FUZZY KÜME DİZİLERİ
VE
FUZZY KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLER

Yüksek Lisans Tezi

HASAN YARADANAKUL

Eskişehir, 2017

FUZZY KÜME DİZİLERİ VE FUZZY KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLER

HASAN YARADANAKUL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yard. Doç. Dr. Serpil ALTAY

Eskişehir

Anadolu Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Ocak, 2017

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Hasan YARADANAKUL'un **"Fuzzy Küme Dizileri ve Fuzzy Küme Değerli Dönüşümler"** başlıklı tezi 18/01/2017 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek "Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği"nin ilgili maddeleri uyarınca Matematik Anabilim dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

		Adı - Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	:	Yard. Doç. Dr. Serpil ALTAY	....
Üye	:	Prof. Dr. Haluk HÜSEYİN	....
Üye	:	Doç. Dr. Ali Serdar NAZLIPINAR	....

Enstitü Müdürü

ÖZET

FUZZY KÜME DİZİLERİ VE FUZZY KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLER

Hasan YARADANAKUL

Matematik Anabilim Dalı

Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ocak, 2017

Danışman: Yard.Doç. Dr. Serpil ALTAY

Bu tezde, küme değerli dönüşümlerin bazı özellikleri, fuzzy kümeler için araştırılmıştır. Bu nedenle, küme dizilerinin limiti, küme değerli dönüşümlerin limit, türev ve grafiği ile tanjant koni hakkında birtakım önermeler incelenmiştir. Fuzzy kümeler ve fuzzy küme dizilerinin limiti incelendikten sonra son bölümde, fuzzy küme değerli dönüşümlerin limit, türev ve grafikleri araştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Tanjant Koni, Fuzzy Küme, Fuzzy Küme Değerli Dönüşüm.

ABSTRACT

FUZZY SET SEQUENCES AND FUZZY SET-VALUED MAPPINGS

Hasan YARADANAKUL
Department of Mathematics
Anadolu University, Graduate School of Sciences, January, 2017
Supervisor: Asst. Prof. Dr. Serpil ALTAY

In this thesis, some properties of set-valued mappings are investigated for fuzzy sets. Therefore, some propositions are considered about limits of sequences of set, limits, derivative and graf of set-valued mappings with tangent cone. After fuzzy sets and limit of sequences of fuzzy sets are proposed, in last section; limit, derivative and grafs of fuzzy set-valued mappings are investigated.

Keywords: Tangent Cone, Fuzzy Set, Fuzzy Set-Valued Mappings.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans çalışmamın her safhasında bana desteğini esirgemeyen Yard. Doç. Dr. Serpil ALTAY' a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Hasan YARADANAKUL

Ocak, 2017

18/01/2017

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilemeyen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Anadolu Üniversitesi tarafından kullanılan bilimsel intihal tespit programıyla tarandığını ve hiçbir şekilde intihal içermediğini beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm.

Hasan YARADANAKUL

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}$	:	Gerçel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	:	n-boyutlu Öklid uzayı
$C(\mathbb{R}^n)$	:	$\mathbb{R}^n$' nin kapalı alt kümeleri ailesi
$K(\mathbb{R}^n)$	:	$\mathbb{R}^n$' nin konveks alt kümeleri ailesi
$CK(\mathbb{R}^n)$	:	$\mathbb{R}^n$' nin kapalı konveks alt kümeleri ailesi
$\rho(C, D)$	:	$\mathbb{R}^n$' nin alt kümeleri C ve D arasındaki Hausdorff uzaklığı
$T(S; x_0)$	:	S kümesinin x_0 noktasındaki tanjant konisi
Graf(F)	:	F küme değerli dönüşümünün grafiği
$DF(x_0, y_0)$	:	F' nin (x_0, y_0) noktasındaki contingent türevi
$[\tilde{s}]_\alpha$	:	S' nin α seviye kümesi
$hypo(\tilde{s})$	:	$\tilde{s}$' nin fuzzy hypografı
$[\tilde{F}(x)]_\alpha$	:	Fuzzy küme değerli dönüşümünün limiti
$T(\tilde{s}; x_0)$	:	$\tilde{s}$' nın x_0 noktasındaki fuzzy tanjant konisi
Graf$(\tilde{F}(x, y))$	:	$\tilde{F}$' nin fuzzy grafı
Graf$(D\tilde{F}(x_0, y_0))$	:	$\tilde{F}$' nin fuzzy contingent konisi

GİRİŞ

Küme dizilerinin limitleri, küme değerli dönüşümlerin limit ve türevlerinin çok çeşitli alanlarda uygulamaları bulunmaktadır. Bunlardan bazıları varyasyon hesabı, küme değerli optimizasyon, kararlılık teorisi olup detaylı olarak [1,9,10]' da incelenmiştir. Küme dizileri ve küme değerli dönüşümler için verilen kavramlar fuzzy küme dizileri ve fuzzy küme değerli dönüşümler için genelleştirilebilir. Bu bağlamda [8,11]' de fuzzy sayılar veya sınırlı destekli fuzzy küme dizileri için limit kavramı araştırılmış olmasına karşın, fuzzy küme değerli dönüşümler için limit kavramı ile ilgili çalışma sayısı oldukça azdır [7]. [3,4]' de fuzzy sayıları ya da sınırlı destek değerli fuzzy küme dönüşümleri için limit ve türev kavramı incelenmiştir. [7]' de fuzzy küme değerli dönüşümler için limit ve türev kavramı incelenmiştir. Bu kavramların fuzzy küme değerli optimizasyon teorisi ve karalılık teorisinde uygulamaları araştırılmaktadır.

1 TEMEL KAVRAMLAR

$\lambda \in \Omega$ ve $S_\lambda(.) : \mathbb{R}^n \to (0,1]$ tanımlı olsun. $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için

$$S_*(x) = \inf_{\lambda \in \Omega} S_\lambda(x) \quad , \quad S^*(x) = \sup_{\lambda \in \Omega} S_\lambda(x)$$

olmak üzere $S_*(.) : \mathbb{R}^n \to (0,1]$ ve $S^*(.) : \mathbb{R}^n \to (0,1]$ fonksiyonlarını tanımlayalım. Bu durumda

$$S_* = \bigwedge_{\lambda \in \Omega} S_\lambda \quad , \quad S^* = \bigvee_{\lambda \in \Omega} S_\lambda$$

olarak gösterilecektir. $\mathbb{N}$ tüm doğal sayıların kümesi olmak üzere

$$\mathcal{N}_\infty = \{N \subset \mathbb{N} : \mathbb{N} \backslash N sonlu\}$$

$$\mathcal{N}_\infty^\sharp = \{N \subset \mathbb{N} : N sonsuz\}$$

olsun.

Açıktır ki $\mathcal{N}_\infty \subset \mathcal{N}_\infty^\sharp$' dir. $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ dizisinin bir alt dizisi $N \in \mathcal{N}_\infty^\sharp$ olmak üzere $\{x_k\}_{k \in N}$' dir.

$k \in \mathbb{N}$ ve $k \to \infty$ iken $\lim_k$, $\lim_{k \to \infty}$ ya da $\lim_{k \in \mathbb{N}}$ şeklinde yazılabilir fakat N, $\mathcal{N}_\infty$ ya da $\mathcal{N}_\infty^\sharp$ kümelerinin elemanı iken, $\{x_k\}_{k \in N}$ yakınsak olduğu durumlarda $\lim_{k \in N}$ ve $\lim_{k \underset{N}{\to} \infty}$ şeklinde gösterilir.

Bir $C \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin kapanışı $cl(C)$ ile gösterilir. Eğer C kümesi kapalı, konveks ve kapalı konveks ise sırasıyla

$$C \in C(\mathbb{R}^n) \quad , \quad C \in K(\mathbb{R}^n) \quad , \quad C \in CK(\mathbb{R}^n)$$

şeklinde gösterilir.

2 KÜME DİZİLERİNİN LİMİTİ

Tanım 2.1. *[10] $\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\mathbb{R}^n$' nin altkümelerinden oluşan bir dizi olmak üzere,*

$$\liminf_{k\to\infty} C_k = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists N \in \mathcal{N}_\infty, \exists x_k \in C_k \ (k \in N), x_k \underset{N}{\to} x\},$$

kümesine $\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ küme dizisinin alt limiti,

$$\limsup_{k\to\infty} C_k = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists N \in \mathcal{N}_\infty^\sharp, \exists x_k \in C_k \ (k \in N), x_k \underset{N}{\to} x\}$$

kümesine ise $\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ küme dizisinin üst limiti denir. Eğer alt limit ve üst limit var ve birbirine eşit ise limit vardır denir ve

$$\lim_{k\to\infty} C_k = \liminf_{k\to\infty} C_k = \limsup_{k\to\infty} C_k$$

dir.

$\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ dizisinin alt ve üst limiti her zaman olmasına rağmen limiti olmayabilir. Fakat bu limitler bazen boş küme olabilmektedir.

$\forall k \in \mathbb{N}$ için $C_k \neq \emptyset$ olduğunda $\liminf\limits_{k\to\infty} C_k$ kümesi $x_k \in C_k$ olacak şekilde tüm $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ dizilerinin limitlerini içerir. $\limsup\limits_{k\to\infty} C_k$ kümesi ise bu dizilerin yığılma noktalarını içerir. $\mathcal{N}_\infty \subset \mathcal{N}_\infty^\sharp$ olduğundan

$$\liminf_{k\to\infty} C_k \subset \limsup_{k\to\infty} C_k$$

kapsamı açıktır.

Örnek 2.1.

$$A = [2,5] \quad , \quad B = [3,7]$$

kümeleri tanımlansın. $\forall k \in \mathbb{N}$, k tek iken $C_k = A$, k çift iken $C_k = B$ olsun.

Öncelikle, $\liminf\limits_{k\to\infty} C_k$ ifadesini bulalım. k tek iken $[2,5]$ kümesi, çift iken de $[3,7]$ kümesi olduğundan, C_k' dan seçilen yakınsak dizilerin limitleri $[3,5]$ kümesinde olmalıdır. O halde

$$\liminf_{k\to\infty} C_k = [3,5]$$

olur. $\limsup\limits_{k\to\infty} C_k$ ise, C_k kümelerinden seçilen dizilerin yığılma noktaları olduğuna göre

$$\limsup_{k\to\infty} C_k = [2,7]$$

sonucu çıkar.

Önerme 2.1. *[10] $\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\mathbb{R}^n$' in altkümelerinin bir dizisi olsun.*

$$\liminf_{k\to\infty} C_k = \bigcap_{N\in\mathcal{N}_\infty^\sharp} cl(\bigcup_{k\in N} C_k)$$

$$\limsup_{k\to\infty} C_k = \bigcap_{N\in\mathcal{N}_\infty} cl(\bigcup_{k\in N} C_k)$$

Önerme 2.2. *[10] $\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{C_k^1\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{C_k^2\}_{k\in\mathbb{N}}$ dizileri $\mathbb{R}^n$' in altkümelerinden ve $C\subset\mathbb{R}^n$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

(i) Eğer C_k artan ise $(C_k\subset C_{k+1}\subset C_{k+2}\cdots)$ $\lim_k C_k = cl(\cup_{k\in\mathbb{N}} C_k)$.

(ii) Eğer C_k azalan ise $(C_k\supset C_{k+1}\supset C_{k+2}\cdots)$ $\lim_k C_k = \cap_{k\in\mathbb{N}} cl(C_k)$.

(iii) Eğer $C_k^1\subset C_k\subset C_k^2$, $k\in\mathbb{N}$ ve $C_k^1\to C$, $C_k^2\to C$ ise $C_k\to C$.

Kanıt. (i) C_k artan dizisi için alt limit ve üst limit tanımlarından;

$$\liminf_{k\to\infty} C_k = \bigcap_{N\in\mathcal{N}_\infty^\sharp} cl(\bigcup_{k\in N} C_k) = cl(\bigcup_{k\in N, N\in\mathcal{N}_\infty^\sharp} C_k) = cl(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k)$$

$$\limsup_{k\to\infty} C_k = \bigcap_{N\in\mathcal{N}_\infty} cl(\bigcup_{k\in N} C_k) = cl(\bigcup_{k\in N, N\in\mathcal{N}_\infty} C_k) = cl(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k)$$

elde edilir. $\liminf_k C_k = \limsup_k C_k$ olduğundan,

$$\lim_k C_k = cl(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k)$$

sonucuna ulaşılır.

(ii) C_k azalan dizisi için alt limit ve üst limit tanımlarından;

$$\liminf_{k\to\infty} C_k = \bigcap_{N\in\mathcal{N}_\infty^\sharp} cl(\bigcup_{k\in N} C_k) = \bigcap_{k\in N, N\in\mathcal{N}_\infty^\sharp} cl(C_k).$$

$$\limsup_{k\to\infty} C_k = \bigcap_{N\in\mathcal{N}_\infty} cl(\bigcup_{k\in N} C_k) = \bigcap_{k\in N, N\in\mathcal{N}_\infty} cl(C_k).$$

elde edilir. $\liminf\limits_{k\to\infty} C_k = \limsup\limits_{k\to\infty} C_k$ olduğundan

$$\lim_k C_k = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} cl(C_k)$$

sonucu elde edilir.

(iii)$\forall k\in\mathbb{N}$ için $C_k^1\subset C_k\subset C_k^2$

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k^1 \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k^2$$

için de sağlanır. Buradan

$$cl(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k^1) \subset cl(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k) \subset cl(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k^2)$$

yazılır. Sonuç olarak

$$\bigcap_{N\in\mathcal{N}_\infty^\sharp} cl(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k^1) \subset \bigcap_{N\in\mathcal{N}_\infty^\sharp} cl(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k) \subset \bigcap_{N\in\mathcal{N}_\infty^\sharp} cl(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k^2)$$

olur. □

Önerme 2.3. *[10] $\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{D_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ $\mathbb{R}^n$' de küme dizileri ve $C \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler doğrudur.*

(i) $\liminf_{k\to\infty} C_k, \limsup_{k\to\infty} C_k \in C(\mathbb{R}^n)$.

(ii) $\forall k \in \mathbb{N}$ *için* $cl(C_k) = cl(D_k)$ *oluyorsa* $\liminf_{k\to\infty} C_k = \liminf_{k\to\infty} D_k$, $\limsup_{k\to\infty} C_k = \limsup_{k\to\infty} D_k$ *olur.*

(iii) $\forall k \in \mathbb{N}$ *için* $C_k = C$ *ise* $\lim_{k\to\infty} C_k = cl(C)$ *olur.*

Kanıt. (i) Önerme 2.1' e göre, kapalı kümelerin keyfi arakesiti de kapalı olduğundan $\liminf_{k\to\infty} C_k, \limsup_{k\to\infty} C_k$ kümeleri $\mathbb{R}^n$' in kapalı kümeleridir.

(ii) $cl(C_k) = cl(D_k)$ ve $N \in \mathcal{N}_\infty^\sharp$ için

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} cl(C_k) = cl(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k),$$

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} cl(D_k) = cl(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} D_k)$$

olduğundan

$$\bigcap_{N\in\mathcal{N}_\infty^\sharp} cl(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k) = \bigcap_{N\in\mathcal{N}_\infty^\sharp} cl(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} D_k)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\liminf_{k\to\infty} C_k = \liminf_{k\to\infty} D_k$$

sonucuna ulaşılır. Benzer şekilde $N \in \mathcal{N}_\infty$ için

$$\bigcap_{N\in\mathcal{N}_\infty} cl(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k) = \bigcap_{N\in\mathcal{N}_\infty} cl(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} D_k)$$

olduğundan

$$\limsup_{k\to\infty} C_k = \limsup_{k\to\infty} D_k$$

elde edilir.

(iii) Önerme 2.1'den açıktır. □

Tanım 2.2. *[10] $C, D \subset \mathbb{R}^n$' in boş olmayan kapalı kümeleri olmak üzere C ve D kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığı;*

$$\rho(C, D) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |d_C(x) - d_D(x)|$$

biçiminde tanımlıdır. $d_C(x) = \inf_{y \in C} ||y - x||$, $d_D(x) = \inf_{y \in D} ||y - x||$ ve $||.||$ Öklid normunu gösterir.

