BELİRSİZ DOĞRUSAL SİSTEMLERİN KARARLILIK BÖLGELERİNİN BULUNMASI YÖNTEMLERİ

Doktora Tezi

Gökhan ÇELEBİ

Eskişehir, 2016

BELİRSİZ DOĞRUSAL SİSTEMLERİN KARARLILIK BÖLGELERİNİN BULUNMASI YÖNTEMLERİ

Gökhan ÇELEBİ

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Taner BÜYÜKKÖROĞLU

Eskişehir
Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Ağustos, 2016

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Gökhan ÇELEBİ'nin **"Belirsiz Doğrusal Sistemlerin Kararlılık Bölgelerinin Bulunması Yöntemleri"** başlıklı tezi **31/08/2016** tarihinde, aşağıdaki juri tarafından değerlendirilerek "Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği"nin ilgili maddeleri uyarınca, **Matematik** Anabilim dalında Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

		Unvanı-Adı Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	:	Doç. Dr. Taner BÜYÜKKÖROĞLU	....
Üye	:	Prof. Dr. Vakıf CAFER	....
Üye	:	Prof. Dr. Abdurrahman KARAMANCIOĞLU	....
Üye	:	Doç. Dr. Meryem SAKIZCI	....
Üye	:	Doç. Dr. Dursun IRK	....

Enstitü Müdürü

ÖZET

BELİRSİZ DOĞRUSAL SİSTEMLERİN KARARLILIK BÖLGELERİNİN BULUNMASI YÖNTEMLERİ

Gökhan ÇELEBİ

Matematik Anabilim Dalı
Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ağustos, 2016

Danışman: Doç. Dr. Taner BÜYÜKKÖROĞLU

Bu tez çalışmasında, belirsiz doğrusal sistemlerin Hurwitz ve Schur kararlılık problemleri incelenmiştir. Bir ve iki parametreli polinomlar ailesi için sabit inersiyon bölgeleri belirlenmiştir. $n \times n$ boyutlu polinomsal matrisler ailesinin gürbüz Hurwitz ve gürbüz Schur kararlılığı problemleri ele alınmıştır. Bialterne matris çarpımı kullanılarak, Hurwitz kararlılık probleminin çözümü iki tane ve Schur kararlılık probleminin çözümü de üç tane çok değişkenli polinomun pozitifliğine indirgenmiştir. Polinomlar uzayında Hurwitz ve Schur kararlı monik polinomlar kümesine dış yaklaşım ele alınmıştır. Hurwitz ve Schur kararlılık için yansıma katsayıları elde edilmiş ve bu katsayılar kullanılarak sürekli ve kesikli bir lineer sistem verildiğinde bu sistem için kararlaştırıcı parametrenin varlığı araştırılmıştır. Bulunan bu sonuçlarla ilgili yeteri sayıda açıklayıcı örneklere yer verilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Lineer sistemlerin kararlılığı, Belirsiz sistemler, Polinom inersiyonu, Yansıma katsayıları, Dış yaklaşım.

ABSTRACT

THE METHODS OF FINDING STABILITY REGIONS OF UNCERTAIN LINEAR SYSTEMS

Gökhan ÇELEBİ

Department of Mathematics

Anadolu University, Graduate School of Sciences, August, 2016

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Taner BÜYÜKKÖROĞLU

In this thesis, Hurwitz and Schur stability problems of uncertain linear systems are considered. The fixed inertia regions for one and two parameters polynomials are determined. The problem of $n \times n$ polynomial matrix family, in both Hurwitz stability and Schur stability, is considered. It is shown that in the robust Hurwitz and robust Schur stability the problem can be reduced to positivity of the specially constructed multivariable polynomials. Outer approximation to the set of Hurwitz and Schur stability monic polynomials is considered in polynomial space. The reflection coefficients for Hurwitz and Schur stability are obtained and using these coefficients the existence of stabization parameters for continuous or discrete linear systems are investigated. Results are illustrated by an adequate number of examples.

Keywords: Stability of linear systems, Uncertain systems, Inertia of a polynomial, Reflection coefficients, Outer approximation.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında büyük emekleri olan ve her türlü desteklerini benden esirgemeyen değerli danışman hocam Doç. Dr. Taner BÜYÜKKÖROĞLU'na ve değerli hocam Prof. Dr. Vakıf CAFER'e, doktora çalışmam boyunca her zaman yanımda olan sevgili eşime, oğluma ve aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, 2211-Yurt İçi Doktora Burs Programı kapsamında sağladığı destekten ötürü TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığı birimine teşekkür ederim.

Gökhan ÇELEBİ

Ağustos 2016

31/08/2016

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilemeyen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Anadolu Üniversitesi tarafından kullanılan "bilimsel intihal tespit programı"yla tarandığını ve hiçbir şekilde "intihal içermediğini" beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm.

Gökhan ÇELEBİ

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}$	: Gerçel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	: n boyutlu gerçel vektörler kümesi
$\mathbb{R}^{n\times n}$	: $n \times n$ boyutlu gerçel matrisler kümesi
$\mathcal{P}$	: Polinomlar ailesi
$\mathcal{A}$	: Matrisler ailesi
$\mathcal{D}$	: Kararlılık bölgesi
$\operatorname{Re} z$	: z kompleks sayısının gerçel kısmı
$\operatorname{Im} z$	: z kompleks sayısının imajiner kısmı
A^T	: A matrisinin transpozu
$\det A$	: A matrisinin determinantı
$A \succ 0$	: A matrisi pozitif belirlidir
$A \prec 0$	: A matrisi negatif belirlidir

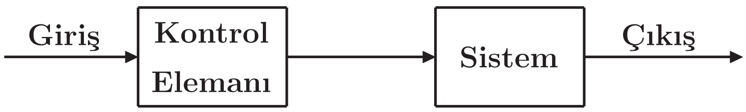
1. GİRİŞ

Fiziksel bir sistemin çıktılarını istenilen bir değere getirmek ya da sistemin önceden belirlenmiş bir hareketi gerçekleştirmesini sağlamak için girdiler üzerinde yapılan işlemlere kontrol denir. Kontrol işlemi teknolojik ekipmanlar yardımıyla gerçekleştiriliyorsa bu işleme otomatik kontrol denilmektedir. Fiziksel bir sistemin girdi ve çıktıları arasındaki ilişki blok diyagram yardımıyla gösterilebilir.

Çalışma türüne göre iki tip kontrol sistemi vardır.

1) Açık çevrim (open-loop) kontrol sistemi

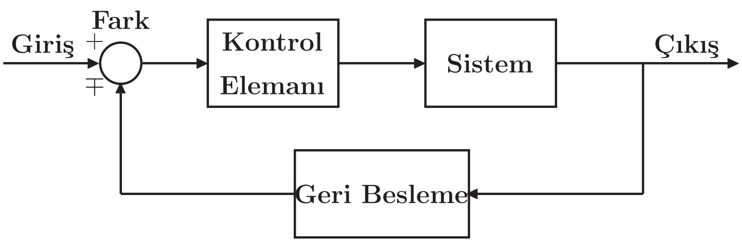
Genellikle kontrol edilmek istenen sistemin yapısının ve sistemin girdilerinin iyi bilindiği uygulamalarda kullanılır. Açık çevrim kontrol sisteminde girdi bağımsız bir değişkendir. Burada çıktının girdi üzerinde hiçbir etkisi yoktur.



Şekil 1.1. Açık Çevrimli Kontrol Sistemi

2.) Kapalı çevrim (closed-loop) kontrol sistemi

Bu tip kontrol sisteminde çıktı girdinin bir fonksiyonu olmakla birlikte, çıktıdan alınan bir geri besleme ile girdi kontrol altında tutulur. Yani çıktı, girdi ile geri beslemenin bir fonksiyonudur. Bu tip sistemlerde çıktı, girdiyi denetlemektedir.



Şekil 1.2. Kapalı Çevrimli Kontrol Sistemi (Geri Beslemeli)

Kontrol sistemlerinin analiz, tasarım ve boyutlandırılmasında tüm sistem dinamiğini tanımlayan girdi ve çıktı bağıntıları ile durum değişkenlerini içeren diferansiyel denklemlerin elde edilmesi gerekir. Sistemin değişkenleri arasındaki bağıntıları veren bu denklemlere otomatik kontrol sistemlerinin matematiksel modeli denir. Elde edilen diferansiyel denklemler lineer ve sabit katsayılı ise çözüm Laplace dönüşümü kullanılarak yapılabilir. Diferansiyel denklem lineer değil ise, bu tür denklemlerin çözümü bilgisayar programları yardımıyla veya lineerleştirme yöntemleri ile ele alınabilir.

$t \in [0, \infty)$, $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ ve $a_{ij} : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ sürekli fonksiyonları için $A(t) = [a_{ij}(t)]$ matris fonksiyonu olmak üzere $\dot{x} = A(t)x$ denklemi ile ifade edilen sistemlere sürekli lineer sistemler denir. Benzer şekilde, $k \in \mathbb{N}$, $x_k \in \mathbb{R}^n$ ve A matrisi $n \times n$ boyutlu bir matrisi olmak üzere $x_{k+1} = Ax_k$ şeklinde verilen sistemlere de kesikli lineer sistemler denir.

Kontrol sistemlerinin sağlaması gereken en önemli özelliklerden birisi kararlılıktır. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ olmak üzere

$$\dot{x} = Ax \tag{1.1}$$

sistemi verilsin. Her $x_0 \in \mathbb{R}^n$ başlangıç noktası için (1.1) denkleminin $x(t)$ çözümü $\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$ koşulunu sağlıyor ise (1.1) lineer sistemine asimptotik kararlıdır denir.

$$x_{k+1} = Ax_k \tag{1.2}$$

kesikli lineer sistemini ele alalım. Her $x_0 \in \mathbb{R}^n$ başlangıç noktasına karşılık $x_k = A^k x_0$ yörüngesi için $\lim_{k \to \infty} x_k = 0$ oluyor ise (1.2) kesikli lineer sistemine asimptotik kararlıdır denir.

Bir lineer sistemin asimptotik kararlılığı ile sistemin matrisi arasında aşağıdaki ilişki söz konusudur.

Teorem 1.1 ([23], s. 134). *Denklem (1.1) ile verilen bir lineer sisteminin asimptotik kararlı olması için gerek ve yeter koşul A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ olmak üzere bu özdeğerlerin $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$ koşulunu sağlamasıdır.*

A matrisinin tüm özdeğerleri $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$ koşulunu sağlıyor ise bu matrise Hurwitz kararlı matris denir.

Kesikli lineer sistemler için de aşağıdaki sonuç verilebilir.

Teorem 1.2 ([4], s. 714). *Denklem (1.2) ile verilen bir kesikli lineer sisteminin asimptotik kararlı olması için gerek ve yeter koşul A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ olmak üzere bu özdeğerlerin $|\lambda_i| < 1$ $(i = 1, 2, ..., n)$ koşulunu sağlamasıdır.*

A matrisinin tüm özdeğerleri $|\lambda_i| < 1$ $(i = 1, 2, ..., n)$ koşulunu sağlıyor ise bu matrise Schur kararlı matris denir.

Matrisler için yukarıda verdiğimiz kararlılık tanımlarını n. dereceden polinomlar için de verebiliriz. $a_i \in \mathbb{R}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ olmak üzere

$$p(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \quad (a_n \neq 0) \tag{1.3}$$

polinomu verilsin. $p(s)$ polinomunun tüm s_i $(i = 1, 2, ..., n)$ kökleri $\mathrm{Re}\, s_i < 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$ koşulunu sağlıyor ise $p(s)$ polinomuna Hurwitz kararlı polinom, $|s_i| < 1$ $(i = 1, 2, ..., n)$ koşulunu sağlıyor ise Schur kararlı polinom denir.

Bir lineer sistemin kararlığı probleminde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisinin özdeğerlerinin sol açık yarı düzlemde olması için gerekli ve yeterli bir koşul verebilmek 19. yüzyılın en temel problemlerinden biri olmuştur. 1856 yılında Fransız matematikçi Hermite, kompleks katsayılı bir polinomun keyfi bir açık yarı düzlemdeki köklerinin sayısı ile bu polinom ve yarı düzleme göre elde edilen bir kuadratik form arasındaki ilişkiyi ortaya koymuştur. 1877 yılında İngiliz fizikçi Routh, Sturm Teoremi ve Cauchy indisini kullanarak bir algoritma oluşturmuş ve bu algoritma yardımıyla kararlılık için bir sonuç vermiştir. Bu algoritmada (1.3) polinomu için

a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	$\cdots$
a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	$\cdots$
b_1	b_2	b_3	$\cdots$
c_1	c_2	c_3	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
d_1	d_2	0	
e_1	e_2	0	
f_1	0		
g_1			

tablosu oluşturulur (Routh tablosu). Burada b_1, b_2, b_3,... katsayıları

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} \\ b_2 &= \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}} \\ b_3 &= \frac{a_{n-1}a_{n-6} - a_n a_{n-7}}{a_{n-1}} \\ & \vdots \end{aligned}$$

hesaplandıktan sonra diğer katsayılar şu şekilde bulunur.

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1} \\ c_2 &= \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1} b_3}{b_1} \\ c_3 &= \frac{b_1 a_{n-7} - a_{n-1} b_4}{b_1} \\ \vdots & \quad \vdots \quad \vdots \\ f_1 &= \frac{e_1 d_2 - d_1 e_2}{e_1} \\ g_1 &= e_2 \end{aligned}$$

Tablonun birinci sütunundaki sayılar oluşturulurken, bu sayılardan herhangi bir tanesi sıfır oluyor ise bu durum özel olarak incelenmelidir([14, 5. Bölüm]).

Teorem 1.3 ([14], s. 213)**.** *(1.3) polinomunun tüm köklerinin sol açık yarı düzlemde olması için gerek ve yeter koşul bu polinoma karşılık gelen Routh tablosunun birinci sütunundaki tüm sayıların aynı işaretli olmasıdır.*

Örnek 1.1. $p(s) = s^5 + 8s^4 + 25s^3 + 40s^2 + 34s + 12$ *polinomunun kararlı olup olmadığını Routh tablosu ile belirleyelim.*

1	25	34
8	40	12
20	$\frac{65}{2}$	0
27	12	0
$\frac{425}{18}$	0	0
12	0	0

olur. Burada ilk sütuna baktığımızda tüm sayılar aynı işaretli olduğundan polinomun tüm kökleri sol açık yarı düzlemdedir. Dolayısıyla polinom Hurwitz kararlıdır.

1895 yılında A. Hurwitz, Hermite'in sonucunu temel alan çalışmasında bu problemin ikinci bir çözümünü Routh'dan bağımsız olarak elde etmiştir. Routh-Hurwitz kriteri olarak adlandırılan bu sonuç şu şekilde ifade edilebilir:

Teorem 1.4 ([14], s. 231)**.** *(1.3) polinomu verilsin.*

$$H(p) = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_0 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

olmak üzere (1.3) polinomunun Hurwitz kararlı olması için gerek ve yeter şart $H(p)$ matrisinin baş minörlerinin pozitif olmasıdır:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= a_{n-1} > 0, \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix} > 0, \\ &\vdots \\ \Delta_n &= \det H(p) > 0. \end{aligned}$$

Burada $H(p)$ matrisine (1.3) polinomunun Hurwitz matrisi denir.

Örnek 1.2. $p(s) = 3s^6 + 5s^5 + 13s^4 + 16s^3 + 10s^2 + 3s + 1$ *polinomunu ele alalım. $p(s)$ polinomunun Hurwitz matrisi*

$$H(p) = \begin{pmatrix} 5 & 16 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 13 & 10 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 16 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 13 & 10 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 16 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 13 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

olur ve bu matrisin baş minörleri: $\Delta_1 = 5 > 0$, $\Delta_2 = 17 > 0$, $\Delta_3 = 67 > 0$, $\Delta_4 = 461 > 0$, $\Delta_5 = 441 > 0$, $\Delta_6 = 441 > 0$ *olduğundan bu polinom Hurwitz kararlıdır.*

Kompleks düzlemde sol açık yarı düzlem ya da açık birim disk dışındaki bölgeler de uygulamada önem taşımaktadır. $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ basit bağlantılı, gerçel eksene göre simetrik, açık bir bölge olsun. A matrisi $n \times n$ boyutlu bir matris olmak üzere bu matrisin tüm özdeğerleri $\mathcal{D}$ kümesinde ise A matrisine $\mathcal{D}$-kararlı matris denir. Benzer şekilde (1.3) polinomunun tüm kökleri $\mathcal{D}$ kümesinde ise $p(s)$ polinomuna $\mathcal{D}$-kararlı polinom denir.

Genellikle kararlılık problemlerinde tek bir A matrisi (veya $p(s)$ polinomu) yerine matrisler (polinomlar) ailesi ile karşılaşılmaktadır [1, 3, 5]. $Q \subset \mathbb{R}^l$ kompakt küme, $a_{ij} : Q \to \mathbb{R}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$

$$A(q) = [a_{ij}(q)] \quad (i, j = 1, 2, ..., n) \tag{1.4}$$

olmak üzere $\mathcal{A} = \{A(q) : \ q \in Q\}$ kümesine matrisler ailesi ve benzer şekilde $a_i : Q \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$

$$p(s, q) = a_n(q)s^n + a_{n-1}(q)s^{n-1} + \cdots + a_1(q)s + a_0(q) \tag{1.5}$$

olmak üzere $\mathcal{P} = \{p(s, q) : \ q \in Q\}$ kümesine polinomlar ailesi denir. Burada $q \in Q$ parametresi belirsizlik parametresi olarak adlandırılır. Uygulamalarda Q kümesi

$$Q = \{(q_1, q_2, \ldots, q_l) \in \mathbb{R}^l : \alpha_i \leq q_i \leq \beta_i, \ i = 1, 2, \ldots, l\} \tag{1.6}$$

şeklinde bir kutu olarak alınmaktadır.

Tanım 1.1.

$$\mathcal{A} = \{A(q) = [a_{ij}(q)] : \quad q \in Q \subset \mathbb{R}^l, \ i, j = 1, 2, ..., n \ \} \tag{1.7}$$

matrisler ailesi verilsin. Her $q \in Q$ *için* $A(q)$ *matrisi* $\mathcal{D}$*-kararlı ise bu* $\mathcal{A}$ *ailesine gürbüz* $\mathcal{D}$*-kararlı matrisler ailesi denir.*

Tanım 1.2.

$$\mathcal{P} = \{p(\cdot, q) : \quad q \in Q \subset \mathbb{R}^l \ \} \tag{1.8}$$

polinomlar ailesi verilsin. Her $q \in Q$ için $p(s,q)$ polinomu $\mathcal{D}$-kararlı ise bu $\mathcal{P}$ ailesine gürbüz $\mathcal{D}$-kararlı polinomlar ailesi denir.

Bir polinomun kökleri, katsayılara sürekli bağımlıdır. Bu özellik gürbüz kararlılıkla ilgili pek çok sonucun kanıtında anahtar rol oynamaktadır.

Teorem 1.5 ([3, 11, 24]). *$q \in Q \subset \mathbb{R}^l$, $a_i : Q \to \mathbb{R} \quad (i = 0, 1, \ldots, n)$ olmak üzere değişmez dereceli $\mathcal{P}$ (1.8) polinomlar ailesi verilsin. $p(s,q)$ polinomunun kökleri $s_i : Q \to \mathbb{C} \quad (i = 1, \ldots, n)$ fonksiyonları ile ifade edilsin. a_i fonksiyonları q'ya göre sürekli ise s_i fonksiyonları da süreklidir.*

Tanım 1.3. *$Q \subset \mathbb{R}^l$ bir kutu, $\alpha_i \in \mathbb{R}^l$ ve $\beta_i \in \mathbb{R}$ olmak üzere $a_i : Q \to \mathbb{R}$, $a_i(q) = \alpha_i^T q + \beta_i$ verilsin. O zaman (1.6) polinomuna afin lineer belirsiz yapıya sahiptir denir.*

Tanım 1.4. *$a : Q \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer $a(q_1, q_2, \ldots, q_l)$ fonksiyonu her $i = 1, 2, \ldots, l$ için q_i dışındaki diğer bileşenler sabit olmak üzere q_i ye göre afin ise a fonksiyonuna multilineer fonksiyon denir.*

Multilineer bir fonksiyonunun bir kutu üzerindeki maksimum ve minimum değerlerini, bu kutunun köşelerinde aldığı değerler yardımıyla hesaplamak mümkündür.

Teorem 1.6 ([3]). *$Q \subset \mathbb{R}^\ell$ bir kutu ve köşe noktalarının kümesi $\{q^i\}$ olsun. $f(\cdot) : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ multilineer bir fonksiyon ise f fonksiyonu minimum ve maksimum değerlerini Q nun köşe noktalarında alır.*

$$\max_{q \in Q} f(q) = \max_i f(q^i),$$
$$\min_{q \in Q} f(q) = \min_i f(q^i)$$

Bu tez çalışması 5 bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde, literatürde D-ayrıştırma (D-decomposition) olarak adlandırılan yöntem ile bir ve iki parametreli afin polinomlar ailesinin inersiyon bölgelerinin elde edilişine ilişkin mevcut sonuçlar verilmiştir [1, 20, 29]. Parametrelerin sürekli bir biçimde değiştirilmesi bu parametreye karşılık gelen polinomun köklerinin de sürekli bir şekilde değişmesine neden olmaktadır. Bir afin polinomlar ailesinde imajiner eksen üzerinde kökü olan polinomları veren, parametre uzayındaki noktalar belirlenmek suretiyle sabit inersiyon bölgeleri elde edilebilmektedir [29]. Hermite matrisi yardımıyla da iki parametreli afin polinomlar ailesinin sabit inersiyon bölgelerinin oluşturulma yöntemi verilmiştir [20].

Üçüncü bölümde, polinomlar ailesinin gürbüz Hurwitz kararlılığı problemi için iki tane çok değişkenli polinom denklemi elde edilmiştir. Oluşturulan algoritma kullanılarak, verilen bir polinomlar ailesinin gürbüz Hurwitz kararlılığı incelenebilmektedir. Yine bu algoritma kullanılarak iki parametreli bir polinomlar ailesinin sabit inersiyon bölgelerinin iç yaklaşımları belirlenebilmektedir.

Dördüncü bölümde, $n \times n$ boyutlu polinomsal matrisler ailelerinin gürbüz Hurwitz ve gürbüz Schur kararlılık problemleri ele alınmıştır. Hurwitz kararlılık problemi özel olarak oluşturulan iki tane çok değişkenli polinomun pozitifliğine indirgenmiştir. Schur kararlılık probleminde ise üç tane çok değişkenli polinomunun pozitifliği gerekmektedir. Çok değişkenli polinomların bir kutu üzerindeki pozitifliğini araştırmada polinomların Bernstein katsayıları ve işarete göre ayrıştırma yöntemleri kullanılmıştır. $\mathcal{D}$ kümesi kompleks düzlemde bir θ açısı ile belirlenen sektör küme olmak üzere matrisler ailesinin gürbüz $\mathcal{D}$-kararlılık problemi incelenmiş ve bazı θ açıları için Hurwitz ve Schur durumuna benzer sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca matris politoplarının gürbüz kararlılığı için yeterli bir koşul verilmiştir. Hurwitz kararlılık probleminde bu koşulun kompanyon matrisler için kullanılamayacağı gösterilmiştir.

Beşinci bölümde, polinomlar uzayında Schur kararlı monik polinomlar kümesine ve Hurwitz kararlı monik polinomlar kümesine dış yaklaşım ele alınmıştır. Schur kararlı polinomlar için literatürde mevcut olan yansıma katsayılarına alternatif yeni yansıma katsayıları elde edilmiştir. Bu yansıma katsayıları kullanılarak kesikli bir lineer sistem verildiğinde bu sistem için kararlılaştırıcı parametrenin varlığı araştırılabilmektedir. Verilen polinomlar ailesine göre oluşturulan LP probleminin çözüm kümesi boş küme ise kararlılaştırıcı parametre yoktur. Çözüm kümesi boş kümeden farklı ise, LP probleminin amaç fonksiyonları uygun seçilerek parametreler için aralıklar elde edilir. Kararlılaştırıcı parametreler, elde edilen bu aralıklarda araştırılabilir. Hurwitz kararlılık için ise sol açık yarı düzlemde yarıçapı yeteri kadar büyük disk alıp bu bölge için Schur kararlılık problemine benzer şekilde yansıma katsayıları elde edilebilmekte ve LP problemi yardımıyla kararlılaştırıcı parametrenin varlığı araştırılmıştır.

