HARMONİK BLOCH UZAYLARI

Doktora Tezi

Ömer Faruk DOĞAN

Eylül 2016

HARMONİK BLOCH UZAYLARI

Ömer Faruk DOĞAN

Doktora Tezi

Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Yrd. Doç. Dr. Adem Ersin ÜREYEN

Eskişehir
Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Eylül, 2016

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Ömer Faruk DOĞAN'ın "**Harmonik Bloch Uzayları**" başlıklı tezi 22/09/2016 tarihinde, aşağıdaki juri tarafından değerlendirilerek "Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği"nin ilgili maddeleri uyarınca, **Matematik** Anabilim dalında Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

	Ünvanı-Adı Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	: Yrd. Doç. Dr. Adem Ersin ÜREYEN	......
Üye	: Prof. Dr. Hakkı Turgay KAPTANOĞLU	......
Üye	: Doç. Dr. Barış ERBAŞ	......
Üye	: Doç. Dr. Hakan CEBECİ	......
Üye	: Doç. Dr. Ali Serdar NAZLIPINAR	......

....

Enstitü Müdürü

ÖZET

HARMONİK BLOCH UZAYLARI

Ömer Faruk DOĞAN

Matematik Anabilim Dalı

Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eylül, 2016

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Adem Ersin ÜREYEN

Bu çalışmada $\mathbb{R}^n$ nin birim yuvarında, bir parametreli harmonik Bloch (b_α) ve harmonik küçük Bloch ($b_{\alpha 0}$) uzaylarının özellikleri sistematik ve ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Öncelikle harmonik Bloch ve harmonik küçük Bloch uzaylarını tüm $\alpha \in \mathbb{R}$ için tanımlamaya imkan veren teoremler ispatlanmıştır. Böylece yeterince büyük her mertebeden türevin aynı uzayı verdiği gösterilmiştir. Ayrıca bu uzayları kısmi türev, radyal türev veya D_s^t radyal türev operatörlerinden birini kullanarak tanımlamanın denk olduğu gösterilmiştir. b_α ve $b_{\alpha 0}$ uzaylarının temel özellikleri (tamlık, ayrılabilirlik, vb.) elde edilmiştir. Bu uzaylarda yer alan aşikar ve polinom olmayan harmonik fonksiyon örnekleri bulunmuştur. Böylece tüm b_α ve $b_{\alpha 0}$ uzaylarının farklı olduğu gösterilmiştir.

Bergman-Besov uzaylarının doğuran çekirdekleri kullanılarak L_α^∞ uzayından b_α uzayına izdüşüm operatörleri tanımlanmış ve bu operatörler kullanılarak integral gösterimler elde edilmiştir. Benzer şekilde $\mathcal{C}_\alpha$ ve $\mathcal{C}_{\alpha 0}$ uzaylarından $b_{\alpha 0}$ üzerine izdüşüm operatörleri tanımlanmıştır. İntegral gösterimlerinin bir sonucu olarak uygun eşleme altında her $q \in \mathbb{R}$ için b_q^1 Bergman-Besov uzayının dualinin b_α uzayı ve ön dualinin $b_{\alpha 0}$ uzayı olduğu gösterilmiştir.

Son olarak, her $\alpha \in \mathbb{R}$ için b_α ve $b_{\alpha 0}$ uzaylarında Gleason problemi çözülmüş ve bu uzaylardaki fonksiyonların atomik ayrışımları elde edilmiştir. Ayrıca $\alpha > -1$ için b_α ve $b_{\alpha 0}$ uzaylarının salınım cinsinden karakterizasyonları verilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Harmonik Bloch ve küçük Bloch uzayları, Bergman izdüşümü, Atomik ayrışım, Gleason problemi Salınım cinsinden karakterizasyon

ABSTRACT

HARMONIC BLOCH SPACES

Ömer Faruk DOĞAN

Department of Mathematics

Anadolu University, Graduate School of Science, September, 2016

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Adem Ersin ÜREYEN

We study the properties of one-parameter family of harmonic Bloch (b_α) and harmonic little Bloch ($b_{\alpha 0}$) spaces on the unit ball of $\mathbb{R}^n$ in a detailed and systematic way. Firstly the theorems which enable to define harmonic Bloch and harmonic little Bloch spaces for the whole range $\alpha \in \mathbb{R}$ are proved. Thus it is shown that sufficiently high-order derivatives give the same space. The equivalence of defining these spaces using either partial derivatives, radial derivatives or radial differential operators D_s^t is also shown. The fundamental properties (completeness, seperability, etc.) of the spaces b_α and $b_{\alpha 0}$ are obtained. Non-trivial and non-polynomial harmonic function examples are obtained and as a consequence it is shown that all b_α and $b_{\alpha 0}$ are distinct.

The projection operators from L^∞_α onto b_α are defined by using reproducing kernels of Bergman-Besov spaces. The projections provide integral representations for the functions in these spaces. Similarly, the projection operators from $\mathcal{C}_\alpha$ and $\mathcal{C}_{\alpha 0}$ onto $b_{\alpha 0}$ are defined. Using integral representations it is shown that the dual of Bergman-Besov space b^1_q (for every $q \in \mathbb{R}$) is b_α and its pre-dual is $b_{\alpha 0}$ under suitable pairings.

Finally, for all $\alpha \in \mathbb{R}$, the Gleason problems in b_α and $b_{\alpha 0}$ are solved and atomic decompositions of the functions in these spaces are obtained. Oscillatory characterizations of b_α and $b_{\alpha 0}$ for $\alpha > -1$ are also given.

Anahtar Sözcükler: Harmonic Bloch and little Bloch spaces, Bergman projections, Atomic decomposition, Gleason problem, Oscillatory characterization

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamda bilgi, deneyim ve mükemmel rehberliğiyle her konuda bana yardımcı olan ve sabırla yol gösteren değerli danışmanım Yrd. Doç. Dr. Adem Ersin ÜREYEN'e,

Doktora öğrenimim boyunca bursiyeri olduğum TÜBİTAK BİDEB'e,

Hayatım boyunca maddi ve manevi destekleriyle hep yanımda olan sevgili aileme,

Çalışmalarım sırasında manevi desteği, sevgisi ve sonsuz sabrı ile daima yanımda olan sevgili eşim Melek ÖZTÜRK DOĞAN'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Ömer Faruk DOĞAN

Eylül, 2016

22/09/2016

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilemeyen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Anadolu Üniversitesi tarafından kullanılan "bilimsel intihal tespit programı"yla tarandığını ve hiçbir şekilde "intihal içermediğini" beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm.

Ömer Faruk DOĞAN

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$X \sim Y$	:	X/Y Üstten ve Alttan Pozitif Sabitlerle Sınırlı
$X \lesssim Y$	:	X/Y Üstten Pozitif Bir Sabitle Sınırlı
$\lvert x \rvert$	:	$x \in \mathbb{R}^n$ nin Öklid Normu
∇u	:	u Fonksiyonunun Gradyanı
$\bigoplus$	:	Cebirsel Direkt Toplam
Δ	:	Laplasyen
Γ	:	Gama Fonksiyonu
$(a)_b$	:	Pochhammer Sembolü
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2_\alpha}$	:	L^2_α Üzerindeki İç Çarpım
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{b^2_\alpha}$	:	b^2_α Üzerindeki İç Çarpım
m	:	$m = (m_1, ..., m_n)$ Çoklu İndeks
$\mathbb{B}$	:	$\mathbb{R}^n$ de Açık Birim Yuvar
$\overline{\mathbb{B}}$	:	$\mathbb{R}^n$ de Birim Yuvarın Kapanışı
$B(a, r)$	:	$\mathbb{R}^n$ de a Merkezli r Yarıçaplı Açık Yuvar
$\overline{B}(a, r)$	:	$B(a, r)$ nin Kapanışı
$\lVert \cdot \rVert_{b_\alpha}$	:	b_α Üzerinde Norm
b_α	:	Harmonik Bloch Uzayı
$b_{\alpha 0}$	:	Harmonik Küçük Bloch Uzayı
ℓ^∞	:	Sınırlı Karmaşık Sayı Dizileri Uzayı
c_0	:	ℓ^∞ da Sıfıra Yakınsayan Dizilerin Oluşturduğu Altuzay
∂^m	:	Kısmı Türev Operatörü
∂_i	:	i yinci Değişkene Göre Birinci Mertebeden Kısmi Türev
D^t_s	:	Radyal Kesirli Türev Operatörü
$E_r(a)$	:	a Merkezli r Yarıçaplı Sözde Hiperbolik Yuvar
$h(\mathbb{B})$	:	$\mathbb{B}$ de Karmaşık Değerli Harmonik Fonksiyonlar Uzayı
$\mathcal{H}_k(\mathbb{R}^n)$	:	$\mathbb{R}^n$ de k yinci Dereceden Homojen Harmonik Polinomlar Uzayı
$\mathcal{H}_k(\mathbb{S})$	:	$\mathbb{S}$ de k yinci Dereceden Küresel Harmonik Polinomlar Uzayı
$\mathbb{N}$	:	Doğal Sayılar Kümesi $\{0, 1, 2, \ldots\}$
$\mathbb{S}$	:	$\mathbb{R}^n$ de Birim Küre
$\mathcal{R}$	:	Radyal Türev Operatörü

1. GİRİŞ

$n \geq 2$ için $\mathbb{R}^n$, n boyutlu Öklid uzayı olsun. $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ ve $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ için $\langle x, y\rangle$ standart iç çarpımı

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

ve x in standart normu

$$|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

olsun. $\mathbb{B} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ açık birim yuvarı ve $\mathbb{S} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ ise birim küreyi göstersin.

$u : \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu ikinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip ve her $x \in \mathbb{B}$ için $\Delta u(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$ oluyorsa u fonksiyonuna $\mathbb{B}$ de harmoniktir denir. $\mathbb{B}$ üzerinde karmaşık değerli harmonik fonksiyonların uzayını $h(\mathbb{B})$ ile gösterelim. $u \in h(\mathbb{B})$ fonksiyonu için $\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n})$, u nun gradyanı olsun. Standart harmonik Bloch uzayı b

$$\sup_{x\in\mathbb{B}} (1 - |x|^2)|\nabla u(x)| < \infty$$

şartını sağlayan tüm $u \in h(\mathbb{B})$ fonksiyonlarının oluşturduğu uzaydır. Bu uzay b_α, $\alpha \in \mathbb{R}$ bir parametreli ağırlıklı harmonik Bloch uzayları ailesinin bir üyesidir. Bu çalışmanın amacı ağırlıklı harmonik Bloch uzayları ailesinin özelliklerini ayrıntılı, sistematik ve bir bütün halinde araştırmaktır. Bu uzayların ailesinin holomorfik fonksiyonlardaki karşılığı ve ilişkili olduğu küçük Bloch ve Lipschitz uzayları [2] ve [3] te çalışılmıştır.

Ağırlıklı harmonik Bloch uzaylarını tanımlamak için daha fazla tanıma ihtiyaç vardır. $\mathbb{B}$ üzerinde hemen hemen sınırlı fonksiyonların Lebesgue sınıfı L^∞ olsun. Daha genel olarak $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$L^\infty_\alpha = \{\varphi : (1 - |x|^2)^\alpha \varphi(x) \in L^\infty\}$$

olsun. Açıktır ki $L^\infty_0 = L^\infty$ dur. $\varphi \in L^\infty_\alpha$ için

$$\|\varphi\|_{L^\infty_\alpha} = \|(1 - |x|^2)^\alpha \varphi(x)\|_{L^\infty}$$

L^∞_α üzerinde bir normdur.

Ayrıca L^∞_α nın aşağıdaki altuzaylarını tanımlayalım.

$$\mathcal{C}_\alpha = \{\varphi \in L^\infty_\alpha : (1-|x|^2)^\alpha \varphi(x) \ \overline{\mathbb{B}} \text{ üzerinde sürekli}\},$$
$$\mathcal{C}_{\alpha 0} = \{\varphi \in \mathcal{C}_\alpha : (1-|x|^2)^\alpha \varphi(x) = 0, \ x \in \mathbb{S}\}.$$

Tanım 1.1. *$\alpha > 0$ için b_α ağırlıklı harmonik Bloch uzayı $h(\mathbb{B}) \cap L^\infty_\alpha$ dır. $b_{\alpha 0}$ ağırlıklı harmonik küçük Bloch uzayı ise $h(\mathbb{B}) \cap \mathcal{C}_{\alpha 0}$ dır.*

Açık olarak $\alpha > 0$ için $b_{\alpha 0} = \{u \in b_\alpha : \lim_{|x|\to 1^-} (1-|x|^2)^\alpha u(x) = 0\}$ dır. b_α ve $b_{\alpha 0}$ uzayları üzerindeki normlar L^∞_α uzayından indirgenen normlardır. Harmonik fonksiyonların maksimum özelliğinden dolayı (yani harmonik fonksiyonlar "maksimum" değerini "sınırda" aldığı için) $\alpha \leq 0$ aralığı için $h(\mathbb{B}) \cap L^\infty_\alpha$ sadece $u \equiv 0$ fonksiyonunu içerir. Dolayısıyla $\alpha \leq 0$ için yukarıdaki tanım geçerli değildir.

Bu çalışmada öncelikli olarak yukarıdaki tanım $\alpha \leq 0$ aralığına genişletilecektir. Bunun için $u \in h(\mathbb{B})$ fonksiyonunun türevlerinin büyüme hızı dikkate alınmalıdır. Bu amaçla üç farklı türev ile çalışılmıştır. Standart kısmi türev $m = (m_1, \ldots, m_n)$ bir çoklu indeks ve $|m| = m_1 + \cdots + m_n$ olmak üzere

$$\partial^m u = \frac{\partial^{|m|} u}{\partial x_1^{m_1} \cdots \partial x_n^{m_n}}$$

olsun.

Her $u \in h(\mathbb{B})$ fonksiyonunun u_k fonksiyonu k yinci dereceden homojen harmonik polinom olmak üzere $u = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$ homojen açılımı vardır ([1]). Bir $u \in h(\mathbb{B})$ fonksiyonunun $\mathcal{R}u$ radyal türevi

$$\mathcal{R}u(x) = x \cdot \nabla u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k u_k(x) \tag{1.1}$$

fonksiyonudur. Daha üst mertebeler, yani $N = 2, 3, \ldots$ için

$$\mathcal{R}^N u(x) = \mathcal{R}\mathcal{R}^{N-1} u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k^N u_k(x) \tag{1.2}$$

olarak tanımlanır.

Kısmi ve radyal türevlere ek olarak ilk olarak [4] ve [5] te tanıtılan $D^t_s : h(\mathbb{B}) \to h(\mathbb{B})$, $(s, t \in \mathbb{R})$ radyal kesirli türev operatörlerini kullanacağız. Bu operatörler harmonik Bergman-Besov uzaylarının doğuran çekirdekleri ile uyumlu olarak tanımlanır ve harmonik fonksiyon uzaylarını çalışırken kısmi ve radyal türevlerden daha kullanışlıdır. Bölüm 2.3. te D_s^t operatörünün özellikleri incelenecektir. Şimdilik, t nin türevin mertebesini belirlediği ve s nin daha küçük bir rol oynadığını not etmek yeterlidir.

Aşağıdaki teorem, tüm $\alpha \in \mathbb{R}$ için b_α ağırlıklı harmonik Bloch uzayını tanımlayabilmemizi sağlayacaktır. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ ile doğal sayılar kümesini (0 dahil olacak şekilde) gösterelim.

Teorem 1.2. *$\alpha \in \mathbb{R}$ ve $u \in h(\mathbb{B})$ olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:*

(a) $\alpha + N > 0$ olacak şekilde herhangi bir $N \in \mathbb{N}$ alındığında her $|m| = N$ çoklu indeksi için $(1 - |x|^2)^N \partial^m u \in L_\alpha^\infty$ dır.

(b) $\alpha + N > 0$ olacak şekilde öyle bir $N \in \mathbb{N}$ vardır ki her $|m| = N$ çoklu indeksi için $(1 - |x|^2)^N \partial^m u \in L_\alpha^\infty$ dır.

(c) $\alpha + N > 0$ olacak şekilde her $N \in \mathbb{N}$ için $(1 - |x|^2)^N \mathcal{R}^N u \in L_\alpha^\infty$ dır.

(d) $\alpha + N > 0$ olacak şekilde öyle bir $N \in \mathbb{N}$ vardır ki $(1 - |x|^2)^N \mathcal{R}^N u \in L_\alpha^\infty$ dır.

(e) $\alpha + t > 0$ olacak şekilde her $s, t \in \mathbb{R}$ için $(1 - |x|^2)^t D_s^t u \in L_\alpha^\infty$ dır.

(f) $\alpha + t > 0$ olacak şekilde öyle bir $s, t \in \mathbb{R}$ vardır ki $(1 - |x|^2)^t D_s^t u \in L_\alpha^\infty$ dır.

Üstelik, $\alpha + N > 0$ ve $\alpha + t > 0$ ise

$$
\begin{aligned}
\|(1 - |x|^2)^t D_s^t u\|_{L_\alpha^\infty} &\sim |u(0)| + \|(1 - |x|^2)^N \mathcal{R}^N u\|_{L_\alpha^\infty} \\
&\sim \sum_{|m| \le N-1} |(\partial^m u)(0)| + \sum_{|m|=N} \|(1 - |x|^2)^N \partial^m u\|_{L_\alpha^\infty}
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

dır.

Benzer bir teorem L_α^∞ yerine $\mathcal{C}_{\alpha 0}$ yazıldığında da geçerlidir.

Teorem 1.3. *$\alpha \in \mathbb{R}$ ve $u \in h(\mathbb{B})$ olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:*

(a) $\alpha + N > 0$ olacak şekilde herhangi bir $N \in \mathbb{N}$ alındığında her $|m| = N$ çoklu indeksi için $(1 - |x|^2)^N \partial^m u \in \mathcal{C}_{\alpha 0}$ dır.

(b) $\alpha + N > 0$ *olacak şekilde öyle bir* $N \in \mathbb{N}$ *vardır ki her* $|m| = N$ *çoklu indeksi için* $(1 - |x|^2)^N \partial^m u \in \mathcal{C}_{\alpha 0}$ *dır.*

(c) $\alpha + N > 0$ *olacak şekilde her* $N \in \mathbb{N}$ *için* $(1 - |x|^2)^N \mathcal{R}^N u \in \mathcal{C}_{\alpha 0}$ *dır.*

(d) $\alpha + N > 0$ *olacak şekilde öyle bir* $N \in \mathbb{N}$ *vardır ki* $(1 - |x|^2)^N \mathcal{R}^N u \in \mathcal{C}_{\alpha 0}$ *dır.*

(e) $\alpha + t > 0$ *olacak şekilde her* $s, t \in \mathbb{R}$ *için* $(1 - |x|^2)^t D_s^t u \in \mathcal{C}_{\alpha 0}$ *dır.*

(f) $\alpha + t > 0$ *olacak şekilde öyle bir* $s, t \in \mathbb{R}$ *vardır ki* $(1 - |x|^2)^t D_s^t u \in \mathcal{C}_{\alpha 0}$ *dır.*

Artık $\alpha \in \mathbb{R}$ için ağırlıklı harmonik Bloch b_α ve küçük Bloch $b_{\alpha 0}$ uzaylarını tanımlayabiliriz.

Tanım 1.4. $\alpha \in \mathbb{R}$ *olsun. Teorem 1.2 deki denk şartlardan herhangi birini sağlayan* $u \in h(\mathbb{B})$ *fonksiyonlarının uzayına ağırlıklı harmonik Bloch uzayı* b_α *ve Teorem 1.3 teki denk şartlardan herhangi birini sağlayan* $u \in h(\mathbb{B})$ *fonksiyonlarının uzayına ağırlıklı harmonik küçük Bloch uzayı* $b_{\alpha 0}$ *denir.*

Eğer $\alpha > 0$ ise yukarıdaki teoremlerin (b) kısımlarında $N = 0$ alınması Tanım 1.4 ve Tanım 1.1 in tutarlı olduğunu gösterir. Ayrıca, yukarıdaki teoremlerin (a) ve (b) kısımlarında $N = 1$ alınırsa $b_0 = b$, standart harmonik Bloch uzayı ve b_{00} standart harmonik küçük Bloch uzayı: $b_{00} = \{u \in h(\mathbb{B}) : \lim_{|x| \to 1^-} (1 - |x|^2) |\nabla u(x)| = 0\}$ dır.

$\alpha \geq 0$ için Teorem 1.2 ve Teorem 1.3 ün (a)-(d) kısımlarının denkliği daha önce gösterilmiştir. $\alpha = 0$ için (a)-(d) kısımlarının denkliği ve farklı türde bir türev ile karakterizasyon [6], Teorem 1.4 te verilmiştir. $\alpha > 0$ iken $N = 0$ ve $N = 1$ seçimleri için (a) ve (b) kısımlarının denkliği ise [7], Teorem 1.1 de verilmiştir.

Şimdi Tanım 1.4 ten kolaylıkla çıkarılabilen birkaç sonuçtan bahsedelim. Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $b_{\alpha 0} \subset b_\alpha$ dır. Ayrıca, eğer $u \in h(\overline{\mathbb{B}})$ ise $u \in b_{\alpha 0}$ dır. Özel olarak $b_{\alpha 0}$ ve b_α uzayları harmonik polinomları içerir ve bu nedenle aşikar olmayan uzaylardır. Diğer yandan açıktır ki $\alpha < \beta$ için

$$b_{\alpha 0} \subset b_\alpha \subset b_{\beta 0} \subset b_\beta \tag{1.4}$$

dır. Esasen bu kapsamalar kesindir (Sonuç 5.16). Dolayısıyla tüm bu uzaylar farklıdır.

$\alpha > 0$ için b_α üzerinde L^∞_α dan indirgenen standart bir norm vardır. Ancak $\alpha \leq 0$ için standart bir norm yoktur. $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\alpha + N > 0$ olacak şekilde herhangi $N \in \mathbb{N}$ veya $\alpha + t > 0$ olacak şekilde herhangi $s, t \in \mathbb{R}$ alınırsa (1.3) teki her bir terim b_α üzerinde bir normdur. Tüm bu normlar denk olduğundan, herhangi birini seçmek temelde bir fark yaratmaz. N veya s, t ye bağımlılığı belirtilmeden bu normlardan herhangi biri $\| \cdot \|_{b_\alpha}$ ile gösterilecektir.

$s, t \in \mathbb{R}$ ve $u \in h(\mathbb{B})$ için I^t_s operatörü

$$I^t_s u(x) := (1 - |x|^2)^t D^t_s u(x)$$

olsun. $\alpha \in \mathbb{R}$ ve t, $\alpha + t > 0$ olacak şekilde alınsın. Açıktır ki Teorem 1.2 den $u \in b_\alpha$ olması için gerek ve yeter koşul $I^t_s u \in L^\infty_\alpha$ olmasıdır, ayrıca $\|I^t_s u\|_{L^\infty_\alpha}$, b_α üzerinde bir normdur.

Bu çalışmada bir diğer amaç Bergman-Besov izdüşümlerini kullanarak b_α uzayını L^∞_α uzayının bölüm uzayı olarak yazmaktır. Bu izdüşümler bize b_α uzayının elemanları için integral gösterimler verecektir. Benzer şekilde $\mathcal{C}_\alpha$ veya $\mathcal{C}_{\alpha 0}$ uzayından $b_{\alpha 0}$ uzayına izdüşümler bulunacaktır. Bunun için daha fazla tanıma ihtiyaç vardır.

ν, $\mathbb{B}$ üzerinde $\nu(\mathbb{B}) = 1$ olacak şekilde normalleştirilmiş hacim ölçüsü olsun. $q \in \mathbb{R}$ olmak üzere ağırlıklı hacim ölçüsü ν_q

$$d\nu_q(x) = \frac{1}{V_q}(1 - |x|^2)^q d\nu(x)$$

olarak tanımlansın. Bu ölçüler sadece $q > -1$ için sonludur ve bu durumda V_q sabiti $\nu_q(\mathbb{B}) = 1$ olacak şekilde seçilir. $q \leq -1$ için $V_q = 1$ alınır.

$1 \leq p < \infty$ için ν_q ölçüsüne göre Lebesgue sınıfları L^p_q olsun. $1 \leq p < \infty$ ve $q > -1$ için b^p_q ağırlıklı harmonik Bergman uzayları $h(\mathbb{B}) \cap L^p_q$ olarak tanımlanır. $p = 2$ için b^2_q uzayı $R_q(x, y)$ çekirdeği ile doğuran çekirdekli bir Hilbert uzayıdır. [4,5] de b^p_q uzayları ve $R_q(x, y)$ doğuran çekirdekleri tüm $q \in \mathbb{R}$ aralığına genişletilmiştir. Bu konu Bölüm 2.2. de ayrıntılı olarak ifade edilecektir.

Tanım 1.5. *$s \in \mathbb{R}$ olsun. Uygun bir φ için Bergman-Besov izdüşümü Q_s,*

$$Q_s\varphi(x) = \int_{\mathbb{B}} R_s(x, y)\varphi(y)\, d\nu_s(y)$$

olarak tanımlanır.

Teorem 1.6. *$\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. $Q_s : L^\infty_\alpha \to b_\alpha$ operatörünün sınırlı olması için gerek ve yeter şart*

$$s > \alpha - 1 \tag{1.5}$$

olmasıdır.

(1.5) şartını sağlayan bir s verilsin. Eğer t,

$$\alpha + t > 0 \tag{1.6}$$

şartını sağlıyor ise $u \in b_\alpha$ için,

$$Q_s I_s^t u = \frac{V_{s+t}}{V_s} u \tag{1.7}$$

olur. Bu nedenle Q_s örtendir. Ayrıca, $Q_s : \mathcal{C}_\alpha \to b_{\alpha 0}$ veya $Q_s : \mathcal{C}_{\alpha 0} \to b_{\alpha 0}$ sınırlı ve örten olması için gerek ve yeter şart (1.5) koşulunun sağlanmasıdır.

(1.7) açık olarak yazıldığında aşağıdaki formda bir integral gösterimdir: $u \in b_\alpha$ için, eğer (1.5) ve (1.6) koşulları sağlanıyorsa

$$u(x) = \frac{V_s}{V_{s+t}} \int_{\mathbb{B}} R_s(x,y) I_s^t u(y)\, d\nu_s(y) = \int_{\mathbb{B}} R_s(x,y) D_s^t u(y)\, d\nu_{s+t}(y) \tag{1.8}$$

dir. Ağırlıklı harmonik Bloch uzaylarının özellikleri belirlenirken bu integral gösterim ve Teorem 1.6 dan yararlanılacak ve 6. ve 7. bölümlerde bu gösterim sıkça kullanılacaktır.

$\alpha = 0$ durumu için Teorem 1.6 daha önce [6], [8] ve [9] te kanıtlanmış ama bu çalışmalarda D_s^t operatöründen farklı türev operatörleri kullanılmıştır. $\alpha > -1$ için geçerli olan farklı bir integral gösterim [7] de verilmiştir. Bu çalışmada ispatlanan Teorem 1.6 ile tüm $\alpha \in \mathbb{R}$ aralığı kapsanmış, Q_s izdüşüm operatörünün sınırlılığı için gerekli ve yeterli şartlar verilmiş ve doğuran çekirdek içeren yalın bir formül elde edilmiştir.

Teorem 1.6 nın tüm $-\infty < \alpha < \infty$ aralığını kapsayan holomorfik karşılığı için [2] ve [3] e bakılabilir.

Bölüm 2 de, çalışma süresince kullanılacak notasyon ve standart formüllere yer verilmiştir. Harmonik Bloch uzaylarının ilişkili olduğu Bergman-Besov uzaylarının temel özellikleri özetlenmiştir. Harmonik Bloch Uzaylarını tanımlarken ve sonrasında kullanılacak olan; Bergman-Besov doğuran çekirdeklerinin, D_s^t radyal kesirli türev operatörlerinin tanımları ve doğuran çekirdeklerin büyüme kestirimleri üzerinde durulmuştur.

Bölüm 3 te, harmonik Bergman izdüşümü ile ilişkili bir integral operatör sınıfı tanımlanmıştır. Harmonik Bergman-Besov çekirdeklerini içeren bu integral operatörlerin L_α^∞ ve $\mathcal{C}_{\alpha 0}$ üzerinde hangi şartlar altında sınırlı oldukları belirlenmiştir.

Bölüm 4 te, Teorem 1.2 ve 1.3 ispatlanmıştır. Böylece tüm $\alpha \in \mathbb{R}$ için b_α ve $b_{\alpha 0}$ uzayları için verilen tanımın geçerliliği gösterilmiştir.

Bölüm 5 te harmonik Bloch ve küçük Bloch uzaylarının temel özellikleri elde edilmiştir. Ayrıca $R_q(x,\zeta),\ \zeta \in \mathbb{S}$ fonksiyonlarının hangi koşullar altında b_α ve $b_{\alpha 0}$ uzaylarına ait olacağı belirlenmiş ve tüm b_α ve $b_{\alpha 0}$ uzaylarının farklı olduğu gösterilmiştir.

Bölüm 6 da, Teorem 1.6 ispatlanmıştır. Bu teoremin bir sonucu olarak uygun eşlemeler altında her $q \in \mathbb{R}$ için b_q^1 Bergman-Besov uzayının dualinin b_α uzayı ve ön dualinin $b_{\alpha 0}$ olduğu gösterilmiştir.

Bölüm 7 de, her $\alpha \in \mathbb{R}$ için Gleason problemi çözülmüş ve atomik ayrışım elde edilmiştir. Ayrıca $\alpha > -1$ için b_α uzayının salınım cinsinden bir karakterizasyonu verilmiştir.

2. NOTASYON VE ÖN BİLGİLER

X ve Y gibi iki pozitif ifade için X/Y üstten ve alttan pozitif sabitlerle sınırlı ise $X \sim Y$ ile gösterilmiştir. Bu sabitler formüllerdeki fonksiyonlardan veya parametrelerden bağımsızdır. Sabitlerin kesin değerleri önemli olmadığında genel bir C ile gösterilmiştir. Ayrıca $X \lesssim Y$ yazıldığında $X \leq CY$ anlamına gelecektir.

$(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ negatif olmayan tam sayılar olmak üzere $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$ sıralı n-lisine bir çoklu indeks ve $|m| = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ toplamına m nin mutlak değeri denir. $m = (m_1, \ldots, m_n)$ bir çoklu indeks ve $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n}$ polinomu kısaca x^m şeklinde gösterilir. Ayrıca yeterince türevlenebilir bir u fonksiyonunun kısmi türevleri için

$$\partial^m u = \frac{\partial^{|m|} u}{\partial x_1^{m_1} \cdots \partial x_n^{m_n}}$$

gösterimi kullanılır. Ancak özel olarak sadece birinci mertebeden kısmi türev alınıyorsa $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ yazılacaktır.

Gama fonksiyonu Γ, $x > 0$ için

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

integrali ile ve $a, b > 0$ için Pochhammer sembolü $(a)_b$

$$(a)_b = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)}$$

olarak tanımlanır.

$x \to \infty$ iken Γ fonksiyonunun davranışını anlamak için en kullanışlı formül

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\Gamma(x+1)}{(x/e)^x \sqrt{2\pi x}} = 1$$

dir. Bu formüle Stirling formülü denir, ispatı [10], Bölüm 8.22 de bulunabilir. Stirling formülünden $a, b > 0$ ve $c \to \infty$ iken

$$\frac{(a)_c}{(b)_c} \sim c^{a-b} \tag{2.1}$$

olduğu görülür.

Beta fonksiyonunun $a, b > 0$ değerleri için iki farklı formda tanımı ve değeri aşağıdaki şekildedir:

$$\mathcal{B}(a,b) = 2\int_0^1 r^{2a-1}(1-r^2)^{b-1}\, dr = \int_0^1 r^{a-1}(1-r)^{b-1}\, dr = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

a merkezli ve r yarıçaplı yuvar $B(a,r)$ ile gösterilir. Yani $B(a,r)=\{x\in\mathbb{R}^n : |x-a|<r\}$ kümesidir. Bu yuvarın kapanışı $\overline{B}(a,r)=\{x\in\mathbb{R}^n : |x-a|\leq r\}$ kapalı yuvarı ve sınırı $S(a,r)=\{x\in\mathbb{R}^n : |x-a|=r\}$ küresidir. Özel olarak $a=0$ ve $r=1$ ise birim yuvar $B(0,1)=\mathbb{B}$ ve birim küre $S(0,1)=\mathbb{S}$ ile gösterilir.

$\mathbb{B}$ üzerindeki hacim (Lebesgue) ölçüsü dV ile gösterilir. Birim yuvarın hacminin $V(\mathbb{B})=\dfrac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}$ olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Birim yuvarın hacmi 1 olacak şekilde bir normalizasyon yaparak $d\nu=dV/V(\mathbb{B})$ ölçüsü tanımlayalım. Açıktır ki $\nu(\mathbb{B})=1$ dir ve $d\nu$ ye birim küre üzerinde normalleştirilmiş hacim ölçüsü denir. Benzer şekilde $\mathbb{S}$ üzerindeki yüzey alanı ölçüsü ds ile gösterilir ve birim kürenin alanı $s(\mathbb{S})=nV(\mathbb{B})=\dfrac{n\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}$ dir. $d\sigma=ds/s(\mathbb{S})$ şeklinde tanımlanan $d\sigma$ ölçüsüne birim küre üzerinde normalleştirilmiş yüzey alanı ölçüsü denir; açıktır ki $\sigma(\mathbb{S})=1$ dir.

$\mathbb{B}$ üzerinde bir integral aşağıdaki şekilde iki katlı integrale dönüştürebilir:

Teorem 2.0.1. ***(Kutupsal Koordinat Formülü)*** *f, $\mathbb{B}$ üzerinde integrallenebilir bir fonksiyon olsun. $\mathbb{B}$ üzerindeki integral için kutupsal koordinat formülü*

$$\int_{\mathbb{B}} f(x)\ d\nu(x)=\int_0^1 r^{n-1}\int_{\mathbb{S}} f(r\zeta)\ d\sigma(\zeta)\ dr$$

olarak verilir.

Bu teoremin ispatı [11], Teorem 2.49 da bulunabilir.

$x\in\overline{\mathbb{B}}$, $y\in\overline{\mathbb{B}}$ için

$$[x,y]=\sqrt{1-2x\cdot y+|x|^2|y|^2}$$

olsun. Kolaylıkla görülebilir ki sıfırdan farklı x,y için

$$[x,y]=\left||y|x-\frac{y}{|y|}\right|=\left||x|y-\frac{x}{|x|}\right|$$

olur. $y\in\mathbb{S}$ için $[x,y]=|x-y|$ dir. Ayrıca $x,y\in\mathbb{B}$ için

$$0<1-|x||y|<[x,y]<1+|x||y|<2$$

dir.

Bir H fonksiyon uzayı üzerindeki integral iç çarpımı $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$ ve ilgili norm $\|\cdot\|_H$ ile gösterilsin.

Tanım 2.0.2. *H, $\mathbb{B}$ üzerindeki fonksiyonların bir Hilbert uzayı olsun. Bir $K(x,y)$ fonksiyonuna, her bir $x \in \mathbb{B}$ için $K(x,\cdot) \in H$ ve her $x \in \mathbb{B}$ ve her $u \in H$ için*

$$u(x) = \langle u(\cdot), K(x,\cdot)\rangle_H$$

koşullarını sağlıyor ise H uzayı için bir doğuran çekirdek denir.

Bir H Hilbert uzayının bir tek K doğuran çekirdeği vardır.

2.1. Harmonik Fonksiyonlar ve Zonal Harmonikler

Bu kısımda harmonik fonksiyonlar ve zonal harmoniklerin çalışmamızda kullanılacak özelliklerine değinilmiştir. Özellikle küresel harmonikler ve zonal harmonikler, harmonik Bergman-Besov uzaylarının doğuran çekirdekleri oluştururlarken önemli rol oynamaktadır. Ayrıntılı bilgi ve ispatlar için [1] önerilir. Ω, $\mathbb{R}^n$ nin boştan farklı açık bir alt kümesi olsun.

Tanım 2.1.1. *Bir Ω bölgesinde tanımlı karmaşık değerli u fonksiyonu, ikinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip ve Laplace denklemi adı verilen $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \equiv 0$ denklemini sağlıyorsa u fonksiyonuna Ω da harmonik fonksiyon denir. Burada $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + ... + \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ ye Laplas operatörü denir.*

$h(\mathbb{B})$, $\mathbb{B}$ üzerinde karmaşık değerli harmonik fonksiyonlar uzayıdır.

Tanım 2.1.2. *r pozitif tamsayı ve u, Ω da harmonik bir fonksiyon olsun. u nun r oranında genleşmesi u_r ile gösterilir ve $(1/r)\Omega = \{(1/r)w : w \in \Omega\}$ daki x ler için $u_r(x) = u(rx)$ olarak tanımlanır.*

Önerme 2.1.3. *Harmonik fonksiyonların genleşmeleri de harmoniktir.*

Teorem 2.1.4. ***(Ortalama değer özelliği)***

u, $\overline{B}(a,r)$ de harmonik bir fonksiyon olsun. u fonksiyonun a noktasındaki değeri $B(a,r)$ nin sınırı olan $S(a,r)$ üzerindeki değerlerinin ortalamasına eşittir. Yani,

$$u(a) = \frac{1}{s(S(a,r))} \int_{S(a,r)} u(\zeta)\ ds(\zeta)$$

olur.

Normalleştirilmiş yüzey alanı ölçüsü kullanılarak bu formül

$$u(a) = \int_{\mathbb{S}} u(a + r\zeta)\; d\sigma(\zeta)$$

şeklinde de yazılabilir.

Kutupsal koordinat formülü yardımıyla ortalama değer özelliği aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

Teorem 2.1.5. ***(Ortalama değer özelliği, Hacim versiyonu)***

u, $B(a,r)$ de harmonik bir fonksiyon olsun. u fonksiyonunun a noktasındaki değeri $u(a)$, $B(a,r)$ deki değerlerinin ortalamasıdır. Yani,

$$u(a) = \frac{1}{V(B(a,r))} \int_{B(a,r)} u\; dV$$

olur.

Tanım 2.1.6. $P : \mathbb{B} \times \mathbb{S} \to \mathbb{R}$,

$$P(x,\zeta) = \frac{1 - |x|^2}{|x - \zeta|^n}$$

fonksiyonuna birim yuvar için Poisson çekirdeği denir.

Teorem 2.1.7. ***(Poisson integral formülü)***

u, $\overline{\mathbb{B}}$ de harmonik bir fonksiyon olsun. Her $x \in \mathbb{B}$ için

$$u(x) = \int_{\mathbb{S}} u(\zeta) P(x,\zeta)\, d\sigma(\zeta)$$

eşitliği sağlanır.

Tanım 2.1.8. *Paydayı sıfır yapmayan her $x, y \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ için*

$$P(x,y) = \frac{1 - |x|^2|y|^2}{(1 - 2x \cdot y + |x|^2|y|^2)^{n/2}}$$

olarak tanımlı $P(x,y)$ fonksiyonuna genişletilmiş Poisson çekirdeği denir.

$x \in \mathbb{B}$ ve $y \in \mathbb{S}$ olması durumunda yukarıdaki tanım Poisson çekirdeği ile aynı olur.

Teorem 2.1.9. *(u_k), Ω da harmonik fonksiyonların bir dizisi olsun. Üstelik bu dizi Ω nın her kompakt altkümesinde bir u fonksiyonuna düzgün yakınsasın. Bu durumda u fonksiyonu Ω da harmoniktir. Dahası her m çoklu indeksi için $\partial^m u_k$ dizisi $\partial^m u$ fonksiyonuna Ω nın her kompakt alt kümesinde düzgün yakınsar.*

Teorem 2.1.10. ***(Cauchy Kestirimi)***

m bir çoklu indeks , $a \in \mathbb{R}^n$ ve $r > 0$ olsun. Öyle bir $C_m > 0$ sabiti vardır ki, $B(a, r)$ de M ile sınırlı ve harmonik her u fonksiyonu için,

$$|\partial^m u(a)| \leq \frac{C_m M}{r^{|m|}}$$

olur.

Tanım 2.1.11. *$x \in \mathbb{R}^n$ ve k negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere,*

$$p_k(x) = \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha x^\alpha$$

olarak tanımlı p_k polinomuna k yinci dereceden homojen polinom denir.

Denk bir ifade ile, eğer bir p_k polinomu her $t \in \mathbb{R}$ ve her $x \in \mathbb{R}^n$ için $p_k(tx) = t^k p(x)$ eşitliğini gerçekliyorsa homojendir. k yinci dereceden homojen polinomların uzayı $P_k(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir.

$\mathbb{R}^n$ de homojen polinomlar $\mathbb{S}$ üzerindeki değerleri tarafından belirlenir.

Sonuç 2.1.12. *p_k ve q_k, k yinci dereceden homojen polinomlar olsunlar. Eğer $\mathbb{S}$ üzerinde $p_k \equiv q_k$ ise $\mathbb{R}^n$'de $p_k \equiv q_k$ olur.*

Tanım 2.1.13. *$\mathbb{R}^n$ de k yinci dereceden homojen harmonik polinomların uzayı $\mathcal{H}_k(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilmiştir. $p_k \in \mathcal{H}_k(\mathbb{R}^n)$ nin $\mathbb{S}$ ye kısıtlanmışına k yinci dereceden küresel harmonik polinom denir. k yinci dereceden küresel harmonik polinomlar uzayı $\mathcal{H}_k(\mathbb{S})$ ile gösterilmiştir.*

$\mathcal{H}_k(\mathbb{R}^n)$ sonlu boyutlu bir vektör uzayıdır. $\dim \mathcal{H}_k(\mathbb{R}^n)$ uzayın boyutu olmak üzere $k = 0$ için $\dim \mathcal{H}_0(\mathbb{R}^n) = 1$, $k = 1$ için $\dim \mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n) = n$ dir. $k \geq 2$ için $\mathcal{H}_k$ nın boyutu aşağıdaki önermede verilmiştir.