Eğer $k \to \infty$ iken $\rho(C_k, C) \to 0$ ise $\mathbb{R}^n$' in boş olmayan kapalı altkümelerinin bir $\{C_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ dizisi, $C \subset \mathbb{R}^n$ boş olmayan kapalı kümesine ρ' ya göre yakınsaktır denir.

Önerme 2.4. *[10] $X \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bir küme, $k \in \mathbb{N}, C_k \subset X$ ve $C \subset X$ boş olmayan kapalı kümeler olsun. $\{C_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ dizisi C' ye Tanım 2.1' e göre yakınsaktır ancak ve ancak $\{C_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ dizisi ρ' ya göre C' ye yakınsaktır.*

Önerme 2.5. *[10] Eğer $\{C_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset K(\mathbb{R}^n)$ ise $\liminf_k C_k \in CK(\mathbb{R}^n)$.*

Kanıt. $C = \liminf_k C_k$ olsun. $x^0, x^1 \in C$ için bazı $N \in \mathcal{N}_\infty$ ve $\forall k \in N$

$$x_k^0 \to x^0 \quad , \quad x_k^1 \to x^1$$

olacak şekilde $x_k^0 \in C_k$ ve $x_k^1 \in C_k$ vardır. $\forall k$ için C_k konveks olduğundan keyfi $\lambda \in [0, 1]$ için

$$x_k^\lambda := (1 - \lambda)x_k^0 + \lambda x_k^1$$

ve

$$x^\lambda := (1 - \lambda)x^0 + \lambda x^1$$

denilirse, $x_k^\lambda \to x^\lambda$ olur. Dolayısıyla $x^\lambda \in C$ elde edilir. □

Önerme 2.6. *[10] $k \in \mathbb{N}$, $C_k \subset \mathbb{R}^n$, $C = \lim_{k \to \infty} C_k$ ve $N \in \mathcal{N}_\infty^\sharp$ ise*

$$C = \lim_{k \underset{N}{\to} \infty} C_k$$

dir.

2.1 Küme Değerli Dönüşümlerin Limitleri

$x \in \mathbb{R}^n$ için $F(x) \subset \mathbb{R}^m$ olacak şekildeki F dönüşümüne $\mathbb{R}^n$' den $\mathbb{R}^m$' ye küme değerli dönüşüm denir ve $F : \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^m$ şeklinde gösterilir. F küme değerli dönüşümü eğer $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için

$$F(x) \in C(\mathbb{R}^m) \quad , \quad F(x) \in K(\mathbb{R}^m) \quad , \quad F(x) \in CK(\mathbb{R}^m)$$

ise F dönüşümüne sırasıyla kapalı, konveks ve kapalı konveks küme değerli dönüşüm denir.

Tanım 2.3. *[10] $F : \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^m$ ve $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ olsun. F dönüşümünün $x \to \bar{x}$ iken alt limiti*

$$\liminf_{x \to \bar{x}} F(x) = \bigcap_{x_k \to \bar{x}} \liminf_{k \to \infty} F(x_k)$$

kümesi olarak tanımlanır. F dönüşümünün $x \to \bar{x}$ iken üst limiti ise,

$$\limsup_{x \to \bar{x}} F(x) = \bigcup_{x_k \to \bar{x}} \limsup_{k \to \infty} F(x_k)$$

kümesi olarak tanımlanır. Burada $\bigcap\limits_{x_k \to \bar{x}}$ ve $\bigcup\limits_{x_k \to \bar{x}}$ gösterimleri ile $x_k \to \bar{x}$ şeklindeki keyfi $\{x_k\}_{k \in N} \subset \mathbb{R}^n$ dizileri üzerinden birleşim ve kesişim kastedilmektedir. Eğer $x \to \bar{x}$ iken,

$$\liminf_{x \to \bar{x}} F(x) = \limsup_{x \to \bar{x}} F(x)$$

ise F' nin limiti vardır denir ve

$$\lim_{x \to \bar{x}} F(x) = \liminf_{x \to \bar{x}} F(x) = \limsup_{x \to \bar{x}} F(x)$$

şeklinde gösterilir.

Örnek 2.2.

$$A = [3, 5] \quad , \quad B = [2, 7]$$

olsun. $F, G : \mathbb{R} \rightsquigarrow \mathbb{R}$ küme değerli dönüşümü aşağıdaki şekilde tanımlansın. Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$F(x) = \begin{cases} A \quad , \quad x \leq 0 \\ B \quad , \quad x > 0 \end{cases}$$

$$G(x) = \begin{cases} A & , \quad x < 0 \\ B & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $\forall x_k \to 0$ *dizisi için*

$$\liminf_{x \to 0} F(x) = \bigcap_{x_k \to 0} \liminf_{k \to \infty} F(x_k)$$

eşitliğinden

$$\bigcap_{x_k \to 0} \liminf_{k \to \infty} F(x_k) = [3,5] = A \quad , \quad \bigcap_{x_k \to 0} \liminf_{k \to \infty} G(x_k) = [3,5] = A$$

olduğu görülür. Benzer şekilde keyfi $x_k \to 0$ *dizisi için*

$$\limsup_{x \to 0} F(x) = \bigcup_{x_k \to 0} \limsup_{k \to \infty} F(x_k)$$

eşitliğinden

$$\bigcup_{x_k \to 0} \limsup_{k \to \infty} F(x_k) = [2,7] = B \quad , \quad \bigcup_{x_k \to 0} \limsup_{k \to \infty} G(x_k) = [2,7] = B$$

elde edilir.

Tanım 2.4. *[10]* $F : \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^m$ *ve* $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ *olsun. F küme değerli dönüşümü* $\bar{x}$ *noktasında*

$$\liminf_{x \to \bar{x}} F(x) \supset F(\bar{x})$$

kapsamını sağlıyorsa $\bar{x}$*' de alttan yarı süreklidir denir. Eğer*

$$\limsup_{x \to \bar{x}} F(x) \subset F(\bar{x})$$

kapsamı sağlanıyorsa $\bar{x}$ *noktasında F üstten yarı süreklidir denir.*

Açıktır ki;

$$\lim_{x \to \bar{x}} F(x) = F(\bar{x})$$

ise F küme değerli dönüşümü $\bar{x}$ noktasında süreklidir.

Örnek 2.3. *Örnek 2.2' de tanımlanan F ve G küme değerli dönüşümlerini ele alınsın.*

$$\liminf_{x \to 0} F(x) = [3,5] \supset [3,5] = F(0)$$

ve

$$\limsup_{x\to 0} F(x) = [2,7] \not\subseteq [3,5] = F(0)$$

olduğundan dolayı F dönüşümü 0 *noktasında alttan yarı süreklidir fakat üstten yarı sürekli değildir.*

$$\limsup_{x\to 0} G(x) = [2,7] \subset [2,7] = G(0)$$
$$\liminf_{x\to 0} G(x) = [3,5] \not\supseteq [2,7] = G(0)$$

olduğundan dolayı G dönüşümü 0 *noktasında üstten yarı süreklidir fakat alttan yarı sürekli değildir.*

Önerme 2.7. *[7] $F : \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^m$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ olsun. $\lim\limits_{x\to\bar{x}} F(x) = F(\bar{x})$ olması için gerek ve yeter koşul $x_k \to \bar{x}$ olan her $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ dizisi için $\lim\limits_{k\to\infty} F(x_k) = F(\bar{x})$ olmasıdır.*

2.2 Küme Değerli Dönüşümlerin Türevleri

Bu bölümde küme değerli dönüşümlerin türev tanımı ve özelliklerinden bahsedilecektir. Eğer keyfi $x \in C$ ve $\lambda \geqslant 0$ için $\lambda x \in C$ oluyorsa $C \subset \mathbb{R}^n$ kümesine koni denir.

Tanım 2.5. *[9]*

$$T(S;x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}, \{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}\ \forall k \in \mathbb{N} \text{ için } x_k \in S$$
$$k \to \infty \text{ iken } t_k \to \infty \lim_{k\to\infty} t_k(x_k - x_0) = d\}$$

kümesine S' nin x_0 noktasındaki tanjant konisi denir. $\forall d \in T(S;x_0)$ vektörüne ise S' nin x_0' daki tanjant vektörü denir ve $T(S;x_0)$ şeklinde gösterilir. Tanjant koniler ile ilgili ayrıntılı bilgilere [4, 10]*' dan ulaşılabilir.*

Örnek 2.4. *[7] $\alpha \in (0,1]$ olmak üzere,*

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : min\{\alpha(x^3 - x), (2-\alpha)(x^3 - x)\} \leqslant y$$
$$\leqslant max\{\alpha(x^3 - x), (2-\alpha)(x^3 - x)\}\}$$

Buna ek olarak $x_0 = (0,0) \in S$ yerine yazılırsa

$$T(S;(0,0)) = \left\{(p,q) \in \mathbb{R}^2 : min\{-\alpha p, -(2-\alpha)p\} \leqslant q \leqslant max\{-\alpha p, -(2-\alpha)p\}\right\}.$$

eşitliği elde edilir.

Önerme 2.8. *[5] $S \subset \mathbb{R}^n$ ve $x_0 \in S$ olmak üzere $T(S;x_0)$ kapalı konidir. Ayrıca S konveks ise $T(S;x_0)$ de konvekstir.*

Kanıt. Öncelikle $T(S;x_0)$ kapalı koni olduğu gösterilmelidir. $c_n \to c$ olacak şekilde

$$(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq T(S;x_0)$$

dizisi için yakınsadığı nokta olan c' nin

$$c \in T(S;x_0)$$

olduğunu gösterilirse ispat tamamlanmış olur. $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $c_n \in T(S;x_0)$ için aşağıdaki ifadeler yazılabilir,

$$\exists (x_{n,i})_{i\in\mathbb{N}} \subseteq S \quad , \quad \lim_{i\to\infty} x_{n,i} = x_0.$$

Ayrıca

$$c_n = \lim_{i\to\infty} t_{n,i}(x_{n,i} - x_0)$$

olacak şekilde

$$\exists t_{n,i} > 0$$

dizileri vardır. Yakınsama tanımından $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\exists i(n) \in \mathbb{N}$ sayısı $\forall i \geq i(n)$ iken

$$||x_{n,i} - x_0|| \leq \frac{1}{n}$$

ve

$$||t_{n,i}(x_{n,i} - x_0) - c_n|| \leq \frac{1}{n}$$

olacak şekilde vardır. $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ve $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizileri $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$z_n := x_{n,i(n)} \in S$$

$$y_n := t_{n,i(n)} > 0$$

olarak tanımlansın. Burada $\lim_{n\to\infty} z_n = x_0$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için eşitlikte yerine yazılıp, c_n ekleyip çıkarılarak tekrar ifade edilirse

$$||y_n(z_n - x_0) - c|| = ||t_{n,i(n)}(x_{n,i(n)} - x_0) - c_n + c_n - c|| \leq \frac{1}{n} + ||c_n + c||$$

olur. Dolayısıyla

$$c = \lim_{n\to\infty} y_n(z_n - x_0)$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$c \in T(S; x_0)$$

olduğu görülür.

S konveks ise $T(S; x_0)$ da konvekstir ifadesini ispatlamak için $\forall c_1, c_2 \in T(S; x_0)$ iken, $T(S; x_0)$ bir koni olduğundan;

$$c_1 + c_2 \in T(S; x_0)$$

olduğunu göstermek yeterlidir. $c_1 \in T(S; x_0)$ olduğundan;

$$\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S \quad , \quad \exists (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq R_+$$

dizileri ve

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad , \quad c_1 = \lim_{n\to\infty} y_n(x_n - x_0)$$

olacak şekilde vardır. $c_2 \in T(S; x_0)$ olduğundan

$$\exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S \quad , \quad \exists (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq R_+$$

dizileri ve

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0 \quad , \quad c_2 = \lim_{n\to\infty} b(a_n - x_0)$$

olacak şekilde vardır. $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$u_n := y_n + b_n$$

$$z_n := \frac{1}{u_n}(y_n x_n + b_n a_n)$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in S$ ve $a_n \in S$,

$$z_n = \frac{y_n}{y_n + b_n} x_n + \frac{b_n}{y_n + b_n} a_n$$

ve S konveks olduğundan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $z_n \in S$ ' dir.

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{u_n}(y_n x_n + b_n a_n)$$

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{u_n}(y_n x_n - y_n x_0 + b_n a_n - b_n x_0 + y_n x_0 + b_n x_0)$$

olur.

$$\lim_{n\to\infty} u_n(z_n - x_0) = \lim_{n\to\infty} u_n(\frac{y_n x_n}{u_n} + \frac{b_n a_n}{u_n} - x_0) = \lim_{n\to\infty} (y_n x_n + b_n y_n - u_n x_0)$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n(z_n - x_0) = \lim_{n\to\infty}(y_n x_n + b_n a_n - (y_n + b_n)x_0) = \lim_{n\to\infty}(y_n x_n + b_n a_n - y_n x_0 - b_n x_0)$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n(z_n - x_0) = \lim_{n\to\infty} y_n(x_n - x_0) + b_n(a_n - x_0) = c_1 + c_2$$

olur. Dolayısıyla $c_1 + c_2 \in T(S; x_0)$ elde edilir. □

Önerme 2.9. *[5] $S, Q \subset \mathbb{R}^n$, $S \subset Q$ ve $x_0 \in S$ olmak üzere $T(S; x_0) \subset T(Q; x_0)$ olur.*

Kanıt. $x_0 \in cl(S)$ olsun. $S \subset Q$ olduğundan

$$cl(S) \subset cl(Q)$$

olur. Dolayısıyla

$$x_0 \in cl(Q)$$

elde edilir.

$d \in T(S; x_0)$ alalım. Bu durumda

$$h_n \to 0^+ \quad , \quad d_n \to d \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$x_0 + h_n d_n \in S$$

olacak şekilde

$$\exists (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+ \quad , \quad \exists (d_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$$

dizileri vardır. $S \subset Q$ olduğundan aynı diziler ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$x_0 + h_n d_n \in Q$$

olur. Dolayısıyla $d \in T(Q; x_0)$ sonucuna ulaşılır. □

Tanım 2.6. *[9] F küme değerli bir dönüşüm öyle ki $F : \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^m$,*

$$Graf(F) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : y \in F(x)\}$$

ifadesine F dönüşümünün grafiği denir. Bir küme değerli dönüşümün grafiği kapalı-konveks ise bu küme değerli dönüşüme kapalıdır-konvekstir denir.

Tanım 2.7. *[1, 9]* $F : \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^m$, $(x_0, y_0) \in Graf(F)$*ve* $DF(x_0, y_0) : \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^m$ *küme değerli dönüşümü olmak üzere keyfi* $u \in \mathbb{R}^n$ *için,*

$$DF(x_0, y_0)(u) = \{v \in \mathbb{R}^m : (u, v) \in T(Graf(F); (x_0, y_0)\}$$

eşitliğini sağlayan $u \to DF(x_0, y_0)(u)$ *dönüşümüne F' nin* (x_0, y_0) *noktasındaki contingent türevi denir.*

Tanım 2.7' den

$$Graf(DF(x_0, y_0)) = T(Graf(F); (x_0, y_0))$$

eşitliği görülebilir.

Örnek 2.5. *[7]* $\alpha \in (0, 1]$ $F : \mathbb{R} \rightsquigarrow \mathbb{R}$ *küme değerli dönüşümü şu şekilde tanımlansın.*

$$F(x) = \{y \in \mathbb{R} : min\{\alpha(x^3 - x), (2 - \alpha)(x^3 - x)\} \leq y$$

$$\leq max\{\alpha(x^3 - x), (2 - \alpha)(x^3 - x)\}\}$$

denklemi için $(0, 0) \in Graf(F)$ *olur. Örnek 2.4' den* $\forall u \in \mathbb{R}$ *için*

$$DF(0, 0)(u) = \{v \in \mathbb{R} : min\{-\alpha u, -(2 - \alpha)u\} \leq v \leq max\{-\alpha u, -(2 - \alpha)u\}\}$$

Önerme 2.10. *[7]* $F : \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^m$ *ve* $(x_0, y_0) \in Graf(F)$ *olduğu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

(i) $DF(x_0, y_0)$ *kapalıdır.*

(ii) $Graf(F) \in K(\mathbb{R}^n x \mathbb{R}^m)$ *ise* $DF(x_0, y_0)$ *kapalı konveks değerlidir.*

3 FUZZY KÜMELER

Bu bölümde fuzzy küme dizilerinin limitlerinde ve fuzzy küme değerli dönüşümlerin limit ve türevlerini bulmada kullanılan fuzzy kümelerin seviye kümelerinin özellikleri incelenecektir.