2. BİR VE İKİ PARAMETRELİ AFİN POLİNOMLAR AİLESİNİN İNERSİYON BÖLGELERİ

$$p(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \quad (a_n \neq 0) \tag{2.1}$$

polinomu verilsin. Bu polinomun köklerinin imajiner eksenin belirlediği yarı düzlemlere göre dağılımı kararlılık problemi için önemlidir. Bu polinomun kökleri $s_1, s_2, ..., s_n$ olsun. Polinomun $(i = 1, 2, ..., n)$

a) Re $s_i < 0$ koşulunu sağlayan köklerinin sayısı ν ile

b) Re $s_i = 0$ koşulunu sağlayan köklerinin sayısı π ile

c) Re $s_i > 0$ koşulunu sağlayan köklerinin sayısı η ile

gösterilsin. Bu durumda (ν, π, η) üçlüsüne $p(s)$ polinomunun inersiyonu denir. Burada

$$\nu + \pi + \eta = n$$

olur.

Bu bölümde bir ve iki parametreli afin polinomlar ailesinin inersiyon bölgelerini belirlemede [29] ve [20]'deki yöntemler verilmiştir.

2.1. Bir Parametreli Afin Polinomlar Ailesi

$$p(s, q) = p_0(s) + q\, p_1(s), \quad q \in \mathbb{R} \tag{2.2}$$

p_0 polinomunun derecesi p_1 polinomunun derecesinden büyük olmak üzere bir parametreli polinomlar ailesi verilsin. $q \in \mathbb{R}$ parametresine göre $p(s, q)$ polinomlarının köklerinin kompleks düzlemde dağılımı incelenecektir. İnersiyonun değişmez olduğu q'nun alt aralıklarını belirleyebilmek için $p(j\,\omega_*, q_*) = 0$ denklemini sağlayan ω_* ve q_* parametreleri araştırılmalıdır. Bunun için

$$p(j\,\omega, q) = p_0(j\,\omega) + q p_1(j\,\omega)$$

olmak üzere

$$f_R(\omega) := \text{Re } p_0(j\,\omega)$$
$$f_I(\omega) := \text{Im } p_0(j\,\omega)$$
$$g_R(\omega) := \text{Re } p_1(j\,\omega)$$
$$g_I(\omega) := \text{Im } p_1(j\,\omega)$$

denirse bu durumda

$$p(j\,\omega, q) = [f_R(\omega) + q g_R(\omega)] + j\ [f_I(\omega) + q g_I(\omega)]$$

olur. $q \in \mathbb{Q}$ için

$$x = f_R(\omega) + q g_R(\omega)$$

$$y = f_I(\omega) + q g_I(\omega)$$

kompleks düzlemde parametrik bir doğru denklemidir. Bu doğru üzerindeki noktaların kümesi

$$p(j\,\omega, \mathbb{R}) = \{z \in \mathbb{C} :\ z = [f_R(\omega) + q g_R(\omega)] + j\ [f_I(\omega) + q g_I(\omega)], q \in \mathbb{R}\}$$

ile gösterilsin. Buna göre öyle bir $\omega_* \geq 0$ ve $q_* \in \mathbb{R}$ için

$$p(j\,\omega_*, q_*) = 0 \Leftrightarrow\ 0 \in p(j\,\omega_*, \mathbb{R})$$

olur. $q = 0$ ve $q = 1$ için

$$p(j\,\omega, 0) = f_R(\omega) + j f_I(\omega)$$

$$p(j\,\omega, 1) = f_R(\omega) + g_R(\omega) + j[f_I(\omega) + g_I(\omega)]$$

noktaları elde edilir.

$$0 \in p(j\,\omega, \mathbb{R}) \Leftrightarrow \frac{f_R(\omega)}{f_R(\omega) + g_R(\omega)} = \frac{f_I(\omega)}{f_I(\omega) + g_I(\omega)}$$

veya

$$0 \in p(j\,\omega, \mathbb{R}) \Leftrightarrow f_R(\omega) g_I(\omega) - f_I(\omega) g_R(\omega) = 0$$

olur.

$$f_R(\omega)g_I(\omega) - f_I(\omega)g_R(\omega) = 0$$

polinom denklemin negatif olmayan gerçel bir ω_* çözümü var ise, bu ω_* çözümü için $p(j\,\omega_*, q) = 0$ denkleminden q parametresini belirlemek için

$$f_R(\omega_*) + qg_R(\omega_*) = 0 \Rightarrow q = -\frac{f_R(\omega_*)}{g_R(\omega_*)},$$

$$f_I(\omega_*) + qg_I(\omega_*) = 0 \Rightarrow q = -\frac{f_I(\omega_*)}{g_I(\omega_*)}$$

eşitlikleri bulunur [29].

Örnek 2.1. $p(s,q) = 10s^3 + 2s^2 + 8s + 1.57 + q(s^2 + 2s + 1), \quad q \in \mathbb{R}$ *polinomlar ailesi verilsin.* $\omega > 0$ *olmak üzere*

$$\begin{aligned} f_R(\omega) &= -2\omega^2 + 1.57 \\ f_I(\omega) &= -10\omega^3 + 8\omega \\ g_R(\omega) &= -\omega^2 + 1 \\ g_I(\omega) &= 2\omega \end{aligned}$$

olur. Bu ifadeler $f_R(\omega)g_I(\omega) - f_I(\omega)g_R(\omega) = 0$ *eşitliğinde yerine yazılırsa*

$$-10\omega^5 + 14\omega^3 - 4.86\omega = 0$$

olur ve bu denklemin negatif olmayan kökleri

$$0,\ 0.7979689510,\ 0.8736392580$$

olarak bulunur.

$$\begin{aligned} \omega = 0 &\quad \textit{için} \quad q = -1.57, \\ \omega = 0.7979689510 &\quad \textit{için} \quad q = -0.8162277649, \\ \omega = 0.8736392580 &\quad \textit{için} \quad q = -0.1837722356. \end{aligned}$$

noktaları bulunur.

$p(s,q)$ polinomunun

$$\begin{array}{cll} (-\infty,-1.57) & \textit{aralığında inersiyonu} & (2,0,1), \\ (-1.57,-0.8162277649) & \textit{aralığında inersiyonu} & (3,0,0), \\ (-0.8162277649,-0.1837722356) & \textit{aralığında inersiyonu} & (1,0,2), \\ (-0.1837722356,\infty) & \textit{aralığında inersiyonu} & (3,0,0) \end{array}$$

olur.

2.2. İki Parametreli Afin Polinomlar Ailesi

$$\begin{aligned} p_0(s) &= a_0+a_1s+a_2s^2+\cdots+s^n \\ p_1(s) &= b_0+b_1s+b_2s^2+\cdots+b_ks^k \\ p_2(s) &= c_0+c_1s+c_2s^2+\cdots+c_ms^m \end{aligned}$$

ve $n>k$, $n>m$ olmak üzere

$$p(s,q_1,q_2)=p_0(s)+q_1p_1(s)+q_2p_2(s) \quad q_1,q_2\in\mathbb{R}$$

iki parametreli afin polinomlar ailesi verilsin. Bu polinomlar ailesinin sabit inersiyon bölgelerini belirlemek için

$$p(j\omega,q_1,q_2)=p_0(j\omega)+q_1p_1(j\omega)+q_2p_2(j\omega)=0$$

denklemini sağlayan $\omega\geq 0$, q_1 ve q_2 parametreleri araştırılmalıdır [29]. Buna göre

$$\begin{aligned} R_p(\omega,q_1,q_2) &= (a_0-a_2\omega^2+a_4\omega^4+\cdots)+q_1(b_0-b_2\omega^2+b_4\omega^4+\cdots) \\ &\quad +q_2(c_0-c_2\omega^2+c_4\omega^4+\cdots) \\ &= R_0(\omega)+q_1R_1(\omega)+q_2R_2(\omega)=0 \\ I_p(\omega,q_1,q_2) &= \omega[(a_1-a_3\omega^2+a_5\omega^4+\cdots)+q_1(b_1-b_3\omega^2+b_5\omega^4+\cdots) \\ &\quad +q_2(c_1-c_3\omega^2+c_5\omega^4+\cdots)] \\ &= \omega[I_0(\omega)+q_1I_1(\omega)+q_2I_2(\omega)]=0 \end{aligned}$$

olur.

$\omega = 0$ için

$$\begin{aligned} R_0(\omega) + q_1 R_1(\omega) + q_2 R_2(\omega) &= 0 \\ \omega[I_0(\omega) + q_1 I_1(\omega) + q_2 I_2(\omega)] &= 0 \end{aligned}$$

denklemlerinden $a_0 + q_1 b_0 + q_2 c_0 = 0$ doğru denklemi elde edilir.

$\omega > 0$ için

$$q_1 R_1(\omega) + q_2 R_2(\omega) = -R_0(\omega)$$

$$q_1 I_1(\omega) + q_2 I_2(\omega) = -I_0(\omega)$$

denklem sistemin çözümü için iki durum söz konusudur.

i) $R_1(\omega)I_2(\omega) - I_1(\omega)R_2(\omega) \neq 0$ ise, tek çözüm vardır:

$$q_1 = q_1(\omega) = -\frac{R_0(\omega)I_2(\omega) - I_0(\omega)R_2(\omega)}{R_1(\omega)I_2(\omega) - I_1(\omega)R_2(\omega)}$$

$$q_2 = q_2(\omega) = -\frac{R_0(\omega)I_1(\omega) - I_0(\omega)R_1(\omega)}{R_1(\omega)I_2(\omega) - I_1(\omega)R_2(\omega)}$$

ii) $R_1(\omega)I_2(\omega) - I_1(\omega)R_2(\omega) = 0$ ise, ya bir parametreye bağlı sonsuz çözüm vardır ya da çözüm yoktur.

Örnek 2.2.

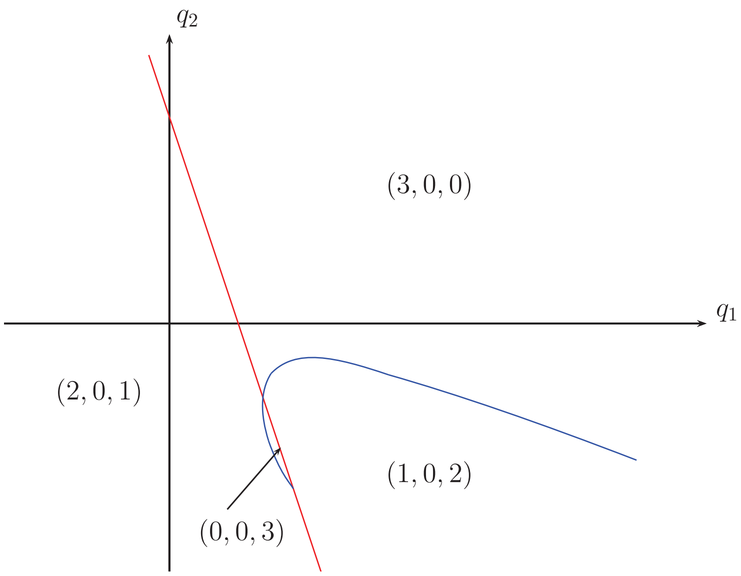
$$\begin{aligned} p(s, q_1, q_2) &= p_0(s) + q_1 p_1(s) + q_2 p_2(s) \\ &= s^3 + (q_1 + 2q_2 + 1)s^2 + (q_1 + q_2 + 1)s + 6q_1 + 2q_2 - 10 \end{aligned}$$

iki parametreli afin polinomlar ailesini ele alalım.

$\omega = 0$ için $q_1 q_2$ düzlemindeki $-10 + 6q_1 + 2q_2 = 0$ eşitliğini sağlayan q_1, q_2 parametrelerine karşılık gelen polinomların $s = 0$ kökü vardır. $\omega > 0$ olmak üzere $s = j\omega$ köküne sahip polinomları veren q_1, q_2 parametreleri

$$\begin{aligned} q_1 &= q_1(\omega) = \frac{12 + 2\omega^4 - 3\omega^2}{4 + \omega^2} \\ q_2 &= q_2(\omega) = -\frac{16 + \omega^4 - 6\omega^2}{4 + \omega^2} \end{aligned}$$

biçimindedir. Şekil 2.1'de bu polinomlar ailesinin inersiyon bölgeleri verilmiştir.



Şekil 2.1. Örnek 2.2 için inersiyon bölgeleri

2.3. Hermite Matrisi Yardımıyla İki Parametreli Afin Polinomlar Ailesinin Sabit İnerşiya Bölgeleri

$p_0(s)$ polinomunun derecesi $p_1(s)$ ve $p_2(s)$ polinomlarının derecelerinden büyük olmak üzere

$$p(s, q_1, q_2) = p_0(s) + q_1 p_1(s) + q_2 p_2(s) \quad q_1, q_2 \in \mathbb{R}$$

iki parametreli afin polinomlar ailesi ve

$$D = \{s \in \mathbb{C} : a + b(s + \overline{s}) + cs\overline{s},\ \ a, b \in \mathbb{R}\}$$

kararlılık bölgesi verilsin. [20]'de verilen yöntem ile iki parametreli afin polinomlar ailesinin inersiyon bölgesi Hermite teoremi kullanılarak aşağıdaki gibi belirlenmektedir.

D bölgesi $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$ sayıları için Hurwitz kararlılık bölgesine ve $a = -1$, $b = 0$, $c = 1$ için Schur kararlılık bölgesine karşılık gelmektedir.

$p(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_n s^n$ polinomunun katsayı vektörü $x = (a_0, a_1, \ldots, a_n)^T$ ile gösterilsin.

$H_{ij} = H_{ij}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ olmak üzere

$$H(p) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} x_i x_j H_{ij}$$

şeklinde ifade edilen matrise $p(s)$ polinomunun Hermite matrisi denir. Burada H_{ij} matrisi $\mathcal{D}$ kümesine bağlı sabit bir matristir [19].

$\widetilde{p} = (\frac{b+cs}{\sqrt{b^2-ac}})p(-\frac{a+bs}{b+cs})$ polinomu tanımlansın. Bu polinomun katsayı vektörü $\widetilde{x}$ olsun. $R_l = [I_n \ 0_{n\times 1}]$ ve $R_r = [0_{n\times 1} \ I_n]$ matrisleri olmak üzere $p(s)$ polinomunun Hermite matrisi

$$xx^T - \widetilde{x}\widetilde{x}^T = aR_l^T H(p) R_l + b(R_l^T H(p) R_r + R_r^T H(p) R_l) + cR_r^T H(p) R_r$$

denklemini sağlar. Bu denklem yardımıyla $\mathcal{D}$ kümesi ve $p(s)$ polinomu verildiğinde karşılık gelen H_{ij} $(i, j = 0, 1, ..., n)$ matrisleri elde edilebilir.

Teorem 2.1 ([19]). *$p(s)$ polinomunun $\mathcal{D}$-kararlı olması için gerek ve yeter koşul $H(p) \succ 0$ olmasıdır.*

Tanım 2.1. *$p_1(s)$ ve $p_2(s)$ polinomları n. dereceden iki polinom olsun. Bu iki polinomun Bezout matrisi $B_s(p_1, p_2) = [b_{ij}]$ $(i, j = 1, 2, ..., n)$ şu şekilde tanımlanır:*

$$\frac{p_1(u)p_2(v) - p_1(v)p_2(u)}{u - v} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} u^{i-1} v^{j-1}.$$

$r_s(p_1, p_2) = \det(B_s(p_1, p_2))$ polinomuna $p_1(s)$ ve $p_2(s)$ polinomlarının resultantı denir. $p_1(s)$ ve $p_2(s)$ polinomlarının ortak kökünün olması için gerek ve yeter koşul $r_s(p_1, p_2) = \det(B_s(p_1, p_2)) = 0$ olmasıdır [4].

[20]'de iki parametreli afin polinomlar ailesini Hurwitz kararlı yapan parametrelerin kümesi resultant fonksiyonu kullanılarak elde edilmiştir. Hurwitz kararlılık bölgesi için, Hermite matrisi ile Bezout matrisi arasındaki ilişki şu şekilde verilebilir: $p(j\omega)$'nin gerçel ve imajiner kısımları

$$p_R(\omega^2) = Rep(j\omega)$$
$$\omega p_I(\omega^2) = Imp(j\omega)$$

olmak üzere $p(s)$ polinomun Hermite matrisi ile $p_R(\omega^2)$ ve $\omega p_I(\omega^2)$ polinomlarının Bezout matrisleri birbirine eşittir [20]. Yani,

$$H(p) = B_\omega(p_R(\omega^2), \omega p_I(\omega^2))$$

olur.

$\omega \geq 0$ için $p(j\omega, q_1, q_2) = 0 \Leftrightarrow$

$$p_R(\omega^2, q_1, q_2) = p_{0R}(\omega^2) + q_1 p_{1R}(\omega^2) + q_2 p_{2R}(\omega^2) = 0$$

$$\omega p_I(\omega^2, q_1, q_2) = \omega p_{0I}(\omega^2) + q_1 \omega p_{1I}(\omega^2) + q_2 \omega p_{2I}(\omega^2) = 0$$

olur. Bu iki denklemin ortak çözümü problemi, $p_R(\omega^2, q_1, q_2)$ ve $\omega p_I(\omega^2, q_1, q_2)$ polinomlarının resultantı yardımıyla

$$r_\omega(p_R(\omega^2, q_1, q_2), \omega p_I(\omega^2, q_1, q_2)) = \det(H(q_1, q_2)) = 0$$

denkleminin çözümü ele alınabilir. Diğer taraftan

$$r_\omega(p_R(\omega^2, q_1, q_2), \omega p_I(\omega^2, q_1, q_2)) = r_\omega(p_R(\omega, q_1, q_2), \omega)\left[r_\omega(p_R(\omega, q_1, q_2), p_I(\omega, q_1, q_2))\right]^2$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\begin{aligned} r_\omega(p_R(\omega, q_1, q_2), \omega) &= 0 \\ r_\omega(p_R(\omega, q_1, q_2), p_I(\omega, q_1, q_2)) &= 0 \end{aligned}$$

denklemleri kullanılarak iki parametreli afin polinomlar ailesinin sabit inersiyon bölgeleri belirlenebilir [20].

Örnek 2.3.

$$p(s, q_1, q_2) = s^4 + 2s^3 + 10s^2 + 16 + q_1(2s^3 + 2s - 0,3) + q_2(2s + 1)$$

polinomlar ailesi verilsin.

$$p(j\omega, q_1, q_2) = p_R(\omega^2, q_1, q_2) + \omega p_I(\omega^2, q_1, q_2)$$

ve buradan

$$\begin{aligned} p_R(\omega^2, q_1, q_2) &= \omega^4 - 10\omega^2 + 16 + q_2 - 0.3q_1 \\ \omega p_I(\omega^2, q_1, q_2) &= \omega[(-2q_1 - 2)\omega^2 + (2q_1 + 2q_2 + 10)] \end{aligned}$$

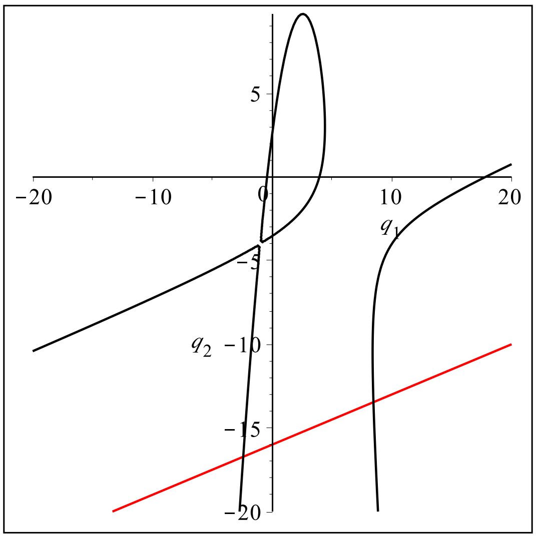
olur.

$$\begin{aligned} r_\omega(p_R(\omega^2), \omega p_I(\omega^2)) &= (16 + q_2 - 0.3q_1) \\ &\quad (4q_2^2 - 24q_1q_2 + 25.6q_1^2 - 73.2q_1 - 36 - 1.2q_1^3 + \\ &\quad 4q_2q_1^2 + 4q_2)^2 = 0 \end{aligned}$$

denkleminden

$$16 + q_2 - 0.3q_1 = 0$$
$$4q_2^2 - 24q_1q_2 + 25.6q_1^2 - 73.2q_1 - 36 - 1.2q_1^3 + 4q_2q_1^2 + 4q_2 = 0$$

denklemleri elde edilir.



Şekil 2.2. Örnek 2.3 için inersiyon bölgeleri

3. POLİNOM AİLELERİ İÇİN SABİT İNERŞİYA BÖLGELERİNİN BELİRLENMESİ

$Q \subset \mathbb{R}^l$ kutusu ve $a_i : Q \to \mathbb{R}$ polinom fonksiyonları olmak üzere

$$\mathcal{P} = \{p(s,q) = a_0(q) + a_1(q)s + ... + a_n(q)s^n : q \in Q\} \tag{3.1}$$

değişmez dereceli polinomlar ailesinin gürbüz Schur kararlılığı için aşağıdaki teorem verilmiştir [2].

Teorem 3.1. *([2]) $\mathcal{P}$ (3.1) ailesindeki polinomların $s = \mp 1$ kökü olmasın ve bu ailede en az bir Schur kararlı polinom bulunsun. O zaman $\mathcal{P}$ ailesinin gürbüz Schur kararlı olması için gerek ve yeterli koşul bu polinom ailesine karşılık gelen*

$$\begin{aligned} f_1(t,q) &= 0, \\ f_2(t,q) &= 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

sisteminin $[-2,2] \times Q \subset \mathbb{R}^{l+1}$ kutusu üzerinde kökünün olmamasıdır.

Teorem 3.1'de verilen f_1 ve f_2 fonksiyonları, $p(s,q)$ polinomu için ifade edilen aşağıdaki denklem yardımıyla belirlenir:

$$\begin{aligned} a_0(q) + a_1(q)s + ... + a_n(q)s^n &= (s - e^{j\theta})(s - e^{-j\theta}) \\ &\quad .(b_0(q) + b_1(q)s + ... + b_{n-2}(q)s^{n-2}) \\ &= s^2 - 2\cos\theta s + 1 \\ &\quad .(b_0(q) + b_1(q)s + ... + b_{n-2}(q)s^{n-2}). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Bu denklemde $t = 2\cos\theta$ alınır ve

$$\begin{aligned} b_0(q) &= a_0(q) \\ b_1(q) - tb_0(q) &= a_1(q) \\ b_2(q) - tb_1(q) + b_0(q) &= a_2(q) \\ b_3(q) - tb_2(q) + b_1(q) &= a_3(q) \\ \vdots \quad &\vdots \quad \vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_k(q) - tb_{k-1}(q) + b_{k-2}(q) &= a_k(q) \\ \vdots \quad &\vdots \quad \vdots \\ b_{n-2}(q) - tb_{n-3}(q) + b_{n-4}(q) &= a_{n-2}(q) \\ b_{n-3}(q) - tb_{n-2}(q) &= a_{n-1}(q) \\ b_{n-2}(q) &= a_n(q) \end{aligned}$$

eşitliklerinden $b_i(q)$'ler $(i = 1, 2, ..., n-2)$ yok edilirse

$$\begin{aligned} f_1(t, q) &= 0, \\ f_2(t, q) &= 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

sistemi ortaya çıkar.

Örneğin $n = 4$ için (3.4) sistemi

$$\begin{aligned} a_0(q) - a_2(q) + a_4(q) - ta_1(q) - t^2 a_0(q) &= 0, \\ a_1(q) - a_3(q) + ta_0(q) - ta_4(q) &= 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

şeklindedir.

$\mathcal{P}$ (3.1) ailesinin Hurwitz kararlılığı için de Schur kararlılığa benzer bir sonuç ifade edilebilir.