Önerme 2.1.14. *$\mathcal{H}_k(\mathbb{R}^n)$ sonlu boyutlu uzayları için $k \geq 2$ için*

$$\dim \mathcal{H}_k(\mathbb{R}^n) = \binom{n+k-1}{n-1} - \binom{n+k-3}{n-1}$$

dir. Ayrıca Stirling formülünden $k \to \infty$ iken

$$\dim \mathcal{H}_k(\mathbb{R}^n) \sim k^{n-2}$$

olur.

$L^2(\mathbb{S}) = \{\, f : \int_{\mathbb{S}} |f(\zeta)|^2 \, d\sigma(\zeta) \,\}$ uzayı

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{S}} f \, \overline{g} \, d\sigma$$

iç çarpımıyla bir Hilbert uzayıdır. Sonlu boyutlu olduğu için $\mathcal{H}_k(\mathbb{S})$, $L^2(\mathbb{S})$ nin kapalı bir altuzayıdır. Ayrıca $k \neq l$ için $\mathcal{H}_k(\mathbb{S})$ ve $\mathcal{H}_l(\mathbb{S})$ ortogonaldir ve $L^2(\mathbb{S})$, $\mathcal{H}_k(\mathbb{S})$ uzaylarının direkt toplamı olarak yazılabilir.

Teorem 2.1.15. $L^2(\mathbb{S}) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} H_k(\mathbb{S})$
dir.

Tanım 2.1.16. *Sabit bir $\eta \in \mathbb{S}$ noktası için $\Lambda_\eta : \mathcal{H}_k(\mathbb{S}) \to \mathbb{C}$ fonksiyonu $\Lambda_\eta(p_k) = p_k(\eta)$ olarak tanımlansın. Bu fonksiyona η noktasında noktasal değerleme fonksiyoneli denir.*

$\mathcal{H}_k(\mathbb{S})$ sonlu boyutlu olduğu için noktasal değerleme fonksiyoneli sınırlıdır. Dolayısıyla $\mathcal{H}_k(\mathbb{S})$ uzayı doğuran çekirdekli bir Hilbert uzayıdır.

Tanım 2.1.17. *Her bir $p_k \in \mathcal{H}_k(\mathbb{S})$ ve $\zeta \in \mathbb{S}$ için*

$$p_k(\zeta) = \int_{\mathbb{S}} p_k(\eta) Z_k(\eta, \zeta) \, d\sigma(\eta)$$

olacak şekilde gerçel değerli bir tek $Z_k(\cdot, \zeta) \in \mathcal{H}_k(\mathbb{S})$ küresel harmonik fonksiyonu vardır. Burada $Z_k(\cdot, \zeta)$ doğuran çekirdeğine ζ kutuplu k yinci dereceden zonal harmonik denir.

Zonal harmonikler her bir değişkene göre homojen yapılarak $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ kümesine genişletilebilir. $x, y \in \mathbb{R}^n$ için $x = |x|\eta$, $y = |y|\zeta$ olsun.

$$Z_k(x, y) = |x|^k |y|^k Z_k(\eta, \zeta), \quad k = 1, 2, \ldots$$

şeklinde tanımlanan Z_k fonksiyonu her değişkene göre k yinci dereceden homojen harmonik polinomdur. $k = 0$ için $Z_0(x, y) \equiv 1$ olarak tanımlanır.

Aşağıdaki yardımcı teoremde zonal harmoniklerin ileride kullanılacak özellikleri verilmiştir.

Yardımcı Teorem 2.1.18. *$k \geq 0$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır:*

(a) $Z_k(x, y)$ gerçel değerli ve simetriktir.

(b) $x, y \in \mathbb{R}^n$ *ve* $k = 1, 2, \ldots$ *için* $Z_k(x, 0) = Z_k(0, y) = 0$ *dır.*

(c) $k \geq 1$ *ve* $\zeta \in \mathbb{S}$ *için* $\max_{\eta \in \mathbb{S}} |Z_k(\eta, \zeta)| = Z_k(\zeta, \zeta)$ *ve* $Z_k(\zeta, \zeta) \sim k^{n-2}$ *dir. Bu nedenle* $|Z_k(x, y)| \lesssim |x|^k |y|^k k^{n-2}$ *dir.*

(d) Eğer $f_k \in \mathcal{H}_k(\mathbb{R}^n)$ *ise* $f_k(x) = \int_{\mathbb{S}} f_k(\eta) Z_k(x, \eta)\, d\sigma(\eta)$ *dır.*

(e) Eğer $f_k \in \mathcal{H}_k(\mathbb{R}^n)$ *ve* $l \neq k$ *ise* $\int_{\mathbb{S}} f_k(\eta) Z_l(x, \eta)\, d\sigma(\eta) = 0$ *dır.*

Poisson çekirdeğinin zonal harmonikler cinsinden bir seri açılımı vardır.

Teorem 2.1.19. *Her* $x \in \mathbb{B}$ *ve* $\zeta \in \mathbb{S}$ *için*

$$P(x, \zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k(x, \zeta)$$

dır. $K \subset \mathbb{B}$ *kompakt olmak üzere yukarıdaki seri* $K \times \mathbb{S}$ *kümesinde mutlak ve düzgün yakınsaktır.*

Benzer şekilde genişletilmiş Poisson çekirdeği de zonal harmoniklerin bir serisi olarak yazılabilir. $x = |x|\eta$, $y = |y|\zeta$ ve $|x||y| < 1$ ise

$$P(x, y) = P(|y|x, \zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k(|y|x, \frac{y}{|y|}) = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k(x, y)$$

dir.

Harmonik fonksiyonlar homojen harmonik polinomların bir sonsuz toplamı olarak yazılabilir.

Sonuç 2.1.20. *Eğer* $u \in h(\mathbb{B})$ *ise öyle* $u_k \in \mathcal{H}_k(\mathbb{R}^n)$ *ler vardır ki her* $x \in \mathbb{B}$ *için u fonksiyonu*

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$$

homojen açılımına sahiptir. Yukarıdaki seri $\mathbb{B}$ *nin kompakt altkümelerinde mutlak ve düzgün yakınsaktır.*

2.2. Harmonik Bergman-Besov Uzayları ve Doğuran Çekirdekler

Bu çalışma süresince p sayısı daima $1 \leq p < \infty$ aralığında alınmıştır.

Tanım 2.2.1. $\mathbb{B}$ *üzerinde*

$$\|u\|_{b^p} = \left(\int_{\mathbb{B}} |u|^p \, d\nu \right)^{1/p} < \infty$$

şartını sağlayan tüm $f \in h(\mathbb{B})$ fonksiyonlarının uzayına harmonik Bergman uzayı denir ve b^p veya $b^p(\mathbb{B})$ ile gösterilir.

ν ya göre Lebesgue sınıflarının kümesi

$$L^p(\mathbb{B}) = \{\varphi : \mathbb{B} \to \mathbb{C} : \left(\int_{\mathbb{B}} |\varphi|^p \, d\nu\right)^{1/p} < \infty\}$$

olsun. L^p uzayı

$$\|\varphi\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{B}} |\varphi|^p \, d\nu\right)^{1/p}$$

normuyla bir Banach uzaydır. Açıktır ki $b^p(\mathbb{B})$ uzayı $h(\mathbb{B}) \cap L^p$ olarak ifade edilebilir. Üzerindeki norm L^p den indirgenen normdur. Harmonik Bergman uzayları [1], Bölüm 8 de ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Sabit bir $x \in \mathbb{B}$ için b^p üzerinde $\Lambda_x(u) = u(x)$ noktasal değerleme fonksiyoneli sınırlıdır.

Önerme 2.2.2. *$x \in \mathbb{B}$ ve $u \in b^p$ için*

$$|u(x)| \leq \frac{C}{(1 - |x|^2)^{n/p}} \|u\|_{b^p}$$

olacak şekilde bir C sabiti vardır.

Önerme (2.2.2) den b^2 uzayı L^2 uzayının kapalı bir altuzayıdır ve bu nedenle bir Hilbert uzayıdır. Ayrıca Önerme (2.2.2) den noktasal değerleme fonksiyoneli sabit bir $x \in \mathbb{B}$ için sınırlıdır. Böylece Riesz temsil teoremi gereği bir tek $R(x, \cdot) \in b^2$ fonksiyonu vardır ki her $x \in \mathbb{B}$ ve her $u \in b^2$ için

$$u(x) = \langle \, u, R(x, \cdot) \, \rangle_{b^2} = \int_{\mathbb{B}} u(y) \, \overline{R(x, y)} \, d\nu(y) \tag{2.2}$$

eşitliği sağlanır. $R(x, \cdot)$ fonksiyonuna x noktasındaki doğuran çekirdek denir.

Doğuran çekirdek $R(x, y)$ için açık bir formül bilinmektedir [1]. Fakat karmaşık olan bu formül yerine $R(x, y)$ nin zonal harmonikler cinsinden seri açılımı daha kullanışlıdır.

Teorem 2.2.3. *$x, y \in \mathbb{B}$ olmak üzere,*

$$R(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} (n + 2k) Z_k(x, y)$$

eşitliği sağlanır. Sağdaki seri her $K \subset \mathbb{B}$ kompakt altkümesi için $K \times \mathbb{B}$ de mutlak ve düzgün yakınsaktır.

Yakınsaklık sayesinde $Z_k(x,y)$ nin bir çok özelliği $R(x,y)$ ye taşınır. Öncelikle $R(x,y)$ doğuran çekirdeği gerçel değerlidir. Dolayısıyla (2.2) eşitliğinde R üzerindeki eşlenik işareti silinebilir. Ayrıca $R(x,y)$ fonksiyonu x ve y değişkenlerine göre simetrik ve her bir değişkene göre harmoniktir.

Ağırlıklı Harmonik Bergman Uzayları

$q > -1$ için daha önce belirtildiği gibi ağırlıklı Lebesgue ölçüsü $d\nu_q$

$$d\nu_q = \frac{1}{V_q}(1-|x|^2)^q \, d\nu(x)$$

şeklinde tanımlanır. Buradaki V_q normalizasyon sabiti $\nu_q(\mathbb{B}) = 1$ olacak şekilde seçilir. Bu sabitin değeri aşağıdaki teoremle belirlenmiştir.

Yardımcı Teorem 2.2.4. $q > -1$ *için*

$$V_q = \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+q+1)}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(q+1)} = \frac{(1)_{\frac{n}{2}}}{(1+q)_{\frac{n}{2}}}$$

dir.

Kanıt. $\nu_q(\mathbb{B}) = \dfrac{1}{V_q}\displaystyle\int_{\mathbb{B}}(1-|x|^2)^q \, d\nu(x) = 1$ olacağından

$$V_q = \int_{\mathbb{B}}(1-|x|^2)^q \, d\nu(x)$$

olmalıdır. Kutupsal koordinat formülünden

$$\int_{\mathbb{B}}(1-|x|^2)^q \, d\nu(x) = n\int_0^1 r^{n-1}(1-r^2)^q \int_{\mathbb{S}} d\sigma(\zeta) \; dr$$

olur. Beta integrali ve $\sigma(\mathbb{S}) = 1$ eşitliği kullanılırsa

$$\int_{\mathbb{B}}(1-|x|^2)^q \, d\nu(x) = \frac{n}{2}\int_0^1 r^{\frac{n}{2}-1}(1-r)^q \, dr = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(q+1)}{\Gamma(\frac{n}{2}+q+1)}$$

elde edilir. Böylece

$$V_q = \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+q+1)}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(q+1)} = \frac{(1)_{\frac{n}{2}}}{(1+q)_{\frac{n}{2}}}$$

bulunur. ■

Asimtotik olarak yeterince büyük n için

$$V_q \sim \frac{1}{n^q}$$

olur.

Tanım 2.2.5. *$q > -1$ olsun.*

$$\|u\|_{b^p_q} = \left(\int_{\mathbb{B}} |u|^p \, d\nu_q\right)^{1/p} = \left(\frac{1}{V_q}\int_{\mathbb{B}} |u(x)|^p (1-|x|^2)^q \, d\nu(x)\right)^{1/p} < \infty$$

şartını sağlayan tüm $u \in h(\mathbb{B})$ fonksiyonlarının uzayına ağırlıklı harmonik Bergman uzayı denir ve b^p_q ile gösterilir.

$q \in \mathbb{R}$ için ν_q ya göre Lebesgue sınıflarının kümesi

$$L^p_q(\mathbb{B}) = \left\{ \varphi : \mathbb{B} \to \mathbb{C} : \left(\int_{\mathbb{B}} |\varphi|^p \, d\nu_q\right)^{1/p} < \infty \right\}$$

olsun. L^p_q uzayı

$$\|\varphi\|_{L^p_q} = \left(\int_{\mathbb{B}} |\varphi|^p \, d\nu_q\right)^{1/p}$$

normuyla bir Banach uzayıdır. Tanımdan kolaylıkla görülebilir ki $q_1 < q_2$ ise $L^p_{q_1} \subset L^p_{q_2}$ dir.

Açıktır ki $q > -1$ için b^p_q uzayı $h(\mathbb{B}) \cap L^p_q$ olarak ifade edilebilir. Üzerindeki norm L^p_q dan indirgenen normdur. Dolayısıyla bir ağırlıklı harmonik Bergman uzayı aynı parametrelerle bir Lebesgue sınıfına izometrik olarak gömülür.

Tanım 2.2.5 in $q > -1$ kısıtı altında verilmesi aşağıdaki teorem ile açıklanabilir.

Yardımcı Teorem 2.2.6. *$q \leq -1$ ve $u \in h(\mathbb{B})$ olsun. Eğer $u \not\equiv 0$ ise*

$$\int_{\mathbb{B}} |u(x)|^p (1-|x|^2)^q \, d\nu(x) = \infty$$

olur.

Kanıt. Kutupsal koordinatlarda integral alınırsa

$$\int_{\mathbb{B}} |u(x)|^p (1-|x|^2)^q \, d\nu(x) = n \int_0^1 r^{n-1}(1-r^2)^q \int_{\mathbb{S}} |u(r\zeta)|^p \, d\sigma(\zeta) dr$$

yazılabilir. $M_u(r) = \int_{\mathbb{S}} |u(r\zeta)|^p \, d\sigma(\zeta)$ olsun. $|u|$ altharmonik olduğundan M_u fonksiyonu r nin bir artan fonksiyonudur [1]. Eğer $u \not\equiv 0$ ise $M_u(r_0) > 0$ olacak şekilde bir $0 \leq r_0 < 1$ bulunabilir. Buna göre

$$\int_{\mathbb{B}} |u(x)|^p (1-|x|^2)^q \, d\nu(x) \geq n \int_{r_0}^1 r^{n-1}(1-r^2)^q M_u(r) \, dr$$

olur. $r_0 < r < 1$ iken $M_u(r) \geq M_u(r_0)$ olacağından

$$\int_{\mathbb{B}} |u(x)|^p (1-|x|^2)^q \, d\nu(x) \geq n M_u(r_0) \int_{r_0}^1 r^{n-1}(1-r^2)^q \, dr$$

olur. Sağdaki integral $q \le -1$ için sonsuzdur. Dolayısıyla $u \not\equiv 0$ iken

$$\int_{\mathbb{B}} |u(x)|^p (1-|x|^2)^q \, d\nu(x)$$

integrali sonsuzdur. ■

Dolayısıyla ağırlıklı Bergman uzayları b^p_q sadece $q > -1$ durumunda tanımlıdır.

Harmonik Bergman uzaylarında olduğu gibi ağırlıklı harmonik Bergman uzayları üzerinde de noktasal değerleme fonksiyoneli $\Lambda : b^p_q \to \mathbb{C}$ sınırlıdır.

Teorem 2.2.7. *$x \in \mathbb{B}$ ve $u \in b^p_q$ olsun. O halde*

$$|u(x)| \le \frac{C}{(1-|x|^2)^{(n+q)/p}} \|u\|_{b^p_q}$$

olacak şekilde bir C sabiti vardır.

Kanıt. $r = (1-|x|)/2$ olsun. Teorem 2.1.5 gereği

$$u(x) = \frac{1}{V(\mathbb{B})r^n} \int_{\mathbb{B}(x,r)} u(y) \, dV(y)$$

dir. Jensen eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} |u(x)|^p &\le \frac{1}{V(\mathbb{B})r^n} \int_{\mathbb{B}(x,r)} |u(y)|^p \, dV(y) \\ &= \frac{C}{r^n} \int_{\mathbb{B}(x,r)} |u(y)|^p \frac{(1-|y|^2)^q}{(1-|y|^2)^q} \, dV(y) \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer yandan $(1-|y|)^2 = (1-|y|)(1+|y|)$ olduğundan $(1-|y|) \le (1-|y|)^2 \le 2(1-|y|)$ dir. Ayrıca $y \in \mathbb{B}(x,r)$ için $r \le (1-|y|) \le 3r$ dir. Bu iki eşitsizlikden $y \in \mathbb{B}(x,r)$ için $r \le (1-|y|)^2 \le 6r$ elde edilir. Bu ise

$$\begin{aligned} |u(x)|^p &\le \frac{C}{r^{n+q}} \int_{\mathbb{B}(x,r)} |u(y)|^p ((1-|y|)^2)^q \, dV(y) \\ &\le \frac{C}{(1-|x|^2)^{n+q}} \int_{\mathbb{B}} |u(y)|^p ((1-|y|)^2)^q \, dV(y) \end{aligned}$$

olacağını gösterir. Her iki tarafın $1/p$ kuvveti alınırsa sonuç elde edilir. ■

Ağırlıklı harmonik Bergman uzayları L^p_q uzayının kapalı altuzayı olup Banach uzayıdır. Ayrıca b^2_q uzayı

$$\langle u, v \rangle_{b^2_q} = \int_{\mathbb{B}} u(y)\overline{v(y)} \, d\nu_q(y)$$

iç çarpımı ile bir Hilbert uzayıdır.

b^2_q uzayı doğuran çekirdekli bir Hilbert uzayıdır.

Tanım 2.2.8. *Her bir $x \in \mathbb{B}$ için noktasal değerleme sınırlı olduğundan*

$$u(x) = \int_{\mathbb{B}} u(y)\overline{R_q(x,y)}\, d\nu_q(y)$$

olacak şekilde bir tek $R_q(x,.) \in b_q^2$ fonksiyonu vardır. Bu fonksiyona b_q^2 uzayının doğuran çekirdeği denir.

Önerme 2.2.9. *$R_q(x,y)$ doğuran çekirdeği aşağıdaki özelliklere sahiptir :*

(i) *$R_q(x,y)$ gerçel değerlidir.*

(ii) *$\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$, b_q^2 uzayının ortonormal bir tabanı olsun. Bu durumda her $x, y \in \mathbb{B}$ için*

$$R_q(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \overline{u_m(x)} u_m(y)$$

eşitliği geçerlidir.

(iii) *Her $x, y \in \mathbb{B}$ için $R_q(x,y) = R_q(y,x)$ dir.*

(iv) *Her $x \in \Omega$ için $\|R_q(x,\cdot)\|_{b_q^2}^2 = R_q(x,x)$ dir.*

Kanıt. *(i)* $x_0 \in \mathbb{B}$ ve $u(x) = \operatorname{Im} R_q(x_0, x)$ olsun. O halde

$$u(x_0) = \int_{\mathbb{B}} u(y)\overline{R_q(x_0,y)}\, d\nu_q(y)$$

olur. u gerçel değerli olduğundan eşitliğin her iki tarafının sanal kısmı alınırsa

$$0 = -\int_{\mathbb{B}} \left(\operatorname{Im} R_q(x_0,y)\right)^2 d\nu_q(y)$$

elde edilir. Bu da $\operatorname{Im} R_q(x_0,y) \equiv 0$ demektir. x_0 keyfi seçildiğinden her $x, y \in \mathbb{B}$ için $R_q(x,y)$ gerçel değerlidir.

(ii) b_q^2 , ayrılabilir bir Hilbert uzayı olduğundan sayılabilir bir ortonormal tabana sahiptir. $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$, b_q^2 uzayının ortonormal bir tabanı ise

$$\begin{aligned} R_q(x,\cdot) &= \sum_{m=1}^{\infty} \langle R_q(x,\cdot), u_m(\cdot) \rangle_{b_q^2} u_m(\cdot) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \overline{u_m(x)} u_m(\cdot) \end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir. Sağdaki seri b_q^2 üzerindeki norma göre $R_q(x,\cdot)$ fonksiyonuna yakınsar. Her $y \in \mathbb{B}$ için noktasal değerleme Λ_y fonksiyoneli b_q^2 üzerinde sürekli olduğundan,

$$\begin{aligned}\Lambda_y(R_q(x,\cdot)) &= \sum_{m=1}^{\infty} \overline{u_m(x)}\Lambda_y(u_m) \\ R_q(x,y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \overline{u_m(x)}u_m(y)\end{aligned}$$

elde edilir.

(iii) Bir önceki sonuçtan $\overline{R_q(x,y)} = R_q(y,x)$ olduğu açıktır. *(i)* şıkkından R_q gerçel değerlidir. O halde $R_q(x,y) = R_q(y,x)$ elde edilir.

(iv) Bir $x \in \mathbb{B}$ noktası alınsın.

$$\|R_q(x,\cdot)\|_{b^2}^2 = \langle R_q(x,\cdot), R_q(x,\cdot)\rangle_{b_q^2} = R_q(x,x)$$

elde edilir. ■

$R_q(x,y)$ doğuran çekirdeğinin zonal harmonikler cinsinden bir seri açılımı vardır. Şimdi bu teoremi ifade edelim. İspat kaynak [12] de bulunabilir.

Teorem 2.2.10. *$q > -1$ olsun. $x, y \in \mathbb{B}$ için*

$$R_q(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+n/2+q)_k}{(n/2)_k} Z_k(x,y)$$

eşitliği sağlanır. Sağdaki seri her $K \in \mathbb{B}$ kompakt altkümesi için $K \times \mathbb{B}$ üzerinde mutlak ve düzgün yakınsaktır.

Sonuç 2.2.11. *Sabit bir $x \in \mathbb{B}$ için $R_q(x,\cdot)$ doğuran çekirdeği $\mathbb{B}$ de sınırlıdır. Üstelik, $R_q(x,\cdot)$, $B(0, \frac{1}{|x|})$ yuvarında harmoniktir.*

Bergman çekirdeklerinin doğuran özelliği (2.2), b_q^1 uzayına dolayısıyla b_q^p uzayına genişletilebilir.

Önerme 2.2.12. *$q > -1$ olsun. Her $x \in \mathbb{B}$ ve her $u \in b_q^1$ için*

$$u(x) = \int_{\mathbb{B}} R_q(x,y)u(y)\, d\nu_q(y) \tag{2.3}$$

sağlanır.

Yukarıdaki önermenin ispatı için [8], Önerme 2.11 e bakılabilir.

$R_q(x,y)$ için aşağıdaki kestirimler geçerlidir. İspat için [12], Önerme 4 e bakılabilir.

Teorem 2.2.13. *$q > -1$ olsun. Her $x, y \in \mathbb{B}$ için aşağıdaki ifadeler doğrudur.*

(i) $|R_q(x,y)| \leq \dfrac{C}{(1-|x||y|)^{n+q}}$

(ii) $R_q(x,x) \sim \dfrac{1}{(1-|x|)^{n+q}}$

(iii) $\|R_q(x,\cdot)\|^2_{b^2_q} \sim \dfrac{1}{(1-|x|)^{n+q}}$

Ağırlıklı harmonik Bergman uzayları b^p_q, u fonksiyonunun büyüme hızı göz önüne alındığında sadece $q > -1$ için tanımlanabilir (Yardımcı teorem 2.2.6). Fakat u fonksiyonunun *türevlerinin* büyüme hızı dikkate alınırsa tanım tüm $q \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki şekilde genişletilebilir.

Tanım 2.2.14. *$q \in \mathbb{R}$ ve $1 \leq p < \infty$ olsun. Negatif olmayan bir N tamsayısı*

$$q + pN > -1 \tag{2.4}$$

şartını sağlayacak şekilde alınsın. Harmonik Bergman-Besov uzayı b^p_q aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$b^p_q = \{u \in h(\mathbb{B}) \,:\, \textit{her } |m| = N \textit{ çoklu indeksi için} (1-|x|^2)^N \partial^m u \in L^p_q\}$$

Daha açık olarak $u \in b^p_q$ olması için gerek ve yeter şart $u \in h(\mathbb{B})$ ve $q + pN > -1$ eşitsizliğini sağlayan bir $N \in \mathbb{N}$ alındığında her $|m| = N$ çoklu indeksi için

$$\frac{1}{V_q}\int_{\mathbb{B}} |\partial^m u(x)|^p (1-|x|^2)^{q+pN}\, d\nu(x) < \infty$$

olmasıdır.

Bu tanım (2.4) şartı sağlandığı sürece N seçiminden bağımsızdır [5]. Bu durum b^p_q üzerinde L^p_q uzayından indirgenen denk normlar verir. Böylece $u \in b^p_q$ için

$$\|u\|_{b^p_q} = \sum_{|m|\leq N-1} |(\partial^m u)(0)| + \sum_{|m|=N} \|(1-|x|^2)^N \partial^m u\|_{L^q_q}$$

b^p_q üzerinde denk normlardır.

$q > -1$ olduğunda $N = 0$ seçilirse $b^p_q = h(\mathbb{B}) \cap L^p_q$ ağırlıklı harmonik Bergman uzayıdır. Dolayısıyla Tanım 2.2.14 , $q > -1$ için tanımlı ağırlıklı harmonik Bergman uzaylarını $q \in \mathbb{R}$ ye genişletmektedir. Harmonik Bergman-Besov uzayları ile ilgili ayrıntılı bilgi için [4] ve [5] e bakılabilir.

Sabit bir p için tüm b^p_q $(q \in \mathbb{R})$ uzayları izomorfiktir. Böylelikle harmonik Bergman uzaylarının $(q > -1)$ özellikleri harmonik Bergman-Besov uzaylarına $(q \in \mathbb{R})$ taşınabilir. Bu özelliklerden bazıları aşağıda verilecektir. Ayrıntılı bilgi [5] Bölüm 4 te bulunabilir.

Teorem 2.2.15. *Harmonik Bergman-Besov uzayları tamdır ve böylelikle Banach uzaylarıdır.*

Teorem 2.2.16. *Harmonik polinomlar ve $h(\overline{\mathbb{B}})$, b^p_q uzayında yoğundur. Dolayısıyla harmonik Bergman-Besov uzayları ayrılabilirdir.*

$q > -1$ durumunda b^2_q uzayı için doğuran çekirdek Teorem 2.2.10 da verilmişti. Şimdi her $q \in \mathbb{R}$ için b^2_q uzayının doğuran çekirdekli bir Hilbert uzayı olduğunu ifade eden bir teorem verilecektir ([4], Teorem 3.7) ve ([5], Teorem 1.3).

Teorem 2.2.17. *$q \in \mathbb{R}$ ve $k = 0, 1, 2, ...$ için*

$$\gamma_k(q) := \begin{cases} \dfrac{(1+n/2+q)_k}{(n/2)_k}, & \text{if } q > -(1+n/2); \\ \dfrac{(k!)^2}{(1-(n/2+q))_k (n/2)_k}, & \text{if } q \leq -(1+n/2) \end{cases} \tag{2.5}$$

ve $x, y \in \mathbb{B}$ için

$$R_q(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k(q) Z_k(x,y) \tag{2.6}$$

olsun. b^2_q uzayı $R_q(x,y)$ doğuran çekirdekli bir Hilbert uzayıdır.

$q \leq -(1+n/2)$ için R_q ilk olarak [4] ile tanıtılmıştır. R_q çekirdeğinin yukarıdaki seçimi için holomorfik Bergman-Besov uzaylarının çalışıldığı [13] ve [14] kaynakları model alınmıştır.

$q > -1$ için b^2_q üzerinde $\langle u, v \rangle = \int_{\mathbb{B}} u\overline{v}\, d\nu_q$ doğal iç çarpımı vardır. R_q bu iç çarpıma göre bir doğuran çekirdektir. Ancak $q \leq -1$ için standart bir iç çarpım yoktur. Farklı doğuran çekirdekler veren bir çok iç çarpım seçeneği vardır. Yukarıdaki R_q çekirdeklerini veren uygun bir iç çarpım [5], Teorem 5.2 ile verilmiştir .

Şimdi daha sonra kullanılacak bir kaç özelliği listeleyelim: Pochhammer sembolünün tanımından her $k = 0, 1, 2, \ldots$ ve $q \in \mathbb{R}$ için $\gamma_k(q) > 0$ dır.

Her $q \in \mathbb{R}$ için $\gamma_0(q) = 1$ olur. Buradan Yardımcı Teorem 2.1.18 (b) gereği, her $x, y \in \mathbb{B}$ ve $q \in \mathbb{R}$ için

$$R_q(x, 0) = R_q(0, y) = 1 \tag{2.7}$$

bulunur.

Ayrıca Z_k zonal harmonikleri simetrik olduklarından her $q \in \mathbb{R}$ için R_q simetriktir, yani $R_q(x, y) = R_q(y, x)$ dir.

$\gamma_k(q)$ için (2.5) ile verilen her iki durum kontrol edilirse (2.1) gereği

$$\gamma_k(q) \sim k^{1+q} \quad (k \to \infty) \tag{2.8}$$

elde edilir.

Sabit bir $x \in \mathbb{B}$ noktası için $R_q(x, \cdot\,)$ çekirdeği $\overline{\mathbb{B}}$ üzerinde harmoniktir. $K \subset \mathbb{B}$ kompakt bir küme ve m bir çoklu indeks ise, her $x \in K$, $y \in \overline{\mathbb{B}}$ için

$$|\partial^m R_q(x, y)| \lesssim 1 \tag{2.9}$$

kestirimi geçerlidir.

2.3. D_s^t Türev Operatörleri

Bu kısımda radyal türev operatörü $D_s^t : h(\mathbb{B}) \to h(\mathbb{B})$ tanım ve özellikleri ile ifade edilecektir. Doğuran çekirdekler R_q ile uyumlu olan bu operatörler harmonik fonksiyon uzaylarını çalışmak için kısmi ve radyal türevlerden daha kullanışlıdır. Bu operatörler ilk olarak [4, 5] ile tanıtılmıştır.

Tanım 2.3.1. *$s, t \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer $u \in h(\mathbb{B})$ fonksiyonunun homojen açılımı $u = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$ ise $D_s^t : h(\mathbb{B}) \to h(\mathbb{B})$ radyal türev operatörü*

$$D_s^t u := \sum_{k=0}^{\infty} d_k(s, t) u_k := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma_k(s+t)}{\gamma_k(s)} u_k \tag{2.10}$$

olarak tanımlanır.

Öncelikle (2.8) gereği $k \to \infty$ için

$$d_k(s, t) = \frac{\gamma_k(s+t)}{\gamma_k(s)} \sim k^t \tag{2.11}$$

bulunur. Dolayısıyla kabaca D_s^t operatörü k yinci dereceden homojen terimi k^t ile çarpar denilebilir.

D_s^t operatörünün bu formu tam olarak

$$D_s^t R_s(x,y) = R_{s+t}(x,y) \tag{2.12}$$

ilişkisini sağlayacak şekilde oluşturulmuştur. Burada türev operatörü x ve y değişkenlerinin herhangi birine uygulanır.

D_s^t operatörünün bazı özellikleri aşağıdaki yardımcı teoremde ifade edilecektir.

Yardımcı Teorem 2.3.2. *$s, s_1, s_2, t, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ ve I birim dönüşüm olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır:*

(a) $D_s^0 = I$,

(b) $D_{s_1}^{t_1} D_{s_2}^{t_2} = D_{s_2}^{t_2} D_{s_1}^{t_1}$ *(D_s^t değişmelidir),*

(c) $D_{s+t}^{t_1} D_s^t = D_s^{t_1+t}$,

(d) $D_{s+t}^{-t} D_s^t = D_s^t D_{s+t}^{-t} = I$ *(D_{s+t}^{-t}, D_s^t nin sağ ve sol tersidir),*

(e) $D_s^t \mathcal{R}^N = \mathcal{R}^N D_s^t$ *($N \in \mathbb{N}$).*

Kanıt. $u \in h(\mathbb{B})$ fonsiyonunun homojen açılımı $u = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$ olsun.

(a) Her k, s için $d_k(s,0) = \dfrac{\gamma_k(s)}{\gamma_k(s)} = 1$ dir. O halde

$$D_s^0 u = \sum_{k=0}^{\infty} u_k = u \tag{2.13}$$

olacaktır.

(b) Her $s_1, s_2, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ için

$$D_{s_1}^{t_1} D_{s_2}^{t_2} u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma_k(s_1+t_1)\gamma_k(s_2+t_2)}{\gamma_k(s_1)\gamma_k(s_2)} u_k$$

$$D_{s_2}^{t_2} D_{s_1}^{t_1} u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma_k(s_2+t_2)\gamma_k(s_1+t_1)}{\gamma_k(s_2)\gamma_k(s_1)} u_k$$

elde edilir. Dolayısıyla D_s^t değişmelidir.

(c) Her $s, t, t_1 \in \mathbb{R}$ için

$$D_{s+t}^{t_1} D_s^t u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma_k(s+t+t_1)\gamma_k(s+t)}{\gamma_k(s+t)\gamma_k(s)} u_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma_k(s+t+t_1)}{\gamma_k(s)} u_k = D_s^{t+t_1} u$$

bulunur.

(d) Her $s, t, \in \mathbb{R}$ için

$$D_{s+t}^{-t} D_s^t u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma_k(s+t-t)\gamma_k(s+t)}{\gamma_k(s+t)\gamma_k(s)} u_k = u$$

$$D_s^t D_{s+t}^{-t} u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma_k(s+t)\gamma_k(s+t-t)}{\gamma_k(s)\gamma_k(s+t)} u_k = u$$

olur. Dolayısıyla D_{s+t}^{-t}, D_s^t nin sağ ve sol tersidir.

(e) Radyal türevin 1.2 özelliğinden

$$D_s^t \mathcal{R}^N u = D_s^t \sum_{k=0}^{\infty} k^N u_k = \sum_{k=0}^{\infty} k^N d_k(s+t) u_k = \mathcal{R}^N D_s^t u$$

bulunur.

■

Bazı durumlarda D_s^t bir integral operatörü olarak yazılabilir. Öncelikle D_s^t operatörünün bazı integrallerin içine atılabileceğini göstererek başlayalım.

Yardımcı Teorem 2.3.3. *$c \in \mathbb{R}$ ve $\varphi \in L_c^1$ olsun. Her $s, t \in \mathbb{R}$ için*

$$D_s^t \int_{\mathbb{B}} R_c(x,y)\varphi(y)\, d\nu_c(y) = \int_{\mathbb{B}} D_s^t R_c(x,y)\varphi(y)\, d\nu_c(y).$$

Kanıt. $K \subset \mathbb{B}$ kompakt olsun. $x \in K$ iken (2.6) seri açılımı $y \in \mathbb{B}$ için düzgün yakınsak olduğundan

$$\int_{\mathbb{B}} R_c(x,y)\varphi(y)\, d\nu_c(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k(c) \int_{\mathbb{B}} Z_k(x,y)\varphi(y)\, d\nu_c(y) =: \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k(c) p_k(x)$$

yazılabilir. $Z_k(\cdot, y)$ zonal harmonikleri k yinci dereceden homojen harmonik polinom olduğundan $p_k \in \mathcal{H}_k(\mathbb{R}^n)$ dir. Dolayısıyla eşitliğin sağındaki seri bir homojen açılımdır. Bu nedenle (2.10) gereği

$$\begin{aligned} D_s^t \int_{\mathbb{B}} R_c(x,y)\varphi(y)\, d\nu_c(y) &= \sum_{k=0}^{\infty} d_k(s,t)\gamma_k(c) \int_{\mathbb{B}} Z_k(x,y)\varphi(y)\, d\nu_c(y) \\ &= \int_{\mathbb{B}} D_s^t R_c(x,y)\varphi(y)\, d\nu_c(y) \end{aligned}$$

bulunur. Son eşitlik Yardımcı Teorem 2.1.18 (c), (2.8) ve (2.11) den $\sum_{k=0}^{\infty} d_k(s,t)$ $\gamma_k(c) Z_k(x,y)$ serisinin $x \in K$ için $y \in \mathbb{B}$ de düzgün yakınsak olmasından elde edilir. ■

Eğer $c = s$ alınırsa (2.12) özelliğinden aşağıdaki sonuca ulaşılır.

Sonuç 2.3.4. *$s \in \mathbb{R}$ ve $\varphi \in L^1_s$ olsun. Her $t \in \mathbb{R}$ için*

$$D^t_s \int_{\mathbb{B}} R_s(x,y)\varphi(y)\, d\nu_s(y) = \int_{\mathbb{B}} R_{s+t}(x,y)\varphi(y)\, d\nu_s(y)$$

eşitliği sağlanır.

Sonuç 2.3.5. *$s > -1$ ve $u \in L^1_s \cap h(\mathbb{B})$ olsun. Her $t \in \mathbb{R}$ için*

$$D^t_s u(x) = \int_{\mathbb{B}} R_{s+t}(x,y) u(y)\, d\nu_s(y) \tag{2.14}$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt. Önerme 2.2.12 den dolayı

$$u(x) = \int_{\mathbb{B}} R_s(x,y) u(y)\, d\nu_s(y)$$

yazılabilir. Eşitliğin her iki tarafına D^t_s operatörü uygulanırsa önceki sonuçtan istenilen elde edilir. ■

D^t_s operatörünün (2.14) ile verilen integral operatör olarak ifade edilmesi ilk olarak [8] de verilmiştir.

2.4. Doğuran Çekirdeklerin Kestirimleri

Bu kısımda harmonik Bergman-Besov doğuran çekirdeklerinin ve türevlerinin büyüklükleri ile ilgili noktasal kestirimler verilecektir.

$a_j, b_j > 0$ $(j = 1, \dots J)$ ve $x \in \mathbb{B}$, $y \in \overline{\mathbb{B}}$ için $W(x,y)$,

$$W(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a_1 + k) \cdots \Gamma(a_J + k)}{\Gamma(b_1 + k) \cdots \Gamma(b_J + k)} Z_k(x,y) \tag{2.15}$$

olarak tanımlansın. (2.5) gereği $q \in \mathbb{R}$ için $R_q(x,y)$ çekirdeklerinin seri açılımı (2.15) formundadır.

$W(x,y)$ ve kısmi türevleri için aşağıdaki kestirim verilebilir ([5], Bölüm 7).

Yardımcı Teorem 2.4.1. *$a_j, b_j > 0$ ($j = 1, \dots J$) ve m bir çoklu indeks olsun. $c = n - 1 + (a_1 + \cdots + a_J) - (b_1 + \cdots + b_J) + |m|$ alalım. Her $x \in \mathbb{B}$, $y \in \overline{\mathbb{B}}$ için*

$$\big|(\partial^m W)(x,y)\big| \lesssim \begin{cases} 1, & c < 0; \\ 1 + \log \dfrac{1}{[x,y]}, & c = 0; \\ \dfrac{1}{[x,y]^c}, & c > 0, \end{cases}$$

olur. Burada kısmi türev birinci değişkene göre alınmıştır.

(2.5) tanımındaki her iki durum da kontrol edilerek doğuran çekirdekler için aşağıdaki kestirim elde edilir.

Yardımcı Teorem 2.4.2. *$q \in \mathbb{R}$ ve m bir çoklu indeks olsun. Buna göre her $x \in \mathbb{B}$, $y \in \overline{\mathbb{B}}$ için*

$$\big|(\partial^m R_q)(x,y)\big| \lesssim \begin{cases} 1, & q + |m| < -n; \\ 1 + \log \dfrac{1}{[x,y]}, & q + |m| = -n; \\ \dfrac{1}{[x,y]^{n+q+|m|}}, & q + |m| > -n \end{cases}$$

elde edilir.

Yukarıdaki kestirim $q \geq -1$ için [6,8] dahil bir çok çalışmada ispatlanmıştır.

(2.10) dikkate alınırsa $D_s^t R_q(x,y)$ operatörünün homojen açılımının (2.15) formunda olduğu görülür. Buna göre aşağıdaki kestirim elde edilir.

Yardımcı Teorem 2.4.3. *$q, s, t \in \mathbb{R}$ ve m bir çoklu indeks olsun. Her $x \in \mathbb{B}$, $y \in \overline{\mathbb{B}}$ için*

$$\big|\partial^m (D_s^t R_q)(x,y)\big| \lesssim \begin{cases} 1, & q + t + |m| < -n; \\ 1 + \log \dfrac{1}{[x,y]}, & q + t + |m| = -n; \\ \dfrac{1}{[x,y]^{n+q+t+|m|}}, & q + t + |m| > -n \end{cases}$$

olur.

Eğer x ve y paralel ve aynı yönlü ise $R_q(x,y)$ için iki yönlü bir kestirim verilebilir.