$\mathbb{R}^n$ kümesindeki tüm $\tilde{s}$ fuzzy kümeleri üyelik fonksiyonu $\tilde{s} : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1]$ ile tanımlanır. $F(\mathbb{R}^n)$ ile $\mathbb{R}^n$ 'deki tüm fuzzy kümeleri gösterilsin. $\tilde{s} \in F(\mathbb{R}^n)$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$[\tilde{s}]_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : \tilde{s}(x) \geq \alpha\}$$

kümesine $\tilde{s}$' nin α seviye kümesi denir.

$S \subset \mathbb{R}^n$ olacak şekilde bir fuzzy olmayan küme olsun ve $c_S : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1]$, $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$c_S(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in S \\ 0 & , \quad x \notin S \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona S' nin indikatör fonksiyonu denir. Bu bağlamda $c_S : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1]$ tanımlı olduğundan c_S kümesi fuzzy küme olarak da düşünülebilir. Decomposition teoremi [2] gereği $\tilde{s} \in F(\mathbb{R}^n)$ iken şu şekilde yazılabilir,

$$\tilde{s} = \sup_{\alpha \in (0,1]} \alpha c_{[\tilde{s}]_\alpha}$$

Tanım 3.1. *[7] $\tilde{s} \in F(\mathbb{R}^n)$ fuzzy kümesi kapalıdır ancak ve ancak $\alpha \in (0,1]$ için $[\tilde{s}]_\alpha \in C(\mathbb{R}^n)$ ' dir.*

Tanım 3.2. *[7] $\tilde{s} \in F(\mathbb{R}^n)$ fuzzy kümesi konvekstir ancak ve ancak $\alpha \in (0,1]$ için $[\tilde{s}]_\alpha \in K(\mathbb{R}^n)$ ' dir.*

Önerme 3.1. *[7] $x, y \in \mathbb{R}^n$ ve keyfi $\lambda \in (0,1]$ için $\tilde{s} \in F(\mathbb{R}^n)$ kümesinin konveks olması için gerek ve yeter koşul*

$$\tilde{s}(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \tilde{s}(x) \wedge \tilde{s}(y)$$

olmasıdır.

Kanıt. Öncelikle $\tilde{s}$ kümesinin konveks olduğunu kabul edip eşitsizliğin doğruluğunu gösterelim. Genelliği kaybetmeden keyfi $x, y \in \mathbb{R}^n$ noktalar için

$$\tilde{s}(x) \leq \tilde{s}(y)$$

olduğunu kabul edelim. Eğer $\tilde{s}(x) = 0$ ise eşitsizlik açıktır, o halde

$$\tilde{s}(x) = \alpha > 0$$

alalım. Varsayımımızdan dolayı $[\tilde{s}]_\alpha$ kesiti konvekstir ve

$$x, y \in [\tilde{s}]_\alpha \quad , \quad \tilde{s}(y) \geq \tilde{s}(x) = \alpha \quad , \quad \forall\lambda \in (0,1]$$

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in [\tilde{s}]_\alpha$$

elde edilir. Bundan dolayı

$$\tilde{s}(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \alpha = \tilde{s}(x) = \tilde{s}(x) \wedge \tilde{s}(y).$$

Tersine, eşitsizliği doğru kabul edip $\tilde{s}$ kümesinin konveks olduğunu ispatlayalım. Keyfi $\alpha \in (0,1]$ alalım. Eğer $[\tilde{s}]_\alpha = \emptyset$ ise konvekstir. Eğer $[\tilde{s}_\alpha] \neq \emptyset$ ise $x \in \mathbb{R}^n$ vardır öyle ki $\tilde{s}(x) = \alpha$ olur. Keyfi $y \in [\tilde{s}]_\alpha$ için

$$\tilde{s}(y) \geq \alpha = \tilde{s}(x)$$

olur. Eşitsizliği doğru kabul edişimizden dolayı $\forall\lambda \in (0,1]$ için

$$\tilde{s}(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \tilde{s}(x) \wedge \tilde{s}(y) = \tilde{s}(x) = \alpha$$

olur ki bu da

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in [\tilde{s}]_\alpha$$

anlamına gelir. Dolayısıyla $[\tilde{s}]_\alpha$ kümesi konveks bir kümedir. $\alpha \in (0,1]$ keyfi seçildiği için $[\tilde{s}]_\alpha$ kümesinin konveks olması $\tilde{s}$ kümesinin konveks olmasını gerektirir. $\square$

$CF(\mathbb{R}^n)$, $KF(\mathbb{R}^n)$ ve $CKF(\mathbb{R}^n)$ kümeleri ile $\mathbb{R}^n$ de sırasıyla kapalı, konveks ve kapalı konveks fuzzy kümeler gösterilsin. $\alpha \in (0,1]$ için $[\tilde{s}]_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ koni ise $\tilde{s} \in F(\mathbb{R}^n)$ fuzzy kümesine fuzzy koni denir. $\tilde{s} \in F(\mathbb{R}^n)$ için

$$hypo(\tilde{s}) = \{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^n \times [0,1] : \alpha \leq \tilde{s}(x)\}$$

ifadesine $\tilde{s}$' nin fuzzy hypografı denir. Açıktır ki $\tilde{s} \in F(\mathbb{R}^n)$ kümesinin kapalılığı $hypo(\tilde{s}) \subset \mathbb{R}^n \times [0,1]$ kümesinin kapalılığı ile karakterize edilebilir. Fuzzy küme ve seviye kümeleri arasındaki ilişkiyi incelemek için aşağıdaki kavramlar tanımlansın.

$$S(\mathbb{R}^n) = \left\{ \{S_\alpha\}_{\alpha \in (0,1]} : S_\alpha \subset \mathbb{R}^n, \alpha \in (0,1] \text{ ve } \beta, \gamma \in (0,1], \beta < \gamma, S_\beta \supset S_\gamma \right\}$$

olsun. $M : S(\mathbb{R}^n) \to F(\mathbb{R}^n)$ şeklinde tanımlı ve her $\{S_\alpha\}_{\alpha\in(0,1]} \in S(\mathbb{R}^n)$ için

$$M(\{S_\alpha\}_{\alpha\in(0,1]}) = \sup_{\alpha\in(0,1]} \alpha c_{S_\alpha}$$

şeklinde tanımlanır.

$\sup \emptyset = 0$ olmak koşuluyla $x \in \mathbb{R}^n$ ve $\{S_\alpha\}_{\alpha\in(0,1]} \in S(\mathbb{R}^n)$ için

$$M(\{S_\alpha\}_{\alpha\in(0,1]})(x) = \sup_{\alpha\in(0,1]} \alpha c_{S_\alpha}(x) = \sup \{\alpha \in (0,1] : x \in S_\alpha\}$$

eşitliği elde edilir. M fonksiyonu kullanılarak Decomposition teoreminden [2] $\tilde{s} \in F(\mathbb{R}^n)$ için

$$\tilde{s}(x) = M(\{[\tilde{s}]_\alpha\}_{\alpha\in(0,1]})(x)$$

şeklinde gösterilir.

Önerme 3.2. *[6] $\{S_\alpha\}_{\alpha\in(0,1]}$, $\{T_\alpha\}_{\alpha\in(0,1]} \in S(\mathbb{R}^n)$ olsun. Eğer $\alpha \in (0,1]$ için $S_\alpha \subset T_\alpha$ oluyorsa*

$$M(\{S_\alpha\}_{\alpha\in(0,1]}) \le M(\{T_\alpha\}_{\alpha\in(0,1]})$$

olur.

Kanıt. Keyfi $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\{\alpha \in (0,1] : x \in S_\alpha\} \subset \{\alpha \in (0,1] : x \in T_\alpha\}$$

olur. Bu ifadeden de

$$\sup\{\alpha \in (0,1] : x \in S_\alpha\} \le \sup\{\alpha \in (0,1] : x \in T_\alpha\}$$

olup $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için

$$M(\{S_\alpha\}_{\alpha\in(0,1]})(x) \le M(\{T_\alpha\}_{\alpha\in(0,1]})(x)$$

sonucuna ulaşılır.

□

Önerme 3.3. *[6] $\{S_\alpha\}_{\alpha\in(0,1]} \in S(\mathbb{R}^n)$, $\tilde{s} = M(\{S_\alpha\}_{\alpha\in(0,1]})$ ve $\alpha \in (0,1]$ iken*

$$[\tilde{s}]_\alpha = \bigcap_{\beta\in(0,\alpha)} S_\beta$$

olur.

Kanıt.

$$x \in [\tilde{s}]_\alpha \Leftrightarrow \tilde{s}(x) = \sup\{\beta \in (0,1] : x \in S_\beta\} \geq \alpha$$
$$\Leftrightarrow x \in S_\beta, \beta \in (0,\alpha)$$
$$\Leftrightarrow x \in \bigcap_{\beta \in (0,\alpha)} S_\beta$$

sonucuna ulaşılır. □

Tanım 3.3. *[7] $\tilde{s} \in F(\mathbb{R}^n)$ fuzzy kümesinin kapanışı*

$$cl(\tilde{s}) = M(\{cl\, [\tilde{s}]_\alpha\}_{\alpha \in (0,1]})$$

şeklinde tanımlanır.

Açıktır ki $S \subset \mathbb{R}^n$ fuzzy olmayan küme için $cl(c_S) = c_{cl(S)}$' dir.

Önerme 3.4. *[10] $\tilde{s} \in F(\mathbb{R}^n)$ olsun. $\tilde{t} \in CF(\mathbb{R}^n)$ için $\tilde{s} \leq \tilde{t}$ olacak şekildeki fuzzy kümeler arasındaki en küçük küme $\tilde{u} \in CF(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda*

$$hypo(\tilde{u}) = cl(hypo(\tilde{s}))$$

dir.

Kanıt.

$$hypo(\tilde{u}) = \{(x,\alpha) \in \mathbb{R}^n \times [0,1] : \alpha \leq \tilde{u}(x)\} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\tilde{u}]_\alpha \times \alpha$$

olduğu kolayca görülebilir. $\tilde{u} \in CF(\mathbb{R}^n)$ olduğundan $hypo(\tilde{u}) \subset \mathbb{R}^n \times [0,1]$ kümesi de kapalıdır. $\tilde{u} \in CF(\mathbb{R}^n)$ kümesi, $\tilde{s} \leq \tilde{t}$, $\tilde{t} \in CF(\mathbb{R}^n)$ olacak şekildeki en küçük küme olduğundan $\tilde{s} \leq \tilde{u}$ için $\forall x \in \mathbb{R}^n$ iken

$$\tilde{s}(x) \leq \tilde{u}(x)$$

dir. α seviye kümesinin tanımından $[\tilde{s}]_\alpha \subset [\tilde{u}]_\alpha$ dir. Buradan

$$hypo(\tilde{s}) \subset hypo(\tilde{u})$$

ve $hypo(\tilde{u})$ bu kapsamı sağlayan en küçük kapalı küme olduğundan

$$cl(hypo(\tilde{s})) = hypo(\tilde{u})$$

elde edilir. □

Önerme 3.5. *[7] $\tilde{s} \in F(\mathbb{R}^n)$ için aşağıdaki ifadeler doğrudur.*

(i) $\alpha \in (0,1]$ için $[cl(\tilde{s})]_\alpha = \bigcap_{\beta \in (0,\alpha)} cl([\tilde{s}]_\beta)$

(ii) $cl(\tilde{s}) \in CF(\mathbb{R}^n)$

(iii) $\tilde{t} \in CF(\mathbb{R}^n)$ ve $cl(\tilde{s})$ de fuzzy kümeler arasındaki en küçük kapalı fuzzy küme için $\tilde{s} \leq \tilde{t}$.

Kanıt. Önerme 3.3' den

$$[cl(\tilde{s})]_\alpha = \bigcap_{\beta \in (0,\alpha)} cl([\tilde{s}]_\beta)$$

ifadesinin doğruluğu görülür.

$$cl(\tilde{s}) \in CF(\mathbb{R}^n)$$

ise (i) şıkkından sağlanır. (iii) için

$$\tilde{u} \in CF(\mathbb{R}^n) \quad , \quad \tilde{t} \in CF(\mathbb{R}^n)$$

kapalı fuzzy kümeler arasındaki en küçük kapalı fuzzy küme öyle ki

$$\tilde{s} \leq \tilde{t}$$

olsun. Gösterelim ki

$$\tilde{u} = cl(\tilde{s}).$$

$cl(\tilde{s}) \in CF(\mathbb{R}^n)$ ve Decomposition teoremi [2] ile Önerme 3.2' den

$$\tilde{s} \leq cl(\tilde{s})$$

ifadesi yazılır. Dolayısıyla $\tilde{u} \leq cl(\tilde{s})$ sonucu elde edilir.
Kabul edelim ki $x_0 \in \mathbb{R}^n$ öyle ki;

$$\tilde{u}(x_0) < cl(\tilde{s})(x_0)$$

olsun. Sabit bir $\gamma \in (\beta, \alpha)$ elemanı için

$$\alpha = cl(\tilde{s})(x_0) \quad , \quad \beta = \tilde{u}(x_0)$$

kümeleri tanımlansın.

$$\alpha = cl(\tilde{s})(x_0) = \sup\left\{\eta \in (0,1] : x_0 \in cl([\tilde{s}]_\eta)\right\}$$

olduğundan $x_0 \in cl([\tilde{s}]_\gamma)$ olur. $\beta < \gamma$ olduğundan Önerme 3.3' ten

$$(x_0, \gamma) \notin hypo(\tilde{u}) = cl(hypo(\tilde{s}))$$

yazılır. $x_0 \in cl([\tilde{s}]_\gamma)$' ı kullanarak $x_k \to x_0$ olacak şekilde

$$\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [\tilde{s}]_\gamma$$

dizisi vardır. $\tilde{s}(x_k) \geq \gamma, k \in \mathbb{N}$ olduğundan

$$(x_k, \gamma) \in hypo(\tilde{s}) \quad , \quad k \in \mathbb{N}$$

için

$$(x_k, \gamma) \to (x_0, \gamma) \in cl(hypo(\tilde{s}))$$

bulunur ve bu da yukarıda ki

$$(x_0, \gamma) \notin hypo(\tilde{u}) = cl(hypo(\tilde{s}))$$

ifadesiyle çelişir. □

Aşağıdaki örnek $[cl(\tilde{s})]_\alpha = cl([\tilde{s}]_\alpha)$ eşitliğinin herzaman sağlanmayacağına bir örnektir.

Örnek 3.1. *$\forall x \in \mathbb{R}$ için $\tilde{s} \in F(\mathbb{R})$ fuzzy kümesi şu şekilde tanımlansın.*

$$\tilde{s}(x) = \begin{cases} max\{-|x|+1, 0\} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

Bu durumda $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$cl(\tilde{s})(x) = max\{-|x|+1, 0\}$$

olur.

$$cl([\tilde{s}]_1) = \emptyset$$

olur çünkü $\tilde{s}(x)$ fonksiyonu x hangi değeri alırsa alsın $\tilde{s}(x) = 1$ olmaz. Dolayısıyla

$$cl([\tilde{s}]_1) = \emptyset$$

olur.

$$[cl(\tilde{s})]_1 = \max\{-|x|+1, 0\}$$

eşitliğinde $x = 0$ *yazılırsa*

$$\max\{-|x| + 1, 0\} = 1$$

sonucuna ulaşılır. Sonuç olarak

$$[cl(\tilde{s})]_\alpha = cl([\tilde{s}]_\alpha)$$

herzaman sağlanmayabilir.