$\mathcal{P}$ (3.1) ailesindeki polinomların $s = 0$ kökü olmasın ve $\mathcal{P}$ ailesinde en az bir Hurwitz kararlı eleman bulunsun. $\mathcal{P}$ (3.1) ailesinin Hurwitz kararlı olmadığını varsayalım. O zaman köklerin sürekli değişimi özelliğine göre öyle bir ω sayısı vardır ki $s = j\omega$ kompleks sayısı $\mathcal{P}$ ailesindeki bir polinomun kökü olur. O halde $s = -j\omega$ da bu polinomun bir kökü olacaktır. Buna göre, öyle $b_0(q), b_1(q), ..., b_{n-2}(q)$ katsayıları vardır ki

$$\begin{aligned} a_0(q) + a_1(q)s + ... + a_n(q)s^n &= (s - j\omega)(s + j\omega) \\ &\quad .(b_0(q) + b_1(q)s + ... + b_{n-2}(q)s^{n-2}) \\ &= s^2 + \omega^2 \\ &\quad .(b_0(q) + b_1(q)s + ... + b_{n-2}(q)s^{n-2}) \end{aligned} \tag{3.6}$$

olmalıdır. Burada katsayılar karşılıklı olarak ele alınırsa

$$\begin{aligned}
\omega^2 b_0(q) &= a_0(q) \\
\omega^2 b_1(q) &= a_1(q) \\
b_0(q) + \omega^2 b_2(q) &= a_2(q) \\
b_1(q) + \omega^2 b_3(q) &= a_3(q) \\
\vdots \quad &\vdots \quad \vdots \\
b_{k-2}(q) + \omega^2 b_k(q) &= a_k(q) \\
\vdots \quad &\vdots \quad \vdots \\
b_{n-4}(q) + \omega^2 b_{n-2}(q) &= a_{n-2}(q) \\
b_{n-3}(q) &= a_{n-1}(q) \\
b_{n-2}(q) &= a_n(q)
\end{aligned} \tag{3.7}$$

elde edilir ve bu eşitliklerinden $b_i(q)$'ler $(i = 0, 1, ..., n-2)$ yok edilirse

$$\begin{aligned}
g_1(\omega^2, q) &= 0, \\
g_2(\omega^2, q) &= 0
\end{aligned} \tag{3.8}$$

sistemine indirgenir.

Örneğin $n = 5$ için (3.8) sistemi

$$\begin{aligned}
a_0(q) - \omega^2 a_2(q) + \omega^4 a_4(q) &= 0, \\
a_1(q) - \omega^2 a_3(q) + \omega^4 a_5(q) &= 0
\end{aligned} \tag{3.9}$$

şeklindedir.

$\omega^2 = t$ diyelim. (3.8) sistemi, n tek ise

$$\begin{aligned}
g_1(q) := a_0(q) - ta_2(q) + t^2 a_4(q) + ... + t^{\frac{n-1}{2}} a_{n-1}(q) &= 0 \\
g_2(q) := a_1(q) - ta_3(q) + t^2 a_5(q) + ... + t^{\frac{n-1}{2}} a_n(q) &= 0
\end{aligned} \tag{3.10}$$

n çift ise

$$\begin{aligned}
g_1(q) := a_0(q) - ta_2(q) + t^2 a_4(q) + ... + t^{\frac{n}{2}} a_n(q) &= 0 \\
g_2(q) := a_1(q) - ta_3(q) + t^2 a_5(q) + ... + t^{\frac{n-2}{2}} a_{n-1}(q) &= 0
\end{aligned} \tag{3.11}$$

şeklindedir.

$p(j\omega, q) = 0$ denkleminde yer alan ω sayısı üstten

$$\omega_c = 1 + \frac{\max\{\max_q a_0(q), \max_q a_1(q), ..., \max_q a_{n-1}(q)\}}{\min_q a_n(q)} \tag{3.12}$$

sayısı ile sınırlıdır [3].

Teorem 3.2. *$p(j\omega_*, q_*) = 0$ olacak şekilde $\omega_* \in [0, \omega_c]$ ve $q_* \in Q$ var olması için gerek ve yeter koşul (3.8) sisteminin çözümünün olmasıdır.*

$\mathcal{P}$ (3.1) ailesi verilsin. Bu ailedeki polinomların katsayı $a_i(q)$ fonksiyonları multilineer fonksiyonlar olsunlar. O zaman (3.8) sistemindeki g_1 ve g_2 fonksiyonları da q ya göre multilineer fonksiyonlar ve t ye göre de polinomik fonksiyonlardır. (g_1, g_2) ikilisinde t nin en büyük kuvvetleri

$$\begin{array}{ll} n = 3 \text{ için} & (t, t) \\ n = 4 \text{ için} & (t^2, t) \\ n = 5 \text{ için} & (t^2, t^2) \\ n = 6 \text{ için} & (t^3, t^2) \\ n = 7 \text{ için} & (t^3, t^3) \end{array}$$

şeklindedir. Bu (3.8) sistem yeni değişkenler tanımlanarak multilineer hale getirilebilir. Yani, (3.8) sistemi t^k gibi bir kuvveti içeriyorsa, t^k yerine yeni $t_1, t_2, \ldots, t_k$ parametreleri alınarak $t_1 t_2 ... t_k$ çarpımı yazılır ve (3.8) sistemine $t_2 - t_1 = 0,\ t_3 - t_1 = 0, ..., t_k - t_1 = 0$ denklemleri eklenir. Böylece genişletilmiş bu sistem kutu üzerinde bir multilineer sistem halini almış olur. $n = 5$ için (3.8) sistemi

$$\begin{aligned} a_0(q) - t a_2(q) + t^2 a_4(q) &= 0, \\ a_1(q) - t a_3(q) + t^2 a_5(q) &= 0 \end{aligned} \tag{3.13}$$

şeklindedir. Bu sistemin genişletilmiş şekli ise $(t_1, t_2, q) \in [0, \omega_c^2] \times [0, \omega_c^2] \times Q$ olmak üzere

$$\begin{aligned} a_0(q) - t_1 a_2(q) + t_1 t_2 a_4(q) &= 0, \\ a_1(q) - t_1 a_3(q) + t_1 t_2 a_5(q) &= 0, \\ t_2 - t_1 &= 0 \end{aligned} \tag{3.14}$$

biçiminde olur.

Burada ifade edilen ω_c sayısını minimize etmek mümkündür. Bunun için şu algoritma kullanılabilir.

Algoritma 3.1.

i) (3.8) sistemi multilineerleştirilir.

ii) (3.12) ifadesinden ω_c hesaplanır.

iii) $[\frac{\omega_c^2}{2}, \omega_c^2], [\frac{\omega_c^2}{4}, \frac{\omega_c^2}{2}], [\frac{\omega_c^2}{8}, \frac{\omega_c^2}{4}], ...$ aralıkları oluşturulur.

iv) İlk olarak $[\frac{\omega_c^2}{2}, \omega_c^2]$ aralığı ele alınır ve $[\frac{\omega_c^2}{2}, \omega_c^2] \times Q$ genişletilmiş kutusu üzerinde elde edilen multilineer sistemin kökünün olup olmadığı incelenir. Sırasıyla, sistemde yer alan multilineer fonksiyonların minimum ve maksimum değerleri Teorem 1.6 yardımıyla hesaplanır. En az bir tanesinin minimumu pozitif ya da maksimumu negatif ise, sistemin bu kutu üzerinde çözümü yoktur. Bu durumda $[\frac{\omega_c^2}{2}, \omega_c^2]$ aralığı yerine $[\frac{\omega_c^2}{4}, \frac{\omega_c^2}{2}]$ aralığı ele alınır ve bu şekilde devam edilir.

v) Herhangi bir adımda sistemin kökünün olmadığı sonucuna varılamıyor ise bu durumda algoritma sonlandırılır. ω_c olarak bu son adımda ulaşılan aralığın sağ ucu yeni ω_c olarak alınabilir.

$\mathcal{P}$ (3.1) ailesinin gürbüz Hurwitz kararlığı için aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.3. *$\mathcal{P}$ (3.1) ailesinde $s = 0$ köke sahip bir polinom bulunmasın. Polinomlar ailesinde en az bir Hurwitz kararlı bir polinomun varlığını kabul edelim. O zaman $\mathcal{P}$ ailesinin gürbüz Hurwitz kararlı olması için gerek ve yeter koşul bu polinomlar ailesine karşılık gelen*

$$\begin{aligned} g_1(\omega^2, q) &= 0, \\ g_2(\omega^2, q) &= 0. \end{aligned} \tag{3.15}$$

sisteminin her $[0, \omega_c^2] \times Q$ kümesi üzerinde kökünün olmamasıdır.

$\mathcal{P}$ (3.1) polinomlar ailesi iki parametreli ise, bu polinomlar ailesi için sabit inersiyon bölgeleri aşağıdaki teorem yardımıyla belirlenebilir.

Teorem 3.4. *$Q = [q_1^-, q_1^+] \times [q_2^-, q_2^+]$ olmak üzere $q \in Q$ için $\mathcal{P}$ (3.1) iki parametreli multilineer polinomlar ailesi verilsin. $(t, q_1, q_2) \in [0, \omega_c^2] \times Q$ kutusunda*

$$\begin{aligned} g_1(t, q_1, q_2) &= 0 \\ g_2(t, q_1, q_2) &= 0 \end{aligned}$$

sisteminin ortak kökü olmasın. Eğer Q kutusu ile $\{q \in \mathbb{R}^2 : p(0, q_1, q_2) = 0\}$ doğrusu kesişmiyor ise Q kutusu üzerinde polinomlar ailesinin inersiyonu sabittir.

Kanıt. $\mathcal{P}$ (3.1) polinomlar ailesinin inersiyonunun sabit olmadığını kabul edelim. O zaman öyle bir $(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2) \in Q$ ve $(\hat{q}_1, \hat{q}_2) \in Q$ noktaları vardır ki $p(s, \tilde{q}_1, \tilde{q}_2)$ ve $p(s, \hat{q}_1, \hat{q}_2)$ polinomlarının inersiyonları farklıdır.

$q(\lambda) = (1 - \lambda)\tilde{q} + \lambda\hat{q}, \ \lambda \in [0, 1]$ ve

$$\lambda_* = \inf\{\lambda : \ \text{inertia}\,[p(s, q(\lambda))] = \text{inertia}\,[p(s, \tilde{q})]\}$$

olsun. $\text{inertia}\,[p(s, q(\lambda_*))] = (\nu, \pi, \eta)$ üçlüsünde $\pi \neq 0$ olur. O zaman ya $s = 0$ ya da öyle bir $\omega_* \in [0, \omega_c]$ için $s = j\omega_*$ sayıları $p(s, q(\lambda_*))$ polinomunun kökü olur.

$s = 0$'ın kök olması Q kutusu ile $\{q \in \mathbb{R}^2 : p(0, q_1, q_2) = 0\}$ doğrusunun kesişmesi demektir. O halde $s = 0$ kök olamaz. $s = j\omega_*$ kök olması ise $g_1(t, q(\lambda_*)) = 0$ ve $g_2(t, q(\lambda_*)) = 0$ olmasını gerektireceğinden $s = j\omega_*$ kompleks sayısı kök olamaz.

Buna göre polinomlar ailesi Q kutusu üzerinde sabit inersiyona sahiptir. □

Uygun bir kesme frekansı ω_c bulunduktan sonra aşağıdaki algoritmayla bir multilineer ailenin Hurwitz kararlılığı kontrol edilebilir.

Algoritma 3.2. *$Q \subset \mathbb{R}^\ell$ olmak üzere $\mathcal{P}$ (3.1) multilineer ailesi verilsin.*

i) Teorem 1.6 kullanılarak $a_0(q)$ katsayısının minimum ve maksimum değerleri hesaplanır. Eğer bu fonksiyonunun değişim aralığı sıfırı içeriyor ise o zaman polinomlar ailesi kararsızdır.

ii) $g_1(t, q) = 0, \quad g_2(t, q) = 0$ denklemleri yazılır.

iii) $t = t_1$ seçerek ve yeni $t_2, t_3, ..., t_k$ değişkenler tanımlayarak sistem multilineerleştirilir ve yeni denklemler $(t_1, ..., t_k, q) \in \tilde{Q} = [0, \omega_c^2] \times ... \times [0, \omega_c^2] \times Q \subset \mathbb{R}^{k+\ell}$

olmak üzere

$$\begin{aligned} f_1(t_1, ..., t_k, q) = 0,\ \ f_2(t_1, ..., t_k, q) = 0 \\ t_2 - t_1 = 0, t_3 - t_1 = 0, ..., t_k - t_1 = 0 \end{aligned} \tag{3.16}$$

şeklinde yazılır.

iv) $\tilde{Q}$ *kutusunun tüm köşe noktalarına karşılık gelen ailedeki polinomların Hurwitz kararlılığı incelenir. Eğer bunlardan herhangi bir tanesi Hurwitz kararlı değilse o zaman durulur. Buna göre* $\mathcal{P}$ *ailesi kararlı değildir. Aksi takdirde diğer adım uygulanır.*

v) Teorem 1.6 kullanılarak, (3.16) fonksiyonlarının değişim aralıkları bulunur. Eğer en az bir aralık sıfırı içermiyorsa o zaman durulur. Buna göre $\mathcal{P}$ *ailesi kararlıdır. Aksi takdirde diğer adım uygulanır.*

vi) $\tilde{Q}$ *kutusu seçilen koordinat boyunca ikiye bölünür. Her bir alt kutu için* $ii) - v)$ *adımları tekrar edilir. Bir alt kutu sıfırı içermiyorsa o alt kutu atılır.*

Algoritma ya tüm alt kutular atıldığında ya da verilen bir $\varepsilon > 0$ sayısı için kutuların boyu ε'dan küçük kaldığında bitirilir. İlk durumda aile kararlıdır. İkinci durumda ise kalan kutunun orta noktası alınarak kararlı olup olmadığı araştırılır.

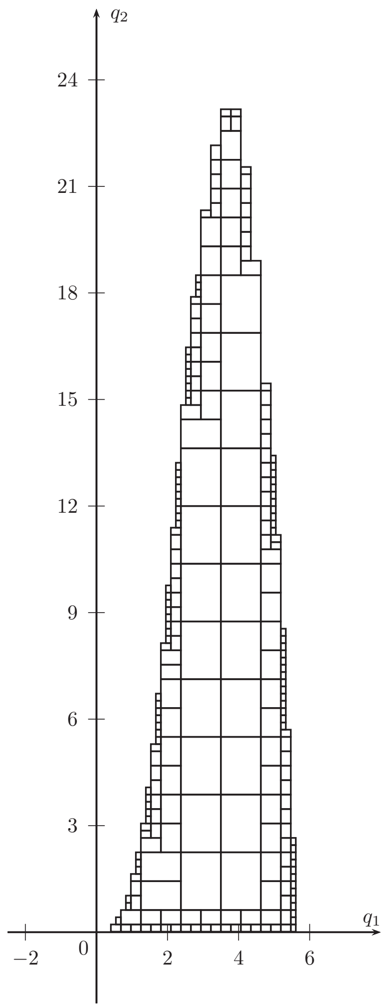
Örnek 3.1. *([3])*

$$p(s, q_1, q_2) = s^5 + 4.6s^4 + 80.8s^3 + (54q_1 + 30.1)s^2 + (54q_2 + 90q_1 - 0.1)s + 90q_2$$
$$(q_1, q_2) \in [-1, 8] \times [-1, 25]$$

polinomlar ailesi verilsin. Bu ailenin $[-1, 8] \times [-1, 25]$ *kutusu üzerinde kararlı olduğu bölgeye ait alt kutuları araştıralım. Genişletilmiş sistem*

$$\begin{aligned} 4.6t_1t_2 - t_1(54q_1 + 30.1) + 90q_2 &= 0 \\ t_1t_2 - 80.8t_1 + 54q_2 + 90q_1 - 0.1 &= 0 \\ t_2 - t_1 &= 0 \end{aligned} \tag{3.17}$$

şeklindedir. Bu polinomlar ailesi multilineerdir ve kesme frekansı hesaplanırsa $\omega_c = 2251$ *bulunur. Algoritma 3.1 uygulandığında, yeni kesme frekansı* $\omega_c = 75$ *bulunur. Algoritma 3.2 uygulandığında ise Şekil 3.1 elde edilir. Buradaki alt kutulara ait* (q_1, q_2) *noktalarına karşılık gelen polinomlar Hurwitz kararlıdır.*



Şekil 3.1. Örnek 3.1'deki polinomlar ailesine ait kararlı polinomları veren (q_1, q_2) ikilileri

4. POLİNOMSAL MATRİSLER AİLESİNİN GÜRBÜZ KARARLILIĞI

Bu bölümde

$$Q = \{q = (q_1, q_2, \ldots, q_l) : \; q_i^- \leq q_i \leq q_i^+ \; (i = 1, 2, ..., l)\}$$

kutusu üzerinde tanımlı

$$a_{ij} := Q \to \mathbb{R} \quad (i, j = 1, 2, ..., n)$$

çok değişkenli polinomları ile

$$\mathcal{A} = \{A(q) = [a_{ij}(q)] : \; q \in Q\} \tag{4.1}$$

biçiminde verilen matrisler ailesinin $\mathcal{D}$-kararlılığı problemi incelenmiş ve gürbüz $\mathcal{D}$-kararlılıkla ilgili gerek ve yeter koşullar verilmiştir. Bu koşullar, matrislerin bialterne çarpımının özellikleri kullanılarak elde edilmiştir.

Aynı boyutlu iki kare matrisin bialterne çarpımı şu şekilde tanımlanır:

Tanım 4.1. *([8, 30]). $n \times n$ boyutlu A ve B matrisleri verilsin. $1 \leq i < j \leq n$, $1 \leq k < l \leq n$ ve*

$$f_{ij,kl} = \frac{1}{2}\left[\det\begin{pmatrix} a_{ik} & a_{il} \\ b_{jk} & b_{jl} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} b_{ik} & b_{il} \\ a_{jk} & a_{jl} \end{pmatrix}\right]$$

olmak üzere A ve B matrislerinin bialterne çarpımı $F = A \cdot B = [f_{ij,kl}]$ şeklinde tanımlanır. Burada F matrisinin boyutu $\frac{n(n-1)}{2} \times \frac{n(n-1)}{2}$ olur.

Örnek 4.1. *$A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ $(i, j = 1, 2, 3)$ matrislerinin bialterne çarpımları:*

$$A \cdot B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_{11}b_{22} - a_{12}b_{21} - a_{21}b_{12} + a_{22}b_{11} & a_{11}b_{23} - a_{13}b_{21} - a_{21}b_{13} + a_{23}b_{11} & a_{12}b_{23} - a_{13}b_{22} - a_{22}b_{13} + a_{23}b_{12} \\ a_{11}b_{32} - a_{12}b_{31} - a_{31}b_{12} + a_{32}b_{11} & a_{11}b_{33} - a_{13}b_{31} - a_{31}b_{13} + a_{33}b_{11} & a_{12}b_{33} - a_{13}b_{32} - a_{32}b_{13} + a_{33}b_{12} \\ a_{21}b_{32} - a_{22}b_{31} - a_{31}b_{22} + a_{32}b_{21} & a_{21}b_{33} - a_{23}b_{31} - a_{31}b_{23} + a_{33}b_{21} & a_{22}b_{33} - a_{23}b_{32} - a_{32}b_{23} + a_{33}b_{22} \end{pmatrix}$$

ve I matrisi 3×3 birim matris olmak üzere

$$2A \cdot I = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{22} & a_{23} & -a_{13} \\ a_{32} & a_{11} + a_{33} & a_{12} \\ -a_{31} & a_{21} & a_{22} + a_{33} \end{pmatrix}$$

olur.

Bialterne çarpımının özdeğer özelliği olarak bilinen teorem şu şekildedir.

Teorem 4.1. *([8, 13, 30]). A matrisi $n \times n$ boyutlu bir matris ve I matrisi de $n \times n$ boyutlu birim matris olsun. A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ise $2A \cdot I$ matrisinin özdeğerleri*

$$\lambda_i + \lambda_j \quad (1 \leq i < j \leq n)$$

olur. $A \cdot A$ matrisinin özdeğerleri de

$$\lambda_i \lambda_j \quad (1 \leq i < j \leq n)$$

şeklindedir.

Teorem 4.2. *$\mathcal{A}$ (4.1) matrisler ailesi verilsin. Bu ailede en az bir Hurwitz kararlı $A(q_0)$ elemanı bulunsun. Bu durumda (4.1) ailesinin gürbüz Hurwitz kararlı olması için gerek ve yeter koşul her $q \in Q$ için*

$$f_1(q) = \det\left(-A(q)\right) > 0,$$
$$f_2(q) = \det\left(-2A(q) \cdot I\right) > 0$$

olmasıdır.

Kanıt. $\Leftarrow$) : Varsayalım ki (4.1) ailesi gürbüz Hurwitz kararlı olmasın. O zaman $\exists\widetilde{q} \in Q$ vardır ki $A(\widetilde{q})$ kararlı değildir. Ayrıca $A(\widetilde{q})$ nın öyle bir $\widetilde{\lambda}$ özdeğeri vardır ki $Re(\widetilde{\lambda}) \geq 0$ dır. Köklerin katsayılara göre sürekli değişimine göre $\exists q_* \in Q$ vardır ki $A(q_*)$ matrisinin $\lambda_* = j\omega$ özdeğeri vardır.

i) $\omega = 0$ ise $f_1(q_*) = \det(-A(q_*)) = 0$ olur. Bu ise her $q \in Q$ için $f_1(q) > 0$ olması ile çelişir.

ii) $\omega > 0$ ise

$$f_2(q_*) = \det(-2A(q_*)) \cdot I) = \prod_{1\leq i<j\leq n} -(\lambda_i(A(q_*)) + \lambda_j(A(q_*)))$$

olup çarpanlardan bir tanesinde $(j\omega - j\omega)$ olacağından $f_2(q_*) = 0$ olur. Bu da her $q \in Q$ için $f_2(q) > 0$ olması ile çelişir. Bu durumda varsayım yanlıştır, yani (4.1) ailesi gürbüz Hurwitz kararlıdır.

$\Rightarrow$) : (4.1) ailesi gürbüz Hurwitz kararlı olsun. Yani her $q \in Q$ için $A(q)$ kararlıdır. $A(q)$ matrisinin karakteristik polinomu

$$p(s) = \det(sI - A(q)) = s^n + a_{n-1}(q)s^{n-1} + ... + a_1(q)s + a_0(q),$$

tüm katsayıları pozitif olan kararlı bir polinomdur.

$s = 0$ için $\det(-A(q)) = a_0(q) > 0$ olur yani $f_1(q) > 0$ dır.

$$f_2(q) = \prod_{1\leq i<j\leq n} -(\lambda_i(A(q) + \lambda_j(A(q))$$

olup $A(q)$ matrisinin $2m$ tane $(a_i \pm jb_i)$ kompleks ve k tane (c_i) gerçel özdeğeri olsun. Bu özdeğerlerin aralarında toplamlarının çarpımı pozitif olur. Yani $f_2(q) > 0$ dır. $\square$

a, b ve c gerçel sayılar, $b \geq 0$ ve $c \geq 0$ olmak üzere kompleks düzlemde

$$\mathcal{D} = \{s \in \mathbb{C} : \ a + b(s + \bar{s}) + cs\bar{s} < 0\} \tag{4.2}$$

kümesi verilsin. Bu $\mathcal{D}$ kümesi; $a = 0$, $b > 0$, $c = 0$ sayıları için kompleks düzlemde sol açık yarı düzleme ve $a = -1$, $b = 0$, $c = 1$ sayıları için birim diske karşılık gelmektedir.

$s = x + jy$ olmak üzere $c = 0$, $b > 0$ ise

$$\mathcal{D} = \left\{ s : \ x < -\frac{a}{2b} \right\} \tag{4.3}$$

kümesi kompleks düzlemde açık yarı düzlem belirtir.

$\lambda \in \mathbb{C}$ kompleks sayısı $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrisinin bir özdeğeri ise $\alpha \in \mathbb{C}$ için $\lambda + \alpha$ kompleks sayısı $A + \alpha I$ matrisinin bir özdeğeridir.

$$\operatorname{Re} \lambda < -\frac{a}{2b} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Re} \left(\lambda + \frac{a}{2b} \right) < 0$$

A matrisinin $\mathcal{D}$-kararlı olması için gerek ve yeter koşul $A+\dfrac{a}{2b}I$ matrisinin Hurwitz kararlı olmasıdır.