Yardımcı Teorem 2.4.4. *$q \in \mathbb{R}$ olsun. Her $\eta \in \mathbb{S}$ ve $r \in (0,1)$ için*

$$\left|R_q(r\eta,\eta)\right| \sim \begin{cases} 1, & q < -n; \\ 1 + \log \dfrac{1}{1-r}, & q = -n; \\ \dfrac{1}{(1-r)^{n+q}}, & q > -n \end{cases}$$

olur.

Kanıt. $\eta \in \mathbb{S}$ ve $r \in (0,1)$ için $R_q(r\eta,\eta)$ doğuran çekirdeğinin seri açılımı

$$R_q(r\eta,\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k(q) Z_k(r\eta,\eta)$$

dır. Yardımcı Teorem 2.1.18 (c) den $Z_k(r\eta,\eta) = r^k Z_k(\eta,\eta) \sim r^k k^{n-2}$ dir. Diğer yandan (2.8) den $k \to \infty$ iken $\gamma_k(q) \sim k^{1+q}$ dur. O halde

$$R_q(r\eta,\eta) \sim 1 + \sum_{k=1}^{\infty} k^{n+q-1} r^k$$

elde edilir ve buradan yardımcı teorem elde edilir. ∎

$q > -1$ için R_q çekirdeklerinin ağırlıklı integralleri üzerinde aşağıdaki kestirimler bir çok çalışmada ispatlanmıştır. Aşağıdaki kestirim $q \in \mathbb{R}$ için [5], Teorem 1.5 in özel bir durumudur.

Yardımcı Teorem 2.4.5. *$q \in \mathbb{R}$ ve $c > -1$ olsun. Her $x \in \mathbb{B}$ için aşağıdaki kestirim sağlanır.*

$$\int_{\mathbb{B}} |R_q(x,y)|(1-|y|^2)^c \, d\nu(y) \sim \begin{cases} 1, & q < c; \\ 1 + \log \dfrac{1}{1-|x|^2}, & q = c; \\ \dfrac{1}{(1-|x|^2)^{q-c}}, & q > c. \end{cases}$$

Ayrıca aşağıdaki integral kestirimine de ihtiyaç duyulacaktır. İspat için [15], Önerme 2.2 veya [16], Yardımcı Teorem 4.4 tavsiye edilir.

Yardımcı Teorem 2.4.6. *$a > -1$ ve $c \in \mathbb{R}$ olsun. Her $x \in \mathbb{B}$ için aşağıdaki kestirim doğrudur.*

$$\int_{\mathbb{B}} \frac{(1-|y|^2)^a}{[x,y]^{n+a+c}} \, d\nu(y) \sim \begin{cases} 1, & c < 0; \\ 1 + \log \dfrac{1}{1-|x|^2}, & c = 0; \\ \dfrac{1}{(1-|x|^2)^c}, & c > 0. \end{cases}$$

Son olarak, bir integral kestiriminden daha bahsedilecektir.

Yardımcı Teorem 2.4.7. *$a > -1$, $c > 0$ ve $0 \leq r < 1$ olsun. Aşağıdaki ifade doğrudur.*

$$\int_0^1 \frac{(1-t^2)^a}{(1-r^2t^2)^{1+a+c}}\, dt \lesssim \frac{1}{(1-r^2)^c}.$$

İspat için [8], Lemma 2.1 e bakılabilir.

3. BİR İNTEGRAL OPERATÖRLER SINIFI

Bu bölümde doğuran çekirdeklerle oluşturulan ve ileride b_α ve $b_{\alpha 0}$ uzaylarının özelliklerini belirlerken sık sık başvuracağımız bir integral operatör sınıfı üzerinde duracağız. Operatörlerin hangi koşullar altında L^∞_α veya $\mathcal{C}_{\alpha 0}$ üzerinde sınırlı olduklarını belirleyeceğiz.

$a, c \in \mathbb{R}$ olsun. L^∞_α üzerinde

$$\begin{aligned}
T_{a,c}\,\varphi(x) &= (1-|x|^2)^a \int_{\mathbb{B}} R_{a+c}(x,y)\,\varphi(y)(1-|y|^2)^c\,d\nu(y)\\
S_{a,c}\,\varphi(x) &= (1-|x|^2)^a \int_{\mathbb{B}} \big|R_{a+c}(x,y)\big|\,\varphi(y)(1-|y|^2)^c\,d\nu(y)\\
E_{a,c}\,\varphi(x) &= (1-|x|^2)^a \int_{\mathbb{B}} \frac{1}{[x,y]^{n+a+c}}\,\varphi(y)(1-|y|^2)^c\,d\nu(y)
\end{aligned}$$

operatörlerini ele alalım.

Aşağıdaki teorem, yukarıdaki operatörlerin hangi şartlarda L^∞_α dan L^∞_α ya sınırlı olacağını belirler.

Teorem 3.1. *$\alpha, a, c \in \mathbb{R}$ olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:*

(a) $T_{a,c}$, L^∞_α üzerinde sınırlıdır.

(b) $S_{a,c}$, L^∞_α üzerinde sınırlıdır.

(c) $E_{a,c}$, L^∞_α üzerinde sınırlıdır.

(d) $a+\alpha > 0$ ve $c > \alpha - 1$ dir.

Teoremin ispatına geçmeden önce bir yardımcı teorem verelim. (2.7) den her $q \in \mathbb{R}$ ve $y \in \mathbb{B}$ için $R_q(0,y) = 1$ dir. Aşağıdaki yardımcı teorem x, 0 a yeterince yakın iken her $y \in \mathbb{B}$ için $R_q(x,y)$ nin 0 dan düzgün olarak uzak kalacağını belirtir.

Yardımcı Teorem 3.2. *$q \in \mathbb{R}$ olsun. Öyle $\epsilon > 0$ vardır ki her $|x| < \epsilon$ ve her $y \in \mathbb{B}$ için $R_q(x,y) \geq 1/2$ olur.*

Kanıt. $\gamma_0(q) = 1$ ve $Z_0(x,y) \equiv 1$ olduğundan

$$R_q(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k(q) Z_k(x,y) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(q) Z_k(x,y)$$

yazılabilir. (2.8) ve Yardımcı Teorem 2.1.18 (c) den $|x| \leq 1/2$ için

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(q) Z_k(x,y)\right| \lesssim \sum_{k=1}^{\infty} k^{1+q} k^{n-2} |x|^k |y|^k \lesssim |x| \sum_{k=1}^{\infty} k^{n+q-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

olur. En sağdaki seri oran testi gereği yakınsaktır. Bu durumda

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(q) Z_k(x,y)\right| \lesssim |x|$$

bulunur. Dolayısıyla ϵ yeterince küçük ise $|x| < \epsilon$ için $|\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(q) Z_k(x,y)| < 1/2$ dir. O halde $|x| < \epsilon$ ve her $y \in \mathbb{B}$ için

$$|R_q(x,y) - 1| < 1/2$$

olur ki ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.1 in kanıtı. Öncelikle (a) $\Leftrightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (d) denkliğini gösterelim.

(b) $\Rightarrow$ (a): $S_{a,c}$, L^∞_α üzerinde sınırlı olsun. Kolaylıkla görülebilir ki $\varphi \in L^\infty_\alpha$ için $|T_{a,c}\,\varphi(x)| \leq S_{a,c}(|\varphi|)(x)$ dir. Buradan

$$\|T_{a,c}\,\varphi\|_{L^\infty_\alpha} \leq \|S_{a,c}\,(|\varphi|)\|_{L^\infty_\alpha} \leq \|S_{a,c}\| \||\varphi|\|_{L^\infty_\alpha}$$

dır. $\||\varphi|\|_{L^\infty_\alpha} = \|\varphi\|_{L^\infty_\alpha}$ olacağından

$$\|T_{a,c}\,\varphi\|_{L^\infty_\alpha} \leq \|S_{a,c}\| \|\varphi\|_{L^\infty_\alpha}$$

dır. Böylece $S_{a,c}$ sınırlı iken $T_{a,c}$ sınırlıdır. Üstelik $\|T_{a,c}\| \leq \|S_{a,c}\|$ dir.

(a) $\Rightarrow$ (d): $T_{a,c}$, L^∞_α üzerinde sınırlı olsun. Öncelikle $c > \alpha - 1$ olduğunu gösterelim. $\varphi(x) = (1-|x|^2)^{-\alpha}$ alınsın. Açıktır ki $\varphi \in L^\infty_\alpha$ dır. Yardımcı Teorem 3.2 de belirtilen şartı sağlayan bir $\epsilon > 0$ alırsak her $|x| < \epsilon$ için

$$T_{a,c}\,\varphi(x) \geq (1-|x|^2)^a \int_{\mathbb{B}} \frac{1}{2}(1-|y|^2)^{c-\alpha}\, d\nu(y)$$

olduğu görülür. Eğer $c \leq \alpha - 1$ ise sağdaki integral ıraksak olur ve $T_{a,c}\,\varphi$, L^∞_α da olamaz.

Şimdi $a + \alpha > 0$ olduğunu gösterelim. Tekrar $\varphi(x) = (1-|x|^2)^{-\alpha}$ alalım. Üstteki tartışmadan $c > \alpha - 1$ olduğundan $\nu_{c-\alpha}(\mathbb{B})$ sonludur. Kutupsal koordinatlarda integral alınırsa

$$\begin{aligned} T_{a,c}\,\varphi(x) &= (1-|x|^2)^a \int_{\mathbb{B}} R_{a+c}(x,y)(1-|y|^2)^{c-\alpha}\, d\nu(y) \\ &= (1-|x|^2)^a \int_0^1 n\rho^{n-1}(1-\rho^2)^{c-\alpha} \int_{\mathbb{S}} R_{a+c}(x,\rho\eta) d\sigma(\eta)\, d\rho \end{aligned}$$

elde edilir. Ortalama değer özelliğinden $\mathbb{S}$ üzerindeki integral $R_{a+c}(x,0)$ olur. (2.7) gereği $R_{a+c}(x,0) = 1$ dir. O halde

$$T_{a,c}\,\varphi(x) = \frac{\Gamma(n/2+1)\Gamma(c-\alpha+1)}{\Gamma(n/2+c-\alpha+1)}(1-|x|^2)^a = C(1-|x|^2)^a$$

dır. $T_{a,c}\,\varphi \in L^\infty_\alpha$ veya denk olarak $(1-|x|^2)^\alpha T_{a,c}\,\varphi \in L^\infty$ olacağından, $a+\alpha \geq 0$ olmalıdır. Geriye $a+\alpha = 0$ olamayacağını göstermek kalır. Farz edelim ki $a+\alpha = 0$ olsun. $x_0 \in \mathbb{B}$ için

$$\varphi_{x_0}(y) = \begin{cases} (1-|y|^2)^{-\alpha}\,\dfrac{|R_{a+c}(x_0,y)|}{R_{a+c}(x_0,y)}, & R_{a+c}(x_0,y) \neq 0; \\ (1-|y|^2)^{-\alpha}, & R_{a+c}(x_0,y) = 0 \end{cases}$$

fonksiyonunu ele alalım. Açıktır ki $\|\varphi_{x_0}\|_{L^\infty_\alpha} = 1$ dir. Ayrıca x_0 noktasında $T_{a,c}\,\varphi_{x_0}$ hesaplanırsa

$$T_{a,c}\,\varphi_{x_0}(x_0) = (1-|x_0|^2)^a \int_{\mathbb{B}} |R_{a+c}(x_0,y)|(1-|y|^2)^{c-\alpha}\,d\nu(y)$$

olduğu görülür. Diğer yandan $c-\alpha > -1$ olduğundan Yardımcı Teorem 2.4.5 ten

$$T_{a,c}\,\varphi_{x_0}(x_0) \sim (1-|x_0|^2)^a\left(1+\log\frac{1}{1-|x_0|^2}\right)$$

elde edilir. Bu ifade tek bir x_0 noktası için geçerlidir. Fakat $T_{a,c}\,\varphi_{x_0}$ süreklidir. Böylece

$$\begin{aligned} \|T_{a,c}\,\varphi_{x_0}\|_{L^\infty_\alpha} = \|(1-|x|^2)^\alpha T_{a,c}\,\varphi_{x_0}(x)\|_{L^\infty} &\geq (1-|x_0|^2)^\alpha T_{a,c}\,\varphi_{x_0}(x_0) \\ &\gtrsim 1+\log\frac{1}{1-|x_0|^2} \end{aligned}$$

dir. $\|\varphi_{x_0}\|_{L^\infty_\alpha} = 1$ olduğundan

$$\|T_{a,c}\| \geq \|T_{a,c}\,\varphi_{x_0}\|_{L^\infty_\alpha} \gtrsim 1+\log\frac{1}{1-|x_0|^2}$$

dır. $|x_0| \to 1^-$ için eşitsizliğin sağ tarafı sonsuza gider. Bu ise $T_{a,c}$ nin sınırlılığı ile çelişir.

(d) $\Rightarrow$ (b): $a+\alpha > 0$ ve $c > \alpha - 1$ olsun. $\varphi \in L^\infty_\alpha$ alınsın. O halde hemen

hemen her yerde $|\varphi(y)| \leq \|\varphi\|_{L^\infty_\alpha}(1-|y|^2)^{-\alpha}$ dır. Yardımcı Teorem 2.4.5 ten

$$
\begin{aligned}
|S_{a,c}\,\varphi(x)| &\leq (1-|x|^2)^a \int_{\mathbb{B}} |R_{a+c}(x,y)|\,|\varphi(y)|(1-|y|^2)^c\,d\nu(y) \\
&\leq \|\varphi\|_{L^\infty_\alpha}(1-|x|^2)^a \int_{\mathbb{B}} |R_{a+c}(x,y)|(1-|y|^2)^{c-\alpha}\,d\nu(y) \\
&\lesssim \|\varphi\|_{L^\infty_\alpha}(1-|x|^2)^a \frac{1}{(1-|x|^2)^{a+\alpha}} \\
&= \frac{\|\varphi\|_{L^\infty_\alpha}}{(1-|x|^2)^\alpha}
\end{aligned}
$$

bulunur. Buradan $\|S_{a,c}\,\varphi\|_{L^\infty_\alpha} = \|(1-|x|^2)^\alpha S_{a,c}\,\varphi(x)\|_{L^\infty} \lesssim \|\varphi\|_{L^\infty_\alpha}$ olduğu görülür. Böylece $S_{a,c}$, L^∞_α üzerinde sınırlıdır.

Şimdi (c) $\Leftrightarrow$ (d) gerektirmesini gösterelim.

(c) $\Rightarrow$ (d): $E_{a,c}$, L^∞_α üzerinde sınırlı olsun. Öncelikle $c > \alpha - 1$ olduğunu gösterelim. $\varphi(x) = (1-|x|^2)^{-\alpha}$ alınsın. Kolaylıkla görülür ki her $|x| < 1/2$ ve her $y \in \mathbb{B}$ için $1/2 \leq [x,y] = \big||x|y - y/|y|\big| \leq 3/2$ dir. Bu nedenle $|x| < 1/2$ ise

$$
E_{a,c}\,\varphi(x) \gtrsim (1-|x|^2)^a \int_{\mathbb{B}} (1-|y|^2)^{c-\alpha}\,d\nu(y)
$$

dir. $c - \alpha \leq -1$ ise sağdaki integral ıraksak olacağından $c - \alpha > -1$ olmalıdır.

Şimdi $a+\alpha \leq 0$ olmasının mümkün olamayacağnı gösterelim. Tekrar $\varphi(y) = (1-|y|^2)^{-\alpha}$ alalım. Bu durumda

$$
E_{a,c}\,\varphi(x) = (1-|x|^2)^a \int_{\mathbb{B}} \frac{(1-|y|^2)^{c-\alpha}}{[x,y]^{n+a+c}}\,d\nu(y)
$$

olur. Eğer $a+\alpha < 0$ ise Yardımcı Teorem 2.4.6 gereği yukarıdaki integral ~ 1 dir. Diğer yandan $a+\alpha = 0$ ise integral $\sim \big(1 + \log(1-|x|^2)^{-1}\big)$ dir. Her iki durumda da $E_{a,c}\,\varphi$, L^∞_α un elemanı olamaz.

(d) $\Rightarrow$ (c): $a+\alpha > 0$ ve $c > \alpha - 1$ olsun. $\varphi \in L^\infty_\alpha$ alınsın. Bu durumda hemen hemen her yerde $|\varphi(y)| \leq \|\varphi\|_{L^\infty_\alpha}(1-|y|^2)^{-\alpha}$ dır. Yardımcı Teorem 2.4.6 gereği

$$
\begin{aligned}
|E_{a,c}\,\varphi(x)| &\leq (1-|x|^2)^a \int_{\mathbb{B}} \frac{1}{[x,y]^{n+a+c}}\,|\varphi(y)|(1-|y|^2)^c\,d\nu(y) \\
&\leq \|\varphi\|_{L^\infty_\alpha}(1-|x|^2)^a \int_{\mathbb{B}} \frac{(1-|y|^2)^{c-\alpha}}{[x,y]^{n+a+c}}\,d\nu(y) \\
&\lesssim \|\varphi\|_{L^\infty_\alpha}(1-|x|^2)^a \frac{1}{(1-|x|^2)^{a+\alpha}}
\end{aligned}
$$

dir. Buradan $\|E_{a,c}\,\varphi\|_{L^\infty_\alpha} \lesssim \|\varphi\|_{L^\infty_\alpha}$ elde edilir. ■

Teorem 3.1, L^∞_α uzayı yerine $\mathcal{C}_{\alpha 0}$ uzayı alındığında da geçerlidir. Aşağıdaki teorem, $T_{a,c}$, $S_{a,c}$ ve $E_{a,c}$ operatörlerin hangi koşullar altında $\mathcal{C}_{\alpha 0}$ dan $\mathcal{C}_{\alpha 0}$ ya sınırlı olduklarını belirler.

Teorem 3.3. *$\alpha, a, c \in \mathbb{R}$ olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:*

(a) $T_{a,c}$, $\mathcal{C}_{\alpha 0}$ üzerinde sınırlıdır.

(b) $S_{a,c}$, $\mathcal{C}_{\alpha 0}$ üzerinde sınırlıdır.

(c) $E_{a,c}$, $\mathcal{C}_{\alpha 0}$ üzerinde sınırlıdır.

(d) $a+\alpha > 0$ ve $c > \alpha - 1$ dir.

Kanıt. Öncelikle (a) $\Leftrightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (d) denkliğini gösterelim.

(b) $\Rightarrow$ (a): $S_{a,c}$, $\mathcal{C}_{\alpha 0}$ üzerinde sınırlı olsun. $\varphi \in \mathcal{C}_{\alpha 0}$ alınsın. O halde $|T_{a,c}\varphi(x)| \leq S_{a,c}(|\varphi|)(x)$ dir. Buradan $\mathcal{C}_{\alpha 0}$ üzerinde L^∞_α dan indirgenmiş norm olmak üzere

$$\|T_{a,c}\varphi\|_{\mathcal{C}_{\alpha 0}} \leq \|S_{a,c}(|\varphi|)\|_{\mathcal{C}_{\alpha 0}} \leq \|S_{a,c}\| \||\varphi|\|_{\mathcal{C}_{\alpha 0}}$$

dır. $\||\varphi|\|_{\mathcal{C}_{\alpha 0}} = \|\varphi\|_{\mathcal{C}_{\alpha 0}}$ olacağından

$$\|T_{a,c}\varphi\|_{\mathcal{C}_{\alpha 0}} \leq \|S_{a,c}\| \|\varphi\|_{\mathcal{C}_{\alpha 0}}$$

olur. Böylece $T_{a,c}$ sınırlı ve $\|T_{a,c}\| \leq \|S_{a,c}\|$ dir.

(a) $\Rightarrow$ (d): $T_{a,c}$, $\mathcal{C}_{\alpha 0}$ üzerinde sınırlı olsun. Öncelikle $c > \alpha - 1$ olduğunu gösterelim. $\varphi(x) = (1-|x|^2)^{-\alpha}/\big(1+\log(1-|x|^2)^{-1}\big)$ olsun. Açıktır ki φ fonksiyonu $\mathbb{B}$ de sürekli ve $\lim_{|x|\to 1^-}(1-|x|^2)^\alpha \varphi(x) = 0$ dır. Böylece $\varphi \in \mathcal{C}_{\alpha 0}$ dır. $T_{a,c}$, $\mathcal{C}_{\alpha 0}$ üzerinde sınırlı olduğundan $T_{a,c}\varphi \in \mathcal{C}_{\alpha 0}$ dır. $T_{a,c}\varphi$, $\mathbb{B}$ de sürekli olduğundan tek bir $x = 0$ noktasında kontrol etmek yeterlidir. (2.7) gereği $R_{a+c}(x,0) = 1$ dir. O halde kutupsal koordinatlarda integral alınırsa

$$\begin{aligned}
T_{a,c}\varphi(0) &= \int_{\mathbb{B}} \frac{(1-|y|^2)^{c-\alpha}}{1+\log\frac{1}{1-|y|^2}}\, d\nu(y) \\
&= n\int_0^1 \frac{\rho^{n-1}(1-\rho^2)^{c-\alpha}}{1+\log\frac{1}{1-\rho^2}} \int_{\mathbb{S}} d\sigma(\eta)\, d\rho \\
&= n\int_0^1 \frac{\rho^{n-1}(1-\rho^2)^{c-\alpha}}{1+\log\frac{1}{1-\rho^2}}\, d\rho
\end{aligned}$$

elde edilir. $c-\alpha \leq 1$ ise yukarıdaki integral ıraksak olur ve $T_{a,c}\varphi \in \mathcal{C}_{\alpha 0}$ olamaz. O halde $c > \alpha - 1$ olmalıdır.

Şimdi $a+\alpha > 0$ koşulunu gösterelim. $\varphi(x) = (1-|x|^2)^{1-\alpha} \in \mathcal{C}_{\alpha 0}$ alalım. Kutupsal koordinatlarda integral alınırsa

$$\begin{aligned}
T_{a,c}\varphi(x) &= (1-|x|^2)^a \int_{\mathbb{B}} R_{a+c}(x,y)(1-|y|^2)^{c+1-\alpha}\, d\nu(y) \\
&= (1-|x|^2)^a \int_0^1 n\rho^{n-1}(1-\rho^2)^{c+1-\alpha} \int_{\mathbb{S}} R_{a+c}(x,\rho\eta)\, d\sigma(\eta) d\rho
\end{aligned}$$

elde edilir. Ortalama değer özelliğinden $\mathbb{S}$ üzerindeki integral $R_{a+c}(x,0) = 1$ dir. O halde

$$T_{a,c}\varphi(x) = \frac{\Gamma(n/2+1)\Gamma(c-\alpha+1)}{\Gamma(n/2+c-\alpha+2)}(1-|x|^2)^a = C(1-|x|^2)^a$$

olur. $T_{a,c}\varphi \in \mathcal{C}_{\alpha 0}$ olacağından, $a+\alpha > 0$ olmalıdır.

(d) $\Rightarrow$ (b): $a+\alpha > 0$ ve $c > \alpha - 1$ olsun. $\varphi \in \mathcal{C}_{\alpha 0}$ alınsın. O halde $n+a+c > 0$ olacağından Yardımcı Teorem 2.4.2 gereği

$$|S_{a,c}\varphi(x)| \leq (1-|x|^2)^a \int_{\mathbb{B}} \frac{1}{[x,y]^{n+a+c}} |\varphi(y)|(1-|y|^2)^c\, d\nu(y)$$

dir. $\varepsilon > 0$ olsun. $\varphi \in \mathcal{C}_{\alpha 0}$ olduğundan öyle bir $\delta < 1$ bulunabilir ki $\delta < |y| < 1$ için $(1-|y|^2)^\alpha |\varphi(y)| < \varepsilon$ dur. Yukarıdaki integrali $\mathbb{B}_\delta = B(0,\delta)$ üzerinde $\mathcal{I}_1$ ve $\mathbb{B}\backslash\mathbb{B}_\delta$ üzerinde $\mathcal{I}_2$ olmak üzere iki kısma ayıralım. Açıktır ki $y \in \mathbb{B}_\delta$ için $[x,y] \geq 1-\delta$ dır. Buna göre

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_1(x) &\leq \|\varphi\|_{\mathcal{C}_{\alpha 0}}(1-|x|^2)^a \int_{\mathbb{B}_\delta} \frac{(1-|y|^2)^{c-\alpha}}{[x,y]^{n+a+c}}\, d\nu(y) \\
&\leq \|\varphi\|_{\mathcal{C}_{\alpha 0}}(1-|x|^2)^a \int_{\mathbb{B}_\delta} \frac{(1-|y|^2)^{c-\alpha}}{(1-\delta)^{n+a+c}}\, d\nu(y) \\
&\lesssim \|\varphi\|_{\mathcal{C}_{\alpha 0}}(1-|x|^2)^a
\end{aligned}$$

dır. Diğer yandan Yardımcı Teorem 2.4.6 dan

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_2(x) \leq \varepsilon(1-|x|^2)^a \int_{\mathbb{B}\backslash\mathbb{B}_\delta} \frac{(1-|y|^2)^{c-\alpha}}{[x,y]^{n+a+c}} d\nu(y) &\leq \varepsilon(1-|x|^2)^a \int_{\mathbb{B}} \frac{(1-|y|^2)^{c-\alpha}}{[x,y]^{n+a+c}} d\nu(y) \\
&\lesssim \varepsilon \frac{(1-|x|^2)^a}{(1-|x|^2)^{a+\alpha}} = \varepsilon(1-|x|^2)^{-\alpha}
\end{aligned}$$

dır. $\mathcal{I}_1$ ve $\mathcal{I}_2$ toplanırsa

$$|S_{a,c}\varphi(x)| \lesssim \|\varphi\|_{\mathcal{C}_{\alpha 0}}(1-|x|^2)^a + \varepsilon(1-|x|^2)^{-\alpha} \tag{3.1}$$

olduğu görülür. Önce $S_{a,c}\varphi \in \mathcal{C}_{\alpha 0}$ olduğunu gösterelim. (3.1) ve $a+\alpha>0$ eşitsizliği kullanılırsa

$$\limsup_{|x|\to 1^-}(1-|x|^2)^{\alpha}|S_{a,c}\varphi(x)| \leq 0+\varepsilon \lesssim \varepsilon$$

olduğu görülür. $\varepsilon>0$ keyfi seçildiğinden

$$\lim_{|x|\to 1^-}(1-|x|^2)^{\alpha}|S_{a,c}\varphi(x)| = 0$$

bulunur. O halde $S_{a,c}\varphi \in \mathcal{C}_{\alpha 0}$ dır. Ayrıca Teorem 3.1 in (d) $\Rightarrow$ (b) kısmından $\|S_{a,c}\varphi\|_{\mathcal{C}_{\alpha 0}} \leq \|\varphi\|_{\mathcal{C}_{\alpha 0}}$ dır.

Şimdi (c) $\Leftrightarrow$ (d) gerektirmesini gösterelim.

(c) $\Rightarrow$ (d): $E_{a,c}$, $\mathcal{C}_{\alpha 0}$ üzerinde sınırlı olsun. Öncelikle $c>\alpha-1$ koşulunu gösterelim. $\varphi(x)=(1-|x|^2)^{-\alpha}/\big(1+\log(1-|x|^2)^{-1}\big) \in \mathcal{C}_{\alpha 0}$ alınsın. $E_{a,c}$, $\mathcal{C}_{\alpha 0}$ üzerinde sınırlı olduğundan $E_{a,c}\varphi \in \mathcal{C}_{\alpha 0}$ dır. $E_{a,c}\varphi$, $\mathbb{B}$ de sürekli olduğundan tek bir $x=0$ noktasında kontrol etmek yeterlidir. Açıktır ki $[0,y]=1$ dir. O halde kutupsal koordinatlarda integral alınırsa

$$\begin{aligned} E_{a,c}\varphi(0) &= \int_{\mathbb{B}} \frac{(1-|y|^2)^{c-\alpha}}{1+\log\frac{1}{1-|y|^2}}\,d\nu(y) \\ &= n\int_0^1 \frac{\rho^{n-1}(1-\rho^2)^{c-\alpha}}{1+\log\frac{1}{1-\rho^2}} \int_{\mathbb{S}} d\sigma(\eta)d\rho \\ &= n\int_0^1 \frac{\rho^{n-1}(1-\rho^2)^{c-\alpha}}{1+\log\frac{1}{1-\rho^2}}\,d\rho \end{aligned}$$

elde edilir. $c-\alpha\leq 1$ ise yukarıdaki integral ıraksak olur ve $E_{a,c}\varphi \in \mathcal{C}_{\alpha 0}$ olamaz. O halde $c>\alpha-1$ olmalıdır.

Şimdi $a+\alpha>0$ koşulunu gösterelim. $\varphi(x)=(1-|x|^2)^{1-\alpha} \in \mathcal{C}_{\alpha 0}$ alalım. $|y|\leq 1/2$ için $1/2 \leq [x,y] \leq 3/2$ dir. O halde $\mathbb{B}_{1/2}=B(0,\frac{1}{2})$ olmak üzere

$$\begin{aligned} E_{a,c}\varphi(x) &\geq (1-|x|^2)^{a}\int_{\mathbb{B}_{1/2}} \frac{(1-|y|^2)^{c-\alpha+1}}{[x,y]^{n+a+c}}\,d\nu(y) \\ &\gtrsim (1-|x|^2)^{a}\int_{\mathbb{B}_{1/2}} (1-|y|^2)^{c-\alpha+1}\,d\nu(y) \\ &\gtrsim (1-|x|^2)^{a} \end{aligned}$$

elde edilir. Eğer $a+\alpha\leq 0$ ise her iki taraf $(1-|x|^2)^{\alpha}$ ile çarpılıp $|x|\to 1^-$ için limit alındığında limit 0 olmaz. Bu ise $E_{a,c}\varphi \in \mathcal{C}_{\alpha 0}$ olması ile çelişir. Böylece $a+\alpha>0$ dır.

(d) $\Rightarrow$ (c): $a+\alpha>0$ ve $c>\alpha-1$ olsun. $\varphi\in\mathcal{C}_{\alpha 0}$ alınsın. O halde

$$|E_{a,c}\,\varphi(x)|\leq(1-|x|^2)^a\int_{\mathbb{B}}\frac{1}{[x,y]^{n+a+c}}\,|\varphi(y)|(1-|y|^2)^c\,d\nu(y)$$

dir. $\varepsilon>0$ olsun. $\varphi\in\mathcal{C}_{\alpha 0}$ olduğundan öyle bir $\delta<1$ vardır ki $\delta<|y|<1$ için $(1-|y|^2)^\alpha|\varphi(y)|<\varepsilon$ olur. Yukarıdaki integrali, $\mathbb{B}_\delta=B(0,\delta)$ üzerinde $\mathcal{I}_1$ ve $\mathbb{B}\backslash\mathbb{B}_\delta$ üzerinde $\mathcal{I}_2$ olmak üzere iki kısma ayıralım. Açıktır ki $y\in\mathbb{B}_\delta$ için $[x,y]\geq 1-\delta$ dır. Buna göre

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_1(x)&\leq\|\varphi\|_{\mathcal{C}_{\alpha 0}}(1-|x|^2)^a\int_{\mathbb{B}_\delta}\frac{(1-|y|^2)^{c-\alpha}}{[x,y]^{n+a+c}}\,d\nu(y)\\&\leq\|\varphi\|_{\mathcal{C}_{\alpha 0}}(1-|x|^2)^a\int_{\mathbb{B}_\delta}\frac{(1-|y|^2)^{c-\alpha}}{(1-\delta)^{n+a+c}}\,d\nu(y)\\&\lesssim\|\varphi\|_{\mathcal{C}_{\alpha 0}}(1-|x|^2)^a\end{aligned}$$

dır. Diğer taraftan Yardımcı Teorem 2.4.6 dan

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_2(x)&\leq\varepsilon(1-|x|^2)^a\int_{\mathbb{B}\backslash\mathbb{B}_\delta}\frac{(1-|y|^2)^{c-\alpha}}{[x,y]^{n+a+c}}\,d\nu(y)\\&\leq\varepsilon(1-|x|^2)^a\int_{\mathbb{B}}\frac{(1-|y|^2)^{c-\alpha}}{[x,y]^{n+a+c}}\,d\nu(y)\lesssim\varepsilon\frac{(1-|x|^2)^a}{(1-|x|^2)^{a+\alpha}}=\varepsilon(1-|x|^2)^{-\alpha}\end{aligned}$$

dır. $\mathcal{I}_1$ ve $\mathcal{I}_2$ toplanırsa

$$|E_{a,c}\,\varphi(x)|\lesssim\|\varphi\|_{\mathcal{C}_{\alpha 0}}(1-|x|^2)^a+\varepsilon(1-|x|^2)^{-\alpha}\tag{3.2}$$

olduğu görülür. Önce $E_{a,c}\,\varphi\in\mathcal{C}_{\alpha 0}$ olduğunu gösterelim. (3.2) ve $a+\alpha>0$ eşitsizliği kullanılırsa

$$\limsup_{|x|\to 1^-}(1-|x|^2)^\alpha|E_{a,c}\,\varphi(x)|\leq 0+\varepsilon\lesssim\varepsilon$$

olduğu görülür. $\varepsilon>0$ keyfi seçildiğinden

$$\lim_{|x|\to 1^-}(1-|x|^2)^\alpha|E_{a,c}\,\varphi(x)|=0$$

bulunur. O halde $E_{a,c}\,\varphi\in\mathcal{C}_{\alpha 0}$ dır. Buradan $E_{a,c}$, $\mathcal{C}_{\alpha 0}$ üzerinde sınırlıdır. ■

4. TEOREM 1.2 VE 1.3 ÜN İSPATLARI

Bu bölümde Teorem 1.2 ve 1.3 ispatlanacaktır. Böylece her $\alpha \in \mathbb{R}$ için ağırlıklı harmonik Bloch b_α ve küçük Bloch $b_{\alpha 0}$ uzayları Tanım 1.4 ile tanımlanabilir. Bu tanım b_α ve $b_{\alpha 0}$ uzaylarını tanımlarken kısmi türev, radyal türev veya D_s^t türev operatörü kullanmanın denk olduğunu ifade eder.

Teorem 1.2 öncelikle $\alpha > 0$ için ispatlanacaktır. İlerde yararlanmak üzere (1.8) integral gösteriminin bir özel durumu olan aşağıdaki yardımcı teoremi verelim.

Yardımcı Teorem 4.1. *$\alpha > 0$ ve $s > \alpha - 1$ olsun. Eğer $u \in b_\alpha$ ise*

$$u(x) = \int_{\mathbb{B}} R_s(x,y)u(y)\,d\nu_s(y) = \frac{1}{V_s}\int_{\mathbb{B}} R_s(x,y)u(y)(1-|y|^2)^s\,d\nu(y)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Kanıt. Sabit bir $x \in \mathbb{B}$ için doğuran çekirdekler için (2.6) da verilen seri düzgün yakınsak olduğundan

$$\int_{\mathbb{B}} R_s(x,y)u(y)\,d\nu_s(y) = \sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k(s)\int_{\mathbb{B}} Z_k(x,y)u(y)(1-|y|^2)^s\,d\nu_s(y)$$

yazılabilir. Z_k polinom, $u \in b_\alpha$ ve $s > \alpha - 1$ olduğundan Fubini teoremi gereği kutupsal koordinatlarda integral alınırsa

$$\int_{\mathbb{B}} R_s(x,y)u(y)d\nu_s(y) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\gamma_k(s)}{V_s}n\int_0^1 \rho^{n-1}(1-\rho^2)^s\int_{\mathbb{S}} Z_k(x,\rho\eta)u(\rho\eta)d\sigma(\eta)d\rho$$

bulunur. u fonksiyonunun homojen açılımı $\sum_{l=0}^{\infty} u_l$ olsun. Buradan Yardımcı Teorem 2.1.18 (d, e) gereği

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{B}} R_s(x,y)u(y)d\nu_s(y) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\gamma_k(s)}{V_s}n\int_0^1 \rho^{n+k-1}(1-\rho^2)^s\int_{\mathbb{S}} Z_k(x,\eta)\sum_{l=0}^{\infty}u_l(\rho\eta)d\sigma(\eta)d\rho\\ &= \sum_{l=0}^{\infty}\frac{\gamma_l(s)}{V_s}\left(n\int_0^1 \rho^{n+2l-1}(1-\rho^2)^s d\rho\right)u_l(x)\end{aligned}$$

dir. $s > -1$ ve $l \in \mathbb{N}$ için (2.6), (2.2.4) ve beta integrali kullanılırsa $V_s = n\int_0^1 \rho^{n-1}(1-\rho^2)^s d\rho$ ve $\gamma_l(s) = \dfrac{\int_0^1 \rho^{n-1}(1-\rho^2)^s d\rho}{\int_0^1 \rho^{n+2l-1}(1-\rho^2)^s d\rho}$ formunda yazılabilir. O halde

$$\frac{\gamma_l(s)}{V_s} = \frac{1}{n\int_0^1 \rho^{n+2l-1}(1-\rho^2)^s d\rho}$$

olur. Buradan

$$\int_{\mathbb{B}} R_s(x,y)u(y)\,d\nu_s(y) = \sum_{l=0}^{\infty} u_l(x) = u(x)$$

elde edilir. ■

Teorem 1.2 nin ispatına aşağıdaki yardımcı teorem ile başlayacağız. Bu yardımcı teorem daha elementer yöntemlerle ispatlanabilir. Fakat bütünlük açısından doğuran çekirdek formülü, doğuran çekirdeklerin kestirimleri ve Teorem 3.1 kullanılarak ispatlanacaktır. Bu teknik daha sonra birçok defa kullanılacaktır.

Yardımcı Teorem 4.2. *$\alpha > 0$ ve $u \in h(\mathbb{B})$ olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:*

(a) $u \in b_\alpha$ *dır.*

(b) $(1-|x|^2)|\nabla u(x)| \in L^\infty_\alpha$ *dır.*

(c) $(1-|x|^2)\mathcal{R}u(x) \in L^\infty_\alpha$ *dır.*

Üstelik,

$$\|u-u(0)\|_{b_\alpha} \sim \|(1-|x|^2)\,|\nabla u|\,\|_{L^\infty_\alpha} \sim \|(1-|x|^2)\mathcal{R}u\|_{L^\infty_\alpha} \tag{4.1}$$

sağlanır.

Kanıt. (a) $\Rightarrow$ (b): $u \in b_\alpha$ olsun. $s > \alpha - 1$ alınsın. Yardımcı Teorem 4.1 den

$$u(x) - u(0) = \frac{1}{V_s}\int_{\mathbb{B}} R_s(x,y)\big(u(y)-u(0)\big)(1-|y|^2)^s\,d\nu(y)$$

dir. Eşitliğin her iki tarafının kısmi türevini alalım. (2.9) gereği integral ve türev yer değiştirebilir. Buradan

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \frac{1}{V_s}\int_{\mathbb{B}} \frac{\partial}{\partial x_i} R_s(x,y)\big(u(y)-u(0)\big)(1-|y|^2)^s\,d\nu(y)$$

olur. $s+1+n > \alpha+n > 0$ olduğundan Yardımcı Teorem 2.4.2 den

$$(1-|x|^2)\Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\Big| \lesssim (1-|x|^2)\int_{\mathbb{B}} \frac{1}{[x,y]^{n+s+1}}\big|u(y)-u(0)\big|(1-|y|^2)^s d\nu(y)$$

elde edilir. $1+\alpha > 0, s > \alpha - 1$ olduğundan Teorem 3.1 den

$$\|(1-|x|^2)\Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\Big|\|_{L^\infty_\alpha} \lesssim \|u-u(0)\|_{b_\alpha}$$

bulunur. Açıktır ki $|\nabla u| \lesssim \sum_{i=0}^{n} |\partial_i u|$ olur. Buradan $(1-|x|^2)|\nabla u(x)| \in L_\alpha^\infty$ ve

$$\|(1-|x|^2)|\nabla u|\|_{L_\alpha^\infty} \lesssim \|u-u(0)\|_{b_\alpha} \tag{4.2}$$

dır.

(b) $\Rightarrow$ (c): $(1-|x|^2)\big|\nabla u(x)\big| \in L_\alpha^\infty$ olsun. $\mathcal{R}u(x) = x \cdot \nabla u(x)$ olduğundan

$$|\mathcal{R}u(x)| \le |\nabla u(x)|$$

olur. Buradan açıktır ki $(1-|x|^2)|\mathcal{R}u(x)| \in L_\alpha^\infty$ ve

$$\|(1-|x|^2)\mathcal{R}u\|_{L_\alpha^\infty} \lesssim \|(1-|x|^2)|\nabla u|\|_{L_\alpha^\infty} \tag{4.3}$$

dır.