Önerme 3.6. *[7]* $\{S_\alpha\}_{\alpha\in(0,1]} \in S(\mathbb{R}^n)$ *ve* $\tilde{s} = M\left(\{S_\alpha\}_{\alpha\in(0,1]}\right)$ *olduğu durumda*

$$cl(\tilde{s}) = M\left(\{cl(S_\alpha)\}_{\alpha\in(0,1]}\right).$$

olur.

Önerme 3.7. *[7]* $\lambda \in \Omega$ *için*

$$\{S_\alpha^{(\lambda)}\}_{\alpha\in(0,1]} \in S(\mathbb{R}^n) \quad , \quad \tilde{s}_\lambda = M\left(\{S_\alpha^{(\lambda)}\}_{\alpha\in(0,1]}\right)$$

olacak şekilde tanımlansın. Tüm bunlara ek olarak her $\alpha \in (0,1]$ *için*

$$L'_\alpha = \bigcap_{\lambda\in\Omega} S_\alpha^{(\lambda)} \quad , \quad U'_\alpha = \bigcup_{\lambda\in\Omega} S_\alpha^{(\lambda)}$$

olsun. Eğer $\Omega = \emptyset$ *ise her bir* $\alpha \in (0,1]$ *için*

$$L'_\alpha = \bigcap_{\lambda\in\Omega} S_\alpha^{(\lambda)} = \mathbb{R}^n \quad , \quad U'_\alpha = \bigcup_{\lambda\in\Omega} S_\alpha^{(\lambda)} = \emptyset$$

olur. Ayrıca $\forall x \in \mathbb{R}^n$ *için*

$$M(\{L'_\alpha\}_{\alpha\in(0,1]})(x) = \bigwedge_{\lambda\in\Omega} \tilde{s}_\lambda(x)$$

ve

$$M(\{U'_\alpha\}_{\alpha\in(0,1]})(x) = \bigvee_{\lambda\in\Omega} \tilde{s}_\lambda(x)$$

olur.

Kanıt. Sabit bir $x \in \mathbb{R}^n$ için kabul edelim ki $\Omega = \emptyset$ olsun. Daha sonra her $\alpha \in (0,1]$ için

$$L'_\alpha = \mathbb{R}^n \quad , \quad U'_\alpha = \emptyset$$

ve

$$M(\{L'_\alpha\}_{\alpha\in(0,1]})(x) = 1 = \bigwedge_{\lambda\in\Omega} \tilde{s}_\lambda(x),$$
$$M(\{U'_\alpha\}_{\alpha\in(0,1]})(x) = 0 = \bigvee_{\lambda\in\Omega} \tilde{s}_\lambda(x)$$

olur.

$\Omega \neq \emptyset$ olduğu kabul edilirse

$$\beta = M(\{L'_\alpha\}_{\alpha\in(0,1]})(x) = \sup\{\alpha \in (0,1] : x \in L'_\alpha\},$$

$$\gamma = M(\{U'_\alpha\}_{\alpha\in(0,1]})(x) = \sup\{\alpha \in (0,1] : x \in U'_\alpha\}$$

kümeleri elde edilir. β' nın tanımından dolayı

$$x \in L'_\alpha \quad , \quad \alpha \in (0,\beta),$$

$$x \notin L'_\alpha \quad , \quad \alpha \in (\beta,1]$$

olur. Herhangi bir $\lambda \in \Omega$ için

$$\alpha \in (0,\beta) \quad , \quad x \in S_\alpha^{(\lambda)}$$

olduğu için $\tilde{s}_\lambda(x) \geq \alpha$ olur. Bundan dolayıdır ki keyfi $\lambda \in \Omega$ için

$$\tilde{s}_\lambda(x) \geq \beta$$

sonucu çıkar. Her $\alpha \in (\beta,1]$ için $x \notin L'_\alpha$ olduğundan $\lambda_\alpha \in \Omega$ öyle ki

$$x \notin S_\alpha^{(\lambda_\alpha)}$$

ve bu sonuç

$$\tilde{s}_{\lambda_\alpha}(x) \leq \alpha$$

olduğunu gösterir. Buradan da keyfi $\varepsilon > 0$ için $\lambda_0 \in \Omega$ öyle ki

$$\tilde{s}_{\lambda_\alpha}(x) < \beta + \varepsilon$$

çıkar. Dolayısıyla

$$\beta = \bigwedge_{\lambda\in\Omega} \tilde{s}_\lambda(x)$$

kümesi elde edilir. Aynı şekilde

$$\gamma = \bigvee_{\lambda\in\Omega} \tilde{s}_\lambda(x)$$

olduğu görülür. $\square$

Önerme 3.8. *[7] $\{S_\alpha\}_{\alpha\in(0,1]}$, $\{T_\alpha\}_{\alpha\in(0,1]} \in S(\mathbb{R}^n)$ olsun. Sayılabilir çokluktaki α haricinde $\alpha \in (0,1]$ için $S_\alpha = T_\alpha$ ise*

$$M(\{S_\alpha\}_{\alpha\in(0,1]}) = M(\{T_\alpha\}_{\alpha\in(0,1]}).$$

Kanıt.

$$M(\{S_\alpha\}_{\alpha\in(0,1]})(x_0) \neq M(\{T_\alpha\}_{\alpha\in(0,1]})(x_0)$$

olacak şekilde $x_0 \in \mathbb{R}^n$ olduğunu kabul edelim. Genelliği kaybetmeden

$$M\left(\{S_\alpha\}_{\alpha\in(0,1]}\right)(x_0) < M\left(\{T_\alpha\}_{\alpha\in(0,1]}\right)(x_0)$$

olduğunu varsayalım.

$$\beta = M\left(\{S_\alpha\}_{\alpha\in(0,1]}\right)(x_0) = \sup\{\alpha \in (0,1] : x_0 \in S_\alpha\},$$

$$\gamma = M\left(\{T_\alpha\}_{\alpha\in(0,1]}\right)(x_0) = \sup\{\alpha \in (0,1] : x_0 \in T_\alpha\}$$

kümeleri biliniyor.

$$\beta = \sup\{\alpha \in (0,1] : x_0 \in S_\alpha\}$$

olması için gerek ve yeter koşul ağaşıdaki eşitliktir

$$\beta = \begin{cases} x_0 \in S_\alpha & , \quad \alpha \in (0,\beta) \\ x_0 \notin S_\alpha & , \quad \alpha \in (\beta,1] \end{cases}$$

$$\gamma = \sup\{\alpha \in (0,1] : x_0 \in T_\alpha\}$$

kümesi için ise gerek ve yeter koşul

$$\gamma = \begin{cases} x_0 \in T_\alpha & , \quad \alpha \in (0,\gamma) \\ x_0 \notin T_\alpha & , \quad \alpha \in (\gamma,1] \end{cases}$$

olmasıdır. $x_0 \notin S_\alpha$, $x_0 \in T_\alpha$ için $\alpha \in (\beta,\gamma)$ olur ki

$$S_\alpha \neq T_\alpha \quad , \quad \alpha \in (\beta,\gamma).$$

Dolayısıyla sayılabilir çokluktaki α haricinde, $\alpha \in (0,1]$ için $S_\alpha = T_\alpha$ ifadesi doğru değildir. $\square$

4 FUZZY KÜME DİZİLERİNİN LİMİTLERİ

Bu bölümde fuzzy küme dizilerinin limit tanımları ve özellikleri seviye kümeleri yardımıyla incelenecektir.

Tanım 4.1. *[7]* $\{\tilde{s}_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset F(\mathbb{R}^n)$ *ve* $\alpha \in (0,1]$ *için*

$$L_\alpha = \liminf_{k\to\infty} [\tilde{s}_k]_\alpha \quad , \quad U_\alpha = \limsup_{k\to\infty} [\tilde{s}_k]_\alpha$$

şeklinde tanımlansın. $\{\tilde{s}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *dizisinin altlimiti* $\liminf_{k\to\infty} \tilde{s}_k$ *olarak gösterilir ve*

$$\liminf_{k\to\infty} \tilde{s}_k = M\left(\{L_\alpha\}_{\alpha\in(0,1]}\right)$$

olarak tanımlanır. $\{\tilde{s}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *dizisinin üstlimiti ise* $\limsup_{k\to\infty} \tilde{s}_k$ *olarak gösterilir ve*

$$\limsup_{k\to\infty} \tilde{s}_k = M\left(\{U_\alpha\}_{\alpha\in(0,1]}\right)$$

olarak tanımlanır. $\liminf_{k\to\infty} \tilde{s}_k = \limsup_{k\to\infty} \tilde{s}_k$ *ise* $\{\tilde{s}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *fuzzy kümesinin limiti vardır denir ve*

$$\lim_{k\to\infty} \tilde{s}_k = \liminf_{k\to\infty} \tilde{s}_k = \limsup_{k\to\infty} \tilde{s}_k$$

şeklinde gösterilir.

Sonuç olarak fuzzy küme dizileri için limit, altlimit, ve üstlimitler klasik kümeler için verilen tanımların genelleşmiş şeklidir.

Örnek 4.1. $\tilde{s}, \tilde{t} \in F(\mathbb{R})$ *fuzzy kümeleri ve her* $x \in \mathbb{R}$ *için aşağıdaki şekilde tanımlansın.*

$$\tilde{s}(x) = \begin{cases} max\{-|x|+1, 0\} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

$$\tilde{t}(x) = \; max\{-|x|+1, 0\}$$

Ayrıca $k \in \mathbb{N}$ *için* $\{\tilde{s}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{\tilde{t}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{\tilde{u}_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset F(\mathbb{R}^n)$ *fuzzy küme dizileri olsun ve şu şekilde tanımlansın.*

$$\tilde{s}_k = \; \tilde{s} \quad , \quad \tilde{t}_k = \tilde{t}$$

$$\tilde{u}_k = \begin{cases} \tilde{s} & , \quad k \; tek \\ \tilde{t} & , \quad k \; \text{\c{c}}ift \end{cases}$$

Bu durumda $\alpha \in (0,1)$ için

$$\lim_k [\tilde{s}_k]_\alpha = \lim_k [\tilde{t}_k]_\alpha = \lim_k [\tilde{u}_k]_\alpha = [\alpha - 1, 1 - \alpha]$$

ve

$$\lim_k [\tilde{s}_k]_1 = \liminf_k [\tilde{u}_k]_1 = \emptyset,$$

$$\lim_k [\tilde{t}_k]_1 = \limsup_k [\tilde{u}_k]_1 = \{0\}.$$

Dolayısıyla

$$\lim_k \tilde{s}_k = \lim_k \tilde{t}_k = \lim_k \tilde{u}_k = \tilde{t}.$$

Sonuç olarak aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(i) $\liminf_k [\tilde{s}_k]_1 \neq \liminf_k [\tilde{t}_k]_1 \Rightarrow \liminf_k \tilde{s}_k = \liminf_k \tilde{t}_k$.

(ii) $\limsup_k [\tilde{s}_k]_1 \neq \limsup_k [\tilde{t}_k]_1 \Rightarrow \limsup_k \tilde{s}_k = \limsup_k \tilde{t}_k$.

(iii) $\liminf_k [\tilde{u}_k]_1 \neq \limsup_k [\tilde{u}_k]_1 \Rightarrow \liminf_k \tilde{u}_k = \limsup_k \tilde{u}_k$.

(iv) $\lim_k [\tilde{s}_k]_1 \neq \lim_k [\tilde{t}_k]_1 \Rightarrow \lim_k \tilde{s}_k = lim_k \tilde{u}_k = lim_k \tilde{t}_k$.

Ayrıca, $\lim_k [\tilde{u}_k]_1$ *limiti yoktur.*

Önerme 4.1. *[7]* $\{\tilde{s}_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset F(\mathbb{R}^n)$ *olmak üzere her* $\alpha \in (0,1]$ *için* $L_\alpha = \liminf_k [\tilde{s}_k]_\alpha$ *ve* $U_\alpha = \limsup_k [\tilde{s}_k]_\alpha$ *olarak tanımlansın. Aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

(i) $\{L_\alpha\}_{\alpha\in(0,1]}, \{U_\alpha\}_{\alpha\in(0,1]} \in S(\mathbb{R}^n)$.

(ii) $\alpha \in (0,1]$ *için* $L_\alpha \subset U_\alpha$.

(iii) $\liminf_k \tilde{s}_k \leq \limsup_k \tilde{s}_k$.

(iv) $\alpha \in (0,1]$ *için* $L_\alpha, U_\alpha \in C(\mathbb{R}^n)$.

(v) $k \in \mathbb{N}$ *ve* $\alpha \in (0,1]$ *için* $[\tilde{s}_k]_\alpha$ *olsun. O halde* $L_\alpha \in K(\mathbb{R}^n)$.

Kanıt. (i) ve (ii) ifadeleri tanımlarından dolayı aşikardır.

(iii) $L_\alpha = \liminf_k [\tilde{s}_k]_\alpha$, L_α' nın M altında görüntüsü alınarak

$$M(\{L_\alpha\}_{\alpha\in(0,1]}) = \liminf_{k\to\infty} \tilde{s}_k$$

$$M(\{U_\alpha\}_{\alpha\in(0,1]}) = \limsup_{k\to\infty} \tilde{s}_k$$

eşitlikleri yazılır.

$L_\alpha \subset U_\alpha$ olduğundan Önerme 3.2' den $M(\{L_\alpha\}_{\alpha\in(0,1]}) \leq M(\{U_\alpha\}_{\alpha\in(0,1]})$ olur. Dolayısıyla

$$\liminf_{k\to\infty} \tilde{s}_k \leq \limsup_{k\to\infty} \tilde{s}_k$$

sonucu elde edilir.

(iv) Önerme 2.3' ten $L_\alpha, U_\alpha \in C(\mathbb{R}^n)$ olduğu görülür.

(v) $[\tilde{s}_k]_\alpha \in K(\mathbb{R}^n)$ konveks ise, Önerme 2.5' e göre $L_\alpha \in K(\mathbb{R}^n)$ konvekstir. $\square$

Önerme 4.2. *[7] (i) $\{\tilde{s}_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset F(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda*

$$\liminf_k \tilde{s}_k, \limsup_k \tilde{s}_k \in CF(\mathbb{R}^n)$$

olur. Eğer $k \in \mathbb{N}$ ve $\tilde{u} \in F(\mathbb{R}^n)$ için $\tilde{s}_k = \tilde{u}$ oluyorsa $\lim_k \tilde{s}_k = cl(\tilde{u})$ olur.

(ii) $\{\tilde{s}_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset KF(\mathbb{R}^n)$ için $\liminf_k \tilde{s}_k \in CKF(\mathbb{R}^n)$ olur.

Kanıt. (i) Öncelikle,

$$\liminf_k \tilde{s}_k, \limsup_k \tilde{s}_k \in CF(\mathbb{R}^n)$$

ifadesini ispatlamak için

$$\liminf_k \tilde{s}_k = M(\{L_\alpha\}_{\alpha\in(0,1]}) \quad , \quad \limsup_k \tilde{s}_k = M(\{U_\alpha\}_{\alpha\in(0,1]})$$

eşitlikleri Tanım 4.1' den yazılabilir. Önerme 4.1 (iv) şıkkından da $L_\alpha, U_\alpha \in CF(\mathbb{R}^n)$ olduğu biliniyor. Dolayısıyla

$$M(\{L_\alpha\}_{\alpha\in(0,1]}) = \liminf_k \tilde{s}_k \in CF(\mathbb{R}^n)$$

ve

$$M(\{U_\alpha\}_{\alpha\in(0,1]}) = \limsup_k \tilde{s}_k \in CF(\mathbb{R}^n)$$

olduğu görülür. $\lim_k \tilde{s}_k = cl(\tilde{u})$ ifadesini ispatlamak için $\forall\alpha \in (0,1]$ iken

$$L_\alpha = \liminf_{k\to\infty}[\tilde{s}_k]_\alpha = \liminf_{k\to\infty}[\tilde{u}]_\alpha$$

$$U_\alpha = \limsup_{k\to\infty}[\tilde{s}_k]_\alpha = \limsup_{k\to\infty}[\tilde{u}]_\alpha$$

eşitlikleri yazılabilir. Tanım 4.1' e göre

$$\liminf_{k\to\infty} \tilde{s}_k = M(\{L_\alpha\}_{\alpha\in(0,1]}) = M([\tilde{u}]_{\alpha\in(0,1]})$$

$$\limsup_{k\to\infty} \tilde{s}_k = M(\{U_\alpha\}_{\alpha\in(0,1]}) = M([\tilde{u}]_{\alpha\in(0,1]})$$

olur. Tanım 3.3' den

$$M(\{[\tilde{u}]_\alpha\}_{\alpha\in(0,1]}) = cl(\tilde{u})$$

olduğu söylenirse

$$\lim_k \tilde{s}_k = cl(\tilde{u})$$

sonucu elde edelir.