Sonuç 4.1. *$\mathcal{A}$ (4.1) matrisler ailesi ve $\mathcal{D}$ (4.3) bölgesi verilsin. Bu ailede en az bir $\mathcal{D}$-kararlı $A(q_0)$ elemanı bulunsun. Bu durumda (4.1) ailesinin gürbüz $\mathcal{D}$-kararlı olması için gerek ve yeter koşul her $q \in Q$ için*

$$\begin{aligned} f_1(q) &:= \det\left(-\tfrac{a}{2b}I - A(q)\right) > 0, \\ f_2(q) &:= \det\left(-2(\tfrac{a}{2b}I + A(q)) \cdot I\right) > 0 \end{aligned}$$

olmasıdır.

$\mathcal{A}$ (4.1) matrisler ailesinin gürbüz Schur kararlılığı için aşağıdaki teorem ifade edilebilir.

Teorem 4.3. *$\mathcal{A}$ (4.1) matrisler ailesi verilsin. Bu ailede en az bir Schur kararlı $A(q_0)$ elemanı bulunsun. Bu durumda (4.1) ailesinin gürbüz Schur kararlı olması için gerek ve yeter koşul her $q \in Q$ için*

$$\begin{aligned} g_1(q) &= \det\left[((I - A(q))\right] > 0, \\ g_2(q) &= \det\left[((I + A(q))\right] > 0, \\ g_3(q) &= \det\left[(I - A(q) \cdot A(q))\right] > 0 \end{aligned}$$

olmasıdır.

Kanıt. $\Leftarrow)$: Varsayalım ki (4.1) ailesi gürbüz Schur kararlı olmasın. O zaman $\exists \widetilde{q} \in Q$ vardır ki $A(\widetilde{q})$ Schur kararlı değildir. $h : [0,1] \to Q$ sürekli $h(0) = q_0, h(1) = \widetilde{q}$ olsun. $t_* = \inf\{t : A(h(t)) \quad \text{kararsız}\}$ ve $q_* = h(t_*)$ olsun. $A(q_*)$ ın $|\lambda| = 1$ olacak şekilde bir özdeğeri vardır.

i) $\lambda = 1$ olsun. O zaman $g_1(q_*) = \det[(I - A(q_*)] = 0$ olur.

ii) $\lambda = -1$ olsun. O zaman $g_2(q_*) = \det[(I + A(q_*)] = 0$ olur.

iii) $Im\lambda \neq 0$ olsun. O zaman $\bar{\lambda}$ de özdeğerdir ve $\lambda\bar{\lambda} = |\lambda|^2 = 1$, $(A(q_*) \cdot A(q_*))$'ın özdeğeridir. O halde $(I - A(q_*) \cdot A(q_*))$ matrisinin özdeğerleri $(1 - \lambda_i\lambda_j)$, $1 \leq i < j \leq n$ dir. Yani $g_3(q_*) = \det[(I - A(q_*) \cdot A(q_*)] = 0$ olur. Bu durumda varsayım yanlıştır. Yani (4.1) ailesi gürbüz Schur kararlıdır.

$\Rightarrow)$: (4.1) ailesi gürbüz Schur kararlı olsun. Bu durumda A matrisinin özdeğerleri birim diskin içindedir yani $|\lambda_i| < 1$ dir.

i) Özdeğerlerin hepsi gerçel ise $g_1(q) > 0,\ g_2(q) > 0,\ g_3(q) > 0$ olur.

ii) Özdeğerlerin k tanesi gerçel ve $2m$ tanesi kompleks ise $g_1(q) > 0,\ g_2(q) > 0,\ g_3(q) > 0$ olur. Çünkü bütün $g_i(q)$ ler için determinantı özdeğerlerin çarpımı şeklinde açarsak, her bir çarpanın eşleniğide bu çarpımda olacağından bunların birbirleriyle çarpımları pozitif olur. □

$c > 0$ alalım. $s + \bar{s} = 2x$ ve $s\bar{s} = x^2 + y^2$ olduğundan

$$a + b(s + \bar{s}) + cs\bar{s} = a + 2bx + c(x^2 + y^2) < 0$$

eşitsizliği düzenlenir ise

$$x^2 + y^2 + \frac{2b}{c}x < -\frac{a}{c},$$

$$\left(x - (-\frac{b}{c})\right)^2 + y^2 < \frac{b^2}{c^2} - \frac{a}{c} = \frac{b^2 - ac}{c^2}$$

elde edilir.

$$\delta = -\frac{b}{c}, \quad r^2 = \left(\frac{b^2 - ac}{c^2}\right)$$

diyelim. Bu durumda $\mathcal{D}$ bölgesi

$$\mathcal{D} = \{(x, y) :\ (x - \delta)^2 + y^2 < r^2\} \tag{4.4}$$

$b^2 - ac > 0$ olmak üzere kompleks düzlemde merkezi gerçel eksen üzerinde olan r yarıçaplı bir disk olur.

A matrisinin bir özdeğeri λ olsun. $a, b, c \in \mathbb{R}$, $c > 0$ ve $b^2 - ac > 0$ olmak üzere $\delta = -\frac{b}{c}$, $r^2 = \left(\frac{b^2-ac}{c^2}\right)$ için

$$|\lambda - \delta| < r \Leftrightarrow |\frac{\lambda}{r} - \frac{\delta}{r}| < 1$$

olduğundan A matrisinin $\mathcal{D}$-kararlı olması için gerek ve yeter koşul $\dfrac{1}{r}A - \dfrac{\delta}{r}I$ matrisinin Schur kararlı olmasıdır.

Buna göre (4.1) matrisler ailesinin gürbüz $\mathcal{D}$-kararlılığı için aşağıdaki sonucu ifade edebiliriz.

Sonuç 4.2. *$\mathcal{A}$ (4.1) matrisler ailesi ve $\mathcal{D}$ (4.4) bölgesi verilsin. Bu ailede en az bir $\mathcal{D}$-kararlı $A(q_0)$ elemanı bulunsun. O halde (4.1) ailesinin gürbüz $\mathcal{D}$-kararlı olması için gerek ve yeter koşul her $q \in Q$ için*

$$\begin{aligned}
g_1(q) &:= \det\left[\left((1 + \tfrac{\delta}{r})I - \tfrac{1}{r}A(q)\right)\right] > 0,\\
g_2(q) &:= \det\left[\left((1 - \tfrac{\delta}{r})I + \tfrac{1}{r}A(q)\right)\right] > 0,\\
g_3(q) &:= \det\left[I - \left(-\tfrac{\delta}{r}I + \tfrac{1}{r}A(q)\right) \cdot \left(-\tfrac{\delta}{r}I + \tfrac{1}{r}A(q)\right)\right] > 0
\end{aligned}$$

olmasıdır.

Örnek 4.2.

$$\mathcal{A} = \left\{ A(q) = \begin{pmatrix} 0.6 & q_1 \\ q_2 & q_3 \end{pmatrix} : \; q_1 \in [0, 0.2],\; q_2 \in [-0.78, 0],\; q_3 \in [-0.6, 0.6] \right\}$$

aralık matrisler ailesi ele alınsın.

$A(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0.6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *matrisi $\mathcal{A}$ ailesine aittir ve Schur kararlıdır. Bu aileye karşılık gelen çok değişkenli polinomlar*

$$
\begin{aligned}
g_1(q) &= \det(I - A(q)) \\
&= 0.4 - 0.4q_3 - q_1q_2, \\
g_2(q) &= \det(I + A(q)) \\
&= 1.6 + 1.6q_3 - q_1q_2, \\
g_3(q) &= \det(I - A(q) \cdot A(q)) \\
&= 1 + q_1q_2 - 0.6q_3.
\end{aligned}
$$

Bu polinomlar multilineerdir ve Q kutusunda minimum değerleri sırasıyla 0.16*,* 0.64 *ve* 0.484 *dır. Bu yüzden her $q \in Q$ için $g_1(q) > 0$, $g_2(q) > 0$ ve $g_3(q) > 0$ dır ve Teorem 4.3'e göre bu aile gürbüz Schur kararlıdır.*

Teorem 4.4 ([2])**.** *$\mathcal{A}$, $n \times n$ gerçel matrislerin yol bağlantılı kümesi ve $A_0 \in \mathcal{A}$ Schur kararlı olsun. $\mathcal{A}$ nın gürbüz Schur kararlı olması için gerek ve yeter koşul her $A \in \mathcal{A}$, $t \in [-1, 1]$ için*

$$\det(A^2 - 2tA + I) > 0 \tag{4.5}$$

olmasıdır.

Örnek 4.2'de verilen aile ele alınırsa, Teorem 4.4'e göre (4.5) denklemi

$$\det(A(q)^2 - 2tA(q) + I) = 2q_1q_2 + q_1^2q_2^2 + \cdots + 2.4t^2q_3 - 4t^2q_1q_2 - 1.2tq_3^2$$

çok değişkenli polinomu olur. Bu polinomun Q kutusu üzerinde pozitifliğini araştırmak gerekmektedir. Bunun için çok değişkenli polinomların Berntein açılımı [7] ve işarete göre ayrıştırma [22] yöntemleri kullanılmıştır.

4.1. Bernstein Açılımı

$L = (i_1, i_2, \ldots, i_m)$ negatif olmayan tam sayıların bir $m-$lisi olsun ve $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ için

$$\mathrm{x}^L = x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_m^{i_m}.$$

$N = (n_1, \ldots, n_m)$ için

$$L \leq N \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq i_k \leq n_k \quad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Bir m değişkenli $p(\mathrm{x})$ polinomu

$$p(\mathrm{x}) = \sum_{L \leq N} a_L \mathrm{x}^L \qquad (\mathrm{x} \in \mathbb{R}^m) \tag{4.6}$$

şeklinde tanımlanır.

$d = n_1 + n_2 + \cdots + n_m$ sayısına $p(\mathrm{x})$ polinomunun derecesi denir. d. dereceden L. Bernstein polinomu $b_{n,i}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$ olmak üzere

$$B_{N,L}(\mathrm{x}) = b_{n_1,i_1}(x_1) \cdots b_{n_m,i_m}(x_m) \quad (\mathrm{x} \in \mathbb{R}^m)$$

şeklinde tanımlanır. (4.6) denklemini Bernstein formuna dönüştürürsek, $p_L(U)$, p nin $U = [0,1] \times \cdots \times [0,1]$ m-boyutlu birim kutusu üzerinde Bernstein katsayıları ve

$$p_L(U) = \sum_{J \leq L} \frac{\binom{L}{J}}{\binom{N}{J}} a_J \qquad (L \leq N) \tag{4.7}$$

olmak üzere

$$p(\mathrm{x}) = \sum_{L \leq N} p_L(U) B_{N,L}(\mathrm{x}), \tag{4.8}$$

şeklinde yazılır.

$\binom{N}{L}$ ise $\binom{n_1}{i_1} \cdots \binom{n_m}{i_m}$ çarpımları şeklinde tanımlanır.

$$\underline{m} = \min\{p(\mathrm{x}) : \ \mathrm{x} \in U\}, \ \overline{m} = \max\{p(\mathrm{x}) : \ \mathrm{x} \in U\},$$

$$\alpha = \min\{p_L(U) : \ L \leq N\}, \ \beta = \max\{p_L(U) : \ L \leq N\}$$

gösterilsin.

Teorem 4.5.

$$\alpha \leq \underline{m} \leq \overline{m} \leq \beta$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Teorem 4.5, U birim kurusu üzerinde (4.6) çok değişkenli polinomunun görüntü kümesi için sınırlar verir. Keyfi bir D kutusu üzerinde Bernstein katsayılarını ve sınırlarını bulmak için, D kutusu U üzerine afin dönüşüm olmalıdır. U kutusu üzerinde (4.6) polinomunun aralığı için yakınsak sınırları elde etmek için U kutusu iki kutuya bölünebilir. Eğer bölünme devam eder ve her alt adımda minimal ve maksimal Bernstein katsayıları hesaplanırsa, hesaplanan sınırlar gerçek sınırlara yakınsar.

Eğer $\alpha > 0$ ($\beta < 0$) ise polinom U üzerinde pozitif (negatif)tir. Eğer $\alpha \leq 0$, $\beta \geq 0$ ise seçilen koordinat boyunca U kutusu iki kutuya bölünür. Yeni kutu için $\alpha > 0$ veya $\beta < 0$ ise kutu elenebilir çünkü polinom bu kutu üzerinde aynı işaretlidir. Diğer durumlarda ise kutu yeniden iki kutuya bölünür.

Eğer çok değişkenli bir polinom D kutusu üzerinde pozitif (negatif) ise algoritma sonlu adım sonra olumlu bir cavap verir.

$p_i(\mathrm{x})$ ler çok değişkenli polinomlar ve Q, $\mathbb{R}^m$ de bir kutu olmak üzere

$$p_i(\mathrm{x}) > 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, k), \quad \mathrm{x} \in Q \tag{4.9}$$

eşitsizliklerini düşünelim.

Algoritma 4.1.

1. *(4.9) polinomlarının Q kutusu üzerindeki Bernstein katsayıları hesaplanır.*
   Eğer tüm polinomların Bernstein katsayılarının minimumu sıfırdan büyük ise durulur: (4.9) polinomları Q üzerinde pozitiftir.
   Eğer polinomlardan en az bir tanesinin üst sınırı sıfırdan küçük ya da eşit ise durulur: eşitsizlik sistemi sağlanmaz.
   Eğer polinomların değişim aralıkları sıfır içeriyor ise 2. adıma geçilir.

2. *Seçilen bir koordinat boyunca Q kutusu iki kutuya bölünür.*

3. *(4.9) polinomlarının Q'nun alt kutusu üzerindeki Bernstein katsayıları hesaplanır.*

4. *Eğer tüm polinomların Bernstein katsayılarının minimumu sıfırdan büyük ise o kutu elenir ve bir başka alt kutu alınarak bu koşul kontrol edilir.*
   Eğer polinomlardan en az bir tanesinin üst sınırı sıfırdan küçük ya da eşit ise algoritma durdurulur: eşitsizlik sistemi sağlanmaz.
   Eğer polinomların değişim aralıkları sıfır içeriyor ise 2. adıma geçilir.

Eğer bütün alt kutular elenmiş ise (4.9) polinomları Q kutusu üzerinde pozitiftir.

Örnek 4.3. *([6]) $q \in [0,1]$ olmak üzere*

$$A(q) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2-q \\ -1-q^2 & -2 & 7q-1 & 0 \\ -q^3 & 1-q & -1 & 0 \\ q & 0 & q^4 & -1 \end{pmatrix}$$

matrisler ailesi olsun. $A(0)$ matrisi Hurwitz kararlıdır. Ailenin Hurwitz kararlılığı için:

$$\begin{aligned} f_1(q) &= \det(-A(q)) \\ &= -q^8 + q^7 + 3q^6 - 3q^5 + 16q^4 - 23q^3 + 20q^2 - 6q + 1 \\ f_2(q) &= \det(-2A(q) \cdot I) \\ &= -q^{16} + 4q^{15} - 4q^{14} + 14q^{12} - 30q^{11} - 8q^{10} + 36q^9 - 75q^8 + 34q^7 + \\ & \quad 35q^6 - 48q^5 + 170q^4 - 298q^3 + 440q^2 - 356q + 99. \end{aligned}$$

polinomları ele alınsın. Algoritma 4.1 nin uygulaması şu şekildedir.

Bölme ve eleme prosedürü

	Bernstein katsayıları				
	f_1		f_2		
	min	max	min	max	*Elenen aralıklar*
$[0, 1]$	0.21428	8	−4.46828	99	*Aralığı böl*
$[0, \frac{1}{2}]$	0.35937	1.08203	3.44566	99	*Ele*
$[\frac{1}{2}, 1]$	1.08203	8	−1.92831	12.375	*Aralığı böl*
$[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$	1.08203	2.96476	−1.39587	3.44566	*Aralığı böl*
$[\frac{3}{4}, 1]$	2.96476	8	0.840033	12.1875	*Ele*
$[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}]$	1.08203	1.79535	−1.08237	3.44566	*Aralığı böl*
$[\frac{5}{8}, \frac{3}{4}]$	1.79535	2.96476	−1.22773	0.84003	*Aralığı böl*
$[\frac{1}{2}, \frac{9}{16}]$	1.08203	1.39530	0.34755	3.44566	*Ele*
$[\frac{9}{16}, \frac{5}{8}]$	1.39530	1.79535	−1.08237	0.34755	*Aralığı böl*
$[\frac{5}{8}, \frac{11}{16}]$	1.79535	2.30740	−1.20751	−0.88253	
$[\frac{11}{16}, \frac{3}{4}]$	2.30740	2.96476	−0.88253	0.840033	

$f_2(q)$ polinomu için, her $q \in [5/8, 11/16] = [0.625, 0.6875]$ için $f_2(q) < 0$ dır. Bu yüzden, $\{A(q) : q \in [0,1]\}$ ailesi gürbüz kararlı değildir.

4.2. İşarete Göre Ayrıştırma

$$\mathrm{x} = (x_1, x_2, ..., x_m)$$

gerçel vektör, $f(\mathrm{x})$ de x in gerçel polinom fonksiyonu olsun.

$$Q = \{\mathrm{x} : x_i^- \leq x_i \leq x_i^+, \ i = 1, 2, \ldots, m\}$$

bir kutu olmak üzere her $\mathrm{x} \in Q$ için $f(\mathrm{x})$ polinomunun pozitifliğini araştıralım.

Parametre uzayının keyfi bir bölgesinde olan Q kutusu $U = [0,1] \times \cdots \times [0,1]$ birim kutusunu dönüştürülebilir. Genelliği bozmaksızın $x_i^- \geq 0$ olsun. O halde her $\mathrm{x} \in Q$ için $f^+(\mathrm{x}), \ f^-(\mathrm{x}) \geq 0$ olmak üzere

$$f(\mathrm{x}) = f^+(\mathrm{x}) - f^-(\mathrm{x})$$

şeklinde yazılabilir. Buna işarete göre ayrıştırma denir. $f^+(\mathrm{x})$ ve $f^-(\mathrm{x})$ fonksiyonları sırasıyla pozitif ve negatif katsayıları temsil etmektedir.

Q kutusunda iki tane uç köşe tanımlayalım

$$\mathrm{x}^- := (x_1^-, x_2^-, \ldots, x_m^-), \quad \mathrm{x}^+ := (x_1^+, x_2^+, \ldots, x_m^+).$$

Yardımcı Teorem 4.1. *([22]) Her $x \in Q$ için,*

$$f(x) \begin{cases} > 0, & f^+(x^-) - f^-(x^+) > 0 \\ < 0, & f^+(x^+) - f^-(x^-) < 0 \end{cases}$$

$p_i(\mathrm{x})$ çok değişkenli polinomlar ve Q, $\mathbb{R}^m$ de bir kutu olsun.

$$p_i(\mathrm{x}) > 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, k), \quad \mathrm{x} \in Q \tag{4.10}$$

eşitsizlikleri ele alınsın.

Algoritma 4.2.

1. *Her* $i = 1, 2, \ldots, k$ *için* $p_i^+(x^-) - p_i^-(x^+)$ *ve* $p_i^+(x^+) - p_i^-(x^-)$ *değerleri hesaplanır.* *Eğer her* i *için* $p_i^+(x^-) - p_i^-(x^+) > 0$ *ise durulur.*

   Eğer enaz bir $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ *için* $p_i^+(x^+) - p_i^-(x^-) < 0$ *ise durulur: Eşitsizlik sitemi sağlanmaz.*

   Eğer en az bir i *için* $p_i^+(x^-) - p_i^-(x^+) \leq 0$ *veya her* i *için* $p_i^+(x^+) - p_i^-(x^-) \geq 0$ *ise 2. adıma geçilir.*

2. *Seçilen bir koordinat boyunca* Q *kutusu iki alt kutuya bölünür.*

3. Q*'nun bir alt kutusu için (*$i = 1, 2, \ldots, k$*)* $p_i^+(x^-) - p_i^-(x^+)$ *ve* $p_i^+(x^+) - p_i^-(x^-)$ *değerleri hesaplanır.*

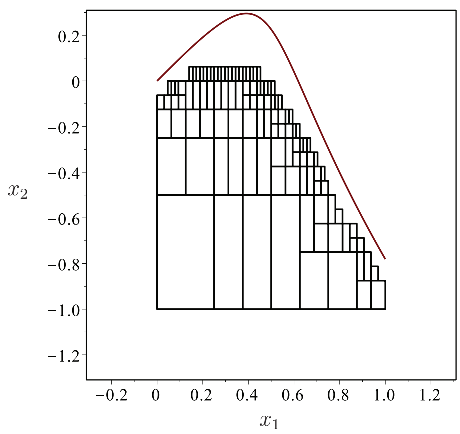
4. *Eğer her* i *için* $p_i^+(x^-) - p_i^-(x^+) > 0$ *ise o alt kutu elenir ve üçüncü adıma geçilir.*

   Eğer enaz bir $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ *için* $p_i^+(x^+) - p_i^-(x^-) < 0$ *ise durulur: Eşitsizlik sistemi sağlanmaz.*

   Eğer en az bir i *için* $p_i^+(x^-) - p_i^-(x^+) \leq 0$ *veya her* i *için* $p_i^+(x^+) - p_i^-(x^-) \geq 0$ *ise 2. adıma geçilir.*

Eğer bütün alt kutular elenmiş ise (4.10) polinomları Q *kutusu üzerinde pozitiftir.*

Örnek 4.4. $f(x) = x_1 - x_2 + x_1x_2^2 - 2x_1^3 - x_1^4 + x_1^2x_2^2$ *fonksiyonunun* $Q = [0, 1] \times [-1, 1]$ *kutusu üzerindeki pozitifliğini Algoritma 4.2 ile incelediğimizde Şekil 3.1 elde edilir.*



Şekil 4.1. f fonksiyonunun Q üzerinde pozitifliği

Örnek 4.5. $q_1 \in [-1,1]$ $q_2 \in [-1,1]$ *olmak üzere*

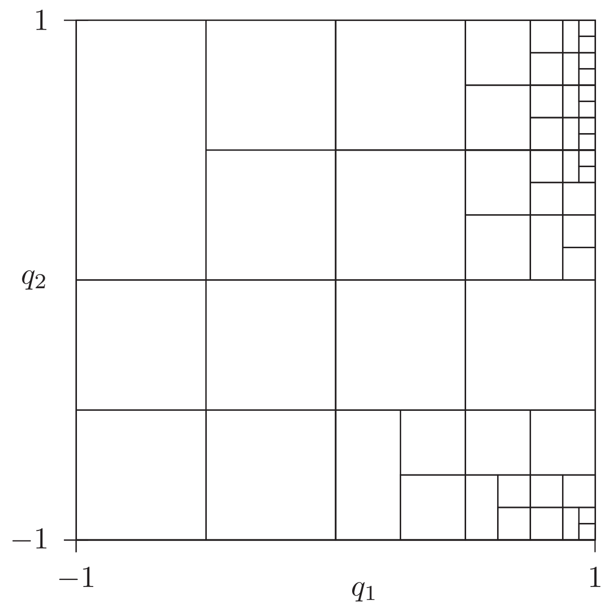
$$A(q) = \begin{pmatrix} -0.14 - 0.3\,q_1 + 0.4\,q_2 & 0.235 + 0.15\,q_1 - 0.1\,q_2 & 0.29 + 0.275\,q_1 - 0.4\,q_2 \\ -0.94 - 0.275\,q_1 - 0.6\,q_2 & -0.811 - 0.3\,q_1 - 0.325\,q_2 & 1.246 + 0.55\,q_1 + 0.225\,q_2 \\ -0.22 - 0.35\,q_1 + 0.725\,q_2 & -0.35 - 0.25\,q_1 + 0.225\,q_2 & 0.95 + 0.625\,q_1 - 0.45\,q_2 \end{pmatrix}$$

matrisler ailesinin gürbüz Schur kararlılığını inceleyelim.