(c) $\Rightarrow$ (a): $M := \|(1-|x|^2)\mathcal{R}u(x)\|_{L_\alpha^\infty}$ olsun. $\mathcal{R}u$, $\mathbb{B}$ de sürekli olduğundan

$$|\mathcal{R}u(x)| \le \frac{M}{(1-|x|^2)^{\alpha+1}} \tag{4.4}$$

yazılabilir. Temel analiz ve (1.1) den

$$u(x)-u(0) = \int_0^1 x \cdot \nabla u(tx)\, dt = \int_0^{1/2} \frac{\mathcal{R}u(tx)}{t} dt + \int_{1/2}^1 \frac{\mathcal{R}u(tx)}{t} dt =: I_1 + I_2$$

dir. I_1 in kestirimi için öncelikle $|x| \le 1/2$ için $|\mathcal{R}u(x)| \lesssim M|x|$ olduğunu gösterelim. $\mathcal{R}u(0) = 0$ olduğundan $\mathcal{R}u(x) = \int_0^1 x \cdot \nabla \mathcal{R}u(tx)\, dt$ dir. Cauchy kestirimi ve (4.4) gereği $|x| \le 1/2$ için

$$|\nabla \mathcal{R}u(x)| \le C \sup_{|y|=3/4} |\mathcal{R}u(y)| \lesssim M$$

dir. Buna göre $|x| \le 1/2$ için $|\mathcal{R}u(x)| \lesssim M|x|$ olur. Bu nedenle

$$|I_1| \le \int_0^{1/2} \frac{|\mathcal{R}u(tx)|}{t}\, dt \lesssim \int_0^{1/2} \frac{Mt|x|}{t}\, dt \lesssim M \le \frac{M}{(1-|x|^2)^\alpha}$$

dır. İkinci integral I_2 için (4.4) ve Yardımcı Teorem 2.4.7 kullanılırsa

$$|I_2| \le \int_{1/2}^1 \frac{|\mathcal{R}u(tx)|}{t}\, dt \lesssim \int_{1/2}^1 |\mathcal{R}u(tx)|\, dt \lesssim \int_0^1 \frac{M}{(1-t^2|x|^2)^{\alpha+1}}\, dt \lesssim \frac{M}{(1-|x|^2)^\alpha}$$

elde edilir. Böylece

$$\|u-u(0)\|_{b_\alpha} \lesssim \|(1-|x|^2)\mathcal{R}u(x)\|_{L_\alpha^\infty} \tag{4.5}$$

bulunur.

Ayrıca (4.2), (4.3) ve (4.5) ten (4.1) ile verilen denklik görülür. ■

Şu halde (4.1) ile verilen ifade:

$$\|u\|_{b_\alpha} \sim |u(0)| + \|(1-|x|^2)\,|\nabla u|\,\|_{L^\infty_\alpha} \sim |u(0)| + \|(1-|x|^2)\mathcal{R}u\|_{L^\infty_\alpha}$$

formunda yazılabilir.

Önceki yardımcı teorem kolaylıkla daha yüksek mertebeden türevlere genişletilebilir.

Yardımcı Teorem 4.3. *$\alpha > 0$ ve $u \in h(\mathbb{B})$ olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:*

(a) $u \in b_\alpha$ dır.

(b) Her $N \in \mathbb{N}$ ve $|m| = N$ olacak şekilde her m çoklu indeksi için $(1-|x|^2)^N \partial^m u \in L^\infty_\alpha$ dır.

(c) Öyle bir $N \in \mathbb{N}$ vardır ki $|m| = N$ olacak şekilde her m çoklu indeksi için $(1-|x|^2)^N \partial^m u \in L^\infty_\alpha$ dır.

(d) Her $N \in \mathbb{N}$ için $(1-|x|^2)^N \mathcal{R}^N u \in L^\infty_\alpha$ dır.

(e) Öyle bir $N \in \mathbb{N}$ vardır ki $(1-|x|^2)^N \mathcal{R}u \in L^\infty_\alpha$ dır.

Üstelik,

$$\begin{aligned}\|u\|_{b_\alpha} &\sim \sum_{|m|\le N-1} |(\partial^m u)(0)| + \sum_{|m|=N} \|(1-|x|^2)^N \partial^m u\|_{L^\infty_\alpha} \\ &\sim |u(0)| + \|(1-|x|^2)^N \mathcal{R}^N u\|_{L^\infty_\alpha}\end{aligned} \tag{4.6}$$

dır.

Kanıt. Öncelikle (a) $\Leftrightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (c) denkliğini gösterelim.

(a) $\Rightarrow$ (b): Farzedelim ki $u \in b_\alpha$ olsun. Yardımcı Teorem 4.2 gereği her $i = 1, 2, \ldots, n$ için $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in b_{\alpha+1}$ dir. Yardımcı Teorem 4.2 ye tekrar başvurulursa her $i, j = 1, 2, \ldots, n$ için $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} \in b_{\alpha+2}$ elde edilir. Bu şekilde devam edilerek $|m| = N$ olan her m için $\partial^m u \in b_{\alpha+N}$ bulunur.

(b) $\Rightarrow$ (c): Bu kısım açıktır.

(c) $\Rightarrow$ (a): Farz edelim ki $(1-|x|^2)^N \partial^m u \in L^\infty_\alpha$ olsun. Yani $|m| = N$ olan her m çoklu indeksi için $\partial^m u \in b_{\alpha+N}$ olsun. Bir m' çoklu indeksi $|m'| = N-1$ olacak şekilde alınsın. O halde her $i = 1, 2, \ldots, n$ için $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\partial^{m'} u \in b_{\alpha+N}$ dir. Bu durumda Yardımcı Teorem 4.2 gereği $\partial^{m'} u \in b_{\alpha+N-1}$ dir. Aynı tartışma devam ettirilerek $u \in b_\alpha$ elde edilir.

Berzer şekilde (a) $\Leftrightarrow$ (d) $\Leftrightarrow$ (e) denkliğini gösterelim.

(a) $\Rightarrow$ (d): Farzedelim ki $u \in b_\alpha$ olsun. Yardımcı Teorem 4.2 gereği $\mathcal{R}u \in b_{\alpha+1}$ dir. $\mathcal{R}u$ için tekrar Yardımcı Teorem 4.2 ye başvurulursa $\mathcal{R}^2 u = \mathcal{R}(\mathcal{R}u) \in b_{\alpha+2}$ elde edilir. Bu şekilde devam edilerek her $N \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{R}^N u \in b_{\alpha+N}$ sonucuna ulaşılır.

(d) $\Rightarrow$ (e): Bu kısım açıktır.

(e) $\Rightarrow$ (a): Farz edelim ki $\mathcal{R}^N u = \mathcal{R}(\mathcal{R}^{N-1}u) \in b_{\alpha+N}$ olsun. Yardımcı Teorem 4.2 gereği $\mathcal{R}^{N-1}u = \mathcal{R}(\mathcal{R}^{N-2}u) \in b_{\alpha+N-1}$ olur. O halde yine Yardımcı Teorem 4.2 den $\mathcal{R}^{N-2}u \in b_{\alpha+N-2}$ olur. Aynı tartışma devam ettirilerek $u \in b_\alpha$ elde edilir.

(4.1) için yapılan tartışmaya benzer olarak ispattaki işlem basamakları tekrarlanırsa (4.6) elde edilir. ■

Şimdi kısmi ve radyal türev yerine D_s^t türev operatörlerini kullanabileceğimizi gösterelim. Hâlâ $\alpha > 0$ bölgesindeyiz.

Yardımcı Teorem 4.4. *$\alpha > 0$ ve $u \in h(\mathbb{B})$ olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:*

(a) $u \in b_\alpha$ dır.

(b) $\alpha + t > 0$ olacak şekilde her $s, t \in \mathbb{R}$ için $(1-|x|^2)^t D_s^t u \in L_\alpha^\infty$ dır.

(c) $\alpha + t > 0$ olacak şekilde öyle $s, t \in \mathbb{R}$ vardır ki $(1-|x|^2)^t D_s^t f \in L_\alpha^\infty$ dır.

Üstelik, $\|u\|_{b_\alpha} \sim \|(1-|x|^2)^t D_s^t u\|_{L_\alpha^\infty}$ dır.

Kanıt. (a) $\Rightarrow$ (b): $u \in b_\alpha$ olsun. $c > \alpha - 1$ alınsın. Yardımcı Teorem 4.1 den

$$u(x) = \int_{\mathbb{B}} R_c(x,y) u(y)\, d\nu_c(y)$$

dir. Her iki tarafa D_s^t operatörü uygulansın. Yardımcı Teorem 2.3.3 ten operatör integralin içine atılabilir. Dolayısıyla

$$D_s^t u(x) = \int_{\mathbb{B}} D_s^t R_c(x,y) u(y)\, d\nu_c(y)$$

olur. $n+c+t>n+\alpha-1+t>n-1>0$ olduğundan Yardımcı Teorem 2.4.3 kullanılarak

$$(1-|x|^2)^t|D_s^t u(x)| \lesssim (1-|x|^2)^t \int_{\mathbb{B}} \frac{1}{[x,y]^{n+c+t}}|u(y)|(1-|y|^2)^c\, d\nu(y)$$

elde edilir. $\alpha+t>0$ ve $c>\alpha-1$ olduğundan Teorem 3.1 den

$$\|(1-|x|^2)^t D_s^t u(x)\|_{L_\alpha^\infty} \lesssim \|u\|_{L_\alpha^\infty}$$

bulunur. Böylece $\alpha+t>0$ olacak şekilde her $s,t\in\mathbb{R}$ için $(1-|x|^2)^t D_s^t u \in L_\alpha^\infty$ dır.

(b) $\Rightarrow$ (c): Bu kısım açıktır.

(c) $\Rightarrow$ (a): Farz edelim ki $(1-|x|^2)^t D_s^t u(x) \in L_\alpha^\infty$ olsun. O halde $D_s^t u \in b_{\alpha+t}$ dir. $c>\alpha+t-1$ olmak üzere c alınsın. Yardımcı Teorem 4.1 gereği

$$D_s^t u(x) = \int_{\mathbb{B}} R_c(x,y) D_s^t u(y)\, d\nu_c(y)$$

dir. Eşitlikte her iki tarafa D_{s+t}^{-t} operatörü uygulansın. Sol tarafta Yardımcı Teorem 2.3.2 (d) kullanılır ve sağ tarafta Yardımcı Teorem 2.3.3 ten D_{s+t}^{-t} integralin içine alınırsa

$$u(x) = \int_{\mathbb{B}} D_{s+t}^{-t} R_c(x,y) D_s^t u(y)\, d\nu_c(y)$$

elde edilir. $n+c-t>n+\alpha+t-1-t>n-1>0$ olduğundan Yardımcı Teorem 2.4.3 ten

$$|u(x)| \lesssim \int_{\mathbb{B}} \frac{1}{[x,y]^{n+c-t}}(1-|x|^2)^t|D_s^t u(y)|(1-|y|^2)^{c-t}\, d\nu(y)$$

dir. Buradan $\alpha+t>0$ ve $c-t>\alpha-1$ için Teorem 3.1 e başvurulursa

$$\|u\|_{L_\alpha^\infty} \lesssim \|(1-|x|^2)^t D_s^t u(x)\|_{L_\alpha^\infty}$$

olur. Böylece $u\in b_\alpha$ dır. ■

Teorem 1.2 nin ispatına geçmeden birkaç temel yardımcı teoremden daha bahsedelim.

Yardımcı Teorem 4.5. *$N\geq 1$ bir pozitif tam sayı olsun. Dereceleri $|m|$ olan öyle p_m polinomları vardır ki*

$$\mathcal{R}^N = \sum_{1\leq |m|\leq N} p_m \partial^m$$

olur.

Kanıt. u yeterince türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\mathcal{R}u(x) = x \cdot \nabla u(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

dir. Bu durumda $N = 1$ için yardımcı teorem doğrudur. $N = 2$ için

$$\mathcal{R}^2 u(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} + \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial u}{\partial x_j}$$

olur. Yardımcı teorem $N = 2$ için de doğrudur. Genel durum tümevarım ile gösterilebilir. Herhangi bir N için yardımcı teorem doğru olsun. Buna göre

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{N+1} u(x) &= \mathcal{R} \left(\sum_{1 \le |m| \le N} p_m(x) \partial^m u(x) \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{1 \le |m| \le N} p_m(x) \partial^m u(x) \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{1 \le |m| \le N} x_j \frac{\partial p_m(x)}{\partial x_j} \partial^m u(x) + x_j p_m(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \partial^m u(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda yardımcı teorem $N + 1$ için de doğrudur. Böylece her $N \ge 1$ için doğrudur. ■

Aşağıdaki yardımcı teorem bir u fonksiyonunun N yinci mertebeden kısmi türevleri b_α da ise daha küçük mertebeden tüm kısmi türevlerinin de b_α da olacağını ifade eder.

Yardımcı Teorem 4.6. *$\alpha > 0$ ve $u \in h(\mathbb{B})$ olsun. Eğer $|m| = N$ olan her m çoklu indeksi için $\partial^m u \in b_\alpha$ ise $m' \le N$ olan her m' çoklu indeksi için de $\partial^{m'} u \in b_\alpha$ dır.*

Kanıt. $|m'| \le N$ olan bir m' çoklu indeksi alalım. Varsayımdan $|m| = N$ olan her m çoklu indeksi için $\partial^m u \in b_\alpha$ dır. Yardımcı Teorem 4.3 ten $\partial^{m'} \partial^m u \in b_{\alpha+|m'|}$ olur. (1.4) gereği $\partial^m \partial^{m'} u = \partial^{m'} \partial^m u \in b_{\alpha+N}$ dir. Bu durum her $|m| = N$ için doğru olduğundan Yardımcı Teorem 4.3 gereği $\partial^{m'} u \in b_\alpha$ elde edilir. ■

Teorem 1.2 nin ispatına geçmeden son bir yardımcı teoremden daha bahsedelim.

Yardımcı Teorem 4.7. *$\alpha > 0$ ve p_m, derecesi m olan bir polinom olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır:*

(a) Eğer $u \in L^\infty_\alpha$ ise $p_m u \in L^\infty_\alpha$ dır.

(b) Eğer $u \in \mathcal{C}_{\alpha 0}$ ise $p_m u \in \mathcal{C}_{\alpha 0}$ dır.

Kanıt. (a): p_m, derecesi m olan bir polinom ve $u \in L^\infty_\alpha$ olsun. p_m, $\overline{\mathbb{B}}$ de sürekli olduğundan sınırlıdır. O halde

$$(1-|x|^2)^\alpha |p_m(x)||u(x)| \lesssim (1-|x|^2)^\alpha |u(x)|$$

dır. Dolayısıyla $p_m u \in L^\infty_\alpha$ dır.

(b): p_m, derecesi m olan bir polinom ve $u \in \mathcal{C}_{\alpha 0}$ olsun. Sürekli fonksiyonların çarpımları da sürekli olacağından $(1-|x|^2)^\alpha p_m(x) u(x)$, $\overline{\mathbb{B}}$ de süreklidir. Diğer yandan $u \in \mathcal{C}_{\alpha 0}$ olduğundan verilen $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta < 1$ vardır ki $|x| > \delta$ iken $(1-|x|^2)^\alpha |u(x)| < \varepsilon$ dur. p_m, $\overline{\mathbb{B}}$ de sürekli olduğundan her $x \in \overline{\mathbb{B}}$ için $|p_m(x)| \le M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sabiti vardır. O halde $|x| > \delta$ için $(1-|x|^2)^\alpha |p_m(x)||u(x)| < M\varepsilon$ olur. Dolayısıyla

$$\limsup_{|x| \to 1^-} (1-|x|^2)^\alpha |p_m(x)||u(x)| \le M\varepsilon$$

olur. $\varepsilon > 0$ keyfi seçildiğinden

$$\lim_{|x| \to 1^-} (1-|x|^2)^\alpha |p_m(x)||u(x)| = 0$$

bulunur. O halde $p_m u \in \mathcal{C}_{\alpha 0}$ dır. ∎

Artık Teorem 1.2 nin esas kısmı ispatlanabilir. Böylece önceki yardımcı teoremler tüm $\alpha \in \mathbb{R}$ ye genişletilir.

Teorem 1.2 nin ispatı. Sırasıyla (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d) $\Rightarrow$ (e) $\Rightarrow$ (f) $\Rightarrow$ (a) gerektirmelerini göstereceğiz. (a) $\Rightarrow$ (b), (c) $\Rightarrow$ (d) ve (e) $\Rightarrow$ (f) gerektirmeleri açıktır. Bir çok defa Yardımcı Teorem 4.3 ve 4.4 e başvuracağız. Bu durumlarda b nin alt indeksinin daima 0 dan büyük olmasına dikkat edilmelidir.

(b) $\Rightarrow$ (c): $\alpha + N_0 > 0$ olacak şekilde öyle bir N_0 olsun ki her $|m| = N_0$ çoklu indeksi için $(1-|x|^2)^{N_0} \partial^m u \in L^\infty_\alpha$ olsun. Yani $|m| = N_0$ olan her m çoklu indeksi için $\partial^m u \in b_{\alpha+N_0}$ olsun.

Yardımcı Teorem 4.6 gereği $|m'| < N_0$ olan her m' çoklu indeksi için $\partial^{m'} u \in b_{\alpha+N_0}$ dır. Diğer yandan Yardımcı Teorem 4.7 gereği her $|m'| < N_0$ için $p_{m'} \partial^{m'} u \in L^\infty_{\alpha+N_0}$ olur. Yardımcı Teorem 4.5 e başvurursak

$$\mathcal{R}^{N_0} u \in b_{\alpha+N_0} \tag{4.7}$$

bulunur.

Şimdi $\alpha + N > 0$ olacak şekilde $N \in \mathbb{N}$ alınsın. Eğer $N > N_0$ ise Yardımcı Teorem 4.3 ve (4.7) gereği $\mathcal{R}^N u = \mathcal{R}^{N-N_0}(\mathcal{R}^{N_0}u) \in b_{\alpha+N_0+(N-N_0)} = b_{\alpha+N}$ dir. Benzer olarak, eğer $N < N_0$ ise $\mathcal{R}^{N_0}u = \mathcal{R}^{N_0-N}(\mathcal{R}^N u) \in b_{\alpha+N_0}$ dır. Yardımcı Teorem 4.3 ve (4.7) gereği $\mathcal{R}^N u \in b_{\alpha+N_0-(N_0-N)} = b_{\alpha+N}$ dir. Buradan $\alpha+N > 0$ olan her $N \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{R}^N u \in b_{\alpha+N}$ bulunur.

(d) $\Rightarrow$ (e): Farz edelim ki $\alpha + N_0 > 0$ olacak şekilde öyle bir $N_0 \in \mathbb{N}$ vardır ki $(1-|x|^2)^{N_0}\mathcal{R}^{N_0}u \in L^\infty_\alpha$ dır. Yani $\mathcal{R}^{N_0}u \in b_{\alpha+N_0}$ dır. $\alpha + t > 0$ olacak şekilde herhangi $s, t \in \mathbb{R}$ alalım. Yardımcı Teorem 4.4 den $D^t_s(\mathcal{R}^{N_0}u) \in b_{\alpha+N_0+t}$ elde edilir. Yardımcı Teorem 2.3.2 (e) den D^t_s ve $\mathcal{R}^{N_0}$ değişmelidir. Bu nedenle $\mathcal{R}^{N_0}(D^t_s u) \in b_{\alpha+N_0+t}$ ve böylece Yardımcı Teorem 4.3 ten $D^t_s u \in b_{\alpha+t}$ dir.

(f) $\Rightarrow$ (a): Farz edelim ki $\alpha + t_0 > 0$ olacak şekilde öyle $s_0, t_0 \in \mathbb{R}$ vardır ki $(1-|x|^2)^{t_0}D^{t_0}_{s_0}u \in L^\infty_\alpha$ dır. Yani $D^{t_0}_{s_0}u \in b_{\alpha+t_0}$ dır. $c > \alpha + t_0 - 1$ alınsın. Yardımcı Teorem 4.1 gereği

$$D^{t_0}_{s_0}u(x) = \int_{\mathbb{B}} R_c(x,y) D^{t_0}_{s_0}u(y)\, d\nu_c(y)$$

dir. Eşitliğin her iki tarafına $D^{-t_0}_{s_0+t_0}$ operatörü uygulansın. Eşitliğin sol tarafında Yardımcı Teorem 2.3.2 (d) kullanılır ve sağ tarafında Yardımcı Teorem 2.3.3 ten $D^{-t_0}_{s_0+t_0}$ integralin içine atılırsa

$$u(x) = \int_{\mathbb{B}} D^{-t_0}_{s_0+t_0} R_c(x,y)\, D^{t_0}_{s_0}u(y)\, d\nu_c(y)$$

elde edilir.

$\alpha+N > 0$ olacak şekilde $N \in \mathbb{N}$ alınsın. m, $|m| = N$ olacak şekilde bir çoklu indeks olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\partial^m u &= \partial^m \int_{\mathbb{B}} D^{-t_0}_{s_0+t_0} R_c(x,y) D^{t_0}_{s_0}u(y)\, d\nu_c(y) \\
&= \int_{\mathbb{B}} \partial^m \left(D^{-t_0}_{s_0+t_0} R_c(x,y)\right) D^{t_0}_{s_0}u(y)\, d\nu_c(y)
\end{aligned}$$

dir. $n + c - t_0 + N > n + \alpha + N - 1 > n - 1 > 0$ olduğundan Yardımcı Teorem 2.4.3 e başvurulursa

$$(1-|x|^2)^N |\partial^m u(x)| \lesssim (1-|x|^2)^N \int_{\mathbb{B}} \frac{(1-|y|^2)^{t_0}|D^{t_0}_{s_0}u(y)|}{[x,y]^{n+c-t_0+N}} (1-|y|^2)^{c-t_0}\, d\nu(y)$$

dir. $N+\alpha > 0$ ve $c-t_0 > \alpha-1$ olduğundan Teorem 3.1 gereği $(1-|x|^2)^N\partial^m u \in L^\infty_\alpha$ dır.

Yukarıdaki ispat tekrar edilerek (1.3) nin sağlandığı görülür. ■

Şimdi benzer olarak Teorem 1.3 ispatlanacaktır. Öncelikle $\alpha > 0$ için Teorem 1.2 nin ispatını veren yardımcı teoremlerin $b_{\alpha 0}$ karşılıklarını bulalım.

Yardımcı Teorem 4.8. *$\alpha > 0$ ve $u \in h(\mathbb{B})$ olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:*

(a) $u \in b_{\alpha 0}$ dır.

(b) $(1-|x|^2)|\nabla u(x)| \in \mathcal{C}_{\alpha 0}$ dır.

(c) $(1-|x|^2)\mathcal{R}u(x) \in \mathcal{C}_{\alpha 0}$ dır.

Kanıt. (a) $\Rightarrow$ (b): $u \in b_{\alpha 0}$ olsun. $s > \alpha - 1$ alınsın. Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $b_{\alpha 0} \in b_\alpha$ olduğundan Yardımcı Teorem 4.1 den

$$u(x) = \frac{1}{V_s}\int_{\mathbb{B}} R_s(x,y)u(y)(1-|y|^2)^s\, d\nu(y)$$

dir. Eşitliğin her iki tarafının kısmi türevini alalım. (2.9) gereği integral ve türev yer değiştirebilir. Buradan

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \frac{1}{V_s}\int_{\mathbb{B}} \frac{\partial}{\partial x_i} R_s(x,y)u(y)(1-|y|^2)^s\, d\nu(y)$$

bulunur. $s+1+n > \alpha + n > 0$ olduğundan Yardımcı Teorem 2.4.2 gereği

$$(1-|x|^2)\Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\Big| \lesssim (1-|x|^2)\int_{\mathbb{B}} \frac{1}{[x,y]^{n+s+1}}\big|u(y)\big|(1-|y|^2)^s\, d\nu(y)$$

elde edilir. $1+\alpha > 0, s > \alpha - 1$ olduğundan Teorem 3.3 den

$$\|(1-|x|^2)\Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\Big|\|_{\mathcal{C}_{\alpha 0}} \lesssim \|u\|_{b_\alpha 0}$$

dır. Açıktır ki $|\nabla u| \lesssim \sum_{i=0}^n |\partial_i u|$ dir. Buna göre $(1-|x|^2)|\nabla u(x)| \in \mathcal{C}_{\alpha 0}$ dır.

(b) $\Rightarrow$ (c): $(1-|x|^2)\big|\nabla u(x)\big| \in \mathcal{C}_{\alpha 0}$ olsun. $\mathcal{R}u(x) = x \cdot \nabla u(x)$ olduğundan

$$\big|\mathcal{R}u(x)\big| \leq \big|\nabla u(x)\big|$$

olur. Buradan açıktır ki $(1-|x|^2)\big|\mathcal{R}u(x)\big| \in \mathcal{C}_{\alpha 0}$ dır.

(c) $\Rightarrow$ (a): Farz edelim ki $(1-|x|^2)\mathcal{R}u(x) \in \mathcal{C}_{\alpha 0}$ olsun. $u \in b_{\alpha 0}$ olduğunu göstermek için tek yapılması gereken $u \in \mathcal{C}_{\alpha 0}$ olduğunu göstermektir. İlk olarak u fonksiyonunu $\mathcal{R}u$ cinsinden ifade edelim. Analiz ve (1.1) den

$$u(x) - u(0) = \int_0^1 x \cdot \nabla u(tx)\, dt = \int_0^1 \frac{\mathcal{R}u(tx)}{t}\, dt$$

dir. $s > \alpha$ için Yardımcı Teorem 4.1 gereği

$$\mathcal{R}u(x) = \int_{\mathbb{B}} R_s(x,y)\mathcal{R}u(y)\,d\nu_s(y)$$

dir. $x = 0$ alınsın. $\mathcal{R}u(0) = 0$ ve $R_s(0,y) = 1$ olacağından

$$\begin{aligned}\mathcal{R}u(0) &= \int_{\mathbb{B}} R_s(0,y)\mathcal{R}u(y)\,d\nu_s(y)\\ 0 &= \int_{\mathbb{B}} \mathcal{R}u(y)\,d\nu_s(y)\end{aligned}$$

dir. O halde

$$\mathcal{R}u(x) - \mathcal{R}u(0) = \int_{\mathbb{B}} \big(R_s(x,y) - 1\big)\mathcal{R}u(y)\,d\nu_s(y)$$

olur. Böylece

$$u(x) - u(0) = \int_0^1 \frac{1}{t} \int_{\mathbb{B}} \big(R_s(tx,y) - 1\big)\mathcal{R}u(y)\,d\nu_s(y)dt$$

elde edilir. Fubini teoreminden integraller yer değiştirebilir; dolayısıyla

$$\begin{aligned}|u(x) - u(0)| &\leq \int_0^1 \frac{1}{t} \int_{\mathbb{B}} |R_s(tx,y) - 1||\mathcal{R}u(y)|\,d\nu_s(y)dt\\ &= \int_{\mathbb{B}} \left(\int_0^1 \frac{|R_s(tx,y) - 1|}{t} dt\right) |\mathcal{R}u(y)|\,d\nu_s(y)\end{aligned}$$

dir. Sağdaki integrali

$$\int_0^1 \frac{|R_s(tx,y) - 1|}{t} dt = \int_0^{1/2} \frac{|R_s(tx,y) - 1|}{t} dt + \int_{1/2}^1 \frac{|R_s(tx,y) - 1|}{t} dt =: I_1 + I_2$$

şeklinde yazalım. I_1 in kestirimi için $R_s(tx,y) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(s) Z_k(tx,y)$ seri açılımı, γ_k ve $Z_k(\cdot,\cdot)$ fonksiyonlarının kestirimi kullanılırsa

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2} \frac{|R_s(tx,y) - 1|}{t}\, dt &= \frac{1}{t} \int_0^{1/2} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(s) Z_k(tx,y)\, dt\\ &\lesssim \frac{1}{t} \int_0^{1/2} \sum_{k=1}^{\infty} k^{s+n-1} t^k\, dt\\ &\lesssim \frac{1}{t} \int_0^{1/2} \sum_{k=1}^{\infty} k^{s+n-1} (1/2)^{k-1}\, dt \lesssim 1\end{aligned}$$

dir. İkinci integral I_2 nin kestirimi için sırasıyla Yardımcı Teorem 2.4.2 ve [5], Yardımcı Teorem 6.1 den

$$\begin{aligned}\int_{1/2}^{1} \frac{|R_s(tx,y)-1|}{t}\,dt &\leq 2\int_0^1 |R_s(tx,y)|+1\,dt \\ &\lesssim 2+2\int_0^1 \frac{1}{[tx,y]^{n+s}}\,dt \\ &\lesssim 2+2\int_0^1 \frac{1}{|t|y|x-\frac{y}{|y|}|^{n+s}}\,dt \lesssim \frac{1}{[x,y]^{n+s-1}}\end{aligned}$$

dir. O halde

$$|u(x)-u(0)| \lesssim \int_{\mathbb{B}} \frac{1}{[x,y]^{n+s-1}}(1-|y|^2)|\mathcal{R}u(y)|(1-|y|^2)^{s-1}\,d\nu(y)$$

bulunur. $(1-|y|^2)|\mathcal{R}u| \in \mathcal{C}_{\alpha 0}$ ve $s-1-\alpha > -1$, $\alpha > 0$ olduğundan Teorem 3.3 ten $u \in \mathcal{C}_{\alpha 0}$ dır. ■

Önceki yardımcı teorem daha yüksek mertebeden türevlere genişletilebilir.

Yardımcı Teorem 4.9. *$\alpha > 0$ ve $u \in h(\mathbb{B})$ olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:*

(a) $u \in b_{\alpha 0}$ dır.

(b) Her $N \in \mathbb{N}$ ve $|m| = N$ olacak şekilde her m çoklu indeksi için $(1-|x|^2)^N \partial^m u \in \mathcal{C}_{\alpha 0}$ dır.

(c) Öyle bir $N \in \mathbb{N}$ vardır ki $|m| = N$ olacak şekilde her m çoklu indeksi için $(1-|x|^2)^N \partial^m u \in \mathcal{C}_{\alpha 0}$ dır.

(d) Her $N \in \mathbb{N}$ için $(1-|x|^2)^N \mathcal{R}^N u \in \mathcal{C}_{\alpha 0}$ dır.

(e) Öyle bir $N \in \mathbb{N}$ vardır ki $(1-|x|^2)^N \mathcal{R}u \in \mathcal{C}_{\alpha 0}$ dır.

Kanıt. Öncelikle (a) $\Leftrightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (c) denkliğini gösterelim.

(a) $\Rightarrow$ (b): Farzedelim ki $u \in b_{\alpha 0}$ olsun. Yardımcı Teorem 4.8 gereği her $i = 1, 2, \ldots, n$ için $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in b_{(\alpha+1)0}$ dır. Yardımcı Teorem 4.8 e tekrar başvurulursa her $i, j = 1, 2, \ldots, n$ için $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} \in b_{(\alpha+2)0}$ elde edilir. Bu şekilde devam edilerek $|m| = N$ olan her m için $\partial^m u \in b_{(\alpha+N)0}$ bulunur.

(b) $\Rightarrow$ (c): Bu kısım açıktır.

(c) $\Rightarrow$ (a): Farz edelim ki $|m| = N$ olan her m çoklu indeksi için $\partial^m u \in b_{(\alpha+N)0}$ olsun. Bir m' çoklu indeksi $|m'| = N-1$ olacak şekilde alınsın. O halde her $i = 1, 2, \ldots, n$ için $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\partial^{m'} u \in b_{(\alpha+N)0}$ dır. Bu durumda Yardımcı Teorem 4.8 gereği $\partial^{m'} u \in b_{(\alpha+N-1)0}$ dır. Aynı tartışma yeterince devam ettirilirse $u \in b_{\alpha 0}$ elde edilir.

Benzer şekilde (a) $\Leftrightarrow$ (d) $\Leftrightarrow$ (e) denkliğini gösterelim.

(a) $\Rightarrow$ (d): Farzedelim ki $u \in b_{\alpha 0}$ olsun. Yardımcı Teorem 4.8 gereği $\mathcal{R}u \in b_{(\alpha+1)0}$ dır. $\mathcal{R}u$ için tekrar Yardımcı Teorem 4.8 e başvurulursa $\mathcal{R}^2 u = \mathcal{R}(\mathcal{R}u) \in b_{(\alpha+2)0}$ elde edilir. Bu şekilde devam edilerek her $N \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{R}^N u \in b_{(\alpha+N)0}$ sonucuna ulaşılır.

(d) $\Rightarrow$ (e): Bu kısım açıktır.

(e) $\Rightarrow$ (a): Farz edelim ki $\mathcal{R}^N u = \mathcal{R}(\mathcal{R}^{N-1}u) \in b_{(\alpha+N)0}$ olsun. Yardımcı Teorem 4.8 gereği $\mathcal{R}^{N-1}u = \mathcal{R}(\mathcal{R}^{N-2}u) \in b_{(\alpha+N-1)0}$ olur. O halde yine Yardımcı Teorem 4.8 den $\mathcal{R}^{N-2}u \in b_{(\alpha+N-2)0}$ dır. Aynı tartışma devam ettirilerek $u \in b_{\alpha 0}$ elde edilir. ■

Şimdi Yardımcı Teorem 4.8 e benzer bir yardımcı teoremi D_s^t türev operatörlerini kullanarak ispatlayalım. Hâlâ $\alpha > 0$ bölgesindeyiz.

Yardımcı Teorem 4.10. *$\alpha > 0$ ve $u \in h(\mathbb{B})$ olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:*

(a) $u \in b_{\alpha 0}$ dır.

(b) $\alpha + t > 0$ olacak şekilde her $s, t \in \mathbb{R}$ için $(1 - |x|^2)^t D_s^t u \in \mathcal{C}_{\alpha 0}$ dır.

(c) $\alpha + t > 0$ olacak şekilde öyle $s, t \in \mathbb{R}$ vardır ki $(1 - |x|^2)^t D_s^t f \in \mathcal{C}_{\alpha 0}$ dır.

Kanıt. (a) $\Rightarrow$ (b): $u \in b_{\alpha 0}$ olsun. $c > \alpha - 1$ alınsın. Yardımcı Teorem 4.1 den

$$u(x) = \int_{\mathbb{B}} R_c(x, y) u(y)\, d\nu_c(y)$$

dir. Eşitliğin her iki tarafına D_s^t operatörü uygulansın. Yardımcı Teorem 2.3.3 ten operatör integralin içine atılabilir. Dolayısıyla

$$D_s^t u(x) = \int_{\mathbb{B}} D_s^t R_c(x, y) u(y)\, d\nu_c(y)$$

olur. $n + c + t > n + \alpha - 1 + t > n - 1 > 0$ olduğundan Yardımcı Teorem 2.4.3 kullanılarak

$$(1 - |x|^2)^t |D_s^t u(x)| \lesssim (1 - |x|^2)^t \int_{\mathbb{B}} \frac{1}{[x, y]^{n+c+t}} |u(y)| (1 - |y|^2)^c\, d\nu(y)$$

elde edilir. $\alpha + t > 0$ ve $c > \alpha - 1$ olduğundan Teorem 3.3 ten $\alpha + t > 0$ olacak şekilde her $s, t \in \mathbb{R}$ için $(1 - |x|^2)^t D_s^t u \in \mathcal{C}_{\alpha 0}$ dır.

(b) $\Rightarrow$ (c): Bu kısım açıktır.

(c) $\Rightarrow$ (a): Farz edelim ki $(1-|x|^2)^t D_s^t u(x) \in \mathcal{C}_{\alpha 0}$ olsun. O halde $D_s^t u \in b_{(\alpha+t)0}$ dır. $c > \alpha + t - 1$ olmak üzere c alınsın. Yardımcı Teorem 4.1 gereği

$$D_s^t u(x) = \int_{\mathbb{B}} R_c(x, y) D_s^t u(y)\, d\nu_c(y)$$

dir. Eşitliğin her iki tarafına D_{s+t}^{-t} operatörü uygulansın. Sol tarafta Yardımcı Teorem 2.3.2 (d) kullanılır ve sağ tarafta Yardımcı Teorem 2.3.3 ten D_{s+t}^{-t} integralin içine alınırsa

$$u(x) = \int_{\mathbb{B}} D_{s+t}^{-t} R_c(x, y) D_s^t u(y)\, d\nu_c(y)$$

elde edilir. $n + c - t > n + \alpha + t - 1 - t > n - 1 > 0$ olduğundan Yardımcı Teorem 2.4.3 ten

$$|u(x)| \lesssim \int_{\mathbb{B}} \frac{1}{[x, y]^{n+c-t}} (1 - |x|^2)^t |D_s^t u(y)| (1 - |y|^2)^{c-t}\, d\nu(y)$$

dir. Buradan $\alpha + t > 0, c - t > \alpha - 1$ için Teorem 3.3 e başvurulursa $u \in b_{\alpha 0}$ elde edilir. ∎

Aşağıdaki yardımcı teorem bir u fonksiyonunun N yinci mertebeden türevleri $b_{\alpha 0}$ da ise daha küçük mertebeden tüm türevlerinin de $b_{\alpha 0}$ da olacağını ifade eder.

Yardımcı Teorem 4.11. *$\alpha > 0$ ve $u \in h(\mathbb{B})$ olsun. Eğer $|m| = N$ olan her m çoklu indeksi için $\partial^m u \in b_{\alpha 0}$ ise $m' \leq N$ olan her m' çoklu indeksi için $\partial^{m'} u \in b_{\alpha 0}$ dır.*

Kanıt. $|m'| \leq N$ olan bir m' çoklu indeksi alalım. Varsayımdan $|m| = N$ olan her m çoklu indeksi için $\partial^m u \in b_{\alpha 0}$ dır. Yardımcı Teorem 4.9 dan $\partial^{m'} \partial^m u \in b_{(\alpha+|m'|)0}$ olur. (1.4) gereği $\partial^m \partial^{m'} u = \partial^{m'} \partial^m u \in b_{(\alpha+N)0}$ dır. Bu durum her $|m| = N$ için doğru olduğundan Yardımcı Teorem 4.9 gereği $\partial^{m'} u \in b_{\alpha 0}$ elde edilir. ∎

Artık $\alpha > 0$ kısıtı kaldırılarak tüm $\alpha \in \mathbb{R}$ için Teorem 1.3 ispatlanabilir.

Teorem 1.3 ün kanıtı. Sırasıyla (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d) $\Rightarrow$ (e) $\Rightarrow$ (f) $\Rightarrow$ (a) gerektirmelerini göstereceğiz. (a) $\Rightarrow$ (b), (c) $\Rightarrow$ (d) ve (e) $\Rightarrow$ (f) gerektirmeleri açıktır. Bir çok defa Yardımcı Teorem 4.9 ve 4.10 a başvuracağız. Bu durumlarda b nin alt indeksinin daima 0 dan büyük olmasına dikkat edilmelidir.

(b) $\Rightarrow$ (c): Farz edelim ki $\alpha + N_0 > 0$ olacak şekilde öyle bir N_0 vardır ki $(1-|x|^2)^{N_0}\partial^m u \in \mathcal{C}_{\alpha 0}$ dır. Yani $|m| = N_0$ olan her m çoklu indeksi için $\partial^m u \in b_{(\alpha+N_0)0}$ dır.

Yardımcı Teorem 4.11 gereği $|m'| < N_0$ olan her m' çoklu indeksi için $\partial^{m'} u \in b_{(\alpha+N_0)0}$ dır. Diğer yandan Yardımcı Teorem 4.7 (b) gereği her $|m'| < N_0$ için $p_{m'}\partial^{m'} u \in \mathcal{C}_{(\alpha+N_0)0}$ dır. Yardımcı Teorem 4.5 başvurursak

$$\mathcal{R}^{N_0} u \in b_{(\alpha+N_0)0} \tag{4.8}$$

dır.

Şimdi $\alpha + N > 0$ olacak şekilde $N \in \mathbb{N}$ alınsın. Eğer $N > N_0$ ise Yardımcı Teorem 4.9 ve (4.8) gereği $\mathcal{R}^N u = \mathcal{R}^{N-N_0}(\mathcal{R}^{N_0} u) \in b_{(\alpha+N_0+(N-N_0))0} = b_{(\alpha+N)0}$ dir. Benzer olarak, eğer $N < N_0$ ise $\mathcal{R}^{N_0} u = \mathcal{R}^{N_0-N}(\mathcal{R}^N u) \in b_{(\alpha+N_0)0}$ dır. Yardımcı Teorem 4.9 ve (4.8) gereği $\mathcal{R}^N u \in b_{(\alpha+N_0-(N_0-N))0} = b_{(\alpha+N)0}$ dir. Buradan $\alpha + N > 0$ olan her $N \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{R}^N u \in b_{(\alpha+N)0}$ bulunur.

(d) $\Rightarrow$ (e): Farz edelim ki $\alpha + N_0 > 0$ olacak şekilde öyle bir $N_0 \in \mathbb{N}$ vardır ki $(1-|x|^2)^{N_0}\mathcal{R}^{N_0} u \in \mathcal{C}_{\alpha 0}$ dır. Yani $\mathcal{R}^{N_0} u \in b_{(\alpha+N_0)0}$ dır. $\alpha + t > 0$ olacak şekilde herhangi $s, t \in \mathbb{R}$ alınsın. Yardımcı Teorem 4.10 dan $D_s^t(\mathcal{R}^{N_0} u) \in b_{(\alpha+N_0+t)0}$ elde edilir. Yardımcı Teorem 2.3.2 (e) den D_s^t ve $\mathcal{R}^{N_0}$ değişmelidir. Bu nedenle $\mathcal{R}^{N_0}(D_s^t u) \in b_{(\alpha+N_0+t)0}$ ve böylece Yardımcı Teorem 4.9 dan $D_s^t u \in b_{(\alpha+t)0}$ dır.