(ii) $\tilde{u} = \liminf_k \tilde{s}_k = M(L_\alpha)$ olsun. Önerme 2.5' e göre

$$L_\alpha = \liminf_k [\tilde{s}_k]_\alpha \in K(\mathbb{R}^n)$$

yazılır. $L_\alpha \in S(\mathbb{R}^n)$ olduğu Önerme 4.1(i) şıkkından biliniyor. Önerme 3.3' ten $\forall\alpha \in (0,1]$ için

$$[\tilde{u}]_\alpha = \bigcap_{\beta\in(0,\alpha)} L_\beta$$

olur. Şimdi L_β konveks mi onu inceleyelim. $\lambda \in (0,1]$ ve $x, y \in \bigcap_{\beta\in(0,\alpha)} L_\beta$ için

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in \bigcap_{\beta\in(0,1]} L_\beta$$

olması gerekir. $\forall\beta \in (0,\alpha)$ ve $x, y \in L_\beta$ için L_β konveks olduğundan

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in L_\beta$$

olur. Buradan da

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in \bigcap_{\beta\in(0,1]} L_\beta$$

olur. Dolayısıyla $[\tilde{u}]_\alpha$ konveks olur. Bu da $\tilde{u} = \liminf_k \tilde{s}_k$ ifadesinin konveks olmasıdır.

$\square$

Önerme 4.3. *[7] $\{\tilde{s}_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset F(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere*

$$\liminf_k \tilde{s}_k = \bigwedge_{N\in\mathcal{N}_\infty^\sharp} cl\left(\bigvee_{k\in N} \tilde{s}_k\right) \text{ ve } \limsup_k \tilde{s}_k = \bigwedge_{N\in\mathcal{N}_\infty} cl\left(\bigvee_{k\in N} \tilde{s}_k\right)$$

Kanıt. Önerme 2.1 ve Tanım 4.1' i kullanılırsa;

$$L_\alpha = \liminf_k [\tilde{s}_k]_\alpha = \bigcap_{N\in\mathcal{N}_\infty^\sharp} cl(\bigcup_{k\in N} [\tilde{s}_k]_\alpha)$$

eşitliği elde edilir. $\tilde{s}_k = M([\tilde{s}_k]_\alpha)$ olduğu biliniyor. Önerme 3.7' den

$$M(L_\alpha) = \bigcap_{N\in\mathcal{N}_\infty^\sharp} cl(\bigcup_{k\in N} \tilde{s}_k)$$

$$\liminf_k \tilde{s}_k = \bigwedge_{N \in \mathcal{N}_\infty^\sharp} cl(\bigvee_{k \in N} \tilde{s}_k)$$

sonucu çıkar. $\limsup_k \tilde{s}_k$ için de benzer yollarla ispatlanır. $\square$

Önerme 4.4. *[7] $k \in \mathbb{N}$ iken $\{S_\alpha^{(k)}\}_{\alpha \in (0,1]} \in S(\mathbb{R}^n)$ ve $\tilde{s}_k = M(\{S_\alpha^{(k)}\}_{\alpha \in (0,1]})$ olsun. Ayrıca her $\alpha \in (0,1]$ için*

$$L_\alpha = \liminf_k S_\alpha^{(k)},$$

$$U_\alpha = \limsup_k S_\alpha^{(k)}$$

olarak tanımlansın. Dolayısıyla

$$\liminf_k \tilde{s}_k = M(\{L_\alpha\}_{\alpha \in (0,1]}),$$

$$\limsup_k \tilde{s}_k = M(\{U_\alpha\}_{\alpha \in (0,1]})$$

elde edilir.

Kanıt. Önerme 2.1' den,

$$L_\alpha = \liminf_k S_\alpha^{(k)} = \bigcap_{N \in \mathcal{N}_\infty^\sharp} cl(\bigcup_{k \in N} S_\alpha^{(k)})$$

eşitliği yazılır. Kolaylık olması için $T_\alpha = \bigcup_{k \in N} S_\alpha^{(k)}$ tanımı yapılırsa, Önerme 3.6 ve Önerme 3.7 yardımıyla

$$M(T_\alpha) = M(\bigcup_{k \in N} S_\alpha^{(k)}) = \bigvee_{k \in N} \tilde{s}_k,$$

$$cl(T_\alpha) = cl(\bigcup_{k \in N} S_\alpha^{(k)})$$

yazılır. Buradan da

$$M(cl(T_\alpha)) = M(cl(\bigcup_{k \in N} S_\alpha^{(k)})) = cl(\bigvee_{k \in N} \tilde{s}_k),$$

$$L_\alpha = \bigcap_{N \in \mathcal{N}_\infty^\sharp} cl(T_\alpha) = \bigcap_{N \in \mathcal{N}_\infty^\sharp} cl(\bigcup_{k \in N} S_\alpha^{(k)})$$

olur. Son olarak Önerme 4.3 kullanılarak

$$M(L_\alpha) = \bigwedge_{N \in \mathcal{N}_\infty^\sharp} cl(\bigvee_{k \in N} \tilde{s}_k) = \liminf_k \tilde{s}_k$$

sonucu elde edilir. Benzer şekilde lim sup yapılır. $\square$

Önerme 4.5. *[7]* $\{\tilde{s}_k\}_{k\in\mathbb{N}}, \{\tilde{t}_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in F(\mathbb{R}^n)$ *ve* $k \in \mathbb{N}$ *için kabul edelim ki* $cl(\tilde{s}_k) = cl(\tilde{t}_k)$ *olsun. O halde*

$$\liminf_k \tilde{s}_k = \liminf_k \tilde{t}_k,$$

$$\limsup_k \tilde{s}_k = \limsup_k \tilde{t}_k$$

olur.

Önerme 4.6. *[7]* $\{\tilde{s}_k\}_{k\in\mathbb{N}}, \{\tilde{s}_k^1\}_{k\in\mathbb{N}}, \{\tilde{s}_k^2\}_{k\in\mathbb{N}} \subset F(\mathbb{R}^n)$ *için aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

(i) Eğer $\tilde{s}_k$ *artan (* $\tilde{s}_k \leq \tilde{s}_{k+1} \leq \dots$ *) ise* $\lim_k \tilde{s}_k = cl(\bigvee_{k\in\mathbb{N}} \tilde{s}_k)$.

(ii) Eğer $\tilde{s}_k$ *azalan (* $\tilde{s}_k \geq \tilde{s}_{k+1} \geq \dots$ *) ise* $\lim_k \tilde{s}_k = \bigwedge_{k\in\mathbb{N}} cl(\tilde{s}_k)$.

(iii) Eğer $\tilde{s}_k^1 \leq \tilde{s}_k \leq \tilde{s}_k^2$, $k \in \mathbb{N}$ *ve* $\liminf_k \tilde{s}_k^1 = \liminf_k \tilde{s}_k^2$ *ise* $\liminf_k \tilde{s}_k = \liminf_k \tilde{s}_k^1 = \liminf_k \tilde{s}_k^2$.

(iv) Eğer $\tilde{s}_k^1 \leq \tilde{s}_k \leq \tilde{s}_k^2$, $k \in \mathbb{N}$ *ve* $\limsup_k \tilde{s}_k^1 = \limsup_k \tilde{s}_k^2$ *ise* $\limsup_k \tilde{s}_k = \limsup_k \tilde{s}_k^1 = \limsup_k \tilde{s}_k^2$.

(v) Eğer $\tilde{s}_k^1 \leq \tilde{s}_k \leq \tilde{s}_k^2$ *,* $k \in \mathbb{N}$ *ve* $\lim_k \tilde{s}_k^1 = \lim_k \tilde{s}_k^2$ *ise* $\lim_k \tilde{s}_k = \lim_k \tilde{s}_k^1 = \lim_k \tilde{s}_k^2$

Kanıt. (i) $\forall\alpha \in (0,1]$ için $\tilde{s}_k(x) \leq \tilde{s}_{k+1}(x) \leq \tilde{s}_{k+2}(x)$ olduğundan $[\tilde{s}_k]_\alpha \subset [\tilde{s}_{k+1}]_\alpha$' dır.

$$x_0 \in [\tilde{s}_k]_\alpha \Rightarrow \tilde{s}_k(x_0) \geq \alpha$$

olur. Ayrıca

$$\tilde{s}_{k+1}(x_0) \geq \tilde{s}_k(x_0) \geq \alpha$$

olduğundan $x_0 \in [\tilde{s}_{k+1}]_\alpha$ olur. Önerme 2.2' den

$$\lim_k [\tilde{s}_k]_\alpha = cl(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} [\tilde{s}_k]_\alpha)$$

olduğu biliniyor. Kolaylık olması için

$$T_\alpha = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} [\tilde{s}_k]_\alpha$$

şeklinde tanımlansın.

$$M(T_\alpha) = M(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} [\tilde{s}_k]_\alpha)$$

olur. Önerme 3.7' den $M(T_\alpha) = \bigvee_{k\in\mathbb{N}} \tilde{s}_k$ olur. Önerme 3.6' dan ise

$$cl(T_\alpha) = cl(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} [\tilde{s}_k]_\alpha)$$

olur.

$$M(L_\alpha) = M(U_\alpha) = M(cl(T_\alpha))$$

olduğundan

$$M(cl(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}[\tilde{s}_k]_\alpha)) = cl(\bigvee_{k\in\mathbb{N}}\tilde{s}_k)$$

sonucuna ulaşılır.

(ii) Benzer şekilde Önerme 2.2' den

$$\lim_k [\tilde{s}_k]_\alpha = cl(\bigcap_{k\in\mathbb{N}}[\tilde{s}_k]_\alpha)$$

olduğu biliniyor.

$$cl(\tilde{s}_k) = M(cl([\tilde{s}_k]_\alpha))$$

olur. Dolayısıyla

$$M(L_\alpha) = M(U_\alpha) = \bigwedge_{k\in\mathbb{N}} cl(\tilde{s}_k)$$

sonucu çıkar.

(iii) $\tilde{s}_k^1 \leq \tilde{s}_k \leq \tilde{s}_k^2$ olduğundan $\tilde{s}_k^1(x) \leq \tilde{s}_k(x) \leq \tilde{s}_k^2(x)$' dir. Dolayısıyla

$$[\tilde{s}_k^1]_\alpha \subset [\tilde{s}_k]_\alpha \subset [\tilde{s}_k^2]_\alpha$$

olur.

$$L_\alpha^1 = \lim_k \inf [\tilde{s}_k^1]_\alpha \quad , \quad L_\alpha^2 = \lim_k \inf [\tilde{s}_k^2]_\alpha$$

$$M(L_\alpha^1) = M(L_\alpha^2)$$

yazılır. Önerme 2.1' den

$$L_\alpha^1 = \lim_k \inf [\tilde{s}_k^1]_\alpha = \bigcap_{N\in\mathcal{N}_\infty^\sharp} cl(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}[\tilde{s}_k^1]_\alpha)$$

yazılır. $[\tilde{s}_k^1]_\alpha \subset [\tilde{s}_k]_\alpha$ olduğundan

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}}[\tilde{s}_k^1]_\alpha \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}}[\tilde{s}_k]_\alpha$$

olur. O halde $cl(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}[\tilde{s}_k^1]_\alpha) \subset cl(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}[\tilde{s}_k]_\alpha)$ olduğundan

$$\bigcap_{N\in\mathcal{N}_\infty^\sharp} cl(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}[\tilde{s}_k^1]_\alpha) \subset \bigcap_{N\in\mathcal{N}_\infty^\sharp} cl(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}[\tilde{s}_k]_\alpha))$$

sonucu çıkar. Buradan da

$$\liminf_k [\tilde{s}_k^1] \subset \liminf_k [\tilde{s}_k] \subset \liminf_k [\tilde{s}_k^2]$$

olduğundan, Önerme 3.2' den

$$M(L_\alpha^1) \leq M(L_\alpha) \leq M(L_\alpha^2)$$

olur.

$$M(L_\alpha^2) = M(L_\alpha^1) = M(L_\alpha)$$

ise

$$M(L_\alpha^2) = \liminf_k \tilde{s}_k$$

sonucuna ulaşılır.

(iv)

$$\limsup_k \tilde{s}_k^1 = \limsup_k \tilde{s}_k^2 \Rightarrow M(U_\alpha^1) = M(U_\alpha^2)$$

olur.

$$U_\alpha^1 = \limsup_k [\tilde{s}_k^1]_\alpha = \bigcap_{N \in \mathcal{N}_\infty} cl(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} [\tilde{s}_k^1]_\alpha)$$

olur. $[\tilde{s}_k^1]_\alpha \subset [\tilde{s}_k^2]_\alpha$ olduğundan;

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} [\tilde{s}_k^1]_\alpha \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} [\tilde{s}_k^2]_\alpha$$

bulunur. Buradan da

$$cl(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} [\tilde{s}_k^1]_\alpha) \subset cl(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} [\tilde{s}_k^1]_\alpha)$$

$$\bigcap_{N \in \mathcal{N}_\infty} cl(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} [\tilde{s}_k^1]_\alpha) \subset \bigcap_{N \in \mathcal{N}_\infty} cl(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} [\tilde{s}_k^2]_\alpha)$$

olur. Dolayısıyla

$$\limsup_k [\tilde{s}_k^1]_\alpha \subset \limsup_k [\tilde{s}_k]_\alpha \subset \limsup_k [\tilde{s}_k^2]_\alpha.$$

Önerme 3.2' den

$$M(U_\alpha^1) = M(U_\alpha) = M(U_\alpha^2)$$

olduğundan $U_\alpha^1 = \limsup_k \tilde{s}_k$ sonucuna ulaşılır.

(v) Bu ifadeyi ispatlamak için (iii) ve (iv) özellikleri kullanılırsa;

$$\lim_k \tilde{s}_k^1 = \lim_k \tilde{s}_k^2$$

olduğundan;

$$\liminf_k \tilde{s}_k^1 = \liminf_k \tilde{s}_k^2 = \limsup_k \tilde{s}_k^1 = \limsup_k \tilde{s}_k^1$$

eşitliği elde edilir. Bu ifade de

$$\lim_k \tilde{s}_k = \lim_k \tilde{s}_k^1 = \lim_k \tilde{s}_k^2$$

olmasını gerektirir. □

$X \subset \mathbb{R}^n$ kompakt bir küme olmak üzere

$$F'(\mathbb{R}^n) = \left\{ \tilde{s} \in CF(\mathbb{R}^n) : \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \tilde{s}(x) = 1, \tilde{s}(x) = 0, x \notin X \right\}.$$

$\tilde{s} \in F'(\mathbb{R}^n)$ ve $\alpha \in [0,1]$ için aşağıdaki küme oluşturulabilir;

$$[[\tilde{s}]]_\alpha = \begin{cases} [\tilde{s}]_\alpha & , \quad \alpha \in (0,1] \\ cl(\{x \in \mathbb{R}^n : \tilde{s}(x) > 0\}) & , \quad \alpha = 0 \end{cases}$$

$\{\tilde{s}_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset F'(\mathbb{R}^n)$ ve $\tilde{s} \in F'(\mathbb{R}^n)$ olsun. $[[\tilde{s}_k]]_\alpha$ ve $[[\tilde{s}]]_\alpha$ arasındaki Hausdorff uzaklığı

$$\rho([[\tilde{s}_k]]_\alpha, [[\tilde{s}]]_\alpha)$$

ile gösterildiği durumda, eğer sayılabilir çokluktaki α' lar hariç herhangi bir $\alpha \in [0,1]$ için

$$\rho([[\tilde{s}_k]]_\alpha, [[\tilde{s}]]_\alpha) \to 0$$

oluyorsa $\{\tilde{s}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\tilde{s}$' e Yoshida anlamında yakınsaktır denir.