$t = q_3$ *için (4.5) determinant fonksiyonu*

$$\begin{aligned} p(q) &= \det(A(q)^2 - 2q_3A(q) + I) \\ &= -1.106q_1q_2^2q_3 + 1.17q_1^2q_2q_3 + 2.7q_1q_2q_3 + \cdots + q_2^2 2.994q_3^3 \end{aligned}$$

olur. Algoritma 4.1, 109 *adım sonunda* $p(q)$ *polinomunun* Q *kutusu üzerinde pozitif olduğu sonucunu verir.*

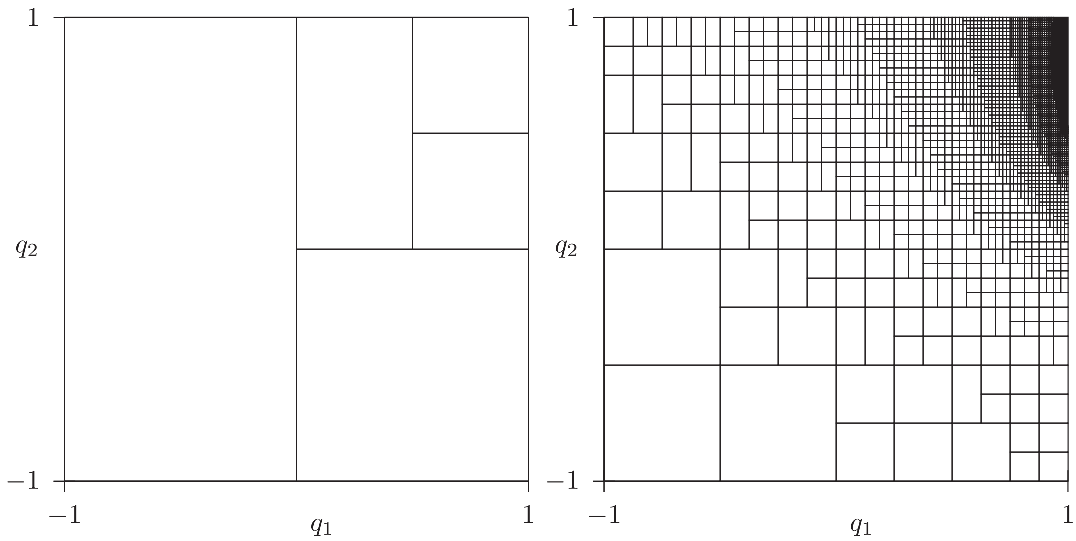


Şekil 4.2. Algoritma 4.1'in Örnek 4.5'e uygulanması sırasında eliminasyonda elenen alt kutular

Bu örneğe Teorem 4.3 uygulandığında: $-1 \leq q_1 \leq 1$, $-1 \leq q_2 \leq 1$

$$\begin{aligned} g_1(q) &= \det(I + A(q)), \\ g_2(q) &= \det(I - A(q)), \\ g_3(q) &= \det(I - A(q) \cdot A(q)). \end{aligned}$$

Bernstein açılımı $g_i(q)$ $(i = 1, 2, 3)$ *fonksiyonlarının* $[-1, 1] \times [-1, 1]$ *kutusu üzerindeki pozitifliğini* 4 *adım sonunda vermektedir. İşarete göre ayrıştırma metodu ise bu sonucu* 4013 *adım sonunda vermiştir.*



Şekil 4.3. Örnek 4.5 için Algoritma 4.1 (soldaki) ve Algoritma 4.2 (sağdaki) uygulanması sırasında elimine edilen kutular

Örnek 4.6. $Q = [-0.401, 0.5] \times [-0.6, 0.6]$ *olmak üzere*

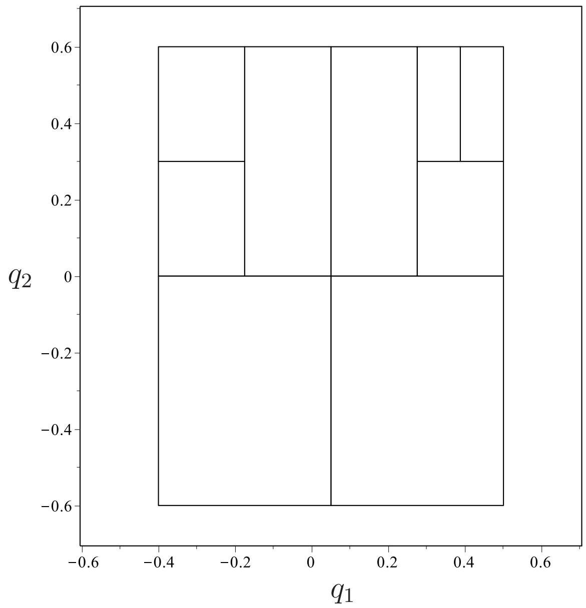
$$A(q) = \begin{pmatrix} -2 - 2\,q_2 + 2\,{q_1}^3 & q_1 + q_1 q_2 & -1 - 2\,q_1 - 2\,q_1 q_2 \\ 1 + q_2 - {q_1}^3 & -2 + q_1 + q_1 q_2 & 3 - 3\,q_2 + 3\,{q_1}^3 \\ -3 - q_2 + {q_1}^3 & -1 - 5\,q_1 - 5\,q_1 q_2 & -2 + q_2 - {q_1}^3 \end{pmatrix}$$

matrisler ailesinin gürbüz Hurwitz kararlılığını araştıralım. Teorem 4.2'ye göre

$$\begin{aligned} f_1(q) &= \det(-A(q)), \\ f_2(q) &= \det(-2A(q) \cdot I). \end{aligned}$$

fonksiyonları elde edilir. Algoritma 4.1 uygulandığında 8 *adım sonunda bu fonksi-*

yonların Q kutusu üzerinde pozitif olduğu sonucuna ulaşılır. Algoritma 4.2 ise 23187 *adım sonunda cevap vermektedir.*



Şekil 4.4. Örnek 4.6 için Algoritma 4.1 uygulanması

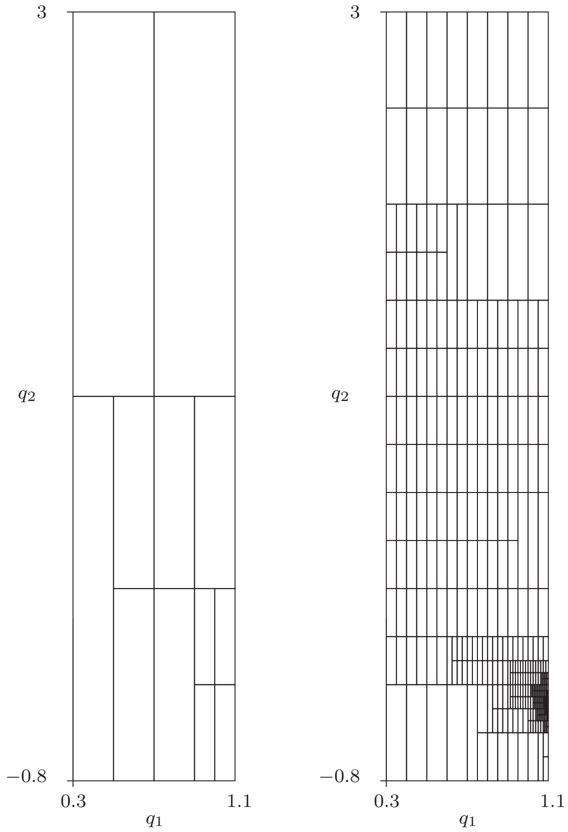
Örnek 4.7. *$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Re}(z) < -1\}$ ($a = 2$, $b = 1$, $c = 0$) ve $Q = [0.3, 1.1] \times [-0.8, 3]$ olmak üzere,*

$$A(q) = \begin{pmatrix} 2q_1 + 2q_2 & -2 - q_1 - q_2 & \begin{matrix} -2q_1q_2 - 2q_1 \\ 1 - 4q_2 - 2{q_2}^3 - 6{q_2}^2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 + 2q_1q_2 + 2q_1 + 4q_2 + \\ 2{q_2}^3 + 6{q_2}^2 \end{matrix} & \begin{matrix} -3 - q_1q_2 - q_1 - \\ 2q_2 - {q_2}^3 - 3{q_2}^2 \end{matrix} & \begin{matrix} 3 - q_2 - q_1q_2 - \\ {q_2}^3 - 3{q_2}^2 \end{matrix} \\ 1 + 3\,q_1 + 3\,q_2 & -1 - q_1 - q_2 & -3\,q_1 - 3\,q_2 - 3 \end{pmatrix}$$

matrisler ailesinin gürbüz $\mathcal{D}$-kararlılığını araştıralım. Teorem 4.2'ye göre

$$\begin{aligned} f_1(q) &= \det(-(I + A(q))), \\ f_2(q) &= \det(-2[I + A(q)] \cdot I). \end{aligned}$$

elde edilen fonksiyonlar için Algoritma 4.1 uygulandığında 11 *adımda, Algoritma 4.2 ile ise* 379 *adım sonunda bu fonksiyonların Q kutusu üzerinde pozitif olduğu sonucu elde edilmektedir.*



Şekil 4.5. Örnek 4.7 için Algoritma 4.1 ve Algoritma 4.2 uygulanması

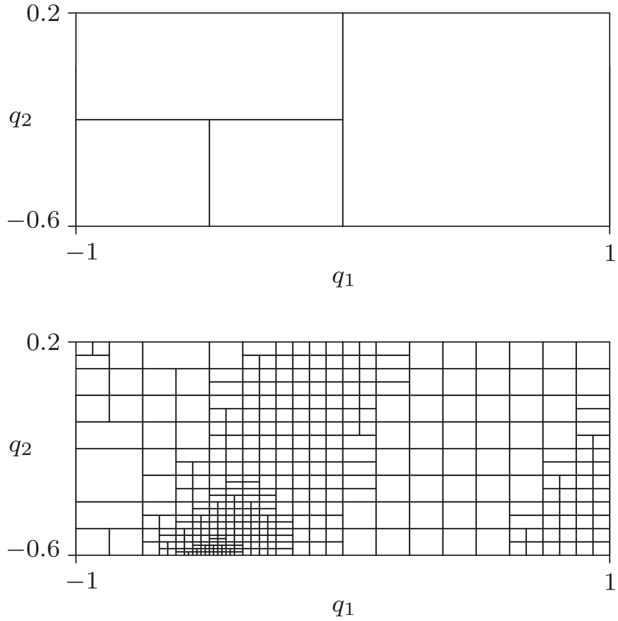
Örnek 4.8. *$D = \{z \in \mathbb{C} : \ |z-1| < 2\}$ ($\delta = 1$, $r = 2$) ve $Q = [-1,1] \times [-0.6, 0.2]$ olmak üzere*

$$A(q) = \begin{pmatrix} 2.403 - 0.54\,q_1 - 0.28\,q_2 & 0.807 - 0.30\,q_1 - 0.10\,q_2 & -0.863 - 0.50\,q_1 + 0.14\,q_2 \\ 0.194 + 0.32\,q_1 - 0.40\,q_2 & 2.713 - 0.56\,q_1 + 0.30\,q_2 & 0.177 + 0.6\,q_1 - 0.38\,q_2 \\ 2.261 - 0.2\,q_1 - 0.70\,q_2 & 2.063 - 0.4\,q_1 + 0.50\,q_2 & 1.391 + 0.30\,q_1 - 0.50\,q_2 \end{pmatrix}$$

matrisler ailesinin gürbüz $\mathcal{D}$-kararlılığını araştıralım.

$$\begin{aligned} g_1(q) &:= \det\left[\left((1+\tfrac{1}{2})I - \tfrac{1}{2}A(q)\right)\right], \\ g_2(q) &:= \det\left[\left((1-\tfrac{1}{2})I + \tfrac{1}{2}A(q)\right)\right], \\ g_3(q) &:= \det\left[I - \left(-\tfrac{1}{2}I + \tfrac{1}{2}A(q)\right)\cdot\left(-\tfrac{1}{2}I + \tfrac{1}{2}A(q)\right)\right] \end{aligned}$$

fonksiyonları için Algoritma 4.1 uygulandığında 3 *adım sonunda, Algoritma 4.2 ile* 379 *adım sonunda bu fonksiyonların Q kutusu üzerinde pozitif olduğu görülmektedir.*



Şekil 4.6. Örnek 4.8 için Algoritma 4.1 ve Algoritma 4.2 uygulanması

4.3. Polinomsal Matrisler Ailesinin Sektör Kararlılığı

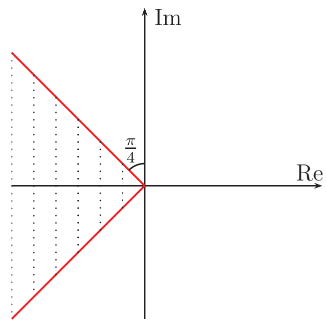
Kompleks düzlemde

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \ Ref_i(z) < 0, \quad i = 1, 2, ..., m\} \tag{4.11}$$

bölgesini ele alalım [25]. $f_1(z) = z$ ve $f_2(z) = -z^2$ kompleks polinomları için (4.11) kümesi

$$\Omega_{\frac{\pi}{4}} = \left\{z \in \mathbb{C} : \ Re(z) < 0, \ Re(-z^2) < 0 \ \right\} \tag{4.12}$$

olur ve kompleks düzlemde Şekil 4.7 'deki gibi bir bölgeye karşılık gelir:

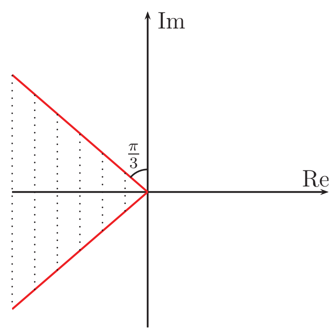


Şekil 4.7. $\Omega_{\frac{\pi}{4}}$ bölgesi

Benzer şekilde, $f_1(z) = z$ ve $f_2(z) = z^3$ kompleks polinomları için (4.11) kümesi

$$\Omega_{\frac{\pi}{3}} = \left\{z \in \mathbb{C} : \ Re(z) < 0, \ Re(z^3) < 0 \ \right\} \tag{4.13}$$

olur ve bu durumda kompleks düzlemde Şekil 4.8'deki bölge elde edilmiş olur:



Şekil 4.8. $\Omega_{\frac{\pi}{3}}$ bölgesi

Teorem 4.6. *$\mathcal{A}$ (4.1) matrisler ailesi verilsin. Bir $q_0 \in Q$ için $A(q_0)$ matrisi $\Omega_{\frac{\pi}{4}}$-kararlı olsun. Bu durumda (4.1) ailesinin gürbüz $\Omega_{\frac{\pi}{4}}$-kararlı olması için gerek ve yeter koşul her $q \in Q$ için*

$$f_1(q) = \det\left(A^2(q)\right) > 0,$$
$$f_2(q) = \det\left(2A^2(q) \cdot I\right) > 0$$

olmasıdır.

Kanıt. $\Leftarrow$) : Varsayalım ki (4.1) ailesi gürbüz $\Omega_{\frac{\pi}{4}}$-kararlı olmasın. O zaman öyle bir $\tilde{q} \in Q$ vardır ki, $A(\tilde{q})$ $\Omega_{\frac{\pi}{4}}$-kararlı değildir. Bu durumda, köklerin katsayılara göre sürekli değişimine göre öyle bir $q_* \in Q$ vardır ki $A(q_*)$ matrisinin özdeğerleri ya $\Omega_{\frac{\pi}{4}}$ sektöründe ya da bu sektörün sınırındadır.

i) $\lambda = 0$, $A(q_*)$ matrisinin bir özdeğeri ise, o zaman $\det A^2(q_*) = 0$ olur. Bu ise her $q \in Q$ için $f_1(q) > 0$ olması ile çelişir.

ii) $A(q_*)$ matrisinin bir λ_* özdeğeri $\Omega_{\frac{\pi}{4}}$ sektörünün sınırında olsun ($|\lambda_* \neq 0$). Bu durumda $\arg(\lambda_*) = \frac{3\pi}{4}$ olur.

$$f_2(q_*) = \det\left(2A^2(q_*)\right) \cdot I\Big) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \left(\lambda_i^2(A^2(q_*)) + \lambda_j^2(A^2(q_*))\right)$$

olduğundan, bu ifadedeki çarpanlardan bir tanesi sıfır olur. Çünkü $\arg(\lambda_*)^2 = \frac{3\pi}{2}$ ve $\arg(\overline{\lambda}_*)^2 = \frac{\pi}{2}$ olacağından $\lambda_*^2 + \overline{\lambda}_*^2 = 0$ olur. Bu da her $q \in Q$ için $f_2(q) > 0$ olması ile çelişir.

Bu durumda (4.1) ailesi gürbüz $\Omega_{\frac{\pi}{4}}$-kararlıdır.

$\Rightarrow$) : (4.1) ailesi gürbüz $\Omega_{\frac{\pi}{4}}$-kararlı, yani her $q \in Q$ için $A(q)$ $\Omega_{\frac{\pi}{4}}$-kararlı olsun. Bir matrisin özdeğerleri λ_1, λ_2, ..., λ_n ise o matrisin karesinin özdeğerleri λ_1^2, λ_2^2, ..., λ_n^2 olacağından, her $q \in Q$ için $A(q)$ matrisi $\Omega_{\frac{\pi}{4}}$-kararlı olduğu için

$$f_1(q) = \lambda_1^2 \lambda_2^2 ... \lambda_n^2 > 0$$

olur. Diğer taraftan, bir $q \in Q$ için $A(q)$ matrisinin tüm özdeğerleri gerçel ise

$$f_2(q) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \left[\lambda_i^2(A^2(q)) + \lambda_j^2(A^2(q))\right]$$

fonksiyonu pozitiftir: $f_2(q) > 0$. Eğer $A(q)$ matrisinin kompleks özdeğeri var ise, o zaman $f_2(q)$ fonksiyonundaki bir $\left(\lambda_{i_0}^2(A^2(q)) + \lambda_{j_0}^2(A^2(q))\right)$ çarpanına karşılık bunun eşleniği olan $\overline{\left[\lambda_{i_0}^2(A^2(q)) + \lambda_{j_0}^2(A^2(q))\right]}$ çarpanı da $f_2(q)$'deki terimler arasında olacağından bu iki çarpan için:

$$\left[\lambda_i^2(A^2(q)) + \lambda_j^2(A^2(q))\right] \overline{\left[\lambda_{i_0}^2(A^2(q)) + \lambda_{j_0}^2(A^2(q))\right]} > 0$$

olur. Buna göre her $q \in Q$ için $f_2(q) > 0$ olmak durumundadır. □

Örnek 4.9. $Q = [-0.4, 0.3] \times [-0.7, 0.6]$ *olmak üzere*

$$A(q) = \begin{pmatrix} -2 - 2\,q_2 + 2\,{q_1}^3 & q_1 + q_1q_2 & -1 - 2\,q_1 - 2\,q_1q_2 \\ 1 + q_2 - {q_1}^3 & -2 + q_1 + q_1q_2 & 3 - 3\,q_2 + 3\,{q_1}^3 \\ -3 - q_2 + {q_1}^3 & -1 - 5\,q_1 - 5\,q_1q_2 & -2 + q_2 - {q_1}^3 \end{pmatrix}$$

matrisler ailesinin gürbüz $\Omega_{\frac{\pi}{4}}$-kararlılığını araştıralım.

$q_0 = (0, 0)$ *için*

$$A(q_0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

matrisinin özdeğerleri :-1, $-2.5 \pm 0.8660254j$ *olduğundan bu matris* $\Omega_{\frac{\pi}{4}}$*-kararlıdır.*

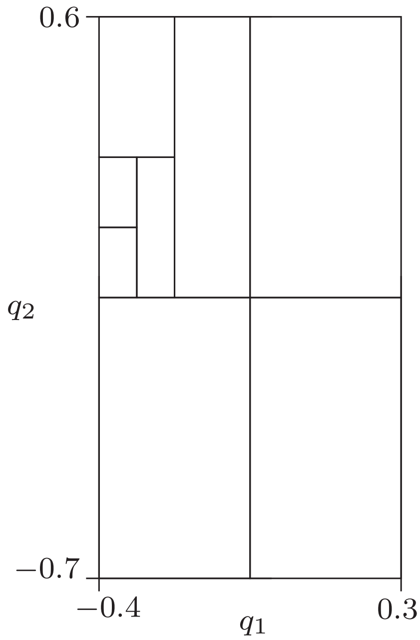
$$\begin{aligned} f_1(q) &= \det(A^2(q)), \\ f_2(q) &= \det(2A^2(q) \cdot I) \end{aligned}$$

fonksiyonları:

$$\begin{aligned} f_1(q) = {} & 900\,{q_1}^{14}{q_2}^2 + 1800\,{q_1}^{14}q_2 - 480\,{q_1}^{12}{q_2}^3 + 900\,{q_1}^{14} + \\ & 600\,{q_1}^{13}q_2 - 1440\,{q_1}^{12}{q_2}^2 - 3600\,{q_1}^{11}{q_2}^3 + 64\,{q_1}^{10}{q_2}^4 + \\ & 600\,{q_1}^{13} - 1440\,{q_1}^{12}q_2 - 8500\,{q_1}^{11}{q_2}^2 + \\ & 256\,{q_1}^{10}{q_2}^3 + \cdots + 14\,q_2 + 49, \end{aligned}$$

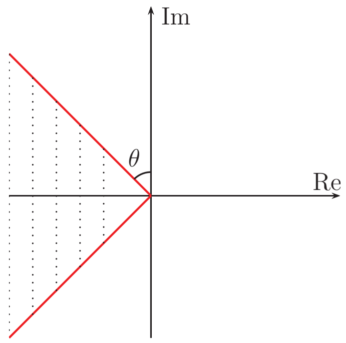
$$
\begin{aligned}
f_2(q) \;=\;& 20\,{q_1}^{18} - 824\,{q_1}^{16} q_2 - 824\,{q_1}^{16} - 120\,{q_1}^{15} q_2 + \\
& 5585\,{q_1}^{14} {q_2}^2 - 148\,{q_1}^{15} + 11170\,{q_1}^{14} q_2 + 4120\,{q_1}^{13} {q_2}^2 - \\
& 10988\,{q_1}^{12} {q_2}^3 + 5585\,{q_1}^{14} + 7602\,{q_1}^{13} q_2 - 32664\,{q_1}^{12} {q_2}^2 - \\
& 22340\,{q_1}^{11} {q_2}^3 - \cdots - 2566\,q_1 + 394\,q_2 + 671
\end{aligned}
$$

olur. Teorem 4.6'deki sonuç kullanılarak, Bernstein açılımı yöntemi ile bu fonksiyonların verilen Q üzerinde pozitif oldukları 7 *adım sonunda görülür.*



Şekil 4.9. Örnek 4.9 için Algoritma 4.1 uygulanması

Teorem 4.6'daki benzer sonuçlar θ'nın keyfi değerleri için ifade edilememektedir. Ancak belli bazı θ değerleri için bialterne çarpımı kullanılarak benzer sonuçlar ifade edilebilir.



Şekil 4.10. Ω_θ bölgesi

$$k(\pi - \theta) = m\pi + \frac{\pi}{2}, \quad m \in \mathbb{Z}$$

ve $\theta = \frac{\pi}{L}$ diyelim. Bu durumda

$$(L-1)k - Lm = \frac{L}{2}$$

denklemi elde edilir. O zaman

$$\begin{gathered}
L = 2 \text{ için } k = 1 \text{ ve } m = 0, \\
L = 3 \text{ için } k \text{ yok }, \\
L = 4 \text{ için } k = 2 \text{ ve } m = 1, \\
L = 5 \text{ için } k \text{ yok }, \\
L = 6 \text{ için } k = 3 \text{ ve } m = 2, \\
\vdots
\end{gathered}$$

olur. Buradan da görüleceği üzere, benzer sonucu ifade edebilmek için $A(q)$ matrisinin k. kuvvetlerinin bialterne çarpımından elde edilen fonksiyonların pozitifliğine bakmak gerekir. k sayısı arttıkça fonksiyonların dereceleri de hızla artacağından, kullanışlı sonuçlar elde edilemeyecektir.