(f) $\Rightarrow$ (a): Farz edelim ki $\alpha + t_0 > 0$ olacak şekilde öyle $s_0, t_0 \in \mathbb{R}$ vardır ki $(1-|x|^2)^{t_0} D_{s_0}^{t_0} u \in \mathcal{C}_{\alpha 0}$ dır. Yani $D_{s_0}^{t_0} u \in b_{(\alpha+t_0)0}$ dır. $c > \alpha + t_0 - 1$ alınsın. Yardımcı Teorem 4.1 gereği

$$D_{s_0}^{t_0} u(x) = \int_{\mathbb{B}} R_c(x,y) D_{s_0}^{t_0} u(y)\, d\nu_c(y)$$

dir. Eşitliğin her iki tarafına $D_{s_0+t_0}^{-t_0}$ operatörü uygulansın. Eşitliğin sol tarafında Yardımcı Teorem 2.3.2 (d) kullanılır ve sağ tarafında Yardımcı Teorem 2.3.3 ten $D_{s_0+t_0}^{-t_0}$ integralin içine atılırsa

$$u(x) = \int_{\mathbb{B}} D_{s_0+t_0}^{-t_0} R_c(x,y)\, D_{s_0}^{t_0} u(y)\, d\nu_c(y)$$

elde edilir.

$\alpha+N>0$ olacak şekilde $N\in\mathbb{N}$ alınsın. m, $|m|=N$ olacak şekilde bir çoklu indeks olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\partial^m u &= \partial^m \int_{\mathbb{B}} D_{s_0+t_0}^{-t_0} R_c(x,y) D_{s_0}^{t_0} u(y)\, d\nu_c(y)\\ &= \int_{\mathbb{B}} \partial^m \left(D_{s_0+t_0}^{-t_0} R_c(x,y)\right) D_{s_0}^{t_0} u(y)\, d\nu_c(y)\end{aligned}$$

dir. $n+c-t_0+N>n+\alpha+N-1>n-1>0$ olduğundan Yardımcı Teorem 2.4.3 e başvurulursa

$$(1-|x|^2)^N|\partial^m u(x)| \lesssim (1-|x|^2)^N \int_{\mathbb{B}} \frac{(1-|y|^2)^{t_0}|D_{s_0}^{t_0}u(y)|}{[x,y]^{n+c-t_0+N}}(1-|y|^2)^{c-t_0}\, d\nu(y)$$

dir. $N+\alpha>0$ ve $c-t_0>\alpha-1$ olacağından Teorem 3.3 ten $(1-|x|^2)^N\partial^m u\in\mathcal{C}_{\alpha 0}$ dır. ■

Şu halde Teorem 1.2 ve Teorem 1.3 ispatlandığından Tanım 1.4 iyi tanımlıdır. Yani artık tüm $\alpha\in\mathbb{R}$ için b_α ağırlıklı harmonik Bloch ve $b_{\alpha 0}$ küçük Bloch uzaylarına sahibiz.

5. HARMONİK BLOCH VE KÜÇÜK BLOCH UZAYLARININ TEMEL ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde, b_α ve $b_{\alpha 0}$ uzaylarının temel özellikleri incelenecektir.

$\alpha > 0$ için b_α ve $b_{\alpha 0}$ altuzayı için $b_{\alpha 0} \subset b_\alpha \subset L^\infty_\alpha$ dır. Böylece uzaylar üzerinde L^∞_α dan indirgenen doğal bir norm vardır. Dolayısıyla $\alpha > 0$ için b_α uzayı

$$\|u\|_{b_\alpha} := \sup_{x\in\mathbb{B}} (1-|x|^2)^\alpha |u(x)|$$

normu ile bir normlu uzaydır. Fakat $\alpha \leq 0$ iken b_α, L^∞_α nın altuzayı olmadığından böyle doğal bir norm yoktur.

$\alpha \in \mathbb{R}$ için b_α ve $b_{\alpha 0}$ uzayları üzerinde (1.3) ile verilen bir çok denk norm vardır. Bundan sonra daha çok D^t_s operatörü tarafından yaratılan norm kullanılacaktır.

Önerme 5.1. *$\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. $\alpha + t > 0$ olacak şekilde $s, t \in \mathbb{R}$ alınsın. O halde*

$$\|u\|_{b_\alpha} := \|(1-|x|^2)^t D^t_s u\|_{L^\infty_\alpha} = \|I^t_s u\|_{L^\infty_\alpha} = \sup_{x\in\mathbb{B}} (1-|x|^2)^{\alpha+t} |D^t_s u(x)|$$

b_α üzerinde bir normdur.

Kanıt. $u = 0$ olsun. Bu durumda $D^t_s u = 0$ ve bu nedenle $(1-|x|^2)^{\alpha+t}|D^t_s u(x)| = 0$ dır. O halde $\|u\|_{b_\alpha} = 0$ dır. Tersine $\|u\|_{b_\alpha} = 0$ olsun. $D^t_s u(x)$ sürekli olduğundan her $x \in \mathbb{B}$ için $(1-|x|^2)^{\alpha+t}|D^t_s u(x)| = 0$ dır. $(1-|x|^2)^{\alpha+t} \neq 0$ olduğundan $D^t_s u = 0$ ve böylece $u = 0$ elde edilir.

$\tau \in \mathbb{C}$ olsun. Buradan

$$\|\tau u\|_{b_\alpha} = \|I^t_s(\tau u)\|_{L^\infty_\alpha} = |\tau| \|I^t_s(u)\|_{L^\infty_\alpha} = |\tau| \|u\|_{b_\alpha}$$

bulunur.

$u, v \in b_\alpha$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} \|u+v\|_{b_\alpha} = \|I^t_s(u+v)\|_{L^\infty_\alpha} &= \|I^t_s u + I^t_s v\|_{L^\infty_\alpha} \\ &\leq \|I^t_s u\|_{L^\infty_\alpha} + \|I^t_s v\|_{L^\infty_\alpha} \\ &= \|u\|_{b_\alpha} + \|v\|_{b_\alpha} \end{aligned}$$

dır. ■

Görüldüğü üzere $\alpha+t>0$ olacak şekilde herhangi s,t çifti b_α ve $b_{\alpha 0}$ uzayları üzerinde bir norm verir. (1.3) özelliğinden tüm bu normlar denktir. Bundan sonra s ve t ye bağımlılığı belirtmeden bu normlardan herhangi birini $\|\cdot\|_{b_\alpha}$ ile göstereceğiz.

İlk olarak tüm b_α uzaylarının izomorfik olduklarını gösterelim. Benzer olarak $b_{\alpha 0}$ uzaylarının izomorfik oldukları gösterilebilir. Fakat öncelikle ispatta yararlanılacak bir yardımcı teorem verelim.

Yardımcı Teorem 5.2. *Herhangi $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $s,t \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:*

(a) $u \in b_\alpha$ olması için gerek ve yeter şart $D_s^t u \in b_{\alpha+t}$ olmasıdır.

(b) $u \in b_{\alpha 0}$ olması için gerek ve yeter şart $D_s^t u \in b_{(\alpha+t)0}$ olmasıdır.

(c) $D_s^t : b_\alpha \to b_{\alpha+t}$ operatörü doğrusal, birebir ve örtendir.

(d) $D_s^t : b_{\alpha 0} \to b_{(\alpha+t)0}$ operatörü doğrusal, birebir ve örtendir.

Kanıt. (a) ve (c) kısımları ispatlanacaktır. (b) ve (d) için ispat tamamen benzerdir.

(a): $\alpha + t^{'} > 0$ olacak şekilde $s, t^{'} \in \mathbb{R}$ alınsın. Bu durumda Teorem 1.2 gereği

$$u \in b_\alpha \Leftrightarrow D_s^{t'} u \in b_{\alpha+t'} \tag{5.1}$$

olur. Ayrıca yine Teorem 1.2 den

$$D_s^t u \in b_{\alpha+t} \Leftrightarrow D_{s+t}^{t'-t}(D_s^t u) \in b_{\alpha+t'}$$

yazılabilir. Yardımcı Teorem 2.3.2 (c) den $D_{s+t}^{t'-t} D_s^t = D_s^{t'}$ olur. O halde

$$D_s^t u \in b_{\alpha+t} \Leftrightarrow D_s^{t'} u \in b_{\alpha+t'} \tag{5.2}$$

elde edilir. (5.1) ve (5.2) den $u \in b_\alpha$ olması için gerek ve yeter şart $D_s^t u \in b_{\alpha+t}$ olmasıdır.

(b): D_s^t operatörünün doğrusallığı açıktır. Yardımcı Teorem 2.3.2 (d) den D_s^t operatörü $h(\mathbb{B})$ üzerinde birebirdir. Dolayısıyla b_α üzerinde birebirdir. $v \in b_{\alpha+t}$ olsun. (a) şıkkından $u = D_{s+t}^{-t} v \in b_\alpha$ dır. $D_s^t u = D_s^t(D_{s+t}^{-t} v) = v$ olduğundan $D_s^t : b_\alpha \to b_{\alpha+t}$ örtendir. ∎

Şimdi tüm b_α uzaylarının izomorfik olduğunu gösterelim. Aşağıdaki önerme herhangi bir kısıtlama olmaksızın her $t \in \mathbb{R}$ için geçerlidir.

Önerme 5.3. *$\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. Herhangi $s, t \in \mathbb{R}$ için $D_s^t : b_\alpha \to b_{\alpha+t}$ dönüşümü bir izomorfizmdir ve uygun normlar kullanıldığında bir izometridir.*

Kanıt. Yardımcı Teorem 5.2 (a) ve (c) den herhangi $s, t \in \mathbb{R}$ için $D_s^t : b_\alpha \to b_{\alpha+t}$ dönüşümü birebir ve örten bir doğrusal dönüşümdür. Geriye verilen $\alpha \in \mathbb{R}$ için $D_s^t : b_\alpha \to b_{\alpha+t}$ ve $D_{s+t}^{-t} : b_{\alpha+t} \to b_\alpha$ operatörlerinin sürekli (sınırlı) olduklarını göstermek kalır.

$\alpha + t + t' > 0$ olacak şekilde t' alınsın. b_α üzerinde $\|u\|_{b_\alpha} = \|I_s^{t+t'} u\|_{L^\infty_\alpha}$ ve $b_{\alpha+t}$ üzerinde $\|v\|_{b_{\alpha+t}} = \|I_{s+t}^{t'} v\|_{L^\infty_{\alpha+t}}$ normları seçilsin. Yardımcı Teorem 2.3.2 (c) den

$$\begin{aligned}
\|D_s^t u\|_{b_{\alpha+t}} &= \|I_{s+t}^{t'} D_s^t u\|_{L^\infty_{\alpha+t}} = \|(1-|x|^2)^{t'} D_{s+t}^{t'} (D_s^t u)\|_{L^\infty_{\alpha+t}} \\
&= \|(1-|x|^2)^{t'} D_s^{t'+t} u\|_{L^\infty_{\alpha+t}} = \|I_s^{t'+t} u\|_{L^\infty_\alpha} = \|u\|_{b_\alpha}
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $D_s^t : b_\alpha \to b_{\alpha+t}$ bir izometridir.

$D_{s+t}^{-t} : b_{\alpha+t} \to b_\alpha$ için benzer bir tartışma ile $\|D_{s+t}^{-t} v\|_{b_\alpha} = \|v\|_{b_{\alpha+t}}$ bulunur. Böylece $D_s^t : b_\alpha \to b_{\alpha+t}$ bir izomorfizmdir. ■

Benzer şekilde tüm $b_{\alpha 0}$ uzayları izomorfiktir.

Önerme 5.4. *$\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. Herhangi $s, t \in \mathbb{R}$ için $D_s^t : b_{\alpha 0} \to b_{(\alpha+t)0}$ dönüşümü bir izomorfizmdir ve uygun normlar kullanıldığında bir izometridir.*

Kanıt. Yardımcı Teorem 5.2 ün (a) ve (c) şartları yerine (b) ve (d) şartlarından yararlanmak koşulu ile yukarıdaki ispatla benzerdir. ■

Şimdi her $\alpha \in \mathbb{R}$ için b_α ve $b_{\alpha 0}$ uzaylarının tam, yani Banach uzayı olduklarını gösterelim. Önce $\alpha > 0$ durumuna bakalım.

Teorem 5.5. *$\alpha > 0$ için b_α uzayları tamdır ve böylece Banach uzaylarıdır.*

Kanıt. Farzedelim ki (u_j), b_α da bir Cauchy dizisi olsun. O halde her $x \in \mathbb{B}$ ve j, k için

$$\begin{aligned}
(1-|x|^2)^\alpha |u_j(x) - u_k(x)| &\leq \|u_j - u_k\|_{b_\alpha} \\
|u_j(x) - u_k(x)| &\leq \frac{\|u_j - u_k\|_{b_\alpha}}{(1-|x|^2)^\alpha}
\end{aligned}$$

dır. Bu durumda (u_j) dizisi bir u fonksiyonuna $\mathbb{B}$ de noktasal ve $\mathbb{B}$ nin kompakt altkümelerinde düzgün yakınsaktır. Şu halde $u \in b_\alpha$ ve $j \to \infty$ iken b_α da $(u_j) \to u$ olduğu gösterilirse ispat biter.

(u_j) dizisi $\mathbb{B}$ nin kompakt altkümelerinde u ya düzgün yakınsadığından Teorem 2.1.9 gereği $u \in h(\mathbb{B})$ dir. Diğer yandan (u_j) Cauchy dizisi olduğu için her j için $\|u_j\|_{b_\alpha} = \sup_{x\in\mathbb{B}}(1-|x|^2)^\alpha |u_j(x)| \leq M$ olacak şekilde bir M sabiti vardır. O halde her $x \in \mathbb{B}$ ve j için $(1-|x|^2)^\alpha |u_j(x)| \leq M$ dir. Burada $j \to \infty$ iken limit alınırsa her $x \in \mathbb{B}$ için $(1-|x|^2)^\alpha |u(x)| \leq M$ bulunur. Böylece $u \in b_\alpha$ dır.

(u_j), b_α da bir Cauchy dizisi olduğundan verilen $\varepsilon > 0$ için öyle bir $N(\varepsilon)$ vardır ki $j, k > N(\varepsilon)$ için

$$\|u_j - u_k\|_{b_\alpha} = \sup_{x\in\mathbb{B}}(1-|x|^2)^\alpha |u_j(x) - u_k(x)| < \varepsilon$$

dur. Burada $k \to \infty$ iken limit alınırsa

$$\|u_j - u\|_{b_\alpha} = \sup_{x\in\mathbb{B}}(1-|x|^2)^\alpha |u_j(x) - u(x)| \leq \varepsilon$$

bulunur. O halde $j \to \infty$ iken (u_j) Cauchy dizisi b_α da u fonksiyonua yakınsar. Bu da istenilen sonuçtur. ■

Aşağıdaki teorem $\alpha \in \mathbb{R}$ için b_α ve $b_{\alpha 0}$ uzaylarının Banach uzayı olduklarını söyler.

Teorem 5.6. *Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için b_α ve $b_{\alpha 0}$ uzayları tamdır.*

Kanıt. $\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. $\alpha > 0$ ise Teorem 5.5 ten b_α uzayı tamdır. $\alpha \leq 0$ ise $\alpha + t > 0$ olacak şekilde $s, t \in \mathbb{R}$ alınsın. (u_j), b_α da bir Cauchy dizisi olsun. Önerme 5.3 ten açıktır ki $(D_s^t u_j)$, $b_{\alpha+t}$ de bir Cauchy dizisidir. Buna göre Teorem 5.5 ten öyle bir $v \in b_{\alpha+t}$ vardır ki $j \to \infty$ iken $b_{\alpha+t}$ de $(D_s^t u_j) \to v$ dir. $u = D_{s+t}^{-t} v \in b_\alpha$ olsun. Önerme 5.3 ve Teorem 2.3.2 (d) den

$$\|u_j - u\|_{b_\alpha} = \|D_s^t(u_j - u)\|_{b_{\alpha+t}} = \|D_s^t u_j - v\|_{b_{\alpha+t}}$$

dir. $j \to \infty$ iken her iki tarafın limiti alınırsa b_α da $u_j \to u$ elde edilir. Keyfi Cauchy dizisi b_α da yakınsak olduğundan $\alpha \in \mathbb{R}$ için b_α uzayları tamdır.

Şimdi $b_{\alpha 0}$ ın tam olduğunu gösterelim. Öncelikle $\alpha > 0$ alınsın. (u_j), $b_{\alpha 0}$ da bir Cauchy dizisi olsun. O halde (u_j), b_α da bir Cauchy dizisi olur ki b_α tam olduğundan öyle bir $u \in b_\alpha$ vardır ki $j \to \infty$ iken b_α da $(u_j) \to u$ dur. Geriye $u \in b_{\alpha 0}$ olması için $\lim_{|x|\to 1^-}(1-|x|^2)^\alpha u(x) = 0$ olduğunu göstermek kalır.

(u_j), b_α da u ya yakınsak olduğundan verilen $\varepsilon > 0$ için öyle bir J vardır ki $j > J$ için $(1-|x|^2)^\alpha |u_j(x) - u(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ dir. $j_0 > J$ alınsın. Bu durumda

$$(1-|x|^2)^\alpha |u(x)| \le (1-|x|^2)^\alpha |u_{j_0}(x) - u(x)| + (1-|x|^2)^\alpha |u_{j_0}(x)|$$

yazılabilir. Diğer yandan $u_{j_0} \in b_{\alpha 0}$ olduğundan öyle bir $\rho < 1$ vardır ki $\rho < |x| < 1$ iken $(1-|x|^2)^\alpha |u_{j_0}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ olur. Böylece $\rho < |x| < 1$ iken

$$(1-|x|^2)^\alpha |u(x)| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

elde edilir. Böylece $u \in b_{\alpha 0}$ dır. Dolayısıyla $\alpha > 0$ için $b_{\alpha 0}$ tamdır.

Benzer bir tartışma ile $\alpha \in \mathbb{R}$ için $b_{\alpha 0}$ uzayı tamdır. Daha kısa olarak $\alpha > 0$ için $b_{\alpha 0}$ uzayı tam ve Teorem 5.4 gereği tüm $b_{\alpha 0}$ uzayları izomorfik olduklarından her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $b_{\alpha 0}$ uzayı tamdır. ■

Sonuç 5.7. *$b_{\alpha 0}$, b_α nın kapalı bir altuzayıdır.*

Tanım 5.8. *$0 < r < 1$ için $u_r(x) = u(rx)$ olarak $\mathbb{B}$ de tanımlı u_r fonksiyonuna u nun r oranında genleşmesi denir.*

Teorem 5.9. *$\alpha \in \mathbb{R}$ ve $u \in b_\alpha$ olsun. $r \to 1^-$ iken b_α da $u_r \to u$ olması için gerek ve yeter şart $u \in b_{\alpha 0}$ olmasıdır.*

Kanıt. $u \in b_{\alpha 0}$ olsun. $\alpha + t > 0$ olacak şekilde $s, t \in \mathbb{R}$ alınsın. Teorem 1.3 ten $D_s^t u \in b_{(\alpha+t)0}$ dır. Bu durumda verilen bir $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta \in (0,1)$ vardır ki $\delta^2 < |x| < 1$ iken

$$(1-|x|^2)^{\alpha+t} |D_s^t u(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

olur. Ayrıca

$$\|u_r - u\|_{b_\alpha} = \|D_s^t(u_r - u)\|_{L^\infty_{\alpha+t}} = \sup_{x\in\mathbb{B}} (1-|x|^2)^{\alpha+t} |D_s^t(u_r(x) - u(x))|$$

normu

$$I_1 + I_2 := \sup_{|x|\le\delta} (1-|x|^2)^{\alpha+t} |D_s^t(u_r(x)-u(x))| + \sup_{\delta<|x|<1} (1-|x|^2)^{\alpha+t} |D_s^t(u_r(x)-u(x))|$$

toplamından küçük eşittir. Açıktır ki $|rx - x| = (1-r)|x| < 1-r$ dir. O halde $|x| \leq \delta$ için $D_s^t u$ düzgün sürekli olduğundan r, 1 e yeterince yakın iken

$$I_1 = \sup_{|x|\leq\delta}(1-|x|^2)^{\alpha+t}|D_s^t u(rx) - D_s^t u(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

bulunur.

Diğer yandan I_2 ifadesi

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \sup_{\delta<|x|<1}(1-|x|^2)^{\alpha+t}|D_s^t u_r(x)| + \sup_{\delta<|x|<1}(1-|x|^2)^{\alpha+t}|D_s^t u(x)| \\ &\leq \sup_{\delta<|x|<1}(1-|x|^2)^{\alpha+t}|D_s^t u_r(x)| + \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Eğer $\delta < |x| < 1$ ve $\delta < r < 1$ ise $\delta^2 < r|x| < 1$ dir. Bu durumda

$$(1-|x|^2)^{\alpha+t}|D_s^t u_r(x)| \leq (1-r^2|x|^2)^{\alpha+t}|D_s^t u_r(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

olur. O halde

$$I_2 < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3}$$

olur. Böylece r yeterince 1 e yakın iken

$$\|u_r - u\|_{b_\alpha} \leq I_1 + I_2 < \varepsilon$$

elde edilir. Buradan

$$\limsup_{r\to 1^-}\|u_r - u\|_{b_\alpha} \leq \varepsilon$$

bulunur. ε keyfi seçildiğinden $u \in b_{\alpha 0}$ için $r \to 1^-$ iken $\|u_r - u\|_{b_\alpha} \to 0$ dır.

Şimdi tersine gerektirmeyi inceleyelim. Herhangi $r \in (0,1)$ için u_r, $B(0, \frac{1}{r})$ de harmonik ve $\overline{\mathbb{B}}$ ta sınırlıdır. $\alpha + N > 0$ olan $N \in \mathbb{N}$ için bir m çoklu indeksi $|m| = N$ olacak şekilde alınsın. Açıktır ki $\partial^m u_r$ de $B(0, \frac{1}{r})$ de harmonik ve $\overline{\mathbb{B}}$ ta sınırlıdır. O halde

$$\lim_{|x|\to 1^-}(1-|x|^2)^{\alpha+N}|\partial^m u_r| = 0$$

olur. Böylece her bir $r \in (0,1)$ için $u_r \in b_{\alpha 0}$ dır. $b_{\alpha 0} \subset b_\alpha$ kapalı olup $r \to 1^-$ iken b_α da $u_r \to u$ ise $u \in b_{\alpha 0}$ dır. ■

Aşağıdaki teorem harmonik polinomların $\alpha \in \mathbb{R}$ için $b_{\alpha 0}$ uzaylarında yoğun olduğunu ifade eder.

Teorem 5.10. *$\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. b_α uzayındaki polinomların kapanışı $b_{\alpha 0}$ dır.*

Kanıt. İlk olarak $\alpha > 0$ olsun. $u \in b_{\alpha 0}$ alınsın. Teorem 5.9 dan verilen bir $\varepsilon > 0$ için öyle bir $r \in (0,1)$ vardır ki $\|u_r - u\|_{b_\alpha} < \varepsilon/2$ dir. u_r, $B(0, \frac{1}{r})$ de harmonik olduğundan Sonuç 2.1.20 den öyle $p_k \in \mathcal{H}_k(\mathbb{R}^n)$ ler vardır ki

$$\|u_r - \sum_{k=0}^{K} p_k\|_{L^\infty(\overline{\mathbb{B}})} < \frac{\varepsilon}{2}$$

dir. $\tilde{p}(x) = \sum_{k=0}^{K} p_k$ alınsın. O halde

$$\|u_r - \tilde{p}\|_{b_{\alpha 0}} = \sup_{x \in \mathbb{B}} (1 - |x|^2)\,|u_r(x) - \tilde{p}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

bulunur. Böylece

$$\|u - \tilde{p}\|_{b_{\alpha 0}} \leq \|u - u_r\|_{b_{\alpha 0}} + \|u_r - \tilde{p}\|_{b_{\alpha 0}} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

elde edilir. Buradan $\alpha > 0$ için harmonik polinomlar $b_{\alpha 0}$ da yoğundur.

Şimdi $\alpha \leq 0$ ve $v \in b_{\alpha 0}$ alınsın. $\alpha + t > 0$ olacak şekilde $s, t \in \mathbb{R}$ için $u = D_s^t v \in b_{(\alpha+t)0}$ olsun. Açıktır ki $p_k \in \mathcal{H}_k(\mathbb{R}^n)$ için $D_s^t p_k = d_k(s,t) p_k$ ve böylece $D_s^t(\mathcal{H}_k) = \mathcal{H}_k$ dir. Yani D_s^t harmonik polinomları harmonik polinomlara resmeder. Buna göre eğer bir (p_j) harmonik polinom dizisi $b_{(\alpha+t)0}$ da u ya yakınsarsa Önerme 5.4 gereği $\left(D_{s+t}^{-t} p_j\right)$ dizisi de $b_{\alpha 0}$ da v ye yakınsar.

Bu iki durumdan her $\alpha \in \mathbb{R}$ için harmonik polinomlar $b_{\alpha 0}$ da yoğundur. ■

Aşağıdaki teorem b_α uzaylarının ayrılabilir olmadığını fakat $b_{\alpha 0}$ uzaylarının ayrılabilir olduğunu ifade eder.

Teorem 5.11. *$\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır:*

(i) $b_{\alpha 0}$ harmonik küçük Bloch uzayları ayrılabilirdir.

(ii) b_α harmonik Bloch uzayları ayrılabilir değildir.

Kanıt. (i): İlk olarak $\alpha > 0$ olsun. $u \in b_{\alpha 0}$ ve $\varepsilon > 0$ alınsın. k yinci dereceden homojen harmonik polinomlar uzayı $\mathcal{H}_k$,

$$\binom{k+n-1}{n-1} - \binom{n+k-3}{n-1} =: m_k$$

boyutu ile sonlu boyutlu bir uzaydır. $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_{m_k}\}$, $\mathcal{H}_k$ nin bir tabanı olsun. A_k kümesi

$$A_k = \left\{ \sum_{j=1}^{m_k} a_j Y_j : a_j = b_j + ic_j, \quad b_j, c_j \in \mathbb{Q} \right\}$$

olarak tanımlansın. O halde A_k sayılabilirdir ve $\mathcal{H}_k$ uzayında yoğundur. Bu durumda herhangi $p_k \in \mathcal{H}_k$ alındığında öyle bir $\tilde{p}_k \in A_k$ vardır ki

$$\|p_k - \tilde{p}_k\|_{L^\infty} < \varepsilon$$

dur.

$B_k = \{\sum_{j=0}^{k} p_j,\ p_j \in A_j\}$ ve $B = \bigcup_{k=0}^{\infty} B_k$ olsun. B sayılabilirdir. $\alpha > 0$ için B nin $b_{\alpha 0}$ da yoğun olduğunu gösterelim. Teorem 5.10 gereği

$$\|u - p\|_{b_{\alpha 0}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde bir $p = \sum_{k=0}^{K} p_k$ harmonik polinomu vardır. Bu durumda her k için $\|p_k - \tilde{p}_k\|_{L^\infty} < \varepsilon/2K$ olacak şekilde bir $\tilde{p}_k \in A_k$ vardır. Böylece $\tilde{p} = \sum_{k=0}^{K} \tilde{p}_k \in B$ ve $\|p - \tilde{p}\|_{L^\infty} < \frac{\varepsilon}{2}$ yazılabilir. Üstelik $\alpha > 0$ için $(1 - |x|^2)^\alpha \leq 1$ olduğundan $\|p - \tilde{p}\|_{b_{\alpha 0}} < \frac{\varepsilon}{2}$ elde edilir. Böylece

$$\|u - \tilde{p}\|_{b_{\alpha 0}} \leq \|u - p\|_{b_{\alpha 0}} + \|p - \tilde{p}\|_{b_{\alpha 0}} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olur. Şu halde $\alpha > 0$ için B, $b_{\alpha 0}$ da yoğundur. Buna göre $\alpha > 0$ için $b_{\alpha 0}$ ayrılabilirdir.

$\alpha \leq 0$ için Önerme 5.4 ten $b_{\alpha 0}$ ve b_{10} uzayları arasındaki izometriler kullanılabilir. $D_s^{\alpha-1} : b_{10} \to b_{\alpha 0}$ operatörü alınsın. $D_s^{\alpha-1}$ tanımı gereği bir polinomu aynı dereceden ve aynı terim sayısında başka bir polinoma gönderir. Dolayısıyla $\alpha \leq 0$ için $D_s^{\alpha-1} B$, $b_{\alpha 0}$ da yoğundur. İstenilen sonuca ulaşılır.

(ii): b_0 uzayının ayrılabilir olmadığını gösterelim. Önerme 5.3 gereği tüm b_α uzayları izomorfik olduğundan, her bir b_α $(\alpha \in \mathbb{R})$ uzayının ayrılabilir olmadığı gösterilmiş olur.

$(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ için $(x_1, x_2, 0, 0, ..., 0)$ ile $\mathbb{C}$ uzayını

$$(x_1, x_2, 0, 0, ..., 0) \leftrightarrow z = x_1 + ix_2$$

şeklinde eşleyelim. $\theta \in [0, 2\pi)$ için $u_\theta : \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ fonksiyonunu

$$u_\theta(x_1, x_2, ..., x_n) = \log \frac{1}{1 - (x_1 + ix_2)e^{i\theta}}$$

olarak tanımlayalım. u_θ nın $\mathbb{B}$ de harmonik olduğu açıktır. Şimdi

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial x_1} = \frac{e^{i\theta}}{1-(x_1+ix_2)e^{i\theta}},\ \frac{\partial u_\theta}{\partial x_2} = \frac{ie^{i\theta}}{1-(x_1+ix_2)e^{i\theta}},\ \frac{\partial u_\theta}{\partial x_j} = 0,\ j=0,\ldots,n$$

olduğundan

$$(1-|x|^2)\big|\nabla u_\theta(x)\big| = (1-|x|)(1+|x|)\frac{\sqrt{2}}{|1-(x_1+ix_2)e^{i\theta}|}$$

bulunur. Üçgen eşitsizliğinden

$$|1-(x_1+ix_2)e^{i\theta}| \geq 1-\sqrt{x_1^2+x_2^2} \geq 1-\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2} = 1-|x|$$

tir. Böylece, $\|u_\theta\|_{b_0} = \sup\limits_{x\in\mathbb{B}}(1-|x|^2)\big|\nabla u_\theta(x)\big| \leq 2\sqrt{2}$ ve bu nedenle $u_\theta \in b_0$ dır.

Şimdi $\theta_1 \neq \theta_2 \in [0,2\pi)$ için $\|u_{\theta_1}-u_{\theta_2}\|_{b_0}$ ın kestirimini yapalım. Kolaylıkla görülür ki

$$(1-|x|^2)|\nabla(u_{\theta_1}-u_{\theta_2})| = (1-|x|)(1+|x|)\frac{\sqrt{2}\,|e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2}|}{|1-(x_1+ix_2)e^{i\theta_1}||1-(x_1+ix_2)e^{i\theta_2}|}$$

eşitliği doğrudur. $0\leq r<1$ için

$$x_1 = \mathrm{Re}(re^{-i\theta_1}),\ x_2 = \mathrm{Im}(re^{-i\theta_1}),\ x_3 = 0,...,x_n = 0$$

olsun. O halde $x_1+ix_2 = re^{-i\theta_1}$ ve $|x| = r$ dir. Buradan

$$(1-|x|^2)\big|\nabla(u_{\theta_1}-u_{\theta_2})\big| = \frac{(1-r)(1+r)\sqrt{2}|e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2}|}{(1-r)|1-re^{i(\theta_2-\theta_1)}|} = \frac{(1+r)\sqrt{2}|1-e^{i(\theta_2-\theta_1)}|}{|1-re^{i(\theta_2-\theta_1)}|}$$

elde edilir. $r\to 1^-$ iken sağ taraftaki terim $2\sqrt{2}$ ye yakınsar. Böylece

$$\|u_{\theta_1}-u_{\theta_2}\|_{b_0} = \sup_{x\in\mathbb{B}}(1-|x|^2)\big|\nabla(u_{\theta_1}-u_{\theta_2})(x)\big| \geq 2\sqrt{2}$$

dir. Burada u_θ lar sayılabilir olmayan çoklukta olduklarından b_0 ayrılabilir değildir. ■

Şimdi b_α ve $b_{\alpha 0}$ uzaylarında yer alan harmonik fonksiyon örnekleri bulunacaktır. Öncelikle bu uzaylar ile $\overline{\mathbb{B}}$ yi içeren bir açık kümede harmonik fonksiyonlar uzayı $h(\overline{\mathbb{B}})$ arasındaki ilişki incelenecektir.

Teorem 5.12. *$\alpha\in\mathbb{R}$ olsun. Aşağıdaki ifadeler doğrudur:*

(a) Eğer $u\in h(\overline{\mathbb{B}})$ ise her α için $u\in b_\alpha$ dır.

(b) Eğer $u \in h(\overline{\mathbb{B}})$ ise her α için $u \in b_{\alpha 0}$ dır.

Kanıt. (a): $u \in h(\overline{\mathbb{B}})$ olsun. Teorem 1.2 den $u \in b_\alpha$ olması için gerek ve yeter şart $\alpha + N > 0$ olacak şekilde $|m| = N$ olan her m çoklu indeksi için $\partial^m u \in b_{\alpha+N}$ olmasıdır. Harmonik fonksiyonların kısmi türevleri de harmonik olduğundan $u \in h(\overline{\mathbb{B}})$ için $\partial^m u \in h(\overline{\mathbb{B}})$ dir. Buna göre $|m| = N$ olan her m için $\sup_{x\in\mathbb{B}} |\partial^m u(x)| \leq M$ olacak şekilde bir M sabiti vardır. Buradan $\alpha + N > 0$ olduğundan $|m| = N$ olan her m için

$$\sup_{x\in\mathbb{B}} (1 - |x|^2)^{\alpha+N} |\partial^m u(x)| \leq M$$

elde edilir. Böylece $\partial^m u \in b_{\alpha+N}$ ve bu nedenle $u \in b_\alpha$ dır.

(b): $u \in h(\overline{\mathbb{B}})$ olsun. Teorem 1.3 ten $u \in b_{\alpha 0}$ olması için gerek ve yeter şart $\alpha + N > 0$ olacak şekilde $|m| = N$ olan her m çoklu indeksi için $\partial^m u \in b_{(\alpha+N)0}$ olmasıdır. $u \in h(\overline{\mathbb{B}})$ için $\partial^m u \in h(\overline{\mathbb{B}})$ dir. Buna göre $|m| = N$ olan her m için $\sup_{x\in\mathbb{B}} |\partial^m u(x)| < M$ olacak şekilde bir M sabiti vardır. (a) şıkkından $|m| = N$ olan her m için $\partial^m u \in b_{\alpha+N}$ dir. Diğer yandan $\alpha + N > 0$ olduğundan $|m| = N$ olan her m için

$$\lim_{|x|\to 1^-} (1 - |x|^2)^{\alpha+N} |\partial^m u(x)| = 0$$

olur. Böylece her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $u \in b_{\alpha 0}$ elde edilir. ■

Sonuç 5.13. *Her $y_0 \in \mathbb{B}$ ve $q \in \mathbb{R}$ için $R_q(\,\cdot\,, y_0) \in b_\alpha$ ve $R_q(\,\cdot\,, y_0) \in b_{\alpha 0}$ dır.*

Kanıt. $R_q(\,\cdot\,, y_0)$, $B(0, \frac{1}{|y_0|})$ yuvarında harmonik olduğundan $R_q(\,\cdot\,, y_0) \in h(\overline{\mathbb{B}})$ dir. Böylece Teorem 5.12 gereği $R_q(\,\cdot\,, y_0) \in b_{\alpha 0} \subset b_\alpha$ dır. ■

Özel olarak $\alpha \in \mathbb{R}$ için b_α ve $b_{\alpha 0}$ uzayları harmonik polinomları içerir. Dolayısıyla aşikar olmayan uzaylardır.

Sonuç 5.14. *Harmonik polinomlar her $\alpha \in \mathbb{R}$ için b_α ve $b_{\alpha 0}$ uzaylarındadır.*

Sabit bir $\zeta \in \mathbb{S}$ noktası alalım. Bu durumda herhangi $q \in \mathbb{R}$ için $R_q(\,\cdot\,, \zeta) \in h(\mathbb{B})$ dir. Aşağıdaki teorem ile doğuran çekirdek $R_q(\,\cdot\,, \zeta)$ nın hangi şartlar altında b_α ve $b_{\alpha 0}$ uzaylarında yer aldığını belirleriz. Böylece b_α ve $b_{\alpha 0}$ uzayların aşikar ve polinom olmayan elemanlarına örnekler buluruz. Ayrıca bu teoremin bir sonucu olarak tüm bu uzaylar farklıdır.

Teorem 5.15. *$q, \alpha \in \mathbb{R}$ ve $\zeta \in \mathbb{S}$ olsun. Bu durumda* *(i)* $R_q(\,\cdot\,,\zeta) \in b_\alpha$ *olması için gerek ve yeter şart* $\alpha \geq n+q$ *olmasıdır.*

(ii) $R_q(\,\cdot\,,\zeta) \in b_{\alpha 0}$ *olması için gerek ve yeter şart* $\alpha > n+q$ *olmasıdır.*

Kanıt. (i): $\alpha + t > 0$ ve $n+q+t > 0$ olacak şekilde yeterince büyük $t \in \mathbb{R}$ alınsın. (2.12) den

$$I_q^t R_q(x,\zeta) = (1-|x|^2)^t D_q^t R_q(x,\zeta) = (1-|x|^2)^t R_{q+t}(x,\zeta)$$

dır. Yardımcı Teorem 2.4.2 den ve $[x,\zeta] = |x-\zeta| \geq 1-|x|$ olduğundan

$$|I_q^t R_q(x,\zeta)| \lesssim \frac{(1-|x|^2)^t}{[x,\zeta]^{n+q+t}} = \frac{(1-|x|^2)^t}{|x-\zeta|^{n+q+t}} \lesssim \frac{1}{(1-|x|^2)^{n+q}}$$

olur. Buradan

$$(1-|x|^2)^\alpha |I_q^t R_q(x,\zeta)| \lesssim (1-|x|^2)^{\alpha-(n+q)} \tag{5.3}$$

bulunur. Böylece, eğer $\alpha \geq n+q$ ise $I_q^t R_q(x,\zeta) \in L_\alpha^\infty$ ve bu nedenle $R_q(x,\zeta) \in b_\alpha$ dır.

Ters gerektirme için $r \in (0,1)$ için $x = r\zeta$ alınsın. O halde (2.8) ve Yardımcı Teorem 2.1.18 (c) nin ilk kısmından

$$R_{q+t}(r\zeta,\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k(q+t) Z_k(r\zeta,\zeta) \sim 1 + \sum_{k=1}^{\infty} k^{q+t+1} r^k k^{n-2} \sim \frac{1}{(1-r)^{n+q+t}}$$

dir. Buna göre

$$I_q^t R_q(r\zeta,\zeta) \sim (1-r)^{-(n+q)} \tag{5.4}$$

elde edilir. Bu durumda, eğer $\alpha < n+q$ ise $I_q^t R_q(x,\zeta) \notin L_\alpha^\infty$ ve buradan $R_q(x,\zeta) \notin b_\alpha$ dır.

(ii) $\alpha + t > 0$ ve $n+q+t > 0$ olacak şekilde yeterince büyük $t \in \mathbb{R}$ alınsın. (5.3) ten eğer $\alpha > n+q$ ise $\lim_{x\to 1^-} (1-|x|^2)^\alpha |I_q^t R_q(x,\zeta)| = 0$ dır. Böylece, eğer $\alpha > n+q$ ise $I_q^t R_q(x,\zeta) \in \mathcal{C}_{\alpha 0}$ ve bu nedenle $R_q(x,\zeta) \in b_{\alpha 0}$ dır.

Ters gerektirme için $r \in (0,1)$ için $x = r\zeta$ alınsın. (5.4) ten eğer $\alpha \leq n+q$ ise $I_q^t R_q(x,\zeta) \notin \mathcal{C}_{\alpha 0}$ ve buradan $R_q(x,\zeta) \notin b_{\alpha 0}$ dır. ■

Sonuç 5.16. *Yukarıdaki teorem kullanılarak (1.4) deki içermelerin kesin olduğu görülür. Dolayısıyla* $\alpha \in \mathbb{R}$ *için tüm* b_α *ve* $b_{\alpha 0}$ *uzayları farklıdır. İlk olarak, eğer* $\alpha < \beta$ *ise* $q = (\alpha+\beta)/2 - n$ *iken* $R_q(\,\cdot\,,\zeta) \in b_{\beta 0}$ *fakat* $R_q(\,\cdot\,,\zeta) \notin b_\alpha$ *dır. Diğer yandan* $\beta \in \mathbb{R}$ *için* $R_{\beta-n}(\,\cdot\,,\zeta) \in b_\beta$ *fakat* $R_{\beta-n}(\,\cdot\,,\zeta) \notin b_{\beta 0}$ *dır.*

Sabit bir $\zeta \in \mathbb{S}$ ve $s \in \mathbb{R}$ için $R_s(\,\cdot\,,\zeta) \in h(\mathbb{B})$ dir. Aşağıdaki teoremde $R_s(\,\cdot\,,\zeta)$ doğuran çekirdeğinin hangi şartlar altında b^p_q harmonik Besov uzaylarında yer aldığı belirlendi.