Ayrıca $\rho([[\tilde{s}_k]]_\alpha, [[\tilde{s}]]_\alpha) \to 0$ ancak ve ancak $\lim_k [[\tilde{s}_k]]_\alpha = [[\tilde{s}]]_\alpha$.

Sıradaki önerme fuzzy küme dizilerinin yakınsaklık kavramının Yoshida anlamındaki yakınsaklıktan daha zayıf olduğunu gösterir.

Önerme 4.7. *[7] $\{\tilde{s}_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset F'(\mathbb{R}^n)$ ve $\tilde{s} \in F'(\mathbb{R}^n)$ olsun. Eğer $\{\tilde{s}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\tilde{s}$' e Yoshida anlamında yakınsak ise Tanım 4.1' e göre $\lim_k \tilde{s}_k = \tilde{s}$ olur.*

Kanıt. Sayılabilir çokluktaki α' lar hariç herhangi bir $\alpha \in [0,1]$ için Tanım 2.2' ye göre

$$\lim_k [[\tilde{s}_k]]_\alpha = [[\tilde{s}]]_\alpha$$

olur ancak ve ancak $\{\tilde{s}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\tilde{s}$' e Yoshida anlamında yakınsaktır. Aynı α' lar için

$$\lim_k [\tilde{s}_k]_\alpha = \liminf_k [\tilde{s}_k]_\alpha = \limsup_k [\tilde{s}_k]_\alpha = [\tilde{s}]_\alpha$$

olur. Önerme 3.7 ve Decomposition teoremi [2] kullanılarak, Tanım 4.1' e göre

$$\tilde{s} = \lim_k \tilde{s}_k = \liminf_k \tilde{s}_k = \limsup_k \tilde{s}_k$$

olduğu söylenir. $\square$

5 FUZZY KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLERİN LİMİTLERİ

$\alpha \in (0,1]$ iken bir fuzzy küme değerli $\tilde{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{F}(\mathbb{R}^m)$ dönüşümü için, klasik küme değerli dönüşümü $F_\alpha : \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^m$ her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$F_\alpha(\mathbf{x}) = [\tilde{F}(\mathbf{x})]_\alpha$$

olarak tanımlansın.

Keyfi $x \in \mathbb{R}^n$ için $\tilde{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{F}(\mathbb{R}^m)$ dönüşümü eğer kapalı, konveks ve kapalı konveks değerli dönüşüm ise sırasıyla şu şekilde gösterilir;

$$\tilde{F}(x) \in CF(\mathbb{R}^m) \quad , \quad \tilde{F}(x) \in KF(\mathbb{R}^m) \quad , \quad \tilde{F}(x) \in CKF(\mathbb{R}^m).$$

Tanım 5.1. *[7] $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ ve $\tilde{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{F}(\mathbb{R}^m)$ olsun. Ayrıca $\alpha \in (0,1]$ için*

$$L_\alpha(\bar{x}) = \liminf_{x \to \bar{x}} F_\alpha(x)$$

$$U_\alpha(\bar{x}) = \limsup_{x \to \bar{x}} F_\alpha(x)$$

olmak üzere $x \to \bar{x}$ iken $\tilde{F}$' nin alt limiti,

$$\liminf_{x \to \bar{x}} \tilde{F}(x) = M(\{L_\alpha(\bar{x})\}_{\alpha \in (0,1]})$$

şeklinde tanımlanır. Benzer şekilde $x \to \bar{x}$ iken $\tilde{F}$' nin üst limiti,

$$\limsup_{x \to \bar{x}} \tilde{F}(x) = M(\{U_\alpha(\bar{x})\}_{\alpha \in (0,1]})$$

şeklinde tanımlanır. $x \to \bar{x}$ iken eğer

$$\liminf_{x \to \bar{x}} \tilde{F}(x) = \limsup_{x \to \bar{x}} \tilde{F}(x)$$

varsa $\tilde{F}$' nin limiti vardır denir ve

$$\lim_{x \to \bar{x}} \tilde{F}(x) = \liminf_{x \to \bar{x}} \tilde{F}(x) = \limsup_{x \to \bar{x}} \tilde{F}(x)$$

şeklinde gösterilir. Sonuç olarak fuzzy küme değerli dönüşümler için alt limit, üst limit ve limit tanımları klasik kümelerin genelleştirilmiş şeklidir.

Örnek 5.1. *Keyfi $x \in \mathbb{R}$ için $\tilde{s}, \tilde{t}, \tilde{\emptyset} \in F(\mathbb{R}^n)$ fuzzy kümeleri aşağıdaki gibi tanımlansın.*

$$\tilde{s}(x) = \begin{cases} max\{-|x|+1,0\} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

$$\tilde{t}(x) = max\{-|x|+1,0\},$$

$$\tilde{\emptyset}(x) = 0$$

Keyfi $x \in \mathbb{R}$ *için* Q *tüm rasyonel sayıların bir kümesi,* $\varepsilon \in (0, 1/2)$ *,* $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ *iken*

$$B(\bar{x}, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x - \bar{x}| < \varepsilon\}$$

olmak üzere $\tilde{F} : \mathbb{R} \to F(\mathbb{R})$ *fuzzy küme değerli dönüşümü de şu şekilde tanımlansın,*

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} \tilde{s} & , \quad x \in B(1,\varepsilon) \cup (B(3,\varepsilon) \cap Q) \\ \tilde{t} & , \quad x \in B(2,\varepsilon) \cup (B(3,\varepsilon) \setminus Q) \\ \tilde{\emptyset} & , \quad d.d. \end{cases}$$

Dolayısıyla $\alpha \in (0,1)$ *olduğunda* $x \in \mathbb{R}$ *için*

$$F_\alpha(x) = \begin{cases} [\alpha-1,0) \cup (0,1-\alpha] & , \quad x \in B(1,\varepsilon) \cup (B(3,\varepsilon) \cap Q) \\ (\alpha-1,1-\alpha] & , \quad x \in B(2,\varepsilon) \cup (B(3,\varepsilon) \setminus Q) \\ \emptyset & , \quad d.d. \end{cases}$$

ve $x \in \mathbb{R}$ *için*

$$F_1(x) = \begin{cases} \{0\} & , \quad x \in B(2,\varepsilon) \cup (B(3,\varepsilon) \setminus Q) \\ \emptyset & , \quad d.d. \end{cases}$$

olur. $\alpha \in (0,1)$ *için*

$$\lim_{x\to 1} F_\alpha(x) = \lim_{x\to 2} F_\alpha(x) = \lim_{x\to 3} F_\alpha(x) = [\alpha-1, 1-\alpha],$$

$$\lim_{x\to 1} F_1(x) = \liminf_{x\to 3} F_1(x) = \emptyset,$$

$$\lim_{x\to 2} F_1(x) = \limsup_{x\to 3} F_1(x) = \{0\}$$

sonuçları elde edilir. Ayrıca

$$\lim_{x\to 1} \tilde{F}(x) = \lim_{x\to 2} \tilde{F}(x) = \lim_{x\to 3} \tilde{F}(x) = \tilde{t}$$

bulunur. Tüm bunlara ek olarak aşağıdaki ifadeler söylenebilir;

(i) $\liminf_{x\to 1} F_1(x) \neq \liminf_{x\to 2} F_1(x)$ *iken* $\liminf_{x\to 1} \tilde{F}(x) = \liminf_{x\to 2} \tilde{F}(x)$.

(ii) $\limsup_{x\to 1} F_1(x) \neq \limsup_{x\to 2} F_1(x)$ *iken* $\limsup_{x\to 1} \tilde{F}(x) = \limsup_{x\to 2} \tilde{F}(x)$.

(iii) $\liminf_{x\to 3} F_1(x) \neq \limsup_{x\to 3} F_1(x)$ *iken* $\liminf_{x\to 3} \tilde{F}(x) = \limsup_{x\to 3} \tilde{F}(x)$.

(iv) $\lim_{x\to 1} F_1(x) \neq \lim_{x\to 2} F_1(x)$ *iken* $\lim_{x\to 1} \tilde{F}(x) = \lim_{x\to 2} \tilde{F}(x) = \lim_{x\to 3} \tilde{F}(x)$ *olur. Ayrıca* $\lim_{x\to 3} F_1(x)$ *yoktur.*

Tanım 5.2. *[7]* $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ *ve* $\tilde{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{F}(\mathbb{R}^m)$ *olsun.* $\tilde{F}$ *fuzzy küme değerli dönüşümü* $\bar{x}$ *noktasında*

$$\liminf_{x\to\bar{x}} \tilde{F}(x) \geq \tilde{F}(\bar{x})$$

şartını sağlıyorsa alttan yarı sürekli;

$$\limsup_{x\to\bar{x}} \tilde{F}(x) \leq \tilde{F}(\bar{x})$$

şartını sağlıyorsa üstten yarı süreklidir denir. Eğer $\bar{x}$ *noktasında* $\tilde{F}$ *fuzzy küme değerli dönüşümü hem alttan hem üstten yarı sürekli ise* $\tilde{F}$ *fuzzy küme değerli dönüşümü süreklidir denir ve*

$$\lim_{x\to\bar{x}} \tilde{F}(x) = \tilde{F}(\bar{x})$$

şeklinde ifade edilir.

Örnek 5.2. $x \in \mathbb{R}^n$ *için* $\tilde{s}, \tilde{t} \in F(\mathbb{R})$ *fuzzy kümeleri şu şekilde tanımlansın.*

$$\tilde{s}(x) = max\{-|x| + 1/2, 0\}$$

$$\tilde{t}(x) = max\{-|x| + 1, 0\}$$

$\tilde{F}, \tilde{G} : \mathbb{R} \to F(\mathbb{R})$ *fuzzy küme değerli dönüşümleri ise* $\forall x \in \mathbb{R}$ *için*

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} \tilde{s} & , \quad x \leq 0 \\ \tilde{t} & , \quad x > 0 \end{cases}$$

$$\tilde{G}(x) = \begin{cases} \tilde{s} & , \quad x < 0 \\ \tilde{t} & , \quad x \leq 0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın.

$$\liminf_{x\to 0} \tilde{F}(x) = \tilde{s} \geq \tilde{s} = \tilde{F}(0) \quad , \quad \limsup_{x\to 0} \tilde{F}(x) = \tilde{t} \nleq \tilde{s} = \tilde{F}(0)$$

olduğundan $\tilde{F}$ *küme değerli dönüşümü* $x = 0$ *noktasında alttan yarı sürekli fakat üstten yarı sürekli değildir.*

$$\limsup_{x\to 0} \tilde{G}(x) = \tilde{t} \leq \tilde{t} = \tilde{G}(0) \quad , \quad \liminf_{x\to 0} \tilde{G}(x) = \tilde{s} \ngeq \tilde{t} = \tilde{G}(0)$$

olduğundan $\tilde{G}$ küme değerli dönüşümü $x = 0$ noktasında üstten yarı sürekli fakat alttan yarı sürekli değildir.

Önerme 5.1. *[7] $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ için $\tilde{F} : \mathbb{R}^n \to F(\mathbb{R}^m)$ ve $\forall \alpha \in (0,1]$ için*

$$L_\alpha(\bar{x}) = \liminf_{x \to \bar{x}} F_\alpha(x)$$

$$U_\alpha(\bar{x}) = \limsup_{x \to \bar{x}} F_\alpha(x)$$

olsun. O halde aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(i) $\{L_\alpha(\bar{x})\}_{\alpha \in (0,1]}, \{U_\alpha(\bar{x})\}_{\alpha \in (0,1]} \in S(\mathbb{R}^m)$.

(ii) $\alpha \in (0,1]$ *için* $L_\alpha(\bar{x}) \subset cl(F_\alpha(\bar{x})) \subset U_\alpha(\bar{x})$.

(iii) $\liminf_{x \to \bar{x}} \tilde{F}(x) \leq cl(\tilde{F}(\bar{x})) \leq \limsup_{x \to \bar{x}} \tilde{F}(x)$.

(iv) $\alpha \in (0,1]$ *için* $L_\alpha(\bar{x}) \in C(\mathbb{R}^m)$.

(v) $\alpha \in (0,1]$ *için* F_α *konveks değerli ise* $L_\alpha(\bar{x}) \in K(\mathbb{R}^m)$.

Kanıt. (i) Tanım 2.3 kullanılırsa,

$$L_\alpha(\bar{x}) = \liminf_{x \to \bar{x}} F_\alpha(x) = \liminf_{x \to \bar{x}} [\tilde{F}(x)]_\alpha = \bigcap_{x_k \to \bar{x}} \liminf_{k \to \infty} [\tilde{F}(x_k)]_\alpha$$

sonucu elde edilir.

$L_\alpha(\bar{x}) \in S(\mathbb{R}^m)$ olması için $\beta < \alpha$ iken $L_\alpha \subset L_\beta$ olmalıdır. O halde $\beta < \alpha$ iken

$$[\tilde{F}(x)]_\alpha \subset [\tilde{F}(x)]_\beta$$

olur.

$$\liminf_{k \to \infty} [\tilde{F}(x_k)]_\alpha \subset \liminf_{k \to \infty} [\tilde{F}(x_k)]_\beta$$

$$cl(\liminf_{k \to \infty} [\tilde{F}(x_k)]_\alpha) \subset cl(\liminf_{k \to \infty} [\tilde{F}(x_k)]_\beta)$$

ifadeleri yazılıp Önerme 2.1' e göre

$$\bigcap_{\mathbb{N} \in \mathcal{N}_\infty^\sharp} cl(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} [\tilde{F}(x_k)]_\alpha) \subset \bigcap_{\mathbb{N} \in \mathcal{N}_\infty^\sharp} cl(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} [\tilde{F}(x_k)]_\beta)$$

$$\bigcap_{x_k \to x} \liminf_{k \to \infty} [\tilde{F}(x_k)]_\alpha \subset \bigcap_{x_k \to x} \liminf_{k \to \infty} [\tilde{F}(x_k)]_\beta$$

$$L_\alpha(\bar{x}) \subset L_\beta(\bar{x})$$

sonucuna ulaşılır. O halde $\{L_\alpha(\bar{x})\}_{\alpha \in (0,1]} \in S(\mathbb{R}^m)$ olur. Aynı şekilde $\{U_\alpha(\bar{x})\} \in S(\mathbb{R}^m)$ olduğu da görülür.

(ii) Tanım 2.3' den

$$L_\alpha(\bar{x}) = \liminf_{x\to\bar{x}} F_\alpha(x) = \liminf_{x\to\bar{x}} [\tilde{F}(x)]_\alpha = \bigcap_{x_k\to\bar{x}} \liminf_{k\to\infty} [\tilde{F}(x_k)]_\alpha$$

olduğu biliniyor. $y_0 \in L_\alpha(\bar{x})$ alalım. $\forall x_k \to \bar{x}$ için $\exists \mathbb{N} \in \mathcal{N}_\infty$ iken

$$y_k \underset{\mathbb{N}}{\to} y_0 \quad , \quad y_k \in [\tilde{F}(x_k)]_\alpha$$

olsun. $y_0 \in cl(\tilde{F}_\alpha(\bar{x}))$ olması için y_0' a yakınsayan bir dizi bulmalıyız. $x_k = \bar{x}$ sabit dizisi için $\exists \mathbb{N} \in \mathcal{N}_\infty$ için

$$y_k \underset{\mathbb{N}}{\to} y_0 \quad , \quad y_k \in [\tilde{F}(\bar{x})]_\alpha$$

$$y_0 \in cl[\tilde{F}(x)]_\alpha = cl(\tilde{F}_\alpha(\bar{x}))$$

olur. Dolayısıyla y_0 kapalıdır. O halde $L_\alpha(\bar{x}) \subset cl(\tilde{F}_\alpha(\bar{x}))$ sonucuna ulaşılır.