4.4. Multilineer Matrisler Ailesinin Gürbüz Kararlılığı

$Q \subset \mathbb{R}^l$ bir kutu ve $a_{ij}(q) : Q \to \mathbb{R}$ $(i, j = 1, 2, ..., n)$ multilineer fonksiyonlar olmak üzere $\mathcal{A}$ (4.1) matrisler ailesini ele alalım. $T : Q \to \mathbb{R}^{n \times n}$

$$T(Q) = \begin{pmatrix} a_{11}(q) & a_{12}(q) & \cdots & a_{1n}(q) \\ a_{21}(q) & a_{22}(q) & \cdots & a_{2n}(q) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(q) & a_{n2}(q) & \cdots & a_{nn}(q) \end{pmatrix}$$

multilineer dönüşümünü tanımlayalım. Kutu üzerinde tanımlanan multilineer bir dönüşüm için [3, s. 247]'e göre

$$\operatorname{conv} T(Q) = \operatorname{conv} \{T(q^1), T(q^2), \ldots, T(q^m)\} \tag{4.14}$$

eşitliği doğrudur. Burada "conv" ile konveks zarf, $q^1, q^2, \ldots, q^m$ ile de Q kutusunun köşe noktaları gösterilmiştir.

Denklem (4.14)'e göre, $\operatorname{conv} \{T(q^1), T(q^2), \ldots, T(q^m)\}$ gürbüz $\mathcal{D}$-kararlı ise $\mathcal{A}$ (4.1) ailesi de gürbüz $\mathcal{D}$-kararlıdır.

$A_1, A_2, \ldots, A_m$ matrisleri $n \times n$ boyutlu matrisler olmak üzere

$$\mathcal{P} = \operatorname{conv}\{A_1, A_2, \ldots, A_m\} \tag{4.15}$$

matris politopu verilsin. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ martrisi için $A^s = \frac{1}{2}(A + A^T)$ matrisini tanımlayalım.

Teorem 4.7. *$\mathcal{P}$ (4.15) matris politopu verilsin. Bu durumda*

i) A_i^s $(i = 1, 2, ..., m)$ matrisleri Hurwitz kararlı ise $\mathcal{P}$ politopu gürbüz Hurwitz kararlıdır.

ii) $A_i^T = A_i$ ve A_i matrisleri Schur kararlı ise $\mathcal{P}$ politopu gürbüz Schur kararlıdır.

Kanıt. *i)* $n \times n$ boyutlu bir A matrisinin Hurwitz kararlı olması için gerek ve yeter koşul $A^T P + PA \prec 0$ olacak biçimde pozitif belirli bir $P = P^T$ matrisinin var olmasıdır. Bir $P = P^T$ pozitif matrisi için $A_i^T P + PA_i \prec 0$ $(i = 1, 2, ..., m)$ eşitsizliği sağlanıyor ise her $A \in \mathcal{P}$ için de $A^T P + PA \prec 0$ olur.

Bir simetrik matrisin Hurwitz kararlılığı, o matrisin negatif belirliliğine denktir. A_i^s matrisleri Hurwitz kararlı ve simetrik olduklarından $A_i + A_i^T \prec 0$ olur. I matrisi $n \times n$ boyutlu birim matris olmak üzere $IA_i + A_i^T I \prec 0$ $(i = 1, 2, ..., m)$ yazabiliriz. O zaman her $A \in \mathcal{P}$ matrisi Hurwitz kararlıdır.

ii) $A \in \mathcal{P}$ alalım. Öyle $\alpha_i \geq 0$ ve $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ vardır ki $A = \alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_m A_m$ olur. A_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ matrisleri simetrik ve Schur kararlı olduklarından Weyl Teoremi'ne [21, s. 181] göre

$$-1 < \alpha_1 \lambda_{\min}(A_1) + \cdots + \alpha_m \lambda_{\min}(A_m) \leq \lambda_{\min}(\alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_m A_m) \leq$$
$$\lambda_{\max}(\alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_m A_m) \leq \alpha_1 \lambda_{\max}(A_1) + \cdots + \alpha_m \lambda_{\max}(A_m) < 1$$

olur. Buna göre A matris Schur kararlıdır.

□

Örnek 4.10. $Q = [-5, -4] \times [5, 6] \times [0, 1]$ *bir kutu olmak üzere* $q \in Q$ *için*

$$A(q) = \begin{pmatrix} q_1 q_2 - 3 & 3 & 1 \\ 1 & -5 & q_1 + q_2 \\ 2 & 2q_1 q_3 & -8 \end{pmatrix} \subset \operatorname{conv}\{A_1, A_2, \ldots, A_8\}$$

multilineer matrisler ailesi verilsin. Burada $A_1, A_2, ..., A_m$ *matrisleri* Q *kutusunun uç noktalarına karşılık gelen matrislerdir. Bu uç matrisleri*

$$A_1 = \begin{pmatrix} -28 & 3 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & -8 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -28 & 3 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \\ 2 & -10 & -8 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -33 & 3 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & -8 \end{pmatrix},$$
$$A_4 = \begin{pmatrix} -33 & 3 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 2 & -10 & -8 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} -23 & 3 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 2 & 0 & -8 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} -23 & 3 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 2 & -8 & -8 \end{pmatrix},$$
$$A_7 = \begin{pmatrix} -27 & 3 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 2 & 0 & -8 \end{pmatrix}, A_8 = \begin{pmatrix} -27 & 3 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 2 & -8 & -8 \end{pmatrix}$$

olur. Bu uç matrislerin simetrik kısımları olan A_i^s, $(i = 1, 2, ..., 8)$ *matrislerinin hepsi Hurwitz kararlıdır. Dolayısıyla her* $q \in Q$ *için* $A(q)$ *matrisleri Hurwitz karar-*

lıdır.

Teorem 4.8. *Herhangi bir $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ kompanyon matrisi için A^s matrisi Hurwitz kararlı değildir.*

Kanıt. $p(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$ polinomunun kompanion matrisi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

olur. O zaman

$$A^s = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-a_{n-2} \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & 1-a_{n-2} & -2a_{n-1} \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

A^s matrisinin karakteristik polinomu $b(s) = s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0$ olsun. A^s matrisinin Hurwitz kararlı olması için gerek koşul tüm b_i $(i = 0, 1, ..., n-1)$ katsayılarının pozitif olmasıdır. Buradaki b_k katsayıları, A^s matrisinin $k \times k$ boyutlu baş minörlerin toplamıdır. b_{n-2} katsayısı 2×2 tipinde baş minörlerin toplamıdır. Bu minörler $\begin{pmatrix} 0 & c \\ c & d \end{pmatrix}$ formundadır. Böylece 2×2 baş minörlerin toplamı negatif olur. Bu yüzden A^s matrisi Hurwitz kararlı değildir. $\square$

Kompanyon matrisleri için A^s matrisi Hurwitz kararlı olmadığından, Teorem 4.7'nin *i)* maddesindeki koşul sağlanmaz. Bu nedenle, üreteçleri arasında bir kompanyon matris bulunan politop için bu teorem sonuç vermez.

5. SCHUR VE HURWITZ KARARLI POLİNOMLAR KÜMESİNE DIŞ YAKLAŞIM

Derecesi n olan monik bir

$$p(z) = z^n + a_n z^{n-1} + \cdots + a_2 z + a_1 \tag{5.1}$$

polinomu verildiğinde bu polinoma $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n$ vektörü karşılık getirilebilir. Hurwitz kararlı n. dereceden monik polinomların kümesi $\mathcal{H}_n$ ile Schur kararlı monik polinomların kümesi de $\mathcal{S}_n$ ile gösterilsin:

$$\mathcal{H}_n = \{a \in \mathbb{R}^n : \ p(z) \text{ monik polinomu Hurwitz kararlıdır}\}, \tag{5.2}$$

$$\mathcal{S}_n = \{a \in \mathbb{R}^n : \ p(z) \text{ monik polinomu Schur kararlıdır}\}. \tag{5.3}$$

$\mathcal{H}_n$ ve $\mathcal{S}_n$ kümeleri $\mathbb{R}^n$ uzayının konveks olmayan, bağlantılı ve açık alt kümeleridir [3,10]. Bunun yanı sıra, $\mathcal{S}_n$ kümesi sınırlı küme iken $\mathcal{H}_n$ kümesi sınırlı küme değildir [3,5].

5.1. Schur Kararlı Polinomlar Kümesine Dış Yaklaşım

Bu bölümde $\mathcal{S}_n$ kümesinin özellikleri ele alınacak ve bu özellikler kullanılarak $\mathcal{S}_n$ için bir dış yaklaşım elde edilecektir.

5.1.1. Yansıma katsayıları

Literatürde kanonik parametreler, Schur-Szegö parametreleri, k-parametreleri şeklinde de adlandırılan yansıma katsayıları $(-1,1)^n$ kutusundan n. dereceden monik polinomlar uzayına tanımlanan multilineer bir fonksiyonunun bileşenleri şeklinde verilmektedir. Bu katsayıların elde edilişi için Levinson'un ileriye doğru yineleme yöntemi kullanılmaktadır.

Levinson'un yöntemi kullanılarak bu katsayılar şu şekilde elde edilmektedir.

$$K_n = \{(k_1, k_2, ..., k_n)^T \in \mathbb{R}^n : \ -1 < k_i < 1, \ i = 1, 2, ..., n\}$$

kutusunu tanımlayalım. Bu K_n açık kümesi ile Schur kararlı polinomlar kümesi $\mathcal{S}_n$ arasında bire-bir bir eşleme yapılabilir [26]. Bir $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n)^T \in K_n$ noktası için I_n matrisi n-boyutlu birim matris, E_n matrisi n-boyutlu birim Henkel matrisi

$$E_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

0^T sıfır satır vektörü ve $R_j(k_j) = I_{j+1} + k_j E_{j+1}$ olmak üzere

$$a(k) = R_n(k_n) \begin{pmatrix} 0^T \\ R_{n-1}(k_{n-1}) \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0^T \\ R_1(k_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

ifadesi ile elde edilen $a(k)$ vektörünün bileşenlerine k noktasına karşılık gelen yansıma katsayılarıdır. Bu vektörün katsayı vektörü olduğu $p(z)$ polinomu Schur kararlıdır [26]. Örnek olarak $n = 2$, $n = 3$ ve $n = 4$ durumu için yansıma katsayıları şu şekildedir:

$n = 2$ için yansıma katsayıları

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -k_2 \\ k_1 k_2 - k_1 \end{pmatrix}, \tag{5.5}$$

$n = 3$ için yansıma katsayıları

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -k_3 \\ -k_1 k_2 k_3 + k_1 k_3 - k_2 \\ k_1 k_2 + k_2 k_3 - k_1 \end{pmatrix},$$

$n = 4$ için yansıma katsayıları

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -k_4 \\ -k_1 k_2 k_4 - k_2 k_3 k_4 + k_1 k_4 - k_3 \\ k_1 k_2 k_3 k_4 - k_1 k_2 k_3 - k_1 k_3 k_4 + k_1 k_3 + k_2 k_4 - k_2 \\ k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_3 k_4 - k_1 \end{pmatrix}.$$

5.1.2. Alternatif yansıma katsayıları

İkinci dereceden monik Schur kararlı

$$p(z) = z^2 + a_2 z + a_1$$

polinomu verilsin. Bu polinomun köklerinin gerçel veya kompleks olması durumuna göre a_1 ve a_2 katsayıları ele alınsın.

I. Durum *Polinomun kökleri kompleks olsun:*
$0 < r < 1$ ve $0 < \theta < \pi$ olmak üzere

$$\begin{aligned} z^2 + a_2 z + a_1 &= (z - re^{i\theta})(z - re^{-i\theta}) \\ &= z^2 - 2r\cos\theta z + r^2 \end{aligned}$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned} a_1 &= r^2, \\ a_2 &= -2r\cos\theta \end{aligned}$$

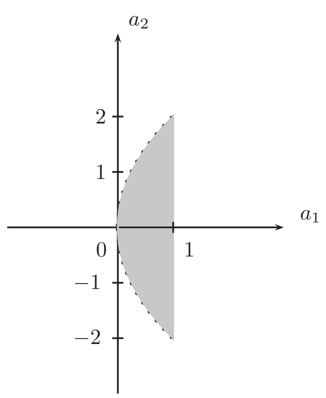
olur. Buradan

$$a_2 = -2r\cos\theta \;\Rightarrow\; a_2^2 = 4r^2\cos^2\theta$$

olduğundan

$$a_2^2 = 4a_1\cos^2\theta$$

olur. $0 < r < 1$ ve $0 < \theta < \pi$ olduğu için, $0 < a_1 < 1$ ve $-2 < a_2 < 2$ olur.



Şekil 5.1. Bölgeye ait olan (a_1, a_2) ikililerine karşılık gelen polinomlar kompleks köke sahiptir

II. Durum *Polinomun kökleri gerçel olsun:*

$-1 < \alpha_1 < 1$ ve $-1 < \alpha_2 < 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} z^2 + a_2 z + a_1 &= (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \\ &= z^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)z + \alpha_1\alpha_2 \end{aligned}$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha_1\alpha_2, \\ a_2 &= -(\alpha_1 + \alpha_2) \end{aligned}$$

olur.

$\alpha_1 = \alpha_2$ ise $a_2 = -2\alpha_1$ olduğundan $a_1 = \frac{a_2^2}{4}$ olur.

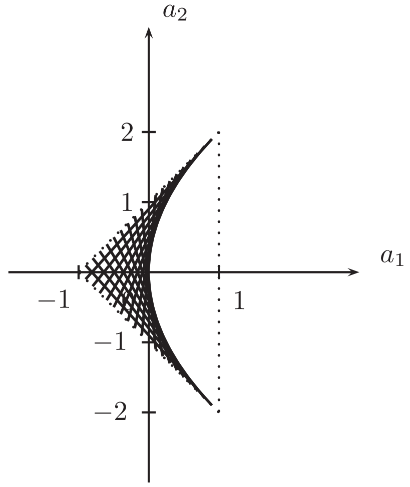
$\alpha_1 \neq \alpha_2$ ise $c \in (-1, 1)$ olmak üzere $\alpha_1 = c$ ve $-1 < \alpha_2 < 1$ durumu ele alınsın.

$$a_1 = c\alpha_2$$
$$a_2 = -c - \alpha_2$$

olacağından

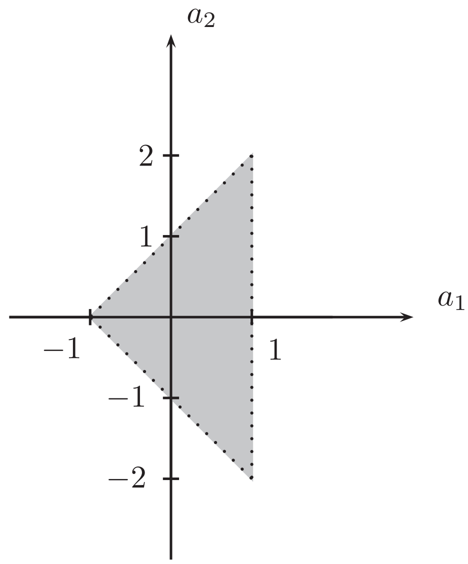
$$a_1 = -c^2 - a_2$$
$$-c - 1 < a_2 < -c + 1$$

doğru parçaları elde edilir.



Şekil 5.2. Bölgeye ait olan (a_1, a_2) ikililerine karşılık gelen polinomlar gerçel köke sahiptir

Buna göre $\mathcal{S}_2 = \{(a_1, a_2) : -1 < a_1 < 1, \quad -a_1 - 1 < a_2 < a_1 + 1\}$ olmak üzere $a = (a_1, a_2) \in \mathcal{S}_2$ için karşılık gelen $z^2 + a_2 z + a_1$ polinomu Schur kararlıdır.



Şekil 5.3. Katsayı uzayında ikinci dereceden Schur kararlı monik polinomların kümesi ($\mathcal{S}_2$ kümesi)

Diğer taraftan,

$$K_2 = \{(k_1, k_2)^T \in \mathbb{R}^2 : \ -1 < k_i < 1, \ i = 1, 2\}$$

kümesi üzerinde tanımlı $F : K_2 \to \mathbb{R}^2$

$$F(k_1, k_2) = \begin{pmatrix} f_1(k_1, k_2) \\ f_2(k_1, k_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_2 \\ k_1 k_2 - k_1 \end{pmatrix}$$

fonksiyonu için $F(K_2) = \mathcal{S}_2$ olur. Yani $-1 < k_1 < 1$ ve $-1 < k_2 < 1$ olmak üzere $z^2 + (k_1 k_2 - k_1) z - k_2$ polinomu Schur kararlıdır.

Şimdi de üçüncü derece Schur kararlı monik polinomları karakterize edelim. $k_3 \in (-1, 1)$ olmak üzere ikinci derece Schur kararlı monik $z^2 + (k_1 k_2 - k_1) z - k_2$ polinomunu $z + k_3$ ile çarptığımızda

$$\begin{aligned} a_1 &= -k_2 k_3 \\ a_2 &= k_1 k_3 - k_2 - k_1 k_2 k_3 \\ a_3 &= k_1 k_2 - k_1 - k_3 \end{aligned}$$

olmak üzere $z^3 + a_3z^2 + a_2z + a_1$ Schur kararlı polinomunu elde ederiz.

$n = 4$ için $-1 < k_i < 1$, $(i = 1, 2, 3, 4)$ olmak üzere $z^2 + (k_1k_2 - k_1)z - k_2$ ile $z^2 + (k_3k_4 - k_3)z - k_4$ Schur kararlı monik polinomları çarpılırsa

$$\begin{aligned}
a_1 &= k_2k_4 \\
a_2 &= -k_1k_2k_4 - k_2k_3k_4 + k_1k_4 + k_2k_3 \\
a_3 &= k_1k_2k_3k_4 - k_1k_2k_3 - k_1k_3k_4 + k_1k_3 - k_2 - k_4 \\
a_4 &= k_1k_2 + k_3k_4 - k_1 - k_3
\end{aligned}$$

olmak üzere $z^4 + a_4z^3 + a_3z^2 + a_2z + a_1$ Schur kararlı polinomunu elde edilir.

Bu şekilde devam edilerek n. dereceden Schur kararlı monik polinomların yansıma katsayıları elde edilebilir.

Teorem 5.1 ([3]). *$Q \subset \mathbb{R}^l$ kutusunun uç noktaları $\{q^1, q^2, ..., q^k\}$ olsun. $F : Q \to \mathbb{R}^n$ multilineer fonksiyonu için*

$$F(Q) = \{F(q) : \; q \in Q\}$$

olmak üzere

$$\operatorname{conv} F(Q) = \operatorname{conv}\{F(q^1), F(q^2), ..., F(q^k)\}$$

olur.

Yani, n. dereceden Schur kararlı polinomların kümesinin konveks zarfı uç noktaları bilinen bir politoptur [10].

Teorem 5.2 ([10]). *$\mathcal{S}_n$ kümesinin konveks zarfı, uç noktaları $\{-1, 1\}$ köküne sahip polinomlardan oluşan bir politoptur.*

Bu teoreme göre $\overline{\operatorname{conv}\mathcal{S}_n}$ kümesi için

$$\begin{aligned}
p_1(z) &= (z-1)^n, \\
p_2(z) &= (z-1)^{n-1}(z+1), \\
p_3(z) &= (z-1)^{n-2}(z+1)^2, \\
\vdots \quad & \vdots \quad \vdots \\
p_n(z) &= (z-1)(z+1)^{n-1}, \\
p_{n+1}(z) &= (z+1)^n
\end{aligned}$$

polinomların katsayılarına karşılık gelen noktalar sırasıyla $V^1, V^2, ..., V^{n+1}$ olmak üzere

$$\overline{\operatorname{conv} \mathcal{S}_n} = \operatorname{conv} \{V^1, V^2, ..., V^{n+1}\}.$$

olur.

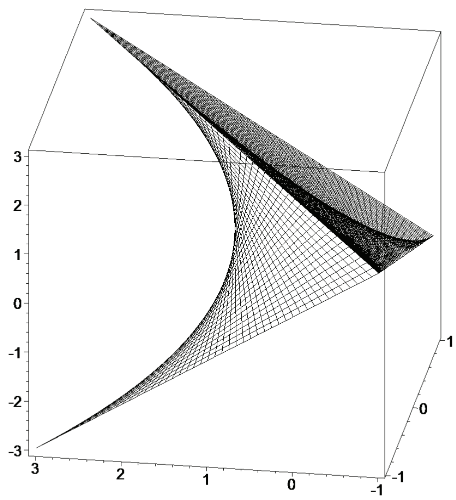
Örneğin $n = 2$ için $\mathcal{S}_2$ kümesi katsayı uzayında uç noktaları $(-1, 0)$, $(1, 2)$ ve $(1, -2)$ olan üçgendir. $n = 3$ için ise

$$\begin{aligned}
p_1(z) &= (z-1)^3 &&= z^3 - 3z^2 + 3z - 1 &&\rightarrow V^1 = (-1, 3, -3)^T,\\
p_2(z) &= (z-1)^2(z+1) &&= z^3 - z^2 - z + 1 &&\rightarrow V^2 = (1, -1, -1)^T,\\
p_3(z) &= (z-1)(z+1)^2 &&= z^3 + z^2 - z - 1 &&\rightarrow V^3 = (-1, -1, 1)^T,\\
p_4(z) &= (z+1)^3 &&= z^3 + 3z^2 + 3z + 1 &&\rightarrow V^4 = (1, 3, 3)^T
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\overline{\operatorname{conv} \mathcal{S}_3} = \operatorname{conv} \{V^1, V^2, V^3, V^4\}.$$

olur.



Şekil 5.4. $\mathcal{S}_3$ bölgesi

5.1.3. Kesikli sistemlerin kararlılaştırılması

Transfer fonksiyonu $G(z) = \dfrac{g(z)}{f(z)}$, kontrolörü $C(z) = \dfrac{q(z,c)}{p(z,c)}$ ve belirsizlik vektörü $c = (c_1, c_2, \dots, c_l)^T \in \mathbb{R}^l$ olan sistemi ele alalım. Bu kapalı devre sisteminin karakteristik polinomu

$$a(z,c) = f(z)p(z,c) + g(z)q(z,c) \tag{5.6}$$

olur. Amacımız $a(z,c)$ polinomunu Schur kararlı yapan bir c parametresi bulmaktır. Bu c vektörüne kararlılaştıran vektör denir.

Bu problem [27, 28] çalışmalarında ele alınmıştır. Bu bölümde kararlılaştıran vektörün varlığı için koşullar bulunmuş ve lineer programlama kullanılarak belirsizlik vektörünün minimal kutusu belirlenmiştir.

$\operatorname{der}(p_0) = n$, $\operatorname{der}(p_i) < n$ $(i = 1, 2, \dots, l)$ ve $n > l$ olmak üzere $a(z,c)$ polinomu

$$a(z,c) = a(z,c) = p_0(z) + c_1p_1(z) + c_2p_2(z) + \cdots + c_lp_l(z) \tag{5.7}$$

şeklinde yazılabilir. $p_0(z)$ ve $p_i(z)$ $(i = 1, 2, \dots, l)$ polinomlarına karşılık gelen n-boyutlu $U^0, U^1, \dots, U^l$ sütun vektörleri tanımlansın. Örneğin $n = 5$ için $p_1(s) = 2s^2 + 3s + 1$ polinomuna $U^1 = (1, 3, 2, 0, 0)^T$ vektörü karşılık gelir.

$$P = \begin{pmatrix} U^1 & U^2 & \cdots & U^l \end{pmatrix}$$

$n \times l$ matrisi tanımlansın. $a(z,c)$ polinomu vektör formunda

$$a(c) = Pc + U^0$$

şeklinde yazılabilir.

Vektör formunda yazılan formül, parametre uzayından katsayı uzayına $a : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^n$ bir afin lineer dönüşüm tanımlar. $V^1, V^2, \dots, V^{n+1} \in \mathbb{R}^n$ vektörleri $\mathcal{S}_n$ kümesinin üreteçleri ve

$$\begin{aligned} \overline{\operatorname{conv} \mathcal{S}_n} &= \operatorname{conv}\{V^1, V^2, \dots, V^{n+1}\}, \\ \mathcal{P} &= \{Pc + U^0 : \ c \in \mathbb{R}^l\} \end{aligned}$$

olsun.