Teorem 5.17. *$1 \le p < \infty$ ve $s, q \in \mathbb{R}$ olsun. Sabit bir $\zeta \in \mathbb{S}$ alınsın. Bu durumda $R_s(\,x\,,\zeta) \in b^p_q$ olması için gerek ve yeter şart $q+n > p(n+s)$ olmasıdır.*

Kanıt. $q+pt > -1$ ve $n+q+t > 0$ olacak şekilde yeterince büyük $t \in \mathbb{R}$ alınsın. (2.12) den

$$I^t_s R_s(\,x\,,\zeta) = (1-|x|^2)^t D^t_s R_s(\,x\,,\zeta) = (1-|x|^2)^t R_{s+t}(\,x\,,\zeta)$$

olur. $c = p(n+s+t) - (n+q+pt) = p(n+s) - (n+q)$ alalım. $c < 0$ ise [5], Teorem 1.5 ten

$$\begin{aligned}\frac{1}{V_q}\int_{\mathbb{B}} |I^t_s R_s(\,x\,,\zeta)|^p (1-|x|^2)^q \, d\nu(x) &= \frac{1}{V_q}\int_{\mathbb{B}} |R_{s+t}(\,x\,,\zeta)|^p (1-|x|^2)^{q+pt} \, d\nu(x) \\ &\sim 1\end{aligned}$$

dir. Böylece eğer $(n+q) > p(n+s)$ ise $I^t_s R_s(\,x\,,\zeta) \in L^p_q$ ve bu nedenle $R_s(\,x\,,\zeta) \in b^p_q$ dur. Tersine eğer $(n+q) \le p(n+s)$ ise [5], Teorem 1.5 ten yukarıdaki integral ıraksak olur. Buna göre $(n+q) \le p(n+s)$ için $I^t_s R_s(\,x\,,\zeta) \notin L^p_q$ ve bu nedenle $R_s(\,x\,,\zeta) \notin b^p_q$ dur. ∎

6. İZDÜŞÜMLER

Bu bölümde ilk olarak Teorem 1.6 ispatlanacaktır. Daha sonra dualite sonuçları için bu teoreme başvurulacaktır.

Banach uzayları üzerinde izdüşüm operatörleri aşağıdaki şekilde tanımlıdır. Ayrıntılar [17] de bulunabilir.

Tanım 6.0.1. *X bir Banach uzayı ve M, X in bir altuzayı olsun. Eğer bir P sınırlı doğrusal operatörü X den M ye örten ve $P^2 = P$ şartını sağlıyor ise P ye X in M üzerine izdüşümü denir. Burada $x \in X$ için $P^2(x) = P(Px) = Px$ dir.*

Teorem 1.6 yı $Q_s : L^\infty_\alpha \to b_\alpha$, $Q_s : \mathcal{C}_\alpha \to b_{\alpha 0}$ ve $Q_s : \mathcal{C}_{\alpha 0} \to b_{\alpha 0}$ operatörleri için ayrı teoremler halinde ifade ederek ispatlayacağız.

Teorem 6.0.2. *$\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. $Q_s : L^\infty_\alpha \to b_\alpha$ operatörünün sınırlı olması için gerek ve yeter şart $s > \alpha - 1$ olmasıdır.*

$s > \alpha - 1$ şartını sağlayan bir s verilsin. Eğer t, $\alpha + t > 0$ şartını sağlıyor ise $u \in b_\alpha$ için

$$Q_s I_s^t u = \frac{V_{s+t}}{V_s} u \tag{6.1}$$

olur. Bu nedenle Q_s örtendir.

Kanıt. İlk olarak $Q_s : L^\infty_\alpha \to b_\alpha$ operatörünün sınırlı olması için gerek ve yeter şartın $s > \alpha - 1$ olması olduğunu gösterelim. Farz edelim ki $s > \alpha - 1$ olsun. Şu halde Q_s nin L^∞_α dan b_α ya iyi tanımlı bir sınırlı doğrusal operatör olduğu gösterilmelidir. Herhangi $\varphi \in L^\infty_\alpha$ için $x \in \mathbb{B}$ sabit iken (2.9) dan

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{B}} |R_s(x,y)||\varphi(y)|\, d\nu_s(y) &\lesssim \int_{\mathbb{B}} |\varphi(y)|(1-|y|^2)^s\, d\nu(y) \\ &\lesssim \|\varphi\|_{L^\infty_\alpha} \int_{\mathbb{B}} (1-|y|^2)^{s-\alpha}\, d\nu(y) \\ &\lesssim \|\varphi\|_{L^\infty_\alpha}\end{aligned}$$

dır. Böylece $\int_{\mathbb{B}} |R_s(x,y)||\varphi(y)|\, d\nu_s(y)$ integrali yakınsaktır. Buradan Laplas operatörü Tanım 1.5 teki $Q_s\varphi$ yi tanımlayan integralin içine atılırsa $R_s(\cdot, y)$ nin harmonikliğinden $Q_s\varphi$, $\mathbb{B}$ de harmoniktir. $\alpha + t > 0$ olacak şekilde t alınsın.

$\|Q_s\varphi\|_{b_\alpha} = \|I_s^t Q_s\varphi\|_{L_\alpha^\infty} \lesssim \|\varphi\|_{L_\alpha^\infty}$ olduğunu göstermeliyiz. Bunun için Sonuç 2.3.4 ten

$$\begin{aligned} I_s^t Q_s\varphi(x) &= (1-|x|^2)^t D_s^t \int_{\mathbb{B}} R_s(x,y)\varphi(y)\, d\nu_s(y) \\ &= \frac{1}{V_s}(1-|x|^2)^t \int_{\mathbb{B}} R_{s+t}(x,y)\varphi(y)(1-|y|^2)^s\, d\nu(y) \\ &= \frac{1}{V_s} T_{s,t}\, \varphi(x) \end{aligned} \tag{6.2}$$

tir. O halde $\alpha + t > 0$ ve $s > \alpha - 1$ olduğundan Teorem 3.1 gereği $\|I_s^t Q_s\varphi\|_{L_\alpha^\infty} \lesssim \|\varphi\|_{L_\alpha^\infty}$ dır. Böylece $Q_s\varphi \in b_\alpha$ ve $Q_s : L_\alpha^\infty \to b_\alpha$ sınırlıdır.

Tersine $s \leq \alpha - 1$ olsun. $\varphi(x) = (1-|x|^2)^{-\alpha}$ alınsın. Yardımcı Teorem 3.2 den her $|x| < \epsilon$ ve $y \in \mathbb{B}$ için $R_s(x,y) \geq 1/2$ olacak şekilde $\epsilon > 0$ vardır. O halde $|x| < \epsilon$ için

$$Q_s\varphi(x) = \int_{\mathbb{B}} R_s(x,y)\varphi(y)\, d\nu_s(y) \geq \frac{1}{2V_s}\int_{\mathbb{B}} (1-|y|^2)^{s-\alpha}\, d\nu(y)$$

dir. Sağ taraftaki integral ıraksak olduğundan $Q_s\varphi$, L_α^∞ nın elemanı olamaz.

Şimdi (1.7) yi gösterelim. Farz edelim ki $\alpha + t > 0$ ve $s > \alpha - 1$ sağlansın. Buna göre $s + t > -1$ dir. Eğer $u \in b_\alpha$ ise $(1-|x|^2)^t D_s^t u \in L_\alpha^\infty$ ve buradan $|D_s^t u| \lesssim (1-|x|^2)^{-(\alpha+t)}$ dir. $s - \alpha > -1$ olduğundan $D_s^t u \in L_{s+t}^1$ dir. Sonuç 2.3.5 ve Yardımcı Teorem 2.3.2 (d) ye başvurulursa

$$\begin{aligned} Q_s I_s^t u(x) &= \frac{1}{V_s}\int_{\mathbb{B}} R_s(x,y) I_s^t u(y)(1-|y|^2)^s\, d\nu(y) \\ &= \frac{V_{s+t}}{V_s}\int_{\mathbb{B}} R_s(x,y) D_s^t u(y)\, d\nu_{s+t}(y) \\ &= \frac{V_{s+t}}{V_s} D_{s+t}^{-t} D_s^t(x) = \frac{V_{s+t}}{V_s} u(x) \end{aligned}$$

elde edilir.

Son olarak $Q_s : L_\alpha^\infty \to b_\alpha$ operatörünün örten olduğunu gösterelim. $u \in b_\alpha$ olsun. Bu durumda $I_s^t u \in L_\alpha^\infty$ dır. Yukarıdaki tartışmadan $Q_s\big((V_s/V_{s+t}) I_s^t u\big) = u$ bulunur. Açıktır ki $(V_s/V_{s+t}) I_s^t u \in L_\alpha^\infty$ ve Q_s örtendir. ∎

Şimdi Teorem 1.6 yı Q_s, $\mathcal{C}_\alpha$ dan $b_{\alpha 0}$ uzayına bir operatörken ifade ve ispat edelim.

Teorem 6.0.3. *$\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. $Q_s : \mathcal{C}_\alpha \to b_{\alpha 0}$ operatörünün sınırlı olması için gerek ve yeter şart $s > \alpha - 1$ olmasıdır. Bu durumda Q_s örtendir.*

Kanıt. Farz edelim ki $s > \alpha - 1$ olsun. İlk olarak Q_s operatörünün $\mathcal{C}_\alpha$ yı $b_{\alpha 0}$ uzayına resmettiğini gösterelim. Yani $\varphi \in \mathcal{C}_\alpha$ için $Q_s\varphi \in b_{\alpha 0}$ olduğu gösterilmelidir. Bunun için öncelikle, p bir polinom iken $Q_s((1-|x|^2)^{-\alpha}p)$ nin de aynı dereceden harmonik bir polinom olduğu ve bu nedenle $b_{\alpha 0}$ da olduğu gösterilecektir. Q_s doğrusal olduğundan, p homojen bir polinom olarak kabul edilebilir. Bu durumda [1], Teorem 5.7 den j, p polinomunun derecesi ve $l = [j/2]$ ise

$$p = p_j + |x|^2 p_{j-2}(x) + \cdots + |x|^{2l} p_{j-2l}(x) \tag{6.3}$$

olacak şekilde $p_i \in \mathcal{H}_i(\mathbb{R}^n)$ ler vardır. Burada

$$\begin{aligned} Q_s\big((1-|x|^2)^{-\alpha}p\big)(x) &= \int_{\mathbb{B}} R_s(x,y)(1-|y|^2)^{-\alpha}p(y)\,d\nu_s(y) \\ &= \sum_{i=0}^{l} \int_{\mathbb{B}} R_s(x,y)(1-|y|^2)^{-\alpha}p_{j-2i}(y)\,d\nu_s(y) \end{aligned}$$

dir. (2.6) ve (6.3) seri açılımlarının düzgün yakınsaklığı kullanılarak kutupsal koordinatlarda integral alınırsa,

$$\begin{aligned} Q_s\big((1-|x|^2)^{-\alpha}p\big)(x) &= \sum_{i=0}^{l}\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k(s) \int_{\mathbb{B}} Z_k(x,y)|y|^{2i}p_{j-2i}(y)(1-|y|^2)^{-\alpha}\,d\nu_s(y) \\ &= \frac{n}{V_s}\sum_{i=0}^{l}\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k(s) \int_0^1 \rho^{n+j+k-1}(1-|\rho|^2)^{s-\alpha} \int_{\mathbb{S}} Z_k(x,\zeta)p_{j-2i}(\zeta)d\sigma(\zeta)d\rho \end{aligned}$$

bulunur. Yardımcı Teorem 2.1.18 (d) ve (e) kullanılırsa

$$\begin{aligned} Q_s\big((1-|x|^2)^{-\alpha}p\big)(x) &= \frac{n}{V_s}\sum_{i=0}^{l} \gamma_{j-2i}(s) \int_0^1 \rho^{n+j-1}(1-|\rho|^2)^{s-\alpha}\,d\rho\, p_{j-2i}(x) \\ &= \sum_{i=0}^{l} C_i p_{j-2i}(x) \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada $C_i > 0$, $i = 0, 1, \ldots, l$, sabit sayılardır. Böylece $Q_s((1-|x|^2)^{-\alpha}p)$, j yinci dereceden harmonik polinomdur.

Şimdi eğer $\varphi \in \mathcal{C}_\alpha$ ise $(1-|x|^2)^{\alpha}\varphi(x) =: \psi(x) \in C(\overline{\mathbb{B}})$ dir. Stone-Weierstrass teoreminden ψ fonksiyonuna polinomlar ile yaklaşılabilir. Bu nedenle $i \to \infty$ iken $\|\psi - p_i\|_{L^\infty} \to 0$ yani $\|\varphi - (1-|x|^2)^{-\alpha}p_i\|_{L^\infty_\alpha} \to 0$ olacak şekilde bir (p_i) polinom dizisi bulunabilir. Teorem 6.0.2 den $Q_s : L^\infty_\alpha \to b_\alpha$ sınırlı olduğundan $i \to \infty$ iken b_α da $Q_s\big((1-|x|^2)^{-\alpha}p_i\big) \to Q_s(\varphi)$ dir. Diğer yandan $Q_s\big((1-|x|^2)^{-\alpha}p_i\big)$

polinom yani $b_{\alpha 0}$ ın elemanı ve $b_{\alpha 0}$ tam olduğundan $Q_s\varphi \in b_{\alpha 0}$ sonucuna ulaşılır. $s > \alpha - 1$ için $Q_s : \mathcal{C}_\alpha \to b_{\alpha 0}$ operatörünün sınırlılığı Teorem 6.0.2 den açıktır.

$Q_s : \mathcal{C}_\alpha \to b_{\alpha 0}$ operatörünün sınırlı olması için $s > \alpha - 1$ şartının gerekli olduğu $\varphi(x) = (1 - |x|^2)^{-\alpha} \in \mathcal{C}_\alpha$ fonksiyonu kullanılarak Teorem 6.0.2 nin ispatındakine benzer şekilde gösterilebilir.

$u \in b_{\alpha 0}$ için $I_s^t u \in \mathcal{C}_{\alpha 0} \subset \mathcal{C}_\alpha$ olduğundan (6.1) den Q_s örtendir. ■

Son olarak Q_s, $\mathcal{C}_{\alpha 0}$ dan $b_{\alpha 0}$ uzayına bir operatör iken Teorem 1.6 yı ifade ve ispat edelim.

Teorem 6.0.4. *$\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. $Q_s : \mathcal{C}_{\alpha 0} \to b_{\alpha 0}$ operatörünün sınırlı olması için gerek ve yeter şart $s > \alpha - 1$ olmasıdır. Bu durumda Q_s örtendir.*

Kanıt. $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\mathcal{C}_{\alpha 0} \subset \mathcal{C}_\alpha$ olduğundan ispat Teorem 6.0.3 ün ispatı ile tamamen benzerdir. $s > \alpha - 1$ için Q_s, $\mathcal{C}_\alpha$ uzayını $b_{\alpha 0}$ uzayına resmettiğinden açıktır ki $\mathcal{C}_{\alpha 0}$ uzayını da $b_{\alpha 0}$ uzayına resmedecektir.

Diğer yandan (1.5), Q_s nin $\mathcal{C}_{\alpha 0}$ üzerinde sınırlı olması için gerek şarttır. Farz edelim ki $s \leq \alpha - 1$ olsun. $\varphi(x) = (1 - |x|^2)^{-\alpha} / \big(1 + \log(1 - |x|^2)^{-1}\big) \in \mathcal{C}_{\alpha 0} \subset \mathcal{C}_\alpha$ alınsın. Teorem 6.0.2 nin ispatındakine benzer olarak Yardımcı Teorem 3.2 den yeterince küçük $|x|$ için $Q_s\varphi(x)$ ıraksaktır.

Son olarak $Q_s : \mathcal{C}_{\alpha 0} \to b_{\alpha 0}$ operatörünün örtenliği yine (6.1) in sonucudur. ■

$\alpha > 0$ olması durumunda $b_\alpha \subset L^\infty_\alpha$ dır. Böylece (1.5) şartını sağlayan herhangi bir s için Q_s, L^∞_α dan b_α üzerine bir izdüşümdür. Benzer şekilde $\alpha > 0$ için $b_{\alpha 0} \subset \mathcal{C}_{\alpha 0} \subset \mathcal{C}_\alpha$ olduğundan (1.5) şartını sağlayan her bir s için Q_s, $\mathcal{C}_\alpha$ veya $\mathcal{C}_{\alpha 0}$ dan $b_{\alpha 0}$ üzerine bir izdüşümdür.

Sonuç 6.0.5. *$\alpha > 0$ olsun. (1.5) şartını sağlayan herhangi bir s alınsın. Bu durumda*

(a) Q_s, L^∞_α dan b_α üzerine bir izdüşümdür.

(b) Q_s, $\mathcal{C}_\alpha$ dan $b_{\alpha 0}$ üzerine bir izdüşümdür.

(c) Q_s, $\mathcal{C}_{\alpha 0}$ dan $b_{\alpha 0}$ üzerine bir izdüşümdür.

Kanıt. (a): Teorem 6.0.2 den $Q_s : L^\infty_\alpha \to b_\alpha$ sınırlı ve örten bir doğrusal dönüşümdür. Diğer yandan $t = 0$ seçilerek (1.7) ye başvurulursa $Q_s^2 = Q_s$ elde edilir.

(b) ve (c): Üstteki tartışmaya benzer şekilde, $Q_s : \mathcal{C}_\alpha \to b_{\alpha 0}$ ve $Q_s : \mathcal{C}_{\alpha 0} \to b_{\alpha 0}$ operatörleri sırasıyla Teorem 6.0.3 ve Teorem 6.0.4 ten sınırlı ve örten doğrusal dönüşümlerdir. Ayrıca $t = 0$ seçilerek (1.7) ye başvurulursa $Q_s^2 = Q_s$ elde edilir. ∎

$\alpha \leq 0$ iken Q_s, L^∞_α dan b_α üzerine bir izdüşüm değildir. Çünkü bu durumda L^∞_α uzayı $u \equiv 0$ dışında harmonik fonksiyonları içermez. Bu nedenle b_α uzayı artık L^∞_α uzayının bir altuzayı değildir. Benzer nedenle $\alpha \leq 0$ için Q_s, $\mathcal{C}_\alpha$ veya $\mathcal{C}_{\alpha 0}$ dan $b_{\alpha 0}$ üzerine izdüşüm değildir.

$\alpha + t > 0$ olacak şekilde herhangi bir t alınsın. Teorem 1.2 den $u \in b_\alpha$ olması için gerek ve yeter şart $I_s^t u = (1 - |x|^2)^t D_s^t u \in L^\infty_\alpha$ olmasıdır. $I_s^t : b_\alpha \to L^\infty_\alpha$ dönüşümünü göz önüne alalım. $\alpha + t > 0$ ve Önerme 5.3 den $D_s^t : b_\alpha \to b_{\alpha+t}$ dönüşümü bir izomorfizm olduğundan I_s^t birebirdir. Ayrıca $\|u\|_{b_\alpha} = \|I_s^t u\|_{L^\infty_\alpha}$ olacağından I_s^t bir izometridir. b_α uzayının I_s^t altındaki görüntüsünü $\tilde{b}_\alpha$ ile gösterelim. Yani $\tilde{b}_\alpha = I_s^t(b_\alpha)$ olsun. O halde $\alpha + t > 0$ şartını sağlayan t için I_s^t, b_α dan $\tilde{b}_\alpha$ üzerine birebir ve örten bir izometridir. Dolayısıyla b_α uzayı L^∞_α uzayı içerisine izometrik olarak gömülür.

Bu durumda $\alpha \leq 0$ için L^∞_α, b_α uzayını içermemesine rağmen $\tilde{b}_\alpha$ izometrik kopyasını içerir. Benzer bir tartışma ile $\mathcal{C}_{\alpha 0}$ ve $\mathcal{C}_\alpha$ uzayları $\tilde{b}_{\alpha 0} = I_s^t(b_{\alpha 0})$ izometrik kopyasını içerir.

Aşağıdaki sonuç, $\alpha \leq 0$ iken L^∞_α uzayından $\tilde{b}_\alpha$ izometrik kopyası üzerine izdüşüm operatörleri tanımlanabileceğini söyler. Bunun yanında $\mathcal{C}_\alpha$ veya $\mathcal{C}_{\alpha 0}$ uzaylarından $\tilde{b}_{\alpha 0}$ izometrik kopyası üzerine izdüşüm operatörleri vardır.

Sonuç 6.0.6. *$\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. s, t çifti (1.5) ve (1.6) şartlarını sağlasın. P operatörü*

$$P = \frac{V_s}{V_{s+t}} I_s^t Q_s$$

olarak verilsin. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur:

(a) P, L^∞_α dan $\tilde{b}_\alpha$ üzerine bir izdüşümdür.

(b) P*,* $\mathcal{C}_\alpha$ *dan* $\tilde{b}_{\alpha 0}$ *üzerine bir izdüşümdür.*

(c) P*,* $\mathcal{C}_{\alpha 0}$ *dan* $\tilde{b}_{\alpha 0}$ *üzerine bir izdüşümdür.*

Kanıt. (a): $\alpha + t > 0$ ve $s > \alpha - 1$ olsun. (6.2) gereği $I_s^t Q_s = (1/V_s)T_{s,t}$ dir. O halde

$$P = \frac{V_s}{V_{s+t}} I_s^t Q_s = \frac{1}{V_{s+t}} T_{s,t}$$

dir. $\alpha + t > 0$ ve $s > \alpha - 1$ olduğundan Teorem 3.1 den $\varphi \in L_\alpha^\infty$ için $\|P\varphi\|_{L_\alpha^\infty} \lesssim \|\varphi\|_{L_\alpha^\infty}$ elde edilir. Dolayısıyla P, L_α^∞ da sınırlıdır.

$I_s^t : b_\alpha \to \tilde{b}_\alpha$ ve $Q_s : L_\alpha^\infty \to b_\alpha$ operatörleri örten olduğundan P nin örtenliği açıktır.

Diğer yandan (1.7) gereği

$$\begin{aligned} P^2 &= \frac{V_s}{V_{s+t}} I_s^t Q_s \big(\frac{V_s}{V_{s+t}} I_s^t Q_s \big) \\ &= \frac{V_s}{V_{s+t}} I_s^t \big(\frac{V_s}{V_{s+t}} Q_s I_s^t \big) Q_s \\ &= \frac{V_s}{V_{s+t}} I_s^t Q_s = P \end{aligned}$$

dir.

(b) ve (c): $\alpha + t > 0$ ve $s > \alpha - 1$ olsun. $Q_s : \mathcal{C}_\alpha \to b_{\alpha 0}$ ve $Q_s : \mathcal{C}_{\alpha 0} \to b_{\alpha 0}$ operatörleri sırasıyla Teorem 6.0.3 ve Teorem 6.0.4 ten sınırlı ve örten doğrusal dönüşümlerdir. O halde $P = (V_s/V_{s+t}) I_s^t Q_s$, $\mathcal{C}_\alpha$ veya $\mathcal{C}_{\alpha 0}$ dan $\tilde{b}_{\alpha 0}$ uzayına sınırlı ve örten bir doğrusal operatördür. Ayrıca üsteki tartışmadan (1.7) gereği $P^2 = P$ dir. ∎

Q_s, I_s^t ve $T_{s,t}$ operatörleri arasında aşağıdaki gibi bir ilişki vardır.

Sonuç 6.0.7. *$\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. (1.5) ve (1.6) sağlanacak şekilde $s, t \in \mathbb{R}$ alınsın. Aşağıdaki operatör eşitlikleri sağlanır:*

(a) b_α *üzerinde* $Q_s I_s^t = \dfrac{V_{s+t}}{V_s} I$ *dır .*

(b) b_α *üzerinde* $T_{s,t} I_s^t = V_{s+t}\, I_s^t$ *dir.*

(c) L_α^∞ *üzerinde* $I_s^t Q_s = \dfrac{1}{V_s} T_{s,t}$ *dir.*

(d) L_α^∞ *üzerinde* $Q_s T_{s,t} = V_{s+t}\, Q_s$ *dir.*

(e) L_α^∞ *üzerinde* $T_{s,t}^2 = V_{s+t} T_{s,t}$ *dir.*

Kanıt. (a) daki eşitlik (1.7) ile ve (c) deki eşitlik (6.2) ile aynıdır. Diğer maddeler bu ikisinden elde edilir.

(b): İlk olarak (c) ve sonra (a) kullanılırsa

$$T_{s,t} I_s^t = V_s I_s^t Q_s I_s^t = V_s I_s^t \frac{V_{s+t}}{V_s} I = V_{s+t} I_s^t$$

elde edilir.

(d): Tekrar önce (c) ve sonra (a) kullanılırsa

$$Q_s T_{s,t} = V_s Q_s I_s^t Q_s = V_{s+t} Q_s$$

bulunur.

(e): Sırasıyla (c), (a) ve tekrar (c) den

$$T_{s,t}^2 = V_s^2 I_s^t Q_s I_s^t Q_s = V_{s+t} I_s^t Q_s = V_{s+t} T_{s,t}$$

dir. ■

$h^\infty = h(\mathbb{B}) \cap L^\infty$ sınırlı harmonik fonksiyonlar uzayıdır. Aşağıdaki teorem h^∞ ile b_α arasındaki ilişkiyi verir.

Teorem 6.0.8. $\alpha \in \mathbb{R}$ *olsun.*

(i) Eğer $\alpha < 0$ *ise* $b_\alpha \subset h^\infty$ *dur.*

(ii) Eğer $\alpha \geq 0$ *ise* $h^\infty \subset b_\alpha$ *dır.*

Kanıt. (i): $\alpha < 0$ olsun. $\alpha + t > 0$ ve $s > \alpha - 1$ olacak şekilde $s, t \in \mathbb{R}$ alınsın. $u \in b_\alpha$ olsun. Buradan (1.8) integral gösteriminden $x \in \mathbb{B}$ için

$$u(x) = \frac{V_s}{V_{s+t}} \int_{\mathbb{B}} R_s(x,y) I_s^t u(y) (1 - |y|^2)^s \, d\nu(y)$$
$$|u(x)| \lesssim \int_{\mathbb{B}} |R_s(x,y)| |I_s^t u(y)| (1 - |y|^2)^s \, d\nu(y)$$

yazılabilir. $\|u\|_{b_\alpha} = \|I_s^t u\|_{L_\alpha^\infty} = \sup_{x \in \mathbb{B}} (1 - |x|^2)^\alpha |I_s^t u(x)|$ olduğundan $x \in \mathbb{B}$ için $(1 - |x|^2)^\alpha |I_s^t u(x)| \leq \|u\|_{b_\alpha}$ dır. O halde

$$|u(x)| \lesssim \|u\|_{b_\alpha} \int_{\mathbb{B}} |R_s(x,y)| (1 - |y|^2)^{s-\alpha} \, d\nu(y)$$

dir. Buradan $s-\alpha>-1$ ve $s-(s-\alpha)=\alpha<0$ olup Yardımcı Teorem 2.4.5 ten $x\in\mathbb{B}$ için $|u(x)|\lesssim\|u\|_{b_\alpha}$ bulunur. Böylece $u\in h^\infty$ sonucuna ulaşılır.

(ii) $u\in h^\infty$ olsun. İlk olarak $\alpha>0$ alınsın. Bu durumda $u\in b_\alpha$ olması için $u\in L^\infty_\alpha$ olduğunu göstermek yeterlidir. $u\in h^\infty$ olduğundan her $x\in\mathbb{B}$ için $|u(x)|\leq M$ olacak şekilde bir $M>0$ vardır. O halde $\alpha>0$ iken $x\in\mathbb{B}$ için $(1-|x|^2)^\alpha\leq 1$ ve $(1-|x|^2)^\alpha|u(x)|\leq M$ dir. Yani her $x\in\mathbb{B}$ için $(1-|x|^2)^\alpha|u(x)|$ sınırlıdır. Böylece $u\in L^\infty_\alpha$ ve buradan $u\in b_\alpha$ bulunur.

$\alpha=0$ olması durumunda $u\in b_0$ olması için $\sup_{x\in\mathbb{B}}(1-|x|^2)|\nabla u(x)|<\infty$ olmalıdır. $u\in h^\infty$ olduğundan her $x\in\mathbb{B}$ için $|u(x)|\leq M$ olacak şekilde bir $M>0$ vardır. $x\in\mathbb{B}$ alalım. $r=(1-|x|)/2$ olsun. O halde Cauchy kestiriminden pozitif bir C sabiti vardır öyle ki

$$|\nabla u(x)|\leq\frac{CM}{r}$$

dir. $x\in\mathbb{B}$ iken $1+|x|\leq 2$ olduğundan

$$(1-|x|^2)|\nabla u(x)|\leq\frac{2CM(1-|x|)}{r}\leq 4CM$$

olacaktır. Böylece $u\in b_0$ dır. ■

Şimdi h^∞ ile $b_{\alpha 0}$ arasındaki bağlantı incelenecektir.

Teorem 6.0.9. $\alpha\in\mathbb{R}$ *olsun.*

(i) Eğer $\alpha<0$ *ise* $b_{\alpha 0}\subset h^\infty$ *dur.*

(ii) Eğer $\alpha>0$ *ise* $h^\infty\subset b_{\alpha 0}$ *dır.*

(iii) Eğer $\alpha=0$ *ise* $b_{00}\not\subset h^\infty$ *ve* $h^\infty\not\subset b_{00}$ *dır.*

Kanıt. (i): Her $\alpha\in\mathbb{R}$ için $b_{\alpha 0}\subset b_\alpha$ olduğundan ve Teorem 6.0.8 (i) şıkkından $\alpha<0$ için $b_{\alpha 0}\subset b_\alpha\subset h^\infty$ olduğu açıktır.

(ii): $\alpha>0$ olsun. $0<\beta<\alpha$ olacak şekilde β alalım. Teorem 6.0.8 den $h^\infty\subset b_\beta$ ve (1.4) den $b_\beta\subset b_{\alpha 0}$ dır. Dolayısıyla $h^\infty\subset b_{\alpha 0}$ dır.

(iii) $b_{00}\not\subset h^\infty$ olduğunu gösterelim. $\mathbb{D}$ birim disk olmak üzere $f:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$ fonksiyonunu

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{2^k}}{k}$$

olarak tanımlayalım. $B_0(\mathbb{D})$ diskte holomorfik küçük Bloch uzayı olsun. [27] Teorem 3.15 ten $f \in B_0$ ve bu da

$$\lim_{|z|\to 1^-}(1-|z|^2)|f'(z)| = 0 \tag{6.4}$$

demektir. $u : \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ fonksiyonunu

$$u(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_1 + ix_2) = f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{2^k}}{k} \tag{6.5}$$

olarak tanımlayalım. (6.5) ten

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 0$$

olur. Böylece u, $\mathbb{B}$ de harmoniktir. $0 < r < 1$ için $x_1 = r, x_2 = x_3 = ... = x_n = 0$ alınır ve $r \to 1^-$ iken limit alınırsa, monoton yakınsaklık teoreminden

$$u(r, 0, 0, ..., 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^{2^k}}{k} \to \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

bulunur. Dolayısıyla $u \notin h^\infty(\mathbb{B})$ dir.

(6.5) ten,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x_1} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \to |\frac{\partial u}{\partial x_1}| = |\frac{\partial f}{\partial x_1}| = |f'(z)| \\
\frac{\partial u}{\partial x_2} &= \frac{\partial f}{\partial x_2} \to |\frac{\partial u}{\partial x_2}| = |\frac{\partial f}{\partial x_2}| = |f'(z)| \\
\frac{\partial u}{\partial x_3} &= \cdots = \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0
\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu nedenle $|\nabla u(x)| = \sqrt{2}\,|f'(z)|$ bulunur.

$\epsilon > 0$ alalım. (6.4) ten öyle $\rho < 1$ vardır ki $\rho < |z| < 1$ için $(1-|z|^2)|f'(z)| < \epsilon/\sqrt{2}$ olur. Ayrıca, öyle bir M sayısı vardır ki $|z| \leq \rho$ için $|f'(z)| \leq M$ dir.

r_0 sayısını $r_0 < |x| < 1$ için $(1-|x|^2) < \epsilon/\sqrt{2}M$ olacak şekilde seçelim. Şimdi $|x| > r_0$ için $(1-|x|^2)|\nabla u(x)| < \epsilon$ olacağını gösterelim. Eğer $|z| > \rho$ ise

$$(1-|x|^2)|\nabla u(x)| \leq \sqrt{2}(1-|z|^2)|f'(z)| < \epsilon$$

bulunur. Eğer $|z| \leq \rho$ ise

$$(1-|x|^2)|\nabla u(x)| \leq (1-|x|^2)\sqrt{2}|f'(z)| < \epsilon$$

olur. Böylece $u \in b_{00}$ dır.

Şimdi $h^\infty \not\subset b_{00}$ durumunu kanıtlayalım. H^∞, $\mathbb{D}$ de sınırlı holomorfik fonksiyonlar kümesi olsun. İlk olarak $H^\infty \not\subset B_0$ olduğunu gösterelim. $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ fonksiyonunu,

$$f(z) = e^{\frac{z+1}{z-1}}$$

olarak tanımlayalım. $\dfrac{z+1}{z-1}$, $\mathbb{D}$ yi sol yarı düzleme resmeden dönüşüm olduğundan

$$|f(z)| = e^{\mathrm{Re}(\frac{z+1}{z-1})} \leq 1$$

bulunur. Bu nedenle $f \in H^\infty$ olur.

$f \notin B_0$ olduğunu gösterelim. γ eğrisi $x = -y^2 + 1$ parabolünün bir parçası olsun ve $0 < t < 1$ için $x = 1 - t^2$, $y = t$ parametrizasyonu ile verilsin. f fonksiyonunun türevi

$$f'(z) = \frac{d}{dz}\, e^{1+\frac{2}{z-1}} = \frac{-2}{(z-1)^2}\, e^{\frac{z+1}{z-1}}$$

dir. $z = (1-t^2) + it$, γ üzerinde olsun. Bu durumda

$$|z-1|^2 = t^4 + t^2 = t^2(1+t^2) \tag{6.6}$$

ve

$$\left|e^{\frac{z+1}{z-1}}\right| = e^{\mathrm{Re}(1+\frac{2}{z-1})} = e^{1-\frac{2}{t^2+1}}$$

olur. $1 - 2/(t^2+1) \geq -1$ olduğundan

$$\left|e^{\frac{z+1}{z-1}}\right| \geq e^{-1} \tag{6.7}$$

bulunur. Ayrıca,

$$1 - |z|^2 = 1 - \left((1-t^2)^2 + t^2\right) = t^2(1-t^2) \tag{6.8}$$

olur. O halde $z = (1-t^2) + it$ için (6.6), (6.7) ve (6.8) den

$$(1-|z|^2)|f'(z)| \geq \frac{2}{e}\,\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

elde edilir. Bu ise γ boyunca $z \to 1^-$ iken ($t \to 0^+$ iken) $(1-|z|^2)|f'(z)| \to 0$ olamayacağını gösterir. Dolayısıyla, $f \notin B_0$ dır.

Bir $u : \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ fonksiyonunu

$$u(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_1 + ix_2)$$

olarak tanımlayalım. $b_{00} \not\subset h^\infty$ durumunda olduğu gibi u, $\mathbb{B}$ de harmonik ve $|\nabla u(x)| = \sqrt{2}|f'(z)|$ dir. Şu halde $|u(x)| = |f(z)| \leq 1$ ve böylece $u \in h^\infty$ dur. Ayrıca, $z = (1-t^2) + it$, γ eğrisi üzerinde iken $x = (x_1, x_2, 0, ...0)$ olsun. Bu durumda $1 - |x|^2 = 1 - |z|^2$ ve $|\nabla u(x)| = \sqrt{2}|f'(z)|$ olur. O halde γ eğrisi boyunca $z = x_1 + ix_2$, $(1, 0, 0, ...0)$ noktasına yaklaşırken

$$1 - |x|^2|\nabla u(x)| = \sqrt{2}(1 - |z|^2)|f'(z)| \to 0$$

olamaz. Bu ise $u \notin b_{00}$ demektir. ∎

$1 \leq p < \infty$ ve $\alpha, q \in \mathbb{R}$ olsun. Aşağıdaki teorem b^p_q ve b_α uzayları arasındaki kapsama ilişkisini verir.

Teorem 6.0.10. $1 \leq p < \infty$ *ve* $\alpha, q \in \mathbb{R}$ *olsun.*

(a) Eğer $\alpha < \dfrac{q+1}{p}$ *ise* $b_\alpha \subset b^p_q$ *dur.*

(b) Eğer $\alpha \geq \dfrac{q+n}{p}$ *ise* $b^p_q \subset b_\alpha$ *dır.*

Kanıt. (a): Öncelikle $\alpha = 0$ ve $Q > -1$ için $b_0 \subset b^p_Q$ olduğunu gösterelim. $u \in b_0$ olsun. Bu durumda eğer $s > -1$ ve $t > 0$ ise (1.8) den

$$u(x) = \int_{\mathbb{B}} R_s(x, y) D^t_s u(y)\, d\nu_{s+t}(y)$$
$$|u(x)| \lesssim \int_{\mathbb{B}} |R_s(x, y)||I^t_s u(y)|(1 - |y|^2)^s\, d\nu(y)$$

dir. Burada $\|u\|_{b_0} = \|I^t_s u\|_{L^\infty_0}$ olduğundan

$$|u(x)| \lesssim \|u\|_{b_0} \int_{\mathbb{B}} |R_s(x, y)|(1 - |y|^2)^s\, d\nu(y)$$

bulunur. Bu durumda Yardımcı Teorem 2.4.5 ten

$$|u(x)| \lesssim \|u\|_{b_0} \left(1 + \log \frac{1}{1 - |x|^2}\right)$$

olur. O halde

$$\frac{1}{V_Q} \int_{\mathbb{B}} |u(x)|^p (1 - |x|^2)^Q\, d\nu(x) \lesssim \int_{\mathbb{B}} \frac{(1 - |x|^2)^Q}{\left(1 + \log \frac{1}{1-|x|^2}\right)^p}\, d\nu(x)$$

dir. $Q > -1$ olduğundan sağdaki integral yakınsaktır. Buradan $u \in b^p_Q$ olur.

Şu halde $Q > -1$ için $b_0 \subset b^p_Q$ dur. Buna göre $q - \alpha p > -1$ için $b_0 \subset b^p_{q-\alpha p}$ dir. Her iki tarafın α yıncı mertebeden türevini alırsak Teorem 5.3 ve [5], Sonuç 9.2 gereği

$$D^\alpha_s b_0 = b_\alpha \subset D^\alpha_s b^p_{q-\alpha p} = b^p_q$$

elde edilir.

(b) $u \in b^p_q$ olsun. $q + pt > -1$ ve $\alpha + t > 0$ olacak şekilde $s, t \in \mathbb{R}$ alalım. [5], Teorem 1.1 den $D^t_s u \in b^p_{q+pt}$ dir. $q + pt > -n$ olduğundan [5], Sonuç 13.1 den

$$|D^t_s u(x)| \lesssim \|u\|_{b^p_q} \frac{1}{(1-|x|^2)^{(q+n+pt)/p}}$$

$$(1-|x|^2)^{\frac{q+n}{p}} (1-|x|^2)^t |D^t_s u(x)| \lesssim \|u\|_{b^p_q}$$

bulunur. $\alpha \geq \dfrac{q+n}{p}$ olduğu için

$$(1-|x|^2)^\alpha (1-|x|^2)^t |D^t_s u(x)| \leq (1-|x|^2)^{\frac{q+n}{p}} (1-|x|^2)^t |D^t_s u(x)| \lesssim \|u\|_{b^p_q}$$

elde edilir. Dolayısıyla her $x \in \mathbb{B}$ için $(1-|x|^2)^{\alpha+t} |D^t_s u(x)|$ sınırlıdır. Böylece $u \in b_\alpha$ dır. ■

6.1. Dualite

Bölüm 2.2 de harmonik Bergman-Besov uzayları b^p_q, kısmi türevler kullanılarak tanımlandı. Teorem 1.2 ve 1.3 e benzer olarak bu tanım D^t_s türev operatörleri ile yapılabilir: $1 \leq p < \infty$ ve $q \in \mathbb{R}$ olsun. $q + pt > -1$ olacak şekilde $s, t \in \mathbb{R}$ alınsın. $u \in h(\mathbb{B})$ nin b^p_q da olması için gerek ve yeter şart $I^t_s u \in L^p_q$ olmasıdır (bkz. [5], Teorem 1.2).

b^p_q uzayları için aşağıdaki izdüşüm teoremi [5], Teorem 1.4 ten alınmıştır.

Teorem 6.1.1. *([5]) $1 \leq p < \infty$ ve $q \in \mathbb{R}$ olsun. $Q_s : L^p_q \to b^p_q$ operatörünün sınırlı olması için gerek ve yeter şart*

$$q + 1 < p(s+1) \tag{6.9}$$

olmasıdır. Bu durumda Q_s örtendir. (6.9) şartını sağlayan herhangi bir s verilsin. Eğer t,

$$q + pt > -1 \tag{6.10}$$

şartını sağlıyor ise $u \in b^p_q$ için

$$Q_s I^t_s u = \frac{V_{s+t}}{V_s} u$$

sağlanır.

Aşağıdaki sonuç, [5] Sonuç 11.1 dir. Sonuç 6.0.7 ile benzerdir fakat L^p_q ve b^p_q uzayları için verilmiştir.

Sonuç 6.1.2. *([5]) $1 \le p < \infty$ ve $q \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer (6.9) ve (6.10) sağlanıyorsa*

(a) b^p_q üzerinde $Q_s I^t_s = \dfrac{V_{s+t}}{V_s} I$ dır.

(b) b^p_q üzerinde $T_{s,t} I^t_s = V_{s+t}\, I^t_s$ dir.

(c) L^p_q üzerinde $I^t_s Q_s = \dfrac{1}{V_s} T_{s,t}$ dir.

(d) L^p_q üzerinde $Q_s T_{s,t} = V_{s+t}\, Q_s$ dir.