Şimdi de

$$cl(\tilde{F}_\alpha(\bar{x})) \subset U_\alpha(\bar{x})$$

olduğunu gösterelim.

$$U_\alpha(\bar{x}) = \limsup_{x\to\bar{x}} F_\alpha(x) = \limsup_{x\to\bar{x}} [\tilde{F}(x)]_\alpha = \bigcup_{x_k\to\bar{x}} \limsup_{k\to\infty} [\tilde{F}(x_k)]_\alpha$$

eşitliği elde edilir.

$$y_0 \in cl(\tilde{F}_\alpha(\bar{x})) \Rightarrow \exists y_k \in \tilde{F}_\alpha(\bar{x})$$

vardır öyle ki $y_k \underset{\mathbb{N}}{\to} y_0$ olsun.

$$y_* \in U_\alpha(\bar{x}) \Rightarrow \exists x_k \to \bar{x} \quad , \quad \exists y_k \to y_*$$

$$y_k \in [\tilde{F}(x_k)]_\alpha .$$

$$\exists x_k = \bar{x} \quad , x_k \to \bar{x} \quad , \exists y_k \in \tilde{F}_\alpha(\bar{x}) \Rightarrow y_k \to y_0$$

olur. Dolayısıyla $y_0 \in U_\alpha(\bar{x})$ olur. O halde

$$cl(\tilde{F}_\alpha(\bar{x})) \subset U_\alpha(\bar{x})$$

sonucuna ulaşılır.

(iii) Önerme 3.2 kullanılırsa;

$$L_\alpha(\bar{x}) \subset cl(\tilde{F}_\alpha(\bar{x})) \subset U_\alpha(\bar{x})$$

olduğundan

$$M(L_\alpha(\bar{x})) \leq M(cl(\tilde{F}_\alpha(\bar{x}))) \leq M(U_\alpha(\bar{x}))$$

olur. Tanım 3.3' den dolayı

$$\liminf_{x \to \bar{x}} \tilde{F}(x) \leq cl(\tilde{F}(x)) \leq \limsup_{x \to \bar{x}} \tilde{F}(x)$$

sonucu çıkar.

(iv) Tanım gereği;

$$L_\alpha(\bar{x}) = \liminf_{x \to \bar{x}} F_\alpha(x) = \bigcap_{x_k \to \bar{x}} \liminf_{k \to \infty} [\tilde{F}(x_k)]_\alpha$$

olur. $\liminf\limits_{k \to \infty} [\tilde{F}(x_k)]_\alpha$ kapalı olduğu biliniyor. Kapalı kümelerin keyfi arakesiti de kapalı olduğundan $L_\alpha(\bar{x})$ kapalı olur.

(v) Benzer şekilde,

$$L_\alpha = \liminf_{x \to \bar{x}} F_\alpha(x) = \bigcap_{x_k \to \bar{x}} \liminf_{k \to \infty} [\tilde{F}(x_k)]_\alpha$$

olur. $[\tilde{F}(x_k)]_\alpha$ konvekstir. Önerme 2.5' ten de $\liminf\limits_{k \to \infty} [\tilde{F}(x_k)]_\alpha$ konveks olur. Konveks kümelerin arakesiti de konveks olduğundan $L_\alpha(\bar{x})$ konvekstir. □

Önerme 5.2. *[7] $\tilde{F} : \mathbb{R}^n \to F(\mathbb{R}^m)$ ve $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

(i) $\liminf_{x \to \bar{x}} \tilde{F}(x) \in CF(\mathbb{R}^m)$.

(ii) $\tilde{F}$ konveks değerli ise $\liminf_{x \to \bar{x}} \tilde{F}(x) \in CKF(\mathbb{R}^m)$ *olur.*

Kanıt. (i) Tanım 5.1' den

$$\liminf_{x \to \bar{x}} \tilde{F}(x) = M(L_\alpha(\bar{x})_{\alpha \in (0,1]})$$

olduğu biliniyor. Kolaylık olması için

$$\liminf_{x \to \bar{x}} \tilde{F}(x) = \tilde{s}$$

tanımlansın. $[\tilde{s}]_\alpha$ kapalı olup olmadığını araştırmalıyız. Önerme 3.3' e göre aşağıdaki eşitlik yazılabilir;

$$[\tilde{s}]_\alpha = \bigcap_{\beta \in (0,\alpha)} L_\beta(\bar{x}).$$

$L_\beta(\bar{x})$ kapalı olduğundan keyfi arakesitleri de kapalıdır. O halde $\forall\alpha \in (0,1]$ için $[\tilde{s}]_\alpha$ kapalı ise $\tilde{s}$ kapalıdır. Dolayısıyla

$$\liminf_{x\to\bar{x}} \tilde{F}(x) \in CF(\mathbb{R}^m)$$

olduğu görülür.

(ii) Benzer şekilde

$$\tilde{s} = \liminf_{x\to\bar{x}} \tilde{F}(x) = M(L_\alpha(\bar{x})_{\alpha\in(0,1]})$$

tanımlansın.

$$[\tilde{s}]_\alpha = \bigcap_{\beta\in(0,\alpha)} L_\beta(\bar{x})$$

olduğu Önerme 3.3' ten biliniyor. Önerme 5.1 (v)' ten $L_\alpha(\bar{x})$ konvekstir. Daha önce gösterildi ki $L_\alpha(\bar{x}) \in S(\mathbb{R}^m)$ olduğundan, $\beta < \alpha$ iken $L_\alpha(\bar{x})$ konveks ise $L_\beta(\bar{x})$ de konvekstir. O halde konveks kümelerin arakesiti de konveks olduğundan $\forall\alpha \in (0,1]$ iken $[\tilde{s}]_\alpha$ konveks ise $\tilde{s}$ konvekstir. Dolayısıyla

$$\liminf_{x\to\bar{x}} \tilde{F}(x) \in CKF(\mathbb{R}^m)$$

olduğu gösterilmiş olur. □

Önerme 5.3. *[7] $\tilde{F} : \mathbb{R}^n \to F(\mathbb{R}^m)$ ve $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ olsun.*

(i) $\liminf_{x\to\bar{x}} \tilde{F}(x) = \bigwedge_{x_k\to\bar{x}} \liminf_{k} \tilde{F}(x_k)$

(ii) $\limsup_{x\to\bar{x}} \tilde{F}(x) = \bigvee_{x_k\to\bar{x}} \limsup_{k} \tilde{F}(x_k)$

Kanıt. (i) $\liminf_{x\to\bar{x}} \tilde{F}(x) = M(L_\alpha(\bar{x}))$ ve $L_\alpha(\bar{x}) \in S(\mathbb{R}^n)$ olduğu biliniyor.

$$L_\alpha(\bar{x}) = \liminf_{x\to\bar{x}} F_\alpha(x) = \liminf_{x\to\bar{x}} [\tilde{F}(x)]_\alpha = \bigcap_{x_k\to\bar{x}} \liminf_{k\to\infty} [\tilde{F}(x_k)]_\alpha.$$

$\tilde{F}(x_k) \in F(\mathbb{R}^m)$ alalım.

$$L_\alpha = \liminf_{k\to\infty} [\tilde{F}(x_k)]_\alpha \in S(\mathbb{R}^m)$$

$$M(L_\alpha) = M(\liminf_{k\to\infty} [\tilde{F}(x_k)]_\alpha) = \liminf_{k\to\infty} \tilde{F}(x_k)$$

olur.

$$M(L_\alpha(\bar{x})) = \bigwedge_{x_k \to \bar{x}} \liminf_{k\to\infty} \tilde{F}(x_k)$$

olduğu görülür.

Benzer şekilde

$$\limsup_{x\to\bar{x}} \tilde{F}(x) = M(U_\alpha(\bar{x})) \quad , \quad U_\alpha(\bar{x}) = \bigcup_{x_k\to\bar{x}} \limsup_{k\to\infty} [\tilde{F}(x_k)]_\alpha$$

olduğu biliniyor. $\tilde{F}(x_k) \in F(\mathbb{R}^m)$ alalım.

$$U_\alpha = \limsup_{k\to\infty} [\tilde{F}(x_k)]_\alpha \in S(\mathbb{R}^m)$$

$$M(U_\alpha) = M(\limsup_{k\to\infty} [\tilde{F}(x_k)]_\alpha) = \limsup_{k\to\infty} \tilde{F}(x_k)$$

olur. Önerme 3.7' den

$$M(U_\alpha(\bar{x})) = \bigvee_{x_k\to\bar{x}} \limsup_{k\to\infty} \tilde{F}(x_k)$$

sonucuna ulaşılır. □

Önerme 5.4. *[7] $x \in \mathbb{R}^n$ ve $\{S_\alpha(x)\}_{\alpha\in(0,1]} \in S(\mathbb{R}^n)$ olsun. Kabul edelim ki $x \in \mathbb{R}^n$ için $\tilde{F} : \mathbb{R}^n \to F(\mathbb{R}^m)$ fonksiyonu $\tilde{F}(x) = M(\{S_\alpha(x)\}_{\alpha\in(0,1]})$ biçiminde olsun. Ayrıca $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in (0,1]$ olmak üzere $L_\alpha(\bar{x}) = \liminf_{x\to\bar{x}} S_\alpha(x)$ ve $U_\alpha(\bar{x}) = \limsup_{x\to\bar{x}} S_\alpha(x)$ olduğu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

(i) $\liminf_{x\to\bar{x}} \tilde{F}(x) = M(\{L_\alpha(\bar{x})\}_{\alpha\in(0,1]})$.

(ii) $\limsup_{x\to\bar{x}} \tilde{F}(x) = M(\{U_\alpha(\bar{x})\}_{\alpha\in(0,1]})$.

Kanıt. (i) Tanım 2.3' den

$$L_\alpha(\bar{x}) = \liminf_{x\to\bar{x}} S_\alpha(\bar{x}) = \bigcap_{x_k\to\bar{x}} \liminf_{k\to\infty} S_\alpha(x_k)$$

olduğu biliniyor. Kolaylık olması için

$$T_\alpha = \liminf_{k\to\infty} S_\alpha(x_k)$$

şeklinde tanımlansın ve $T_\alpha \in S(\mathbb{R}^m)$' dir. Önerme 4.4' ten,

$$M(T_\alpha) = \liminf_{k\to\infty} \tilde{F}(x_k)$$

olur. Önerme 3.7 ve Önerme 4.3 kullanılarak,

$$M(L_\alpha(\bar{x})) = \bigwedge_{x_k \to \bar{x}} \liminf_{k\to\infty} \tilde{F}(x_k) = \liminf_{x\to\bar{x}} \tilde{F}(x)$$

olduğu gösterilir.

(ii) Benzer şekilde

$$U_\alpha(\bar{x}) = \liminf_{x\to\bar{x}} S_\alpha(\bar{x}) = \bigcup_{x_k\to\bar{x}} \liminf_{k\to\infty} S_\alpha(x_k)$$

olur. Yine kolaylık olması için

$$T_\alpha = \limsup_{k\to\infty} S_\alpha(x_k)$$

olarak tanımlansın. Önerme 4.4, Önerme 3.7 ve Önerme 4.3 kullanılırsa;

$$M(T_\alpha) = \limsup_{k\to\infty} \tilde{F}(x_k)$$

$$M(U_\alpha(\bar{x})) = \bigvee_{x_k\to\bar{x}} \limsup_{k\to\infty} \tilde{F}(x_k) = \limsup_{x\to\bar{x}} \tilde{F}(x)$$

sonucuna ulaşılır. □

Önerme 5.5. *[7]*

$\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ ve $\tilde{F} : \mathbb{R}^n \to F(\mathbb{R}^m)$ tanımlı olsun. $x_k \to \bar{x}$ olacak şekilde keyfi bir $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ için $\lim_k \tilde{F}(x_k) = \tilde{F}(\bar{x})$ ancak ve ancak $\lim_{x\to\bar{x}} \tilde{F}(x) = \tilde{F}(\bar{x})$.

Kanıt. $\lim\limits_{x\to\bar{x}} \tilde{F}(x) = \tilde{F}(\bar{x})$ olsun. Önerme 5.3 kullanılırsa;

$$\liminf_{x\to\bar{x}} \tilde{F}(x) = \bigwedge_{x_k\to\bar{x}} \liminf_{k\to\infty} \tilde{F}(x_k) = \bigvee_{x_k\to\bar{x}} \liminf_{k\to\infty} \tilde{F}(x_k) = \limsup_{x\to\bar{x}} \tilde{F}(x)$$

olur.

$$\inf_{x_k\to\bar{x}}(\liminf_{k\to\infty} \tilde{F}(x_k)) = \sup_{x_k\to\bar{x}}(\limsup_{k\to\infty} \tilde{F}(x_k))$$

işlemini yapıp şu tanımlar yazılırsa,

$$L_\alpha = \liminf_{k\to\infty}[\tilde{F}(x_k)]_\alpha \quad , \quad U_\alpha = \limsup_{k\to\infty}[\tilde{F}(x_k)]_\alpha$$

$$\liminf_{k\to\infty} \tilde{F}(x_k) = M(L_\alpha) \quad , \quad M(U_\alpha) = \limsup_{k\to\infty} \tilde{F}(x_k).$$

eşitlikleri elde edilir. Önerme 3.2' den,

$$L_\alpha \subset U_\alpha \Rightarrow M(L_\alpha) \leq M(U_\alpha)$$

olduğu biliniyor.

$$\inf_{x_k \to \bar{x}} (M(L_\alpha)) = \sup_{x_k \to \bar{x}} (M(U_\alpha))$$

olduğundan $M(L_\alpha) = M(U_\alpha)$ olur. Dolayısıyla

$$\lim_k \tilde{F}(x_k) = \tilde{F}(\bar{x})$$

sonucu elde edilir. Tersini ispatlamak için;

$$\lim_k \tilde{F}(x_k) = \tilde{F}(\bar{x})$$

olduğu kabul edilirse;

$$\liminf_{k\to\infty} \tilde{F}(x_k) = \limsup_{k\to\infty} \tilde{F}(x_k) = \tilde{F}(\bar{x})$$

$$\liminf_{k\to\infty} \tilde{F}(x) = \bigwedge_{x_k \to \bar{x}} \liminf_{k\to\infty} \tilde{F}(x_k) = \bigvee_{x_k \to \bar{x}} \limsup_{k\to\infty} \tilde{F}(x_k) = \limsup_{x_k \to \bar{x}} \tilde{F}(x)$$

$$\lim_{x \to \bar{x}} \tilde{F}(x) = \tilde{F}(\bar{x})$$

elde edilir. □

6 FUZZY KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLERİN TÜREVLERİ

Bu bölümde fuzzy küme değerli dönüşümlerin türev tanımları ve özellikleri araştırılacaktır.

Tanım 6.1. *[7] $\tilde{s} \in F(\mathbb{R}^n)$ ve $x_0 \in [\tilde{s}]_1$ olsun.*

$$\tilde{T}(\tilde{s}; x_0) = M(\{T([\tilde{s}]_\alpha; x_0)\}_{\alpha \in (0,1]})$$

fuzzy kümesine $\tilde{s}$' nin x_0' daki fuzzy tanjant konisi denir. $S \subset \mathbb{R}^n$ ve $x_0 \in S$ için

$$\tilde{T}(c_S; x_0) = c_{T(S; x_0)}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla fuzzy tanjant konisi, klasik kümeler için verilen tanımların genelleşmiş şeklidir.

Örnek 6.1. *$x \in \mathbb{R}$ için $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = (x+1)x(x-1)$ olacak şekilde tanımlansın. Keyfi $\boldsymbol{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ için $\tilde{s} \in F(\mathbb{R}^2)$ fuzzy kümesi $f(x) \neq 0$ durumunda*

$$\tilde{s}(\boldsymbol{x}) = max\left\{-\frac{1}{|f(x)|}|y - f(x)| + 1, 0\right\},$$

$f(x) = 0$ durumunda ise,

$$\tilde{s}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & , \quad y = 0 \\ 0 & , \quad y \neq 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Buna ek olarak $\boldsymbol{x}_0 = (0,0) \in [\tilde{s}]_1$. $\forall \alpha \in (0,1]$ için

$$[\tilde{s}]_\alpha = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : min\left\{\alpha(x^3 - x), (2-\alpha)(x^3 - x)\right\}\right\} \leqslant y$$
$$\leqslant max\left\{\alpha(x^3 - x), (2-\alpha)(x^3 - x)\right\}$$

olduğundan dolayı

$$T([\tilde{s}]_\alpha; \boldsymbol{x}_0) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : min\{-\alpha x, -(2-\alpha)x\} \leqslant y \leqslant max\{-\alpha x, -(2-\alpha)x\}\right\}$$

olur. Bu nedenle $\boldsymbol{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ iken $x \neq 0$ olduğunda

$$\tilde{T}(\tilde{s}; \boldsymbol{x}_0)(x) = max\left\{-\frac{1}{|x|}|y + x| + 1, 0\right\}.$$

$x = 0$ için ise,

$$\tilde{T}(\tilde{s}; \boldsymbol{x}_0)(x) = \begin{cases} 1 & , \quad y = 0 \\ 0 & , \quad y \neq 0 \end{cases}$$

olur.

Önerme 6.1. *[7] $\tilde{s} \in F(\mathbb{R}^n)$ ve $\boldsymbol{x}_0 \in [\tilde{s}]_1$ iken aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

(i) $\tilde{T}(\tilde{s}; \boldsymbol{x}_0)$ kapalı fuzzy konidir.

(ii) Eğer $\tilde{s} \in KF(\mathbb{R}^n)$ ise $\tilde{T}(\tilde{s}; \boldsymbol{x}_0)$ kapalı konveks fuzzy konidir.

Kanıt. (i) Tanım 6.1' de

$$\tilde{T}(\tilde{s}; x_0) = M(\{T([\tilde{s}]_\alpha; x_0)\}_{\alpha \in (0,1]})$$

olarak tanımlanmıştı. Kolaylık olması için $\tilde{T}(\tilde{s}; x_0) = \tilde{u}$ şeklinde tanımlansın. $\forall \alpha \in (0,1]$ için $[\tilde{u}]_\alpha \in C(\mathbb{R}^n)$ olduğunu göstermeliyiz. Önerme 3.3' ten aşağıdaki eşitlik yazılırsa;

$$[\tilde{u}]_\alpha = \bigcap_{\beta \in (0,\alpha)} (T([\tilde{s}]_\beta); x_0)$$

olur. Önerme 2.8' den de $T([\tilde{s}]_\beta)$ kapalı olduğu biliniyor. Keyfi sayıdaki kapalı kümenin arakesiti de kapalı olduğundan $[\tilde{u}]_\alpha$ kapalıdır. Dolayısıyla $\tilde{u}$ kapalıdır. O halde $\tilde{T}(\tilde{s}; x_0)$ kapalıdır.

(ii) Benzer şekilde,

$$\tilde{u} = \tilde{T}(\tilde{s}; x_0) = M(\{T([\tilde{s}]_\alpha; x_0)\}_{\alpha \in (0,1]})$$

olacak şekilde $\tilde{u} \in KF(\mathbb{R}^n)$ tanımlansın. $\forall \alpha \in (0,1]$ için $[\tilde{u}]_\alpha \in KF(\mathbb{R}^n)$ olduğunu göstermeliyiz. Önerme 3.3' den

$$[\tilde{u}]_\alpha = \bigcap_{\beta \in (0,\alpha)} (T([\tilde{s}]_\beta); x_0)$$

tanımı biliniyor. Önerme 2.8'den de $T([\tilde{s}]_\beta)$ konveks olduğu bilindiğine göre ve konveks kümelerin arakesiti de konveks olduğundan $[\tilde{u}]_\alpha$ konveks olur. Dolayısıyla $\tilde{u}$ konvekstir. O halde $\tilde{T}(\tilde{s}; x_0)$ konvekstir. □

Önerme 6.2. *[7] $\boldsymbol{x}_0 \in [\tilde{s}]_1$ iken $\tilde{s} \leq \tilde{t}$ olacak şekilde $\tilde{s}, \tilde{t} \in F(\mathbb{R}^n)$ kümeleri için $\tilde{T}(\tilde{s}; \boldsymbol{x}_0) \leq \tilde{T}(\tilde{t}; \boldsymbol{x}_0)$ olur.*

Kanıt. $\forall \alpha \in (0,1]$ için $\tilde{s} \leq \tilde{t}$ iken $[\tilde{s}]_\alpha \subseteq [\tilde{t}]_\alpha$ olduğu biliniyor. Önerme 2.9' dan

$$[\tilde{s}]_\alpha \subseteq [\tilde{t}]_\alpha \Rightarrow T(\tilde{s}; x_0) \subseteq T(\tilde{t}; x_0)$$

olur. Önerme 3.2' den

$$M(\{T([\tilde{s}]_\alpha; x_0)\}_{\alpha \in (0,1]}) \leq M(\{T([\tilde{t}]_\alpha; x_0)\}_{\alpha \in (0,1]})$$

elde edilir. Tanım 6.1' den de

$$T(\tilde{s};x_0) \leq T(\tilde{t};x_0)$$

sonucuna ulaşılır. $\square$

Tanım 6.2. *[7] $\tilde{F} : \mathbb{R}^n \to F(\mathbb{R}^m)$ tanımlı olsun. Her $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ için $Graf(\tilde{F}) \in F(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ olacak şekilde*

$$Graf(\tilde{F})(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \tilde{F}(x)(y)$$

ifadesine $\tilde{F}$' nin fuzzy grafiği denir. Ayrıca $\alpha \in (0,1]$ için

$$\left[Graf(\tilde{F})\right]_\alpha = Graf(F_\alpha)$$

olduğu rahatlıkla görülebilir.
$F : \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^m$ ve $\tilde{F} : \mathbb{R}^n \to F(\mathbb{R}^m)$ olacak şekilde her $x \in \mathbb{R}^n$ için $\tilde{F}(x) = c_{F_{(x)}}$ dönüşümü tanımlansın. O halde $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ için

$$Graf(\tilde{F})(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \tilde{F}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}) = c_{F_{(x)}}(y) = c_{Graf(F)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

olur. Sonuç olarak fuzzy küme değerli dönüşümlerin fuzzy grafiği, klasik kümelerdeki tanımların genelleşmiş halidir.

Tanım 6.3. *[7] $\tilde{F} : \mathbb{R}^n \to F(\mathbb{R}^m)$ tanımlı ve $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) \in [Graf(\tilde{F})]_1$ olsun. $D\tilde{F}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) : \mathbb{R}^n \to F(\mathbb{R}^m)$ fuzzy küme değerli dönüşümü için*

$$Graf(D\tilde{F}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)) = \tilde{T}(Graf(\tilde{F}); (\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0))$$

ifadesine $\tilde{F}$' nin $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$' daki fuzzy contingent türevi denir. Ayrıca $\forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ ve $\forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^m$ için

$$D\tilde{F}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = Graf(D\tilde{F}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0))(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \tilde{T}(Graf(\tilde{F}); (\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0))(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$$

olduğu görülür.

$F : \mathbb{R}^n \rightsquigarrow F(\mathbb{R}^m)$ tanımlı ve $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in Graf(F)$ olsun. Kabul edelim ki $x \in \mathbb{R}^n$ için $\tilde{F} : \mathbb{R}^n \to F(\mathbb{R}^m)$ tanımlı ve $\tilde{F}(x) = c_{F(x)}$ olsun. O halde $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in [Graf(\tilde{F})]_1$ için

$$Graf(\tilde{F})(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = c_{Graf(F)}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = 1$$

ve

$$Graf(D\tilde{F}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)) = \tilde{T}(Graf(\tilde{F});(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)) = \tilde{T}(c_{Graf(F)};(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0))$$

$$= c_{T(Graf(F);(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0))} = c_{Graf(DF(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0))}.$$

Sonuç olarak

$$Graf(D\tilde{F}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)) = c_{Graf(DF(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0))}$$

olur. Dolayısıyla fuzzy küme değerli dönüşümlerin fuzzy kontingent türevi, klasik kümelerin genelleştirilmiş halidir.

Örnek 6.2. *$x \in \mathbb{R}$ için $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = (x+1)x(x-1)$ olacak şekilde tanımlansın. $x \in \mathbb{R}$ için $\tilde{F} : \mathbb{R} \to F(\mathbb{R})$ fuzzy küme değerli dönüşümü, $\forall y \in \mathbb{R}$ ve $f(x) \neq 0$ iken*

$$\tilde{F}(x)(y) = max\left\{-\frac{1}{|f(x)|}|y - f(x)| + 1, 0\right\}$$

olur. $f(x) = 0$ olduğu durumda da,

$$\tilde{F}(x)(y) = \begin{cases} 1 & , \quad y = 0 \\ 0 & , \quad y \neq 0 \end{cases}$$

sonucuna eşit olur. Ayrıca $\tilde{s} \in F(\mathbb{R}^2)$ Örnek 6.1' deki gibi tanımlı fuzzy kümesi olsun. O halde $Graf(\tilde{F}) = \tilde{s}$ ve $(0,0) \in [Graf(\tilde{F})]_1$ olur. Örnek 6.1' den $\forall u \in \mathbb{R}$ ve $\forall v \in \mathbb{R}$ için $u \neq 0$ iken

$$D\tilde{F}(0,0)(u)(v) = max\left\{-\frac{1}{|u|}|v + u| + 1, 0\right\}$$

ve

$$D\tilde{F}(0,0)(u)(v) = \begin{cases} 1 & , \quad v = 0 \\ 0 & , \quad v \neq 0 \end{cases}$$

olur.

Önerme 6.3. *[7] $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) \in [Graf(\tilde{F})]_1$ ve $\tilde{F} : \mathbb{R}^n \to F(\mathbb{R}^m)$ tanımlı olsun. Keyfi $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ için*

$$D\tilde{F}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)(\boldsymbol{u}) = M(\{DF_\alpha(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)(\boldsymbol{u})\}_{\alpha \in (0,1]}).$$

Kanıt. Sabit bir $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ ve $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ alalım.

$$D\tilde{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)(\mathbf{u})(\mathbf{v}) = Graf(D\tilde{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0))(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \tilde{T}(Graf(\tilde{F}); (\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0))(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

$$= \sup\{\alpha \in (0,1] : (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in T([Graf(\tilde{F})]_\alpha; (\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0))\}$$

$$= \sup\{\alpha \in (0,1] : (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in T(Graf(F_\alpha); (\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0))\}$$

$$= \sup\{\alpha \in (0,1] : (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in Graf(DF_\alpha(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0))\}$$

$$= \sup\{\alpha \in (0,1] : \mathbf{v} \in DF_\alpha(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)(\mathbf{u})\}$$

$$= M(\{DF_\alpha(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)(\mathbf{u})\}_{\alpha \in (0,1]})(\mathbf{v}).$$

□

Önerme 6.4. *[7] $\tilde{F} : \mathbb{R}^n \to F(\mathbb{R}^m)$ tanımlı ve $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) \in [Graf(\tilde{F})]_1$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.*

(i) $D\tilde{F}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$ kapalı değerlidir.

(ii) Eğer $Graf(\tilde{F}) \in KF(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ ise $D\tilde{F}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$ kapalı konveks değerlidir.

Kanıt. (i) Tanım 6.3' e göre

$$D\tilde{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \tilde{T}(Graf(\tilde{F}); (\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0))(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

olduğu biliniyor.

$$\tilde{s} = D\tilde{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)(\mathbf{u}) = M\left\{DF_\alpha(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)(\mathbf{u})_{\alpha \in (0,1]}\right\}$$

eşitliği Önerme 6.3' ten yazılabilir. Önerme 3.3' ten de

$$[\tilde{s}]_\alpha = \bigcap_{\beta \in (0,\alpha)} DF_\beta(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)(\mathbf{u})$$

yazılabilir. Önerme 2.10' dan da $DF_\beta(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)(\mathbf{u})$ kapalı olduğu biliniyor. Kapalı kümelerin keyfi arakesiti de kapalıdır. O halde $[\tilde{s}]_\alpha$ kapalıdır. $\forall \alpha \in (0,1]$ için $[\tilde{s}]_\alpha$ kapalı ise $\tilde{s}$ kapalıdır. Dolayısıyla $D\tilde{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ kapalı olduğu sonucuna ulaşılır.

(ii) Benzer şekilde;

$$\tilde{s} = D\tilde{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)(\mathbf{u}) = M\left\{DF_\alpha(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)(\mathbf{u})_{\alpha \in (0,1]}\right\}$$

eşitliği Önerme 6.3' ten yazılabilir.. Önerme 3.3' ten de

$$[\tilde{s}]_\alpha = \bigcap_{\beta \in (0,\alpha)} DF_\beta(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)(\mathbf{u})$$

yazılabilir. Önerme 2.10' dan $DF_\beta(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)(\mathbf{u})$ konveks olduğu biliniyor. Konveks kümelerin arakesiti de konvekstir. O halde $[\tilde{s}]_\alpha$ konvekstir. $\forall \alpha \in (0, 1]$ için $[\tilde{s}]_\alpha$ konveks ise $\tilde{s}$ konvekstir. Dolayısıyla $D\tilde{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ konveks olduğu sonucuna ulaşılır. $\square$

7 SONUÇ

Bu çalışmada, ilk bölümlerde küme dizilerinin limit ve türev tanımları verilerek birtakım önermeler ispatlanmıştır. Daha sonra küme değerli dönüşümlerin limit ve türevleri incelenmiştir.

Bu araştırmaların neticesinde elde edilen tanım ve önermeler fuzzy küme dizileri ve fuzzy küme değerli dönüşümler için de araştırılıp, bazı örneklerle gösterilerek birtakım sonuçlara ulaşılmıştır. Elde edilen bu bulgular duyarlılık analizi, optimizasyon problemleri ve kararlılık teorisi süreçleri için önemli bir yer tutmaktadır.

KAYNAKÇA

[1] Aubin, JP, Frankowska, H. *Set-Valued Analysis.* Birkhauser, Basel, 1990.

[2] Dubois, D, Ostasiewicz, W, Prade, H. *Fuzzy sets: history and basic notions.* In: Dubois, D, Prade, H (eds.) Fundamentals of Fuzzy Sets, pp. 21-124. Kluwer Academic, Boston (2000).

[3] Furukawa, N. *Convexity and Local Lipschitz Continuity of Fuzzy-Valued Mappings.* Fuzzy Sets Syst. 93, 113-119,1998.

[4] Furukawa, N. *Mathematics of Fuzzy Optimization.* Morikita-Syuppan, Japan, 1999.

[5] John, J. *Vector Optimization: Theory, Applications and Extensions, Springer Verlag.* Berlin, 2004.

[6] Kon, M. *On Degree of Non-Convexity of Fuzzy Sets.* Sci. Math. Jpn. 76, 417-425 (in press).

[7] Kon, M, Kuwano, H. *On Sequences of Fuzzy Sets and Fuzzy Set-Valued Mappings, Fixed Point Theory and Applications.* 2013:327, 2013.

[8] Kurano, M, Yasuda, M, Nakagami, J, Yoshida, Y. *Ordering of convex fuzzy sets- a brief survey and new results.* J. Oper. Res. Soc. Jpn. 43, 138-148, 2000.

[9] Maeda, T. *Multiobjective Decision Making Theory and Economic Analysis.* Makino-Syoten, Japan,1996.

[10] Rockafellar, RT, Wets RJB. *Variational Analysis.* Springer, New York, 1998.

[11] Yoshida,Y, Yasuda, M, Nakagami, J, Kurano, M. *A Limit Theorem in Dynamic Fuzzy Systems With a Monotone Property.* Fuzzy Sets Syst. 94, 109-119 ,1998.