Teorem 5.3. *Eğer* $\mathcal{P} \cap \overline{\operatorname{conv} \mathcal{S}_n} = \emptyset$ *ise o halde* $a(z, c)$ *polinomlar ailesi için kararlılaştıran* $c \in \mathbb{R}^l$ *vektörü yoktur.*

Sonuç olarak, kararlılaştıran c vektörünün varlığı için gerek ve yeter koşul $\mathcal{P} \cap \mathcal{S}_n \neq \emptyset$ olmasıdır.

Şimdi, özel olarak $l = (n-1)$ durumunu inceleyelim. $U^1, U^2, \ldots, U^l$ vektörleri lineer bağımsız olduğundan $\operatorname{rank}(P) = n-1$ dir. Bu durumda $\mathcal{P}$ kümesi $\mathbb{R}^n$ de orijinden geçmeyen $(n-1)$-boyutlu bir hiperdüzlemdir. Bu hiperdüzlemin denklemini bulabiliriz. Önce bu hiperdüzlemin normal vektörünü bulalım. Normal vektörü

$$\langle N, U^1 \rangle = 0, \ldots, \langle N, U^{n-1} \rangle = 0$$

homojen denklem sisteminden bulunur. Böylece hiperdüzlemin denklemi $\langle N, x - U^0 \rangle = 0$ ya da $\alpha = \langle N, U^0 \rangle$ olmak üzere $\langle N, x \rangle = \alpha$ şeklinde ifade edilir.

Teorem 5.4. $l = (n-1)$ *ve* $U^1, U^2, \ldots, U^l$ *vektörleri lineer bağımsız olsun.* $a(z, c)$ *polinomu Schur kararlı olacak şekilde en az bir* $c \in \mathbb{R}^l$ *olması için gerek ve yeter koşul* $\overline{\operatorname{conv} \mathcal{S}_n}$ *kümesinin* $\mathcal{P}$ *hiperdüzleminin farklı taraflarında* V^i *ve* V^j *uç noktalarının olmasıdır. Yani* $\langle N, V^i \rangle > \alpha$, $\langle N, V^j \rangle < \alpha$ *olmasıdır.*

Kanıt. $\Rightarrow$) : Bir $c \in \mathbb{R}^l$ için $a(z, c)$ polinomu kararlı olsun. Bu durumda $\mathcal{P} \cap \mathcal{S}_n \neq \emptyset$ olur. Her $i = 1, 2, \ldots, n+1$ için $\langle N, V^i \rangle \geq \alpha$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $\overline{\operatorname{conv} \mathcal{S}_n} = \operatorname{conv}\{V^1, V^2, \ldots, V^{n+1}\}$ bölgesi $\{x \in \mathbb{R}^n : \langle N, x \rangle \geq \alpha\}$ kapalı yarı düzlemine aittir.

$\mathcal{S}_n$ açık bir küme olduğu için $\mathcal{P} \cap \mathcal{S}_n = \emptyset$ olur. Bu ise $a(z, c)$ polinomunun kararlı olması ile çelişir. Buna göre $\langle N, V^i \rangle > \alpha$, $\langle N, V^j \rangle < \alpha$ olacak şekilde V^i ve V^j köşe noktaları vardır.

$\Leftarrow$) : Multilineer fonksiyonların özelliğinden dolayı $[-1, 1]^n$ kübünün öyle iki uç noktası vardır ki $f(k^i) = V^i$ ve $f(k^j) = V^j$ dir. $[-1, 1]^n$ kübüne ait k^i ve k^j noktalarını birleştiren ve $(-1, 1)^n$ açık kübünde bulunan $\mathcal{L}$ eğrisini düşünelim. V^i ve V^j uç noktaları hariç bu $\mathcal{L}$ eğrisinin görüntüsü $f(\mathcal{L})$, $\mathcal{S}_n$ ye aittir. Uç noktalar $\mathcal{P}$ nin farklı tarafında olduğundan $f(\mathcal{L})$ eğrisinin $\mathcal{P}$ hiperdüzlemini kesmesi gerekir.

$f(\mathcal{L})$'nin denklemi $x = x(t)$ $(0 \le t \le 1)$ ile verilsin. $b(t) = \langle N, x(t) \rangle$ sürekli fonksiyonunu düşünelim. O zaman $b(0) > \alpha$, $b(1) < \alpha$ ve süreklilikten dolayı öyle bir $t_* \in (0,1)$ vardır ki $b(t_*) = \alpha$, yani $\langle N, x(t_*) \rangle = \alpha$ ve $x(t_*) \in \mathcal{P}$ olur. Yani $x(t_*) \in \mathcal{S}_n$ ve $x(t_*) \in \mathcal{P}$ olur. O zaman $\exists\ c_1, c_2, \ldots, c_l$ vardır ki

$$x(t_*) = c_1 U^1 + c_2 U^2 + \ldots + c_l U^l + U^0$$

olacağından bu $c = (c_1, c_2, \ldots, c_l)$ için $a(z, c)$ Schur kararlıdır. $\square$

Teorem 5.4'ün koşulları sağlandığında kararlılaştıran c parametresini belirlemek zor değildir. Genelliği bozmaksızın $\mathcal{P}$ hiperdüzleminin $\mathbb{R}^n$ de orijinden geçmediğini varsayalım. O zaman V^i veya V^j uç noktalarından bir tanesi orijin ile zıt taraftadır. $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ uzayında $(-1,1)^n$ kübünün k^i uç noktasını orijin ile birleştiren doğru parçasını düşünelim. Bu doğru parçasının denklemi

$$k_j(t) = \begin{cases} t, & k_j^i = 1 \ \text{ ise };\\ -t, & k_j^i = -1 \ \text{ ise }. \end{cases}$$

$(j = 1, 2, \ldots, n)$ dir. Bu doğru parçasının görüntüsü multilineer dönüşüm altında q^i noktası hariç $\mathcal{S}_n$ ye aittir ve skaler $t \in [0,1]$ parametresine bağlıdır. $x = \phi(t)$ $(0 \le t \le 1)$ diyelim. O halde $\langle n, \phi(t) \rangle = \alpha$ olur. $t_* \in (0,1)$ ve $x_* = x(t_*)$. c'nin değeri

$$Pc + U^0 = x_*. \tag{5.8}$$

denklem sisteminden bulunur.

Sonuç 5.1. *Teorem 5.4'ün tüm koşulları sağlansın ve $\mathcal{P}$ hiperdüzlemi orijinden geçmesin. O halde kararlılaştıran bir c parametresinin olması için gerek ve yeter koşul öyle bir V^i uç noktası vardır ki, V^i ile orijinin $\mathcal{P}$ hiperdüzleminin farklı tarafında olmasıdır.*

Örnek 5.1. *Transfer fonksiyonu $G(z) = \dfrac{z-1}{z^3 + 2z^2 + z}$ ve PID (oransal-integral-türevsel) kontrolörü $C(z) = \dfrac{c_1 z^2 + c_2 z + c_3}{z}$ olan kapalı devre sistemini ele alalım.*

Bu sistemin karakteristik polinomu

$$p(z,c) = z^4 + 2z^3 + z^2 + c_1(z^3 - z^2) + c_2(z^2 - z) + c_3(z - 1)$$

dır. $U^0 = (0,0,1,2)^T$, $U^1 = (0,0,-1,1)^T$, $U^2 = (0,-1,1,0)^T$, $U^3 = (-1,1,0,0)^T$ *dır ve* U^1, U^2, U^3 *vektörleri lineer bağımsızdır.* N *normal vektörü* $N = (1,1,1,1)^T$ *olarak seçilebilir. Buradan* $\mathcal{P}$ *hiperdüzleminin denklemi*

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 3 = 0$$

olarak bulunur.

$\mathcal{S}_4$ *bölgesinin* $V^1 = (1,4,6,4)^T$, $V^2 = (-1,-2,0,2)^T$, $V^3 = (1,0,-2,0)$, $V^4 = (-1,2,0,-2)^T$, $V^5 = (1,-4,6,-4)^T$ *köşeleri vardır. Bu köşelerden* $V^1 = (1,4,6,4)^T$ *orijin ile zıt taraftadır.*

V^1 *köşesi,* $[-1,1]^4$ *kübünün* $k^1 = (-1,-1,-1,-1)^T$ *köşesinin görüntüsüdür.* $(-1,-1,-1,-1)^T$ *ve orijini birleştiren* $\mathcal{L}$ *doğru parçasının denklemi*

$$k_j(t) = -t, \quad (0 \le t \le 1), \quad (j = 1,2,3,4)$$

dir. Bu $\mathcal{L}$*'nin multilineer dönüşüm altındaki görüntüsü*

$$x_1(t) = -t, \quad x_2(t) = -t, \quad x_3(t) = -t, \quad x_4(t) = -t \quad (0 \le t \le 1)$$

. Hiperdüzlem ile $f(\mathcal{L})$*'nin kesişim noktalarından* $(t+1)^4 = 4$ *denklemi elde edilir ve bu denklemin çözümünden* $t_* = \sqrt{2} - 1$ *değeri bulunur. Kesişim noktası*

$$x_* = x(t_*) = (3 - 2\sqrt{2}, 6\sqrt{2} - 8, 4 - 2\sqrt{2}, 4 - 2\sqrt{2})^T$$

dir. (5.8) denkleminden

$$c = (c_1, c_2, c_3)^T = (2 - 2\sqrt{2}, 5 - 4\sqrt{2}, 2\sqrt{2} - 3)^T$$

kararlılaştıran vektörü bulunur.

Örnek 5.2. *Transfer fonksiyonu* $G(z) = \dfrac{z-3}{z^2-4z-5}$ *ve kontrolörü* $C(z) = \dfrac{c_1 z^2 + c_2 z + c_3}{z^2}$ *olan kapalı devre sistemini ele alalım.* $\mathcal{P}$ *hiperdüzleminin denklemi*

$$x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 27x_4 + 153 = 0$$

dir. Tüm V^i $(i = 1, \ldots, 5)$ *köşeleri için* $\langle N, V^i \rangle > -153$ *bulunur. Teorem 5.4'e göre kararlılaştıran c parametresi yoktur.*

Teorem 5.5. $U^1, U^2, \ldots, U^l$ *vektörleri lineer bağımsız ve* $\mathcal{P} \cap \overline{\mathrm{conv}\mathcal{S}_n} \neq \emptyset$ *olsun. O halde* $\{c \in \mathbb{R}^l : \ (Pc + U^0) \in \overline{\mathrm{conv}\mathcal{S}_n}\}$ *kümesi sınırlıdır.*

Kanıt. $\overline{\mathrm{conv}\mathcal{S}_n}$ kümesi kompakt olduğundan öyle bir $M > 0$ sayısı vardır ki her $y \in \mathcal{P} \cap \overline{\mathrm{conv}\mathcal{S}_n}$ için $\|y\| \leq M$ bulunur. O halde her $c \in \{c \in \mathbb{R}^l : \ (Pc + U^0) \in \overline{\mathrm{conv}\mathcal{S}_n}\}$ için $\|c_1U^1 + c_2U^2 + \cdots + c_lU^l + U^0\| \leq M$ veya $\|c_1U^1 + c_2U^2 + \cdots + c_lU^l\| \leq M + \|U^0\|$ olur. $U^1, U^2, \ldots, U^l$ lineer bağısız olduklarından öyle bir $\beta > 0$ sayısı vardır ki

$$\|c_1U^1 + c_2U^2 + \cdots + c_lU^l\| \geq \beta\left(|c_1| + |c_2| + \cdots + |c_l|\right)$$

veya

$$|c_1| + |c_2| + \cdots + |c_l| \leq \frac{1}{\beta}\left(M + \|U^0\|\right)$$

bulunur. Bu ise $\{c \in \mathbb{R}^l : \ (Pc + U^0) \in \overline{\mathrm{conv}\mathcal{S}_n}\}$ kümesinin sınırlı olduğunu gösterir. □

Varsayalım ki

$$\mathcal{P} \cap \overline{\mathrm{conv}\mathcal{S}_n} \neq \emptyset$$

olsun. Bu durumda öyle negatif olmayan $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ sayıları vardır ki $x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1} = 1$ ve $c_1, c_2, ..., c_l \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$x_1V^1 + x_2V^2 + \cdots + x_{n+1}V^{n+1} = c_1U^1 + c_2U^2 + \cdots + c_lU^l + U^0 \qquad (5.9)$$

eşitliği sağlanır.

$$c_1 = x_{n+2} - x_{n+3}, \ c_2 = x_{n+4} - x_{n+5}, \ldots, c_l = x_{n+2l} - x_{n+2l+1}$$

ile yeni $x_{n+2}, x_{n+3}, \ldots, x_{n+2l+1}$ negatif olmayan değişkenleri tanımlayalım. O zaman (5.9) denklemi

$$x_1V^1 + \cdots + x_{n+1}V^{n+1} = x_{n+2}U^1 - \cdots + x_{n+2l}U^l - x_{n+2l+1}U^l + U^0$$
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1} = 1,\ x_j \geq 0\ (j = 1, 2, ..., n + 2l + 1)$$

halini alır. Bu ifadeyi matris formunda yazarsak

$$\begin{pmatrix} V^1 & V^2 & \cdots & V^{n+1} & -U^1 & U^1 & \cdots & U^l \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n+2l} \\ x_{n+2l+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1^0 \\ U_2^0 \\ \vdots \\ U_n^0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$x_j \geq 0,$$
$$j = 1, 2, ..., n + 2l + 1.$$

$\mathcal{P} \cap \overline{\mathrm{conv}\mathcal{S}_n} = \emptyset$ veya $\mathcal{P} \cap \overline{\mathrm{conv}\mathcal{S}_n} \neq \emptyset$ olduğunu belirlemek için aşağıdaki LP problemini düşünelim.

$$x_{n+2} - x_{n+3} \to \min.$$

Eğer LP probleminin çözüm kümesi boş ise, Teorem 5.3'den, $a(z, c)$ polinomlar ailesi için kararlılaştıran c yoktur. Bu LP probleminin amaç fonksiyonu $c_1 = x_{n+2} - x_{n+3}$ dir. Eğer LP probleminin çözüm kümesi boştan farklı ise o halde c_1 parametresi için bir alt sınır bulabiliriz. O zaman amaç fonksiyonu

$$\begin{aligned} f(x) &= x_{n+2} - x_{n+3}, \\ f(x) &= -x_{n+2} + x_{n+3}, \\ \vdots\ \ &\ \vdots \qquad \vdots \\ f(x) &= x_{n+2l} - x_{n+2l+1}, \\ f(x) &= -x_{n+2l} + x_{n+2l+1} \end{aligned}$$

şeklinde alınabilir ve karşılık gelen LP problemi çözülürse, $c \in \mathbb{R}^l$ belirsizlik parametresinin minimal kutusu belirlenebilir.

Teorem 5.6. *Kararlılaştıran c parametresinin olması için gerek ve yeter koşul*

$$f(k_1,\ldots,k_n) = Pc + U^0$$

$(n+l)$ değişkenli multilineer denklem sisteminin

$$B = (-1,1)\times\cdots\times(-1,1)\times(c_1^-,c_1^+)\times\cdots\times(c_l^-,c_l^+)$$

açık kutusu üzerinde çözümünün olmasıdır.

Buna denk olarak, kararlılaştıran c parametresinin olması için gerek ve yeter koşul

$$F(k_1,\ldots,k_n,c_1,\ldots,c_l) = f(k_1,k_2,\ldots,k_n) - Pc - U^0$$

olduğunda $0\in F(B)$ olmasıdır.

$\overline{B} = [-1,1]\times\cdots\times[-1,1]\times[c_1^-,c_1^+]\times\cdots\times[c_l^-,c_l^+]$ ve $\overline{B}$ kutusunun köşeleri $b^1,b^2,\ldots,b^r$ olsun. $\operatorname{conv}F(B)\subset\operatorname{conv}F(\overline{B}) = \operatorname{conv}\{F(b^1),\ldots,F(b^r)\}$ dir.

Algoritma 5.1.

1) *(5.7) ailesi verilsin. $2l$ tane LP probleminin çözümünden $[c_1^-,c_1^+],\ldots,[c_l^-,c_l^+]$ aralıkları bulunur.*

2) $0\in\operatorname{conv}\{F(b^1),F(b^2),\ldots,F(b^r)\}$ *koşulu sağlanıp sağlanmadığı belirlenir.*

3) *Eğer bu koşul sağlanmıyorsa durulur yani kararlılaştıran c yoktur. Aksi takdirde $\overline{B}$ kutusu bölünür ve aynı prosedür her bir kutuya tekrar uygulanır.*

Örnek 5.3 ([27,28]). *Beşinci dereceden kapalı devre sisteminin transfer fonksiyonu*

$$G(z) = \frac{z^2-0.5z+0.8}{z^4-0.1z^3-1.9825z^2+0.1772z+0.8211}$$

ve birinci dereceden kontrolör

$$C(z) = \frac{c_1+c_2z}{z}$$

olsun. Bu kapalı devre sisteminin karakteristik polinomu

$$
\begin{aligned}
p_0(z) &= z^5 - 0.1z^4 - 1.9825z^3 + 0.1772z^2 + 0.8211z, \\
p_1(z) &= z^2 - 0.5z + 0.8, \\
p_2(z) &= z^3 - 0.5z^2 + 0.8z
\end{aligned}
$$

olmak üzere

$$a(z,c) = p_0(z) + c_1p_1(z) + c_2p_2(z)$$

dır. Buradan

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 \\ -0.5 & 0.8 \\ 1 & -0.5 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U^0 = [0 \ 0.8211 \ 0.1772 \ -1.9825 \ -0.1]^T$$

olur ve $\mathcal{S}_5$'nin üreteçleri ise:

$$V^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -10 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad V^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad V^3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

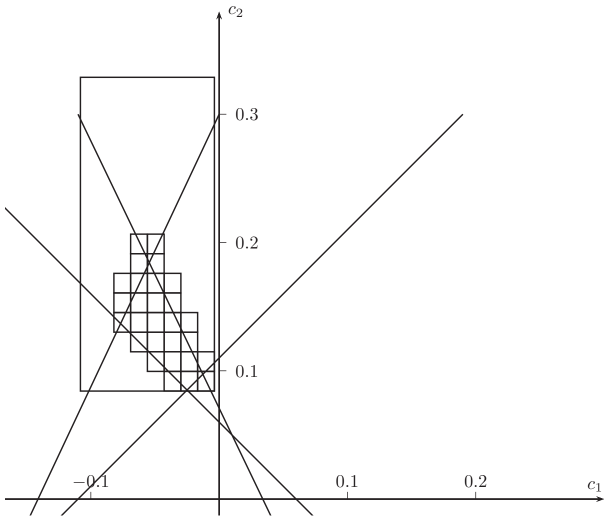
$$V^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V^5 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad V^6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Bu sisteme karşılık gelen LP probleminin çözümü vardır ve c_1 ve c_2 parametreleri için

$$-0.108135 \le c_1 \le -0.003719, \quad 0.084254 \le c_2 \le 0.328832$$

aralıkları bulunur.

Algoritma 5.1 uygulanırsa kararlaştırıcı parametrelerin olabileceği alt kutular Şekil 5.5'deki gibi elde edilir.

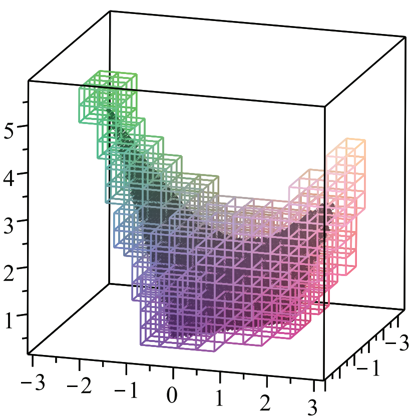


Şekil 5.5. Örnek 5.3 için Algoritma 5.1 uygulandığında elde edilen alt kutular

Örnek 5.4.

$$G(z) = \frac{z^2 - 0.1z - 0.06}{z^3 - 0.4z^2 - 1.19z + 0.876}, \quad C(z) = \frac{c_1 z^2 + c_2 z + c_3}{z^2}$$

olsun. Bu örnek için karşılık gelen LP problemlerinin çözümünden parametreler için $-3.108 \leq c_1 \leq 3.210$, $0.149 \leq c_2 \leq 5.9449$, $-3.446 \leq c_3 \leq 2.093$ *aralıkları elde edilmiştir. Algoritma 5.1 uygulandığında Şekil 5.6 elde edilmiştir.*



Şekil 5.6. Örnek 5.4 için elde edilen alt kutular

5.2. Hurwitz Kararlı Polinomlar Kümesine Dış Yaklaşım

Bu bölümde n. dereceden Hurwitz kararlı monik polinomlar kümesine, Schur kararlı monik polinomlardakine benzer şekilde bir dış yaklaşım elde edilmiştir.

Tanım 5.1 ([31]). *n. dereceden monik polinomların kümesi $\mathcal{P}_n$ olsun. Eğer $p_1(z), p_2(z), \ldots, p_k(z) \in \mathcal{P}_n$ polinomları için*

$$\mathcal{P}_n \subseteq \operatorname{conv}\{p_1(z), p_2(z), \ldots, p_k(z)\}$$

koşulu sağlanıyorsa $\mathcal{P}_n$ polinomlar kümesine sonlu üreteçlidir denir ve $p_1(z), p_2(z), \ldots, p_k(z)$ polinomlarına da $\mathcal{P}_n$ kümesinin üreteçleri adı verilir.

Teorem 5.7 ([31]). *$\mathcal{D}$ kümesi kompleks düzlemde gerçel eksene göre simetrik bir bölge olsun. n. dereceden $\mathcal{D}$-kararlı tüm polinomların kümesinin sonlu üreteçli olması için gerek ve yeter koşul ikinci dereceden $\mathcal{D}$-kararlı tüm polinomların kümesinin sonlu üreteçli olmasıdır.*

Yeterince büyük bir R sayısı için

$$\Omega = \{z : |z| < R,\ \operatorname{Re} z < 0\} \tag{5.10}$$

yarı diskini alalım.

Teorem 5.8. *Ω (5.10) bölgesi verilsin. n. dereceden Ω-kararlı tüm polinomların kümesi sonlu üreteçlidir.*

Kanıt.

$$z^2 + a_2 z + a_1 \tag{5.11}$$

ikinci dereceden polinomunun tüm kökleri

$$\Omega = \{z : |z| < R,\ \operatorname{Re} z < 0\}$$

bölgesinde olsun.

I. Durum *(5.11) polinomun kökleri kompleks olsun:*

$0 < r < R$ ve $\pi/2 < \theta < \pi$ olmak üzere

$$\begin{aligned} z^2 + a_2 z + a_1 &= (z - re^{i\theta})(z - re^{-i\theta}) \\ &= z^2 - 2r\cos\theta z + r^2 \end{aligned}$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned} a_1 &= r^2, \\ a_2 &= -2r\cos\theta \end{aligned}$$

bulunur.

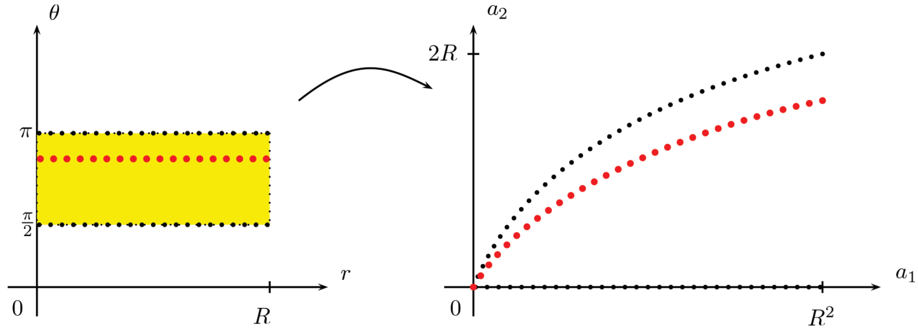
$$\begin{cases} a_1 = r^2, \\ a_2 = -2r\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} a_2^2 &= 4r^2\cos^2\theta, \\ a_2^2 &= 4a_1\cos^2\theta \end{aligned}$$

$0 < r < R$ ve $\pi/2 < \theta < \pi$ olduğu için, $a_1 > 0$ ve $a_2 > 0$ olur.

$$\begin{matrix} \theta = \frac{\pi}{2} \\ 0 < r < R \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 0 < a_1 < R^2 \\ a_2 = 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \theta = \pi \\ 0 < r < R \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 0 < a_1 < R^2 \\ a_2^2 = 4a_1 \end{matrix}$$

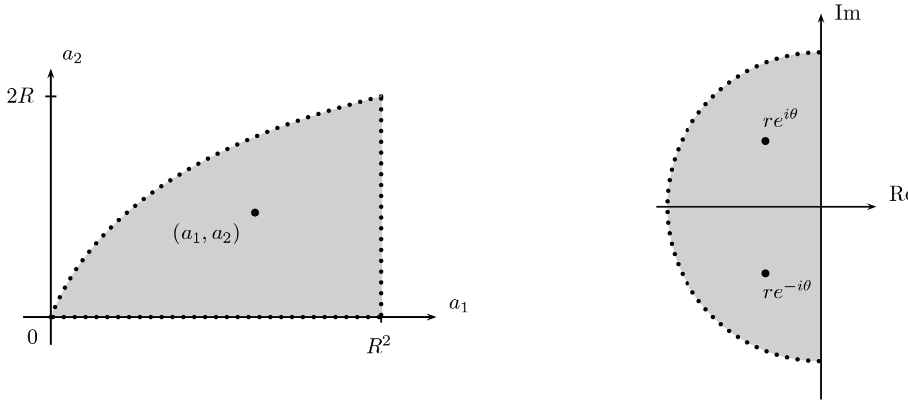
$$\begin{matrix} \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \\ 0 < r < R \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 0 < a_1 < R^2 \\ a_1 = \dfrac{a_2^2}{4\cos^2\theta} \end{matrix}$$



Şekil 5.7. $(0, R) \times \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ kutusunun ikinci dereceden monik polinomların katsayı uzayına resmi

Bu dönüşümlerden sonra, katsayı uzayında aldığımız (Şekil 5.8'de soldaki bölge) bir (a_1, a_2) ikilisine karşılık gelen ikinci dereceden monik polinomun köklerinin Ω bölgesinde olduğunu söyleyebiliriz.

$$z^2 + a_2 z + a_1 = (z - re^{i\theta})(z - re^{-i\theta})$$



Şekil 5.8. Ω (5.10) kümesindeki kompleks sayıları kök kabul eden ikinci dereceden polinomların katsayı uzayındaki yeri solda verilen bölgedir

II. Durum *(5.11) polinomun kökleri gerçel olsun:*
$-R < \alpha_1 < 0$ ve $-R < \alpha_2 < 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} z^2 + a_2 z + a_1 &= (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \\ &= z^2 - (\alpha_1 + \alpha_2) z + \alpha_1 \alpha_2 \end{aligned}$$

eşitliğinden

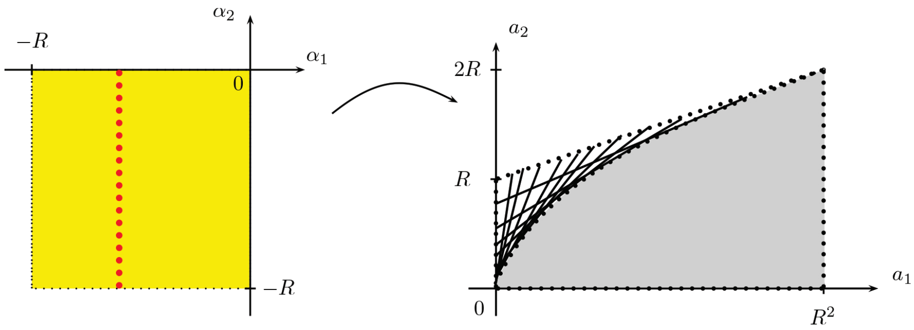
$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha_1 \alpha_2, \\ a_2 &= -(\alpha_1 + \alpha_2) \end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{array}{c} \alpha_1 = -R \\ -R < \alpha_2 < 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} a_1 = -R\alpha_2 \\ a_2 = R - \alpha_2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} a_2 = R + \dfrac{a_1}{R} \\ 0 < a_1 < R^2 \end{array}$$

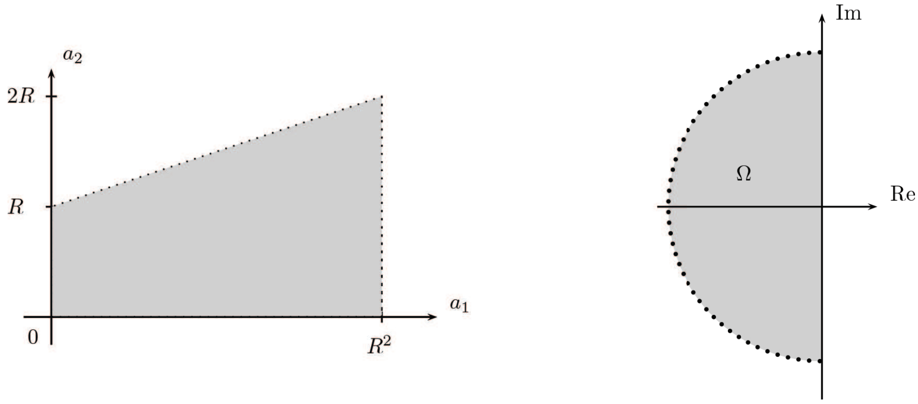
$$\begin{array}{c} \alpha_1 = 0 \\ -R < \alpha_2 < 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} a_1 = 0 \\ a_2 = -\alpha_2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} a_1 = 0 \\ 0 < a_2 < R \end{array}$$

Bir $\alpha \in (-R, 0)$ ve $-R < \alpha_2 < 0$ olacak şekildeki doğru parçasının katsayı uzayındaki görüntüsü Şekil 5.9'daki gibidir.



Şekil 5.9. $(-R, 0) \times (-R, 0)$ kutusunun ikinci dereceden monik polinomların katsayı uzayına resmi

Her iki durum bir arada ele alındığında, kökleri Ω (5.10) kümesinde olan tüm ikinci dereceden monik polinomların kümesi Şekil 5.10'daki gibi elde edilmiş olur.



Şekil 5.10. İkinci dereceden monik Ω-kararlı polinomların kümesi ve Ω kümesi

Politopun köşeleri ve bunlara karşı gelen 2. dereceden monik polinomlar:

$$\begin{array}{lcl}
V^1 = (0, 0)^T & & g_1(s) = z^2 \\
V^2 = (0, R^2)^T & & g_2(s) = z^2 + R^2 z \\
V^3 = (2R, R^2)^T & \Rightarrow & g_3(s) = z^2 + R^2 z + 2R \\
V^4 = (R, 0)^T & & g_4(s) = z^2 + R
\end{array}$$

olarak bulunur.

Böylece

$$\mathcal{P}_2 = \operatorname{conv}\{g_1(z), g_2(z), g_3(z), g_4(z)\}$$

olur. Yani, $\mathcal{P}_2$ sonlu üreteçlidir. Teorem 5.7'e göre n. dereceden Ω-kararlı monik polinomların kümesi sonlu üreteçlidir. $\square$

$n = 3$ için Ω-kararlı monik polinomların kümesinin üreteçleri

$$\begin{aligned}
g_1(s) &= (z+R)^3, \\
g_2(s) &= (z+R)^2 z, \\
g_3(s) &= (z+R)(z^2+R^2), \\
g_4(s) &= (z+R)z^2, \\
g_5(s) &= (z^2+R)z, \\
g_6(s) &= z^3
\end{aligned}$$

bulunur.

Ω-kararlı monik polinomların kümesinin üreteçlerinin sayısı n çift ise $\frac{(n+2)^2}{4}$ ve n tek ise $\frac{(n+1)(n+3)}{4}$ tanedir.

5.2.1. Hurwitz kararlılık için yansıma katsayıları

Schur durumuna benzer şekilde Hurwitz durumu için de yansıma katsayıları bulabiliriz.

R yeterince büyük pozitif bir sayı olsun. $-R < k_1 < 0, -R < k_2 < 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
a_1 &= -Rk_2 \\
a_2 &= \tfrac{1}{R}k_1k_2 - k_1 - k_3
\end{aligned}$$

için $p(z) = z^2 + a_2 z + a_1$ polinomu Ω kararlıdır.

Benzer şekilde üçüncü ve dördüncü dereceden polinomlar için $-R < k_i < 0,\ i = 1, 2, 3, 4$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
a_1 &= Rk_2k_3 \\
a_2 &= k_1k_3 - Rk_2 - \tfrac{1}{R}k_1k_2k_3 \\
a_3 &= \tfrac{1}{R}k_1k_2 - k_1 - k_3
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} a_1 &= R^2k_2k_4 \\ a_2 &= -k_2k_3k_4 + Rk_2k_3 - k_1k_2k_4 + Rk_1k_4 \\ a_3 &= -Rk_2 - Rk_4 + \tfrac{1}{R^2}k_1k_2k_3k_4 - \tfrac{1}{R}k_1k_2k_3 - \tfrac{1}{R}k_1k_3k_4 + k_1k_3 \\ a_4 &= \tfrac{1}{R}k_1k_2 + \tfrac{1}{R}k_3k_4 - k_1 - k_3 \end{aligned}$$

yansıma katsayıları elde edilir.

5.2.2. Sürekli sistemlerin kararlılaştırılması

Şimdi de $a(z,c)$ (5.7) polinomlar ailesinin Ω-kararlılığını inceleyelim. $V^1, V^2, \ldots, V^k$ vektörleri $\mathcal{P}_n$'in üreteçleri olmak üzere

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{P}_n} &= \operatorname{conv}\{V^1, V^2, \ldots, V^k\}, \\ \mathcal{P} &= \{Pc + U^0 : \ c \in \mathbb{R}^l\} \end{aligned}$$

olsun.

$\mathcal{P} \cap \tilde{\mathcal{P}_n} \neq \emptyset$ olduğu kabul edelim. Bu durumda öyle negatif olmayan $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sayıları vardır ki $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = 1$ ve $c_1, c_2, \ldots, c_l \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$x_1V^1 + x_2V^2 + \cdots + x_kV^k = c_1U^1 + c_2U^2 + \cdots + c_lU^l + U^0 \tag{5.12}$$

eşitliği sağlanır.

$$c_1 = x_{k+1} - x_{k+2},\ c_2 = x_{k+3} - x_{k+4}, \ldots, c_l = x_{k+2l-1} - x_{k+2l},$$

ile yeni $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{k+2l}$ negatif olmayan değişkenleri tanımlayalım. O zaman (5.12) denklemi

$$\begin{gathered} x_1V^1 + \cdots + x_kV^k = x_{n+2}U^1 - \cdots + x_{n+2l-1}U^l - x_{n+2l}U^l + U^0 \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_k = 1, \\ x_j \geq 0 \\ (j = 1, 2, ..., n+2l) \end{gathered}$$

halini alır. Bu ifade matris formunda yazılırsa

$$\begin{pmatrix} V^1 & V^2 & \cdots & V^k & -U^1 & U^1 & \cdots & U^l \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n+2l-1} \\ x_{n+2l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1^0 \\ U_2^0 \\ \vdots \\ U_n^0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$x_j \geq 0, \quad (j = 1, 2, ..., n + 2l)$$

olur.

$\mathcal{P} \cap \tilde{\mathcal{P}}_n = \emptyset$ veya $\mathcal{P} \cap \tilde{\mathcal{P}}_n \neq \emptyset$ olduğunu belirlemek için aşağıdaki LP problemini düşünelim:

$$x_{k+1} - x_{k+2} \to \text{min}.$$

Eğer LP probleminin çözüm kümesi boş ise, $a(z, c)$ polinomlar ailesi için kararlılaştıran c yoktur.

Bu LP probleminin amaç fonksiyonu $c_1 = x_{k+1} - x_{k+2}$ dir. Eğer LP probleminin çözüm kümesi boştan farklı ise o zaman c_1 parametresi için bir alt sınır bulabiliriz. Amaç fonksiyonu olarak

$$\begin{aligned} f(x) &= x_{k+1} - x_{k+2}, \\ f(x) &= -x_{k+1} + x_{k+2}, \\ \vdots \quad & \vdots \quad\quad \vdots \\ f(x) &= x_{k+2l-1} - x_{k+2l}, \\ f(x) &= -x_{k+2l-1} + x_{k+2l} \end{aligned}$$

fonksiyonları sırasıyla alınır ve karşılık gelen LP problemi çözülürse, $c \in \mathbb{R}^l$ belirsizlik parametresinin minimal kutusu belirlenir.

Örnek 5.5. 5. *dereceden*

$$p(z,c) = s^5 + 4.6s^4 + 80.8s^3 + (74c_1 + 30.1)s^2 + (74c_2 + 166c_1 - 0.1)s + 166c_2$$

polinomlar ailesini ele alalım. Yeterince büyük pozitif bir R sayısına karşılık gelen Ω kümesine göre 5. dereceden Ω-kararlı monik polinomların kümesi $\mathcal{P}_5$'in üreteçleri

$$\begin{aligned}
&g_1(s) = s^5 + 5Rs^4 + 10R^2s^3 + 10R^3s^2 + 5R^4s + R^5,\\
&g_2(s) = s^5 + 4Rs^4 + 6R^2s^3 + 4R^3s^2 + R^4s,\\
&g_3(s) = s^5 + 3Rs^4 + 3R^2s^3 + R^3s^2, g_4(s) = s^5 + 2Rs^4 + R^2s^3,\\
&g_5(s) = s^5 + Rs^4,\\
&g_6(s) = s^5,\\
&g_7(s) = s^5 + 3Rs^4 + 4R^2s^3 + 4R^3s^2 + 3R^4s + R^5,\\
&g_8(s) = s^5 + Rs^4 + 2R^2s^3 + 2R^3s^2 + R^4s + R^5,\\
&g_9(s) = s^5 + R^2s^3,\\
&g_{10}(s) = s^5 + 2R^2s^3 + R^4s,\\
&g_{11}(s) = s^5 + 2Rs^4 + 2R^2s^3 + 2R^3s^2 + R^4s,\\
&g_{12}(s) = s^5 + Rs^4 + R^2s^3 + R^3s^2,
\end{aligned}$$

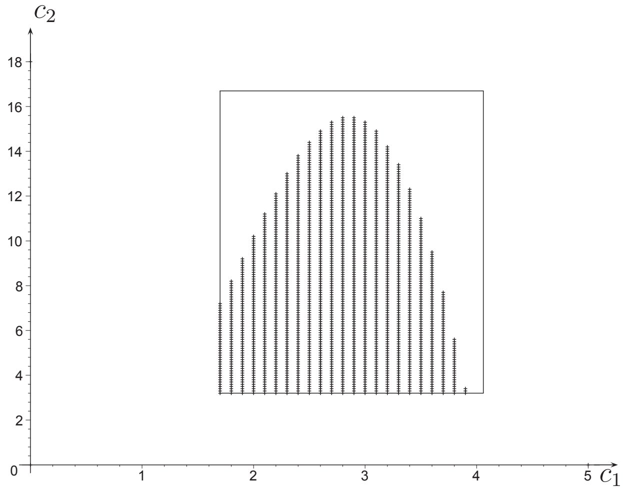
polinomları olur.

$R = 1, 2, 3, 4, 5$ *sayıları için LP probleminin çözümü yoktur.*

$R = 6$ *için* $\tilde{\mathcal{P}}_5 \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$ *olur ve LP problemlerinin çözümünden*

$$\begin{aligned}
1.7 \leq c_1 \leq 4.06,\\
3.2 \leq c_2 \leq 16.7
\end{aligned}$$

aralıkları bulunur. Bu dikdörtgen, kararlılaştıran c vektörler kümesine bir dış yaklaşımdır. Şekil 5.11'de bu dikdörtgen ve gridleme yöntemiyle belirlenmiş kararlılaştırıcı (c_1, c_2) ikilileri verilmiştir.



Şekil 5.11. Örnek 5.5 için oluşturulan LP problemlerinden elde edilen dikdörtgen ve kararlılaştırıcı (c_1, c_2) ikilileri

6. SONUÇ

Bu çalışmada, polinomlar ve matrisler ailelerinin gürbüz kararlılığı problemleri ele alınmıştır.

İki parametreli afin polinomlar ailesinin inersiyon bölgelerini belirlemede kullanılan mevcut yöntemlere değinilmiş ve bu yöntemlerin dışında, iki parametreli multilineer polinomlar ailesinin sabit inersiyon bölgeleri için bir teorem ve bu teoremin uygulamaları verilmiştir. Katsayıları polinom fonksiyon olan polinomlar ailesinin gürbüz Hurwitz kararlılığı ele alınmış, elde edilen sonuçlar kullanılarak bu problem için bir algoritma verilmiştir.

Girdileri çok değişkenli polinomlar olan matrisler ailesinin gürbüz Hurwitz ve gürbüz Schur kararlılığını veren sonuçlar elde edilmiştir. Kararlılık problemi, matrisler ailesinin boyutundan bağımsız olarak Hurwitz kararlılık için iki tane, Schur kararlılık için ise üç tane çok değişkenli polinomun pozitifliğine indirgenmiştir.

Schur kararlı monik polinomlar kümesi yansıma katsayıları denilen multilineer fonksiyonlar ile karakterize edilmektedir. Bu çalışmada, elde edilen yeni yansıma katsayıları kullanılarak verilen bir afin polinomlar ailesinde Schur kararlı bir polinomun varlığı incelenmiş ve böyle bir polinomun var olması durumunda, aileye ait kararlı bir Schur polinomunun bulunmasına yönelik algoritma verilmiştir. Hurwitz kararlı monik polinomlar için de yansıma katsayıları tanımlanmış ve Schur durumuna benzer problemin çözümü ele alınmıştır.

KAYNAKÇA

[1] Ackermann, J. (1993). Robust Control Systems with Uncertain Physical Parameters. London: Springer-Verlag.

[2] Akyar, H., Büyükköroğlu, T. and Dzhafarov, V.(2010). On stability of parametrized families of polynomials and matrices. *Abstract and Applied Analysis.*

[3] Barmish, B.R. (1994). New tools for robustness of linear systems. New York: Macmillan Publishing Company.

[4] Bernstein, D.S. (2008). Matrix mathematics: Theory, facts, and formular. NJ: Princeton University Press.

[5] Bhattacharyya, S. P., Chapellat, H. and Keel, L.H.(1995) Robust control: The parametric approach. NJ: Prentice-Hall, Upper Saddle River.

[6] Chesi, G. (2013). Exact robust stability analysis of uncertain systems with a scalar parameter via LMIs. *Automatica.* 49, 1083-1086.

[7] Dzhafarov, V. and Büyükköroğlu, T.(2008). On nonsingularity of a polytope of matrices. *Linear Algebra and its Applications.* 429, 1174-1183.

[8] Elsner, L and Monov, V. (2011). The bialternate matrix product revisited. *Linear Algebra Appl.* 434, 1058-1066.

[9] Farouki, R.T. (2012). The Bernstein polynomial basis: A centennial retrospective. *Computer Aided Geometric Design.* 29(6), 379-419.

[10] Fam, A.T. and Meditch, J.S. (1978). A Canonical Parameter Space for Linear Systems Design. *IEEE Transactions on Automatic Control.* 23(3), 454-458.

[11] Franklin, J.N. (2000). Matrix Theory. New York: Dover.

[12] Fukuda, K. (2004). Frequently asked questions in polyhedral computation. *http://www.ifor.math.ethz.ch/sta/fukuda/polyfaq/polyfaq.html.*

[13] Fuller, A.T. (1968). Conditions for a Matrix to Have Only Characteristic Roots with Negative Real Parts. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 23, 71-98.

[14] Gantmacher, F.R. (2005). Applications of the Theory of Matrices. New York: Dover.

[15] Garloff, J. (1986). Convergent bounds for the range of multivariate polynomials. *In: Proceedings of the International Symposium on Interval Mathematics*. London, UK, 1985, Springer, Berlin.

[16] Garloff, J. (1993). The Bernstein algorithm. *Interval Comput.* 2, 154-168.

[17] Gass, S.I. (2003). Linear Programming: Methods and Applications. Dover.

[18] Gutman, S. and Jury, E.I. (1981). A general theory for matrix root clustering in subregions of the complex plane. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(4), 853-863.

[19] Henrion, D., Peaucelle, D., Arzelier, D., Sebek, M. (2003). Ellipsoidal approximation of the stability domain of a polynomial. *IEEE Transactions on Automatic Control.* 48(12), 2255-2259.

[20] Henrion, D., Sebek, M. (2008). Plane Geometry and Convexity of Polynomial Stability Regions. *ISSAC.* 111-116, 2008.

[21] Horn, R.A. and Johnson, C.R. (1985). Matrix analysis. Cambridge University Press.

[22] Keel, L.H. and Bhattacharyya, S.P. (2010b). Robust stability via sign-definite decomposition. *IEEE Transactions on Automatic Control.* 55(11), 2500-2510.

[23] Khalil, H.K. (2002). Nonlinear Systems. NJ: Prentice Hall.

[24] Marden, M. (1966). Geometry of Polynomials. Rhode Island: American Mathematical Society,

[25] Mori, T., Mori, Y. and Kokame, H. (2001). Common Lyapunov function approach to matrix root clustering. *Systems and Control Letters*. 44, 73-78.

[26] Nurges, Ü. and Avanessov, S. (2005). New Stability Conditions Via Reflection Coefficients of Polynomials. *IEEE Transactions on Automatic Control.* 50(9), 1354-1360.

[27] Nurges, Ü. and Avanessov, S. (2015). Fixed-order Stabilising Controller Design by a Mixed Randomized/Deterministic Method. *International Journal of Control*, 88(2), 335-346.

[28] Petrikevich, Y.I. (2008). Randomized Methods of Stabilization of the Discrete Linear Systems. *Automation and Remote Control.* 69(11), 1911-1921.

[29] Gryazina, E.N. and Polyak, B.T. (2006). Stability regions in the parameter space: D-decomposition revisited, *Automatica*, 42, 13-26.

[30] Stéphanos, C. (1900). Sur une extension du calcul des substitutions linéaires. *Journal de mathématiques pures et appliquées.* 6 (1900), 73-128.

[31] Tesi, A., Vicino, A. and Zappa, G. (1994). Convexity Properties of Polynomials with Assigned Root Location. *IEEE Transactions on Automatic Control.* 39(3), 668-672.

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı	:	GÖKHAN ÇELEBİ
Yabancı Dil	:	İNGİLİZCE
Doğum Yeri ve Yılı	:	ANKARA - 1986
E-Posta	:	gcelebi@anadolu.edu.tr

Eğitim ve Mesleki Geçmişi:

- 2004-2008, Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Lisans
- 2008-2010, Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı, Yüksek lisans
- 2011-2016, Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Uygulamalı Matematik Bilim Dalı, Doktora
- 2010-2011, Araştırma Görevlisi, Bozok Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
- 2011-2016, Araştırma Görevlisi, Anadolu Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü

Yayınları ve Bilimsel/Sanatsal Faaliyetleri:

- Büyükköroğlu, T., Çelebi, G., Dzhafarov, V. (2015). On the Robust Stability of Polynomial Matrix Families. Electronic Journal of Linear Algebra, 30, 905-915.
- 2013, Özet Bildiri, On Inertia Problem for Two Parameter Affine Polynomial Families, 2nd International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications, Sarajevo, Bosnia and Herzegovina.
- 2014, Özet Bildiri, On the Robust Stability of Polynomial Matrix Families, International Conference on Applied Mathematics, Hong Kong.

- 2015, Özet Bildiri, Stability Regions of Continuous and Discrete Time Systems, International Conference on Advancements in Mathematical Sciences(AMS), Antalya-TURKEY.
- 2015, Özet Bildiri, Exact Calculation of Cutoff Frequency for Polynomial Families, International Conference on Advancements in Mathematical Sciences(AMS), Antalya-TURKEY.
- 2015, Özet Bildiri, Outer Approximation of the Set of Hurwitz Polynomials, International Conference on Mathematics and Computer Science(ICMCS 2015), Vienna-AUSTRIA.
- 2015, Özet Bildiri, On Stabilization of Discrete Time Systems, International Conference on Mathematics and Computer Science(ICMCS 2015), Vienna-AUSTRIA.
- 2016, Özet Bildiri, Reflection map for Hurwitz stability and some applications, 20th Conference of the International Linear Algebra Society (ILAS), Leuven-BELGIUM.