$1 < p < \infty$ ve $q > -1$ için $1/p + 1/p' = 1$ olmak üzere $(b^p_q)'$ dual uzayının $b^{p'}_q$ ile özdeş (izomorfik) olduğu biliniyor. [5], Teorem 13.4 te bu durumun tüm $q \in \mathbb{R}$ için doğru olduğu gösterilmiştir.

Bu kısımda amacımız, $(b^1_q)'$ dual uzayının b_α ile ve $(b_{\alpha 0})'$ dual uzayının b^1_q ile özdeş olduğunu göstermektir. Burada $q, \alpha \in \mathbb{R}$ üzerinde herhangi bir kısıt yoktur. Bahsi geçen özdeşleştirmeler bir çok farklı eşleme (farklı s ve t seçimlerine karşılık gelen) kullanılarak elde edilebilir. Daha doğru bir ifade ile aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 6.1.3. *$q \in \mathbb{R}$ olsun. Herhangi $s, t \in \mathbb{R}$ çifti*

$$s > q, \tag{6.11}$$

$$q + t > -1 \tag{6.12}$$

şartını sağlayacak şekilde seçilsin. $u \in b^1_q$ ve $v \in b_\alpha$ olmak üzere

$$\langle u, v \rangle = \int_{\mathbb{B}} I^t_s u\, \overline{I^{s-q-\alpha}_{t+q+\alpha} v}\; d\nu_{q+\alpha} \tag{6.13}$$

eşlemesi altında b^1_q uzayının duali herhangi $\alpha \in \mathbb{R}$ için b_α uzayı ile özdeştir.

Teoremin ispatına geçmeden ispatta kullanılacak bir yardımcı teoremi ifade edelim.

Yardımcı Teorem 6.1.4. *$\alpha, q \in \mathbb{R}$ olsun. Herhangi $s, t \in \mathbb{R}$ çifti (6.11) ve (6.12) sağlanacak şekilde alınsın.*

$$t' = s - q - \alpha \text{ ve } s' = t + q + \alpha \tag{6.14}$$

olsun. Her $\varphi \in L^1_q$ ve $\psi \in L^\infty_\alpha$ için

$$\int_{\mathbb{B}} T_{s,t}\varphi\,\overline{\psi}\; d\nu_{q+\alpha} = \int_{\mathbb{B}} \varphi\,\overline{T_{s',t'}\psi}\; d\nu_{q+\alpha}$$

dır.

Kanıt. $T_{s,t}$ operatörü açık olarak yazılırsa $\mathcal{I} = \int_{\mathbb{B}} T_{s,t}\varphi\,\overline{\psi}\; d\nu_{q+\alpha}$ olmak üzere

$$\mathcal{I} = \int_{\mathbb{B}} (1-|x|^2)^t \int_{\mathbb{B}} R_{s+t}(x,y)\varphi(y)(1-|y|^2)^s d\nu(y)\,\overline{\psi(x)}\; d\nu_{q+\alpha}(x)$$

dir. (6.11) ve (6.12) gereği [5], Teorem 1.6 dan $S_{s,t} = |T_{s,t}|$ operatörü sınırlı ve $\psi \in L^\infty$ olduğundan yukarıdaki integral sonludur. O halde Fubini teoreminden integraller yer değiştirebilir. Böylece

$$\mathcal{I} = \int_{\mathbb{B}} (1-|y|^2)^s \varphi(y) \int_{\mathbb{B}} R_{s+t}(x,y)\overline{\psi(x)}(1-|x|^2)^t\; d\nu_{q+\alpha}(x) d\nu(y)$$

yazılabilir. $R_{s+t}(x,y) = R_{s+t}(y,x)$ ve R_{s+t} gerçel değerli olduğundan

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \int_{\mathbb{B}} \varphi(y)(1-|y|^2)^{s-q-\alpha}\overline{\int_{\mathbb{B}} R_{s+t}(x,y)\psi(x)(1-|x|^2)^{t+q+\alpha}\; d\nu(x)}\; d\nu_{\alpha+q}(y)\\ &= \int_{\mathbb{B}} \varphi\,\overline{T_{s',t'}\psi}\; d\nu_{q+\alpha}\end{aligned}$$

elde edilir. ∎

Teorem 6.1.3 ün kanıtı. İlk olarak (6.11) ve (6.12) nin $p = 1$ iken (6.9) ve (6.10) olduğunu not edelim. t' ve s' (6.14) teki gibi tanımlansın. O halde (6.11) ve (6.12) den görülür ki

$$s' > \alpha - 1, \tag{6.15}$$

$$\alpha + t' > 0 \tag{6.16}$$

dır. Böylece eğer $v \in b_\alpha$ ise (6.16) den $I^{t'}_{s'}v \in L^\infty_\alpha$ ve $\|v\|_{b_\alpha} = \|I^{t'}_{s'}v\|_{L^\infty_\alpha}$ dır. Ayrıca eğer $u \in b^1_q$ ise (6.12) gereği $I^t_s u \in L^1_q$ ve $\|u\|_{b^1_q} = \|I^t_s u\|_{L^1_q}$ olur. Bu nedenle (6.13) eşlemesi b_q^1 üzerinde bir doğrusal fonksiyonel verir. Bu fonksiyonel $L_v : b_q^1 \to \mathbb{C}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} |L_v(u)| &\leq \int_{\mathbb{B}} |I_s^t u| \, \overline{|I_{s'}^{t'} v|} \, d\nu_{q+\alpha} \\ &\lesssim \|v\|_{b_\alpha} \int_{\mathbb{B}} |I_s^t u| \, d\nu_q \lesssim \|v\|_{b_\alpha} \|u\|_{b_q^1} \end{aligned}$$

bulunur. O halde L_v sınırlı doğrusal bir fonksiyonel ve

$$\|L_v\| \lesssim \|v\|_{b_\alpha} \tag{6.17}$$

dır.

Tersine, $L \in (b_q^1)'$ alalım. $L(u) = \langle u, v \rangle$ olacak şekilde $v \in b_\alpha$ nın varlığını göstereceğiz. (6.11) ve Teorem 6.1.1 den $Q_s : L_q^1 \to b_q^1$ sınırlıdır. Böylece $L \circ Q_s \in (L_q^1)'$ ve $\|L \circ Q_s\| \leq \|Q_s\| \|L\| \lesssim \|L\|$ dir. Bu nedenle Riesz temsil teoremi gereği en az bir $\chi \in L^\infty$ vardır öyle ki $\varphi \in L_q^1$ için

$$L\, Q_s(\varphi) = \int_{\mathbb{B}} \varphi \, \overline{\chi} \, d\nu_q$$

ve $\|\chi\|_{L^\infty} = \|LQ_s\| \lesssim \|L\|$ dir. Eğer $\psi(x) := (1 - |x|^2)^{-\alpha} \chi(x)$ alınırsa

$$L\, Q_s(\varphi) = \int_{\mathbb{B}} \varphi \, \overline{\psi} \, d\nu_{q+\alpha}$$

dır. Açıktır ki $\psi \in L_\alpha^\infty$ ve $\|\psi\|_{L_\alpha^\infty} = \|\chi\|_{L^\infty} \lesssim \|L\|$ dir. $u \in b_q^1$ alınsın. O halde $I_s^t u \in L_q^1$ olur. Sonuç 6.1.2 (a) ve daha sonra (b) den

$$L(u) = \frac{V_s}{V_{s+t}} \, L Q_s I_s^t u = \frac{V_s}{V_{s+t}} \int_{\mathbb{B}} I_s^t u \, \overline{\psi} \, d\nu_{q+\alpha} = \frac{V_s}{V_{s+t}^2} \int_{\mathbb{B}} T_{s,t} I_s^t u \, \overline{\psi} \, d\nu_{q+\alpha}$$

bulunur. Buradan Yardımcı Teorem 6.1.4 ve Sonuç 6.0.7 (c) ye başvurulursa

$$L(u) = \frac{V_s}{V_{s+t}^2} \int_{\mathbb{B}} I_s^t u \, \overline{T_{s',t'} \psi} \, d\nu_{q+\alpha} = \frac{V_s V_{s'}}{V_{s+t}^2} \int_{\mathbb{B}} I_s^t u \, \overline{I_{s'}^{t'} Q_{s'} \psi} \, d\nu_{q+\alpha}$$

elde edilir. $v = \dfrac{V_s V_{s'}}{V_{s+t}^2} Q_{s'} \psi$ alınsın. Bu durumda (6.15) ve Teorem 1.6 dan $v \in b_\alpha$ dır ve

$$L(u) = \int_{\mathbb{B}} I_s^t u \, \overline{I_{s'}^{t'} v} \, d\nu_{q+\alpha} = \langle u, v \rangle$$

dir.

Diğer yandan Sonuç 6.0.7 (c) ve Teorem 3.1 den

$$\begin{aligned} \|v\|_{b_\alpha} = \|I_{s'}^{t'} v\|_{L_\alpha^\infty} &= \frac{V_s V_{s'}}{V_{s+t}^2} \|I_{s'}^{t'} Q_{s'} \psi\|_{L_\alpha^\infty} \\ &= \frac{V_{s'}}{V_{s+t}^2} \|T_{s',t'} \psi\|_{L_\alpha^\infty} \lesssim \|\psi\|_{L_\alpha^\infty} \end{aligned}$$

dır. Üstelik yukarıdaki tartışmalardan $\|\psi\|_{L^\infty_\alpha} \lesssim \|L\|$ olduğundan

$$\|v\|_{b_\alpha} \lesssim \|\psi\|_{L^\infty_\alpha} \lesssim \|L\| \tag{6.18}$$

bulunur. O halde (6.17) ve (6.18) den $\|v\|_{b_\alpha} \sim \|L\|$ dir.

Son olarak v nin tekliği Riesz temsil teoreminin teklik kısmından elde edilir.

■

Şimdi $b_{\alpha 0}$ uzayının dual uzayı üzerinde duralım.

Teorem 6.1.5. *$\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. Herhangi s, t çifti*

$$s > \alpha - 1,$$
$$\alpha + t > 0$$

şartları sağlanacak şekilde verilsin. $u \in b_{\alpha 0}$ ve $v \in b^1_q$ olmak üzere

$$\langle u, v\rangle = \int_{\mathbb{B}} I^t_s u \, \overline{I^{s-q-\alpha}_{t+q+\alpha} v} \; d\nu_{q+\alpha}$$

eşlemesi altında $b_{\alpha 0}$ uzayının duali herhangi $q \in \mathbb{R}$ için b^1_q uzayı ile özdeştir.

Teoremin ispatına geçmeden ispatta yararlanılacak bir yardımcı teorem verelim.

Yardımcı Teorem 6.1.6. *$\alpha, q \in \mathbb{R}$ olsun. Herhangi $s, t \in \mathbb{R}$ çifti $s > \alpha - 1$ ve $\alpha + t > 0$ sağlanacak şekilde alınsın.*

$$t' = s - q - \alpha \;\; ve \;\; s' = t + q + \alpha \tag{6.19}$$

olsun. Her $\varphi \in \mathcal{C}_{\alpha 0}$ ve $\psi \in L^1_q$ için aşağıdaki eşitlik doğrudur.

$$\int_{\mathbb{B}} T_{s,t}\varphi \, \overline{\psi} \; d\nu_{q+\alpha} = \int_{\mathbb{B}} \varphi \, \overline{T_{s',t'}\psi} \; d\nu_{q+\alpha}.$$

Kanıt. $T_{s,t}$ operatörü açık olarak yazılırsa $\mathcal{I} = \int_{\mathbb{B}} T_{s,t}\varphi \, \overline{\psi} \; d\nu_{q+\alpha}$ olmak üzere

$$\mathcal{I} = \int_{\mathbb{B}} (1 - |x|^2)^t \int_{\mathbb{B}} R_{s+t}(x, y)\varphi(y)(1 - |y|^2)^s d\nu(y) \, \overline{\psi(x)} \; d\nu_{q+\alpha}(x)$$

dir. (1.5) ve (1.6) dan Teorem 3.3 gereği $S_{s,t} = |T_{s,t}|$ operatörü sınırlı ve $\psi \in L^1_q$ olduğundan yukarıdaki integral sonludur. O halde Fubini teoreminden integraller yer değiştirebilir. Bu durumda

$$\mathcal{I} = \int_{\mathbb{B}} (1 - |y|^2)^s \varphi(y) \int_{\mathbb{B}} R_{s+t}(x, y)\overline{\psi(x)}(1 - |x|^2)^t \; d\nu_{q+\alpha}(x) d\nu(y)$$

yazılabilir. $R_{s+t}(x,y) = R_{s+t}(y,x)$ ve R_{s+t} gerçel değerli olduğundan

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \int_{\mathbb{B}} \varphi(y)(1-|y|^2)^{s-q-\alpha} \overline{\int_{\mathbb{B}} R_{s+t}(x,y)\psi(x)(1-|x|^2)^{t+q+\alpha}\, d\nu(x)}\, d\nu_{\alpha+q}(y)\\ &= \int_{\mathbb{B}} \varphi\, \overline{T_{s',t'}\psi}\, d\nu_{q+\alpha}\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 6.1.5 in kanıtı. Öncelikle $s > \alpha - 1$, $\alpha + t > 0$ şartlarının (1.5) ve (1.6) olduğunu not edelim. t' ve s' (6.19) daki gibi tanımlansın. O halde (1.5) ve (1.6) dan görülür ki

$$s' > q, \tag{6.20}$$

$$q + t' > -1 \tag{6.21}$$

dir. Böylece eğer $v \in b^1_q$ ise (6.21) den $I^{t'}_{s'}v \in L^1_q$ ve $\|v\|_{b^1_q} = \|I^{t'}_{s'}v\|_{L^1_q}$ dur. Ayrıca eğer $u \in b_{\alpha 0}$ ise (1.6) gereği $I^t_s u \in \mathcal{C}_{\alpha 0}$ ve $\|u\|_{b_{\alpha 0}} = \|I^t_s u\|_{\mathcal{C}_{\alpha 0}}$ dır. Bu nedenle (6.13) eşlemesi $b_{\alpha 0}$ üzerinde bir doğrusal fonksiyonel verir. Bu fonksiyonel $L_v : b_{\alpha 0} \to \mathbb{C}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}|L_v(u)| &\leq \int_{\mathbb{B}} |I^t_s u|\, \overline{|I^{t'}_{s'}v|}\, d\nu_{q+\alpha}\\ &\lesssim \|u\|_{b_{\alpha 0}} \int_{\mathbb{B}} |I^{t'}_{s'}v|\, d\nu_q \lesssim \|u\|_{b_{\alpha 0}} \|v\|_{b^1_q}\end{aligned}$$

bulunur. O halde L_v sınırlı doğrusal bir fonksiyonel ve

$$\|L_v\| \lesssim \|v\|_{b^1_q} \tag{6.22}$$

dur.

Tersine, $L \in (b_{\alpha 0})'$ alalım. $L(u) = \langle u, v\rangle$ olacak şekilde $v \in b^1_q$ nun varlığını göstereceğiz. $s > \alpha - 1$ olduğundan Teorem 1.6 dan $Q_s : \mathcal{C}_{\alpha 0} \to b_{\alpha 0}$ sınırlıdır. Böylece $L \circ Q_s \in (\mathcal{C}_{\alpha 0})'$ ve $\|L \circ Q_s\| \leq \|Q_s\|\|L\| \lesssim \|L\|$ dir. M, $(1-|x|^2)^{-\alpha}$ ile çarpım operatörü olsun. O halde $LQ_sM \in (\mathcal{C}_{00})'$ olur. Buna göre Riesz temsil teoreminden, $\mathbb{B}$ üzerinde bir μ sonlu Borel ölçüsü $\varphi \in \mathcal{C}_{00}$ için

$$L\,Q_sM(\varphi) = \int_{\mathbb{B}} \varphi\, d\mu$$

olacak şekilde vardır. Üstelik $|\mu| = \|LQ_sM\| \lesssim \|L\|$ dir. Açıktır ki $u \in b_{\alpha 0}$ için $I^t_s u \in \mathcal{C}_{\alpha 0}$ dır ve $h = M^{-1}I^t_s u \in \mathcal{C}_{00}$ alınırsa

$$L\,Q_sM(h) = \int_{\mathbb{B}} (1-|x|^2)^{\alpha} I^t_s u\, d\mu$$

bulunur. Sırasıyla Sonuç 6.0.7 (a) ve (b) den

$$L(u) = \frac{V_s}{V_{s+t}} LQ_s I_s^t u = \frac{V_s}{V_{s+t}} \int_{\mathbb{B}} I_s^t u\,(1-|x|^2)^\alpha\,d\mu = \frac{V_s}{V_{s+t}^2} \int_{\mathbb{B}} T_{s,t} I_s^t u\,(1-|x|^2)^\alpha\,d\mu$$

olur. $\psi \in L_q^1$, μ nun ν_q ya göre türevi olsun. Yani $d\mu = \overline{\psi} d\nu_q$ ve $|\mu| = \|\psi\|_{L_q^1} \lesssim \|L\|$ dir. Böylece

$$L(u) = \frac{V_s}{V_{s+t}^2} \int_{\mathbb{B}} T_{s,t} I_s^t u\,\overline{\psi}(1-|x|^2)^\alpha\,d\nu_q = \frac{V_s}{V_{s+t}} \int_{\mathbb{B}} T_{s,t} I_s^t u\,\overline{\psi}\,d\nu_{q+\alpha}$$

elde edilir. Buradan Yardımcı Teorem 6.1.6 ve Sonuç 6.1.2 (c) ye başvurulursa

$$L(u) = \frac{V_s}{V_{s+t}^2} \int_{\mathbb{B}} I_s^t u\,\overline{T_{s',t'}\psi}\,d\nu_{q+\alpha} = \frac{V_s V_{s'}}{V_{s+t}^2} \int_{\mathbb{B}} I_s^t u\,\overline{I_{s'}^{t'} Q_{s'}\psi}\,d\nu_{q+\alpha}$$

dır. $v = \dfrac{V_s V_{s'}}{V_{s+t}^2} Q_{s'}\psi$ alınsın. Bu durumda $s' > q$ olduğundan Teorem 6.1.1 den $v \in b_q^1$ ve

$$L(u) = \int_{\mathbb{B}} I_s^t u\,\overline{I_{s'}^{t'} v}\,d\nu_{q+\alpha} = \langle u, v\rangle$$

dir. Ayrıca Sonuç 6.1.2 (c) ve [5], Teorem 1.6 dan

$$\begin{aligned}\|v\|_{b_q^1} = \|I_{s'}^{t'} v\|_{L_q^1} &= \frac{V_s V_{s'}}{V_{s+t}} \|I_{s'}^{t'} Q_{s'}\psi\|_{L_q^1} \\ &= \frac{V_{s'}}{V_{s+t}} \|T_{s',t'}\psi\|_{L_q^1} \lesssim \|\psi\|_{L_q^1}\end{aligned}$$

olur. Üstelik yukarıdaki tartışmalardan $\|\psi\|_{L_q^1} \lesssim \|L\|$ olduğundan

$$\|v\|_{b_q^1} \lesssim \|\psi\|_{L_q^1} \lesssim \|L\| \tag{6.23}$$

bulunur. O halde (6.22) ve (6.23) ten $\|v\|_{b_q^1} \sim \|L\|$ dir.

Son olarak v nin tekliği Riesz temsil teoreminin teklik kısmından elde edilir.

■

Teorem 6.1.3 ve 6.1.5 gösterir ki $q, \alpha \in \mathbb{R}$ üzerinde herhangi bir kısıt olmadan farklı s, t seçimlerine karşılık gelen uygun eşlemeler altında, b_q^1 nun duali b_α ile ve $b_{\alpha 0}$ ın duali b_q^1 ile özdeştir.

$\alpha = 0$ ve $q > -1$ için Teorem 6.1.3 ve 6.1.5 daha önce [8, 9, 18] de ispatlanmıştır. Bu teoremlerin tüm $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $q \in \mathbb{R}$ için holomorfik benzerleri [2, 3] te bulunabilir. [2] deki eşlemeler buradaki eşlemelerin birebir holomorfik karşılığıdır. [3] te ise bir limit de içeren nispeten farklı eşlemeler kullanılmıştır.

7. GLEASON PROBLEMİ, ATOMİK AYRIŞIM VE SALINIM CİNSİNDEN KARAKTERİZASYON

7.1. Gleason Problemi

Ağırlıklı harmonik Bloch uzaylarında Gleason problemi, $a \in \mathbb{B}$ ve $u \in b_\alpha$ olmak üzere her $x \in \mathbb{B}$ için

$$u(x) - u(a) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - a_j)\, A_j u(x)$$

olacak şekilde $A_1, A_2, \ldots, A_n : b_\alpha \to b_\alpha$ sınırlı doğrusal operatörlerinin var olup olmadığını belirleme problemidir.

Bu problem $a = 0$ ve $\alpha = 0$ için [6] da ve $a \in \mathbb{B}$, $\alpha > -1$ genel hali için [7] de çözülmüştür. [19] da ise bu problem sadece $\mathbb{B}$ için değil, sınırı C^2 de olan sınırlı ve dışbükey bölgeler için fakat hâlâ $\alpha > -1$ kısıtıyla çözülmüştür.

Buradaki amacımız Gleason problemini tüm $\alpha \in \mathbb{R}$ için çözmektir. İspatın esas içeriği, doğuran çekirdek formülü (1.8) ve Bölüm 2.4 teki çekirdek kestirimlerinden oluşacaktır.

Teorem 7.1.1. *$\alpha \in \mathbb{R}$ ve $a \in \mathbb{B}$ olsun. Her $u \in b_\alpha$ ve her $x \in \mathbb{B}$ için*

$$u(x) - u(a) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - a_j)\, A_j u(x) \tag{7.1}$$

olacak şekilde, b_α üzerinde $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sınırlı doğrusal operatörleri vardır.

Kanıt. $u \in b_\alpha$ olsun. $x \in \mathbb{B}$ için $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\psi(\tau) = u(\tau x + (1-\tau)a)$ olarak tanımlansın. Açıktır ki $\psi(0) = u(a)$ ve $\psi(1) = u(x)$ dir. Analizin temel teoreminden

$$u(x) - u(a) = \psi(1) - \psi(0) = \int_0^1 \psi'(\tau) d\tau = \int_0^1 \frac{d}{d\tau} u(y)\, d\tau$$

yazılabilir. Yine temel analizden

$$\begin{aligned} u(x) - u(a) &= \int_0^1 \nabla u\big(\tau x + (1-\tau)a\big) \cdot (x - a)\, d\tau \\ &= \sum_{j=1}^{n} (x_j - a_j) \int_0^1 \partial_j u\big(\tau x + (1-\tau)a\big)\, d\tau \end{aligned}$$

elde edilir. A_j operatörleri, $A_j u(x) = \int_0^1 \partial_j u\big(\tau x + (1-\tau)a\big) d\tau$ olarak tanımlanırsa (7.1) in sağlandığı açıktır. Ayrıca integral altında türev alınırsa yine açıktır ki

$A_j u \in h(\mathbb{B})$ dir. Geriye A_j operatörünün b_α üzerinde sınırlı olduğunu göstermek kalır. Böylece aynı zamanda herhangi $u \in b_\alpha$ için $A_j u \in b_\alpha$ olacağı gösterilmiş olur. Bunun için $\alpha + N > 0$ olacak şekilde $N \in \mathbb{N}$ alalım. O halde Teorem 1.2 gereği

$$\sum_{|m|\leq N-1} |(\partial^m A_j u)(0)| + \sum_{|m|=N} \|(1-|x|^2)^N \partial^m A_j u\|_{L^\infty_\alpha} \lesssim \|u\|_{b_\alpha}$$

olacağını göstermek yeterlidir.

(1.5), (1.6) ve $s > -n$ sağlanacak şekilde $s, t \in \mathbb{R}$ alalım. Bu durumda $I^t_s u \in L^\infty_\alpha$ ve $\|u\|_{b_\alpha} \sim \|I^t_s u\|_{L^\infty_\alpha}$ dır. (1.8) den

$$u(x) = \frac{V_s}{V_{s+t}} \int_{\mathbb{B}} R_s(x,y)\, I^t_s u(y)\, d\nu_s(y)$$

dir. Eşitliğin her iki tarafına A_j operatörü uygulanırsa,

$$A_j u(x) = \frac{V_s}{V_{s+t}} \int_0^1 \partial_j \int_{\mathbb{B}} R_s(\tau x + (1-\tau)a, y)\, I^t_s u(y)\, d\nu_s(y)\, d\tau$$

olur. (2.9) gereği türev integralin içine atılabileceğinden

$$A_j u(x) = \frac{V_s}{V_{s+t}} \int_0^1 \int_{\mathbb{B}} (\partial_j R_s)(\tau x + (1-\tau)a, y)\, I^t_s u(y)\, d\nu_s(y)\, d\tau$$

bulunur. m, $|m| \leq N$ olacak şekilde bir çoklu indeks olsun. Türev alınır ve zincir kuralı uygulanırsa

$$\partial^m A_j u(x) = \frac{V_s}{V_{s+t}} \int_0^1 \tau^{|m|} \int_{\mathbb{B}} (\partial^m \partial_j R_s)(\tau x + (1-\tau)a, y)\, I^t_s u(y)\, d\nu_s(y)\, d\tau$$

elde edilir. Yardımcı Teorem 2.4.2 ve Fubini teoremine başvurulursa

$$|\partial^m A_j u(x)| \lesssim \int_{\mathbb{B}} |I^t_s u(y)| \int_0^1 \frac{1}{[\tau x + (1-\tau)a, y]^{n+s+|m|+1}}\, d\tau\, d\nu_s(y)$$

eşitsizliği elde edilir. İçerideki integralin bir kestirimi [7], Yardımcı Teorem 2.1 de yapılmış ve

$$\int_0^1 \frac{1}{[\tau x + (1-\tau)a, y]^{n+s+|m|+1}}\, d\tau \lesssim \frac{1}{[x,y]^{n+s+|m|}}$$

olduğu gösterilmiştir. Bu nedenle

$$|\partial^m A_j u(x)| \lesssim \int_{\mathbb{B}} \frac{1}{[x,y]^{n+s+|m|}}\, |I^t_s u(y)|\, (1-|y|^2)^s\, d\nu(y)$$

dir.

Eğer $|m| = N$ ise $N + \alpha > 0$ ve $s > \alpha - 1$ olduğundan Teorem 3.1 den

$$\|(1 - |x|^2)^N \partial^m A_j u\|_{L^\infty_\alpha} \lesssim \|I_s^t u\|_{L^\infty_\alpha}$$

dır.

Eğer $|m| \leq N - 1$ ise $[0, y] = 1$ ve $s - \alpha > -1$ olduğundan

$$\begin{aligned}
|\partial^m A_j u(0)| &\lesssim \int_{\mathbb{B}} |I_s^t u(y)|(1 - |y|^2)^s d\nu(y) \leq \|I_s^t u\|_{L^\infty_\alpha} \int_{\mathbb{B}} (1 - |y|^2)^{s-\alpha} d\nu(y) \\
&\lesssim \|I_s^t u\|_{L^\infty_\alpha}
\end{aligned}$$

dır. Sonuç olarak A_j, b_α üzerinde sınırlıdır. ■

Benzer şekilde ağırlıklı harmonik küçük Bloch uzaylarında Gleason problemi $a \in \mathbb{B}$ ve $u \in b_{\alpha 0}$ olmak üzere her $x \in \mathbb{B}$ için

$$u(x) - u(a) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - a_j)\, A_j u(x)$$

olacak şekilde $A_1, A_2, \ldots, A_n : b_{\alpha 0} \to b_{\alpha 0}$ sınırlı doğrusal operatörlerinin var olup olmadığını belirleme problemidir.

Aşağıdaki teoremde tüm $\alpha \in \mathbb{R}$ için harmonik küçük Bloch uzayları $b_{\alpha 0}$ üzerinde Gleason problemi çözülmüştür.

Teorem 7.1.2. *$\alpha \in \mathbb{R}$ ve $a \in \mathbb{B}$ olsun. Her $u \in b_{\alpha 0}$ ve her $x \in \mathbb{B}$ için*

$$u(x) - u(a) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - a_j)\, A_j u(x)$$

olacak şekilde, $b_{\alpha 0}$ üzerinde $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sınırlı doğrusal operatörleri vardır.

Kanıt. Teorem 7.1.1 in ispatına benzer bir fikir yürüteceğiz. $u \in b_{\alpha 0}$ olsun. $x \in \mathbb{B}$ için temel analizden

$$\begin{aligned}
u(x) - u(a) &= \int_0^1 \nabla u\big(\tau x + (1 - \tau)a\big) \cdot (x - a)\, d\tau \\
&= \sum_{j=1}^{n} (x_j - a_j) \int_0^1 \partial_j u\big(\tau x + (1 - \tau)a\big)\, d\tau
\end{aligned}$$

yazılabilir. A_j operatörleri, $A_j u(x) = \int_0^1 \partial_j u\big(\tau x + (1-\tau)a\big) d\tau$ olarak tanımlanırsa (7.1) in sağlandığı açıktır. Ayrıca integral altında türev alınırsa yine açıktır ki $A_j u \in h(\mathbb{B})$ dir. Önceki teoremden A_j operatörünün b_α üzerinde sınırlı olduğu biliniyor. O halde $u \in b_{\alpha 0}$ iken $A_j u \in b_{\alpha 0}$ olduğunu göstermek yeterlidir.

(1.5), (1.6) ve $s > -n$ sağlanacak şekilde $s, t \in \mathbb{R}$ alalım. Bu durumda Teorem 1.3 ten $I_s^t u \in \mathcal{C}_{\alpha 0}$ dır. (1.8) den

$$u(x) = \frac{V_s}{V_{s+t}} \int_{\mathbb{B}} R_s(x,y)\, I_s^t u(y)\, d\nu_s(y)$$

dir. Eşitliğin her iki tarafına A_j operatörü uygulanırsa,

$$A_j u(x) = \frac{V_s}{V_{s+t}} \int_0^1 \partial_j \int_{\mathbb{B}} R_s(\tau x + (1-\tau)a, y)\, I_s^t u(y)\, d\nu_s(y)\, d\tau$$

olur. (2.9) gereği türev integralin içine atılabileceğinden

$$A_j u(x) = \frac{V_s}{V_{s+t}} \int_0^1 \int_{\mathbb{B}} (\partial_j R_s)(\tau x + (1-\tau)a, y)\, I_s^t u(y)\, d\nu_s(y)\, d\tau$$

bulunur. $\alpha + N > 0$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ alalım. m, derecesi $|m| = N$ olan bir çoklu indeks olsun. Türev alınır ve zincir kuralı uygulanırsa

$$\partial^m A_j u(x) = \frac{V_s}{V_{s+t}} \int_0^1 \tau^{|m|} \int_{\mathbb{B}} (\partial^m \partial_j R_s)(\tau x + (1-\tau)a, y)\, I_s^t u(y)\, d\nu_s(y)\, d\tau$$

elde edilir. Yardımcı Teorem 2.4.2 ve Fubini teoremine başvurulursa

$$|\partial^m A_j u(x)| \lesssim \int_{\mathbb{B}} |I_s^t u(y)| \int_0^1 \frac{1}{[\tau x + (1-\tau)a, y]^{n+s+|m|+1}}\, d\tau\, d\nu_s(y)$$

eşitsizliği elde edilir. İçerideki integralin bir kestirimi [7], Yardımcı Teorem 2.1 de yapılmış ve

$$\int_0^1 \frac{1}{[\tau x + (1-\tau)a, y]^{n+s+|m|+1}}\, d\tau \lesssim \frac{1}{[x,y]^{n+s+|m|}}$$

olduğu gösterilmiştir. Bu nedenle

$$\begin{aligned}
|\partial^m A_j u(x)| &\lesssim \int_{\mathbb{B}} \frac{1}{[x,y]^{n+s+|m|}}\, |I_s^t u(y)|\, (1-|y|^2)^s\, d\nu(y) \\
(1-|x|^2)^N |\partial^m A_j u(x)| &\lesssim (1-|x|^2)^N \int_{\mathbb{B}} \frac{1}{[x,y]^{n+s+|m|}}\, |I_s^t u(y)|\, (1-|y|^2)^s\, d\nu(y) \\
&= E_{N,s}(|I_s^t u|)(x)
\end{aligned}$$

dir. $|I_s^t u| \in \mathcal{C}_{\alpha 0}$ ve $N + \alpha > 0$, $s > \alpha - 1$ olduğundan Teorem 3.3 ten $E_{N,s}$ operatörü $\mathcal{C}_{\alpha 0}$ üzerinde sınırlı ve $E_{N,s}|I_s^t u| \in \mathcal{C}_{\alpha 0}$ dır. Dolayısıyla, Teorem 1.3 ten $A_j u \in b_{\alpha 0}$ dır. ■

7.2. Atomik Ayrışım

$a \in \mathbb{B}$ ve $s \in \mathbb{R}$ olmak üzere $R_s(\,\cdot\,, a)$ fonksiyonu atom olarak adlandırılsın. b_α uzayı için atomik ayrışım teoremi uygun bir (a_m) dizisi alındığında her $u \in b_\alpha$ fonksiyonunun λ_m ler u ya bağlı uygun sayılar olmak üzere

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m R_s(\cdot, a_m)$$

formunda bir seri açılımına sahip olduğunu söyler.

Coifman ve Rochberg [20] de $\alpha = 0$ için $\mathbb{R}^n$ nin birim yuvarında harmonik Bergman ve Bloch uzayları için atomik ayrışımların varlığını ortaya koydu. [21] de b_0 ve b_{00} için atomik ayrışım teoremleri Möbius dönüşümleri kullanılarak farklı bir yöntemle tekrar ispat edilmiştir.

Bu kısımda [21] de standart ($\alpha = 0$) harmonik Bloch ve küçük Bloch uzaylarındaki fonksiyonlar için verilen atomik ayrışım formülleri tüm $\alpha \in \mathbb{R}$ için b_α ve $b_{\alpha 0}$ uzaylarına genişletilecektir.

İlk olarak $\mathbb{B}$ üzerindeki Möbius dönüşümlerini hatırlatalım. Konu ile ilgili ayrıntılar [22] de bulunabilir. $a \in \mathbb{B}$ olsun. a ile 0 noktalarını yer değiştiren Möbius dönüşümü $\psi_a : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$,

$$\psi_a(x) = \frac{(1 - |a|^2)(a - x) + |a - x|^2 a}{[x, a]^2}$$

dir. $x, y \in \mathbb{B}$ noktaları arasındaki sözde hiperbolik uzaklık $\rho(x, y) = |\psi_x(y)|$ dir. Basit bir hesaplama ile sözde hiperbolik uzaklığın açık bir formülü

$$\rho(x, y) = \frac{|x - y|}{[x, y]}$$

dir.

$a \in \mathbb{B}$ ve $0 < r < 1$ için a merkezli r yarıçaplı sözde hiperbolik yuvarı $E_r(a) = \{x \in \mathbb{B} : \rho(x, a) < r\}$ ile gösterelim. $E_r(a)$ nın $(1 - r^2)a/(1 - |a|^2 r^2)$ merkezli ve $(1 - |a|^2)r/(1 - |a|^2 r^2)$ yarıçaplı Öklid yuvarı olduğu biliniyor.

$r \in (0, 1)$ ve (a_m), $\mathbb{B}$ de bir dizi olsun. Eğer $E_{r/2}(a_m)$ yuvarları ikişer ikişer ayrık ve $\mathbb{B} = \cup_m E_r(a_m)$ ise (a_m) dizisine $\mathbb{B}$ de bir r-kafes denir.

$\ell^\infty = \{(\lambda_m)_{m=1}^\infty : \sup\limits_m |\lambda_m| < \infty\}$ sınırlı karmaşık sayı dizileri uzayı ve $c_0 = \{(\lambda_m) \in \ell^\infty : \lim\limits_{m\to\infty} \lambda_m = 0\} \subset \ell^\infty$ sıfıra yakınsayan dizilerin oluşturduğu altuzay olsun. b_0 ve b_{00} için [21], Teorem 2 de verilen atomik ayrışım teoremi şöyledir.

Teorem 7.2.1. *$s > -1$ olsun. $\mathbb{B}$ de öyle bir (a_m) δ-kafesi vardır ki, her $u \in b_0$ için*

$$u(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m R_s(x, a_m)(1 - |a_m|^2)^{s+n}$$

olacak şekilde $\lambda = (\lambda_m) \in \ell^\infty$ dizisi vardır. Buradaki seri $\mathbb{B}$ nin kompakt alt kümelerinde mutlak ve düzgün yakınsaktır. Üstelik, λ dizisinin ℓ^∞ normu, u nun b_0 normuna denktir. Ek olarak $u \in b_{00}$ ise $\lambda \in \mathcal{C}_0$ dır.

Aşağıdaki teorem tüm $\alpha \in \mathbb{R}$ için b_α ağırlıklı harmonik Bloch uzaylarındaki fonksiyonların atomik ayrışımlarını verir. Daha önce söylendiği gibi ispat, $\alpha = 0$ için [21] de verilen formüllerin tüm $\alpha \in \mathbb{R}$ için genellemesidir.

Teorem 7.2.2. *$\alpha \in \mathbb{R}$ ve $s > \alpha - 1$ olsun. $\mathbb{B}$ de öyle bir (a_m) δ-kafesi vardır ki, her $u \in b_\alpha$ için*

$$u(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m R_s(x, a_m)(1 - |a_m|^2)^{s+n-\alpha}$$

olacak şekilde $\lambda = (\lambda_m) \in \ell^\infty$ dizisi vardır. Burada seri, $\mathbb{B}$ nin kompakt alt kümelerinde ve $\|\cdot\|_{b_\alpha}$ da mutlak ve düzgün yakınsaktır. Üstelik, λ dizisinin ℓ^∞ normu u nun b_α normuna denktir.

Kanıt. (a_m) kafesi Teorem 7.2.1 de varlığı belirtilen kafes olsun. $s > \alpha - 1$ yani $s - \alpha > -1$ ve $u \in b_\alpha$ olsun. Önerme 5.3 ten $D_s^{-\alpha} u \in b_0$ ve $\|D_s^{-\alpha} u\|_{b_0} \sim \|u\|_{b_\alpha}$ dır. Teorem 7.2.1 den dolayı öyle bir $(\lambda_m) \in \ell^\infty$ dizisi vardır ki

$$D_s^{-\alpha} u(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m R_{s-\alpha}(x, a_m)(1 - |a_m|^2)^{s+n-\alpha}$$

ve $\|\lambda_m\|_{\ell^\infty} \sim \|D_s^{-\alpha} u\|_{b_0} \sim \|u\|_{b_\alpha}$ dır. Yukarıdaki formülde her iki tarafa $D_{s-\alpha}^{\alpha}$ operatörü uygulanırsa

$$D_{s-\alpha}^{\alpha} D_s^{-\alpha} u(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m D_{s-\alpha}^{\alpha} R_{s-\alpha}(x, a_m)(1 - |a_m|^2)^{s+n-\alpha}$$

elde edilir. Yardımcı Teorem 2.3.2 (d) den $D_{s-\alpha}^{\alpha} D_s^{-\alpha} u = u$ ve (2.12) den $D_{s-\alpha}^{\alpha} R_{s-\alpha} = R_s$ dir. Dolayısıyla,

$$u(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m R_s(x, a_m)(1 - |a_m|^2)^{s+n-\alpha}$$

ve $\|\lambda_m\|_{\ell^\infty} \sim \|u\|_{b_\alpha}$ dır. ∎

Şimdi $\alpha \in \mathbb{R}$ için $b_{\alpha 0}$ ağırlıklı harmonik küçük Bloch uzaylarındaki fonksiyonların atomik ayrışımını veren teorem ispatlanacaktır.

Teorem 7.2.3. *$\alpha \in \mathbb{R}$ ve $s > \alpha - 1$ olsun. $\mathbb{B}$ de öyle bir (a_m) δ-kafesi vardır ki, her $u \in b_{\alpha 0}$ için*

$$u(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m R_s(x, a_m)(1 - |a_m|^2)^{s+n-\alpha}$$

olacak şekilde $\lambda = (\lambda_m) \in c_0$ dizisi vardır. Burada seri $\mathbb{B}$ nin kompakt alt kümelerinde ve $\|\cdot\|_{b_{\alpha 0}}$ da mutlak ve düzgün yakınsaktır. Üstelik, λ dizisinin c_0 normu u nun $b_{\alpha 0}$ normuna denktir.

Kanıt. (a_m) kafesi Teorem 7.2.1 de varlığı belirtilen kafes olsun. $s > \alpha - 1$ yani $s - \alpha > -1$ ve $u \in b_{\alpha 0}$ olsun. Önerme 5.4 ten $D_s^{-\alpha} u \in b_{00}$ ve $\|D_s^{-\alpha} u\|_{b_{00}} \sim \|u\|_{b_{\alpha 0}}$ dır. Teorem 7.2.1 den dolayı öyle bir $(\lambda_m) \in c_0$ dizisi vardır ki

$$D_s^{-\alpha} u(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m R_{s-\alpha}(x, a_m)(1 - |a_m|^2)^{s+n-\alpha}$$

ve $\|\lambda_m\|_{c_0} \sim \|D_s^{-\alpha} u\|_{b_{00}} \sim \|u\|_{b_{\alpha 0}}$ dır. Yukarıdaki formülde her iki tarafa $D_{s-\alpha}^{\alpha}$ operatörü uygulanırsa

$$D_{s-\alpha}^{\alpha} D_s^{-\alpha} u(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m D_{s-\alpha}^{\alpha} R_{s-\alpha}(x, a_m)(1 - |a_m|^2)^{s+n-\alpha}$$

elde edilir. Yardımcı Teorem 2.3.2 (d) den $D_{s-\alpha}^{\alpha} D_s^{-\alpha} u = u$ ve (2.12) den $D_{s-\alpha}^{\alpha} R_{s-\alpha} = R_s$ dir. Dolayısıyla,

$$u(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m R_s(x, a_m)(1 - |a_m|^2)^{s+n-\alpha}$$

ve $\|\lambda_m\|_{c_0} \sim \|u\|_{b_{\alpha 0}}$ dır. ■

7.3. Salınım Cinsinden Karakterizasyon

Bu bölümde $\alpha > -1$ iken b_α ve $b_{\alpha 0}$ uzayları için salınım cinsinden bir karakterizasyon verilecektir. Yani $u \in b_\alpha$ (ya da $b_{\alpha 0}$) olması için $\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|}$ oranının nasıl bir şartı sağlaması gerektiği belirlenecektir.

