimizasyonuna göre incelediğimiz durumda problemi $(\sharp - SOP)$ ile göstereceğiz. $F(x_0)$, $\mathcal{F}(X)$ ailesinin $\sharp$-minimal ($\sharp$-maksimal) kümesi ise x_0'a $(\sharp - SOP)$ probleminin bir çözümü denir. Benzer şekilde $F(x_0)$, $\mathcal{F}(X)$ ailesinin zayıf $\sharp$-minimal (zayıf $\sharp$-maksimal) kümesi ise x_0'a $(\sharp - SOP)$ probleminin bir zayıf çözümü denir.

Bir küme değerli optimizasyon probleminin küme yaklaşımına göre minimal ve zayıf minimal çözümlerinin nasıl bulunacağı Jahn [37] tarafından tanımlanan bir örnek üzerinde aşağıdaki gibi gösterilmiştir.

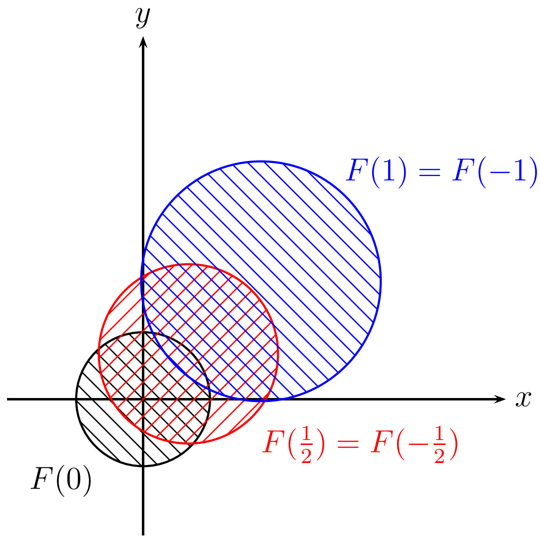
Örnek 3.2.2. *$\mathbb{R}^2$ uzayı $C = \mathbb{R}^2_+$ konisi ile kısmi sıralı, $F : [-1,1] \rightrightarrows \mathbb{R}^2$ küme değerli dönüşümü her $x \in [-1,1]$ için,*

$$F(x) := \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (y_1 - 2x^2)^2 + (y_2 - 2x^2)^2 \leq (x^2+1)^2\}$$

olmak üzere

$$(m_1 - SOP) \begin{cases} \min F(x) \\ x \in [-1,1] \end{cases}$$

küme değerli optimizasyon problemi göz önüne alınsın. F'nin bazı görüntü kümeleri Şekil 3.2 de yer almaktadır.



Şekil 3.2: *Örnek 3.2.2'deki F küme değerli dönüşümünün bazı görüntü kümeleri*

$F(x) \preceq_C^{m_1} F(0)$ ve $F(0) \neq F(x)$ olacak şekilde bir $x \in [-1,1]$ olmadığından $F(0)$, $\mathcal{F}([-1,1])$ ailesinin bir m_1-minimal elemanıdır. Gerçekten en az bir $x \in [-1,1] \backslash \{0\}$ için $F(x) \preceq_C^{m_1} F(0)$ olsaydı $c + F(x) \subset F(0)$ olacak şekilde bir $c \in C$ olmalıydı. Oysa $F(x)$ kümesi $F(0)$'dan daha geniş bir küme olduğundan bu özelliği sağlayan bir c yoktur.

$x \in [-1,1]\backslash\{0\}$ olsun. $[F(x)\dot{-}F(0)] \cap C \neq \emptyset$ olduğundan $F(0) \preceq_C^{m_1} F(x)$ olur ve $F(0) \neq F(x)$ olduğundan $F(x)$, $\mathcal{F}([-1,1])$ ailesinin bir m_1-minimal elemanı değildir. Böylece $(m_1 - SOP)$ probleminin çözümü 0 olur.

Benzer şekilde $F(x) \prec_C^{m_1} F(0)$ olacak şekilde bir $x \in [-1,1]$ olmadığından $F(0)$, $\mathcal{F}([-1,1])$ ailesinin bir zayıf m_1-minimal elemanıdır. Gerçekten en az bir $x \in [-1,1]\backslash\{0\}$ için $F(x) \prec_C^{m_1} F(0)$ olsaydı $c + F(x) \subset F(0)$ olacak şekilde bir $c \in int(C)$ olmalıydı. Oysa $F(x)$ kümesi $F(0)$'dan daha geniş bir küme olduğundan bu özelliği sağlayan bir c yoktur.

$x \in [-1,1]\backslash\{0\}$ olsun. $[F(x)\dot{-}F(0)] \cap int(C) \neq \emptyset$ olduğundan $F(0) \prec_C^{m_1} F(x)$ olur ve $F(x)$, $\mathcal{F}([-1,1])$ ailesinin bir zayıf m_1-minimal elemanı değildir. Dolayısıyla $(m_1 - SOP)$ probleminin zayıf çözümü 0 olur.

Sıradaki örnek günlük hayatta karşılaşılan bir küme değerli optimizasyon probleminin $\preceq_C^{m_1}$ bağıntısı kullanarak nasıl çözülebileceğini göstermektedir.

Örnek 3.2.3. *Bir kişi 500.000 TL parasını bir yıllığına ABD doları (USD), Euro (EUR) veya İngiliz Sterlini (GBP)'nden birine yatırmak istiyor. 14/09/2017 tarihindeki döviz alış fiyatları ve bir yıl sonraki tahmini değerler Tablo 3.1 de yer almaktadır*[1]*. Buna göre bu kişi yatırım araçlarından hangisiyle en çok kazancı elde eder?*

	USD	EUR	GBP
14/09/2017 tarihdeki Adet Alış Fiyatı (TL)	3,4402	4,1215	4,5782
Bir Yıl Sonraki Tahmini Adet Satış Fiyat Aralığı (TL)	3,14653 - 3,71954	3,50825 - 4,44689	4,05376 - 5,17897

Tablo 3.1: *14/09/2017 tarihindeki cari döviz kuru ve bir yıl sonraki tahmini fiyat aralığı*

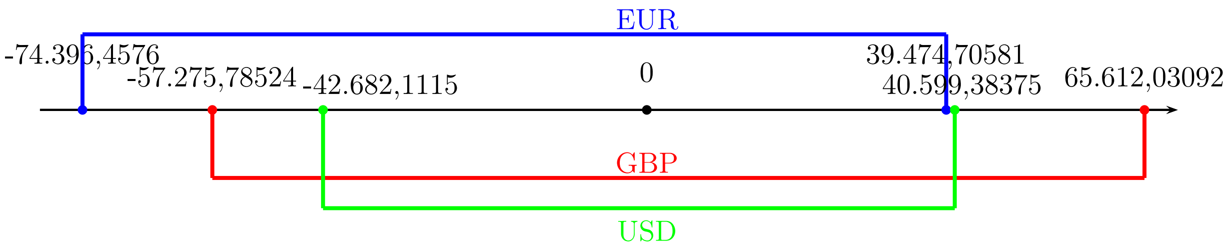
Tablo 3.1'deki verilere göre bir yıl sonraki tahmini kâr-zarar durumu Tablo 3.2 de yer almaktadır.

Sıralama konisi $C = \mathbb{R}_+$ ve $\preceq_C^{m_1}$ bağıntısı göz önüne alınsın. Bu durumda USD ve EUR arasında bir ilişki yoktur. Yani birbirleriyle karşılaştırılamazlar. Şekil 3.3'den

[1]Cari Döviz kuru 14/09/2017 tarihi için Türkiye Cumhuriyeti Merkez Bankası (TCMB)'nın internet adresinden alışmıştır ve bir yıl sonraki döviz kuru fiyat aralığı TCMB'nın internet adresindeki 03/01/2005 - 14/09/2017 tarihleri arasındaki veriler kullanılarak excel'de tahmin programı yardımıyla elde edilmiştir [45].

	USD	EUR	GBP
Bir yıl sonraki tahmini zarar (TL)	42.682,1115	74.396,4576	57.275,78524
Bir Yıl Sonraki Tahmini kâr (TL)	40.599,38375	39.474,70581	65.612,03092

Tablo 3.2: *Bir yıl sonraki tahmini kâr-zarar durumu*



Şekil 3.3: *USD, EUR ve GBP tahmini aralığı*

de görülebileceği gibi $USD \preceq_C^{m_1} GBP$ *ve* $EUR \preceq_C^{m_1} GBP$*'dir. Böylece GBP'den elde edilen tahmini kar miktarı USD ve EUR'dan fazladır. Dolayısıyla yatırımcı GBP döviz kuruna yatırım yaparsa en çok kazancı elde eder.*

Önerme 3.2.4. *Eğer* x_0 $(\sharp - SOP)$ *probleminin bir çözümü ise zayıf çözümüdür.*

Kanıt. $\sharp = m_1$ için

$$(m_1 - SOP) \begin{cases} \min F(x) \\ x \in X \end{cases}$$

problemini göz önüne alalım ve x_0 problemin bir çözümü olsun. Bu durumda $F(x) \preceq_C^{m_1} F(x_0)$ ve $F(x) \neq F(x_0)$ olacak şekilde bir $x \in X$ yoktur. Böylece $(F(x_0)\dot{-}F(x)) \cap C = \emptyset$ olur ve buradan $(F(x_0)\dot{-}F(x)) \cap int(C) = \emptyset$ elde edilir. O halde $F(x) \prec_C^{m_1} F(x_0)$ olacak şekilde de bir $x \in S$ yoktur. Dolayısıyla x_0 $(m_1 - SOP)$ probleminin bir zayıf çözümü olur.

$\sharp = m_2$ olduğu durumda kanıt benzer şekilde yapılır. □

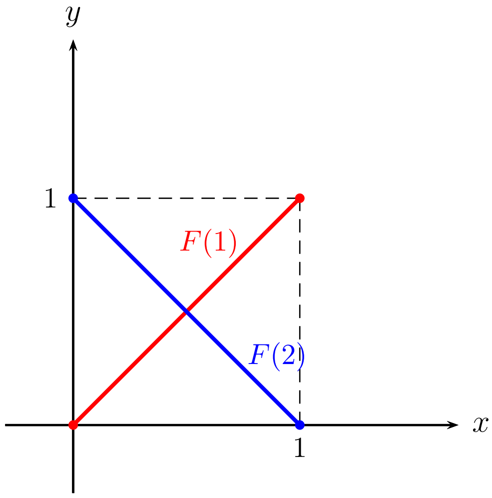
Örnek 3.2.5 bir küme değerli optimizasyon problemi verildiğinde problemin $(\sharp - SOP)$ çözümünün $(v - SOP)$'nin çözümü olması gerekmediğini gösterir.

Örnek 3.2.5. $\mathbb{R}^2$ *uzayı* $C = \mathbb{R}^2_+$ *sıralama konisi ile kısmi sıralı,* $F : \{1, 2\} \rightrightarrows \mathbb{R}^2$ *küme değerli dönüşümü* $F(1) = conv\{(0,1),(1,0)\}$ *ve* $F(2) = conv\{(0,0),(1,1)\}$

şeklinde tanımlansın.

$$(SOP)\begin{cases}\min F(x)\\ x\in\{1,2\}\end{cases}$$

küme değerli optimizasyon problemini göz önüne alınsın.



Şekil 3.4: $F(1) = conv\{(0,1),(1,0)\}$ *ve* $F(2) = conv\{(0,0),(1,1)\}$ *kümeleri*

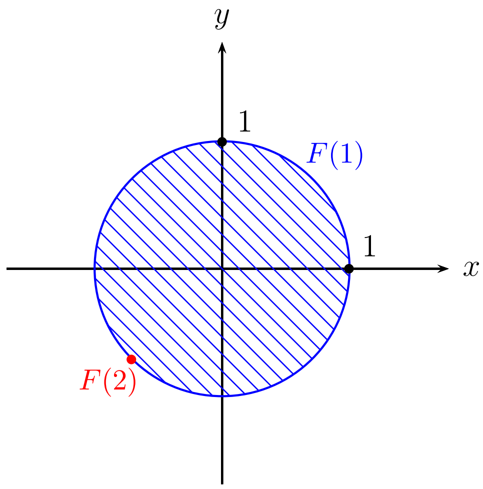
Şekil 3.4'den de görülebileceği gibi $F(2)\cap\min\bigcup_{x\in\{1,2\}}F(x) = \emptyset$ *olduğundan 2* $(v-SOP)$*'nin çözümü değildir. Aynı zamanda* $F(1)\not\preceq_C^{m_1} F(2)$ *olur. Gerçekten* $F(1)\preceq_C^{m_1} F(2)$ *olsaydı* $(F(2)\dot{-}F(1))\cap C\neq\emptyset$ *olmalıydı. Fakat* $x+F(1)\subset F(2)$ *olacak şekilde bir* $x\in\mathbb{R}^2$ *olmadığından* $F(2)\dot{-}F(1)=\emptyset$*'dir. O halde tanım gereği 2* (m_1-SOP)*'nin bir çözümü olur.*

Örnek 3.2.6 bir küme değerli optimizasyon problemi verildiğinde problemin $(v-SOP)$ çözümünün $(\sharp-SOP)$'nin çözümü olması gerekmediğini gösterir.

Örnek 3.2.6. $\mathbb{R}^2$ *uzayı* $C=\mathbb{R}^2_+$ *sıralama konisi ile kısmi sıralı olmak üzere* $F:\{1,2\}\rightrightarrows\mathbb{R}^2$ *küme değerli dönüşümü* $F(1)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\ \ x^2+y^2\leq 1\}$ *ve* $F(2)=\left\{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$ *şeklinde tanımlansın.*

$$(SOP)\begin{cases}\min F(x)\\ x\in\{1,2\}\end{cases}$$

küme değerli optimizasyon problemi göz önüne alınsın.



Şekil 3.5: $F(1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + y^2 \leq 1\}$ *ve* $F(2) = \left\{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$ *kümeleri*

Şekil 3.5'den de görülebileceği gibi

$$F(1) \cap \min \bigcup_{x\in\{1,2\}} F(x) \neq \emptyset \text{ ve } F(2) \cap \min \bigcup_{x\in\{1,2\}} F(x) = \left\{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\} \neq \emptyset$$

olduğundan hem 1 hem de 2 $(v - SOP)$*'nin çözümü olur.*

$F(2)\dot{-}F(1) = \emptyset$ *ve* $(F(2)\dot{-}F(1)) \cap C = \emptyset$ *olduğundan* $F(1) \npreceq_C^{m_1} F(2)$ *elde edilir. Böylece 2* $(m_1 - SOP)$*'nin bir çözümü olur. Fakat* $F(1)\dot{-}F(2) \neq \emptyset$ *ve* $(F(1)\dot{-}F(2)) \cap C \neq \emptyset$ *olduğundan* $F(2) \preceq_C^{m_1} F(1)$ *olur.* $F(1) \neq F(2)$ *olduğundan 1* $(m_1 - SOP)$*'nin çözümü olmaz. O halde* $(m_1 - SOP)$*'nin çözümü 2'dir. Sonuç olarak 1* $(v - SOP)$*'nin çözümü olur fakat* $(m_1 - SOP)$*'nin çözümü olmaz.*

4. $(\mathbf{m_1}-\mathbf{SOP})$ ve $(\mathbf{m_2}-\mathbf{SOP})$ İÇİN SKALERİZASYON

Bu bölümde, Minkowski farkı kullanılarak tanımlanan $\preceq_C^{m_1}$ ve $\preceq_C^{m_2}$ sıralama bağıntılarına bağlı olarak yeni skalerizasyon fonksiyonları tanımlanmıştır. Bu fonksiyonların monotonluk başta olmak üzere bazı özellikleri incelenmiştir. Daha sonra, tanımlarda kullanılan sıralama bağıntıları ile skalerizasyon fonksiyonu arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Son olarak, yeni sıralama bağıntılarına göre verilen küme değerli optimizasyon problemleri için gerekli ve yeterli optimallik koşulları elde edilmiştir.

4.1. Skalerizasyon Fonksiyonları

Küme değerli optimizasyon problemlerinin optimallik koşullarını elde etmek için kullanılan yöntemlerden birisi de skalerizasyondur. Bu yöntemle küme değerli optimizasyon problemi skaler değerli optimizasyon problemine indirgenir. Elde edilen skaler problemin çözümü ile küme değerli optimizasyon probleminin çözümleri arasındaki ilişkilerin araştırılması önemlidir. $\preceq_C^{m_1}$ ve $\preceq_C^{m_2}$ sıralamalarına göre verilen küme değerli optimizasyon problemlerini skaler değerli problemlere indirgemek için iki tane skalerizasyon fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

Tanım 4.1.1. *$e \in int(C)$ olsun. Her $A, B \in \mathcal{P}_0(Y)$ için*

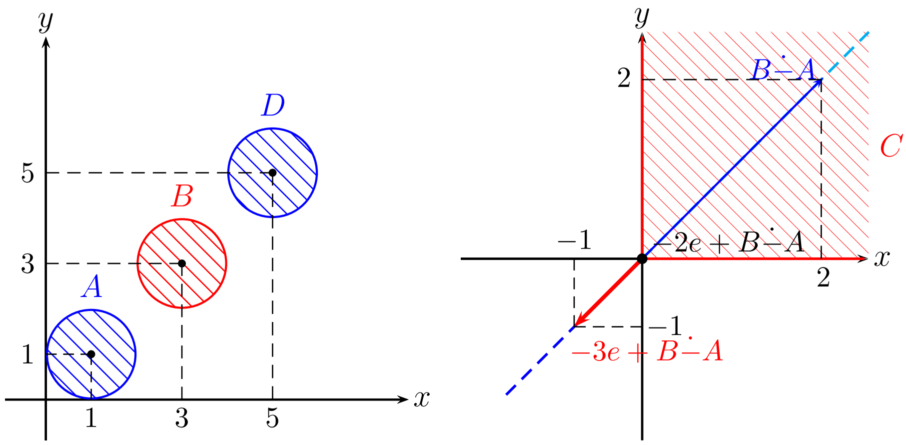
(i) $I_e^{m_1}(A,B) = \inf\{t \in \mathbb{R} \mid A \preceq_C^{m_1} te + B\}$ şeklinde tanımlanan $I_e^{m_1}(\cdot,\cdot) : \mathcal{P}_0(Y) \times \mathcal{P}_0(Y) \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonuna m_1 skalerizasyon fonksiyonu,

(ii) $I_e^{m_2}(A,B) = \inf\{t \in \mathbb{R} \mid A \preceq_C^{m_2} te + B\}$ şeklinde tanımlanan $I_e^{m_2}(\cdot,\cdot) : \mathcal{P}_0(Y) \times \mathcal{P}_0(Y) \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonuna m_2 skalerizasyon fonksiyonu denir.

Çalışmanın geri kalan kısmında $e \in int(C)$ kabul edilecek ve m_1 skalerizasyon fonksiyonu göz önüne alınacaktır.

Bazı kümelerin m_1 skalerizasyon fonksiyonu altındaki görüntülerinin geometrik olarak nasıl elde edileceği Örnek 4.1.2'de gösterilmiştir.

Örnek 4.1.2. *$Y = \mathbb{R}^2$, $C = \mathbb{R}^2_+$, $A = \{(x,y) \mid (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$, $B = \{(x,y) \mid (x-3)^2 + (y-3)^2 \leq 1\}$, $D = \{(x,y) \mid (x-5)^2 + (y-5)^2 \leq 1\}$ ve $e = (1,1)$ olsun.*



Şekil 4.1: $A=\{(x,y)\mid(x-1)^2+(y-1)^2\leq 1\}$, $B=\{(x,y)\mid(x-3)^2+(y-3)^2\leq 1\}$, $D=\{(x,y)\mid(x-5)^2+(y-5)^2\leq 1\}$ *ve* $B\dot{-}A$ *kümeleri*

Şekil 4.1'den de görülebileceği gibi,

$$\begin{aligned}I_e^{m_1}(A,B) &= \inf\{t\in\mathbb{R}\mid A\preceq_C^{m_1} te+B\}\\ &= \inf\{t\in\mathbb{R}\mid (te+B\dot{-}A)\cap C\neq\emptyset\}\\ &= \inf\{t\in\mathbb{R}\mid \{(t+2,t+2)\}\cap C\neq\emptyset\}\\ &= -2\text{'dir.}\end{aligned}$$

Benzer şekilde $I_e^{m_1}(A,A)=0$, $I_e^{m_1}(A,D)=-4$, $I_e^{m_1}(B,A)=2$, $I_e^{m_1}(D,A)=4$ *ve* $I_e^{m_1}(B,D)=-2$ *olduğu gösterilir.*

Aşağıdaki örnekler m_1 skalerizasyon fonksiyonunun sonsuz değerler de alabileceğini göstermektedir.

Örnek 4.1.3. $Y=\mathbb{R}^2$, $C=\mathbb{R}^2_+$, $A=\mathbb{R}^2_+$, $B=\mathbb{R}^2_-$ *ve* $e=(1,1)$ *olsun. O halde* $B\dot{-}A=\mathbb{R}^2_-\dot{-}\mathbb{R}^2_+=\emptyset$ *olur. Böylece* $(te+(B\dot{-}A))\cap C=\emptyset$*'dir. Dolayısıyla* $((te+B)\dot{-}A)\cap C\neq\emptyset$ *olacak şekilde bir* $t\in\mathbb{R}$ *yoktur. O halde* $I_e^{m_1}(A,B)=\inf\{\emptyset\}=\infty$ *elde edilir.*

Örnek 4.1.4. $Y=\mathbb{R}^2$, $C=\mathbb{R}^2_+$, $A=\{(0,0)\}$, $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid y=x\}$ *ve* $e=(1,1)$ *olsun. O zaman* $B\dot{-}A=B$ *olur. Bu yüzden her* $t\in\mathbb{R}$ *için* $\big((te+B)\dot{-}A\big)\cap C\neq\emptyset$ *elde edilir. O halde* $I_e^{m_1}(A,B)=\inf\{\mathbb{R}\}=-\infty$ *olur.*

Aşağıdaki önermeler hangi koşullar altında m_1 skalerizasyon fonksiyonunun sonlu değer alacağını göstermektedir.

Önerme 4.1.5. $A,B\in\mathcal{P}_0(Y)$ *ve* B *sınırlı ise* $I_e^{m_1}(A,B)>-\infty$ *olur.*

Kanıt. $A, B \in \mathcal{P}_0(Y)$ ve B sınırlı olsun.

$$I_e^{m_1}(A, B) = \inf\{t \mid A \preceq_C^{m_1} te + B\} = -\infty$$

olduğu varsayılsın. O halde her $t \in \mathbb{R}$ için $A \preceq_C^{m_1} te + B$ yani her $t \in \mathbb{R}$ için

$$\big(te + B \dot{-} A\big) \cap C \neq \emptyset \tag{4.1}$$

olur. B sınırlı olduğu için $B \dot{-} A$ da sınırlıdır. Böylece

$$B \dot{-} A \subset B(0_Y, r). \tag{4.2}$$

olacak şekilde en az bir $r > 0$ vardır. $e \in int(C)$ olduğundan $e + B(0_Y, \varepsilon) \subset int(C)$ olacak şekilde en az bir $\varepsilon > 0$ vardır. O halde $\dfrac{e}{\varepsilon} + B(0_Y, 1) \subset int(C)$ olur. Böylece $r\dfrac{e}{\varepsilon} + B(0_Y, r) \subset int(C)$ ve $-r\dfrac{e}{\varepsilon} + B(0_Y, r) \subset -int(C)$ elde edilir. (4.2)'den

$$-\frac{r}{\varepsilon}e + B \dot{-} A \subset -\frac{r}{\varepsilon}e + B(0_Y, r) \subset -int(C)$$

bulunur. C sivri olduğundan

$$\Big(-\frac{r}{\varepsilon}e + B \dot{-} A\Big) \cap C = \emptyset$$

olur. Bu ise (4.1) ile çelişir. O halde varsayım yanlıştır. Dolayısıyla $I_e^{m_1}(A, B) > -\infty$ bulunur. □

Önerme 4.1.5'de B'nin sınırlı olması yeterlidir. Fakat A sınırlı ve B sınırsız olduğunda bile $I_e^{m_1}(A, B) = -\infty$ olabilir. Örnek 4.1.4 bu duruma ilişkin bir örnektir.

Önerme 4.1.6. *$A, B \in \mathcal{P}_0(Y)$ olsun. Bu durumda $I_e^{m_1}(A, B) = \infty$ olması için gerek ve yeter koşul $B \dot{-} A = \emptyset$ olmasıdır.*

Kanıt. Kabul edelim ki $I_e^{m_1}(A, B) = \infty$ olsun. O zaman, $A \preceq_C^{m_1} te + B$ olacak şekilde bir $t \in \mathbb{R}$ yoktur. Yani her $t \in \mathbb{R}$ için

$$\big(te + (B \dot{-} A)\big) \cap C = \emptyset \tag{4.3}$$

olur. Kabul edelim ki $B\dot{-}A \neq \emptyset$ olsun. O halde $x \in B\dot{-}A$ olacak şekilde $x \in Y$ vardır. Aynı zamanda $te + x \in C$ olacak şekilde en az bir $t \in \mathbb{R}$ vardır. Gerçekten $e \in int(C)$ olduğu için $B(e, \varepsilon) \subset C$ olacak şekilde en az bir $\varepsilon > 0$ vardır. $e + \dfrac{\varepsilon}{2||x||}x \in B(e, \varepsilon) \subset C$ olur. C koni olduğundan $\dfrac{2||x||}{\varepsilon}\left(e + \dfrac{\varepsilon}{2||x||}x\right) \in C$ bulunur. O halde $t = \dfrac{2||x||}{\varepsilon}$ alınırsa $te + x \in C$ olur. Böylece $t = \dfrac{2||x||}{\varepsilon}$ için $\big(te + (B\dot{-}A)\big) \cap C \neq \emptyset$ elde edilir. Bu ise (4.3) ile çelişir. O halde $B\dot{-}A = \emptyset$ bulunur.

Tersine, $B\dot{-}A = \emptyset$ olsun. O zaman, her $t \in \mathbb{R}$ için $(te + B)\dot{-}A = \emptyset$ yani her $t \in \mathbb{R}$ için $\big((te + B)\dot{-}A\big) \cap C = \emptyset$ olur. Böylece

$$I_e^{m_1}(A, B) = \inf\{t \in \mathbb{R} \mid A \preceq_C^{m_1} te + B\} = \infty$$

elde edilir. □

Skalerizasyon fonksiyonu ile sıralama bağıntısı arasındaki aşağıdaki gibi bir ilişki vardır.

Önerme 4.1.7. *$A, B \in \mathcal{P}_0(Y)$ ve $r \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda*

(i) $I_e^{m_1}(A, B) < r \iff A \prec_C^{m_1} re + B$,

(ii) *$B\dot{-}A$ kompakt olsun. O zaman $I_e^{m_1}(A, B) = r$ olması için gerek ve yeter koşul $A \preceq_{cl(C)}^{m_1} re + B$ ve her $\varepsilon > 0$ için $A \not\preceq_C^{m_1} (r - \varepsilon)\, e + B$ olmasıdır.*

Kanıt. (i) Kabul edelim ki $I_e^{m_1}(A, B) = \inf\{t \in \mathbb{R} \mid A \preceq_C^{m_1} te + B\} = \alpha < r$ ve $r - \alpha = \varepsilon > 0$ olsun. O zaman bu ε için infimum tanımından $A \prec_C^{m_1} te + B$ olacak şekilde en az bir $t \in \mathbb{R}$ vardır ve $t < \alpha + \varepsilon = r$ olur. $(te + B\dot{-}A) \cap int(C) \neq \emptyset$ ve $t < r$ olduğu için $(re + B\dot{-}A) \cap int(C) \neq \emptyset$ elde edilir. O halde $A \prec_C^{m_1} re + B$ bulunur.

Tersine, kabul edelim ki $A \prec_C^{m_1} re + B$ ve $c \in (re + B\dot{-}A) \cap int(C)$ olsun. $c \in int(C)$ olduğundan $B(c, \varepsilon) \subset int(C)$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ vardır. $\alpha = r - \dfrac{\varepsilon}{2||e||}$ olduğundan $\alpha < r$ ve

$$c - \frac{\varepsilon}{2||e||}e \in (\alpha e + B\dot{-}A) \cap int(C)$$

olur. O halde $(\alpha e+B\dot{-}A)\cap int(C)\neq\emptyset$ olur. Böylece $I_e^{m_1}(A,B)\leq\alpha<r$ elde edilir.

(ii) $I_e^{m_1}(A,B)=r$ olsun. Her $n\in\mathbb{N}^+$ için $I_e^{m_1}(A,B)<r+\frac{1}{n}$ olduğundan (i)'den $A\prec_C^{m_1}(r+\frac{1}{n})e+B$ elde edilir. Böylece her $n\in\mathbb{N}^+$ için $A\preceq_C^{m_1}\left(r+\frac{1}{n}\right)e+B$ yani

$$\left(\left(r+\frac{1}{n}\right)e+B\dot{-}A\right)\cap C\neq\emptyset$$

olur. Bu yüzden her $n\in\mathbb{N}^+$ için

$$\left(r+\frac{1}{n}\right)e+x_n\in C \tag{4.4}$$

olacak şekilde $x_n\in B\dot{-}A$ vardır. $B\dot{-}A$ kompakt olduğundan $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$'nin yakınsak bir alt dizisi vardır. Genelliği bozmadan $x_n\to x\in B\dot{-}A$ olsun. (4.4)'den

$$(r+\frac{1}{n})e+x_n\to re+x\in cl(C)$$

olur. Böylece $(re+B\dot{-}A)\cap cl(C)\neq\emptyset$ ve $A\preceq_{cl(C)}^{m_1}re+B$ bulunur. $I_e^{m_1}(A,B)=r$ olduğu için $I_e^{m_1}(A,B)$'nin tanımından her $\varepsilon>0$ için $A\npreceq_C^{m_1}(r-\varepsilon)e+B$ elde edilir.

Tersine, her $\varepsilon>0$ için $A\preceq_{cl(C)}^{m_1}re+B$ ve $A\npreceq_C^{m_1}(r-\varepsilon)e+B$ olsun. O zaman $(re+B\dot{-}A)\cap cl(C)\neq\emptyset$ olur. Böylece $c\in re+B\dot{-}A$ olacak şekilde $c\in cl(C)$ vardır. Buna ek olarak her $n\in\mathbb{N}^+$ için $c+\frac{1}{n}e\in int(C)$ ve $(re+\frac{1}{n}e+B\dot{-}A)\cap int(C)\neq\emptyset$ olur. (i)'den $A\prec_C^{m_1}(r+\frac{1}{n})e+B$ ve $I_e^{m_1}(A,B)<r+\frac{1}{n}$ elde edilir. $n\to\infty$ için $I_e^{m_1}(A,B)\leq r$ olur. Kabulden her $\varepsilon>0$ için $I_e^{m_1}(A,B)\geq r-\varepsilon$'dur. O zaman $\varepsilon\downarrow 0$ için $I_e^{m_1}(A,B)\geq r$ bulunur. Böylece $I_e^{m_1}(A,B)=r$ elde edilir.

□

Sonuç 4.1.8. *$A,B\in\mathcal{P}_0(Y)$, B kompakt ve $r\in\mathbb{R}$ olsun. $I_e^{m_1}(A,B)=r$ olması için gerek ve yeter koşul $A\preceq_{cl(C)}^{m_1}re+B$ ve her $\varepsilon>0$ için $A\npreceq_C^{m_1}(r-\varepsilon)e+B$ olmasıdır.*

Sonuç 4.1.9. *$A,B\in\mathcal{P}_0(Y)$ olsun. $B\dot{-}A$ kompakt, C kapalı ve $I_e^{m_1}(A,B)$ sonlu değerli ise $I_e^{m_1}(A,B)=\min\{t\mid A\preceq_C^{m_1}te+B\}$ olur.*

Kanıt. Önerme 4.1.7 (ii)'den

$$\{t \in \mathbb{R} \mid A \preceq_C^{m_1} te + B\} = \{t \in \mathbb{R} \mid I_e^{m_1}(A, B) \leq t\} = [I_e^{m_1}(A, B), \infty)$$

olur. Böylece

$$I_e^{m_1}(A, B) = \min\{t \in \mathbb{R} \mid A \preceq_C^{m_1} te + B\}$$

elde edilir. □

Tanım 4.1.10. *$\mathcal{S} \subset \mathcal{P}_0(Y)$ ve $T(\cdot) : \mathcal{P}_0(Y) \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda*

(i) $A \preceq_C^\sharp B$ olan $A, B \in \mathcal{S}$ için $T(A) \leq T(B)$ $(T(B) \leq T(A))$ oluyorsa T'ye $\mathcal{S}$ üzerinde $\sharp$-artan ($\sharp$-azalan) fonksiyon,

(ii) $A \prec_C^\sharp B$ olan $A, B \in \mathcal{S}$ için $T(A) < T(B)$ $(T(B) < T(A))$ oluyorsa T'ye $\mathcal{S}$ üzerinde kesin $\sharp$-artan (kesin $\sharp$-azalan) fonksiyon denir.

m_1 skalerizasyon fonksiyonu aşağıdaki monotonluk özelliklerine sahiptir.

Önerme 4.1.11. *$A \in \mathcal{P}_0(Y)$ olsun. $I_e^{m_1}(\cdot, A)$, $\mathcal{P}_0(Y)$ üzerinde m_1-artandır.*

Kanıt. $D, E \in \mathcal{P}_0(Y)$ ve $D \preceq_C^{m_1} E$ olsun. $I_e^{m_1}(E, A) = t \in \mathbb{R}$ ise her $\varepsilon > 0$ için $E \preceq_C^{m_1} (t + \varepsilon)e + A$ olur. $D \preceq_C^{m_1} E$ ve $\preceq_C^{m_1}$ geçişken olduğundan $D \preceq_C^{m_1} (t + \varepsilon)e + A$ elde edilir. Böylece $I_e^{m_1}(D, A) \leq t + \varepsilon$'dur. O halde $\varepsilon \downarrow 0$ için limit alınırsa $I_e^{m_1}(D, A) \leq t = I_e^{m_1}(E, A)$ elde edilir.

$I_e^{m_1}(E, A) = -\infty$ olsun. O zaman $I_e^{m_1}(D, A) \leq I_e^{m_1}(E, A)$ olur.

$I_e^{m_1}(D, A) = \infty$, yani

$$A \dot{-} D = \emptyset. \tag{4.5}$$

olsun. Kabul edelim ki $I_e^{m_1}(E, A) \neq \infty$ olsun. Önerme 4.1.6'dan $A \dot{-} E \neq \emptyset$ bulunur. O zaman $\bar{x} + E \subset A$ olacak şekilde bir $\bar{x} \in Y$ vardır. $D \preceq_C^{m_1} E$ yani $(E \dot{-} D) \cap C \neq \emptyset$ olduğundan $x' + D \subset E$ olacak şekilde bir $x' \in C$ vardır. Böylece $x' + \bar{x} + D \subset \bar{x} + E \subset A$ ve $\bar{x} + x' \in A \dot{-} D$ elde edilir. Bu (4.5) ile çelişir. O halde $I_e^{m_1}(E, A) = \infty$ ve $I_e^{m_1}(D, A) \leq I_e^{m_1}(E, A)$ olur. □

Önerme 4.1.12. *$A \in \mathcal{P}_0(Y)$ olsun. $I_e^{m_1}(A, \cdot)$, $\mathcal{P}_0(Y)$ üzerinde m_1-azalandır.*

Kanıt. Önerme 4.1.11'in kanıtına benzer şekilde elde edilir. □

Uyarı 4.1.13. *$A, B, D \in \mathcal{P}_0(Y)$ olsun. $A \prec_C^{m_1} B$ ve $B \preceq_C^{m_1} D$ (ya da $A \preceq_C^{m_1} B$ ve $B \prec_C^{m_1} D$) ise $A \prec_C^{m_1} D$ olur.*

m_1 skalerizasyon fonksiyonu aşağıdaki kesin monotonluk özelliklerine sahiptir.

Önerme 4.1.14. *$A \in \mathcal{P}_0(Y)$ kompakt olsun. $I_e^{m_1}(\cdot, A)$, $\mathcal{P}_0(Y)$ üzerinde kesin m_1-artandır.*

Kanıt. $D, E \in \mathcal{P}_0(Y)$, $D \prec_C^{m_1} E$ ve $I_e^{m_1}(E, A) = t \in \mathbb{R}$ olsun. O zaman Sonuç 4.1.8'den $E \preceq_{cl(C)}^{m_1} te + A$ olur. $D \prec_C^{m_1} E$ olduğu için $x_1 \in E \dot{-} D$ yani

$$x_1 + D \subset E. \tag{4.6}$$

olacak şekilde $x_1 \in int(C)$ vardır.

Benzer şekilde $E \preceq_{cl(C)}^{m_1} te + A$ olduğundan $x_2 \in te + A \dot{-} E$ yani

$$x_2 + E \subset te + A. \tag{4.7}$$

olacak şekilde bir $x_2 \in cl(C)$ vardır. C'nin konveksliğinden

$$x_1 + x_2 \in int(C) \tag{4.8}$$

olur. Bunlara ek olarak (4.6) ve (4.7)'den

$$x_1 + x_2 + D \subset x_2 + E \subset te + A. \tag{4.9}$$

elde edilir. O halde (4.8) ve (4.9)'dan $x_1 + x_2 \in (te + A \dot{-} D) \cap int(C)$ olur. Böylece $D \prec_C^{m_1} te + A$ elde edilir. Önerme 4.1.7 (i)'den $I_e^{m_1}(D, A) < t$ olur. Dolayısıyla $I_e^{m_1}(D, A) < t = I_e^{m_1}(E, A)$ bulunur. □

Önerme 4.1.15. *$A \in \mathcal{P}_0(Y)$ olsun. $I_e^{m_1}(A, \cdot)$ kompakt kümeler ailesi üzerinde kesin m_1-azalandır.*

Kanıt. Önerme 4.1.14'nin kanıtına benzer şekilde elde edilir. □

Sonuç 4.1.16. *$A \in \mathcal{B}^*(Y)$ olsun. O zaman $I_e^{m_1}(A, A) = 0$'dır.*

Kanıt. $I_e^{m_1}(A, A)$'nin tanımından ve Önerme 3.1.3'den elde edilir. □

Önerme 4.1.17. *$A, B \in \mathcal{P}_0(Y)$ ve $I_e^{m_1}(A,B)$ sonlu değerli olsun. Bu durumda*

(i) $B \dot{-} A$ kompakt ve C kapalı ise

$$A \preceq_C^{m_1} B \Longleftrightarrow I_e^{m_1}(A,B) \leq 0,$$

(ii) $A \prec_C^{m_1} B \Longleftrightarrow I_e^{m_1}(A,B) < 0$

olur.

Kanıt. (i) $A \preceq_C^{m_1} B$ olsun. O halde $A \preceq_C^{m_1} 0e + B$ olduğundan tanımdan $I_e^{m_1}(A,B) \leq 0$ elde edilir.

Tersine, $I_e^{m_1}(A,B) \leq 0$ olsun. İlk olarak $I_e^{m_1}(A,B) < 0$ durumu göz önüne alınsın. Bu durumda Önerme 4.1.7 (i)'den $A \prec_C^{m_1} B$ olur. Böylece $A \preceq_C^{m_1} B$ elde edilir.

$I_e^{m_1}(A,B) = 0$ olsun. O zaman Sonuç 4.1.9'dan $A \preceq_C^{m_1} B$ olur.

(ii) Önerme 4.1.7 (i)'de $r = 0$ alındığında istenilen durum elde edilir.

□

Sonuç 4.1.18. *$A, B \in \mathcal{P}_0(Y)$ ve $I_e^{m_1}(A,B)$ sonlu değerli olsun. Bu durumda B kompakt ve C kapalı ise $A \preceq_C^{m_1} B$ olması için gerek ve yeter koşul $I_e^{m_1}(A,B) \leq 0$ olmasıdır.*

Uyarı 4.1.19. *$A \dot{-} B \neq \emptyset$ ve $B \dot{-} A = \emptyset$ olduğunda $I_e^{m_1}(A,B) = \infty$ ve $I_e^{m_2}(A,B) < \infty$ olur. $A \dot{-} B = \emptyset$ ve $B \dot{-} A \neq \emptyset$ olduğunda $I_e^{m_1}(A,B) < \infty$ ve $I_e^{m_2}(A,B) = \infty$ elde edilir. $A \dot{-} B \neq \emptyset$ ve $B \dot{-} A \neq \emptyset$ olsun. O halde her bir $t \in \mathbb{R}$ için $A \preceq_C^{m_1} te + B \Leftrightarrow A \preceq_C^{m_2} te + B$ ilişkisi elde edilir. Bu ise $I_e^{m_1}(A,B) = I_e^{m_2}(A,B)$ olduğunu verir. Böylece m_1 skalerizasyon fonksiyonu için elde edilen özellikler bu ilişkiden dolayı benzer şekilde m_2 skalerizasyon fonksiyonu için de geçerlidir.*

4.2. Optimallik Koşulları

Çalışmanın bu kısmında $F : X \rightrightarrows Y$ bir küme değerli dönüşüm ve $\forall x \in X$ için $F(x) \neq \emptyset$ olmak üzere

$$(m_1 - SOP) \begin{cases} \min F(x) \\ x \in X \end{cases}$$

problemi için Bölüm 4.1.'de tanımlanan m_1 skalerizasyon fonksiyonu kullanılarak bazı optimallik koşulları elde edilmiştir.

Teorem 4.2.1. *C kapalı ve $F : X \rightrightarrows Y$ kompakt değerli olsun. $x_0 \in X$'in $(m_1 - SOP)$'nin çözümü olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{P}_0(Y)$ üzerinde m_1-artan ve*

(i) $T(F(x_0)) = 0$,

(ii) $F(x) \neq F(x_0)$ olan her $x \in X \setminus \{x_0\}$ için $T(F(x)) > 0$

koşullarını sağlayan bir $T : \mathcal{P}_0(Y) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun var olmasıdır.

Kanıt. x_0, $(m_1 - SOP)$'nin bir çözümü ve herhangi bir $e \in int(C)$ için $T(\cdot) = I_e^{m_1}(\cdot, F(x_0))$ olsun. Önerme 4.1.11'den $T(\cdot)$ fonksiyonu $\mathcal{P}_0(Y)$ üzerinde m_1-artandır. Sonuç 4.1.16'dan $T(F(x_0)) = 0$ olur. x_0, $(m_1 - SOP)$'nin çözümü olduğundan $F(x) \neq F(x_0)$ olan her $x \in X \setminus \{x_0\}$ için $F(x) \not\preceq_C^{m_1} F(x_0)$ olur. Sonuç 4.1.16 ve Önerme 4.1.17 (i)'den $F(x) \neq F(x_0)$ olan her $x \in X \setminus \{x_0\}$ için $I_e^{m_1}(F(x), F(x_0)) > 0 = I_e^{m_1}(F(x_0), F(x_0))$ elde edilir. O halde $F(x) \neq F(x_0)$ olan her $x \in X \setminus \{x_0\}$ için $T(F(x)) > 0$ olur.

Tersine, $\mathcal{P}_0(Y)$ üzerinde m_1-artan bir $T : \mathcal{P}_0(Y) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (i) ve (ii) koşullarını sağlasın. Kabul edelim ki x_0, $(m_1 - SOP)$'nin bir çözümü olmasın. O zaman $F(x) \preceq_C^{m_1} F(x_0)$ olacak şekilde bir $x \in X \setminus \{x_0\}$ vardır. $T(\cdot)$, $\mathcal{P}_0(Y)$ üzerinde m_1-artan olduğundan, $T(F(x)) \leq T(F(x_0)) = 0$ elde edilir. Böylece $T(F(x)) \leq 0$ olur. Bu ise (ii) ile çelişir. O halde x_0, $(m_1 - SOP)$'nin bir çözümüdür. □

Teorem 4.2.2. *C kapalı ve $F : X \rightrightarrows Y$ kompakt değerli olsun. $x_0 \in X$'in $(m_1 - SOP)$'nin zayıf çözümü olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{P}_0(Y)$ üzerinde kesin m_1-artan ve* *(i)* $T(F(x_0)) = 0$,

(ii) *Her* $x \in X$ *için* $T(F(x)) \geq 0$,

koşullarını sağlayan bir $T : \mathcal{P}_0(Y) \to \mathbb{R}$ *fonksiyonunun var olmasıdır.*

Kanıt. x_0, $(m_1 - SOP)$'nin bir zayıf çözümü ve herhangi bir $e \in int(C)$ için $T(\cdot) = I_e^{m_1}(\cdot, F(x_0))$ olsun. Önerme 4.1.14'den $T(\cdot)$ fonksiyonu $\mathcal{P}_0(Y)$ üzerinde kesin m_1-artandır. Sonuç 4.1.16'dan $T(F(x_0)) = 0$ olur. x_0, $(m_1 - SOP)$'nin bir zayıf çözümü olduğu için her $x \in X$ için $F(x) \not\prec_C^{m_1} F(x_0)$ olur. O halde Önerme 4.1.7 (i)'den $T(F(x)) = I_e^{m_1}(F(x), F(x_0)) \not< 0$ elde edilir. Böylece her $x \in X$ için $T(F(x)) \geq 0$ elde edilir.

Tersine, $\mathcal{P}_0(Y)$ üzerinde kesin m_1-artan bir $T : \mathcal{P}_0(Y) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (i) ve (ii) koşullarını sağlasın. Kabul edelim ki x_0, $(m_1 - SOP)$'nin bir zayıf çözümü olmasın. O zaman, $F(x) \prec_C^{m_1} F(x_0)$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır. $T(\cdot)$ kesin m_1-artan olduğundan $T(F(x)) < T(F(x_0)) = 0$ bulunur. Böylece $T(F(x)) < 0$ olur. Bu ise (ii) ile çelişir. O halde x_0, $(m_1 - SOP)$'nin bir zayıf çözümüdür. $\square$

$T(\cdot) : \mathcal{P}_0(Y) \to \overline{\mathbb{R}}$ bir fonksiyon olsun. O halde küme değerli optimizasyon problemi

$$(m_1 - SOP) \begin{cases} \min F(x) \\ x \in X \end{cases}$$

ile skaler optimizasyon problemi

$$(SP_T) \begin{cases} \min T(F(x)) \\ x \in X \end{cases}$$

arasında aşağıdaki gibi ilişkiler vardır.

Sonuç 4.2.3. *C kapalı ve $F : X \rightrightarrows Y$ kompakt değerli olsun. $x_0 \in X$ $(m_1 - SOP)$'nin bir çözümü ise*

$$(SP_I) \begin{cases} \min I_e^{m_1}(F(x), F(x_0)) \\ x \in X \end{cases}$$

probleminin de bir çözümüdür.

Kanıt. x_0, $(m_1 - SOP)$'nin bir çözümü olsun. O halde $F(x) \neq F(x_0)$ olan her $x \in X \setminus \{x_0\}$ için $F(x) \not\preceq_C^{m_1} F(x_0)$ olur. Sonuç 4.1.16 ve Önerme 4.1.17 (i)'den $F(x) \neq F(x_0)$ olan her $x \in X \setminus \{x_0\}$ için $I_e^{m_1}(F(x), F(x_0)) > 0 = I_e^{m_1}(F(x_0), F(x_0))$ olur. O halde x_0 (SP_I)'nın bir çözümüdür. □

Sonuç 4.2.4. *C kapalı ve $F : X \rightrightarrows Y$ kompakt değerli olsun. $x_0 \in X$*

$$(SP_I) \begin{cases} \min I_e^{m_1}(F(x), F(x_0)) \\ x \in X \end{cases}$$

probleminin tek çözümü ise $(m_1 - SOP)$'nin de bir çözümüdür.

Kanıt. x_0 (SP_I)'nın tek çözümü olsun. O zaman, her $x \in X \setminus \{x_0\}$ için $0 = I_e^{m_1}(F(x_0), F(x_0)) < I_e^{m_1}(F(x), F(x_0))$ olur. Önerme 4.1.17 (i)'den her $x \in X \setminus \{x_0\}$ için $F(x) \not\preceq_C^{m_1} F(x_0)$ olur. Böylece x_0 $(m_1 - SOP)$'nin bir çözümüdür.

□

Sonuç 4.2.5. *C kapalı ve $F : X \rightrightarrows Y$ sınırlı değerli olsun. $x_0 \in X$'in $(m_1 - SOP)$'nin bir zayıf çözümü olması için gerek ve yeter koşul x_0'ın (SP_I)'nın bir çözümü olmasıdır.*

Kanıt. x_0, $(m_1 - SOP)$'nın bir zayıf çözümü olsun. O zaman her $x \in X$ için $F(x) \not\prec_C^{m_1} F(x_0)$ olur. Önerme 4.1.7 (i) ve Sonuç 4.1.16'dan her $x \in X$ için $I_e^{m_1}(F(x), F(x_0)) \geq I_e^{m_1}(F(x_0), F(x_0))$ olur. Böylece x_0, (SP_I)'nın bir çözümüdür.

Tersine, x_0 (SP_I)'nın bir çözümü olsun. O zaman her $x \in X$ için $I_e^{m_1}(F(x_0), F(x_0)) \leq I_e^{m_1}(F(x), F(x_0))$ olur. Önerme 4.1.7 (i)'den her $x \in X$ için $F(x) \not\prec_C^{m_1} F(x_0)$ olur. Böylece x_0 $(m_1 - SOP)$'nin bir zayıf çözümüdür. □

Uyarı 4.2.6. *$I_e^{m_2}(\cdot, \cdot)$ fonksiyonu kullanarak $(m_2 - SOP)$ için benzer sonuçlar elde edilir.*

Optimallik koşulları ile ilgili bir örnek aşağıda verilmiştir.

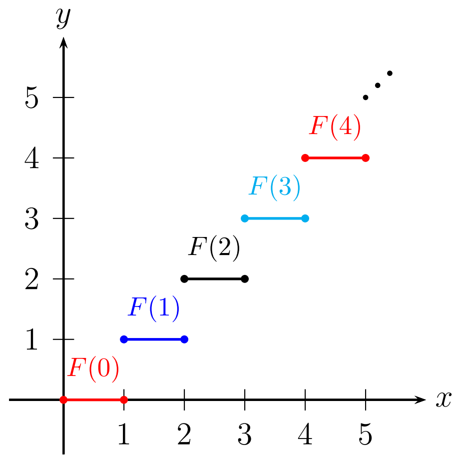
Örnek 4.2.7. *$Y = \mathbb{R}^2$, $C = \mathbb{R}^2_+$ ve $F : \mathbb{R}_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^2$ küme değerli dönüşümü her $x \in \mathbb{R}_+$ için*

$$F(x) = conv\{(x, x), (x + 1, x)\}$$

şeklinde tanımlansın.

$$(m_1 - SOP)\begin{cases} \min F(x) \\ x \in \mathbb{R}_+ \end{cases}$$

problemini göz önüne alalım.



Şekil 4.2: $F(x) = conv\{(x,x),(x+1,x)\}$ *küme değerli dönüşümünün bazı görüntü kümeleri*

Şekil 4.2'den de görülebileceği gibi $F(x)$ *kompakt değerli ve* C *kapalıdır.* $e = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}) \in int(\mathbb{R}^2_+)$ *olsun ve*

$$(SP_I)\begin{cases} \min I_e^{m_1}(F(x), F(0)) \\ x \in \mathbb{R}_+ \end{cases}$$

problemini göz önüne alalım.

$$\begin{aligned} I_e^{m_1}(F(x), F(0)) &= \inf\{t \in \mathbb{R} |\ |F(x) \preceq_C^{m_1} te + F(0)\} \\ &= \inf\{t \in \mathbb{R} \mid \big(te + (F(0) \dot{-} F(x))\big) \cap C \neq \emptyset\} \\ &= \inf\{t \in \mathbb{R} \mid \{t(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}) + (-x, -x)\} \cap C \neq \emptyset\} \\ &= \inf\{t \in \mathbb{R} \mid \{(\tfrac{t}{2} - x, \tfrac{t}{3} - x)\} \cap C \neq \emptyset\} \\ &= 3x. \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $x_0 = 0$, (SP_I)*'nın tek çözümüdür. Böylece Sonuç 4.2.4'den* $x_0 = 0$, $(m_1 - SOP)$*'nın bir çözümüdür.*

$x_0 = 0$, (SP_I)*'nın bir çözümü olduğundan Sonuç 4.2.5'den* $x_0 = 0$ *aynı zamanda* $(m_1 - SOP)$*'nın bir zayıf çözümüdür.*

5. KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLERİN M-YÖNLÜ TÜREVİ

Küme değerli optimizasyon problemlerinin optimallik koşullarını elde etmek için kullanılan yöntemlerden birisi de yönlü türevdir. Bu yöntemle küme değerli optimizasyon probleminin yönlü türevi ile problemin çözümü arasındaki ilişkiler araştırılır.

Bu bölümde, Minkowski farkı kullanılarak küme değerli dönüşümler için bir yönlü türev tanımlanmıştır. Yönlü türevin bazı özellikleri incelendikten sonra varlık teoremleri elde edilmiştir. Tanımlanan yönlü türev ile ℓ-yönlü türev arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Daha sonra yönlü türev yardımıyla $(m_1 - SOP)$ için gerekli ve yeterli optimallik koşulları elde edilmiştir.

5.1. M-yönlü Türev

Bu kısımda $(m_1 - SOP)$'nin optimallik koşullarını elde etmek için bir yönlü türev tanımlanmıştır. Öncelikle bu tanım için gerekli olan üst limit kavramı verilecektir.

Tanım 5.1.1. *[22] $F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^p$ küme değerli dönüşüm olsun.*

$$\limsup_{x' \to x} F(x') = \{y \in \mathbb{R}^p \mid \liminf_{x' \to x} d(y, F(x')) = 0\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye F'nin x noktasındaki üst limiti denir.

Tanım 5.1.2. *$F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^p$ kompakt değerli dönüşüm, $\bar{x} \in int(dom(F))$ ve $d \in \mathbb{R}^n$ olsun.*

$$D_M F(\bar{x}, d) = \limsup_{t \to 0^+} \frac{F(\bar{x} + td) \dot{-} F(\bar{x})}{t} \tag{5.1}$$

kümesine F'nin $\bar{x}$ noktasında ve d yönündeki M-yönlü türevi denir. Her $d \in \mathbb{R}^n$ için $D_M F(\bar{x}, d) \neq \emptyset$ ise F'ye $\bar{x}$ noktasında M-yönlü türevlenebilirdir denir.

F vektör değerli bir fonksiyon olarak alınırsa M-yönlü türev tanımı

$$F^D(\bar{x}; d) := \limsup_{t \to 0^+} \frac{F(\bar{x} + td) - F(\bar{x})}{t}$$

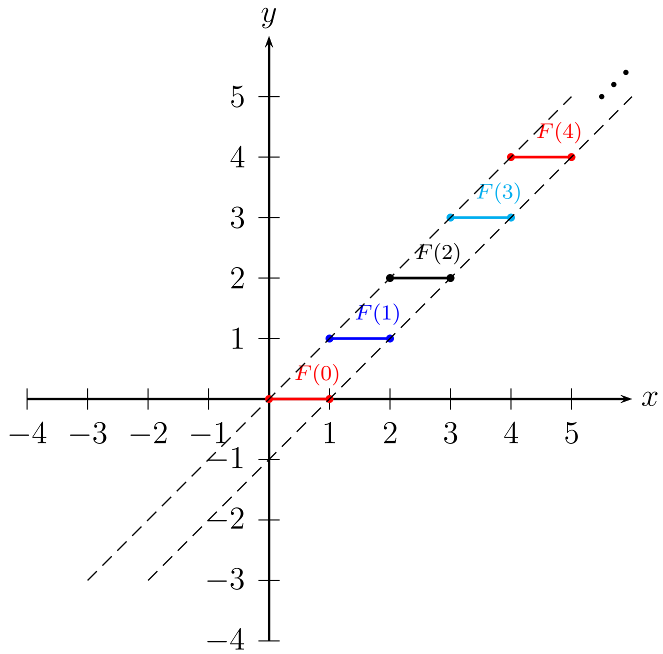
şeklinde tanımlanan üst Dini yönlü türeve [46] eşit olur. Dolayısıyla M-yönlü türev vektör değerli fonksiyonlar için verilen üst Dini yönlü türevin küme değerli dönüşümlere bir genişlemesidir.

Aşağıda bir küme değerli dönüşümün M-yönlü türevinin hesaplanmasına ilişkin örnekler verilmiştir.

Örnek 5.1.3. *$F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}^2$ küme değerli dönüşümü her $x \in \mathbb{R}$ için*

$$F(x) = conv\{(x, x), (x + 1, x)\}$$

şeklinde tanımlansın. Bu küme değerli dönüşümün bazı görüntü kümeleri Şekil 5.1 de yer almaktadır.

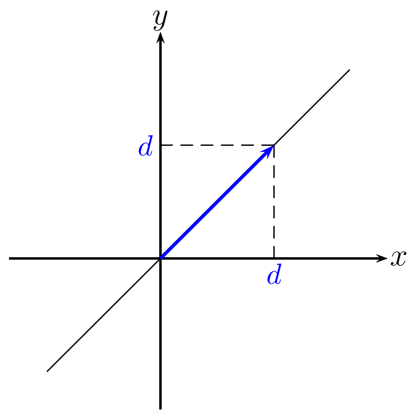


Şekil 5.1: *$F(x) = conv\{(x, x), (x+1, x)\}$ küme değerli dönüşümünün bazı görüntü kümeleri*

Böylece F'nin herhangi bir $x \in \mathbb{R}$ noktası ve $d \in \mathbb{R}$ yönündeki M-yönlü türevi

$$\begin{aligned} D_M F(x, d) &= \limsup_{t \to 0^+} \frac{F(x + td) \dot{-} F(x)}{t} \\ &= \limsup_{t \to 0^+} \frac{\{(td, td)\}}{t} \\ &= \limsup_{t \to 0^+} \{(d, d)\} \\ &= \{(d, d)\} \\ &= \{d(1, 1)\} \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. Ayrıca $D_M F(x, d)$'in grafiği Şekil 5.2 de yer almaktadır.

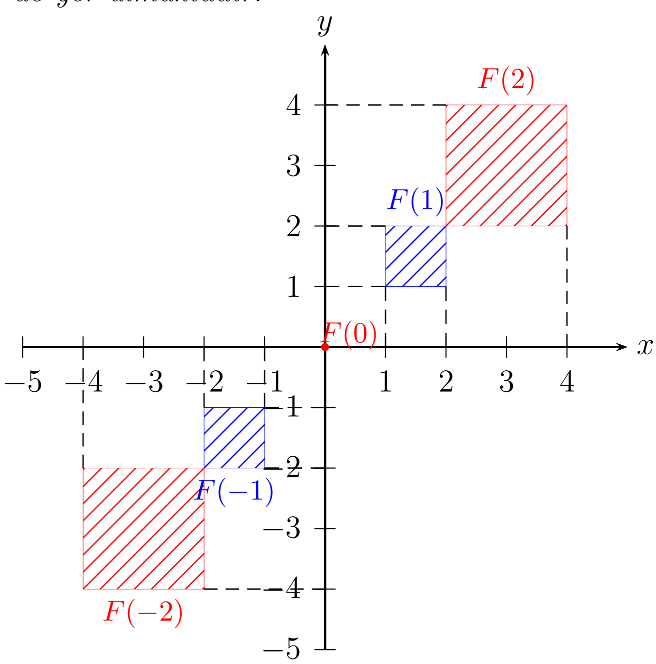


Şekil 5.2: *Örnek 5.1.3'deki F küme değerli dönüşümünün M-yönlü türevinin görüntü kümesi*

Örnek 5.1.4. *$F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}^2$ küme değerli dönüşümü her $x \in \mathbb{R}$ için*

$$F(x) = [x, 2x] \times [x, 2x]$$

şeklinde tanımlansın ve $d \in \mathbb{R}$ olsun. Bu küme değerli dönüşümün bazı görüntü kümeleri Şekil 5.3 de yer almaktadır.



Şekil 5.3: $F(x) = [x, 2x] \times [x, 2x]$ *küme değerli dönüşümünün bazı görüntü kümeleri*

F'nin 0 noktasındaki yönlü türevi:

- $d > 0$ *ise*

$$\begin{aligned} D_M F(0,d) &= \limsup_{t\to 0^+} \frac{F(0+td)\dot{-}F(0)}{t} \\ &= \limsup_{t\to 0^+} \frac{F(td)\dot{-}F(0)}{t} \\ &= \limsup_{t\to 0^+} \frac{[td,2td]\times[td,2td]}{t} \\ &= \limsup_{t\to 0^+} [d,2d]\times[d,2d] \\ &= [\mathrm{d},2\mathrm{d}]\times[\mathrm{d},2\mathrm{d}], \end{aligned}$$

- $d < 0$ *ise*

$$\begin{aligned} D_M F(0,d) &= \limsup_{t\to 0^+} \frac{F(0+td)\dot{-}F(0)}{t} \\ &= \limsup_{t\to 0^+} \frac{F(td)\dot{-}F(0)}{t} \\ &= \limsup_{t\to 0^+} \frac{[2td,td]\times[2td,td]}{t} \\ &= \limsup_{t\to 0^+} [2d,d]\times[2d,d] \\ &= [2\mathrm{d},\mathrm{d}]\times[2\mathrm{d},\mathrm{d}] \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır.

$x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ *olmak üzere* $D_M F(x,d)$ *yönlü türevi:*

- $x > 0$ *ve* $d > 0$ *ise*

$$\begin{aligned} D_M F(x,d) &= \limsup_{t\to 0^+} \frac{F(x+td)\dot{-}F(x)}{t} \\ &= \limsup_{t\to 0^+} \frac{[td,2td]\times[td,2td]}{t} \\ &= \limsup_{t\to 0^+} [d,2d]\times[d,2d] \\ &= [\mathrm{d},2\mathrm{d}]\times[\mathrm{d},2\mathrm{d}], \end{aligned}$$

- $x > 0$ *ve* $d < 0$ *ise*

$$\begin{aligned} D_M F(x,d) &= \limsup_{t\to 0^+} \frac{F(x+td)\dot{-}F(x)}{t} \\ &= \limsup_{t\to 0^+} \emptyset \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

olur.

• $x < 0$ *ve* $d < 0$ *ise*

$$\begin{aligned} D_M F(x,d) &= \limsup_{t\to 0^+} \frac{F(x+td)\dot{-}F(x)}{t} \\ &= \limsup_{t\to 0^+} \frac{[td,2td]\times[td,2td]}{t} \\ &= \limsup_{t\to 0^+} [d,2d]\times[d,2d] \\ &= [2\mathrm{d},\mathrm{d}]\times[2\mathrm{d},\mathrm{d}], \end{aligned}$$

• $x < 0$ *ve* $d > 0$ *ise*

$$\begin{aligned} D_M F(x,d) &= \limsup_{t\to 0^+} \frac{F(x+td)\dot{-}F(x)}{t} \\ &= \limsup_{t\to 0^+} \emptyset \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$D_M F(x,d) = \begin{cases} [\mathrm{d},2\mathrm{d}]\times[\mathrm{d},2\mathrm{d}] & , x \geq 0,\ d > 0 \\ [2\mathrm{d},\mathrm{d}]\times[2\mathrm{d},\mathrm{d}] & , x \leq 0,\ d < 0 \\ \emptyset & , d.d. \end{cases}$$

elde edilir. Sonuç olarak F küme değerli dönüşümü sadece 0 noktasında M-yönlü türevlenebilirdir. Diğer noktalarda M-yönlü türevlenemezdir.

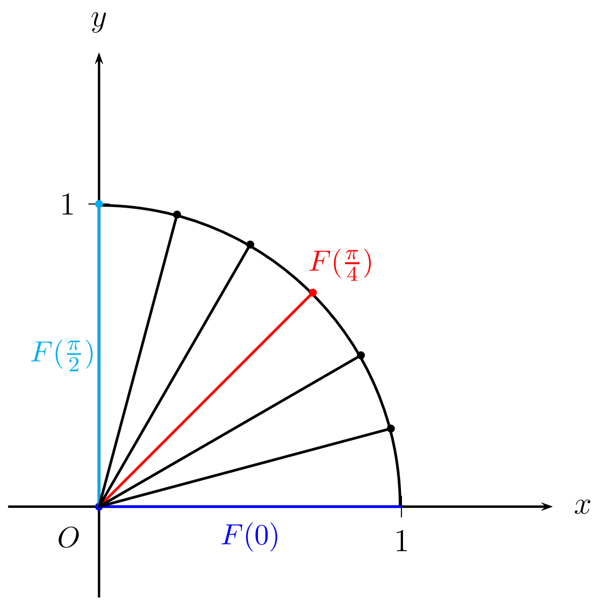
Örnek 5.1.5. $F : [0, \frac{\pi}{2}] \rightrightarrows \mathbb{R}^2$ *küme değerli dönüşümü her* $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ *için*

$$F(x) = conv\{(0,0), (\cos x, \sin x)\}$$

şeklinde tanımlansın. Bu küme değerli dönüşümün bazı görüntü kümeleri Şekil 5.4 de yer almaktadır.

$x \in (0, \frac{\pi}{2})$ *ve* $d \in \mathbb{R}$ *için*

$$\begin{aligned} D_M F(x,d) &= \limsup_{t\to 0^+} \frac{F(x+td)\dot{-}F(x)}{t} \\ &= \limsup_{t\to 0^+} \emptyset \\ &= \emptyset \end{aligned}$$



Şekil 5.4: $F(x) = conv\{(0,0),(\cos x, \sin x)\}$ *küme değerli dönüşümünün bazı görüntü kümeleri*

elde edilir. Böylece F küme değerli dönüşümü $(0, \frac{\pi}{2})$ aralığının hiçbir noktasında M-yönlü türevlenemezdir.

Teorem 5.1.6. *$F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^p$ küme değerli dönüşüm ve $\bar{x} \in int(dom(F))$ olsun. F, $\bar{x}$ noktasında M-yönlü türevlenebilirse $D_M F(\bar{x}, \cdot)$ pozitif homojendir. Yani her $d \in \mathbb{R}^n$ ve her $\lambda > 0$ için $D_M F(\bar{x}, \lambda d) = \lambda D_M F(\bar{x}, d)$ olur.*

Kanıt. $d \in \mathbb{R}^n$ ve $\lambda > 0$ olsun. O halde

$$\begin{aligned} D_M F(\bar{x}, \lambda d) &= \limsup_{t \to 0^+} \frac{F(\bar{x} + \lambda t d) \dot{-} F(\bar{x})}{t} \\ &= \limsup_{t \to 0^+} \lambda \frac{F(\bar{x} + \lambda t d) \dot{-} F(\bar{x})}{\lambda t} \\ &= \lambda \limsup_{s \to 0^+} \frac{F(\bar{x} + s d) \dot{-} F(\bar{x})}{s} \\ &= \lambda D_M F(\bar{x}, d) \end{aligned}$$

elde edilir. □

Teorem 5.1.7. *$F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^p$ kompakt değerli dönüşüm ve $\bar{x} \in int(dom(F))$ olsun. Her $x \in B_n(\bar{x}, \varepsilon)$ için*

$$\big(F(x) \dot{-} F(\bar{x})\big) \cap L||x - \bar{x}||\mathbb{B}_p \neq \emptyset \tag{5.2}$$

olacak şekilde $\varepsilon > 0$ sayısı ve pozitif L sabiti varsa F, $\bar{x}$ noktasında M-yönlü türevlenebilirdir ve her $d \in \mathbb{R}^n$ için $D_M F(\bar{x}, d) \cap L||d||\overline{\mathbb{B}}_p \neq \emptyset$ olur.

Kanıt. $d \in \mathbb{R}^p$ olsun. (5.2)'den her $t \in (0, t_0)$ için

$$\big(F(\bar{x} + td)\dot{-}F(\bar{x})\big) \cap Lt||d||\mathbb{B}_p \neq \emptyset$$

olacak şekilde $t_0 > 0$ vardır. Böylece her $t \in (0, t_0)$ için

$$\frac{F(\bar{x} + td)\dot{-}F(\bar{x})}{t} \cap L||d||\mathbb{B}_p \neq \emptyset$$

olur. Her $t \in (0, t_0)$ için $z_t \in \dfrac{F(\bar{x} + td)\dot{-}F(\bar{x})}{t} \cap L||d||\mathbb{B}_p$ olacak şekildeki bir $\{z_t\}_{t\in(0,t_0)}$ ağı göz önüne alınsın. Her $t \in (0, t_0)$ için $z_t \in L||d||\mathbb{B}_p$ ve $L||d||\mathbb{B}_p$ sınırlı olduğundan $\{z_t\}_{t\in(0,t_0)}$ ağının en az bir yığılma noktası vardır. $\bar{z}$, $\{z_t\}_{t\in(0,t_0)}$'nin yığılma noktası olsun. Küme değerli dönüşümler için üst limit yığılma noktalarını içerdiğinden $\bar{z} \in \limsup\limits_{t\to 0^+} \dfrac{F(\bar{x} + td)\dot{-}F(\bar{x})}{t} = D_M F(\bar{x}, d)$ olur. Dolayısıyla $D_M F(\bar{x}, d) \neq \emptyset$ elde edilir. Aynı zamanda $D_M F(\bar{x}, d) \cap L||d||\overline{\mathbb{B}}_p \neq \emptyset$ bulunur. $\square$

Tanım 5.1.8. *$F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^p$ kompakt değerli dönüşüm ve $\bar{x} \in int(dom(F))$ olsun. Her $x \in B_n(\bar{x}, \varepsilon)$ için*

$$F(x)\dot{-}F(\bar{x}) \subset L||x - \bar{x}||\mathbb{B}_p \tag{5.3}$$

olacak şekilde $\varepsilon > 0$ sayısı ve pozitif L sabiti varsa F'ye $\bar{x}$ de yerel M-Lipschitz denir.

Teorem 5.1.9. *$F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^p$ kompakt değerli dönüşümü $\bar{x} \in int(dom(F))$'de yerel M-Lipschitz olsun. $B_n(\bar{x}, \varepsilon)$ F'nin $\bar{x}$'deki yerel M-Lipschitz olduğu komşuluk olmak üzere her $x \in B_n(\bar{x}, \varepsilon)$ için $F(x)\dot{-}F(\bar{x}) \neq \emptyset$ ise F, $\bar{x}$ noktasında M-yönlü türevlenebilirdir.*

Kanıt. $d \in \mathbb{R}^n$ olsun. F, $\bar{x}$ noktasında yerel M-Lipsichtz olduğundan her $t \in (0, t_0)$ için

$$\emptyset \neq F(\bar{x} + td)\dot{-}F(\bar{x}) \subset Lt||d||\mathbb{B}_p$$

olacak şekilde $t_0 > 0$ vardır. Böylece her $t \in (0, t_0)$ için

$$\emptyset \neq \frac{F(\bar{x} + td)\dot{-}F(\bar{x})}{t} \subset L||d||\mathbb{B}_p$$

olur. Her $t \in (0, t_0)$ için $z_t \in \dfrac{F(\bar{x} + td)\dot{-}F(\bar{x})}{t} \subset L||d||\mathbb{B}_p$ olacak şekildeki $\{z_t\}_{t\in(0,t_0)}$ ağı göz önüne alınsın. $L||d||\mathbb{B}_p$ sınırlı olduğundan $\{z_t\}_{t\in(0,t_0)}$ ağının $\bar{z}$ gibi en az bir yığılma noktası vardır. Küme değerli dönüşümlerin üst limiti yığılma noktalarını içerdiğinden $\bar{z} \in \limsup\limits_{t\to 0^+} \dfrac{F(\bar{x} + td)\dot{-}F(\bar{x})}{t} = D_M F(\bar{x}, d)$ olur. $\bar{z} \in D_M F(\bar{x}, d)$ olduğundan $D_M F(\bar{x}, d) \neq \emptyset$ elde edilir. □

Teorem 5.1.10. *$F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^p$ kompakt değerli dönüşümü $\bar{x} \in int(dom(F))$'de yerel M-Lipschitz ve her $t \in (0, \bar{t})$ ve her $d \in \mathbb{R}^n$ için*

$$F(\bar{x}) \preceq_C^{m_1} F(\bar{x} + td) \tag{5.4}$$

olacak şekilde $\bar{t} > 0$ varsa F, $\bar{x}$ noktasında M-yönlü türevlenebilirdir ve $\{0\} \preceq_C^{m_1} D_M F(\bar{x}, d)$ olur.

Kanıt. Keyfi bir $d \in \mathbb{R}^n$ alınsın. F, $\bar{x}$ noktasında yerel M-Lipsichtz olduğundan her $t \in (0, t_0)$ için

$$F(\bar{x} + td)\dot{-}F(\bar{x}) \subset Lt||d||\mathbb{B}_p$$

olacak şekilde $t_0 > 0$ vardır. Böylece her $t \in (0, t_0)$ için

$$\frac{F(\bar{x} + td)\dot{-}F(\bar{x})}{t} \subset L||d||\mathbb{B}_p$$

olur. (5.4)'den her $t \in (0, \bar{t})$ için $\big(F(\bar{x} + td)\dot{-}F(\bar{x})\big) \cap C \neq \emptyset$ olur. $\min\{\bar{t}, t_0\} = t'$ olsun. O zaman her $t \in (0, t')$ için $\dfrac{F(\bar{x} + td)\dot{-}F(\bar{x})}{t} \cap C \subset L||d||\mathbb{B}_p$ olur. Her $t \in (0, t')$ için $z_t \in \dfrac{F(\bar{x} + td)\dot{-}F(\bar{x})}{t} \cap C \subset L||d||\mathbb{B}_p$ olacak şekildeki $\{z_t\}_{t\in(0,t')}$ ağı göz önüne alınsın. $L||d||\mathbb{B}_p$ sınırlı olduğundan $\{z_t\}_{t\in(0,t')}$ ağının $\bar{z}$ gibi en az bir yığılma noktası vardır. Küme değerli dönüşümlerin üst limiti yığılma noktalarını içerdiğinden ve C kapalı olduğundan

$$\bar{z} \in \limsup_{t\to 0^+} \frac{F(\bar{x} + td)\dot{-}F(\bar{x})}{t} \cap C = D_M F(\bar{x}, d) \cap C$$

olur. $\bar{z} \in D_M F(\bar{x}, d) \cap C$ olduğundan $D_M F(\bar{x}, d) \neq \emptyset$ ve $\{0\} \preceq_C^{m_1} D_M F(\bar{x}, d)$'dir. $\square$

Sonuç 5.1.11. *$F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^p$ kompakt değerli dönüşümü $\bar{x} \in int(dom(F))$'de yerel M-Lipschitz ve $0 \leq t_1 < t_2$ olan her $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ ve $d \in \mathbb{R}^n$ için*

$$F(\bar{x} + t_1 d) \preceq_C^{m_1} F(\bar{x} + t_2 d) \tag{5.5}$$

ise F, $\bar{x}$ noktasında M-yönlü türevlenebilirdir ve her $d \in \mathbb{R}^n$ için $\{0\} \preceq_C^{m_1} D_M F(\bar{x}, d)$ olur.

5.2. M-yönlü Türev ile $(\mathbf{m_1} - \mathbf{SOP})$ İçin Optimallik Koşulları

Bu kısımda $(m_1 - SOP)$ için M-yönlü türev kullanılarak gerekli ve yeterli optimallik koşulları elde edilmiştir.

$C \subset \mathbb{R}^p$ sivri, konveks, kapalı, içi boştan farklı koni, $0 \in C$, $x \in \mathbb{R}^n$ ve $F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^p$ kompakt değerli dönüşüm olmak üzere $dom(F) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) \neq \emptyset\}$ olsun. Burada

$$(m_1 - SOP) \begin{cases} \min(\text{maks}) F(x) \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

problemi göz önüne alınacaktır.

Aşağıdaki tanımlarda $(m_1 - SOP)$'nin yerel ve kesin yerel çözüm tanımları verilmiştir.

Tanım 5.2.1. *Her $x \in B_n(x_0, \varepsilon) \cap dom(F) \setminus \{x_0\}$ için $F(x) \npreceq_C^{m_1} F(x_0)$ ($F(x_0) \npreceq_C^{m_1} F(x)$) olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı varsa x_0'a $(m_1 - SOP)$'nin bir yerel minimal (maksimal) çözümü denir.*

Tanım 5.2.2. *Her $x \in B_n(x_0, \varepsilon) \cap dom(F) \setminus \{x_0\}$ için $F(x_0) \prec_C^{m_1} F(x)$ ($F(x) \prec_C^{m_1} F(x_0)$) olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı varsa x_0'a $(m_1 - SOP)$'nin bir kesin yerel minimal (maksimal) çözümü denir.*

$(m_1 - SOP)$ probleminin kesin yerel çözümü için bir yeterli optimallik koşulu aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 5.2.3. *$F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^p$ kompakt değerli dönüşüm, $\bar{x} \in int(dom(F))$ olsun. Her $x \in B_n(\bar{x}, \varepsilon) \setminus \{\bar{x}\}$ için*

$$L||x - \bar{x}||\mathbb{B}_p \subset F(x)\dot{-}F(\bar{x}) \tag{5.6}$$

olacak şekilde $\varepsilon > 0$ sayısı ve pozitif L sabiti varsa $\bar{x}$, $(m_1 - SOP)$'nin kesin yerel minimum çözümüdür. Ayrıca her $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$ için $\{0_n\} \prec_C^{m_1} D_M F(\bar{x}, d)$ olur.

Kanıt. Her $x \in B_n(\bar{x}, \varepsilon) \setminus \{\bar{x}\}$ için $L||x - \bar{x}||\mathbb{B}_p \subset F(x)\dot{-}F(\bar{x})$ olduğundan her $x \in B_n(\bar{x}, \varepsilon) \setminus \{\bar{x}\}$ için $\left(F(x)\dot{-}F(\bar{x})\right) \cap int(C) \neq \emptyset$ elde edilir. Böylece her $x \in B_n(\bar{x}, \varepsilon) \setminus \{\bar{x}\}$ için $F(\bar{x}) \prec_C^{m_1} F(x)$ olur. O halde $\bar{x}$, $(m_1 - SOP)$'nin kesin yerel minimum çözümüdür.

$d \in \mathbb{R}^n$ olsun. (5.6)'dan her $t \in (0, t_0)$ için

$$Lt||d||\mathbb{B}_p \subset F(\bar{x} + td)\dot{-}F(\bar{x}) \tag{5.7}$$

olacak şekilde $t_0 > 0$ vardır. (5.7) kapsamında her iki taraf t'ye bölünürse

$$L||d||\mathbb{B}_p \subset \frac{F(\bar{x} + td)\dot{-}F(\bar{x})}{t}$$

elde edilir. Her $z \in L||d||\mathbb{B}_p$ için $t \in (0, t_0)$ aralığında $z_t = z$ olacak şekildeki $\{z_t\}_{t \in (0,t_0)}$ sabit ağı seçilirse $z \in D_M F(\bar{x}, d)$ olur. Dolayısıyla $L||d||\mathbb{B}_p \subset D_M F(\bar{x}, d)$ bulunur. O halde $D_M F(\bar{x}, d) \cap int(C) \neq \emptyset$ olur. Böylece $\{0\} \prec_C^{m_1} D_M F(\bar{x}, d)$ elde edilir. □

$(m_1 - SOP)$'nin yerel çözümü için bir gerekli optimallik koşulu aşağıda verilmiştir.

Teorem 5.2.4. *$F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^p$ kompakt değerli dönüşüm ve $\bar{x} \in int(domF)$ olsun. $\bar{x}$, $(m_1 - SOP)$'nin bir yerel maksimal çözümü ve F, $\bar{x}$ noktasında M-yönlü türevlenebilir ise her $d \in \mathbb{R}^n$ için $\{0\} \not\prec_C^{m_1} D_M F(\bar{x}, d)$ olur.*

Kanıt. $\bar{x}$, $(m_1 - SOP)$'nin bir yerel maksimal çözümü olduğundan, her $x \in B_n(\bar{x}, \varepsilon) \setminus \{\bar{x}\}$ için

$$F(\bar{x}) \not\preceq_C^{m_1} F(x) \tag{5.8}$$

olacak şekilde $\varepsilon > 0$ vardır. Keyfi $d \in \mathbb{R}^n$ ve her $t \in (0, t_0)$ için $\bar{x} + td \in B_n(\bar{x}, \varepsilon)$ olacak şekilde $t_0 > 0$ vardır. Böylece her $t \in (0, t_0)$ için

$$F(\bar{x}) \not\preceq_C^{m_1} F(\bar{x} + td)$$

olur. (5.8)'den

$$\left(F(\bar{x} + td) \dot{-} F(\bar{x})\right) \cap C = \emptyset$$

elde edilir. C koni olduğundan

$$\left(\frac{F(\bar{x} + td) \dot{-} F(\bar{x})}{t}\right) \cap C = \emptyset$$

ve dolayısıyla $\limsup\limits_{t \to 0^+} \dfrac{F(\bar{x} + td) \dot{-} F(\bar{x})}{t} \cap int(C) = \emptyset$ olur. O halde $D_M F(\bar{x}, d) \cap int(C) = \emptyset$ yani $(D_M F(\bar{x}, d) \dot{-} \{0\}) \cap int(C) = \emptyset$ elde edilir. Buradan $\{0\} \not\prec_C^{m_1} D_M F(\bar{x}, d)$'dir. □

Sıradaki teoremde $(m_1 - SOP)$'nin yerel maksimal çözümü için bir yeterli optimallik koşulu verilmiştir.

Teorem 5.2.5. *$F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^p$ kompakt değerli dönüşüm, $\bar{x} \in int(domF)$ ve F $\bar{x}$ noktasında M-yönlü türevlenebilir olsun. Aynı zamanda herhangi bir $d \in \mathbb{R}^n$ yönü için $d_k \to d$ ve $t_k \to 0^+$ olan her $\{d_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ve $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ dizileri için*

$$\emptyset \neq \limsup_{k \to \infty} \frac{F(\bar{x} + t_k d_k) \dot{-} F(\bar{x})}{t_k} \cap C \subset D_M F(\bar{x}, d) \tag{5.9}$$

olsun. Her $d \in \mathbb{R}^n$ için $\{0\} \not\preceq_C^{m_1} D_M F(\bar{x}, d)$ ise $\bar{x}$, $(m_1 - SOP)$'nin bir yerel maksimal çözümüdür.

Kanıt. Her $d \in \mathbb{R}^n$ için $\{0\} \not\preceq_C^{m_1} D_M F(\bar{x}, d)$ olduğundan $(D_M F(\bar{x}, d) \dot{-} \{0\}) \cap C = \emptyset$ yani

$$D_M F(\bar{x}, d) \cap C = \emptyset \tag{5.10}$$

olur. Kabul edelim ki $\bar{x}$, $(m_1 - SOP)$'nin bir yerel maksimal çözümü olmasın. O zaman her $k \in \mathbb{N}$ için $F(\bar{x}) \preceq_C^{m_1} F(x_k)$ olacak şekilde en az bir $x_k \in B_n(\bar{x}, \frac{1}{k})$ dizisi vardır. Aynı zamanda $x_k \to \bar{x}$ olur. Böylece her $k \in \mathbb{N}$ için $x_k = \bar{x} + t_k d_k$,

$||d_k|| = 1$ ve $t_k \to 0^+$ olan $\{d_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ ve $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ dizileri vardır. $\{d_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi sınırlı olduğundan, yakınsak bir alt dizisi vardır. Genelliği bozmadan yakınsak alt dizi $\{d_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ve $d_k \to \bar{d}$ olsun. O halde her $k \in \mathbb{N}$ için

$$F(\bar{x}) \preceq_C^{m_1} F(\bar{x} + t_k d_k)$$

yani

$$\left(\frac{F(\bar{x} + t_k d_k) \dot{-} F(\bar{x})}{t_k}\right) \cap C \neq \emptyset$$

bulunur. Böylece (5.9)'dan $D_M F(\bar{x}, \bar{d}) \cap C \neq \emptyset$ elde edilir. Bu ise (5.10) ile çelişir. Dolayısıyla $\bar{x}$ $(m_1 - SOP)$'nin bir yerel maksimal çözümü olur. □

Örnek 5.2.6. *$F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}^2$ küme değerli dönüşümü her $x \in \mathbb{R}$ için*

$$F(x) = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 + b^2 \leq x^2 + 1\}$$

olmak üzere

$$(m_1 - SOP) \begin{cases} \min F(x) \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

problemini göz önüne alınsın.

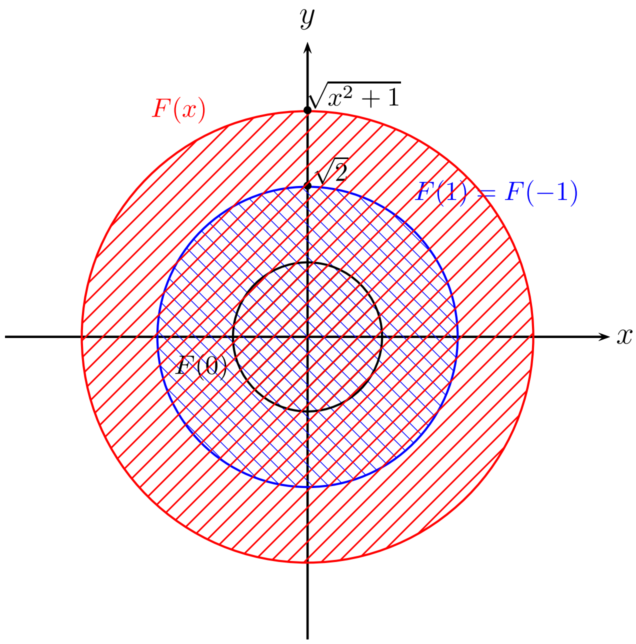
Şekil 5.5'den de görülebileceği gibi her $x \in \mathbb{R}$ için $F(x)$ kompakt ve $0 \in int(dom(F))$'dir. Her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in B(0, \varepsilon) \setminus \{0\}$ için

$$L||x - 0||\mathbb{B}_2 \subset F(x) \dot{-} F(0)$$

yani

$$L||x||\mathbb{B}_2 \subset F(x) \tag{5.11}$$

olacak şekilde $L > 0$ vardır. Gerçekten her $L \in (0, 1]$ için (5.11) sağlanır. O halde Teorem 5.2.3'den 0, $(m_1 - SOP)$'nin kesin yerel minimum çözümüdür. Aynı zamanda $d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için



Şekil 5.5: *$F(x) = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2+b^2 \leq x^2+1\}$ küme değerli dönüşümünün bazı görüntü kümeleri*

$$
\begin{aligned}
D_M F(0,d) &= \limsup_{t\to 0^+} \frac{F(0+td)\dot{-}F(0)}{t} \\
&= \limsup_{t\to 0^+} \frac{\left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2+b^2 \leq \left(\sqrt{(td)^2+1}-1\right)^2\right\}}{t} \\
&= \frac{\left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2+b^2 \leq (td)^2+2-2\sqrt{(td)^2+1}\right\}}{t} \\
&= \limsup_{t\to 0^+} \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2+b^2 \leq d^2\} \\
&= B_2((0,0),|d|)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece her $d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için $D_M F(0,d) \cap int(C) \neq \emptyset$ yani $\{0\} \prec_C^{m_1} D_M F(0,d)$ elde edilir.

5.3. ℓ-yönlü Türev ile M-yönlü Türevin Karşılaştırılması

Bu kısımda $(\ell - SOP)$'nin optimallik koşullarını elde etmek için Pilecka [40] tarafından tanımlanan ℓ-yönlü türev ile M-yönlü türev arasındaki ilişkiler incelenmiştir. $C \subset \mathbb{R}^n$ sivri, kapalı, konveks ve içi boştan farklı bir koni olmak üzere ℓ-yönlü türevi tanımlamak için kullanılan ℓ-fark kavramı aşağıda verilmiştir.

Tanım 5.3.1. *[40] $A, B \subset \mathbb{R}^n$ olsun.*

$$A \ominus_\ell B := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x + B \subset A + C\} = (A + C)\dot{-}B$$

şeklinde tanınlanan kümeye A ve B kümelerinin ℓ-farkı denir.

Uyarı 5.3.2. *ℓ-fark ile Minkowski fark arasında aşağıdaki ilişkiler elde edilmiştir:*

(i) ℓ-fark tanımında koniye ihtiyaç varken Minkowski farkta koniye ihtiyaç yoktur.

(ii) $A\dot{-}B \subset A \ominus_\ell B$'dir. Gerçekten $A\dot{-}B = \emptyset$ olduğunda kapsam sağlanır. $A\dot{-}B \neq \emptyset$ olduğunda en az bir $z \in \mathbb{R}^n$ için $z \in A\dot{-}B$ olur. O halde $z + B \subset A + C$ olur. Böylece $z \in A \ominus_\ell B$ elde edilir.

(iii) A, B kümeleri kompakt, konveks ve boştan farklı olduğunda $(A\dot{-}B) + C \subset A \ominus_\ell B$'dir.

(iv) Minkowski fark sınırlı kümeler için sınırlı iken ℓ-fark daima sınırsızdır.

Tanım 5.3.3. *[40] $F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^p$ kompakt, konveks değerli dönüşüm, $x \in int(dom(F))$ ve $d \in \mathbb{R}^n$ olsun.*

$$DF(x, d) := \limsup_{t \to 0^+} \frac{F(x + td) \ominus_\ell F(x)}{t}$$

kümesine F'nin x noktasındaki d yönündeki yönlü türevi denir.

ℓ-yönlü türevi hesaplayabilmek için koniye ve konveksliğe ihtiyaç vardır. Ayrıca herhangi bir $x \in int(dom(F))$ ve $d \in \mathbb{R}^n$ için Uyarı 5.3.2 (ii)'den $D_M F(x, d) \subset DF(x, d)$ olduğu kolayca görülebilir. Farklı küme değerli dönüşümlerin yönlü türevlerin hesaplandığı örnekler aşağıda yer almaktadır.

Örnek 5.3.4. *$F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}^2$ küme değerli dönüşümü her $x \in \mathbb{R}$ için*

$$F(x) = conv\{(x, x), (x + 1, x)\}$$

şeklinde tanımlansın. Bir $x \in \mathbb{R}$ ve $d \in \mathbb{R}$ için sırasıyla Myönlü türev ile ℓ-yönlü türev hesaplandığında,

$$\begin{aligned} D_M F(x,d) &= \limsup_{t\to 0^+} \frac{F(x+td) \dot{-} F(x)}{t} \\ &= \limsup_{t\to 0^+} \frac{\{(td,td)\}}{t} \\ &= \limsup_{t\to 0^+} \{(d,d)\} \\ &= \{(d,d)\} \\ &= \{d(1,1)\}, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} DF(x,d) &= \limsup_{t\to 0^+} \frac{F(x+td) \ominus_\ell F(x)}{t} \\ &= \limsup_{t\to 0^+} \frac{\{(td,td)\}+C}{t} \\ &= \limsup_{t\to 0^+} \{(d,d)\}+C \\ &= \{(d,d)\}+C \\ &= [d,\infty]\times[d,\infty] \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 5.3.5. $F : [0, \frac{\pi}{2}] \rightrightarrows \mathbb{R}^2$ *küme değerli dönüşümü her* $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ *için*

$$F(x) = conv\{(0,0), (\cos x, \sin x)\}$$

şeklinde tanımlansın.

$x \in (0, \frac{\pi}{2})$ *ve* $d \in \mathbb{R}$ *olsun. Örnek 5.1.5'de* $D_M F(x,d) = \emptyset$ *olduğu gösterilmişti. Böylece* F *küme değerli dönüşümü hiçbir noktada* M*-yönlü türevlenemezdir.*

ℓ*-yönlü türev hesaplandığında*

$$\begin{aligned} DF(x,d) &= \limsup_{t\to 0^+} \frac{F(x+td) \ominus_\ell F(x)}{t} \\ &= \limsup_{t\to 0^+} \frac{C}{t} \\ &= \limsup_{t\to 0^+} C \\ &= C \end{aligned}$$

bulunur. O halde F *her noktada* ℓ*-yönlü türevlenebilirdir.*

ℓ-yönlü türev $(\ell - SOP)$ için optimallik çözümleri sunmaktadır [40]. M-yönlü türev ise $(m_1 - SOP)$ için konvekslik şartına da gerek duymadan optimallik koşulları vermektedir. $\preceq_C^{m_1}$ sıralaması ile $\preceq_C^{\ell}$ sıralaması arasında herhangi bir gerektirme olmadığından optimallik koşulları arasında da bir ilişki olmayabilir. Buna ek olarak, $\preceq_C^{s}$ bağıntısına göre verilen küme optimizasyon problemini çözebilmek için Jahn [41], Dempe ve Pilecka [39] yönlü türevler tanımlamışlardır. Yine benzer şekilde $\preceq_C^{s}$ bağıntısı $\preceq_C^{m_1}$ sıralamasından farklı olduğundan bu yönlü türevlerle verilen optimallik koşulları ile M-yönlü türev ile verilen optimallik koşulları kıyaslanamaz.

Literatürde küme değerli dönüşümler için tanımlanmış türevlerin geri kalan kısmı da verilen optimizasyon probleminin vektör yaklaşımına göre çözümüne dair optimallik koşulları vermektedir [8, 12, 15, 32]. Küme yaklaşımı ile vektör yaklaşımı birbirinden farklı yaklaşımlar olduklarından bu türevler ile M-yönlü türev arasındaki ilişkiler bu çalışmada araştırılmamıştır.

6. SONUÇ

Küme değerli optimizasyon pek çok alanda uygulaması olan, her geçen gün araştırmacıların daha çok ilgi gösterdiği hızla gelişen bir çalışma alanıdır. Küme değerli optimizasyon problemlerini çözebilmek için skalerizasyon, vektörizasyon, yönlü türev gibi araçlar kullanılmaktadır. Literatürde $(s-SOP)$'yi çözebilmek için verilen vektörizasyon yöntemlerinde konvekslik şartı aranmaktaydı. Oysa bu çalışmada verilen Gerstewitz vektörizasyonu ile konvekslik şartı aranmaksızın optimallik koşulları elde edilmiştir.

Bugüne kadar küme aileleri üzerinde verilen sıralama bağıntılarının hiçbiri kısmi sıralama bağıntısı değildir. Bu çalışmada, küme aileleri üzerinde $\preceq_C^{m_1}$ ve $\preceq_C^{m_2}$ kısmi sıralama bağıntıları tanımlanmıştır. Üstelik bu tanımlamalarla daha önce iki aşamada belirlenen etkin kümeler tek aşamada belirlenmiştir. Bu sıralamalarla tanımladığımız $(m_1 - SOP)$ ve $(m_2 - SOP)$'nin çözümlerini kolayca belirleyebilmek için skalerizasyon yöntemleri elde edilmiştir.

Bunlara ek olarak, küme değerli dönüşümler için M-yönlü türev tanımlanmış, özellikleri incelenmiş ve bazı varlık teoremleri elde edilmiştir. Daha sonra M-yönlü türev yardımıyla (m_1-SOP) için gerekli ve yeterli optimallik koşulları elde edilmiştir. Ayrıca $(\ell - SOP)$'nin optimallik koşullarını elde etmek için kullanılan yönlü türev ile M-yönlü türev arasındaki ilişkiler araştırılmıştır. Çalışma boyunca yapılanlar örneklerle açıklanmıştır.

KAYNAKÇA

[1] Bazaraa, M.S., Sherali H.D. ve Shetty C.M. (2006). Nonlinear programming: theory and algorithms. New York: Wiley.

[2] Balcı, M., (2012). Analiz I (8. baskı). İstanbul: Sürat Üniversite Yayınları.

[3] Moreau J.J. (1963). Inf-convolution des fonctions numériques sur un espace vectoriel. Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences Paris, 256, 5047-5049.

[4] Hiriart-Urruty J.-B. ve Lemaréchal C. (2001). Fundamentals of convex analysis. Berlin: Springer Verlag.

[5] Azimov, A.Y. ve Kasimov, R.N. (1999). On weak conjugacy, weak subdifferentials and duality with zero gap in nonconvex optimization. Int. J. of Appl. Math., 1, 171-192.

[6] Azimov, A.Y. ve Kasimov, R.N. (2002). Stability and duality of nonconvex problems via augmented Lagrangian. Cybernetics and System Analysis, 38, 412-421.

[7] Ehrgott, M. (2005). Multicriteria optimization. Berlin: Springer.

[8] Jahn, J. (2004). Vector optimization, Berlin: Springer.

[9] Luc, D.T. (1989). Theory of vector optimization. Berlin: Springer.

[10] Chen, G., Huang, X. ve Yang, X. (2005). Vector optimization. Berlin: Springer.

[11] Kasimbeyli, R. (2013). A conic scalarization method in multi-objective optimization. J. Glob. Optim., 56, 279-297.

[12] Zemin, L. (1996). The optimality conditions of differentiable vector optimization problems. Journal of Mathematical Analysis and Appplications, 201, 35-43.

[13] Luenberger, D.G. (1969). Optimization by vector space methods. New York: John Wiley and Sons.

[14] Thibault L. (1982). Subdifferentials of nonconvex vector-valued functions. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 86, 319-344.

[15] Sachs, E. (1978). Differentiability in optimization theory, Math. Operationsforsch. Statist. Ser. Optim., 9, 497-513.

[16] Küçük, Y., Atasever, İ. ve Küçük, M. (2011). Generalized weak subdifferentials. Optimization, 60(5), 537-552.

[17] Hamel, A.H. ve Heyde, F. (2010). Duality for set-valued measures of risc. SIAM J. Financ. Math. 1, 66-95.

[18] Neukel, N. (2011). Private communication. Erlangen: University of Erlangen-Nuremberg.

[19] Klein, E. ve Thompson, A.C. (1984). Theory of correspondences. Including applications to mathematical economics. New York: Canad. Math. Soc. Ser. Monographs Adv. Texts, Wiley and Sons.

[20] Chinchuluun, A., Pardalos, P.M., Migdalas, A. ve Pitsoulis, L. (2008). Pareto optimality, game theory and equilibria. Berlin: Springer.

[21] Polak, E. (1997). Optimization algorithms and consistent approximations. Newyork: Springer.

[22] Aubin J.P. ve Frankowska H. (1990). Set-valued analysis. Boston: Birkhäuser.

[23] Aubin, J.P. ve Cellina, A. (1984). Differential inclusions. Set-valued and viability theory. Berlin: Grundlehren Math. Wiss., Springer-Verlag.

[24] Chen, G.Y. ve Jahn, J. (1998). Optimality conditions for set-valued optimization problems. Set-valued optimization. Math. Methods Oper. Res., 48, 187-200.

[25] Jahn, J. ve Ha, T.X.D. (2011). New order relations in set optimization. Journal of Optimization Theory Applications, 148, 209-236.

[26] Kuroiwa, D. (2003). Existence theorems of set optimization with set-valued maps. Journal of Information and Optimization Science, 24, 73-84.

[27] Kuroiwa, D. (2001). On set-valued optimization. Nonlinear Analysis, 47, 1395-1400.

[28] Kuroiwa, D. (1998). The natural criteria in set-valued optimization. RIMS Kokyuroku, 1031, 85-90.

[29] Hernández, E. ve Rodríguez-Marín, L. (2007). Nonconvex scalarization in set optimization with set-valued maps. J. Math. Anal. Appl., 325, 1-18.

[30] Gutieerz, C., Jimenez, B., Miglierina, E. ve Molho, E. (2015). Scalarization in set optimization with solid and nonsolid orderin cones. J. Glob. Optim., 61, 525-552.

[31] Gerth, C. (Tammer) ve Weidner P. (1990). Nonconvex separation theorems and some applications in vector optimization. J. Optim. Theory Appl., 67, 297-320.

[32] Khan, A.A., Tammer C. ve Zălinescu, C. (2015). Set-valued optimization. Heidelberg: Springer.

[33] Xu, Y.D. ve Li, S.J. (2016). A new nonlinear scalarization function and applications. Optimization, 65, 207-231.

[34] Küçük, M., Soyertem, M., Küçük Y. ve Atasever, İ. (2012). Vectorization of set-valued maps with respect to total ordering cones and its applications to set-valued optimization problems. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 385, 285-292.

[35] Küçük, M., Soyertem, M. ve Küçük Y. (2012). The generalization of total ordering cones and vectorization to separabe Hilbert space. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 389, 1344-1351.

[36] Soyertem, M. (2012). Vektör ve küme değerli dönüşümler için yönlü türev ve uygulamaları. Doktora Tezi. Eskişehir: Anadolu Üniversitesi.

[37] Jahn, J. (2013). Vectorization in set Optimization. Journal of Optimization Theory Applications, 167, 783-795.

[38] Kuroiwa, D. (2008). On derivatives of set-valued maps in set optimization. Journal of nonlinear and convex analysis, 1611, 51-55.

[39] Dempe S. ve Pilecka, M. (2016). Optimality conditions for set-valued optimisation problems using a modified Demyanov difference. JOTA, 171, 402-421.

[40] Pilecka, M. (2014). Optimality conditions in set-valued programming using the set criterion. Thecnical University of Freiberg, Preprint 2014-02.

[41] Jahn, J. (2015). Directional derivatives in set optimization with the set less order relation. Taiwanese Journal Of Mathematics, 19, 737-757.

[42] Kuroiwa, D., Tanaka, T. ve Ha, T.X.D. (1997). On cone convexity of set-valued maps. Nonlinear Anal-Theor., 30(3), 1487-1496.

[43] Pallaschke, D. ve Urbański, R. (2002). Pairs of compact convex sets. Boston: Kluwer Academic Publisher.

[44] Schneider, R. (1993). Convex Bodies: The Brunn-Minkowski theory. Cambridge: Cambridge University Press.

[45] `http://evds.tcmb.gov.tr/cgi-bin/famecgi?cgi=$ozetweb&DIL=TR&ARAVERIGRUP=bie_dkdovizgn.db` (Erişim Tarihi: 14.09.2017)

[46] Ansari, Q.H. ve Yao, J.-C. (2012). Recent developments in vector optimization. Berlin: Springer-Verlag.

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı	:	EMRAH KARAMAN
Yabancı Dil	:	İNGİLİZCE
Doğum Yeri ve Yılı	:	EREĞLİ - 1986
E-Posta	:	e.karaman42@gmail.com

Eğitim ve Mesleki Geçmişi:

- 2012-2017, Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Uygulamalı Matematik Bilim Dalı, Doktora
- 2012-2017, Araştırma Görevlisi, Anadolu Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü
- 2010-2012, Araştırma Görevlisi, Karabük Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü
- 2008-2010, Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı, Yüksek lisans
- 2004-2008, Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Lisans

Yayınları ve Bilimsel/Sanatsal Faaliyetleri:

- 2017, Özet Bildiri, On Some Scalarizations for Set Optimization, ICOME 2017 International Conference on Mathematics and Engineering , İstanbul-TURKEY.
- 2016, Özet Bildiri, Partial Order Relations for Set Optimization, 14th EUROPT 2016 Workshop on Advances in Continuous Optimization, Warsaw-POLAND.
- 2015, Özet Bildiri, Nonconvex Vectorization Derived by an Extension of Gerstewitz's Function, 13th EUROPT Workshop on Advances in Continuous Optimization, Edinburgh-İSKOÇYA.

- Karaman, E., Soyertem M., Atasever Güvenç İ., Tozkan, D., Küçük, M., Küçük, Y. (2017). Partial Order Relations of Sets and Scalarizations for Set Optimization. Positivity, DOI 10.1007/s11117-017-0544-3.
- Karaman, E., Yıldız, M.K. (2014). Oscillatory Behavior Of A Higher-Order Nonlinear Neutral Type Functional Difference Equation With Oscillating Coefficients. Applied Mathematics E-Notes, 14, 242-249.
- Yıldız, M.K., Karaman, E., Durur H. (2011). Oscillation and Asymptotic Behaviour of a Higher-Order Nonlinear Neutral-Type Functional Differential Equation with Oscillating Coefficients. Journal of Applied Mathematics, 2011, 1-8.