Aşağıdaki teorem $-1 < \alpha \leq 1$ için b_α uzayının karakterizasyonunu veren bu bölümün temel sonuçlarındandır.

Teorem 7.3.1. *$-1 < \alpha \le 1$ olsun. λ aşağıdaki özellikleri sağlayan herhangi bir gerçel sayı olsun:*

(i) Eğer $-1 < \alpha < 0$ ise $0 \le \lambda \le \alpha + 1$.

(ii) Eğer $\alpha = 0$ ise $0 < \lambda < 1$.

(iii) Eğer $0 < \alpha \le 1$ ise $\alpha \le \lambda \le 1$.

Herhangi bir $u \in h(\mathbb{B})$ harmonik fonksiyonunun b_α da olması için gerek ve yeter şart

$$S_\lambda(u) := \sup_{\substack{x,y\in\mathbb{B}\\ x\neq y}} (1-|x|^2)^\lambda (1-|y|^2)^{\alpha+1-\lambda} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|} < \infty \tag{7.2}$$

olmasıdır.

Üstelik yukarıdaki şartları sağlayan herhangi α ve λ için $S_\lambda(u)$ ve $\|u\|_{b_\alpha} = \sup_{x\in\mathbb{B}}(1-|x|^2)^{\alpha+1}|\nabla u(x)|$ normları denktir.

$\alpha = 0$ ve $\lambda = 1/2$ için yukarıdaki teorem holomorfik Bloch uzayları için [23] te verilmiştir. Teoremin bu formu holomorfik Bloch ve küçük Bloch uzayları için [24] te verilmiştir.

Bu kısımda öncelikle [24] teki karakterizasyonlara karşılık gelen sonuçlar $-1 < \alpha \le 1$ iken b_α ve $b_{\alpha 0}$ uzayları için ifade ve ispat edilecektir. Ayrıca $\alpha > 0$ için b_α ve $b_{\alpha 0}$ uzaylarının karakterizasyonları verilecektir.

Teorem 7.3.1 in kanıtı. $u \in b_\alpha$ olsun. Herhangi $x, y \in \mathbb{B}$ için temel analizden

$$\begin{aligned} u(x) - u(y) &= \int_0^1 \frac{du}{dt}(tx + (1-t)y)\, dt \\ &= \int_0^1 \nabla u(tx + (1-t)y) \cdot (x-y)\, dt \end{aligned}$$

dir. Buradan

$$|u(x) - u(y)| \le |x-y| \int_0^1 |\nabla u(tx + (1-t)y)|\, dt$$

olur. Açıktır ki $(1 - |tx + (1-t)y|^2)^{\alpha+1}|\nabla u(tx + (1-t)y)| \lesssim \|u\|_{b_\alpha}$ dır. Buna göre $x \neq y$ olan herhangi $x, y \in \mathbb{B}$ için

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|} \lesssim \|u\|_{b_\alpha} \int_0^1 \frac{dt}{(1 - |tx + (1-t)y|^2)^{\alpha+1}}$$

dir. İntegralin içindeki ifade için

$$1-|tx+(1-t)y|^2 \geq 1-|tx+(1-t)y| \geq 1-t|x|-(1-t)|y| = 1-|y|+(|y|-|x|)t$$

bulunur. O halde

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|} \lesssim \|u\|_{b_\alpha} \int_0^1 \frac{dt}{(1-|y|+(|y|-|x|)t)^{\alpha+1}} \tag{7.3}$$

dir. Farz edelim ki $|x| = |y|$ olsun. Bu durumda

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|} \lesssim \|u\|_{b_\alpha} \int_0^1 \frac{dt}{(1-|y|)^{\alpha+1}} \lesssim \frac{\|u\|_{b_\alpha}}{(1-|x|^2)^\lambda(1-|y|^2)^{\alpha+1-\lambda}} \tag{7.4}$$

elde edilir. Şimdi $|x| \neq |y|$ durumunu ele alalım. $\tau = 1-|y|+(|y|-|x|)t$ olsun. O halde (7.3) deki integral

$$\frac{1}{|y|-|x|} \int_{1-|y|}^{1-|x|} \frac{d\tau}{\tau^{\alpha+1}} = \frac{1}{(1-|x|)-(1-|y|)} \int_{1-|y|}^{1-|x|} \frac{d\tau}{\tau^{\alpha+1}}$$

halini alır. [24], Yardımcı Teorem 1 den öyle bir $C > 0$ vardır ki yukarıdaki integral

$$\frac{C}{(1-|x|)^\lambda(1-|y|)^{\alpha+1-\lambda}}$$

ile üstten sınırlıdır. O halde buradan ve (7.4) ten her $x \neq y$ için

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|} \lesssim \frac{\|u\|_{b_\alpha}}{(1-|x|^2)^\lambda(1-|y|^2)^{\alpha+1-\lambda}} \tag{7.5}$$

dir. Böylece (7.2) sağlanır.

Tersine u, $\mathbb{B}$ de harmonik olsun ve (7.2) sağlansın. Bu durumda $u \in b_\alpha$ olduğu ve bunun için $(1-|x|^2)|\nabla u(x)| \in L_\alpha^\infty$ olduğu gösterilmelidir. Açıktır ki $|\nabla u| \leq \sum_{i=1}^{n} |\partial_i u|$ dur. O halde $i = 1, 2, \ldots, n$ ve $x \in \mathbb{B}$ için $(1-|x|^2)|\partial_i u(x)| \in L_\alpha^\infty$ olduğunu göstermek yeterlidir.

Sabit bir $x \in \mathbb{B}$ noktası alınsın. u fonksiyonunun $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ noktasında x_i ekseni yönünde yönlü türevi, e_i i.inci bileşeni 1 diğer bileşenleri 0 olan birim vektör olmak üzere

$$\partial_i u(x) = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+he_i)-u(x)}{h}$$

dir. Eğer $y = x + he_i$ alınırsa varsayımdan her $x \in \mathbb{B}$ için

$$\frac{|u(y)-u(x)|}{h} \leq \frac{S_\lambda(u)}{(1-|x|^2)^\lambda(1-|y|^2)^{\alpha+1-\lambda}}$$

bulunur. O halde

$$|\partial_i u(x)| \leq \lim_{h\to 0} \frac{S_\lambda(u)}{(1-|x|^2)^\lambda (1-|y|^2)^{\alpha+1-\lambda}} = \frac{S_\lambda(u)}{(1-|x|^2)^{\alpha+1}}$$

elde edilir. Buradan $i = 1, 2, \ldots, n$ ve $x \in \mathbb{B}$ için $(1-|x|^2)^{\alpha+1}|\partial_i u(x)| \leq S_\lambda(u)$ dur. Dolayısıyla $u \in b_\alpha$ dır.

Diğer yandan ispattaki tartışmadan açıktır ki $\sup\limits_{x\in\mathbb{B}}(1-|x|^2)^{\alpha+1}|\nabla u(x)|$ ve $S_\lambda(u)$ normları denktir. Böylece ispat tamamlanır. ■

$-1 < \alpha < 0$ için $\lambda = \alpha + 1$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 7.3.2. $-1 < \alpha < 0$ *ve* $u \in h(\mathbb{B})$ *olsun.* $u \in b_\alpha$ *olması için gerek ve yeter şart*

$$S_\alpha(u) := \sup_{\substack{x,y\in\mathbb{B}\\ x\neq y}} (1-|x|^2)^{\alpha+1} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|} < \infty$$

olmasıdır. Üstelik $\sup_{x\in\mathbb{B}}(1-|x|^2)^{\alpha+1}|\nabla u(x)|$ *ve* $S_\alpha(u)$ *normları denktir.*

$-1 < \alpha < 0$ için Teorem 1.2 den $u \in b_\alpha$ olması için gerek ve yeter şart $\sup\limits_{x\in\mathbb{B}}(1-|x|^2)^{\alpha+1}|\nabla u(x)| < \infty$ olmasıdır. Yukarıdaki sonuç kabaca ∇u nun yerine $|u(x)-u(y)|/|x-y|$ oranının yazılabileceğini söyler.

Aşağıdaki teorem $-1 < \alpha \leq 1$ iken $b_{\alpha 0}$ harmonik küçük Bloch uzayları için bir karakterizasyon verir.

Teorem 7.3.3. $-1 < \alpha \leq 1$ *olsun.* λ *aşağıdaki özellikleri sağlayan herhangi bir gerçel sayı olsun:*

(i) Eğer $-1 < \alpha < 0$ *ise* $0 < \lambda \leq \alpha + 1$.

(ii) Eğer $\alpha = 0$ *ise* $0 < \lambda < 1$.

(iii) Eğer $0 < \alpha \leq 1$ *ise* $\alpha \leq \lambda \leq 1$.

Herhangi bir $u \in h(\mathbb{B})$ *harmonik fonksiyonunun* $b_{\alpha 0}$ *da olması için gerek ve yeter şart*

$$\lim_{|x|\to 1^-} \left(\sup_{\substack{y\in\mathbb{B}\\ y\neq x}} (1-|x|^2)^\lambda (1-|y|^2)^{\alpha+1-\lambda} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|} \right) = 0 \tag{7.6}$$

olmasıdır.

Kanıt. Öncelikle farz edelim ki $u \in b_{\alpha 0}$ olsun. $t \in (0,1)$ için $u_t(x) = u(tx)$ olarak verilsin. Teorem 5.9 dan $u \in b_{\alpha 0}$ olduğundan $t \to 1^-$ iken b_α da $u_t \to u$ dur. (7.5) ten $x \neq y$ olan her $x, y \in \mathbb{B}$ için

$$(1-|x|^2)^\lambda (1-|y|^2)^{\alpha+1-\lambda} \frac{|(u-u_t)(x)-(u-u_t)(y)|}{|x-y|} \lesssim \|u-u_t\|_{b_\alpha}$$

ve ayrıca

$$\begin{aligned}
&(1-|x|^2)^\lambda (1-|y|^2)^{\alpha+1-\lambda} \frac{|u_t(x)-u_t(y)|}{|x-y|} \\
&= t\frac{(1-|x|^2)^\lambda (1-|y|^2)^{\alpha+1-\lambda}}{(1-|tx|^2)^\lambda (1-|ty|^2)^{\alpha+1-\lambda}}(1-|tx|^2)^\lambda (1-|ty|^2)^{\alpha+1-\lambda} \frac{|u(tx)-u(ty)|}{|tx-ty|} \\
&\lesssim t\frac{(1-|x|^2)^\lambda}{(1-t^2)^{\alpha+1}}\|u\|_{b_\alpha}
\end{aligned}$$

dır. Böylece üçgen eşitsizliğinden

$$\sup_{\substack{y\in\mathbb{B} \\ y\neq x}} (1-|x|^2)^\lambda (1-|y|^2)^{\alpha+1-\lambda} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|} \lesssim t\frac{(1-|x|^2)^\lambda}{(1-t^2)^{\alpha+1}}\|u\|_{b_\alpha} + \|u-u_t\|_{b_\alpha}$$

elde edilir. İlk olarak eşitsizliğin her iki tarafında $|x| \to 1^-$ iken limit alınırsa $\lambda > 0$ olduğu için sağdaki ilk terim 0 a yakınsar. Daha sonra $t \to 1^-$ iken limit alınırsa sağdaki ikinci terimde 0 a yakınsar. Böylece (7.6) sağlanır.

Tersine u, $\mathbb{B}$ de harmonik olsun ve (7.6) sağlansın. Bu durumda $u \in b_{\alpha 0}$ olduğu gösterilecektir.

(7.6) dan verilen herhangi $\epsilon > 0$ için öyle bir $\delta \in (0,1)$ vardır ki $|x| > \delta$ iken

$$\sup_{\substack{y\in\mathbb{B} \\ x\neq y}} (1-|x|^2)^\lambda (1-|y|^2)^{\alpha+1-\lambda} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|} < \epsilon$$

olur. Özel olarak $i = 1, 2, \ldots, n$ için e_i ler birim vektörler olmak üzere $y = x + he_i$ alınırsa $|x| > \delta$ iken

$$|\partial_i u(x)| < |\lim_{h\to 0} \frac{u(y)-u(x)}{h}| \leq \lim_{h\to 0} \frac{\epsilon}{(1-|x|^2)^\lambda (1-|y|^2)^{\alpha+1-\lambda}} = \frac{\epsilon}{(1-|x|^2)^{\alpha+1}}$$

elde edilir. Böylece $|x| > \delta$ iken her $i = 1, 2, \ldots, n$ için

$$(1-|x|^2)^{\alpha+1}|\partial_i u(x)| < \epsilon$$

bulunur. Bu ise $|x| \to 1^-$ iken $(1-|x|^2)^{\alpha+1}|\nabla u(x)| \to 0$ olması demektir. Dolayısıyla $u \in b_{\alpha 0}$ dır. ∎

Dikkat edilirse bu teoremde, Teorem 7.3.1 den farklı olarak eğer $-1 < \alpha < 0$ ise λ, 0 değerini alamaz. Yine teoremde $-1 < \alpha < 0$ ve $\lambda = \alpha + 1$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 7.3.4. *$-1 < \alpha < 0$ ve $u \in h(\mathbb{B})$ olsun. $u \in b_{\alpha 0}$ olması için gerek ve yeter şart*

$$\lim_{|x|\to 1^-}\left(\sup_{\substack{y\in\mathbb{B}\\ x\neq y}}(1-|x|^2)^{\alpha+1}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|}\right)=0$$

olmasıdır.

Şimdi Teorem 7.3.1 de α ve λ üzerindeki şartların genişletilemeyeceğini gösteren örnekler verilecektir.

Örnek 7.3.5. *İlk olarak $\alpha = 0$ olduğunda λ nın 0 veya 1 olamayacağını gösterelim.*

x ve y nin rolleri simetrik olduğundan, $\lambda = 0$ durumunu dikkate almak yeterlidir. ζ, $\mathbb{S}$ üzerinde sabit bir nokta ve $u(x) = R_{-n}(x, \zeta)$ olsun.

Teorem 5.15 (i) den $R_{-n}(\,\cdot\,, \zeta)$ nın b_α da olması için gerek ve yeter şart $\alpha \geq n + q$ olmasıdır. O halde açıktır ki $u(x) = R_{-n}(x, \zeta) \in b_0$ dır. Diğer taraftan

$$\sup_{\substack{x,y\in\mathbb{B}\\ x\neq y}}(1-|y|^2)\frac{|R_{-n}(x,\zeta)-R_{-n}(y,\zeta)|}{|x-y|}=\infty$$

olur. Şöyle ki eğer $y = 0$ ve $r \in (0, 1)$ için $x = r\zeta$ alınırsa Yardımcı Teorem 2.4.4 ten ve (2.7) den

$$|R_{-n}(r\zeta,\zeta)-1|\sim\log\frac{1}{1-r}$$

dir. Buradan $r \to 1^-$ iken limit alınırsa

$$|R_{-n}(r\zeta,\zeta)-1|\sim\log\frac{1}{1-r}\to\infty$$

elde edilir. Böylece $\alpha = 0$ ve $\lambda = 0$ için (7.2) sağlanmaz.

Yukarıdaki örnek aynı zamanda $\alpha = 0$ için Sonuç 7.3.2 ün doğru olmadığını gösterir.

Örnek 7.3.6. *$0 < \alpha \leq 1$ olsun. Teorem 7.3.1 in $\lambda < \alpha$ veya $\lambda > 1$ için doğru olmadığını gösterelim.*

Tekrar x ve y nin rollerinin simetrik olmasından, $\lambda < \alpha$ durumunu dikkate almak yeterlidir. ζ, $\mathbb{S}$ üzerinde sabit bir nokta ve $u(x) = R_{\alpha-n}(x,\zeta)$ olsun.

Teorem 5.15 (i) den $u(x) = R_{\alpha-n}(x,\zeta) \in b_\alpha$ dır. Diğer yandan $x \neq y$ olan $x, y \in \mathbb{B}$ için

$$(1-|x|^2)^{\lambda}(1-|y|^2)^{\alpha+1-\lambda}\frac{|R_{\alpha-n}(x,\zeta)-R_{\alpha-n}(y,\zeta)|}{|x-y|}$$

ifadesini ele alalım. Eğer $y = 0$ ve $r \in (0,1)$ için $x = r\zeta$ alınırsa ve (2.7) kullanılırsa ifade

$$(1-r^2)^{\lambda}\frac{|R_{\alpha-n}(r\zeta,\zeta)-1|}{r}$$

halini alır. $\alpha - n > -n$ olduğundan Yardımcı Teorem 2.4.4 ten

$$(1-r^2)^{\lambda}\frac{|R_{\alpha-n}(r\zeta,\zeta)-1|}{r} \sim \frac{(1-r^2)^{\lambda}}{r(1-r^2)^{\alpha}} = \frac{(1-r^2)^{\lambda-\alpha}}{r}$$

olur. Burada $r \to 1$ iken limit alınırsa $\lambda-\alpha < 0$ olduğundan $(1-r^2)^{\lambda-\alpha}/r \to \infty$ olur. Böylece

$$\sup_{\substack{x,y\in\mathbb{B}\\ x\neq y}}(1-|x|^2)^{\lambda}(1-|y|^2)^{\alpha+1-\lambda}\frac{|R_{\alpha-n}(x,\zeta)-R_{\alpha-n}(y,\zeta)|}{|x-y|} = \infty$$

elde edilir. O halde $0 < \alpha \leq 1$ ve $\lambda < \alpha$ için (7.2) şartı sağlanmaz ve Teorem 7.3.1 geçerli değildir.

Bu örnek aynı zamanda $0 < \alpha \leq 1$ için Sonuç 7.3.2 nin doğru olmadığını gösterir.

Örnek 7.3.7. *$-1 < \alpha \leq 1$ için $\lambda = (\alpha+1)/2$ alınırsa u nun b_α da olması için gerek ve yeter şart*

$$\sup_{\substack{x,y\in\mathbb{B}\\ x\neq y}}(1-|x|^2)^{\frac{\alpha+1}{2}}(1-|y|^2)^{\frac{\alpha+1}{2}}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|} < \infty \tag{7.7}$$

olmasıdır. Şimdi $\alpha > 1$ iken bu gerekliliğin doğru olmadığını gösterelim. $u(x) = R_{\alpha-n}(x,\zeta)$ alınsın. Teorem 5.15 (i) den $u(x) = R_{\alpha-n}(x,\zeta) \in b_\alpha$ dır. $y = 0$ ve $r \in (0,1)$ için $x = r\zeta$ alınsın. (2.7) ve Yardımcı Teorem 2.4.4 ten

$$(1-r^2)^{\frac{\alpha+1}{2}}\frac{|R_{\alpha-n}(r\zeta,\zeta)-1|}{r} \sim \frac{(1-r^2)^{\frac{\alpha+1}{2}}}{r(1-r^2)^{\alpha}} = \frac{(1-r^2)^{\frac{1-\alpha}{2}}}{r}$$

dir. Eğer $r \to 1$ iken limit alınırsa $(1-\alpha)/2 < 0$ olduğundan $(1-r^2)^{(1-\alpha)/2}/r \to \infty$ olur. Böylece $\alpha > 1$ için (7.7) doğru değildir.

Aşağıda $\alpha > 1$ olması durumunda b_α ve $b_{\alpha 0}$ uzaylarının karakterizasyonu için teoremler verilecektir. Fakat $\alpha < -1$ durumu için benzer karakterizasyonlar verilemez. Zira $\alpha > -1$ için $|\nabla u|$, b_α nın tanımlanması için yeterlidir ve $|u(x) - u(y)|/|x-y|$ ile ilişkilendirilebilir. Ancak $\alpha < -1$ için b_α yı tanımlayabilmek için iki ya da daha yüksek mertebeden türevlere ihtiyaç vardır. Dolayısıyla benzer bir karakterizasyon kullanılamaz.

Aşağıdaki teorem $\alpha > 1$ durumundan daha kapsayıcı olup $\alpha > 0$ için b_α uzayının bir karakterizasyonu verir.

Teorem 7.3.8. *$\alpha > 0$ olsun. Herhangi bir $u \in h(\mathbb{B})$ fonksiyonunun b_α da olması için gerek ve yeter şart*

$$\sup_{\substack{x,y\in\mathbb{B}\\ x\neq y}} \frac{(1-|x|^2)^\alpha(1-|y|^2)^\alpha}{[x,y]^{\alpha-1}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|} < \infty \tag{7.8}$$

olmasıdır.

Kanıt. $u \in b_\alpha$ olsun. $s > \alpha-1$ olacak şekilde bir $s \in \mathbb{R}$ alalım. Yardımcı Teorem 4.1 den $x, y \in \mathbb{B}$ için

$$u(x) = \int_{\mathbb{B}} R_s(x,z)u(z)\,d\nu_s(z)$$
$$u(y) = \int_{\mathbb{B}} R_s(y,z)u(z)\,d\nu_s(z)$$

integral gösterimleri vardır. O halde $x, y \in \mathbb{B}$ için

$$u(x) - u(y) = \int_{\mathbb{B}} (R_s(x,z) - R_s(y,z))u(z)\,d\nu_s(z)$$

yazılabilir. Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafının modülünü alıp $x \neq y$ iken $|x-y|$ ile bölersek

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|} \lesssim \int_{\mathbb{B}} \frac{|R_s(x,z)-R_s(y,z)|}{|x-y|}|u(z)|\,d\nu_s(z)$$

elde edilir. $s > \alpha-1 > -n$ olduğundan $\tau = 0$ için [25], Teorem 1.1 e başvurulursa $x \neq y$ olan her $x, y \in \mathbb{B}$ için

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|} \lesssim \frac{1}{[x,y]}\int_{\mathbb{B}} \left(\frac{1}{[x,z]^{n+s}} + \frac{1}{[y,z]^{n+s}}\right)|u(z)|\,d\nu_s(z)$$

dir. $\alpha > 0$ için $(1-|z|^2)^\alpha|u(z)| \lesssim \|u\|_{b_\alpha}$ olacağından

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|} \lesssim \frac{\|u\|_{b_\alpha}}{[x,y]}\left(\int_{\mathbb{B}} \frac{(1-|z|^2)^{s-\alpha}}{[x,z]^{n+s}}\,d\nu(z) + \int_{\mathbb{B}} \frac{(1-|z|^2)^{s-\alpha}}{[y,z]^{n+s}}\,d\nu(z)\right)$$

dir. $s-\alpha>-1$ ve $(n+s)-(n+s-\alpha)=\alpha>0$ olduğundan Yardımcı Teorem 2.4.6 dan

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|}\lesssim\frac{\|u\|_{b_\alpha}}{[x,y]}\left(\frac{1}{(1-|x|^2)^\alpha}+\frac{1}{(1-|y|^2)^\alpha}\right)$$

bulunur. Eşitsizliğin her iki tarafı $(1-|x|^2)^\alpha(1-|y|^2)^\alpha/[x,y]^{\alpha-1}$ ile çarpılırsa

$$\frac{(1-|x|^2)^\alpha(1-|y|^2)^\alpha}{[x,y]^{\alpha-1}}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|}\lesssim\|u\|_{b_\alpha}\left(\frac{(1-|y|^2)^\alpha}{[x,y]^\alpha}+\frac{(1-|x|^2)^\alpha}{[x,y]^\alpha}\right)$$

elde edilir. Açıktır ki $[x,y]\geq 1-|x||y|\geq 1-|y|$ ve $[x,y]\geq 1-|x|$ dir. Böylece $x\neq y$ olan $x,y\in\mathbb{B}$ için

$$\frac{(1-|x|^2)^\alpha(1-|y|^2)^\alpha}{[x,y]^{\alpha-1}}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|}\lesssim\|u\|_{b_\alpha}$$

dır. Bu istenilen sonuçtur.

Tersine $u\in h(\mathbb{B})$ fonksiyonu (7.8) şartını sağlasın. Bu durumda $u\in b_\alpha$ olduğu ve bunun için $(1-|x|^2)|\nabla u(x)|\in L^\infty_\alpha$ olduğu gösterilmelidir. Açıktır ki $|\nabla u|\leq\sum_{i=1}^n|\partial_i u|$ dur. O halde $i=1,2,\ldots,n$ ve $x\in\mathbb{B}$ için $(1-|x|^2)|\partial_i u(x)|\in L^\infty_\alpha$ olduğunu göstermek yeterlidir.

Sabit bir $x\in\mathbb{B}$ noktası alınsın. u fonksiyonunun $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ noktasında x_i ekseni yönünde yönlü türevi,

$$\partial_i u(x)=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+he_i)-u(x)}{h}$$

dir. Eğer $y=x+he_i$ alınırsa varsayımdan her $x\in\mathbb{B}$ için

$$\frac{|u(y)-u(x)|}{h}\lesssim\frac{[x,y]^{\alpha-1}}{(1-|x|^2)^\alpha(1-|y|^2)^\alpha}$$

bulunur. O halde

$$|\partial_i u(x)|\lesssim\lim_{h\to 0}\frac{[x,y]^{\alpha-1}}{(1-|x|^2)^\alpha(1-|y|^2)^\alpha}$$

olup, $[x,x]=1-|x|^2$ olduğundan

$$|\partial_i u(x)|\lesssim\frac{(1-|x|^2)^{\alpha-1}}{(1-|x|^2)^{2\alpha}}=\frac{1}{(1-|x|^2)^{\alpha+1}}$$

elde edilir. Buradan $i=1,2,\ldots,n$ ve $x\in\mathbb{B}$ için $(1-|x|^2)^{\alpha+1}|\partial_i u(x)|\lesssim 1$ dir. Böylece $u\in b_\alpha$ dır. ∎

Şimdi $\alpha>0$ için $b_{\alpha 0}$ uzayının karakterizasyonu verilecektir. Fakat öncelikle ispatta yararlanılacak bir yardımcı teorem verelim.

Yardımcı Teorem 7.3.9. $0 \leq t \leq 1$ *olsun. Her* $x, y \in \mathbb{B}$ *için*

$$\frac{[x,y]}{[tx,ty]} \leq 3$$

eşitsizliği geçerlidir.

Kanıt. Açıktır ki

$$[x,y]^2 = |x-y|^2 + (1-|x|^2)(1-|y|^2)$$

ve

$$[tx,ty]^2 = t^2|x-y|^2 + (1-t^2|x|^2)(1-t^2|y|^2)$$

yazılabilir. Farz edelim ki $t \geq 1/3$ olsun. Bu durumda

$$t^2|x-y|^2 \geq \frac{1}{9}|x-y|^2$$

ve

$$(1-t^2|x|^2)(1-t^2|y|^2) \geq (1-|x|^2)(1-|y|^2) \geq \frac{1}{9}(1-|x|^2)(1-|y|^2)$$

dir. Böylece, $[tx,ty]^2 \geq \frac{1}{9}[x,y]^2$ elde edilir.

Şimdi $t < 1/3$ olsun. Buna göre $[x,y] \leq 2$ ve

$$[tx,ty] = \left| t^2 x|y| - \frac{y}{|y|} \right| \geq 1 - t^2|x||y| \geq 1 - t^2$$

bulunur. Böylece,

$$\frac{[x,y]}{[tx,ty]} \leq \frac{2}{1-t^2} \leq \frac{2}{1-(1/3)^2} < 3$$

elde edilir. ∎

Aşağıdaki teorem $\alpha > 0$ için $b_{\alpha 0}$ uzayının bir karakterizasyonunu verir.

Teorem 7.3.10. $\alpha > 0$ *olsun. Herhangi bir* $u \in h(\mathbb{B})$ *harmonik fonksiyonunun* $b_{\alpha 0}$ *da olması için gerek ve yeter şart*

$$\lim_{|x| \to 1^-} \left(\sup_{\substack{y \in \mathbb{B} \\ x \neq y}} \frac{(1-|x|^2)^\alpha (1-|y|^2)^\alpha}{[x,y]^{\alpha-1}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|} \right) = 0 \tag{7.9}$$

olmasıdır.

Kanıt. Farz edelim ki $u \in b_{\alpha 0}$ olsun. $t \in (0,1)$ için $u_t(x) = u(tx)$ olarak verilsin. Teorem 5.9 dan $u \in b_{\alpha 0}$ olduğundan $t \to 1^-$ iken b_α da $u_t \to u$ dur. Teorem 7.3.8 ün ispatından $x \neq y$ olan her $x, y \in \mathbb{B}$ için

$$\frac{(1-|x|^2)^\alpha (1-|y|^2)^\alpha}{[x,y]^{\alpha-1}} \frac{|(u-u_t)(x)-(u-u_t)(y)|}{|x-y|} \lesssim \|u-u_t\|_{b_\alpha}$$

dır. Ayrıca

$$\begin{aligned}
&\frac{(1-|x|^2)^\alpha (1-|y|^2)^\alpha}{[x,y]^{\alpha-1}} \frac{|u_t(x)-u_t(y)|}{|x-y|} \\
&= t\frac{[tx,ty]^{\alpha-1}(1-|x|^2)^\alpha (1-|y|^2)^\alpha}{[x,y]^{\alpha-1}(1-|tx|^2)^\alpha (1-|ty|^2)^\alpha} \frac{(1-|tx|^2)^\alpha (1-|ty|^2)^\alpha}{[tx,ty]^{\alpha-1}} \frac{|u(tx)-u(ty)|}{|tx-ty|} \\
&\lesssim t\frac{[tx,ty]^{\alpha-1}(1-|x|^2)^\alpha (1-|y|^2)^\alpha}{[x,y]^{\alpha-1}(1-|tx|^2)^\alpha (1-|ty|^2)^\alpha} \|u\|_{b_\alpha} = \mathcal{I}\|u\|_{b_\alpha}
\end{aligned}$$

dır. Eğer $0 < \alpha < 1$ ise Yardımcı Teorem 7.3.9 dan

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} &= t\left(\frac{[x,y]}{[tx,ty]}\right)^{1-\alpha} \frac{(1-|x|^2)^\alpha (1-|y|^2)^\alpha}{(1-|tx|^2)^\alpha (1-|ty|^2)^\alpha} \\
&\lesssim t\frac{(1-|x|^2)^\alpha}{(1-t^2)^{2\alpha}}
\end{aligned}$$

olur. Eğer $\alpha \geq 1$ ise $1-|y|^2 < [x,y] < 2$ olduğundan yine

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} &\lesssim t\frac{[x,y](1-|x|^2)^\alpha (1-|y|^2)^\alpha}{[x,y]^\alpha (1-|tx|^2)^\alpha (1-|ty|^2)^\alpha} \\
&\lesssim t\frac{(1-|x|^2)^\alpha}{(1-t^2)^{2\alpha}}
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece üçgen eşitsizliğinden

$$\sup_{\substack{y\in\mathbb{B} \\ x\neq y}} \frac{(1-|x|^2)^\alpha (1-|y|^2)^\alpha}{[x,y]^{\alpha-1}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|} \lesssim t\,\frac{(1-|x|^2)^\alpha}{(1-t^2)^{2\alpha}}\|u\|_{b_\alpha} + \|u-u_t\|_{b_\alpha}$$

elde edilir. İlk olarak eşitsizliğin her iki tarafında $|x| \to 1^-$ iken limit alınırsa $\alpha > 0$ olduğundan sağdaki ilk terim 0 a yakınsar. Daha sonra $t \to 1^-$ iken limit alınırsa sağdaki ikinci terim de 0 a yakınsar. Böylece (7.9) sağlanır.

Tersine u, $\mathbb{B}$ de harmonik olsun ve (7.9) sağlansın. Bu durumda $u \in b_{\alpha 0}$ olduğu gösterilecektir.

(7.9) dan verilen herhangi $\epsilon > 0$ için öyle bir $\delta \in (0,1)$ vardır ki $|x| > \delta$ iken

$$\sup_{\substack{y\in\mathbb{B} \\ x\neq y}} \frac{(1-|x|^2)^\alpha (1-|y|^2)^\alpha}{[x,y]^{\alpha-1}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|} < \epsilon$$

olur. Özel olarak $i = 1, 2, \ldots, n$ için $y = x + he_i$ alınırsa $|x| > \delta$ iken

$$|\partial_i u(x)| \leq \lim_{h \to 0} \frac{\epsilon\,[x, y]^{\alpha-1}}{(1 - |x|^2)^{\alpha}(1 - |y|^2)^{\alpha}} = \frac{\epsilon}{(1 - |x|^2)^{\alpha+1}}$$

elde edilir. Böylece $|x| > \delta$ iken her $i = 1, 2, \ldots, n$ için

$$(1 - |x|^2)^{\alpha+1} |\partial_i u(x)| < \epsilon$$

bulunur. Bu ise $|x| \to 1^-$ iken $(1 - |x|^2)^{\alpha+1} |\nabla u(x)| \to 0$ olması demektir. Dolayısıyla $u \in b_{\alpha 0}$ dır. ■

8. SONUÇ

Elemanları $\mathbb{C}^n$ uzayının birim yuvarında holomorfik fonksiyonlar olan çeşitli fonksiyon uzayları (Hardy, Bergman, Besov, Bloch, Lipschitz,...) uzun yıllar ayrıntılı olarak incelenmiştir (bkz. [26, 27]). Buna karşın elemanları $\mathbb{R}^n$ nin birim yuvarında harmonik olan fonksiyon uzaylarının incelenmesine ancak son yıllarda başlanmıştır. Holomorfik fonksiyon uzaylarındaki birçok sonucun harmonik fonksiyon uzaylarında karşılıkları bulunmuştur.

Bu çalışmada, elemanları $\mathbb{R}^n$ nin birim yuvarında harmonik fonksiyonlar olan bir parametreli Bloch (b_α) ve küçük Bloch ($b_{\alpha 0}$) uzaylarının özellikleri ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Bu uzayların $\alpha \geq 0$ için önceden bilinen tanımları tüm $\alpha \in \mathbb{R}$ için genişletilmiştir. Ayrıca bu uzayları kısmi türev, radyal türev veya D_s^t radyal türev operatörlerinden birini kullanarak tanımlamanın denk olduğu gösterilmiştir. b_α ve $b_{\alpha 0}$ uzaylarının temel özellikleri (tamlık, ayrılabilirlik, vb.) elde edilmiştir. Bu uzaylarda yer alan aşikar ve polinom olmayan harmonik fonksiyon örnekleri bulunmuştur. Bu örnekler tüm bu uzayların farklı olduğunu göstermiştir.

Bergman-Besov uzaylarının doğuran çekirdekleri kullanılarak L_α^∞ uzayından b_α uzayına izdüşüm operatörleri tanımlanmış ve bu operatörler kullanılarak integral gösterimler elde edilmiştir. Benzer şekilde $\mathcal{C}_\alpha$ ve $\mathcal{C}_{\alpha 0}$ uzaylarından $b_{\alpha 0}$ üzerine izdüşüm operatörleri tanımlanmıştır. İntegral gösterimlerinin bir sonucu olarak uygun eşleme altında her $q \in \mathbb{R}$ için b_q^1 Bergman-Besov uzayının dualinin b_α uzayı ve ön dualinin $b_{\alpha 0}$ uzayı olduğu gösterilmiştir. $\alpha \in \mathbb{R}$ için b_α ve $b_{\alpha 0}$ uzaylarında Gleason problemi çözülmüş ve bu uzaylardaki fonksiyonların atomik ayrışımları elde edilmiştir. Ayrıca $\alpha > -1$ için b_α ve $b_{\alpha 0}$ uzaylarının salınım cinsinden karakterizasyonları verilmiştir.

Bu çalışmada elde edilen sonuçları içeren bir makale [28] hazırlanmıştır.

KAYNAKÇA

[1] Axler, S., Bourdon, P. and Ramey, W. (2001). *Harmonic Function Theory.* (2. Baskı). New York: Springer.

[2] Kaptanoğlu, H. T. and Tülü, S. (2011). Weighted Bloch, Lipschitz, Zygmund, Bers, and Growth Spaces of the Ball: Bergman Projections and Characterizations. *Taiwanese J. Math.*, 15, 101-127.

[3] Zhao, R. and Zhu, K. (2008). Theory of Bergman Spaces in the Unit Ball of $\mathbb{C}^n$. *Mém. Soc. Math. Fr.*, 115, vi+103 s.

[4] Gergün, S., Kaptanoğlu, H. T. and Üreyen, A. E. (2009). Reproducing Kernels for Harmonic Besov Spaces on the Ball, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 347, 735-738.

[5] Gergün, S., Kaptanoğlu, H. T. and Üreyen, A. E. (2016). Harmonic Besov Spaces on the Ball, *Internat. J. Math.*, 27, 1650070, 59 s.

[6] Choe, B. R., Koo, H. and Yi, H. (2001). Derivatives of Harmonic Bergman and Bloch Functions on the Ball, *J. Math. Anal. Appl.*, 260, 100-123.

[7] Ren, G. and Kähler, U. (2003). Weighted Harmonic Bloch Spaces and Gleason's Problem, *Complex Var. Theory Appl.*, 48, 235-245.

[8] Jevtić, M. and Pavlović, M. (1999). Harmonic Bergman Functions on the Unit Ball in $\mathbb{R}^n$. *Acta Math. Hungar.*, 85, 81-96.

[9] Ligocka, E. (1987). On the Reproducing Kernel for Harmonic Functions and the Space of Bloch Harmonic Functions on the Unit Ball in $\mathbb{R}^n$. *Studia Math.*, 87, 23-32.

[10] Rudin, W. (1976) *Principles of Mathematical Analysis.* (3. baskı). London: McGraw-Hill.

[11] Folland, G.B. (1999). *Real Analysis: Modern Techniques and Their Aplications.* (2. baskı). New York: John Wiley & Sons.

[12] Miao, J. (1998). Reproducing Kernels for Harmonic Bergman Spaces of the Unit Ball. *Monatsh. Math.*, 125, 25-35.

[13] Beatrous, F. and Burbea, J. (1989). Holomorphic Sobolev Spaces on the Ball, *Dissertationes Math.*, 276, 57 s.

[14] Kaptanoğlu, H. T. (2005). Bergman Projections on Besov Spaces on Balls. *Illinois J. Math.*, 49, 385-403.

[15] Liu, C. W. and Shi, J. H. (2003). Invariant Mean-Value Property and $\mathcal{M}$-Harmonicity in the Unit Ball of $\mathbb{R}^n$. *Acta Math. Sin.*, 19, 187-200.

[16] Ren, G. (2003). Harmonic Bergman Spaces with Small Exponents in the Unit Ball. *Collect. Math.*, 53, 83-98.

[17] Gohberg, I., Goldberg, S. and Kaashoek, M.A. (2003). *Basic Classes of Linear Operators*. Basel: Birkhauser.

[18] Stroethoff, K. (1998). Harmonic Bergman Spaces. Holomorphic Spaces, *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, 33, 51–63.

[19] Hu, Z. (2006). Gleason's Problem for Harmonic Mixed Norm and Bloch Spaces in Convex Domains. *Math. Nachr.*, 279, 164-178.

[20] Coifman, R.R. and Rochberg, R. (1980). Representation Theorems For Holomorphic and Harmonic Functions in L^p. *Asterisque*, 77, 11-66.

[21] Choe, B.R. and Lee, Y.J. (2007). Note on Atomic Decompositions of Harmonic Bergman Functions. *Complex Analysis and its Applications*, 11-24.

[22] Ahlfors, L. V. (1981). *Möbius Transformations in Several Variables.* Minneapolis: Univ. of Minnesota.

[23] Ren, G. and Tu, C. (2005). Bloch Spaces in the Unit Ball of $\mathbb{C}^n$. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 133, 719-726.

[24] Zhao, R. (2007). A characterization of Bloch-type spaces on the unit ball of $\mathbb{C}^n$. *J. Math. Anal. Appl.*, 330, 291-297.

[25] Üreyen, A. E. (2016). An Estimate of the Oscillation of Harmonic Reproducing Kernels with Applications. *J. Math. Anal. Appl.*, 434, 538-553.

[26] Zhu, K. (2007). *Operator Theory in Function Spaces.* (2. baskı). American Mathematical Society, Providence.

[27] Zhu, K. (2005). *Spaces of Holomorphic Functions in The Unit Ball.* New York: Springer-Verlag.

[28] Doğan, Ö. F. and Üreyen, A. E. Weighted Harmonic Bloch Spaces on the Ball, hazırlanıyor.

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı	: Ömer Faruk DOĞAN
Yabancı Dil	: İngilizce
Doğum Yeri ve Yılı	: İstanbul / 1986
E-Posta	: ofdogan@nku.edu.tr

Eğitim ve Mesleki Geçmişi:

- 2012, Araştırma Görevlisi, Namık Kemal Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü
- 2010, Y. Lisans: Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı
- 2008, Lisans: Uludağ Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü