**SEIBERG–WITTEN DENKLEMLERİNİN GENELLEŞTİRİLMELERİ**

**Doktora Tezi**

**Serhan EKER**

**Eskişehir, 2016**

# SEIBERG–WITTEN DENKLEMLERİNİN GENELLEŞTİRİLMELERİ

**Serhan EKER**

**Doktora Tezi**
**Matematik Anabilim Dalı**
**Danışman: Prof. Dr. Nedim DEĞİRMENCİ**

**Eskişehir**
**Anadolu Üniversitesi**
**Fen Bilimleri Enstitüsü**
**Nisan, 2016**

## JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

**Serhan EKER**' in **"Seiberg−Witten Denklemlerinin Genelleştirilmeleri"** başlıklı tezi 27/04/2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek "Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği" nin ilgili maddesi uyarınca, Matematik Anabilim dalında Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

| | | Unvanı - Adı - Soyadı | İmza |
|---|---|---|---|
| Üye (Tez Danışmanı) | : | Prof. Dr. Nedim DEĞİRMENCİ | ........... |
| Üye | : | Prof. Dr. Ziya AKÇA | ........... |
| Üye | : | Prof. Dr. Cumali EKİCİ | ........... |
| Üye | : | Doç. Dr. Nülifer ÖZDEMİR | ........... |
| Üye | : | Doç. Dr. Şenay BULUT | ........... |

................................

**Enstitü Müdürü**

## ÖZET

SEIBERG−WITTEN DENKLEMLERİNİN GENELLEŞTİRİLMELERİ

Serhan EKER

Matematik Anabilim Dalı

Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Nisan, 2016

Danışman: Prof. Dr. Nedim DEĞİRMENCİ

Bu tez çalışmasında Seiberg−Witten denklemleri iki ana başlık altında incelenmiştir. İlk olarak Clifford cebirleri, Vektör demetleri, Asli lif demetleri, Konneksiyon 1-formları gibi Seiberg−Witten denklemlerini ifade etmekte kullanılan temel kavramlara değinilmiştir. Sonraki bölümde de spinor demeti üzerinde kovaryant türev operatörü ve Dirac operatörü incelendikten sonra literatürde çok iyi bilinen 4−boyutlu manifoldların yapısını incelemekte kullanılan Seiberg−Witten denklemleri irdelenmiş ve buna bağlı olarak 4−boyutlu Hiperbolik uzaylar üzerinde Seiberg−Witten denklemleri yazılmıştır. Yüksek boyutlarda da genelleştirilmiş self−dualite kavramına bağlı olarak verilen Seiberg−Witten denklemlerinden olan eğrilik denklemine literatürdeki ifade edilişlerine denk olan alternatif formüller verilmiştir. Ayrıca 8−boyutta farklı bir self−dualite seçimine bağlı olarak Seiberg−Witten denklemleri elde edilmiş ve bu denklemlere çözüm verilmiştir. Bu bölümün sonunda 8−boyutta Hiperbolik uzaylar üzerinde Seiberg−Witten denklemleri yazılmıştır. Daha sonra spinor uzayı üzerinde tanımlanan Hermityen iç çarpım kullanılarak eğrilik denkleminin ifadesinde kullanılan $\sigma$ dönüşümünün bazı özellikleri incelenmiş ve buna bağlı olarak bazı yararlı eşitlikler elde edilmiştir. Son bölümde de öncelikle 4−boyuttaki klasik denklemlere self−dualite kavramına ihtiyaç duymadan alternatif bir yaklaşım öne sürülmüş ve bu yaklaşımın literatürde çok iyi bilinen klasik denklemlerle benzerliği gözlemlenmiştir. Son olarak da bu yaklaşım ile $5, 6, 7$ ve 8−boyutlu manifoldlar üzerinde self−dualite kavramı olmaksızın Seiberg−Witten denklemleri yazılmış ve bu denklemlere çözümler verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler**: Dirac Operatörü, Seiberg−Witten Denklemleri, Spinor, Eğrilik, Self−Dualite

## ABSTRACT

GENERALIZATIONS OF SEIBERG−WITTEN EQUATIONS

Serhan EKER

Department of Mathematics

Anadolu University, Graduate School of Sciences, April, 2016

Supervisor: Prof. Dr. Nedim DEĞİRMENCİ

In this thesis, Seiberg−Witten equations have been examined under two main catagories. Firstly, some basic concepts such as Clifford algebra, Vector bundles, Principal bundles and Connection 1-form were addressed to describe Seiberg−Witten equations. In the next section, after Dirac operator and covariant derivative operator were studied on spinor bundle, Seiberg−Witten equations, which are used to analyze the structure of the 4−manifold and well−known in the literature, have been discussed. According to this, Seiberg−Witten equations have been written on the 4−dimensional Hyperbolic space. In higher dimension, depending on the concept of the generalized self−duality, alternative formulas of Curvature equation, which are equivalent to wording in the literature, was given. In 8−dimension Seiberg−Witten equations were also obtained according to the different selection of a self−duality and then solutions to these equations were given. At the end of this section, Seiberg−Witten equations on 8−dimensional Hyperbolic space were written. Then, some properties of the quadratic map $\sigma$, which is used in the expressions of the Curvature equation, were investigated on the spinor space by using defined hermitian inner product. According to these, some useful equations were obtained. In the final section, instead of clasical equations which are defined on 4−dimensional manifolds, at first an alternative approach has been suggested without the need of self−duality concept. Finally, by this approach, without using the concept of self−duality Seiberg−Witten equations were written and solutions to these equations were given in dimensions $5, 6, 7$ and $8$.

**Keywords:** Dirac Operator, Seiberg−Witten Equations, Spinor, Curvature, Self−Duality

# TEŞEKKÜR

Araştırma sürecinde katkı ve yardımlarıyla destekler veren Doç. Dr. Şenay BULUT, Araş. Gör. Mehmet ERGEN' e ve beni her zaman destekleyen sevgili aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

Serhan EKER

Nisan 2016

27/04/2016

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu, çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalardan bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilemeyen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Anadolu Üniversitesi tarafından kullanılan "bilimsel intihal tespit programı" yla tarandığını ve hiç bir şekilde "intihal içermediğini" beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm.

..................

Serhan EKER

## İÇİNDEKİLER

Sayfa

Sayfa

## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

| | |
|---|---|
| $(V,Q)$ | : Kuadratik uzay |
| $Cl(V,Q)$ | : $(V,Q)$ Kuadratik uzayına karşılık gelen Clifford cebiri |
| $Cl_n$ | : Reel Clifford cebiri |
| $\mathbb{C}l_n$ | : Kompleks Clifford cebiri |
| $Spin(n)$ | : Reel Spin grubu |
| $Spin^c(n)$ | : Kompleks Spin grubu |
| $\kappa$ | : Clifford Cebirinin temsili |
| $\kappa_n$ | : Spin(n) grubunun spinor temsili |
| $TM$ | : M manifoldu üzerindeki tanjant demeti |
| $T^*M$ | : M manifoldu üzerindeki kotanjant demeti |
| $\chi(M)$ | : M manifoldu üzerindeki vektör alanlarının kümesi |
| $C^\infty(M,\mathbb{R})$ | : M manifoldundan $\mathbb{R}$ ye düzgün fonksiyonların kümesi |
| $\nabla_X Y$ | : Konneksiyon, kovaryant türev operatörü |
| $\Gamma(E)$ | : E vektör demeti üzerindeki kesitlerin kümesi |
| $\nabla$ | : Kovaryant Türev |
| $Gl(n,\mathbb{R})$ | : Genel lineer grup |
| $\mathfrak{g}$ | : G Lie grubunun Lie cebiri |
| $O(n)$ | : Ortogonal grup |
| $SO(n)$ | : Özel ortogonal grup |
| $P\times_\rho V$ | : Asosye vektör demeti |
| $S$ | : Spinor demeti |
| $End(V)$ | : $V$ den $V$ ye giden lineer dönüşümlerin uzayı |
| $Aut(V)$ | : $V$ den $V$ ye giden lineer izomorfizlerin uzayı |
| $*$ | : Hodge dönüşümü |
| $D_A$ | : Dirac Operatörü |
| $\Omega^1(M,i\mathbb{R})$ | : $M$ üzerindeki $i\mathbb{R}$ değerli 1-formların uzayı |
| $\Omega^2(M,i\mathbb{R})$ | : $M$ üzerindeki $i\mathbb{R}$ değerli 2-formların uzayı |

# 1 GİRİŞ

Topolojik uzaylar üzerinde çalışılırken temel problemlerden birisi verilen iki topolojik uzayın homeomorf olup olmadığının belirlenmesidir. Manifold geometri ve topolojisini çalışırken temel problemlerden biri de iki manifold verildiğinde bunların difeomorf olup olmadıklarının belirlenmesidir. 1963 yılında J. Milnor bu tip bir problem ile uğraşırken egzotik küreleri keşfetmiştir. Milnor bu çalışmasında $S^7$ küresi üzerinde bilinen manifold yapısı dışında buna difeomorf olmayan 27 tane daha diferensiyellenebilir yapı oluşturmuştur. Bunlar egzotik küreler olarak bilinir. Bunun uzantısında matematik literatürüne diferensiyel topoloji kavramı girmiştir. Verilen iki diferensiyellenebilir manifoldun topolojik yapıları homeomorf olduğu halde manifold yapıları difeomorf olmayabilir. Verilen iki manifoldun difeomorf olmadığını göstermek için difeomorfizimler altında invaryant kalan özelliklere ihtiyaç duyulmuştır. Bunun için 1980' li yıllarda S. Donaldson matematiksel fizik kökenli Yang-Mills denklemlerini kullanarak instanton kavramını geliştirmiş ve bunun $4-$manifoldlar için uygulamalarını vermiştir. Bunlar literatüre Donaldson invaryantları olarak girmiştir.

1994 yılının sonunda da E.Witten "Monopoles and Four Manifold" adlı makalesinde yeni bir diferensiyel topolojik invaryant geliştirmiştir. Matematiksel fizik motivasyonuyla, özellikle bu makalede bir $4-$manifold üzerinde Dirac monopolüne benzeyen bir denklem sistemi yazılmıştır. Bu denklem sisteminin çözüm uzayı söz konusu $4-$manifold hakkında bilgi içermektedir. Çözüm uzaylarından modülü uzaylara geçerek bugün Seiberg$-$Witten invaryantı olarak bilinen diferensiyel topolojik invaryantları geliştirmiştir. $4-$manifoldlar için kurgulanmış olan Seiberg$-$Witten denklemleri iki denklemden oluşmaktadır. Birincisi Dirac denklemidir, bu denklemin ifade edilebilmesi için söz konusu manifoldun $Spin^c-$yapısına sahip olması gerekmektedir. Eğer bir manifold $Spin^c-$yapısına sahip ise bu manifold üzerinde Spinor kavramını ve Dirac operatörü tanımlamak mümkündür. İkinci denklem ise eğrilik denklemi olarak bilinir. Bu denklemin ifadesi için bir $2-$formun self$-$dualliği kavramı kullanılmaktadır. Bir $2-$formun self$-$dualliği, $4-$boyutlu durumda geçerlidir. Bu nedenle eğrilik denklemi ancak $4-$boyutta anlamlıdır.

Daha sonraki yıllarda genelleştirilmiş self−dualite kavramı kullanılarak yüksek boyutlu manifoldlar üzerinde de Seiberg−Witten denklemleri yapılmıştır.

Bu tez çalışmasında literatürde bilinen yüksek boyutlu Seiberg−Witten denklemleri irdelenmiş, bazılarına alternatif formüller önerilmiştir. Son bölümde de self−dualite kavramı kullanılmadan Seiberg−Witten denklemleri yazılmıştır.

## 2 CLIFFORD CEBİRLERİ

### 2.1 Reel Clifford Cebirleri

**Tanım 2.1.** *$V = \mathbb{R}^n$ reel vektör uzayını ve bu vektör uzayı üzerinde tanımlanan $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dejenere olmayan*

$$Q(x) = x_1^2 + ... + x_p^2 - x_{p+1}^2 - ... - x_{p+q} ^2 \quad (n = p + q)$$

*kuadratik formunu alalım. $\mathbb{R}^n$ üzerinde $Q(x)$ kuadratik formuna karşılık gelen Clifford cebirine, Reel Clifford cebiri denir ve $Cl_{p,q}$ şeklinde gösterilir. Özel olarak $p = 0$ veya $q = 0$ için sırasıyla $Cl_n$ ve $Cl'_n$ gösterimi kullanılacaktır [12].*

Aşağıda $\mathbb{R}^n$ üzerinde $Q(x)$ kuadratik formuna karşılık gelen Clifford cebirinin izomorfizmlerinin hesaplanmasında kullanılacak olan faydalı bir teorem verilecektir.

**Teorem 2.2.** *$\{e_1, ..., e_n\}$, $\mathbb{R}^n$ nin standart tabanı $I = \{i_1 < i_2 < ... < i_k\}$ olmak üzere $e_I = e_{i_1} \cdot e_{i_2} \cdot ... \cdot e_{i_k}$ çarpımı $e_\emptyset = 1$ ile birlikte $Cl_{p,q}$ için bir tabandır [16].*

**Tanım 2.3.** *$(A_1, *)$ ve $(A_2, \circ)$ iki cebir olmak üzere $\Phi : A_1 \to A_2$ dönüşümü aşağıdaki koşulları sağlarsa $\Phi$ ye cebir homomorfizmi denir.*

1. *$\Phi$ lineerdir.*

2. *$\Phi$ cebir işlemini korur. Yani $\Phi(a_1 * a_2) = \Phi(a_1) \circ \Phi(a_2)$.*

*Ayrıca $\Phi$ birebir ve örten ise $\Phi$ ye cebir izomorfizmi denir. Bu durumda da $A_1$, $A_2$ ye izomorfiktir denir ve $A_1 \cong A_2$ ile gösterilir.*

Aşağıdaki bölümde, $Cl_1, Cl_2, Cl'_1, Cl'_2$ cebirlerinin izomorfizmleri belirlenecektir. Daha sonra $Cl_n$ ve $Cl'_n$ cebirlerinin izomorfizmlerinin hesaplanmasında faydalı olacak bir önerme verilecektir.

**Örnek 2.4.** *$n = 1$ için $e \in \mathbb{R}$ üzerindeki standart iç çarpıma göre birim vektör ise $e \cdot e = Q(e) \cdot 1 = -1$ olur. Ayrıca $Cl_1$ cebirinin $\{1, e\}$ tarafından üretildiği göz önüne alınarak aşağıda tanımlanan*

$$\begin{aligned} \Phi_1 : Cl_1 &\to \mathbb{C} \\ 1 &\mapsto 1 \\ e &\mapsto i \end{aligned}$$

*cebir homomorfizmi* $1-1$ *ve örten olduğundan cebir izomorfizmidir. O halde* $Cl_1$ *cebiri* $\mathbb{C}$ *kompleks sayılar cebirine izomorftur.*

**Örnek 2.5.** *$n=2$ için $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^2$ üzerindeki standart taban vektörleri olmak üzere, $\mathbb{R}^2$ üzerindeki standart iç çarpıma göre $e_i \cdot e_i = Q(e_i)\cdot 1 = -1$ ve $i \neq j$ iken $e_i \cdot e_j = -e_j \cdot e_i$ olur. $Cl_2$ cebirinin $\{1, e_1, e_2, e_1e_2\}$ tarafından üretildiği göz önüne alınarak aşağıda tanımlanan*

$$\begin{aligned}\Phi_2 : Cl_2 &\rightarrow \mathbb{H}\\ 1 &\mapsto I\\ e_1 &\mapsto i\\ e_2 &\mapsto j\\ e_1e_2 &\mapsto k\end{aligned}$$

*cebir homomorfizmi $1-1$ ve örten olduğundan $Cl_2$ cebiri $\mathbb{H}$ kuaterniyon cebirine izomorftur.*

**Örnek 2.6.** *$n=1$ için $e' \in \mathbb{R}$ üzerindeki standart iç çarpıma göre birim vektör ise $e' \cdot e' = Q(e)\cdot 1 = 1$ olur. $Cl_1'$ cebirinin $\{1, e'\}$ tarafından üretildiği göz önüne alınarak aşağıda tanımlanan*

$$\begin{aligned}\Phi_1' : Cl_1' &\rightarrow \mathbb{R}\oplus\mathbb{R}\\ 1 &\mapsto (1,1)\\ e' &\mapsto (-1,1)\end{aligned}$$

*cebir homomorfizmi $1-1$ ve örten olduğundan $Cl_1'$ cebiri $\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$ cebirine izomorftur.*

**Örnek 2.7.** *$n=2$ için $e_1', e_2' \in \mathbb{R}^2$ üzerindeki standart taban vektörleri olmak üzere, $\mathbb{R}^2$ üzerindeki standart iç çarpıma göre ve $e_i' \cdot e_i' = Q(e_i')\cdot 1 = 1$ ve $i \neq j$ iken $e_i' \cdot e_j' = -e_j' \cdot e_i'$ olur. $Cl_2$ cebirinin $\{1, e_1', e_2', e_1'e_2'\}$ tarafından üretildiği göz* *önüne alınarak aşağıda tanımlanan*

$$\begin{aligned}\Phi_2' : Cl_2' &\rightarrow \mathbb{R}(2)\\ 1 &\mapsto \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\\ {e_1}' &\mapsto \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\\ {e_2}' &\mapsto \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\\ {e_1}'{e_2}' &\mapsto \begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

*cebir homomorfizmi* $1-1$, *örten olduğundan* $Cl_2'$ *cebiri* $\mathbb{R}(2)$ *cebirine izomorftur.*

Yüksek boyutlardaki Clifford cebirlerini bu yöntemle hesaplamak zordur. Fakat aşağıdaki önerme ile Clifford cebirleri arasında indirgeme ilişkisini kullanarak yüksek boyutlardaki Clifford cebirleri hesaplanabilir.

**Önerme 2.8.** *[17]*

1. $Cl_{0,n+2} \cong Cl_{n,0} \otimes Cl_{0,2}$
2. $Cl_{n+2,0} \cong Cl_{0,n} \otimes Cl_{2,0}$
3. $Cl_{p+1,q+1} \cong Cl_{p,q} \otimes Cl_{1,1}$

Yukarıda verilen izomorfizmler yardımıyla, $Cl_{p,0}$ ve $Cl_{0,q}$ tipindeki Clifford cebirleri arasında

$$\begin{aligned}Cl_{0,n+8} &\cong Cl_{0,n} \otimes Cl_{0,8}\\ Cl_{n+8,0} &\cong Cl_{n,0} \otimes Cl_{8,0}\end{aligned}$$

şeklinde $8-$li indirgeme formülleri elde edilir.

Yukarıdaki önerme yardımıyla $l = \frac{p+q}{2}$ olmak üzere $Cl_{p,q}$ Clifford cebirlerinin aşağıdaki izomorfizmleri elde edilir.

| $p-q(mod\ 8)$ | $Cl_{p,q}$ |
|---|---|
| 0 | $\mathbb{R}(2^l)$ |
| 1 | $\mathbb{R}(2^l)\oplus\mathbb{R}(2^l)$ |
| 2 | $\mathbb{R}(2^l)$ |
| 3 | $\mathbb{C}(2^l)$ |
| 4 | $\mathbb{H}(2^{l-1})$ |
| 5 | $\mathbb{H}(2^{l-1})\oplus\mathbb{H}(2^{l-1})$ |
| 6 | $\mathbb{H}(2^{l-1})$ |
| 7 | $\mathbb{C}(2^l)$ |

## 2.2 Kompleks Clifford Cebirleri

**Tanım 2.9.** *$V=\mathbb{C}^n$ kompleks vektör uzayı üzerinde*

$$\begin{aligned} Q:\mathbb{C}^n &\to \mathbb{C} \\ z &\longmapsto Q(z)=z_1^2+z_2^2+...+z_n^2 \end{aligned}$$

*şeklindeki kuadratik formunu göz önüne alalım. $\mathbb{C}^n$ üzerinde $Q(z)$ kuadratik formuna karşılık gelen Clifford cebirine kompleks Clifford cebiri denir ve $\mathbb{C}l_n$ ile gösterilir.*

Aşağıdaki bölümde, Reel Clifford cebirlerinde uygulanan yönteme benzer olarak öncelikle $\mathbb{C}l_1,\mathbb{C}l_2$ cebirlerinin izomorfizmleri belirlenecektir. Daha sonra $\mathbb{C}l_n$ cebirlerinin izomorfizmlerinin hesaplanmasında faydalı olacak bir önerme verilecektir.

**Örnek 2.10.** *$n=1$ için $e\in\mathbb{C}$ üzerindeki Hermityen iç çarpıma göre birim vektör ise $e\cdot e=Q(e)\cdot 1=-1$ olur. Ayrıca $\mathbb{C}l_1$ cebirinin $\{1,e\}$ tarafından üretildiği göz önüne alınarak aşağıda tanımlanan*

$$\begin{aligned} \Phi_1:\mathbb{C}l_1 &\to \mathbb{C}\oplus\mathbb{C} \\ 1 &\mapsto (1,1) \\ e &\mapsto (-i,i) \end{aligned}$$

*dönüşümü $1-1$ ve örten olduğundan bir cebir izomorfizmidir. O halde $\mathbb{C}l_1$ cebiri $\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$ kompleks sayılar cebirine izomorftur.*

**Örnek 2.11.** *$n = 2$ için $e_1, e_2 \in \mathbb{C}^2$ üzerinde standart taban vektörleri olmak üzere, $\mathbb{C}^2$ üzerindeki Hermityen iç çarpıma göre $e_i \cdot e_j = Q(e) = -1$ ve $i \neq j$ iken $e_i \cdot e_j = -e_j \cdot e_i$ olur. $\mathbb{C}l_2$ cebirinin $\{1, e_1, e_2, e_1e_2\}$ tarafından üretildiği göz önüne alınarak aşağıda tanımlanan*

$$\begin{aligned}
\Phi_2 : \mathbb{C}l_2 &\rightarrow Cl_2 \otimes \mathbb{C} \cong \mathbb{H} \otimes \mathbb{C} \cong \mathbb{C}(2) \\
1 &\mapsto \mathbb{I} \\
e_1 &\mapsto \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \\
e_2 &\mapsto \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \\
e_1e_2 &\mapsto \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

*cebir homomorfizmi $1-1$ ve örten olduğundan $\mathbb{C}l_2$ cebiri $\mathbb{C}(2)$ cebirine izomorftur.*

Yüksek boyutlardaki kompleks Clifford cebirlerini bu yöntemle hesaplamak zordur. Fakat aşağıdaki önermeyi ve $\mathbb{C}l_2 \cong \mathbb{C}(2)$ izomorfizmini kullanarak yüksek boyutlardaki kompleks Clifford cebirlerinin izomorfizmleri aşağıdaki gibi açık bir şekilde ifade edilebilir.

**Önerme 2.12.** *$\mathbb{C}l_{n+2} \cong \mathbb{C}l_n \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(2)$ izomorfizmi vardır [12].*

*Kanıt.*

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}l_{n+2} &= Cl_{0,n+2} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \\
&= \big(Cl_{n,0} \otimes_{\mathbb{R}} Cl_{0,2}\big) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \\
&= \big(Cl_{n,0} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}\big) \otimes_{\mathbb{C}} \big(Cl_{0,2} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}\big) \\
&= \mathbb{C}l_n \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}l_2 \\
&= \mathbb{C}l_n \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\big(2\big)
\end{aligned}$$

□

$\mathbb{C}l_2 \cong \mathbb{C}(2)$ cebirinin üreteç elemanları

$$g_1 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \quad , \quad g_2 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

$g_1$ ve $g_2$ yardımıyla $\mathbb{C}l_{n+2} \cong \mathbb{C}l_n \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(2)$ izomorfizminin taban elamanları aşağıda verilmiştir.

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C}l_{n+2} & \cong & \mathbb{C}l_n \otimes_C \mathbb{C}(2) \\ e_1 & \mapsto & 1 \otimes g_1 \\ e_2 & \mapsto & 1 \otimes g_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ e_j & \mapsto & (ie_{j-2}) \otimes g_1 g_2, \ (3 \leq j \leq n+2). \end{array}$$

**Tanım 2.13.** *Kompleks $n$ spinorların vektör uzayı, $n = 2k, \ 2k+1$ için*

$$\Delta_n = \mathbb{C}^{2^k}$$

*dır. $\Delta_n$ nin elemanlarına kompleks spinorlar denir.*

**Önerme 2.14.** *[12]*

1. $n = 2k$ *ise* $\mathbb{C}l_n \cong End(\Delta_n)$
2. $n = 2k+1$ *ise* $\mathbb{C}l_n \cong End(\Delta_n) \oplus End(\Delta_n)$

Bu önerme yardımıyla kompleks Clifford cebirinin izomorfizm tablosu aşağıdaki şekilde verilebilir:

| $n$ | $\mathbb{C}l_n$ |
|---|---|
| 1 | $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ |
| 2 | $\mathbb{C}(2)$ |
| 3 | $\mathbb{C}(2) \oplus \mathbb{C}(2)$ |
| 4 | $\mathbb{C}(4)$ |
| 5 | $\mathbb{C}(4) \oplus \mathbb{C}(4)$ |
| 6 | $\mathbb{C}(8)$ |
| 7 | $\mathbb{C}(8) \oplus \mathbb{C}(8)$ |
| 8 | $\mathbb{C}(16)$ |

## 2.3 Kompleks Clifford Cebirinin Temsilleri

1. $n = 2k$ durumunda, $\mathbb{C}l_n$ kompleks Clifford cebirinin $\kappa$ temsili

$$\kappa : \mathbb{C}l_n \to End(\Delta_n)$$

   yukarıda ifade edilen izomorfizmdir.

2. $n = 2k + 1$ durumunda, $\mathbb{C}l_n$ Kompleks Clifford cebirinin $\kappa$ temsili

$$\begin{tikzcd} \kappa : \mathbb{C}l_n \arrow[r, "\Phi_n"] \arrow[rr, bend right, "\kappa"'] & End(\Delta_n) \oplus End(\Delta_n) \arrow[r, "pr_1"] & End(\Delta_n) \end{tikzcd}$$

$\kappa = pr_1 \circ \Phi_n$ bileşke dönüşümü ile ifade edilir.

## 2.4 Spin Grupları

$(V, Q)$ kuadratik formuna karşılık gelen $Cl(V, Q)$ cebiri için $v_1, ..., v_k \in V$ olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlanan

$$\begin{array}{rcl} \gamma : Cl(V, Q) & \to & Cl(V, Q) \\ v_1 \cdot ... \cdot v_k & \mapsto & \gamma\big(v_1 \cdot ... \cdot v_k\big) = (-1)^k v_1 \cdot ... \cdot v_k \end{array}$$

$\gamma$ dönüşümü yardımıyla elde edilen

$$\begin{array}{rcl} Cl^0(V, Q) & = & \{\alpha \in Cl(V, Q) | \gamma(\alpha) = \alpha\} \\ Cl^1(V, Q) & = & \{\alpha \in Cl(V, Q) | \gamma(\alpha) = -\alpha\} \end{array}$$

uzayları $Cl(V, Q)$ nun alt uzaylarıdır. Dahası $Cl^0(V, Q)$, $Cl(V, Q)$ nun alt cebiri iken $Cl^1(V, Q)$ alt cebir değildir.

**Tanım 2.15.** *$Cl(V, Q)$, $(V, Q)$ kuadratik uzayına karşılık gelen Clifford cebiri olsun. $v_1, v_2, ..., v_k \in V$ için*

$$\begin{array}{rcl} \beta : Cl(V, Q) & \to & Cl(V, Q) \\ v_1 \cdot ... \cdot v_k & \mapsto & \beta\big(v_1 \cdot ...v_k\big) = v_k \cdot ... \cdot v_1 \end{array}$$

*olmak üzere, aşağıdaki gibi tanımlanan*

$$\begin{array}{rcl} * = \beta \circ \gamma : Cl(V, Q) & \to & Cl(V, Q) \\ v_1 \cdot ... \cdot v_k & \mapsto & *\big(v_1 \cdot ...v_k\big) = (-1)^k v_r \cdot ... \cdot v_1 \end{array}$$

*$* = \beta \circ \gamma$ dönüşümüne konjugasyon denir.*

**Tanım 2.16.** *Spin grubu*

$$Spin(Q) = \{x \in Cl^0(V,Q) | \forall v \in V, x \cdot v \cdot x^* \subset V \ \ ve \ \ x \cdot x^* = 1\}$$

*şeklinde tanımlanmaktadır.*

**Önerme 2.17.** *$V$ reel veya kompleks vektör uzayı, $Q$ da $V$ üzerinde non−dejenere kuadratik form olsun.*

$$\lambda : Spin(Q) \quad \rightarrow \quad SO(Q)$$

*dönüşümü* $2:1$ *örten bir grup homomorfizmidir ve çekirdeği* $\{-1,1\}$ *dir [13].*

Ayrıca herhangi bir $x \in Spin(Q)$ elemanı

$$\lambda(x)(v) = x \cdot v \cdot x^*$$

şeklinde tanımlı $\lambda(x) : V \to V$ endomorfizmini belirler.

**Tanım 2.18.** *$V = \mathbb{R}^n$ reel vektör uzayı üzerinde $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ye non−dejenere*

$$Q(x) = -x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2$$

*kuadratik form olsun. O halde $\mathbb{R}^n$ üzerinde $Q(x)$ kuadratik formuna karşılık gelen Clifford cebiri $Cl_{0,n}$ veya $Cl_n$ ile gösterildiğinden $Spin(Q)$ gösterimi yerine $Spin(n)$ gösterimi kullanılacaktır.*

O halde yukarıdaki gibi verilen non−dejenere kuadratik formuna karşılık gelen $Spin(n) \subset Cl_n$ Spin grubu

$$Spin(n) = \{x \in Cl_n^0 | \forall v \in \mathbb{R}^n, x \cdot v \cdot x^* \in \mathbb{R}^n, x \cdot x^* = 1\}$$

şeklinde tanımlanır. Dahası,

$$Spin(n) = \{v_1 \cdot v_2 \cdots v_{2k} | v_i \in \mathbb{R}^n, Q(v_i) = -1\}$$

şeklinde de tanımlanır. Düşük boyutlarda, Spin($n$) grubunun izomorfizmleri aşağıdaki gibidir [12, 20]:

| |
|---|
| $Spin(2) \cong S^1$ |
| $Spin(3) \cong SU(2) \cong S^3$ |
| $Spin(4) \cong SU(2) \times SU(2)$ |
| $Spin(5) \cong Sp(2)$ |
| $Spin(6) \cong SU(4)$ |

**Tanım 2.19.** *Spin grubu yardımıyla $Spin^c$ grubu*

$$\begin{aligned} Spin^c(n) &:= \big(Spin(n) \times S^1\big)/\{\pm 1\} = Spin(n) \times S^1 \Big/_{\mathbb{Z}_2} \\ &:= \{[g, e^{\theta}] : g \in Spin(n), e^{i\theta} \in S^1\} \end{aligned}$$

*şeklinde tanımlanır [12].*

Kompleks Spin grubunu aşağıdaki şekilde de düşünebiliriz.

$$\begin{aligned} \phi : Spin(n) \times S^1 &\rightarrow Spin(n).S^1 \\ (g, e^{\theta}) &\rightarrow g.e^{i\theta} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $\phi$ dönüşümü örten bir homomorfizmdir ve çekirdeği de $\mathbb{Z}_2 = \big\{ \pm (1,1) \big\}$ dir. Dolayısıyla

$$Spin(n) \times S^1/_{\mathbb{Z}_2} \cong Spin(n).S^1 = \{g.e^{\theta} : g \in Spin(n), e^{i\theta} \in S^1\}$$

olur.

$$Spin(n) \subset Cl_n \subset \mathbb{C}l_n \xrightarrow{\kappa} End(\Delta_n)$$

şeklindeki temsilin $Spin(n)$ ye kısıtlanmasıyla

$$\kappa_n = \kappa\Big|_{Spin(n)} : Spin(n) \rightarrow Aut(\Delta_n)$$

şeklinde temsil elde edilir. Bu temsile $Spin(n)$ grubunun spinor temsili denir. $n = 2k$ durumunda $Spin(n)$ nin spinor temsilinde spinorlar iki alt uzaya kırılır. Bu aşağıdaki şekilde görülebilir: $e_1 \cdot ... \cdot e_{2k}$ elemanı $Cl_n^0$ cebirinin merkezindedir. $Spin(n) \subset Cl_n^0$ olduğundan $e_1 \cdot ... \cdot e_{2k}$ elemanı $Spin(n)$ nin tüm elemanları ile değişmelidir. Bu durumda,

$$f = i^k \kappa(e_1 \cdot ... \cdot e_{2k}) : \Delta_{2k} \rightarrow \Delta_{2k}$$

endomorfizmi, $Spin(n)$ temsilinin bir otomorfizmidir. Yani her $g \in Spin(n)$ ve $\Psi \in \Delta_{2k}$ için

$$f\big(\kappa(g)\big)\Psi\big) = \kappa(g)\big(f(\Psi)\big)$$

olur. $(e_1 \cdot ... \cdot e_{2k})^2 = (-1)^k$ olduğundan $f$ involusyondur, yani $f^2 = \mathbb{I}d_{\Delta_n}$. Böylece $\Delta_{2k}$ spinor temsili $f$ nin $\Delta_{2k}^+$ ve $\Delta_{2k}^-$ altuzaylarına dekompoze olur öyle ki

$$\Delta_{2k} = \Delta_{2k}^+ \oplus \Delta_{2k}^- \quad , \quad \Delta_{2k}^\pm = \{\Psi \in \Delta_{2k} | f(\Psi) = \pm\Psi\}$$

eşitlikleri sağlanır. Ayrıca $\Delta_{2k}^+$ ve $\Delta_{2k}^-$ alt uzayları $Spin(n)$ invaryanttır. $g \in Spin(n)$ olmak üzere $\kappa^+(g) = \kappa(g)\big|_{\Delta_{2k}^+}$ ve $\kappa^-(g) = \kappa(g)\big|_{\Delta_{2k}^-}$ dir. Bu durumda $\kappa^+ : Spin(n) \to Aut(\Delta_{2k}^+)$ ve $\kappa^- : Spin(n) \to Aut(\Delta_{2k}^-)$ şeklinde iki spinor temsili elde edilir.

**Önerme 2.20.**

1. *$dim_{\mathbb{C}}\Delta_{2k}^+ = dim_{\mathbb{C}}\Delta_{2k}^- = 2^{k-1}$*

2. *$x \in \mathbb{R}^k$ ve $\Psi^\pm \in \Delta_{2k}^\mp$ ise $x \cdot \Psi^\pm \in \Delta_{2k}^\mp$ dir. Böylece Clifford çarpımı $\mathbb{R}^{2k} \otimes_{\mathbb{R}} \Delta_{2k}^\pm \to \Delta_{2k}^\mp$ şeklinde homomorfizm indirger [12].*

$Spin(n)$ nin temsilleri aşağıdaki özelliklere sahiptir:

1. $Spin(n)$ grubunun spinor temsili birebirdir.

2. $\kappa_{2k}^+, \kappa_{2k}^-$ ve $\kappa_{2k+1}$ spinor temsilleri $Spin(n)$ grubunun indirgenemez temsilleridir [12].

# 3 VEKTÖR DEMETLERİ VE ASLİ LİF DEMETLERİ

## 3.1 Vektör Demetleri

**Tanım 3.1.** *$E$ ve $M$ düzgün manifoldlar ve $\pi : E \longrightarrow M$ örten diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa $E$ manifolduna, $M$ manifoldu üzerinde rankı $k$ olan vektör demeti denir.*

1. $\forall p \in M$ için, $E_p = \pi^{-1}(p) \subset E$ alt kümesi $k-$boyutlu reel vektör uzayı yapısına sahiptir.

2. $\forall p \in M$ için, $p$ nin öyle bir $U$ komşuluğu vardır ki $\phi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^k$ dönüşümü difeomorfizmdir ve aşağıdaki diagram değişmelidir.

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\pi"'] & U \times \mathbb{R}^k \arrow[d, "\pi_1"] \\ & U \end{tikzcd}$$

   Yani $\pi_1 \circ \phi = \pi$ dir. Burada $\pi_1$ 1.izdüşüm dönüşümüdür ve $p \in U$ için $\phi$ nin $E_p$ ye kısıtlanmışı $\phi\Big|_{\pi^{-1}(p)} : E_p \longrightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^k$ lineer izomorfizmdir. Burada $(U, \phi)$ çiftine vektör demeti kartı denir [21].

**Örnek 3.2.** *$M$ düzgün bir manifold ve $E = M \times \mathbb{R}^k$ için $E$ yukarıdaki koşulları sağlayan trivial vektör demetidir.*

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(M) \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\pi"'] & M \times \mathbb{R}^k \arrow[d, "\pi_1"] \\ & M \end{tikzcd}$$

**Önerme 3.3.** *$M$, düzgün $n-$boyutlu manifold ve $TM$ tanjant demeti olsun. $TM$, $M$ üzerinde rankı $n$ olan düzgün vektör demetidir [21].*

**Önerme 3.4.** *$\pi : E \to M$ manifoldu üzerinde rankı $k$ olan düzgün vektör demeti olsun. $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ iken $E$ nin iki düzgün lokal trivilizasyonları*

$$\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^k \quad ve \quad \phi_\beta : \pi^{-1}(U_\beta) \to U_\beta \times \mathbb{R}^k$$

*olsun. O halde $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k, \mathbb{R})$ düzgün dönüşümü vardır öyle ki*

$$\begin{aligned} \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^k &\to (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^k \\ (p, v) &\mapsto \Big(\phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1}\Big)(p, v) = \Big(p, g_{\alpha\beta}(p)(v)\Big) \end{aligned}$$

*şeklinde ifade edilir. Burada $g_{\alpha\beta}(p)v$, $k \times k$ tipindeki matrisin $v \in \mathbb{R}^k$ vektörü üzerine doğal etkisidir [21].*

**Yardımcı Teorem 3.5.** *(Vektör Demeti Kurma Lemması) $M$ düzgün bir manifold olmak üzere aşağıdakilerin verildiğini kabul edelim.*

1. *$\forall p \in M$ için $E_p$ $k-$boyutlu reel vektör uzayı*

2. *$\mathcal{A}$ indis kümesi için $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ $M$ nin bir açık örtüsü*

3. *$E = \bigsqcup_{p \in M} E_p, \pi : E \longrightarrow M, \pi(E_p) = p$*

4. *$\forall \alpha \in \mathcal{A}$ için $\pi^{-1}(U_\alpha) \subset E$ olmak üzere,*

$$\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^k \text{ birebir örten ve}$$
$$\phi_\alpha\Big|_{E_p} : E_p \longrightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^k \text{ lineer izomorfizm olsun.}$$

5. *$\forall \alpha, \beta \in \mathcal{A}$ için $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ olmak üzere,*
   *$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow GL(k, \mathbb{R})$ düzgün dönüşümü ve*

$$\begin{aligned} \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^k &\longrightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^k \\ (p, v) &\longmapsto \big(p, g_{\alpha\beta}(p)v\big) \end{aligned}$$

   *şeklinde tanımlı bileşke dönüşümü var olsun. Bu durumda $E$, tek bir düzgün manifold yapısına ve $M$ üzerinde k-ranklı düzgün vektör demeti yapısına sahiptir [21].*

**Teorem 3.6.** *$M$ düzgün manifold ve $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ $M$ nin açık örtüsü olsun. $\forall \alpha, \beta \in \mathcal{A}$ için $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ olmak üzere*

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k, \mathbb{R})$$

*düzgün geçiş fonksiyonları mevcut olsun. $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{A}$ ve $p \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ için*

$$g_{\alpha\beta}(p) g_{\beta\gamma}(p) = g_{\alpha\gamma}(p)$$

*koşulu sağlansın. Bu durumda geçiş fonksiyonları $g_{\alpha\beta}$ olacak şekilde*

$$\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^k$$

*düzgün lokal fonksiyonları ile rankı $k$ olan $\pi : E \to M$ düzgün vektör demeti vardır [21].*

**Tanım 3.7.** *$M$ $n-$boyutlu düzgün manifold, $G \subset GL(n, \mathbb{R})$ alt grup ve $TM$ tanjant demetinin $\{(U_\alpha, \Phi_\alpha)\}$ atlasının geçiş fonksiyonları $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$ şeklinde $G$ de değer alıyorsa $M$ manifoldu $G$ yapısına sahiptir denir.*

Bir $M$ manifoldunun $G-$yapısına sahip olması, o manifoldun geometrisiyle doğrudan ilişkilidir. Bunların bazılarını aşağıdaki şekilde listeleyebiliriz [18].

1. $GL(n, \mathbb{R})^+$ determinantı pozitif olan matrislerin grubu olmak üzere, $GL(n, \mathbb{R})^+ \subset GL(n, \mathbb{R})$ grubunda değer alıyorsa $M$ manifolduna yönlendirilebilirdir denir. Tersine $M$ yönlendirilebilir manifold ise $M$ nin öyle bir kartlaması vardır ki $TM$ tanjant demetinin geçiş fonksiyonları $GL(n, \mathbb{R})^+$ da değer alır.

2. Geçiş fonksiyonları $O(n) \subset GL(n, \mathbb{R})$ ortogonal grubunda değer alıyorsa $M$ manifoldu $g$ Riemann metriği ile donatılabilir. Tersine $M$ Riemann manifoldu ise $M$ nin öyle bir kartlaması vardır ki $TM$ tanjant demetinin geçiş fonksiyonları $O(n)$ de değer alır.

3. Geçiş fonksiyonları $SO(n) \subset GL(n, \mathbb{R})$ grubunda değer alıyorsa $M$ manifoldu $g$ Riemann metriği ile donatılabilir ve yönlendirilebilir manifolddur. Tersine $M$ yönlendirilebilir Riemann manifoldu ise $M$ nin öyle bir kartlaması vardır ki $TM$ tanjant demetinin geçiş fonksiyonları $SO(n)$ de değer alır.

4. $7-$boyutlu bir $M$ manifoldunun geçiş fonksiyonları $G_2$ Lie grubunda değer alıyorsa $M$ manifolduna $G_2-$manifold yapısına sahiptir denir.

5. $n = 2m$ olmak üzere geçiş fonksiyonları $GL(m, \mathbb{C})$ grubunda değer alıyorsa $M$ manifoldu $J$ yaklaşık kompleks yapıya sahiptir denir. Burada $J$, $J^2 = -Id$ koşulunu sağlayan $J : TM \to TM$ şeklinde $(1, 1)$ tipinde bir tensördür.

Tersine $M, J$ yaklaşık kompleks yapıya sahip ise $M$ nin öyle bir kartlaması vardır ki $TM$ tanjant demetinin geçiş fonksiyonları $GL(m, \mathbb{C})$ grubunda değer alır [19].

6. $n = 2m$ olmak üzere geçiş fonksiyonları $U(m) \subset GL(m, \mathbb{C})$ grubunda değer alıyorsa $M$ manifoldu kompleks manifolddur ve $g$ Hermityen metriği ile donatılabilir. Tersine $M, g$ Hermityen metriği ile donatılabiliyorsa, $M$ nin öyle bir kartlaması vardır ki $TM$ tanjant demetinin geçiş fonksiyonları $U(m)$ de değer alır [19].

**Tanım 3.8.** *$\pi : E \to M$ düzgün vektör demeti olsun. $\sigma : M \longrightarrow E$ dönüşümü, $\forall p \in M$ için $\big(\pi \circ \sigma\big)(p) = p$ koşulunu sağlıyorsa $\sigma$ ya global kesit denir.*

**Tanım 3.9.** *$\pi : E \to M$ düzgün vektör demeti olsun. $U \subset M$ açık alt kümesi olmak üzere, $\sigma : U \longrightarrow E$ dönüşümü, $\forall p \in U$ için $\big(\pi \circ \sigma\big)(p) = p$ koşulunu sağlıyorsa $\sigma$ ya lokal kesit denir.*

Özel olarak $E = TM$ olarak alındığında tanjant demetinin kesitleri vektör alanları olur. Dahası $E = T^*M$ alınırsa kotanjant vektör demetinin kesitleri 1-fomlar olur.

$\pi : E \to M$ düzgün vektör demeti için $E$ nin kesitlerinin kümesi $\Gamma(E)$ ile gösterilir. Ayrıca $\Gamma(E) = \{\sigma | \sigma : M \longrightarrow E \text{ bir kesit}\}$ kümesi $C^\infty(M, \mathbb{R})$ üzerinde aşağıdaki tanımlanan işlemlerle birlikte bir modüldür. $\forall \sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma(E)$ ve $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için

$$\begin{aligned} \oplus : \Gamma(E) \times \Gamma(E) &\longrightarrow \Gamma(E) \\ (\sigma_1, \sigma_2) &\longmapsto (\sigma_1 + \sigma_2)(p) = \sigma_1(p) + \sigma_2(p) \\ \odot : C^\infty(M) \times \Gamma(E) &\longrightarrow \Gamma(E) \\ (f, \sigma) &\longmapsto (f\sigma)(p) = f(p)\sigma(p). \end{aligned}$$

**Tanım 3.10.** *$\pi : E \longrightarrow M$ $k-$ranklı düzgün vektör demeti verilsin. $U \subset M$ açık alt kümesi için, $E$'nin $U$ üzerindeki $\sigma_1, ..., \sigma_k$ lokal kesitleri $\sigma_i : U \longrightarrow E$, $\pi \circ \sigma_i = Id_U$ olmak üzere, $\forall p \in U$ için $\sigma_1(p), ..., \sigma_k(p) \in E_p$ vektörleri $E_p$ vektör uzayı üzerinde lineer bağımsız ve $E_p$ yi geriyorlarsa $\sigma_1, ..., \sigma_k$ kesitlerine $U$ üzerinde $E$' nin bir çatısı denir [21].*

## 3.2 Kovaryant Türev

**Tanım 3.11.** *$\pi : E \to M$ vektör demeti ve $\Gamma(E)$, $E$ nin düzgün kesitlerinin uzayı olsun.*

$$\begin{aligned} \nabla : \chi(M) \times \Gamma(E) &\to \Gamma(E) \\ (X, \sigma) &\mapsto \nabla_X \sigma \end{aligned}$$

bilineer dönüşümü aşağıdaki koşulları sağlıyorsa $\nabla$ ya $E$ de bir konneksiyon denir.

1. $\nabla_X \sigma$, $X$ de $C^\infty(M, \mathbb{R})-$ lineerdir. Yani $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ve $X_1, X_2 \in \chi(M)$ iken

$$\nabla_{fX_1+gX_2}\sigma = f\nabla_{X_1}\sigma + g\nabla_{X_2}\sigma$$

eşitliği sağlanır.

2. $\nabla$, çarpım kuralını sağlar. Yani $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ iken

$$\nabla_X(f\sigma) = f\nabla_X\sigma + (Xf)\sigma$$

dır. $\nabla_X\sigma$, $X$ yönünde $\sigma$ nın kovaryant türevi olarak adlandırılır.

Aslında kovaryant türev $\nabla : \Gamma(E) \to \Gamma(T^*M \otimes E)$ şeklinde

$$\nabla f\sigma = f\nabla\sigma + df \otimes \sigma$$

koşulunu sağlayan bir lineer dönüşüm olarak da düşünülebilir.

$U \subset M$ açık alt kümesi üzerinde yerel çatı $s_1, s_2, ..., s_k$ olsun. O zaman $X \in \chi(M)$ için

$$\nabla_X s_j = \sum_{i=1}^{k} \omega_{ij}(X) s_i$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\omega_{ij}(X) \in C^\infty(U)$ dur. Ayrıca $\omega_{ij}(fX) = f\omega_{ij}(X)$ olduğundan $\omega_{ij}$ ler $U$ üzerinde $1-$formlardır. $k^2$ tane $1-$form vardır. $\omega_U = (\omega_{ij})$ ye $U$ üzerinde $\nabla$ nın konneksiyon formu veya konneksiyon potansiyelleri denir ve $\omega_U, U$ üzerinde $\mathfrak{gl}(k, \mathbb{R})$ değerli $1-$formdur.

**Teorem 3.12.** *$M$ yarı Riemann manifoldu olsun. Bu durumda $TM$ üzerinde tek türlü belirli $\nabla$ konneksiyonu vardır öyle ki aşağıdaki koşullar sağlanır:*

*1.* $\nabla_X Y$, $X$ *de* $C^\infty(M,\mathbb{R})-$*lineerdir. Yani* $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ *ve* $X_1, X_2 \in \chi(M)$ *iken*

$$\nabla_{fX_1+X_2}Y = f\nabla_{X_1}Y + \nabla_{X_2}Y$$

*eşitliği sağlanır.*

*2.* $\nabla$*, çarpım kuralını sağlar. Yani* $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ *iken*

$$\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y$$

*3.* $\nabla$ *konneksiyonunun burulması sıfırdır. Yani,* $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ *için*

$$[X,\ Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

*dir.*

*4.* $\nabla$ *konneksiyonu, metrik uyumluluk koşulunu sağlar. Yani,* $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ *için*

$$Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

*dir [25].*

Bu $\nabla$ konneksiyonuna Levi$-$Civita konneksiyonu denir.

**Tanım 3.13.** $\nabla$, $\pi : E \to M$ *vektör demetinde konneksiyon olsun.* $X, Y \in \chi(M)$ *olmak üzere,*

$$R(X,Y) = \nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$$

*şeklinde tanımlanan* $R$ *dönüşümüne konneksiyon eğriliği denir.*

$U \subset M$ açık alt kümesi üzerinde lokal çatı $s_1, s_2, ..., s_k$ olsun. O zaman $X, Y \in \chi(M)$ için

$$R(X,Y)s_j = \sum_{i=1}^{k} \Omega_{ij}(X,Y)s_i$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\Omega_{ij}(X,Y) \in C^\infty(U)$ dur ve

$$\Omega_{ij}(Y,X) = -\Omega_{ij}(X,Y)$$

ve

$$\Omega_{ij}(fX, gY) = fg\Omega_{ij}(X,Y)$$

koşullarını sağladığından her bir $\Omega_{ij}$ ler $U$ üzerinde $\mathbb{R}-$değerli $2-$formlardır. $\Omega = (\Omega_{ij})$, $U$ üzerinde $\mathfrak{gl}(k, \mathbb{R})$ değerli $2-$formdur. Bu forma eğrilik formu denir [23].

**Teorem 3.14.** *Vektör demeti üzerinde* $\omega = (\omega_{ij})$ *konneksiyon formu ve* $\Omega = (\Omega_{ij})$ *eğrilik formu arasında*

$$d\omega = -\tfrac{1}{2}\omega \wedge \omega + \Omega$$

*ilişkisi vardır. Bileşenleri arasında*

$$d\omega_{ij} = -\tfrac{1}{2}\sum_{r=1}^{k} \omega_{ir} \wedge \omega_{rj} + \Omega_{ij}$$

*ilişkisi vardır [23].*

**Tanım 3.15.** $\{E_1, ..., E_n\}$ *ve* $\{\theta^1, ..., \theta^n\}$ *sırasıyla* $TM$ *nin ve* $T^*M$ *nin çatıları olsunlar. O halde* $\nabla E_i$ $M$ *manifoldu üzerindeki Levi$-$Civita konneksiyonu olmak üzere* $\omega_{ij}$ *konneksiyon* $1-$*formu aşağıdaki gibi tanımlanır:* $\forall X \in \chi(M)$ *için*

$$\omega_{ij}(X) = \theta^i\big(\nabla_X E_j\big)$$

*dahası*

$$\nabla_X E_j = \sum_m \omega_{mj}(X) E_m$$

*dir. Yukarıdaki eşitlik*

$$d\theta^i = -\sum_m \omega_{im} \wedge \theta^m$$

*şeklinde de ifade edilebilir. Eğer* $\omega = [\omega_{ij}]$ *konneksiyon* $1-$*formu matris olarak düşünülürse*

$$d\theta = -\omega \wedge \theta$$

*şeklinde de ifade edilebilir [28].*

**Örnek 3.16.** $M = \{(x_1, ..., x_4) | x_4 > 0\} \subset \mathbb{R}^4$ *olsun. O halde* $M$ *üzerinde*

$$ds^2 = \tfrac{1}{(x_4)^2}\big((dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + (dx^4)^2\big)$$

*şeklinde tanımlı hiperbolik metrik ile* $\omega = [\omega_{ij}]$ *konneksiyon* $1-$*formu aşağıdaki gibi elde edilir.* $M$ *üzerinde tanımlanan hiperbolik metriğe karşılık gelen matrisler*

*$g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$ ve $g^{ij} = (g_{ij})^{-1}$ sırasıyla aşağıdaki gibidir:*

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{x_4^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_4^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{x_4^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{x_4^2} \end{bmatrix} \qquad g^{ij} = \begin{bmatrix} x_4^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_4^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_4^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_4^2 \end{bmatrix}$$

*$g_{ij}$ ve $g^{ij}$ matrisleri*

$$g_{ij} = \frac{1}{x_4^2}\delta_{ij} \text{ ve } g^{ij} = x_4^2\delta_{ij}$$

*şeklinde ifade edilebilir. $\gamma_{ij}$ ve $\gamma^{ij}$ sırasıyla $g_{ij}$ ve $g^{ij}$ nin karekökü olmak üzere, $\gamma_{ij} = \frac{1}{x_4}\delta_{ij}$ ve $\gamma^{ij} = x_4\delta_{ij}$ olur. O halde $\theta^i = \sum_{l=1}^{4} \gamma_{il} dx^l$ ler Gram−Schmid ortonormalleştirme yöntemi ile elde edilen koframeler olur. Sonuç olarak konneksiyon 1−formun tanımından*

$$d\theta = \frac{1}{x_4} \begin{bmatrix} dx^1 \wedge dx^4 \\ dx^2 \wedge dx^4 \\ dx^3 \wedge dx^4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

*ve*

$$\omega = \frac{1}{x_4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -dx^1 \\ 0 & 0 & 0 & -dx^2 \\ 0 & 0 & 0 & -dx^3 \\ dx^1 & dx^2 & dx^3 & 0 \end{bmatrix}$$

*elde edilir.*

**Örnek 3.17.** *4−boyutlu düzgün $M$ manifoldu üzerinde*

$$ds^2 = \frac{(dx^1)^2}{x_1^2+1} + \frac{(dx^2)^2}{x_2^2+1} + \frac{(dx^3)^2}{x_3^2+1} + \frac{(dx^4)^2}{x_4^2+1}$$

*şeklinde tanımlı metrik ile $\omega = \omega_{ij}$ konneksiyon 1−formu aşağıdaki gibi elde edilir. $M$ üzerinde tanımlanan yukarıdaki metriğe karşılık gelen matrisler $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$ ve $g^{ij} = (g_{ij})^{-1}$ sırasıyla aşağıdaki gibidir:*

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{x_1^2+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_2^2+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{x_3^2+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{x_4^2+1} \end{bmatrix} \qquad g^{ij} = \begin{bmatrix} x_1^2+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2^2+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_4^2+1 \end{bmatrix}$$

*matrisleri ile edilen* $\theta^i = \frac{1}{\sqrt{1+x_i^2}}dx^i$ *ler Gram−Schmid ortonormalleştirme yöntemi ile elde edilen koframelerdir. Sonuç olarak konneksiyon* 1−*formun tanımından*

$$d\theta \;=\; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

*ve*

$$\omega \;=\; \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

*elde edilir.*

**Teorem 3.18.** $P_{SO(n)}$ *asli lif demetinin* $\nabla^g$ *ye karşılık gelen* $\omega$ *nın ayar potansiyelleri*

$$A_\alpha\Big(\frac{\partial}{\partial x_k}\Big) = \sum_{i<j}\omega_{ij}\Big(\frac{\partial}{\partial x_k}\Big)E_{ij},$$

*dir. Burada* $E_{ij}$ *ler* $SO(n)$ *nin tabanıdır.*

*Kanıt.* $U_\alpha \subset M$ 'nin açık alt kümesi olmak üzere $TM$ tanjant demetinin $A_\alpha$ konneksiyon formu,

$$ds^2 = \frac{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + ... + (dx^{n-1})^2 + (dx^n)^2}{(dx^n)^2}$$

hiperbolik metriğine bağlı olarak aşağıdaki yolla elde edilir. $\big\{\frac{\partial}{\partial x_i}\big\}, i = 1...n$ için $\big\{E_1, ..., E_n\big\}$ Gram−Schmid ortonormalleştirme yöntemi ile elde edilen ortonormal çatı alanı olsun. $W \in \Gamma\big(TU_\alpha\big)$ için $W = \sum\limits_{k=1}^{n} W^k E_k$ dir.

Hiperbolik metriğine karşılık gelen matrisler $g_{ij} = g\big(\partial_i, \partial_j\big)$ ve $g^{ij} = \big(g_{ij}\big)^{-1}$ sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{x_n^2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_n^2} & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \frac{1}{x_n^2} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{x_n^2} \end{bmatrix} \qquad g^{ij} = \begin{bmatrix} x_n^2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & x_n^2 & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & x_n^2 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & x_n^2 \end{bmatrix}$$

$g_{ij}$ ve $g^{ij}$ matrisleri

$$g_{ij} = \frac{1}{x_n^2}\delta_{ij} \ ve \ g^{ij} = x_n^2\delta_{ij}$$

şeklinde ifade edilebilir. $\gamma_{ij}$ ve $\gamma^{ij}$ sırasıyla $g_{ij}$ ve $g^{ij}$ nin karekökü olmak üzere, $\gamma_{ij} = \frac{1}{x_n}\delta_{ij} \ ve \ \gamma^{ij} = x_n\delta_{ij}$ olur. $1 \leq j \ \leq n$ için $\big\{E_1, ..., E_n\big\}$ ve $\big\{E^1, ..., E^n\big\}$ sırasıyla $E_j = \sum\limits_{l=1}^{n} \gamma^{jl}\frac{\partial}{\partial x_l}$, $E^j = \sum\limits_{l=1}^{n} \gamma_{jl}dx^l$ şeklinde yazılabilir. O halde $\omega_{ij}$ konneksiyonunu için aşağıdaki ifadeler gerekli olur:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}} E_j = \sum_{i=1}^{n} \omega_{ij}\Big(\frac{\partial}{\partial x_k}\Big)E_i.$$

$$\begin{aligned}
\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}} E_j &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}}\big(\sum_{l=1}^{n}\gamma^{jl}\tfrac{\partial}{\partial x_l}\big)\\
&= \sum_{l=1}^{n}\gamma^{jl}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}}\tfrac{\partial}{\partial x_l} + \sum_{l=1}^{n}\tfrac{\partial}{\partial x_k}\big(\gamma^{jl}\big)\tfrac{\partial}{\partial x_l}\\
&= \sum_{l=1}^{n}\gamma^{jl}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}}\tfrac{\partial}{\partial x_l} + \sum_{l=1}^{n}\tfrac{\partial}{\partial x_k}\big(x_n\delta_{jl}\big)\tfrac{\partial}{\partial x_l}\\
&= \sum_{l=1}^{n}\gamma^{jl}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}}\tfrac{\partial}{\partial x_l} + \sum_{l=1}^{n}\delta_{kn}\delta_{jl}\tfrac{\partial}{\partial x_l}
\end{aligned}$$

$g_{ij} = \frac{1}{x_n^2}\delta_{ij} \ ve \ g^{ij} = x_n^2\delta_{ij}$ den yararlanarak,

$$\begin{aligned}
\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}}\frac{\partial}{\partial x_l} &= \sum_{i=1}^{n}\Gamma_{kl}^{i}\partial_i\\
&= \sum_{i}^{n}\Big(\tfrac{1}{2}\sum_{m=1}^{n} g^{im}\big(\tfrac{\partial g_{lm}}{\partial x_k} + \tfrac{\partial g_{km}}{\partial x_l} - \tfrac{\partial g_{kl}}{\partial x_m}\big)\Big)\partial_i\\
&= \sum_{i}^{n}\Big(\tfrac{1}{2}\sum_{m=1}^{n} x_n^2.\delta_{im}\big(\tfrac{\partial}{\partial x_k}\big(\tfrac{1}{x_n^2}.\delta_{lm}\big) + \tfrac{\partial}{\partial x_l}\big(\tfrac{1}{x_n^2}.\delta_{km}\big) - \tfrac{\partial}{\partial x_m}\big(\tfrac{1}{x_n^2}.\delta_{kl}\big)\big)\Big)\partial_i\\
&= \sum_{i}^{n}\Big(\tfrac{1}{2}\sum_{m=1}^{n} x_n^2.\delta_{im}\big(-\tfrac{2}{x_n^3}\delta_{km}.\delta_{lm} - \tfrac{2}{x_n^3}\delta_{ln}.\delta_{km} + \tfrac{2}{x_n^3}\delta_{mn}.\delta_{kl}\big)\Big)\partial_i\\
&= \sum_{i}^{n}\Big(-\tfrac{1}{x_n}\sum_{m=1}^{n}\delta_{im}\big(\delta_{km}.\delta_{lm} + \delta_{ln}.\delta_{km} - \delta_{mn}.\delta_{kl}\big)\Big)\partial_i\\
&= \sum_{i}^{n}\Big(-\tfrac{1}{x_n}\sum_{m=1}^{n}\delta_{im}\big(\delta_{ml}.\delta_{kn} + \delta_{mk}.\delta_{ln} - \delta_{mn}.\delta_{kl}\big)\Big)\partial_i\\
&= -\tfrac{1}{x_n}\sum_{i}^{n}\Big(\sum_{m=1}^{n}\Big(\delta_{im}\delta_{km}.\delta_{lm} + \delta_{im}\delta_{ln}.\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{mn}.\delta_{kl}\Big)\Big)\partial_i\\
&= -\tfrac{1}{x_n}\sum_{i}^{n}\Big(\delta_{il}\delta_{kn} + \delta_{ik}\delta_{ln} - \delta_{in}\delta_{kl}\Big)\partial_i
\end{aligned}$$

Yukarıda elde edilen eşitliği ve $\gamma^{ij} = x_n\delta_{ij}$ yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}} E_j &= \sum_{l=1}^{n} \gamma^{jl}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}}\frac{\partial}{\partial x_l} + \sum_{l=1}^{n}\delta_{kn}\delta_{jl}\frac{\partial}{\partial x_l} \\
&= \sum_{l=1}^{n} x_n\delta_{jl}\Big(-\frac{1}{x_n}\sum_{i}^{n}\Big(\delta_{il}\delta_{kn}+\delta_{ik}\delta_{ln}-\delta_{in}\delta_{kl}\Big)\partial_i\Big) + \sum_{l=1}^{n}\delta_{kn}\delta_{jl}\frac{\partial}{\partial x_l} \\
&= \sum_{l=1}^{n}\Big(\sum_{i}^{n}\Big(-\delta_{jl}\delta_{il}\delta_{kn}-\delta_{jl}\delta_{ik}\delta_{ln}+\delta_{jl}\delta_{in}\delta_{kl}\Big)\partial_i\Big) + \sum_{l=1}^{n}\delta_{kn}\delta_{jl}\frac{\partial}{\partial x_l} \\
&= \sum_{i}^{n}\Big(-\delta_{ji}\delta_{kn}-\delta_{jn}\delta_{ik}+\delta_{jk}\delta_{in}\Big)\partial_i + \sum_{l=1}^{n}\delta_{kn}\delta_{jl}\frac{\partial}{\partial x_l} \\
&= \sum_{i}^{n}\Big(-\delta_{ji}\delta_{kn}-\delta_{jn}\delta_{ik}+\delta_{jk}\delta_{in}\Big)\partial_i + \sum_{i=1}^{n}\delta_{kn}\delta_{ji}\frac{\partial}{\partial x_i} \\
&= \sum_{i}^{n}\Big(-\delta_{ji}\delta_{kn}-\delta_{jn}\delta_{ik}+\delta_{jk}\delta_{in}+\delta_{kn}\delta_{ji}\Big)\partial_i \\
&= \sum_{i}^{n}\Big(-\delta_{jn}\delta_{ik}+\delta_{jk}\delta_{in}\Big)\partial_i \\
&= \frac{x_n}{x_n}\sum_{i}^{n}\Big(\delta_{jk}\delta_{in}-\delta_{jn}\delta_{ik}\Big)\partial_i \\
&= \frac{1}{x_n}\sum_{i}^{n}\Big(\delta_{jk}\delta_{in}-\delta_{jn}\delta_{ik}\Big)x_n\partial_i \\
&= \frac{1}{x_n}\sum_{i}^{n}\Big(\delta_{jk}\delta_{in}-\delta_{jn}\delta_{ik}\Big)E_i \\
&= \sum_{i=1}^{n}\omega_{ij}(\frac{\partial}{\partial x_k})E_i
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada $\omega_{ij}^k = \omega_{ij}\Big(\frac{\partial}{\partial x_k}\Big) = \frac{1}{x_n}\Big(\delta_{jk}\delta_{in} - \delta_{jn}\delta_{ik}\Big)$ alınırsa konneksiyon formu

$$A_\alpha = \omega_{ij}E_{ij}$$

şeklinde yazılabilir. $E_{ij}$ ler $\mathfrak{so}(n)$ nin tabanı olmak üzere

$$A_\alpha\Big(\frac{\partial}{\partial x_k}\Big) = \sum_{i<j}\omega_{ij}\Big(\frac{\partial}{\partial x_k}\Big)E_{ij}$$

şeklinde konneksiyon formu yazılabilir. $A_\alpha$'lar $TM$ tanjant demeti üzerinde konneksiyon formudur. $\omega_{ij}$ konneksiyon formları $g$ metriği yardımıyla aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\omega_{ij}\Big(X\Big) = g\Big(\nabla_X E_j, E_i\Big)$$

dir. □

Özel olarak $\mathbb{R}^4$ üzerinde Hiperbolik metriğe bağlı olarak $\omega_{ij}$ konneksiyon formları aşağıdaki gibi elde edilir:

**Örnek 3.19.** $ds^2 = \frac{(dx^1)^2+(dx^2)^2+(dx^3)^2+(dx^4)^2}{(x^4)^2}$ *düzgün* $M$ *manifoldu üzerinde tanımlı hiperbolik metrik olmak üzere* $\omega_{ij} = \sum\limits_{k=1} \omega_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)dx^k$ *aşağıdaki gibi ifade edilir:*

$$\begin{aligned}
\omega_{ij} \;&=\; \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{x_4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{x_4} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} dx^1 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{x_4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_4} & 0 & 0 \end{bmatrix} dx^2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{x_4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{x_4} & 0 \end{bmatrix} dx^3 \\
&\quad + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} dx^4 \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{dx^1}{x_4} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{dx^2}{x_4} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{dx^3}{x_4} \\ \frac{dx^1}{x_4} & \frac{dx^2}{x_4} & \frac{dx^3}{x_4} & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

**Önerme 3.20.** $\nabla$, $\pi : E \to M$ *vektör demeti üzerinde konneksiyon olsun.* $U_\alpha$ *ve* $U_\beta$, $M$ *nin açık alt kümeleri,* $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ *ve*

$$\begin{aligned} \phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \;&\to\; U_\alpha \times \mathbb{R}^n \\ \phi_\beta : \pi^{-1}(U_\beta) \;&\to\; U_\beta \times \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

*lokal trivilizasyonlar olmak üzere* $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(n, \mathbb{R})$ *geçiş fonksiyonları olsun.* $U_\alpha$ *ya karşılık gelen konneksiyon formunu* $\omega_\alpha$, *eğrilik formunu* $\Omega_\alpha$, $U_\beta$ *ya karşılık gelen konneksiyon formunu* $\omega_\beta$ *eğrilik formunu* $\Omega_\beta$ *şeklinde belirtelim. Bu durumda* $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ *üzerinde* $\omega_\alpha$ *ve* $\omega_\beta$ *arasında*

$$\omega_\beta = g_{\alpha\beta}^{-1}\omega_\alpha g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}^{-1}dg_{\alpha\beta}$$

*eşitliği vardır.* $\Omega_\alpha$ *ve* $\Omega_\beta$ *arasında*

$$\Omega_\beta = g_{\alpha\beta}^{-1}\Omega_\alpha g_{\alpha\beta}$$

*eşitliği vardır [23].*

**Tanım 3.21.** *$TM$ tanjant demeti, $\nabla$, $TM$ üzerinde konneksiyon ve yapı grubu $G$ olsun. $TM$ nin konneksiyon potansiyelleri $\mathfrak{g} = Lie(G)$ $G$ nin Lie cebirinde değer alıyorsa $\nabla$ konneksiyonuna $G-$konneksiyon denir [27].*

## 3.3 Manifoldlar Üzerinde $k-$Formlar

**Tanım 3.22.** *$n-$boyutlu düzgün $M$ manifoldu üzerinde $\Lambda^k(M) \subset T^k(M)$ nin alterne $k-$ tensörlerini içeren alt kümesi olmak üzere;*

$$\begin{aligned} \omega : M &\rightarrow \Lambda^k(M) = \textstyle\bigsqcup_{p\in M} \Lambda^k(T_pM) \\ p &\rightarrow \Lambda^k(T_pM) \end{aligned}$$

*kesitine diferensiyel $k-$form denir. Burada $k$ tamsayısı formun derecesini ifade eder.*

**Tanım 3.23.** *$\mathcal{A}^k(M)$, $\Lambda^k(M)$ nin düzgün kesitlerinin vektör uzayını göstermek üzere, $F : M \rightarrow N$ düzgün dönüşüm ve $\omega, N$ üzerinde diferensiyel $k - form$ ise*

$$F^* : \mathcal{A}^k(N) \rightarrow A^k(M)$$

*$F^*(\omega)$ dönüşümü $M$ üzerinde düzgün diferensiyel $k-$formdur. Herhangi bir düzgün tensör alanı üzerinde $V_1, V_2, ..., V_k \in T_pM$ için*

$$(F^*\omega)_p(V_1, ..., V_k) = \omega_{F(p)}\big(F_*V_1, ..., F_*V_k\big)$$

*şeklinde tanımlanan $F^*\omega$ dönüşümüne diferensiyel formun geri çekilmişi denir.*

**Teorem 3.24.** *Her düzgün $M$ manifoldu $k \geq 0$ tamsayısı için aşağıdaki koşulları sağlayan bir tek*

$$d : \mathcal{A}^k(M) \rightarrow \mathcal{A}^{k+1}(M)$$

*lineer dönüşümü vardır.*

1. *$f$ düzgün gerçel değerli fonksiyon ise $df$*

$$df(X) = X(f)$$

*şeklinde tanımlanır.*

*2.* $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$ *ve* $\eta \in \mathcal{A}^l(M)$ *ise*

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^{kl}\omega \wedge d\eta$$

*eşitliği sağlanır.*

*3.* $d \circ d = 0$ *dır.*

**Yardımcı Teorem 3.25.** $G : M \to N$ *düzgün dönüşüm ise* $G^* : \mathcal{A}^k(N) \to A^k(M)$ *geri çekme dönüşümü* $d$ *ile değişmelidir. Yani her* $\omega \in \mathcal{A}^{k-1}(N)$ *için*

$$G^*(d\omega) = d(G^*\omega)$$

*dır.*

**Yardımcı Teorem 3.26.** *Herhangi bir* $\omega$ *düzgün* $1-$*formu ve* $X, Y \in \chi(M)$ *için*

$$d\omega(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y])$$

*eşitliği geçerlidir.*

**Tanım 3.27.** $g$, $M$ *düzgün manifoldu üzerinde verilen bir Riemann metrik olmak üzere* $\omega_1 \wedge ... \wedge \omega^k, \eta_1 \wedge ... \wedge \eta^k \in \Lambda^k(M)$ *için*

$$\left\langle \omega_1 \wedge ... \wedge \omega^k, \eta_1 \wedge ... \wedge \eta^k \right\rangle_g \quad := \quad \begin{vmatrix} g(\omega_1,\eta_1) & g(\omega_1,\eta_2) & \dots & g(\omega_1,\eta_k) \\ g(\omega_2,\eta_1) & g(\omega_1,\eta_1) & \dots & g(\omega_1,\eta_k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g(\omega_k,\eta_1) & g(\omega_1,\eta_2) & \dots & g(\omega_k,\eta_k) \end{vmatrix}$$

*şeklinde tanımlanan* $\left\langle , \right\rangle_g$ $\Lambda^k(M)$ *üzerinde bir iç çarpımdır.*

**Tanım 3.28.** $n-$*boyutlu* $M$ *manifoldu üzerinde* $* : \Lambda^k(M) \to \Lambda^{n-k}(M)$ *dönüşümü,* $\forall \omega, \eta \in \Lambda^k(M)$ *için*

$$\omega \wedge *(\eta) = \left\langle \omega, \eta \right\rangle_g dV$$

*eşitliğini sağlayan* $*$ *dönüşümüne Hodge−Star Operatörü denir. Burada* $dV$, $\Lambda^n(M)$ *nin* $g$ *metriği ile indirgenen volume formudur.*

## 3.4 Asli Lif Demetleri

**Tanım 3.29.** *$P$ ve $M$ düzgün manifold ve $G$ Lie grubu olsun. $\mathcal{P} : P \to M$ düzgün örten dönüşüm ve $G$ nin $P$ üzerindeki sağ etkisi*

$$\begin{array}{rcl} \sigma : P \times G & \longrightarrow & P \\ (p,g) & \longmapsto & p.g \end{array}$$

*ile tanımlı düzgün dönüşüm olmak üzere aşağıdaki koşullar sağlansın.*

1. *$\sigma, \mathcal{P}$ nin liflerini korur, yani $\forall p \in P$ ve $g \in G$ için*

$$\mathcal{P}(p.g) = \mathcal{P}(p)$$

   *dir.*

2. *(Yerel Triviallik)Her $x_0 \in M$ için $x_0$ ı içeren bir $V$ açık komşuluğu vardır ve*

$$\begin{array}{rcl} \Psi : \mathcal{P}^{-1}(V) & \longrightarrow & V \times G \\ p & \mapsto & \Psi(p) = \big(\mathcal{P}(p),\ \psi(p)\big) \end{array}$$

   *şeklinde tanımlı $\Psi$ dönüşümü bir difeomorfizmdir. Burada*

$$\psi : \mathcal{P}^{-1}(V) \longrightarrow G$$

   *dönüşümü $\forall p \in \mathcal{P}^{-1}(V)$ ve $g \in G$ için*

$$\psi(p.g) = \psi(p).g$$

   *eşitliğini sağlar. Bu durumda $P$ ye yapı grubu $G$ olan asli lif demeti denir ve $(P, M, G)$ şeklinde gösterilir. Şematik olarak ise $G \hookrightarrow P \longrightarrow X$ şeklinde gösterilir [24].*

**Önerme 3.30.** *$M$ düzgün manifold ve $G$ Lie grubu olmak üzere $P = M \times G$, $M$ üzerinde trivial asli $G-$lif demetidir.*

*Kanıt.* Herhangi bir $x \in M$ ve $h \in G$ için

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : M \times G &\longrightarrow M \\ (x,h) &\longmapsto x \end{aligned}$$

düzgün dönüşümü ve $G$ nin $M \times G$ üzerine sağ etkisi aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\begin{aligned} \sigma : (M \times G) \times G &\longrightarrow M \times G \\ \big((x,h),g\big) &\longmapsto \big(x,h.g\big) \end{aligned}$$

1. $\forall p = (x,h) \in M \times G$ için

$$\mathcal{P}(p.g) \;=\; \mathcal{P}\big((x,h).g\big) = \mathcal{P}(x,h.g) = x = \mathcal{P}$$

   olduğundan $\sigma$, $\mathcal{P}$ nin liflerini korur.

2. $x \in M$ ve $h \in G$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \Psi : M \times G &\longrightarrow M \times G \\ (x,h) &\longmapsto \Psi\big((x,h)\big) = (x,h) \end{aligned}$$

   şeklinde tanımlı $\Psi$ dönüşümü birim dönüşüm olduğundan bir difeomorfizmdir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \psi : M \times G &\longrightarrow G \\ (x,h) &\longmapsto h \end{aligned}$$

   dönüşümü de

$$\psi(p.g) \;=\; \psi\big((x,h).g\big) = \psi(x,h.g) = h.g = \psi(p).g$$

   eşitliğini sağlar.

□

**Teorem 3.31.** *$M$ düzgün manifold, $G$ bir Lie grubu ve $\{V_i\}_{i\in\mathcal{A}}$ $M$ nin açık örtüsü olsun. Her $i,j \in \mathcal{A}$, $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ olmak üzere $g_{ij} : V_i \cap V_j \to G$ düzgün dönüşümleri var ve bu dönüşümler $V_i \cap V_j \cap V_k \neq \emptyset$ iken her $x \in V_i \cap V_j \cap V_k$ için*

$$g_{ij}(x)g_{jk}(x) = g_{ik}(x)$$

*koşulunu sağlasın. Bu durumda $M$ üzerinde (denklik) dışında tek türlü belirli $G-$asli lif demeti inşaa edilebilir. Burada $V_i$ ler trivilizasyon komşulukları ve $g_{ij}$ ler trivilizasyon komşuluklarına karşılık gelen geçiş fonksiyonlarıdır [24].*

Yukarıdaki teorem kullanılarak herhangi bir $M$ manifoldu üzerinde aşağıdaki gibi pek çok asli lif demeti inşaa edilebilir [18]:

1. Herhangi bir $M$ manifoldu üzerinde $TM$ nin geçiş fonksiyonları $GL(n,\mathbb{R})$ de değer alır. Dolayısıyla $GL(n,\mathbb{R})$ asli lif demeti inşaa edilebilir ve $P_{GL(n,\mathbb{R})}$ ile gösterilir.

2. $M$ yönlendirilebilir manifold ise $M$ nin öyle bir kartlaması vardır ki $TM$ tanjant demetinin geçiş fonksiyonları $GL(n,R)^+$ da değer alır. Dolayısıyla bu geçiş fonksiyonları yardımıyla $GL(n,\mathbb{R})^+$ asli lif demeti inşaa edilebilir. Bu demet $P_{GL(n,\mathbb{R})^+}$ ile gösterilir.

3. $M$ Riemann manifoldu ise $M$ nin öyle bir kartlaması vardır ki $TM$ tanjant demetinin geçiş fonksiyonları $O(n)$ de değer alır. Bu yüzden bu geçiş fonksiyonları yardımıyla $O(n)$ asli lif demeti inşaa edilebilir. Bu demet $P_{O(n)}$ ile gösterilir.

4. $M$ yönlendirilebilir Riemann manifoldu ise $M$ nin öyle bir kartlaması vardır ki $TM$ tanjant demetinin geçiş fonksiyonları $SO(n)$ de değer alır. Bu yüzden bu geçiş fonksiyonları yardımıyla $SO(n)$ asli lif demeti inşaa edilebilir. Bu demet $P_{SO(n)}$ ile gösterilir.

5. $M$, $J$ kompleks yapıya sahip ise $M$ nin öyle bir kartlaması vardır ki $TM$ tanjant demetinin geçiş fonksiyonları $GL(n,\mathbb{C})$ grubunda değer alır. Bu yüzden bu geçiş fonksiyonları yardımıyla $GL(n,\mathbb{C})$ asli lif demeti inşaa edilebilir. Bu demet $P_{GL(n,\mathbb{C})}$ ile gösterilir.

6. $M$, $g$ Hermityen metriği ile donatılabiliyorsa, $M$ nin öyle bir kartlaması vardır ki $TM$ tanjant demetinin geçiş fonksiyonları $U(n)$ de değer alır. Bu yüzden bu geçiş fonksiyonları yardımıyla $U(n)$ asli lif demeti inşaa edilebilir. Bu demet $P_{U(n)}$ ile gösterilir.

**Tanım 3.32.** *$P$, $M$ üzerinde $G-$asli lif demeti olsun. $V \subset M$ için $s : V \to P$ düzgün fonksiyonu her $x \in V$ için $\mathcal{P} \circ s = Id_V$ koşulunu sağlıyorsa $s$ dönüşümüne $P$ asli lif demetinin bir kesiti denir.*

$\Psi : \mathcal{P}^{-1}(V) \to V \times G$, $P$, $G-$asli lif demeti üzerinde trivilizasyon ise $V$ üzerinde $s_V(x) = \Psi^{-1}(x, e)$ ile $s_V : V \to P$ bir lokal kesit tanımlanabilir. Bu durumda $s_V$ kesitine $\Psi$ lokal trivilizasyonuna karşılık gelen kesit denir.
Tersine $s_V : V \to P$ dönüşümü $P, G-$asli lif demetinin bir lokal kesiti ise, bu kesit $P$ nin bir lokal trivilizasyonunu belirler. $s_V$ kesitinin belirlediği
$\Psi^{-1} : V \times G \to \mathcal{P}^{-1}(V)$ trivilizasyonu, $\Psi^{-1}(x, g) = s(x).g$ şeklinde tanımlanır.
Asli lif demetinin tanımında ifade edilen $\sigma : P \times G \to P$ dönüşümü her $p \in P$ için $\sigma_p : G \to P$, $\sigma_p(g) = p.g$ şeklinde bir dönüşüm belirler [24].

**Tanım 3.33.** $\mathfrak{g}$, *$G$ Lie grubunun Lie cebiri olmak üzere $A \in \mathfrak{g}$ için $\sigma\big(A\big)(p) = \big(\sigma_p\big)_{*id}(A)$ ile tanımlanan $\sigma(A)$ vektör alanı, $A^{\#}$ ile gösterilir ve $P$ üzerindeki $A$ tarafından belirlenen temel vektör alanı olarak adlandırılır [24].*

**Tanım 3.34.** *[24] $P, M$ üzerinde düzgün $G-$asli lif demeti ve $\mathfrak{g}$, $G$ Lie grubunun Lie cebiri olsun. $\omega$, $P$ üzerinde düzgün $\mathfrak{g}-$değerli $1-$formu aşağıdaki iki koşulu sağlıyorsa, $\omega$ ya $P$ üzerinde $\mathfrak{g}-$değerli konneksiyon $1-$formu denir.*

1. *$\forall g \in G$ için*

$$(\sigma_g)^* \omega = ad_{g^{-1}} \circ \omega$$

*yani $\forall g \in G$, $p \in P$ ve $v \in T_{pg^{-1}}$ için*

$$\omega_p\big((\sigma_g)_{*pg^{-1}}(v)\big) = g^{-1} \omega_{pg^{-1}}(v) g$$

*dir.*

2. *$\forall A \in \mathfrak{g}$ için*

$$\omega(A^{\#}) = A$$

*yani $\forall A \in \mathfrak{g}$ ve $p \in P$ için*

$$\omega(A^{\#}(p)) = A$$

**Tanım 3.35.** *$\mathcal{P} : P \to X$ düzgün asli $G-$lif demeti ve $\omega$, $P$ üzerinde bir konneksiyon olsun. $\forall p \in P$ için $T_p(P) = Hor_p(P) \oplus Ver_p(P)$ dekomposizyonu geçerli olduğundan herhangi bir $v \in T_p(P)$ tanjant vektörü $v = v^H + v^V$ şeklinde tek türlü yazılabilir, burada $v^H \in Hor_p(P) = \{v \in T_p(P) : \omega_p(v) = 0\}$, $v$ nin yatay kısmı ve*

$v^H \in Ver_p(P) = \{v \in T_p(P) : \mathcal{P}_{*p}(v) = 0\}$, *v 'nin düşey kısmıdır.* $\omega$ *konneksiyonu G nin Lie cebiri* $\mathfrak{g}-$*değerli* $1-$*formudur ve dış türevi* $d\omega$, *P üzerinde* $\mathfrak{g}-$*değerli bir* $2-$*formdur. Her bir* $p \in \mathcal{P}$ *ve her* $v, v \in T_p(P)$ *için*

$$\Omega(p)(v,w) = \Omega_p(v,w) = (d\omega)_p(v^H, w^H)$$

*şeklinde tanımlı* $\Omega$ $\mathfrak{g}-$*değerli* $2-$*formuna* $\omega$ *nın eğriliği denir.*

### 3.5 Asosye Vektör Demeti

**Tanım 3.36.** *P, M manifoldu üzerinde* $G-$*asli lif demeti olsun.* $\rho : G \times V \to V$, *G grubunun V vektör uzayı üzerindeki etkisi olsun.* $P \times V/G$ *bölüm uzayı aşağıdaki denklik bağıntısı ile tanımlanır:*

$$(p,v) \sim \big(p.g, \rho(g^{-1})(v)\big)$$

*bu durumda*

$$\mathcal{P}_G : P \times V/G \to M$$

*diferensiyellenebilir ve örten dönüşümdür ve* $P \times V/G$ *ye M üzerinde* $\rho$ *ile belirli* $\mathcal{P} : P \to M$ *asli lif demetine karşılık gelen vektör demeti denir. Bazen* $P \times_\rho V$ *şeklinde de gösterilir.*

**Örnek 3.37.** *M yönlendirilmiş Riemann manifoldu üzerindeki* $P_{SO(n)}$ *asli lif demeti gözönüne alınırsa* $\rho_n : SO(n) \to Aut(\mathbb{R}^n)$ *standart temsil yardımıyla elde edilen* $P_{SO(n)} \times_{\rho_n} \mathbb{R}^n$ *asosye vektör demeti, TM tanjant demetine izomorftur.*

**Tanım 3.38.** $\rho : G \to Aut(V)$, *G grubunun V vektör uzayı üzerinde bir temsili ve P nin G grubu üzerinde etkisi verilsin.* $\phi : P \to V$ *dönüşümü her* $p \in P$ *ve* $g \in G$ *için*

$$\phi(pg) = \rho(g^{-1})\phi(p)$$

*koşulnu sağlıyorsa* $\phi$ *dönüşümüne* $G-$*equivaryant dönüşüm denir.* $P \times_\rho V$ *asosye vektör demetinin kesitleri ile* $P \to V$ *equivaryant dönüşümler arasında aşağıdaki ilişki vardır:*

**Yardımcı Teorem 3.39.** *$(P, M, G)$ asli lif demeti ve $\rho$ dönüşümü $G$ Lie grubunun $V$ vektör uzayı üzerine sol etkisi olmak üzere, $P \times_\rho V$ asosye vektör demeti olsun. Bu durumda $P \times_\rho V$ asosye vektör demetinin kesitleri ile $P \to V$ şeklindeki $G-$equivaryant düzgünth dönüşümler arasında bire-bir eşleme vardır.*

# 4 $Spin^c$ YAPISI VE SEIBERG−WITTEN DENKLEMLERİ

$M, n-$boyutlu yönlendirilebilir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda Spin$^c$ ve Spin−yapısı aşağıdaki gibi verilir:

$M$ yönlendirilebilir Riemann manifoldu olduğundan $M$ nin yapı grubu $SO(n)$ dir. O halde $M$ nin $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ açık örtüsüne bağlı olarak $TM$ Tanjant demetinin manifoldunun $\Big\{\big(\pi^{-1}(U_\alpha), \phi_\alpha\big)\Big\}$ demet kartları vardır. Bu kartlara karşılık gelen geçiş fonksiyonları da $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ iken

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to SO(n)$$

şeklindeki düzgün fonksiyonlardır. Buna ilaveten $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ iken

$$\widetilde{g}_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to Spin^c(n)$$

düzgün fonksiyonları aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde mevcut olsun:

1.
$$\begin{array}{rcl} \lambda : Spin^c(n) & \to & SO(n) \\ \Big([g,z]\Big) & \mapsto & \lambda\Big([g,z]\Big) := \lambda(g) \end{array}$$

burada $\lambda : Spin(n) \to SO(n)$ standart $2:1$ örtü dönüşümü olmak üzere

$$\begin{tikzcd} & Spin^c(n) \arrow[d, "\lambda"] \\ U_\alpha \cup U_\beta \arrow[ur, "\widetilde{g}_{\alpha\beta}"] \arrow[r, "g_{\alpha\beta}"'] & SO(n) \end{tikzcd}$$

diyagram değişmelidir. Yani $\lambda \circ \widetilde{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$ dir.

2.
$$U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset \text{ iken } \forall x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$$

için

$$\widetilde{g}_{\alpha\beta}(x) \circ \widetilde{g}_{\beta\gamma}(x) = \widetilde{g}_{\alpha\gamma}(x)$$

dir.

Bu durumda $M$ ye $Spin^c$ manifoldu denir. (Bazen $M$ manifoldu $Spin^c-$yapısına sahiptir denir.) $M$ $Spin^c$ manifoldu ise asli lif demeti kurma teoremini [24] kullanarak M üzerinde aşağıdaki gibi üç tane asli lif demeti inşaa edilebilir.

1. Eğer $g_{\alpha\beta}$ geçiş fonksiyonları kullanılırsa $P_{SO(n)} = \bigcup_\alpha U_\alpha \times SO(n)/\sim$ bölüm uzayı aşağıdaki denklik bağıntısı ile tanımlanır:

$$(\alpha, x, g) \sim (\beta, y, h) \Leftrightarrow \alpha = \beta, y = x, h = g_{\alpha\beta}(x)g.$$

   Bu durumda geçiş fonksiyonları $g_{\alpha\beta}$ ler olan bir $P_{SO(n)}$ asli $SO(n)$ lif demeti vardır ve denklik bakımından tektir.

2. Eğer $\widetilde{g}_{\alpha\beta}$ geçiş fonksiyonları kullanılırsa $P_{Spin^c(n)} = \bigcup_\alpha U_\alpha \times Spin^c(n)/\sim$ bölüm uzayı aşağıdaki denklik bağıntısı ile tanımlanır:

$$(\alpha, x, g) \sim (\beta, y, h) \Leftrightarrow \alpha = \beta, y = x, h = \widetilde{g}_{\alpha\beta}(x)g.$$

   Bu durumda geçiş fonksiyonları $\widetilde{g}_{\alpha\beta}$ ler olan bir $P_{Spin^c(n)}$ asli $Spin^c(n)$ lif demeti vardır ve denklik bakımından tektir.

3. Eğer

$$l_{\alpha\beta} = l \circ \widetilde{g}_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \xrightarrow{\widetilde{g}_{\alpha\beta}} Spin^c(n) \xrightarrow{l} S^1$$

   geçiş fonksiyonları kullanılırsa $P_{S^1} = \bigcup_\alpha U_\alpha \times S^1/\sim$ bölüm uzayı aşağıdaki denklik bağıntısı ile tanımlanır:

$$(\alpha, x, g) \sim (\beta, y, h) \Leftrightarrow \alpha = \beta, y = x, h = l_{\alpha\beta}(x)g = l \circ \widetilde{g}_{\alpha\beta}(x)g.$$

   Bu durumda geçiş fonksiyonları $l_{\alpha\beta}$ ler olan bir $P_{S^1}$ asli $S^1$ lif demeti vardır ve denklik bakımından tektir.

$M$ manifoldu üzerinde spinor demeti $\kappa_n : Spin^c(n) \to Aut(\Delta_n)$ spinor temsili yardımıyla $S = P_{Spin^c(n)} \times \Delta_n/\sim$ bölüm uzayı aşağıdaki denklik bağıntısı ile tanımlanır:

$$(p, v) \sim (p', v') \Leftrightarrow p' = p \cdot g, v' = \Big(\kappa_n(g)\Big)^{-1}(v).$$

Bu durumda $S = P_{Spin^c(n)} \times \Delta_n / \sim$ bölüm uzayı, asosye vektör demeti olarak tanımlanır ve $S = P_{Spin^c(n)} \times_{\kappa_n} \Delta_n$ ile gösterilir. $S$ ye Spinor demeti ve $S$ nin kesitlerine de $M$ üzerinde spinor alanları denir.
$M$ çift boyutlu iken $S$ spinor demeti, $S = S^+ \oplus S^-$ şeklinde ayrışır [12]. $\kappa_n$ spinor temsili yardımıyla elde edilen $S = P_{Spin^c(n)} \times_{\kappa_n} \Delta_n$ kompleks spinor demetidir. Buna göre $S^+ = P_{Spin^c(n)} \times_{\kappa_n^+} \Delta_n^+$ ve $S^- = P_{Spin^c(n)} \times_{\kappa_n^-} \Delta_n^-$ şeklinde ifade edilir. Ayrıca $n$ çift iken $k = \frac{n}{2}$ ve $n$ tek iken $k = \frac{n-1}{2}$ olmak üzere $S$ kompleks spinor demetinin kesitleri üzerinde aşağıdaki gibi $\Delta_n = \mathbb{C}^{2^k}$ boyutlu Hermityen iç çarpım tanımlanabilir [12].

$$
\begin{array}{rcl}
\big\langle , \big\rangle : \Gamma(S) \times \Gamma(S) & \to & \mathbb{C} \\
\Big( [p, \Psi], [p, \Phi] \Big) & \longmapsto & \big\langle \Psi, \Phi \big\rangle .
\end{array}
$$

$\forall\ [p.g, \kappa(g^{-1})\Psi], [p.g, \kappa(g^{-1})\Phi] \in \Gamma(S)$ için

$$
\begin{array}{rcl}
\big\langle [p.g, \kappa(g^{-1})\Psi], [p.g, \kappa(g^{-1})\Phi] \big\rangle & = & \big\langle \kappa(g^{-1})\Psi, \kappa(g^{-1})\Phi \big\rangle \ , \kappa(g^{-1}) \in U(\Delta_n) \ ile \\
& = & \big\langle \Psi, \Phi \big\rangle
\end{array}
$$

temsilciden bağımsız olduğundan $S$ spinor demeti üzerinde tanımlanan iç çarpım iyi tanımlıdır.

## 4.1 Bir Vektör Alanı ile Spinor Alanının Çarpımı

$$
\begin{array}{rclcl}
\kappa : \mathbb{R}^n & \to & End\big(\Delta_n\big) & & \\
v & \mapsto & \kappa(v) : \Delta_n & \longrightarrow & \Delta_n \\
& & \Psi & \longmapsto & \kappa(v)\Psi = v \cdot \Psi
\end{array}
$$

$\kappa$ temsili için $\kappa(v) : \Delta_n \to \Delta_n$ $\mathbb{R}-$lineer olduğu kolaylıkla görülür. Ayrıca $\kappa$ dönüşümü $\forall v \in \mathbb{R}^n$ için aşağıdaki özellikleri sağlar:

1. $\kappa(v)^* + \kappa(v) = 0$

2. $\kappa(v)^* \kappa(v) = |v|^2 \cdot \mathbb{I}$.

$\kappa$ dönüşümünü demet üzerindeki $\kappa : TM \to End\big(S\big)$ dönüşümüne genişletmek için

$$\begin{tikzcd}
 & Spin^c(n) \arrow[d, "\lambda"] \arrow[dr, "\rho_{st}\circ\lambda=\rho"] & \\
U_\alpha \cup U_\beta \arrow[ur, "\widetilde{g}_{\alpha\beta}"] \arrow[r, "g_{\alpha\beta}"'] & SO(n) \arrow[r, "\rho_{st}"'] & Aut(\mathbb{R}^n)
\end{tikzcd}$$

diyagramında

$$\rho : Spin^c(n) \xrightarrow{\lambda} SO(n) \xrightarrow{\rho_{st}} Aut(\mathbb{R}^n)$$

temsil olmak üzere, $TM = P_{Spin^c(n)} \times_\rho \mathbb{R}^n$ olduğundan tanjant vektörleri denklik sınıfları şeklinde de düşünülebilir.

$$\begin{array}{lll}
\kappa : TM & \to & End(S) \\
\big([p,v]\big) & \mapsto & \kappa\big([p,v]\big) : S \quad\quad\quad \to \; S \\
 & & \quad\quad\quad \big([p,\Psi]\big) \quad \mapsto \; \kappa\big([p,v]\big)([p,\Psi]) = [p, v\cdot\Psi]
\end{array}$$

dönüşümü iyi tanımlıdır [12].

Bazı kaynaklarda bu koşulları sağlayan $\kappa : TM \to End(S)$ dönüşümüne M manifoldu üzerinde $Spin^c-$yapısı olarak adlandırılır [27].

$\kappa : TM \to End(S)$ dönüşümü yardımıyla

$$\rho : \Lambda^2(T^*M) \to End(S)$$

dönüşümü çatılar üzerinde aşağıdaki gibi tanımlanır:

$U \subset M$ açık alt kümesi üzerinde $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ ortonormal çatı olmak üzere

$$\eta = \sum_{i<j} \eta_{ij} e^i \wedge e^j \to \rho(\eta) = \sum_{i<j} \eta_{ij} \kappa(e_i)\kappa(e_j)$$

dir. Bu dönüşüm aynı şekilde kompleks değerli $2-$formlara genişletilebilir [28]. Buna göre

$$\rho : \Lambda^2(T^*M) \otimes \mathbb{C} \to End(S).$$

Her bir $\eta \in \Lambda^2\big(T^*M\big)$ için $S^+$ ve $S^-$ alt demetleri $\rho(n)$ altında invaryanttır. Yani

$$\rho(\eta)(\Psi) \in S^+, \qquad \forall\Psi \in S^+$$
$$\rho(\eta)(\Psi) \in S^-, \qquad \forall\Psi \in S^-$$

Bu nedenle $\rho^+(\eta) = \rho(\eta)\big|_{S^+}$, $\rho^-(\eta) = \rho(\eta)\big|_{S^-}$ dönüşümleri elde edilir. Bu durumda

$$\rho^+ : \Lambda^2(T^*M) \otimes \mathbb{C} \to End(S^+)$$

dönüşümü

$$\rho^+(\eta) = \rho^+\Big(\sum_{i<j} \eta_{ij} e^i \wedge e^j\Big) = \sum_{i<j} \eta_{ij}\kappa(e_i)\kappa(e_j)$$

şeklinde ifade edilir.

Aşağıda ileriki bölümlerde Seiberg$-$Witten denklemlerinin ikincisi olan eğrilik denklemini ifade etmede kullanılacak olan $\sigma$ dönüşümü tanımlanacaktır.

$M$ manifoldu üzerinde, $\forall\Psi \in \Gamma(S)$ için

$$\begin{array}{rcl} \sigma : \Gamma(S) & \to & \Omega^2(M, i\mathbb{R}) \\ \Psi & \mapsto & \sigma(\Psi) \end{array}$$

dönüşümü, $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ için $\sigma(\Psi)(X,Y) = \big\langle X, Y\big\rangle|\Psi|^2 + \big\langle \kappa(X)\kappa(Y)\Psi, \Psi\big\rangle$ şeklinde tanımlanır ve $\sigma(\Psi)$ nin $i\mathbb{R}$ değerli $2-form$ olduğu aşağıda gösterilmiştir.

**Yardımcı Teorem 4.1.** $\Psi \in \Gamma(S)$ *için* $\sigma(\Psi)$*,* $\mathrm{i}\mathbb{R}$ *değerli bir* $2-$*formdur.*

*Kanıt.* 1. $\sigma(\Psi)$ nin alterne olduğunu gösterelim. $\forall X, Y \in \chi(M)$ ve $\big\langle , \big\rangle$, $S$ Spinor uzayı üzerinde Hermityen iç çarpım olmak üzere

$$\begin{aligned} \sigma(\Psi)(X,Y) &= \big\langle X, Y\big\rangle|\Psi|^2 + \big\langle \kappa(X)\kappa(Y)\Psi, \Psi\big\rangle \\ &= \big\langle X, Y\big\rangle|\Psi|^2 + \big\langle (-Y \cdot X - 2 < X, Y >)\Psi, \Psi\big\rangle \\ &= \big\langle X, Y\big\rangle|\Psi|^2 - \big\langle Y \cdot X \cdot \Psi, \Psi\big\rangle - 2\big\langle X, Y\big\rangle|\Psi|^2 \\ &= -\big\langle X, Y\big\rangle|\Psi|^2 - \big\langle Y \cdot X \cdot \Psi, \Psi\big\rangle \\ &= -\sigma(\Psi)(Y, X) \end{aligned}$$

O halde $\sigma(\psi)$ alternedir.

2. $\sigma(\Psi)$ nin bilineerliğini gösterelim. $\forall p \in M$ ve $X, Y \in \chi(M)$ için

$f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\sigma(\Psi)(fX,Y)(p) &= \big\langle fX, Y\big\rangle |\Psi|^2(p) + \big\langle \kappa(fX)\kappa(Y)\Psi, \Psi\big\rangle(p) \\
&= f(p)\big\langle X_p, Y_p\big\rangle |\Psi_p|^2 + f(p)\big\langle \kappa(X_p)\kappa(Y_p)\Psi_p, \Psi_p\big\rangle \\
&= f(p)\big\langle X_p, Y_p\big\rangle |\Psi_p|^2 + f(p)\big\langle \kappa(X_p)\kappa(Y_p)\Psi_p, \Psi_p\big\rangle \\
&= f(p)\big\langle X_p, Y_p\big\rangle |\Psi_p|^2 + \big\langle \kappa(X_p)\kappa(Y_p)\Psi_p, \Psi_p\big\rangle \\
&= f(p)\big(\big\langle X, Y\big\rangle |\Psi|^2 + \big\langle \kappa(X)\kappa(Y)\Psi, \Psi\big\rangle\big)(p) \\
&= \big(f\big\langle X, Y\big\rangle |\Psi|^2 + \big\langle \kappa(X)\kappa(Y)\Psi, \Psi\big\rangle\big)(p) \\
&\Leftrightarrow \sigma(\Psi)(fX,Y) = f\sigma(\Psi)(X,Y)
\end{aligned}$$

$\sigma(\Psi)(X+X', Y) = \sigma(\Psi)(X,Y) + \sigma(\Psi)(X', Y)$ olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Benzer yolla ikinci bileşene göre $\sigma(\Psi)$ nin lineer olduğu gösterilebilir.

3. $\sigma(\psi)$, i$\mathbb{R}$ değerlidir.

$$\begin{aligned}
\overline{\sigma(\Psi)(X,Y)} &= \big\langle X, Y\big\rangle |\Psi|^2 + \overline{\big\langle \kappa(X)\kappa(Y)\Psi, \Psi\big\rangle} \\
&= \big\langle X, Y\big\rangle |\Psi|^2 + \big\langle \Psi, X \cdot Y \cdot \Psi\big\rangle \\
&= \big\langle X, Y\big\rangle |\Psi|^2 + \big\langle Y \cdot X \cdot \Psi, \Psi\big\rangle \\
&= \sigma(\Psi)(Y,X) \\
&= -\sigma(\Psi)(X,Y)
\end{aligned}$$

$\forall p \in M$ ve $X, X', Y \in \chi(M)$ için $\sigma(\Psi)$ bilineer ve alterne olduğundan i$\mathbb{R}$ değerli $2-$formdur.

$\square$

## 4.2 $S$ Spinor Demeti Üzerinde $\nabla^A$ Kovaryant Türev Operatörünün Belirlenmesi

$\big(M, g\big)$ Riemann manifoldundaki $\nabla^g$ Levi-Civita konneksiyonu yardımıyla $P_{SO(n)}$ asli lif demetinin üzerinde $\omega$ $1-$formu belirlendikten sonra, $P_{S^1}$ üzerindeki sabit $A \in \Omega^1\big(M, i\mathbb{R}\big)$ konneksiyon $1-$formu yardımıyla $P_{Spin^c(n)}$ üzerinde, aşağıdaki diyagramı değişmeli yapacak şekilde $Z^A$ konneksiyon $1-$formu aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\begin{tikzcd}
T_p P_{Spin^c(n)} \arrow[r, "Z^A"] \arrow[d, "d\pi"] & \mathfrak{spin}(n) \oplus \mathrm{i}\mathbb{R} \arrow[d, "\lambda_* \times l_*"] \\
T_{\pi(p)}\big(P_{SO(n)} \times P_{S^1}\big) \arrow[r, "\omega \times A"'] & \mathfrak{so}(n) \oplus \mathrm{i}\mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

$p \in P_{Spin^c(n)}$ ve $v \in T_p P_{Spin^c(n)}$ için

$$Z^A(v) = (\lambda_* \times l_*)^{-1} \circ (\omega \times A) \circ d\pi(v)$$

$Z^A$ konneksiyon $1-$formu yardımıyla $S = P_{Spin^c(n)} \times_{\kappa_n} \Delta_n$ spinor demeti üzerindeki $\nabla^A$ kovaryant türev operatörü $\forall \Psi \in \Gamma\big(S\big),\ X \in \mathfrak{X}\big(M\big)$ için aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\nabla^A_X \Psi = d\Psi(X) + \tfrac{1}{2} \sum_{i<j} \omega_{ij}(X) e_i e_j(\Psi) + \tfrac{1}{2} A \cdot X.$$

Bazı kaynaklarda $\frac{1}{2}A$ yerine $A$ alarak formül ifade edilir [4, 27]. Ayrıca $A \in \Omega^1\big(M, i\mathbb{R}\big)$ $i\mathbb{R}-$değerli $1-$formu ve $M$ deki Levi$-$Civita ile $S$ spinor demeti üzerinde $\forall \Psi \in \Gamma\big(S\big),\ X,\ Y \in \mathfrak{X}\big(M\big)$ için

$$\nabla^A_X\big(\kappa(Y)\Psi\big) = \kappa(Y)\nabla^A_X \Psi + \kappa(\nabla_X Y)\Psi,$$

koşulunu sağlar.

## 4.3 Dirac Operatörü $D_A$

$\kappa : \mathbb{R}^n \to End\big(\Delta_n\big)$ lineer dönüşümü $\mu_0 : \mathbb{R}^n \times \Delta_n \to \Delta_n$ bilineer dönüşümü belirler. $\mu_0$ dönüşümü bilineer olduğundan bu dönüşüm tensör çarpımının evrensellik özelliğinden $\mu_0 : \mathbb{R}^n \otimes \Delta_n \to \Delta_n$ şeklinde lineer dönüşüme genişler. Bu dönüşüm de

$$\begin{aligned} \mu : TM \otimes S \quad &\longrightarrow \quad S \\ \big([p,v],[p,\Psi]\big) \quad &\longmapsto \quad [p, \mu_0(v \otimes \Psi)] \end{aligned}$$

demet dönüşümü belirler.

$\big(M, g\big)$ Riemann manifoldu üzerindeki Dirac operatörü aşağıdaki gibi

$$D_A = \mu \circ \nabla^A : \Gamma\big(S\big) \xrightarrow{\nabla^A} \Gamma\big(T^*M \otimes S\big) \overset{g}{\cong} \Gamma\big(TM \otimes S\big) \xrightarrow{\mu} \Gamma\big(S\big)$$

bileşke işlemi ile tanımlanır. Burada $T^*M$ ve $TM$ arasındaki geçiş g metriği ile yapılır.

$M$ manifoldu üzerinde $U \subset M$ açık alt kümesi olmak üzere, $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ yerel ortonormal çatı verildiğinde Dirac operatörünün yerel ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{array}{ccccc} D_A : \Gamma(S) & \xrightarrow{\nabla^A} & \Gamma(T^*M \otimes S) & \overset{g}{\cong} & \Gamma(TM \otimes S) \\ \Psi & \longmapsto & D^A(\Psi) = \sum\limits_{i=1}^{n} e_i^* \otimes \nabla_{e_i}^A \Psi & \longmapsto & \sum\limits_{i=1}^{n} e_i \otimes \nabla_{e_i}^A \Psi \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(TM \otimes S) & \xrightarrow{\mu} & \Gamma(S) \\ \sum\limits_{i=1}^{n} e_i \otimes \nabla_{e_i}^A \Psi & \longmapsto & \sum\limits_{i=1}^{n} \kappa(e_i) \nabla_{e_i}^A \Psi = \sum\limits_{i=1}^{n} e_i \cdot \nabla_{e_i}^A \Psi \end{array}$$

Yani, Dirac operatörünün çatı yardımıyla lokal ifadesi aşağıdaki şekilde verilebilir:

$$D_A \Psi = \sum_{i=1}^{n} e_i . \nabla_{e_i}^A . \Psi .$$

Dirac operatörü, $M$ manifoldun boyutunun çift olması durumunda

$$D_A = D_A^+ \oplus D_A^-$$

şeklinde dekompoze olur.

## 4.4 4−Boyutta Seiberg−Witten Denklemleri

4− boyutlu $M$ Riemann manifoldu üzerinde

$$\begin{aligned} * : \Omega^2\big(M\big) &\to \Omega^2\big(M\big) \\ \omega &\mapsto *(\omega) \end{aligned}$$

Hodge−Star dönüşümü yardımıyla 2−formların uzayı

$$\Omega^2\big(M\big) = \Omega^{2,+}\big(M\big) \oplus \Omega^{2,-}\big(M\big)$$

olacak şekilde dekompoze olur. Bu dekomposizyon

$$\Omega^2\big(M, i\mathbb{R}\big) = \Omega^{2,+}\big(M, i\mathbb{R}\big) \oplus \Omega^{2,-}\big(M, i\mathbb{R}\big)$$

ayrışımı için de yazılabilir. Ayrıca

$$F_A \in \Omega^2\big(M, i\mathbb{R}\big) = \Omega^{2,+}\big(M, i\mathbb{R}\big) \oplus \Omega^{2,-}\big(M, i\mathbb{R}\big)$$

ayrışımında $F_A$ nın $\Omega^{2,+}\big(M, i\mathbb{R}\big)$ ye giren kısmı, $F_A$ nın self−dual kısmı olarak adlandırılacak ve $F_A^+$ ile gösterilecektir.

Şimdi $\psi_1$ ve $\psi_2 \in \mathbb{C}$ için Seiberg−Witten denklemlerinden ikincisini tanımlamakta kullanılacak olan $\Psi\Psi^*$ ın izsiz kısmı $(\Psi\Psi^*)_0$ ifade edilecektir. Öncelikle

$$\Psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}_{2\times 1}, \qquad \Psi^* = [\overline{\psi_1}\ \overline{\psi_2}]_{1\times 2}$$

matrisleri yardımıyla:

$$\Psi\Psi^* = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\psi_1} & \overline{\psi_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1\overline{\psi_1} & \psi_1\overline{\psi_2} \\ \psi_2\overline{\psi_1} & \psi_2\overline{\psi_2} \end{bmatrix} \in End(\Delta_4^+)$$

elde edilir. Daha sonra $\Psi\Psi^*$ aşağıdaki eşitlikte yerine yazılırsa:

$$\begin{aligned} (\Psi\Psi^*)_0 &= \Psi\Psi^* - \tfrac{1}{2} trace(\Psi\Psi^*)\mathbb{I}_{2\times 2} \\ &= \begin{bmatrix} \psi_1\overline{\psi_1} & \psi_1\overline{\psi_2} \\ \psi_2\overline{\psi_1} & \psi_2\overline{\psi_2} \end{bmatrix} - \tfrac{1}{2}(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ (\Psi\Psi^*)_0 &= \begin{bmatrix} \frac{|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2}{2} & \psi_1\overline{\psi_2} \\ \psi_2\overline{\psi_1} & \frac{|\psi_2|^2 - |\psi_1|^2}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Yukarıda elde edilenlerle birlikte, $4-$boyutlu $M$ manifoldları üzerinde Seiberg$-$Witten denklemleri $\Psi \in \Gamma(S^+)$ ve $A$, $i\mathbb{R}$ değerli konneksiyon $1-$formu için

1. $D_A^+\Psi = 0$

2. $\rho^+\big(F_A^+\big) = \big(\Psi\Psi^*\big)_0$

şeklinde ifade edilir [11, 12, 29]. Bu denklemlerin ilkine Dirac denklemi, ikincisine ise eğrilik denklemi denir.

Aşağıdaki bölümde $M = \mathbb{R}^4$ durumunda Seiberg$-$Witten denklemleri verilmiştir [11, 12, 29].

### 4.4.1 $\mathbb{R}^4$ üzerinde Seiberg$-$Witten denklemleri

$4-$ boyutlu Riemann manifoldları için kompleks $4-$spinorların vektör uzayı da $4-$boyutludur ve $\Delta_4 = \mathbb{C}^4$ ile gösterilir. $\mathbb{C}l_4 \cong End(\Delta_4)$ olduğundan $\mathbb{C}l_4$ kompleks Clifford cebirinin spin temsili $\kappa_4$ aşağıdaki şekilde verilir:

$$\kappa_4 : \mathbb{C}l_4 \to End(\Delta_4)$$

$$\kappa_4(e_1) = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{bmatrix}, \qquad \kappa_4(e_2) = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_1 \\ -(\gamma_1)^* & 0 \end{bmatrix}$$

$$\kappa_4(e_3) = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_2 \\ -(\gamma_2)^* & 0 \end{bmatrix}, \qquad \kappa_4(e_4) = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_3 \\ -(\gamma_3)^* & 0 \end{bmatrix}$$

Burada $\mathbb{I}$, $2 \times 2$ lik birim matristir ve $i = 1, 2, 3$ için $\gamma_i$ matrisleri aşağıdaki gibidir:

$$\gamma_1 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \qquad \gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \gamma_3 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

$i = 1, 2, 3$ için $\gamma_i$ matrisleri $\mathbb{C}l_4 \cong End(\mathbb{C}^4)$ izomorfizması altında $\mathbb{C}l_2$ kompleks cebirinin üreteçlerinin görüntüleridir. Burada kullanılan izomorfizm $\mathbb{C}l_{n+2} \cong \mathbb{C}l_n \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(2)$ indirgeme formülünden elde edilebilir [12].

$\kappa_4 : \mathbb{C}l_4 \to End(\Delta_4)$ spinor temsili yardımıyla

$$\Delta_4^+ = \big\{\Psi = \big(\psi_1, ..., \psi_4\big) \in \mathbb{C}^4 | \psi_3 = \psi_4 = 0\big\} \cong \mathbb{C}^2$$

ve

$$\Delta_4^- = \big\{\Psi = (\psi_1, ..., \psi_4) \in \mathbb{C}^4 | \psi_1 = \psi_2 = 0\big\} \cong \mathbb{C}^2$$

olmak üzere

$$\Delta_4 = \Delta_4^+ \oplus \Delta_4^-$$

dekomposizyonu elde edilir. Böylece $\Psi \in \Gamma\big(S^+\big)$ ve $A \in \Omega^1\big(M, i\mathbb{R}\big)$ konneksiyon $1-$formu için $D_A^+$ Dirac operatörü

$$\begin{array}{rcl} D_A^+ : \Gamma\big(S^+\big) & \to & \Gamma\big(S^-\big) \\ \Psi & \mapsto & D_A^+\Psi = \sum\limits_{i=1}^{4} e_i \cdot \nabla_{e_i}^A \Psi \end{array}$$

olur. Lokal koordinatlarda $A$ konneksiyon $1-$formu $A_i : \mathbb{R}^4 \to i\mathbb{R}$ fonksiyonları düzgün olmak üzere

$$A = \sum_{i=1}^{4} A_i dx^i$$

şeklinde ifade edilir. O halde $A$ nın eğriliği $F_A$, $F_{ij} = \Big(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j}\Big)$, $1 \leq i < j \leq 4$ için aşağıdaki gibi

$$F_A = dA = \sum_{i<j} F_{ij} dx^i \wedge dx^j \in \Omega^2\big(M, \mathrm{i}\mathbb{R}\big) \tag{4.1}$$

ifade edilir.

$\Psi \in \Gamma(\Delta_4^+)$ spinorunun $\nabla^A\Psi$ kovaryant türevi $\omega_{ij} = g(\nabla e_i, e_j)$ olmak üzere

$$\nabla^A\Psi = d\Psi + \tfrac{1}{2}\sum_{i<j} \omega_{ij} e_i e_j \Psi + \tfrac{1}{2} A\Psi$$

olur. Burada $\omega_{ij} = g\big(\nabla e_i, e_j\big)$ ifadesinde geçen $\nabla$ konneksiyonu manifold üzerindeki Levi$-$Civita konneksiyonudur. Dikkat edilirse $\mathbb{R}^4$ üzerindeki $\omega_{ij}$ ler Riemann metriğine göre sıfırdır. O halde $\nabla_{e_i}^A\Psi$ kovaryant türevinin lokal ifadesi

$$\nabla_{e_i}^A \Psi \;=\; \Big(d\Psi + \tfrac{1}{2}A\Psi\Big)(e_i) \;=\; d\Psi(e_i) + \tfrac{1}{2}A\Psi(e_i)$$

şeklinde ifade edilir.

$$d\Psi(e_i) = \begin{bmatrix} d\psi_1 \\ d\psi_2 \end{bmatrix}(e_i) \;=\; \begin{bmatrix} d\psi_1(e_i) \\ d\psi_2(e_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial x_i} \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial x_i} \end{bmatrix}$$

ve

$$\frac{1}{2}A\Psi(e_i) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} A_i dx^i(e_i)\Psi = \frac{1}{2}A_i\Psi,$$

olduğundan

$$\nabla^A_{e_i}\Psi = \begin{bmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial x_i} \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial x_i} \end{bmatrix} + \tfrac{1}{2}A_i \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \quad = \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial x_i} + \frac{1}{2}A_i\psi_1 \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial x_i} + \frac{1}{2}A_i\psi_2 \end{bmatrix}$$

olarak yazılabilir. Yukarıda verilenlere göre $D^+_A : \Gamma(\Delta^+_4) \to \Gamma(\Delta^-_4)$ Dirac operatörü

$$\begin{aligned} D^+_A\Psi &= \sum_{i=1}^{4} e_i \cdot \nabla^A_{e_i}\Psi = \sum \kappa_4(e_i)\big(\nabla^A_{e_i}\Psi\big) \\ &= \sum_{i=1}^{4} \kappa_4(e_i) \begin{bmatrix} \frac{\partial d\psi_1}{\partial x_i} + \frac{1}{2}A_i\psi_1 \\ \frac{\partial d\psi_2}{\partial x_i} + \frac{1}{2}A_i\psi_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olur ve $D^+_A\Psi = 0$ denkleminin açık hali aşağıdaki gibi

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2}A_1\psi_1 &= i\Big(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2} + \frac{1}{2}A_2\psi_1\Big) + \frac{\partial\psi_2}{\partial x_3} + \frac{1}{2}A_3\psi_2 + i\Big(\frac{\partial\psi_2}{\partial x_4} + \frac{1}{2}A_4\psi_2\Big), \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial x_1} + \frac{1}{2}A_1\psi_2 &= -i\Big(\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2}A_2\psi_2\Big) - \frac{\partial\psi_1}{\partial x_3} - \frac{1}{2}A_3\psi_1 + i\Big(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_4} + \frac{1}{2}A_4\psi_1\Big), \end{aligned}$$

elde edilir. $F^+_A$, $F_A$ nın self$-$dual kısmı olmak üzere Seiberg$-$Witten denklemlerinin ikincisi

$$\rho^+(F^+_A) = \big(\Psi\Psi^*\big)_0,$$

aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} F_{12} + F_{34} &= -\tfrac{i}{2}\big(\psi_1\overline{\psi_1} - \psi_2\overline{\psi_2}\big), \\ F_{13} - F_{24} &= \tfrac{1}{2}\big(\psi_1\overline{\psi_2} - \psi_2\overline{\psi_1}\big), \\ F_{14} + F_{23} &= -\tfrac{i}{2}\big(\psi_1\overline{\psi_2} + \psi_2\overline{\psi_1}\big). \end{aligned}$$

Aşağıdaki bölümde Hiperbolik metriğe bağlı olarak Seiberg$-$Witten denklemlerinin açık ifadeleri elde edilmiştir.

### 4.4.2 $\mathbb{H}^4$ üzerinde Seiberg$-$Witten denklemleri

$\mathbb{R}^4$ üzerinde standart metriğe bağlı olarak $\omega_{ij} = g(\nabla e_i, e_j)$ konneksiyon $1-$formu 0 olduğundan $\nabla^A\Psi = d\Psi + \frac{1}{2}A\Psi$ şeklinde ifade edilmişti. Fakat $\mathbb{H}^4$ üzerinde durum farklıdır. $\mathbb{H}^4$ üzerinde konneksiyon $1-$ formu sıfırdan farklı olduğundan $\nabla^A\Psi = d\Psi + \frac{1}{2}\sum_{i<j}\omega_{ij}e_ie_j\Psi + \frac{1}{2}A\Psi$ formunu alır.

$\mathbb{R}^4$ üzerinde Hiperbolik metriğe göre elde edilen $\omega_{ij}$ konneksiyon formları ve $\kappa_4$ Spin$^c$ temsili yardımıyla $D_A^+\Psi = 0$ denkleminin açık ifadesi:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}x_4 + \frac{1}{2}A_1\psi_1 x_4 &= i\Big(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2} + \frac{1}{2}A_2\psi_1\Big)x_4 + \frac{\partial\psi_2}{\partial x_3}x_4 + \frac{1}{2}A_3\psi_2 x_4 \\
&\quad + i\Big(\frac{\partial\psi_2}{\partial x_4} + \frac{1}{2}A_4\psi_2\Big)x_4 + \frac{3i}{2}\psi_2, \\
\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}x_4 + \frac{1}{2}A_1\psi_2 x_4 &= -i\Big(\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2}A_2\psi_2\Big)x_4 - \frac{\partial\psi_1}{\partial x_3}x_4 - \frac{1}{2}A_3\psi_1 x_4 \\
&\quad + i\Big(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_4} + \frac{1}{2}A_4\psi_1\Big)x_4 - \frac{3i}{2}\psi_1.
\end{aligned}$$

Seiberg$-$Witten denklemlerinin ikincisi

$$\rho^+(F_A^+) = \big(\Psi\Psi^*\big)_0$$

olan eğrilik denkleminin açık ifadesi :

$$\begin{aligned}
F_{12} + F_{34} &= -\frac{i}{2x_4^2}\big(|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2\big), \\
F_{13} - F_{24} &= \frac{1}{2x_4^2}\big(\psi_1\overline{\psi_2} - \psi_2\overline{\psi_1}\big), \\
F_{14} + F_{23} &= -\frac{i}{2x_4^2}\big(\psi_1\overline{\psi_2} + \psi_2\overline{\psi_1}\big).
\end{aligned}$$

şeklindedir.

# 5 YÜKSEK BOYUTLARDA SEIBERG−WITTEN DENKLEMLERİ

## 5.1 5−Boyutta Seiberg−Witten Denklemleri

Seiberg-Witten denklemlerinin ilki olan Dirac denklemi $D_A\Psi = 0$ lineerdir ve herhangi boyuttaki herhangi bir Spin$^c$ yapısı için anlamlı olmasına karşın, bu denklemlerden ikincisini ifade etmekte kullanılan Hodge anlamında kendine duallik sadece 4−boyutta anlamlıdır. 4−boyutta tanımlanan Hodge anlamında kendine dualliğin yüksek boyutta doğal bir genellemesi olmadığından bu bölümde [3, 9] de belirlenen kendine duallik kavramını kullanılarak, 5−boyutlu manifoldlar üzerinde [9] da tanımlanan Spin$^c$−yapısı ile Seiberg−Witten denklemlerinin ikincisi olan eğrilik denklemine karşılık gelen denklem kümesine alternatif bir formül verilecektir. Fakat alternatif formül ifade edilmeden önce Seiberg−Witten denklemlerinin ifadesinde gerekecek aşağıdaki temel tanım ve kavramlar verilecektir. 5−boyutlu yönlendirilebilir Riemann manifoldun yapı grubu SO(5) olduğundan, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ açık örtüsü ve
$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to SO(5)$ geçiş fonksiyonları vardır.

Eğer aşağıdaki gibi geçiş fonksiyonlarının diğer bir kolleksiyonu mevcut

$$\widetilde{g}_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow Spin^c(5)$$

ve aşağıdaki diyagramı değişmeli yapıyor ise

$$\begin{tikzcd}
 & Spin^c(5) \arrow[d, "\lambda"] \\
U_\alpha \cup U_\beta \arrow[ur, "\widetilde{g}_{\alpha\beta}"] \arrow[r, "g_{\alpha\beta}"'] & SO(5)
\end{tikzcd}$$

yani

$$\lambda \circ \widetilde{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}.$$

ve $\forall x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ için $\widetilde{g}_{\alpha\beta}(x) \circ \widetilde{g}_{\beta\gamma}(x) = \widetilde{g}_{\alpha\gamma}(x)$ koşulu sağlanıyorsa $M$ manifolduna Spin$^c$ manifoldu denir. Spin$^c$−yapısına sahip bir manifold üzerinde ise spinor demeti inşaa edilebilir. Spinor demetinin üzerinde de Dirac operatörü tanımlanabilir. Ancak eğrilik denklemini yazabilmek için 5−boyutlu durumda bir 2−formun self−dualliği kavramına ihtiyaç vardır. Bu ise 5−boyutlu kontakt metrik manifoldlar üzerinde tanımlanır [3,9]. $(M, g, \Phi)$ kontakt metrik manifoldu üzerinde $\Omega^2(M)$ 2−formların uzayı, $\Phi$ kontakt 1−form yardımıyla aşağıdaki şekilde dekompoze olur. $\Omega^2\big(M\big) = \Omega_3^{2,-1}\big(M\big) \oplus \Omega_4^{2,0}\big(M\big) \oplus \Omega_3^{2,1}\big(M\big)$ şeklinde bir ayrışımı vardır. Burada

$$\begin{aligned}
\Omega_3^{2,1}\big(M\big) &= \Big\{\omega \in \Omega^2\big(M\big) \,|\, *\big(\Phi \wedge \omega\big) = \omega\Big\} \\
\Omega_3^{2,-1}\big(M\big) &= \Big\{\omega \in \Omega^2\big(M\big) \,|\, *\big(\Phi \wedge \omega\big) = -\omega\Big\} \\
\Omega_4^{2,0}\big(M\big) &= \Big\{\omega \in \Omega^2\big(M\big) \,|\, *\big(\Phi \wedge \omega\big) = 0_\omega\Big\}
\end{aligned}$$

dir. Bu çalışmada [3,9] da olduğu gibi $\Omega_3^{2,1}\big(M\big)$, 2−formların self-dual uzayı olarak göz önüne alınacaktır . Ayrıca $i\mathbb{R}$ değerli 2-formların dekomposizyonu da aşağıdaki gibi yazılabilir

$$\Omega^2\big(M, i\mathbb{R}\big) = \Omega_3^{2,-1}\big(M, i\mathbb{R}\big) \oplus \Omega_4^{2,0}\big(M, i\mathbb{R}\big) \oplus \Omega_3^{2,1}\big(M, i\mathbb{R}\big).$$

$F_A$ nın $\Omega_3^{2,1}\big(M, i\mathbb{R}\big)$ ye düşen parçasına $F_A$ nın self−dual kısmı denir ve $F_A^+$ ile gösterilir. Yani

$$F_A^+ = Proj_{\Omega_3^{2,1}\left(M, i\mathbb{R}\right)} F_A$$

dır. Şimdi daha önce tanımladığımız

$$\begin{aligned}
\rho : \Omega^2\big(M, i\mathbb{R}\big) &\to End(S) \\
\eta &\mapsto \rho(\eta) = \sum_{i<j} \eta_{ij}\kappa(e_i)\kappa(e_j)
\end{aligned}$$

dönüşümü yardımı ile $\rho\Big(\Omega_3^{2,1}\big(M, i\mathbb{R}\big)\Big) = W' \subset End\big(S\big)$ alt demetini alalım. Ayrıca $\Psi\Psi^*$ ın $W'$ üstüne dik izdüşümü $\big(\Psi\Psi^*\big)^+ = Proj_{W'}\big(\Psi\Psi^*\big)$ olsun. Buna göre 5−boyutlu $(M, g, \Phi)$ kontakt metrik manifoldu üzerindeki Seiberg−Witten denklemleri:

1. $D_A(\Psi) = 0$

2. $\rho(F_A^+) = (\Psi\Psi^*)^+$

şeklinde ifade edilmiştir [9]. [9] da ele alınan çalışmada 5−boyutta Seiberg−Witten denklemleri aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

### 5.1.1 5−boyutta denklemlerin lokal ifadeleri

5−boyutlu manifoldlar için kompleks 5−spinorların vektör uzayı 4−boyutludur ve $\Delta_5 = \mathbb{C}^4$ ile gösterilir. $\mathbb{C}l_5 \cong End\big(\Delta_5\big) \oplus End\big(\Delta_5\big)$ olduğundan $\mathbb{C}l_5$ kompleks Clifford cebirinin spin temsili $\kappa_5$ aşağıdaki şekilde verilir:

$$\kappa_5 : \mathbb{C}l_5 \to End\big(\Delta_5\big)$$

$$\kappa(e_1) = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{bmatrix}, \quad \kappa(e_2) = \begin{bmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \quad \kappa(e_3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\kappa(e_4) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \kappa(e_5) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Burada $\kappa(e_i), i = 1, ..., 5$ matrisleri $\mathbb{C}l_5 \cong End\big(\Delta_5\big) \oplus End\big(\Delta_5\big)$ izomorfizmi altında $\mathbb{C}l_5$ cebirinin üreteçlerinin görüntülerinin birinci izdüşüm dönüşümü altındaki görüntüleridir. $n = 5$ durumunda $\Psi \in \Gamma\big(S\big)$ ve $A \in \Omega^1\big(M, i\mathbb{R}\big)$ konneksiyon 1−formu için Dirac operatörü

$$\begin{aligned} D_A : \Gamma\big(S\big) &\to \Gamma\big(S\big) \\ \Psi &\mapsto D_A\Psi = \sum_{i=1}^{5} e_i \cdot \nabla^A_{e_i}\Psi \end{aligned}$$

olur. Lokal koordinatlarda $A$ konneksiyon 1−formu $A_i : \mathbb{R}^5 \to i\mathbb{R}$ düzgün olmak üzere

$$A = \sum_{i=1}^{5} A_i dx^i$$

şeklinde ifade edilebilir. O halde $A$ nın eğriliği $F_A$, $F_{ij} = \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right)$, $1 \leq i < j \leq 5$ için aşağıdaki gibi

$$F_A = dA = \sum_{i<j} F_{ij} dx^i \wedge dx^j \in \Omega^2\big(M, \mathrm{i}\mathbb{R}\big) \tag{5.2}$$

ifade edilir.

$\Psi \in \Gamma\big(S\big)$ spinorunun $\nabla^A\Psi$ kovaryant türevi $\omega_{ij} = g\big(\nabla e_i, e_j\big)$ olmak üzere

$$\nabla^A\Psi = d\Psi + \tfrac{1}{2}\sum_{i<j} \omega_{ij} e_i e_j \Psi + \tfrac{1}{2} A\Psi$$

olur. Burada $\omega_{ij} = g\big(\nabla e_i, e_j\big)$ ifadesinde geçen $\nabla$ konneksiyonu manifold üzerindeki Levi−Civita konneksiyonudur. Dikkat edilirse $\mathbb{R}^5$ üzerinde $\omega_{ij}$ ler Riemann metriği altında sıfırdır. $e_i$ yönünde $\Psi$ spinorunun $\nabla^A_{e_i}\Psi$ kovaryant türevinin lokal ifadesi

$$\nabla^A_{e_i}\Psi \quad = \quad \Big(d\Psi + \tfrac{1}{2}A\Psi\Big)(e_i) \quad = \quad d\Psi(e_i) + \tfrac{1}{2}A\Psi(e_i)$$

şeklindedir.

$$d\Psi(e_i) = \begin{bmatrix} d\psi_1 \\ d\psi_2 \\ \vdots \\ d\psi_4 \end{bmatrix} (e_i) \quad = \quad \begin{bmatrix} d\psi_1(e_i) \\ d\psi_2(e_i) \\ \vdots \\ d\psi_4(e_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial \psi_4}{\partial x_i} \end{bmatrix}$$

ve

$$\frac{1}{2}A\Psi(e_i) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{5} A_i dx^i(e_i)\Psi = \frac{1}{2}A_i\Psi,$$

olduğundan

$$\nabla^A_{e_i}\Psi = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial \psi_4}{\partial x_i} \end{bmatrix} + \tfrac{1}{2}A_i \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_4 \end{bmatrix} \quad = \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} + \frac{1}{2}A_i\psi_1 \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x_i} + \frac{1}{2}A_i\psi_2 \\ \vdots \\ \frac{\partial \psi_4}{\partial x_i} + \frac{1}{2}A_i\psi_4 \end{bmatrix}$$

olarak yazılabilir. Yukarıda verilenlere göre $D_A : \Gamma\big(S\big) \to \Gamma\big(S\big)$ Dirac operatörü

$$\begin{aligned} D_A\Psi \quad &= \quad \sum_{i=1}^{5} e_i \cdot \nabla^A_{e_i}\Psi = \sum_{i=1}^{5} \kappa_5(e_i)\big(\nabla^A_{e_i}\Psi\big) \\ &= \quad \sum_{i=1}^{5} \kappa_5(e_i) \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} + \frac{1}{2}A_i\psi_1 \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x_i} + \frac{1}{2}A_i\psi_2 \\ \vdots \\ \frac{\partial \psi_4}{\partial x_i} + \frac{1}{2}A_i\psi_4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olur ve $D_A\Psi = 0$ denkleminin açık hali aşağıdaki şekilde elde edilir [9]:

$$
\begin{aligned}
0 &= \tfrac{\partial\psi_2}{\partial x_3}+\tfrac{\partial\psi_4}{\partial x_4}+i\Big(\tfrac{\partial\psi_1}{\partial x_1}+\tfrac{\partial\psi_2}{\partial x_2}-\tfrac{\partial\psi_4}{\partial x_5}\Big)\\
&\quad+\tfrac{1}{2}\Big(A_3\psi_2+A_4\psi_4+i\big(A_1\psi_1+A_2\psi_2-A_5\psi_4\big)\Big)\\
0 &= -\tfrac{\partial\psi_1}{\partial x_3}-\tfrac{\partial\psi_3}{\partial x_4}+i\Big(\tfrac{\partial\psi_1}{\partial x_2}-\tfrac{\partial\psi_2}{\partial x_1}+\tfrac{\partial\psi_3}{\partial x_5}\Big)\\
&\quad+\tfrac{1}{2}\Big(-A_3\psi_1-A_4\psi_3+i\big(A_2\psi_1-A_1\psi_2+A_5\psi_3\big)\Big)\\
0 &= \tfrac{\partial\psi_2}{\partial x_4}-\tfrac{\partial\psi_4}{\partial x_3}+i\Big(\tfrac{\partial\psi_2}{\partial x_5}+\tfrac{\partial\psi_3}{\partial x_1}+\tfrac{\partial\psi_4}{\partial x_2}\Big)\\
&\quad+\tfrac{1}{2}\Big(-A_3\psi_4+A_4\psi_2+i\big(A_5\psi_2+A_1\psi_3+A_2\psi_4\big)\Big)\\
0 &= -\tfrac{\partial\psi_1}{\partial x_4}+\tfrac{\partial\psi_3}{\partial x_3}+i\Big(-\tfrac{\partial\psi_1}{\partial x_5}+\tfrac{\partial\psi_3}{\partial x_2}-\tfrac{\partial\psi_4}{\partial x_1}\Big)\\
&\quad+\tfrac{1}{2}\Big(A_3\psi_3-A_4\psi_1+i\big(-A_5\psi_1+A_2\psi_3-A_1\psi_4\big)\Big)
\end{aligned}
$$

$\{e_1,...,e_5\}$, $\mathbb{R}^5$ in ortonormal tabanı ve bu tabanlara karşılık gelen dual tabanlar $\{e^1,...,e^5\}$ olsun. O halde eğrilik denkleminin açık hali $\Omega_3^{2,1}(\mathbb{R}^5, i\mathbb{R})$ uzayının $\{f_1,f_2,f_3\}$ taban elemanları:

$$
f_1=e^1\wedge e^2+e^3\wedge e^4, \qquad f_2=e^1\wedge e^3-e^2\wedge e^4, \qquad f_3=e^1\wedge e^4+e^2\wedge e^3
$$

bağlı olarak aşağıdaki gibi elde edilir. Matrisler üzerindeki Hermityen iç çarpımdan $\langle\rho(f_i),\rho(f_i)\rangle=2$ elde edilen eşitlik eğrilik denkleminde yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
\rho(F_A^+) &= (\Psi\Psi^*)^+\\
&= \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\big\langle\rho(f_i),(\Psi\Psi^*)\big\rangle\rho(f_i)
\end{aligned}
$$

sonucuna ulaşılır. İkinci denklemi veren bu ifadenin açık hali aşağıdaki gibidir:

$$
\begin{aligned}
F_{12}+F_{34} &= \tfrac{1}{4}\big(-\psi_1\overline{\psi}_2+\psi_2\overline{\psi}_1-\psi_1\overline{\psi}_3+\psi_3\overline{\psi}_1-\psi_3\overline{\psi}_4+\psi_4\overline{\psi}_3)\\
&\quad-\psi_2\overline{\psi}_4+\psi_4\overline{\psi}_2\big)\\
F_{13}-F_{24} &= -\tfrac{i}{4}\big(\psi_1\overline{\psi}_2+\psi_2\overline{\psi}_1+\psi_1\overline{\psi}_3+\psi_3\overline{\psi}_1-\psi_2\overline{\psi}_4-\psi_4\overline{\psi}_2\\
&\quad-\psi_3\overline{\psi}_4-\psi_4\overline{\psi}_3\big)\\
F_{14}+F_{23} &= \tfrac{i}{4}\big(|\psi_1|^2-|\psi_2|^2-|\psi_3|^2+|\psi_4|^2-\psi_1\overline{\psi}_4-\psi_4\overline{\psi}_1\\
&\quad-\psi_2\overline{\psi}_3-\psi_3\overline{\psi}_2\big).
\end{aligned}
$$

Aşağıdaki bölümde $M=\mathbb{R}^5$ manifoldu üzerinde yukarıda tanımlanan Spin$^c$ yapısı üzerinde Seiberg$-$Witten denklemlerinin ikincisi olan eğrilik denklemine karşılık gelen denklem kümesine alternatif bir formül verilmiştir [9].

### 5.1.2 5−boyutta eğrilik denklemi için alternatif formül

Seiberg-Witten denklemlerini ikinci denklemine benzer bir denklem yazabilmek için öncelikle

$$\begin{aligned} \sigma : \Gamma\big(S\big) &\rightarrow \Omega^2\big(M, i\mathbb{R}\big) \\ \Psi &\mapsto \sigma(\Psi) \end{aligned}$$

dönüşümü için, $\Psi$ spinoruna karşılık gelen $\sigma(\Psi)$ 2−formunun $\Omega_3^{2,1}(M, i\mathbb{R})$ uzayı üzerine dik izdüşümü $\sigma(\Psi)^+$ ile gösterilir ve aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\sigma^+(\Psi) \;=\; \sum_{i=1}^{3} \frac{\big\langle f_i, \sigma(\Psi)\big\rangle}{\big\langle f_i, f_i\big\rangle} f_i.$$

Burada $\big\{f_1, f_2, f_3\big\}$ $M$ manifoldu üzerindeki ortonormal $\big\{e_1, e_2, ..., e_5\big\}$ çatısına göre $\Omega_3^{2,1}\big(M, i\mathbb{R}\big)$ vektör uzayının çatısıdır. Bu dönüşüm yardımı ile Seiberg−Witten denkleminin ikinci denklemi olan eğrilik denklemi aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$F_A^+ \;=\; \tfrac{1}{4}\sigma^+\big(\Psi\big).$$

$\Omega_3^{2,1}\big(M, i\mathbb{R}\big)$ uzayının $\big\{f_1, f_2, f_3\big\}$ tabanının elemanlarını kullanarak $\big\langle f_i, f_i\big\rangle = 2$ elde edilir. Sonuç olarak $\big\langle f_i, f_i\big\rangle = 2$ olduğundan

$$\begin{aligned} \sigma(\Psi)^+ &= \tfrac{1}{4} \sum_{i=1}^{3} \frac{\big\langle f_i, \sigma(\Psi)\big\rangle}{\big\langle f_i, f_i\big\rangle} f_i \\ &= \tfrac{1}{8} \sum_{i=1}^{3} \big\langle f_i, \sigma(\Psi)\big\rangle f_i \end{aligned}$$

halini alır. Böylece alternatif yaklaşımla elde edilen eğrilik denkleminin açık ifadesi aşağıdaki gibi olur:

$$\begin{aligned} F_{12} + F_{34} &= \tfrac{1}{4}\big((-\psi_1\overline{\psi}_2 + \psi_2\overline{\psi}_1) + (-\psi_1\overline{\psi}_3 + \psi_3\overline{\psi}_1) + (-\psi_3\overline{\psi}_4 + \psi_4\overline{\psi}_3) \\ &\quad +(-\psi_2\overline{\psi}_4 + \psi_4\overline{\psi}_2)\big) \\ F_{13} - F_{24} &= -\tfrac{i}{4}\big((\psi_1\overline{\psi}_2 + \psi_2\overline{\psi}_1) + (\psi_1\overline{\psi}_3 + \psi_3\overline{\psi}_1) + (-\psi_2\overline{\psi}_4 - \psi_4\overline{\psi}_2) \\ &\quad +(-\psi_3\overline{\psi}_4 - \psi_4\overline{\psi}_3)\big) \\ F_{14} + F_{23} &= \tfrac{i}{4}\big(|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2 - |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2 + (-\psi_1\overline{\psi}_4 - \psi_4\overline{\psi}_1) \\ &\quad +(-\psi_2\overline{\psi}_3 - \psi_3\overline{\psi}_2). \end{aligned}$$

Dikkat edilir ise, yukarıda eğrilik denklemine karşılık gelen denklem sistemi [9] da elde edilen denklem sistemi ile aynıdır. Bu yöntem daha az ve daha basit işlemlerle aynı sonuca ulaştırdığından yüksek boyutta genellemelerinin yapılmasında kolaylık sağlar.

## 5.2 6−Boyutta Seiberg−Witten Denklemleri

Seiberg-Witten denklemlerinin ilki olan Dirac denklemi $D_A\Psi = 0$ herhangi boyuttaki herhangi bir Spin$^c$ yapısı için anlamlıdır. Fakat Hodge anlamında kendine duallik kavramı sadece 4−boyutta tanımlı olduğundan ikinci denklemin 6−boyutlu manifoldlar üzerinde doğal bir genellemesi yoktur. Bu çalışmanın bu bölümünde [7] de belirlenen kendine duallik kavramı kullanılarak, 6−boyutlu manifoldlar üzerinde [2, 7] de tanımlanan Spin$^c$−yapısı ile Seiberg−Witten denklemlerinin ikincisi olan eğrilik denklemine karşılık gelen denklem kümesine alternatif bir formül verilecektir. Fakat alternatif formül ifade edilmeden önce 5−boyutlu manifoldlarda olduğu gibi 6− boyutta yönlendirilebilir Riemann manifoldun Seiberg−Witten denklemlerinin ifadesinde gerekecek temel tanım ve kavramlar aşağıda verilmiştir:

6−boyutlu yönlendirilebilir Riemann manifoldun yapı grubu SO(6) olduğundan, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ açık örtüsü ve
$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow SO(6)$ geçiş fonksiyonları vardır.
Eğer aşağıdaki gibi geçiş fonksiyonlarının diğer bir kolleksiyonu mevcut

$$\widetilde{g}_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow Spin^c(6)$$

ve aşağıdaki diyagramı değişmeli yapıyor ise

$$\begin{tikzcd}
 & Spin^c(6) \arrow[d, "\lambda"] \\
U_\alpha \cup U_\beta \arrow[ur, "\widetilde{g}_{\alpha\beta}"] \arrow[r, "g_{\alpha\beta}"'] & SO(6)
\end{tikzcd}$$

yani

$$\lambda \circ \widetilde{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$$

ve $\forall x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ için $\widetilde{g}_{\alpha\beta}(x) \circ \widetilde{g}_{\beta\gamma}(x) = \widetilde{g}_{\alpha\gamma}(x)$ koşulu sağlanıyorsa M manifolduna Spin$^c$ manifoldu denir. Spin$^c$−yapısına sahip bir manifold üzerinde ise spinor demeti inşaa edilebilir. Seiberg−Witten denklemlerinin birincisi olan Dirac denklemi yazılabilir. Ancak eğrilik denklemi için 6−boyutta da bir 2−formun self−dualliği kavramına ihtiyaç vardır. [2, 7] da yapılan çalışmalarda 6−boyutta $(M, g, \Phi)$ simplektik yapıya sahip manifoldlar üzerinde $\Omega^2(M)$ uzayı aşağıdaki şekilde dekomposize olur. $\Omega^2\big(M\big) = \Omega_8^{2,-1}\big(M\big) \oplus \Omega_6^{2,1}\big(M\big) \oplus \Omega_1^{2,2}\big(M\big)$ şeklinde bir ayrışımı vardır. Burada

$$\begin{aligned}
\Omega_8^{2,-1}\big(M\big) &= \Big\{\omega \in \Omega^2\big(M\big) \,|\, *\big(\Phi \wedge \omega\big) = -\omega\Big\} \\
\Omega_6^{2,1}\big(M\big) &= \Big\{\omega \in \Omega^2\big(M\big) \,|\, *\big(\Phi \wedge \omega\big) = \omega\Big\} \\
\Omega_1^{2,2}\big(M\big) &= \Big\{\omega \in \Omega^2\big(M\big) \,|\, *\big(\Phi \wedge \omega\big) = 2\omega\Big\}
\end{aligned}$$

dir.

Bu çalışmada [2, 7] da olduğu gibi $\Omega_8^{2,-1}\big(M\big)$ uzayı, 2−formların self-dual uzayı olarak göz önüne alınacaktır. Ayrıca $i\mathbb{R}$ değerli 2-formların dekomposizyonu da aşağıdaki gibi yazılabilir

$$\Omega^2\big(M, i\mathbb{R}\big) = \Omega_8^{2,-1}\big(M, i\mathbb{R}\big) \oplus \Omega_6^{2,1}\big(M, i\mathbb{R}\big) \oplus \Omega_1^{2,2}\big(M, i\mathbb{R}\big).$$

$F_A$ nın $\Omega_8^{2,-1}\big(M, i\mathbb{R}\big)$ ye düşen parçasına $F_A$ nın self−dual kısmı denir ve $F_A^+$ ile gösterilir. Yani

$$F_A^+ = Proj_{\Omega_8^{2,-1}\left(M, i\mathbb{R}\right)} F_A.$$

dir. Şimdi daha önce tanımladığımız

$$\begin{aligned}
\rho^+ : \Omega^2\big(M, i\mathbb{R}\big) &\to End(S^+) \\
\eta &\mapsto \rho^+(\eta) = \sum_{i<j} \eta_{ij}\kappa(e_i)\kappa(e_j)
\end{aligned}$$

dönüşümü yardımı ile $\rho^+\big(\Omega_8^{2,-1}\big(M, i\mathbb{R}\big)\big) = W' \subset End\big(S\big)$ alt demetini alalım. Ayrıca $\Psi\Psi^*$ ın $W'$ üstüne dik izdüşümü $\big(\Psi\Psi^*\big)^+ = Proj_{W'}\big(\Psi\Psi^*\big)$ olsun. Buna göre 6−boyutlu $(M, g, \Phi)$ simplektik yapıya sahip manifoldları üzerindeki Seiberg−Witten denklemleri:

1. $D_A^+(\Psi) = 0$

2. $\rho^+(F_A^+) = (\Psi\Psi^*)^+$

şeklinde ifade edilmiştir [7]. [7] de ele alınan çalışmada 6−boyutta Seiberg−Witten denklemleri aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

### 5.2.1 $6-$boyutta denklemlerin lokal ifadeleri

$6-$boyutlu manifoldlar için kompleks $6-$spinorların vektör uzayı $8-$boyutludur. $\Delta_6 = \mathbb{C}^8$ ile gösterilir. $\mathbb{C}l_6 \cong End\big(\Delta_6\big)$ olduğundan $\mathbb{C}l_6$ kompleks Clifford cebirinin spin temsili $\kappa_6$ aşağıdaki şekilde verilir:

$$\kappa_6 : \mathbb{C}l_6 \to End\big(\Delta_6\big)$$

$$\kappa_6(e_1) = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{bmatrix}, \quad \kappa_6(e_2) = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_1 \\ -\gamma_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \kappa_6(e_3) = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_2 \\ -\gamma_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\kappa_6(e_4) = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_3 \\ -\gamma_3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \kappa_6(e_5) = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_4 \\ -\gamma_4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \kappa_6(e_6) = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_5 \\ -\gamma_5 & 0 \end{bmatrix}$$

Burada $\mathbb{I}, 4 \times 4$ lük birim matristir ve $i = 1, 2, ..., 5$ için $\gamma_i$ matrisleri aşağıdaki gibidir:

$$\gamma_1 = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{bmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\gamma_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$i = 1, 2, ..., 5$ iken $\gamma_i$ matrisleri $\mathbb{C}l_6 \cong End\big(\Delta_6\big)$ izomorfizması altında $\mathbb{C}l_5$ kompleks cebirinin üreteçlerinin görüntüleridir.
$\kappa_6 : \mathbb{C}l_6 \to End\big(\Delta_6\big)$ spinor temsili

$$\Delta_6^+ = \Big\{\Psi = (\psi_1, ..., \psi_8) \in \mathbb{C}^8 | \psi_5 = \psi_6 = \psi_7 = \psi_8 = 0\Big\} \cong \mathbb{C}^4$$

ve

$$\Delta_6^- = \Big\{\Psi = (\psi_1, ..., \psi_8) \in \mathbb{C}^8 | \psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = \psi_4 = 0\Big\} \cong \mathbb{C}^4$$

olmak üzere

$$\Delta_6 = \Delta_6^+ \oplus \Delta_6^-$$

dekomposizyonunu verir. Böylece $\Psi \in \Gamma\big(S^+\big)$ ve $A \in \Omega^1\big(M, i\mathbb{R}\big)$ konneksiyon $1-$formu için $D_A^+$ Dirac operatörü

$$\begin{aligned} D_A^+ : \Gamma\big(S^+\big) &\to \Gamma\big(S^-\big) \\ \Psi &\mapsto D_A^+\Psi = \sum_{i=1}^{6} e_i \cdot \nabla_{e_i}^A \Psi \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. Lokal koordinatlarda $A$ konneksiyon $1-$formu $A_i : \mathbb{R}^6 \to i\mathbb{R}$ düzgün olmak üzere

$$A = \sum_{i=1}^{6} A_i dx^i$$

şeklinde ifade edilebilir. O halde $A$ nın eğriliği $F_A$, $F_{ij} = \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right)$, $1 \leq i < j \leq 6$ için aşağıdaki gibi

$$F_A = dA = \sum_{i<j} F_{ij} dx^i \wedge dx^j \in \Omega^2\big(M, \mathrm{i}\mathbb{R}\big) \tag{5.3}$$

ifade edilir.

$\Psi \in \Gamma\big(S^+\big)$ spinorunun $\nabla^A \Psi$ kovaryant türevi $\omega_{ij} = g\big(\nabla e_i, e_j\big)$ olmak üzere

$$\nabla^A \Psi = d\Psi + \tfrac{1}{2} \sum_{i<j} \omega_{ij} e_i e_j \Psi + \tfrac{1}{2} A \Psi$$

olur. Burada $\omega_{ij} = g\big(\nabla e_i, e_j\big)$ ifadesinde geçen $\nabla e_i$ konneksiyonu manifold üzerindeki Levi$-$Civita konneksiyonudur. Dikkat edilirse $\mathbb{R}^6$ üzerinde $\omega_{ij}$ ler Riemann metriği altında sıfırdır. $e_i$ yönünde $\Psi$ spinorunun $\nabla^A_{e_i} \Psi$ kovaryant türevinin lokal ifadesi

$$\nabla^A_{e_i} \Psi = \Big(d\Psi + \tfrac{1}{2} A \Psi\Big)(e_i) = d\Psi(e_i) + \tfrac{1}{2} A \Psi(e_i)$$

şeklindedir.

$$d\Psi(e_i) = \begin{bmatrix} d\psi_1 \\ d\psi_2 \\ \vdots \\ d\psi_4 \end{bmatrix} (e_i) = \begin{bmatrix} d\psi_1(e_i) \\ d\psi_2(e_i) \\ \vdots \\ d\psi_4(e_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial \psi_4}{\partial x_i} \end{bmatrix}$$

ve

$$\frac{1}{2} A \Psi(e_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{6} A_i dx^i(e_i) \Psi = \frac{1}{2} A_i \Psi,$$

olduğundan

$$\nabla^A_{e_i} \Psi = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial \psi_4}{\partial x_i} \end{bmatrix} + \tfrac{1}{2} A_i \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} + \frac{1}{2} A_i \psi_1 \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x_i} + \frac{1}{2} A_i \psi_2 \\ \vdots \\ \frac{\partial \psi_4}{\partial x_i} + \frac{1}{2} A_i \psi_4 \end{bmatrix}$$

olarak yazılabilir. Yukarıda verilenlere göre $D_A^+ : \Gamma\big(S^+\big) \to \Gamma\big(S^-\big)$ Dirac operatörü

$$
\begin{aligned}
D_A^+\Psi &= \sum_{i=1}^{6} e_i \cdot \nabla_{e_i}^A \Psi = \sum \kappa_6(e_i)\big(\nabla_{e_i}^A \Psi\big) \\
&= \sum_{i=1}^{6} \kappa_6(e_i) \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} + \frac{1}{2}A_i\psi_1 \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x_i} + \frac{1}{2}A_i\psi_2 \\ \vdots \\ \frac{\partial \psi_4}{\partial x_i} + \frac{1}{2}A_i\psi_4 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

olur ve $D_A^+\Psi = 0$ denkleminin açık hali aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_4} + \frac{\partial \psi_4}{\partial x_5} + i\Big(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} + \frac{\partial \psi_4}{\partial x_6}\Big) + \frac{1}{2}\Big(A_1\psi_1 + A_4\psi_2 + A_5\psi_4 \\
&\quad + i\big(A_2\psi_1 + A_3\psi_2 + A_6\psi_4\big)\Big) \\
0 &= -\frac{\partial \psi_1}{\partial x_4} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_3}{\partial x_5} + i\Big(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi_3}{\partial x_6}\Big) + \frac{1}{2}\Big(A_1\psi_2 - A_4\psi_1 - A_5\psi_3 \\
&\quad + i\big(A_3\psi_1 - A_2\psi_2 - A_6\psi_3\big)\Big) \\
0 &= \frac{\partial \psi_2}{\partial x_5} + \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_4}{\partial x_4} + i\Big(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_6} + \frac{\partial \psi_3}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi_4}{\partial x_3}\Big) + \frac{1}{2}\Big(A_1\psi_3 - A_4\psi_4 + A_5\psi_2 \\
&\quad + i\big(-A_6\psi_2 + A_2\psi_3 + A_3\psi_4\big)\Big) \\
0 &= -\frac{\partial \psi_1}{\partial x_5} + \frac{\partial \psi_3}{\partial x_4} + \frac{\partial \psi_4}{\partial x_1} + i\Big(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_6} + \frac{\partial \psi_3}{\partial x_3} - \frac{\partial \psi_4}{\partial x_2}\Big) + \frac{1}{2}\Big(A_1\psi_4 + A_4\psi_3 - A_5\psi_1 \\
&\quad + i\big(A_6\psi_1 + A_3\psi_3 - A_2\psi_4\big)\Big).
\end{aligned}
$$

$\{e_1, ..., e_6\}$, $\mathbb{R}^6$ in ortonormal tabanı ve bu tabanlara karşılık gelen dual tabanlar $\big\{e^1, ..., e^6\big\}$ olsun. O halde eğrilik denkleminin açık hali $\Omega_8^{2,-1}\big(\mathbb{R}^6, i\mathbb{R}\big)$ uzayının $\big\{f_1, f_2, ..., f_8\big\}$ taban elemanları:

$$
\begin{aligned}
&f_1 = e^1 \wedge e^3 + e^2 \wedge e^4, \quad && f_2 = e^1 \wedge e^4 - e^2 \wedge e^3, \quad && f_3 = e^1 \wedge e^5 + e^2 \wedge e^6, \\
&f_4 = e^1 \wedge e^6 - e^2 \wedge e^5, && f_5 = e^3 \wedge e^5 + e^4 \wedge e^6, && f_6 = e^3 \wedge e^6 - e^4 \wedge e^5, \\
&f_7 = e^1 \wedge e^2 - e^3 \wedge e^4, && f_8 = e^3 \wedge e^4 - e^5 \wedge e^6
\end{aligned}
$$

bağlı olarak aşağıdaki gibi elde edilir. Matrisler üzerindeki Hermityen iç çarpımdan $\big\langle \rho^+(f_i), \rho^+(f_i)\big\rangle = 2$ elde edilir. Daha sonra eğrilik denkleminde yerine yazılması ile

$$
\begin{aligned}
\rho^+(F_A^+) &= (\Psi\Psi^*)^+ \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8} \big\langle \rho^+(f_i), (\Psi\Psi^*)\big\rangle \rho^+(f_i)
\end{aligned}
$$

sonucuna ulaşılır. Böylece yukarıda verilen bilgiler yardımıyla ikinci denklemin açık hali aşağıda verilmiştir.

$$
\begin{aligned}
F_{13}+F_{24} &= -\tfrac{i}{2}\big(\psi_1\overline{\psi_2}+\psi_2\overline{\psi_1}\big)\\
F_{14}-F_{23} &= \tfrac{1}{2}\big(\psi_1\overline{\psi_2}-\psi_2\overline{\psi_1}\big)\\
F_{15}+F_{26} &= \tfrac{1}{2}\big(-\psi_2\overline{\psi_3}+\psi_3\overline{\psi_2}\big)\\
F_{16}-F_{25} &= \tfrac{i}{2}\big(\psi_2\overline{\psi_3}+\psi_3\overline{\psi_2}\big)\\
F_{35}+F_{46} &= \tfrac{i}{2}\big(\psi_1\overline{\psi_3}+\psi_3\overline{\psi_1}\big)\\
F_{36}-F_{45} &= \tfrac{1}{2}\big(\psi_1\overline{\psi_3}-\psi_3\overline{\psi_1}\big)\\
F_{12}-F_{34} &= -\tfrac{i}{2}\big(|\psi_1|^2-|\psi_2|^2\big)\\
F_{34}-F_{56} &= \tfrac{i}{2}\big(|\psi_1|^2-|\psi_3|^2\big).
\end{aligned}
$$

Aşağıdaki bölümde $M=\mathbb{R}^6$ manifoldu üzerinde yukarıda tanımlanan Spin$^c$ yapısı üzerinde Seiberg$-$Witten denklemlerinin ikincisi olan eğrilik denklemine karşılık gelen denklem sistemine alternatif bir formül verilmiştir [4].

### 5.2.2 6$-$boyutta eğrilik denklemi için alternatif formül

6$-$boyutta Seiberg-Witten denklemlerinin ikinci denklemine benzer bir denklem yazabilmek için, 5$-$boyutta olduğu gibi öncelikle

$$
\begin{aligned}
\sigma:\Gamma\big(S\big) &\rightarrow \Omega^2\big(M,i\mathbb{R}\big)\\
\Psi &\mapsto \sigma(\Psi)
\end{aligned}
$$

dönüşümü için $\Psi$ spinoruna karşılık gelen $\sigma^+(\Psi)$ 2$-$formuna dönüşümü $\sigma(\Psi)$ nin $\Omega_8^{2-1}(M,i\mathbb{R})$ 2$-$form uzayı üzerine dik izdüşümü $\sigma(\Psi)^+$ ile gösterilir:

$$
\sigma^+(\Psi) = \sum_{i=1}^{8}\frac{\big\langle f_i,\sigma(\Psi)\big\rangle}{\big\langle f_i,f_i\big\rangle}f_i.
$$

Burada $\big\{f_1,f_2,...,f_8\big\}$ $M$ manifoldu üzerindeki ortonormal $\big\{e_1,e_2,...,e_6\big\}$ çatısına göre $\Omega_8^{2,-1}(M,i\mathbb{R})$ vektör uzayının çatısıdır. Bu dönüşüm yardımı ile Seiberg$-$Witten denkleminin ikinci denklemi olan eğrilik denklemi aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$
F_A^+ = \tfrac{1}{4}\sigma^+\big(\Psi\big).
$$

O halde $\Omega_8^{2,-1}(M,i\mathbb{R})$ uzayının $\big\{f_1,f_2,...,f_8\big\}$ tabanının elemanlarını kullanarak formlar üzerinde tanımlanan iç çarpım ile $\big\langle f_i,f_i\big\rangle=2$ elde edilir. Daha sonra elde edilen bu eşitlik eğrilik denkleminde yerine yazılırsa $\langle f_i, f_i \rangle = 2$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\sigma(\Psi)^+ &= \tfrac{1}{4}\sum_{i=1}^{8} \frac{\langle f_i,\sigma(\Psi)\rangle}{\langle f_i,f_i\rangle} f_i \\
&= \tfrac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} \langle f_i, \sigma(\Psi)\rangle f_i
\end{aligned}$$

olur. Böylece alternatif yaklaşımla elde edilen eğrilik denkleminin açık ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
F_{13} + F_{24} &= -\tfrac{i}{2}\big(\psi_1\overline{\psi_2} + \psi_2\overline{\psi_1}\big) \\
F_{14} - F_{23} &= \tfrac{1}{2}\big(\psi_1\overline{\psi_2} - \psi_2\overline{\psi_1}\big) \\
F_{15} + F_{26} &= \tfrac{1}{2}\big( - \psi_2\overline{\psi_3} + \psi_3\overline{\psi_2}\big) \\
F_{16} - F_{25} &= \tfrac{i}{2}\big(\psi_2\overline{\psi_3} + \psi_3\overline{\psi_2}\big) \\
F_{35} + F_{46} &= \tfrac{i}{2}\big(\psi_1\overline{\psi_3} + \psi_3\overline{\psi_1}\big) \\
F_{36} - F_{45} &= \tfrac{1}{2}\big(\psi_1\overline{\psi_3} - \psi_3\overline{\psi_1}\big) \\
F_{12} - F_{34} &= -\tfrac{i}{2}\big(|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2\big) \\
F_{34} - F_{56} &= \tfrac{i}{2}\big(|\psi_1|^2 - |\psi_3|^2\big)
\end{aligned}$$

Dikkat edilirse, yukarıda tanımlanan eğrilik denklemine karşılık gelen alternatif formül [7] de ifade eden denklem ile aynı sonucu vermektedir.

## 5.3 7−Boyutta Seiberg−Witten Denklemleri

Bu bölümde [5] de belirlenen kendine duallik kavramı kullanılarak, $M = \mathbb{R}^7$ manifoldu üzerinde [5] de tanımlanan Spin$^c$−yapısı üzerinde Seiberg−Witten denklemlerinin ikincisi olan eğrilik denklemine karşılık gelen denklem kümesine alternatif bir formül verilecektir. Önceki bölümlerde olduğu gibi Seiberg−Witten denklemlerinin inşaasında kullanılacak olan temel bilgi ve kavramlar verilecektir. 7−boyutlu yönlendirilebilir Riemann manifoldun yapı grubu SO(7) olduğundan, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ açık örtüsü ve $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to SO(7)$ geçiş fonksiyonları vardır. Eğer aşağıdaki gibi geçiş fonksiyonlarının diğer bir kolleksiyonu mevcut

$$\widetilde{g}_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to Spin^c(7)$$

ve aşağıdaki diyagramı değişmeli yapıyor ise

$$\begin{tikzcd}
 & Spin^c(7) \arrow[d, "\lambda"] \\
U_\alpha \cup U_\beta \arrow[ur, "\widetilde{g}_{\alpha\beta}"] \arrow[r, "g_{\alpha\beta}"'] & SO(7)
\end{tikzcd}$$

yani

$$\lambda \circ \widetilde{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}.$$

Ayrıca $\forall x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ için $\widetilde{g}_{\alpha\beta}(x) \circ \widetilde{g}_{\beta\gamma}(x) = \widetilde{g}_{\alpha\gamma}(x)$ koşulu sağlanıyorsa M manifolduna Spin$^c$ manifoldu denir. Spin$^c$−yapısına sahip bir manifold üzerinde ise spinor demeti inşaa edilebilir. Spinor demetinin üzerinde de Dirac operatörü yazılabilir. Ancak eğrilik denklemini yazabilmek için 7−boyutlu durumda bir 2−formun self−dualliği kavramına ihtiyaç vardır. Bu ise 7−boyutlu $G_2$−yapısına sahip manifoldlar üzerinde tanımlanır. $(M, g, \Phi)$ $G_2$-yapısına sahip manifold üzerinde $\Omega^2(M)$ 2−formların uzayı $\Phi$ temel 3−formu yardımıyla aşağıdaki gibi dekompozize olur: $\Omega^2\big(M\big) = \Omega^{2,1}_{14}\big(M\big) \oplus \Omega^{2,-2}_{7}\big(M\big)$ şeklinde bir ayrışımı vardır [5]. Burada

$$\begin{aligned}
\Omega^{2,1}_{14}\big(M\big) &= \big\{\omega \in \Omega^2\big(M\big) | * \big(\Phi \wedge \omega\big) = \omega\big\} \\
\Omega^{2,-2}_{7}\big(M\big) &= \big\{\omega \in \Omega^2\big(M\big) | * \big(\Phi \wedge \omega\big) = -2\omega\big\}
\end{aligned}$$

dir. Bu çalışmada da $\Omega^{2,-2}_{7}\big(M\big)$ uzayı [5] deki gibi self−dual 2−formların uzayı olarak göz önüne alınacaktır. Ayrıca $i\mathbb{R}$ değerli 2-formların dekomposizyonu da aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\Omega^2\big(M,i\mathbb{R}\big) \;=\; \Omega^{2,1}_{14}\big(M,i\mathbb{R}\big)\oplus\Omega^{2,-2}_{7}\big(M,i\mathbb{R}\big).$$

$F_A$ nın $\Omega^{2,-2}_7\big(M,i\mathbb{R}\big)$ ye düşen parçasına $F_A$ nın self$-$dual kısmı denir ve $F_A^+$ ile gösterilir.

$$F_A^+ \;=\; Proj_{\Omega^{2,-2}_7\left(M,i\mathbb{R}\right)}F_A.$$

dır.

$$\begin{aligned}\sigma:\Gamma\big(S\big) &\;\to\; \Omega^2\big(M,i\mathbb{R}\big)\\ \Psi &\;\mapsto\; \sigma(\Psi)\end{aligned}$$

dönüşümü için $\Psi$ spinoruna karşılık gelen $\sigma(\Psi)$ $2-$formunun $\Omega^{2-2}_7(M,i\mathbb{R})$ uzayı üzerine dik izdüşümü $\sigma^+(\Psi)$ ile gösterilir ve aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\sigma^+(\Psi) \;=\; \sum_{i=1}^{7}\frac{\left\langle f_i,\sigma(\Psi)\right\rangle}{\left\langle f_i,f_i\right\rangle}f_i.$$

Burada $\{f_1,f_2,...,f_7\}$ $M$ manifoldu üzerindeki ortonormal $\{e_1,e_2,...,e_7\}$ çatısına göre $\Omega^{2,-2}_7(M,i\mathbb{R})$ vektör uzayının çatısıdır. Bu dönüşüm yardımı ile Seiberg$-$Witten denkleminin ikinci denklemi olan eğrilik denklemi aşağıdaki gibi ifade edilir [5]:

$$F_A^+ \;=\; \sigma^+\big(\Psi\big).$$

O halde $M$ manifoldu üzerindeki Seiberg$-$Witten denklemleri:

1. $D_A\big(\Psi\big)=0$

2. $F_A^+=\sigma^+\big(\Psi\big)$

şeklinde ifade edilmiştir [5]. [5] de ele alınan çalışmada $7-$boyutta Seiberg$-$Witten denklemleri aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

### 5.3.1 $7-$boyutta denklemlerin lokal ifadeleri

$7-$boyutlu manifoldlarda kompleks $7-$spinorların vektör uzayı $8-$boyutludur. Kompleks $7-$spinorlar $\Delta_7=\mathbb{C}^8$ ile gösterilecektir. $\mathbb{C}l_7\cong End\big(\Delta_7\big)\oplus End\big(\Delta_7\big)$

olduğundan $\mathbb{C}l_7$ kompleks Clifford cebirinin spin temsili $\kappa_7$ aşağıdaki şekilde verilir:

$$\kappa_7 : \mathbb{C}l_7 \to End\big(\Delta_7\big)$$

$$\begin{aligned} &\kappa_7(e_1) = \gamma_1, \quad &&\kappa_7(e_2) = \gamma_2, \quad &&\kappa_7(e_3) = \gamma_3, \quad &&\kappa_7(e_4) = \gamma_4 \\ &\kappa_7(e_5) = \gamma_5, \quad &&\kappa_7(e_6) = \gamma_6, \quad &&\kappa_7(e_7) = \gamma_7 \end{aligned}$$

Burada $\gamma_i$ matrisleri şunlardır:

$$\gamma_1 = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\gamma_3 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \end{bmatrix} \gamma_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\gamma_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & i & 0 \end{bmatrix} \gamma_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\gamma_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\gamma_i$ matrisleri $\mathbb{C}l_7 \cong End\big(\Delta_7\big) \oplus End\big(\Delta_7\big)$ izomorfizmi altında $\mathbb{C}l_7$ cebirinin üreteçlerinin görüntülerinin birinci izdüşüm dönüşümü altındaki görüntüleridir. $n = 7$ durumunda $\Psi \in \Gamma\big(S\big)$ ve $A \in \Omega^1\big(M, i\mathbb{R}\big)$ konneksiyon 1−formu için Dirac operatörü

$$\begin{aligned} D_A : \Gamma\big(S\big) &\ \to\ \Gamma\big(S\big) \\ \Psi &\ \mapsto\ D_A\Psi = \sum_{i=1}^{7} e_i \cdot \nabla^A_{e_i}\Psi \end{aligned}$$

olur. Lokal koordinatlarda $A$ konneksiyon $1-$formu $A_i : \mathbb{R}^7 \to i\mathbb{R}$ düzgün olmak üzere

$$A = \sum_{i=1}^{7} A_i dx^i$$

şeklinde ifade edilebilir. O halde $A$ nın eğriliği $F_A$, $F_{ij} = \big(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j}\big)$, $1 \leq i < j \leq 7$ için aşağıdaki gibi

$$F_A = dA = \sum_{i<j} F_{ij} dx^i \wedge dx^j \in \Omega^2\big(M, \mathrm{i}\mathbb{R}\big) \tag{5.4}$$

ifade edilir.

$\Psi \in \Gamma(S)$ spinorunun $\nabla^A \Psi$ kovaryant türevi $\omega_{ij} = g\big(\nabla e_i, e_j\big)$ olmak üzere

$$\nabla^A \Psi = d\Psi + \tfrac{1}{2} \sum_{i<j} \omega_{ij} e_i e_j \Psi + \tfrac{1}{2} A \Psi$$

olur. Burada $\omega_{ij} = g\big(\nabla e_i, e_j\big)$ ifadesinde geçen $\nabla$ konneksiyonu manifold üzerindeki Levi$-$Civita konneksiyonudur. Dikkat edilirse $\mathbb{R}^7$ üzerinde $\omega_{ij}$ ler Riemannian metriği altında sıfırdır. $e_i$ yönünde $\Psi$ spinorunun $\nabla^A_{e_i} \Psi$ kovaryant türevinin lokal ifadesi

$$\nabla^A_{e_i} \Psi = \Big(d\Psi + \tfrac{1}{2} A \Psi\Big)(e_i) = d\Psi\big(e_i\big) + \tfrac{1}{2} A \Psi\big(e_i\big)$$

şeklindedir.

$$d\Psi(e_i) = \begin{bmatrix} d\psi_1 \\ d\psi_2 \\ \vdots \\ d\psi_8 \end{bmatrix} (e_i) = \begin{bmatrix} d\psi_1(e_i) \\ d\psi_2(e_i) \\ \vdots \\ d\psi_8(e_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial \psi_8}{\partial x_i} \end{bmatrix}$$

ve

$$\frac{1}{2} A \Psi(e_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{7} A_i dx^i(e_i) \Psi = \frac{1}{2} A_i \Psi,$$

olduğundan

$$\nabla^A_{e_i} \Psi = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial \psi_8}{\partial x_i} \end{bmatrix} + \tfrac{1}{2} A_i \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} + \frac{1}{2} A_i \psi_1 \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x_i} + \frac{1}{2} A_i \psi_2 \\ \vdots \\ \frac{\partial \psi_8}{\partial x_i} + \frac{1}{2} A_i \psi_8 \end{bmatrix}$$

olarak yazılabilir. Yukarıda verilenlere göre $D_A : \Gamma\big(S\big) \to \Gamma\big(S\big)$ Dirac operatörü

$$\begin{aligned} D_A\Psi &= \sum_{i=1}^{7} e_i \cdot \nabla^A_{e_i}\Psi = \sum \kappa_7(e_i)\big(\nabla^A_{e_i}\Psi\big) \\ &= \sum_{i=1}^{7} \kappa_7(e_i) \begin{bmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial x_i} + \frac{1}{2}A_i\psi_1 \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial x_i} + \frac{1}{2}A_i\psi_2 \\ \vdots \\ \frac{\partial\psi_8}{\partial x_i} + \frac{1}{2}A_i\psi_8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olur ve $D_A\Psi = 0$ denkleminin açık hali aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned}
0 &= \tfrac{\partial\psi_2}{\partial x_2} - \tfrac{\partial\psi_4}{\partial x_4} + \tfrac{\partial\psi_8}{\partial x_6} + i\Big(\tfrac{\partial\psi_1}{\partial x_1} - \tfrac{\partial\psi_2}{\partial x_3} + \tfrac{\partial\psi_4}{\partial x_5} + \tfrac{\partial\psi_8}{\partial x_7}\Big) \\
&\quad + \tfrac{1}{2}\Big(A_2\psi_2 - A_4\psi_4 + A_6\psi_8 + i\big(A_1\psi_1 - A_3\psi_2 + A_5\psi_4 + A_7\psi_8\big)\Big) \\
0 &= -\tfrac{\partial\psi_1}{\partial x_2} - \tfrac{\partial\psi_3}{\partial x_4} + \tfrac{\partial\psi_7}{\partial x_6} + i\Big(-\tfrac{\partial\psi_1}{\partial x_3} - \tfrac{\partial\psi_2}{\partial x_1} + \tfrac{\partial\psi_3}{\partial x_5} + \tfrac{\partial\psi_7}{\partial x_7}\Big) \\
&\quad + \tfrac{1}{2}\Big(-A_2\psi_2 - A_4\psi_3 + A_6\psi_7 + i\big(-A_3\psi_1 - A_1\psi_2 + A_5\psi_3 + A_7\psi_7\big)\Big) \\
0 &= \tfrac{\partial\psi_2}{\partial x_4} + \tfrac{\partial\psi_4}{\partial x_2} + \tfrac{\partial\psi_6}{\partial x_6} + i\Big(\tfrac{\partial\psi_2}{\partial x_5} + \tfrac{\partial\psi_3}{\partial x_1} + \tfrac{\partial\psi_4}{\partial x_3} + \tfrac{\partial\psi_6}{\partial x_7}\Big) \\
&\quad + \tfrac{1}{2}\Big(A_2\psi_4 + A_4\psi_2 + A_6\psi_6 + i\big(A_5\psi_2 + A_1\psi_3 + A_3\psi_4 + A_7\psi_6\big)\Big) \\
0 &= \tfrac{\partial\psi_1}{\partial x_4} - \tfrac{\partial\psi_3}{\partial x_2} + \tfrac{\partial\psi_5}{\partial x_6} + i\Big(\tfrac{\partial\psi_1}{\partial x_5} + \tfrac{\partial\psi_3}{\partial x_3} - \tfrac{\partial\psi_4}{\partial x_1} + \tfrac{\partial\psi_5}{\partial x_7}\Big) \\
&\quad + \tfrac{1}{2}\Big(-A_2\psi_3 + A_4\psi_1 + A_6\psi_5 + i\big(A_5\psi_1 + A_3\psi_3 - A_1\psi_4 + A_7\psi_5\big)\Big) \\
0 &= -\tfrac{\partial\psi_4}{\partial x_6} + \tfrac{\partial\psi_6}{\partial x_2} - \tfrac{\partial\psi_8}{\partial x_4} + i\Big(\tfrac{\partial\psi_4}{\partial x_7} + \tfrac{\partial\psi_5}{\partial x_1} - \tfrac{\partial\psi_6}{\partial x_3} - \tfrac{\partial\psi_8}{\partial x_5}\Big) \\
&\quad + \tfrac{1}{2}\Big(A_2\psi_6 - A_4\psi_8 - A_6\psi_4 + i\big(A_7\psi_4 + A_1\psi_5 - A_3\psi_6 - A_5\psi_8\big)\Big) \\
0 &= -\tfrac{\partial\psi_3}{\partial x_6} - \tfrac{\partial\psi_5}{\partial x_2} - \tfrac{\partial\psi_7}{\partial x_4} + i\Big(\tfrac{\partial\psi_3}{\partial x_7} - \tfrac{\partial\psi_5}{\partial x_3} - \tfrac{\partial\psi_6}{\partial x_1} - \tfrac{\partial\psi_7}{\partial x_5}\Big) \\
&\quad + \tfrac{1}{2}\Big(-A_2\psi_5 - A_4\psi_7 - A_6\psi_3 + i\big(A_7\psi_3 - A_3\psi_5 - A_1\psi_6 - A_5\psi_7\big)\Big) \\
0 &= -\tfrac{\partial\psi_2}{\partial x_6} + \tfrac{\partial\psi_6}{\partial x_4} + \tfrac{\partial\psi_8}{\partial x_2} + i\Big(\tfrac{\partial\psi_2}{\partial x_7} - \tfrac{\partial\psi_6}{\partial x_5} + \tfrac{\partial\psi_7}{\partial x_1} + \tfrac{\partial\psi_8}{\partial x_3}\Big) \\
&\quad + \tfrac{1}{2}\Big(A_2\psi_8 + A_4\psi_6 - A_6\psi_2 + i\big(A_7\psi_2 - A_5\psi_6 + A_1\psi_7 + A_3\psi_8\big)\Big) \\
0 &= -\tfrac{\partial\psi_1}{\partial x_6} + \tfrac{\partial\psi_5}{\partial x_4} - \tfrac{\partial\psi_7}{\partial x_2} + i\Big(\tfrac{\partial\psi_1}{\partial x_7} - \tfrac{\partial\psi_5}{\partial x_5} + \tfrac{\partial\psi_7}{\partial x_3} + \tfrac{\partial\psi_8}{\partial x_1}\Big) \\
&\quad + \tfrac{1}{2}\Big(-A_2\psi_7 + A_4\psi_5 - A_6\psi_1 + i\big(A_7\psi_1 - A_5\psi_5 - A_1\psi_8 + A_3\psi_7\big)\Big)
\end{aligned}$$

$\big\{e_1, ..., e_7\big\}$ $\mathbb{R}^7$ nin ortonormal tabanı ve bu tabanlara karşılık gelen dual tabanlar $\big\{e^1, ..., e^7\big\}$ olsun. O halde eğrilik denkleminin açık hali $\Omega^{2,-2}_7\big(\mathbb{R}^7, i\mathbb{R}\big)$ uzayının

$\{f_1, f_2, .., f_7\}$ tabanının elemanları:

$$
\begin{aligned}
f_1 &= e^1\wedge e^2 - e^3\wedge e^6 + e^5\wedge e^7, & f_2 &= e^1\wedge e^3 + e^2\wedge e^6 + e^4\wedge e^5,\\
f_3 &= e^1\wedge e^4 - e^3\wedge e^5 - e^6\wedge e^7, & f_4 &= e^1\wedge e^5 - e^2\wedge e^7 + e^3\wedge e^4,\\
f_5 &= e^1\wedge e^6 - e^2\wedge e^3 + e^4\wedge e^7, & f_6 &= e^1\wedge e^7 + e^2\wedge e^5 - e^4\wedge e^6,\\
f_7 &= e^2\wedge e^4 + e^3\wedge e^7 + e^5\wedge e^6
\end{aligned}
$$

kullanarak 2−formlar üzerinde tanımlanan iç çarpımı ile $\langle f_i, f_i\rangle = 3$ elde edilir. Daha sonra elde edilen sonuç aşağıda verilen alternatif formülde yerine yazılırsa $\langle f_i, f_i\rangle = 3$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
\sigma^+(\Psi) &= \sum_{i=1}^{7} \frac{\langle f_i, \sigma(\Psi)\rangle}{\langle f_i, f_i\rangle} f_i\\
&= \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{7} \langle f_i, \sigma(\Psi)\rangle f_i.
\end{aligned}
$$

sonucuna ulaşılır. Yukarıda verilen bilgileri kullanarak eğrilik denkleminin açık hali aşağıdaki gibi olur [5]:

$$
\begin{aligned}
F_{12} - F_{34} + F_{57} &= -i\Big(\psi_1\overline{\psi}_2 + \psi_2\overline{\psi}_1 + \psi_1\overline{\psi}_7 + \psi_7\overline{\psi}_1 + \psi_2\overline{\psi}_8 + \psi_8\overline{\psi}_2\\
&\quad +\psi_3\overline{\psi}_4 + \psi_4\overline{\psi}_3 - \psi_3\overline{\psi}_5 - \psi_5\overline{\psi}_3 - \psi_4\overline{\psi}_6 - \psi_6\overline{\psi}_4\\
&\quad +\psi_5\overline{\psi}_6 + \psi_6\overline{\psi}_5 + \psi_7\overline{\psi}_8 + \psi_8\overline{\psi}_7\\
&\quad +i(-\psi_1\overline{\psi}_5 + \psi_5\overline{\psi}_1 - \psi_2\overline{\psi}_6 + \psi_6\overline{\psi}_2 - \psi_3\overline{\psi}_7 + \psi_7\overline{\psi}_3\\
&\quad -\psi_4\overline{\psi}_8 + \psi_8\overline{\psi}_4)\Big)\\
F_{13} + F_{26} + F_{45} &= \Big(\psi_1\overline{\psi}_2 - \psi_2\overline{\psi}_1 + \psi_1\overline{\psi}_7 - \psi_7\overline{\psi}_1 - \psi_2\overline{\psi}_8 + \psi_8\overline{\psi}_2\\
&\quad -\psi_3\overline{\psi}_4 + \psi_4\overline{\psi}_3 - \psi_4\overline{\psi}_6 + \psi_6\overline{\psi}_4 - \psi_5\overline{\psi}_3 + \psi_3\overline{\psi}_5 + \psi_5\overline{\psi}_6\\
&\quad -\psi_6\overline{\psi}_5 - \psi_7\overline{\psi}_8 + \psi_8\overline{\psi}_7 + i(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2\\
&\quad -|\psi_3|^2 - |\psi_4|^2 - |\psi_5|^2 - |\psi_6|^2 - |\psi_7|^2 - |\psi_8|^2)\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{14} - F_{35} - F_{67} &= i\Big(\psi_1\overline{\psi}_4 + \psi_4\overline{\psi}_1 - \psi_2\overline{\psi}_3 - \psi_3\overline{\psi}_2 + \psi_5\overline{\psi}_8 + \psi_8\overline{\psi}_5 \\
&\quad -\psi_6\overline{\psi}_7 - \psi_7\overline{\psi}_6 + (|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2 \\
&\quad -|\psi_5|^2 - |\psi_6|^2 + |\psi_7|^2 + |\psi_8|^2) + i(\psi_1\overline{\psi}_3 - \psi_3\overline{\psi}_1 \\
&\quad +\psi_2\overline{\psi}_4 - \psi_4\overline{\psi}_2 - \psi_5\overline{\psi}_7 + \psi_7\overline{\psi}_5 - \psi_6\overline{\psi}_8 + \psi_8\overline{\psi}_6)\Big) \\
F_{15} - F_{27} + F_{34} &= -i\Big(\psi_1\overline{\psi}_3 + \psi_3\overline{\psi}_1 - \psi_1\overline{\psi}_7 - \psi_7\overline{\psi}_1 + \psi_2\overline{\psi}_4 + \psi_4\overline{\psi}_2 \\
&\quad +\psi_4\overline{\psi}_6 + \psi_6\overline{\psi}_4 - \psi_3\overline{\psi}_5 - \psi_5\overline{\psi}_3 + \psi_5\overline{\psi}_7 + \psi_7\overline{\psi}_5 \\
&\quad +\psi_2\overline{\psi}_8 + \psi_8\overline{\psi}_2 + \psi_6\overline{\psi}_8 + \psi_8\overline{\psi}_6 + i(-\psi_1\overline{\psi}_4 + \psi_4\overline{\psi}_1 \\
&\quad +\psi_2\overline{\psi}_3 - \psi_3\overline{\psi}_2 + \psi_5\overline{\psi}_8 - \psi_8\overline{\psi}_5 - \psi_6\overline{\psi}_7 + \psi_7\overline{\psi}_6)\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{16} - F_{23} + F_{47} &= -\Big( - \psi_1\overline{\psi}_5 - \psi_5\overline{\psi}_1 + \psi_1\overline{\psi}_8 + \psi_8\overline{\psi}_1 - \psi_2\overline{\psi}_6 - \psi_6\overline{\psi}_2 \\
&\quad -\psi_2\overline{\psi}_7 - \psi_7\overline{\psi}_2 + \psi_3\overline{\psi}_6 + \psi_6\overline{\psi}_3 + \psi_3\overline{\psi}_7 + \psi_7\overline{\psi}_3 - \psi_4\overline{\psi}_5 \\
&\quad -\psi_5\overline{\psi}_4 + \psi_4\overline{\psi}_8 + \psi_8\overline{\psi}_4 + (|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2 - |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2 \\
&\quad +|\psi_5|^2 - |\psi_6|^2 - |\psi_7|^2 + |\psi_8|^2)\Big) \\
F_{17} + F_{25} - F_{46} &= \Big(\psi_1\overline{\psi}_5 - \psi_5\overline{\psi}_1 - \psi_1\overline{\psi}_8 + \psi_8\overline{\psi}_1 + \psi_2\overline{\psi}_6 - \psi_6\overline{\psi}_2 \\
&\quad +\psi_2\overline{\psi}_7 - \psi_7\overline{\psi}_2 - \psi_3\overline{\psi}_6 + \psi_6\overline{\psi}_3 - \psi_3\overline{\psi}_7 + \psi_7\overline{\psi}_3 + \psi_4\overline{\psi}_5 \\
&\quad -\psi_5\overline{\psi}_4 - \psi_4\overline{\psi}_8 + \psi_8\overline{\psi}_4 + i(-\psi_1\overline{\psi}_3 - \psi_3\overline{\psi}_1 + \psi_2\overline{\psi}_4 \\
&\quad +\psi_4\overline{\psi}_2 + \psi_5\overline{\psi}_7 + \psi_7\overline{\psi}_5 - \psi_6\overline{\psi}_8 - \psi_8\overline{\psi}_6)\Big) \\
F_{24} + F_{37} + F_{56} &= i\Big( - \psi_1\overline{\psi}_3 + \psi_3\overline{\psi}_1 + \psi_1\overline{\psi}_7 - \psi_7\overline{\psi}_1 + \psi_2\overline{\psi}_4 - \psi_4\overline{\psi}_2 \\
&\quad +\psi_2\overline{\psi}_8 - \psi_8\overline{\psi}_2 - \psi_3\overline{\psi}_5 + \psi_5\overline{\psi}_3 - \psi_4\overline{\psi}_6 + \psi_6\overline{\psi}_4 \\
&\quad -\psi_5\overline{\psi}_7 + \psi_7\overline{\psi}_5 + \psi_6\overline{\psi}_8 - \psi_8\overline{\psi}_6 \\
&\quad +i(-\psi_1\overline{\psi}_5 - \psi_5\overline{\psi}_1 - \psi_2\overline{\psi}_6 - \psi_6\overline{\psi}_2 - \psi_3\overline{\psi}_7 - \psi_7\overline{\psi}_3 \\
&\quad -\psi_4\overline{\psi}_8 - \psi_8\overline{\psi}_4)\Big).
\end{aligned}
$$

Aşağıdaki bölümde $M = \mathbb{R}^7$ manifoldu üzerinde, yukarıda tanımlanan Spin$^c-$yapısı üzerinde Seiberg$-$Witten denklemlerinin ikincisi olan eğrilik denklemine karşılık gelen denklem sistemine alternatif bir formül verilmiştir.

### 5.3.2 7−boyutta eğrilik denklemi için alternatif formül

Seiberg-Witten denklemlerini ikinci denkleme benzer bir denklem yazabilmek için öncelikle

$$\rho : \Omega^2\big(M, i\mathbb{R}\big) \to End\big(S\big)$$
$$\eta \;\mapsto\; \sum_{i<j} \eta_{ij}\kappa(e_i)\kappa(e_j)$$

dönüşümü yardımı ile $\rho\Big(\Omega_7^{2,-2}\big(M, i\mathbb{R}\big)\Big) = W' \subset End(S)$ alt demetini alalım. Ayrıca $\Psi\Psi^*$ ın $W'$ üstüne dik izdüşümü $\big(\Psi\Psi^*\big)^+ = Proj_{W'}\big(\Psi\Psi^*\big)$ olsun. Buna göre 7−boyutlu $(M, g, \Phi)$ $G_2$−yapısına sahip manifoldlar üzerinde Seiberg−Witten denklemleri:

1. $D_A\big(\Psi\big) = 0$
2. $\rho\big(F_A^+\big) = 8\big(\Psi\Psi^*\big)^+$

şeklindedir. Matrisler üzerinde tanımlanan iç çarpım ile $\big\langle \rho\big(f_i\big), \rho\big(f_i\big)\big\rangle = 3$ elde edilir. Daha sonra elde edilen sonuç aşağıda verilen alternatif formülde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\rho(F_A^+) &= 8\big(\Psi\Psi^*\big)^+\\ &= \tfrac{8}{3}\sum_{i=1}^{7}\big\langle \rho(f_i), (\Psi\Psi^*)\big\rangle \rho(f_i).\end{aligned}$$

dir. Yukarıda verilen bilgiler ile eğrilik denkleminin açık hali aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
F_{12} - F_{34} + F_{57} &= -i\Big(\psi_1\overline{\psi}_2 + \psi_2\overline{\psi}_1 + \psi_1\overline{\psi}_7 + \psi_7\overline{\psi}_1 + \psi_2\overline{\psi}_8 + \psi_8\overline{\psi}_2\\
&\quad +\psi_3\overline{\psi}_4 + \psi_4\overline{\psi}_3 - \psi_3\overline{\psi}_5 - \psi_5\overline{\psi}_3 - \psi_4\overline{\psi}_6 - \psi_6\overline{\psi}_4\\
&\quad +\psi_5\overline{\psi}_6 + \psi_6\overline{\psi}_5 + \psi_7\overline{\psi}_8 + \psi_8\overline{\psi}_7\\
&\quad +i(-\psi_1\overline{\psi}_5 + \psi_5\overline{\psi}_1 - \psi_2\overline{\psi}_6 + \psi_6\overline{\psi}_2 - \psi_3\overline{\psi}_7 + \psi_7\overline{\psi}_3\\
&\quad -\psi_4\overline{\psi}_8 + \psi_8\overline{\psi}_4)\Big)\\
F_{13} + F_{26} + F_{45} &= \Big(\psi_1\overline{\psi}_2 - \psi_2\overline{\psi}_1 + \psi_1\overline{\psi}_7 - \psi_7\overline{\psi}_1 - \psi_2\overline{\psi}_8 + \psi_8\overline{\psi}_2\\
&\quad -\psi_3\overline{\psi}_4 + \psi_4\overline{\psi}_3 - \psi_4\overline{\psi}_6 + \psi_6\overline{\psi}_4 - \psi_5\overline{\psi}_3 + \psi_3\overline{\psi}_5 + \psi_5\overline{\psi}_6\\
&\quad -\psi_6\overline{\psi}_5 - \psi_7\overline{\psi}_8 + \psi_8\overline{\psi}_7 + i(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2\\
&\quad -|\psi_3|^2 - |\psi_4|^2 - |\psi_5|^2 - |\psi_6|^2 - |\psi_7|^2 - |\psi_8|^2)\Big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
F_{14} - F_{35} - F_{67} &= i\Big(\psi_1\overline{\psi}_4 + \psi_4\overline{\psi}_1 - \psi_2\overline{\psi}_3 - \psi_3\overline{\psi}_2 + \psi_5\overline{\psi}_8 + \psi_8\overline{\psi}_5 \\
&\quad -\psi_6\overline{\psi}_7 - \psi_7\overline{\psi}_6 + (|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2 \\
&\quad -|\psi_5|^2 - |\psi_6|^2 + |\psi_7|^2 + |\psi_8|^2) + i(\psi_1\overline{\psi}_3 - \psi_3\overline{\psi}_1 \\
&\quad +\psi_2\overline{\psi}_4 - \psi_4\overline{\psi}_2 - \psi_5\overline{\psi}_7 + \psi_7\overline{\psi}_5 - \psi_6\overline{\psi}_8 + \psi_8\overline{\psi}_6)\Big) \\
F_{15} - F_{27} + F_{34} &= -i\Big(\psi_1\overline{\psi}_3 + \psi_3\overline{\psi}_1 - \psi_1\overline{\psi}_7 - \psi_7\overline{\psi}_1 + \psi_2\overline{\psi}_4 + \psi_4\overline{\psi}_2 \\
&\quad +\psi_4\overline{\psi}_6 + \psi_6\overline{\psi}_4 - \psi_3\overline{\psi}_5 - \psi_5\overline{\psi}_3 + \psi_5\overline{\psi}_7 + \psi_7\overline{\psi}_5 \\
&\quad +\psi_2\overline{\psi}_8 + \psi_8\overline{\psi}_2 + \psi_6\overline{\psi}_8 + \psi_8\overline{\psi}_6 + i(-\psi_1\overline{\psi}_4 + \psi_4\overline{\psi}_1 \\
&\quad +\psi_2\overline{\psi}_3 - \psi_3\overline{\psi}_2 + \psi_5\overline{\psi}_8 - \psi_8\overline{\psi}_5 - \psi_6\overline{\psi}_7 + \psi_7\overline{\psi}_6)\Big) \\
F_{16} - F_{23} + F_{47} &= -\Big( - \psi_1\overline{\psi}_5 - \psi_5\overline{\psi}_1 + \psi_1\overline{\psi}_8 + \psi_8\overline{\psi}_1 - \psi_2\overline{\psi}_6 - \psi_6\overline{\psi}_2 \\
&\quad -\psi_2\overline{\psi}_7 - \psi_7\overline{\psi}_2 + \psi_3\overline{\psi}_6 + \psi_6\overline{\psi}_3 + \psi_3\overline{\psi}_7 + \psi_7\overline{\psi}_3 - \psi_4\overline{\psi}_5 \\
&\quad -\psi_5\overline{\psi}_4 + \psi_4\overline{\psi}_8 + \psi_8\overline{\psi}_4 + (|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2 - |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2 \\
&\quad +|\psi_5|^2 - |\psi_6|^2 - |\psi_7|^2 + |\psi_8|^2)\Big) \\
F_{17} + F_{25} - F_{46} &= \Big(\psi_1\overline{\psi}_5 - \psi_5\overline{\psi}_1 - \psi_1\overline{\psi}_8 + \psi_8\overline{\psi}_1 + \psi_2\overline{\psi}_6 - \psi_6\overline{\psi}_2 \\
&\quad +\psi_2\overline{\psi}_7 - \psi_7\overline{\psi}_2 - \psi_3\overline{\psi}_6 + \psi_6\overline{\psi}_3 - \psi_3\overline{\psi}_7 + \psi_7\overline{\psi}_3 + \psi_4\overline{\psi}_5 \\
&\quad -\psi_5\overline{\psi}_4 - \psi_4\overline{\psi}_8 + \psi_8\overline{\psi}_4 + i(-\psi_1\overline{\psi}_3 - \psi_3\overline{\psi}_1 + \psi_2\overline{\psi}_4 \\
&\quad +\psi_4\overline{\psi}_2 + \psi_5\overline{\psi}_7 + \psi_7\overline{\psi}_5 - \psi_6\overline{\psi}_8 - \psi_8\overline{\psi}_6)\Big) \\
F_{24} + F_{37} + F_{56} &= i\Big( - \psi_1\overline{\psi}_3 + \psi_3\overline{\psi}_1 + \psi_1\overline{\psi}_7 - \psi_7\overline{\psi}_1 + \psi_2\overline{\psi}_4 - \psi_4\overline{\psi}_2 \\
&\quad +\psi_2\overline{\psi}_8 - \psi_8\overline{\psi}_2 - \psi_3\overline{\psi}_5 + \psi_5\overline{\psi}_3 - \psi_4\overline{\psi}_6 + \psi_6\overline{\psi}_4 \\
&\quad -\psi_5\overline{\psi}_7 + \psi_7\overline{\psi}_5 + \psi_6\overline{\psi}_8 - \psi_8\overline{\psi}_6 \\
&\quad +i(-\psi_1\overline{\psi}_5 - \psi_5\overline{\psi}_1 - \psi_2\overline{\psi}_6 - \psi_6\overline{\psi}_2 - \psi_3\overline{\psi}_7 - \psi_7\overline{\psi}_3 \\
&\quad -\psi_4\overline{\psi}_8 - \psi_8\overline{\psi}_4)\Big).
\end{aligned}
$$

Yukarıda alternatif formül ile ifade edilen eğrilik denklemi ile [5] de verilen denklemin denklem sistemi ile aynı sonucu verdiği açıkça görülür.

## 5.4 $8-$Boyutta Seiberg$-$Witten Denklemleri

Seiberg-Witten denklemlerinin ilki olan Dirac denkleminin herhangi boyutta herhangi bir Spin$^c-$yapısı için anlamlı olduğu önceki bölümlerde ifade edilmişti. Hatırlanacağı üzere $8-$boyutlu yönlendirilebilir Riemann manifoldun yapı grubu SO(8) olduğundan, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ açık örtüsü ve $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow SO(8)$ geçiş fonksiyonları vardır.
Eğer aşağıdaki gibi geçiş fonksiyonlarının diğer bir kolleksiyonu mevcut

$$\widetilde{g}_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow Spin^c(8)$$

ve aşağıdaki diyagramı değişmeli yapıyor ise

$$\begin{tikzcd} & Spin^c(8) \arrow[d, "\lambda"] \\ U_\alpha \cup U_\beta \arrow[ur, "\widetilde{g}_{\alpha\beta}"] \arrow[r, "g_{\alpha\beta}"'] & SO(8) \end{tikzcd}$$

yani

$$\lambda \circ \widetilde{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}.$$

$\forall x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ için $\widetilde{g}_{\alpha\beta}(x) \circ \widetilde{g}_{\beta\gamma}(x) = \widetilde{g}_{\alpha\gamma}(x)$ koşulu sağlanıyorsa M manifolduna Spin$^c$ manifoldu denir. Spin$^c-$yapısına sahip bir manifold üzerinde ise spinor demeti inşaa edilebilir. Spinor demetinin üzerinde de Dirac operatörü yazılabilir. Öte yandan $8-$boyutlu $M$ manifoldu $Spin(7)-$yapısına sahipse $(M, g, \Phi)$ $\Phi$ temel 4-formu yardımı ile $2-$formların uzayının $\Omega^2\big(M\big) = \Omega_7^{2,3}\big(M\big) \oplus \Omega_{21}^{2,-1}\big(M\big)$ şeklinde bir ayrışımı vardır [4]. Burada

$$\begin{aligned} \Omega_7^{2,3}\big(M\big) &= \Big\{\omega \in \Omega^2\big(M\big) \,|\, *(\Phi \wedge \omega) = 3\omega\Big\} \\ \Omega_{21}^{2,-1}(M) &= \Big\{\omega \in \Omega^2\big(M\big) \,|\, *\big(\Phi \wedge \omega\big) = -\omega\Big\} \end{aligned}$$

dir. Bu bölümde [4, 6] de olduğu gibi $\Omega_7^{2,3}\big(M\big)$ $2-$formların self-dual uzayı olarak göz önüne alınacaktır. Buna bağlı olarak $i\mathbb{R}$ değerli 2-formların dekomposizyonu da aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\Omega^2\big(M, i\mathbb{R}\big) = \Omega_7^{2,3}\big(M, i\mathbb{R}\big) \oplus \Omega_{21}^{2,-1}\big(M, i\mathbb{R}\big).$$

$F_A$ nın $\Omega_7^{2,3}\big(M, i\mathbb{R}\big)$ ye düşen parçasına $F_A$ nın self$-$dual kısmı denir ve $F_A^+$ ile gösterilir. Burada

$$F_A^+ \;=\; Proj_{\Omega_7^{2,3}\left(M,i\mathbb{R}\right)} F_A$$

dır. Şimdi daha önce tanımlanan

$$\begin{aligned} \rho^+ : \Omega^2\big(M, i\mathbb{R}\big) &\rightarrow End\big(S^+\big) \\ \eta &\mapsto \sum_{i<j} \eta_{ij}\kappa(e_i)\kappa(e_j) \end{aligned}$$

dönüşümü yardımı ile $\rho^+\Big(\Omega_7^{2,3}\big(M, i\mathbb{R}\big)\Big) = W' \subset End(S)$ alt demetini alalım. Ayrıca $\Psi\Psi^*$ ın $W'$ üstüne dik izdüşümü $\big(\Psi\Psi^*\big)^+ = Proj_{W'}\big(\Psi\Psi^*\big)$ olsun. Buna göre $8-$boyutlu $(M, g, \Phi)$ $Spin(7)-$yapısına sahip $M$ manifoldu üzerindeki Seiberg$-$Witten denklemleri:

1. $D_A^+\big(\Psi\big) = 0$
2. $\rho^+\big(F_A^+\big) = \big(\Psi\Psi^*\big)^+$

şeklinde ifade edilmiştir [4]. [4] de ele alınan çalışmada özel olarak $M = \mathbb{R}^8$ durumunda Seiberg$-$Witten denklemleri aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

### 5.4.1 $8-$boyutta denklemlerin lokal ifadeleri

$8-$boyutlu manifoldlarda kompleks $8-$spinorların vektör uzayı $16-$boyutludur ve $\Delta_8 = \mathbb{C}^{16}$ ile gösterilir. $\mathbb{C}l_8 \cong End\big(\Delta_8\big)$ olduğundan $\mathbb{C}l_8$ kompleks Clifford cebirinin spin temsili $\kappa_8$ aşağıdaki şekilde verilir:

$$\kappa_8 : \mathbb{C}l_8 \rightarrow End\big(\Delta_8\big)$$

$$\kappa_8(e_1) = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{bmatrix}, \quad \kappa_8(e_2) = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_1 \\ -\gamma_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \kappa_8(e_3) = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_2 \\ -\gamma_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\kappa_8(e_4) = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_3 \\ -\gamma_3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \kappa_8(e_5) = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_4 \\ -\gamma_4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \kappa_8(e_6) = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_5 \\ -\gamma_5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\kappa_8(e_7) = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_6 \\ -\gamma_6 & 0 \end{bmatrix}, \quad \kappa_8(e_8) = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_7 \\ -\gamma_7 & 0 \end{bmatrix}$$

Burada $\mathbb{I}, 8 \times 8$ lik birim matristir ve $i = 1, ..., 7$ için $\gamma_i$ matrisleri aşağıdaki gibidir:

$$\gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\gamma_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \gamma_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\gamma_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \gamma_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\gamma_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\gamma_i$ matrisleri, $\mathbb{C}l_7 \cong End\big(\Delta_8\big) \oplus End\big(\Delta_8\big)$ izomorfizmi altında $\mathbb{C}l_7$ cebirinin üreteçlerinin görüntülerinin birinci izdüşüm dönüşümü altındaki görüntüleridir. $n = 8$ durumunda $\Psi \in \Gamma\big(S^+\big)$ ve $A \in \Omega^1\big(M, i\mathbb{R}\big)$ konneksiyon $1-$formu için Dirac operatörü

$$\begin{aligned} D_A^+ : \Gamma(S^+) &\rightarrow \Gamma(S^-) \\ \Psi &\mapsto D_A^+\Psi = \sum_{i=1}^{8} e_i \cdot \nabla_{e_i}^A \Psi \end{aligned}$$

olur. Lokal koordinatlarda $A$ konneksiyon $1-$formu $A_i : \mathbb{R}^8 \rightarrow i\mathbb{R}$ düzgün olmak üzere

$$A = \sum_{i=1}^{8} A_i dx^i$$

şeklinde ifade edilebilir. O halde $A$ nın eğriliği $F_A$, $F_{ij} = \Big(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j}\Big), 1 \leq i < j \leq 8$ için aşağıdaki gibi

$$F_A = dA = \sum_{i<j} F_{ij} dx^i \wedge dx^j \in \Omega^2\Big(M, \mathrm{i}\mathbb{R}\Big) \tag{5.5}$$

ifade edilir.

$\Psi \in \Gamma\big(S^+\big)$ spinorunun $\nabla^A \Psi$ kovaryant türevi $\omega_{ij} = g\big(\nabla e_i, e_j\big)$ olmak üzere

$$\nabla^A \Psi = d\Psi + \tfrac{1}{2} \sum_{i<j} \omega_{ij} e_i e_j \Psi + \tfrac{1}{2} A \Psi$$

olur. Burada $\omega_{ij} = g\big(\nabla e_i, e_j\big)$ ifadesinde geçen $\nabla$ konneksiyonu manifold üzerindeki Levi$-$Civita konneksiyonudur. Dikkat edilirse $\mathbb{R}^8$ üzerinde $\omega_{ij}$ ler sıfırdır. $e_i$ yönünde $\Psi$ spinorunun $\nabla^A_{e_i} \Psi$ kovaryant türevinin lokal ifadesi

$$\nabla^A_{e_i} \Psi = \Big(d\Psi + \tfrac{1}{2} A \Psi\Big)(e_i) = d\Psi(e_i) + \tfrac{1}{2} A \Psi(e_i)$$

şeklindedir.

$$d\Psi(e_i) = \begin{bmatrix} d\psi_1 \\ d\psi_2 \\ \vdots \\ d\psi_8 \end{bmatrix} (e_i) = \begin{bmatrix} d\psi_1(e_i) \\ d\psi_2(e_i) \\ \vdots \\ d\psi_8(e_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial \psi_8}{\partial x_i} \end{bmatrix}$$

ve

$$\frac{1}{2} A \Psi(e_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{8} A_i dx^i(e_i) \Psi = \frac{1}{2} A_i \Psi,$$

olduğundan

$$\nabla^A_{e_i} \Psi = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial \psi_8}{\partial x_i} \end{bmatrix} + \tfrac{1}{2} A_i \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} + \frac{1}{2} A_i \psi_1 \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x_i} + \frac{1}{2} A_i \psi_2 \\ \vdots \\ \frac{\partial \psi_8}{\partial x_i} + \frac{1}{2} A_i \psi_8 \end{bmatrix}$$

olarak yazılabilir. Yukarıda verilenlere göre $D_A^+ : \Gamma(S^+) \to \Gamma(S^-)$ Dirac operatörü

$$\begin{aligned} D_A^+ \Psi &= \sum_{i=1}^{8} e_i \cdot \nabla^A_{e_i} \Psi = \sum \kappa_8(e_i) \big(\nabla^A_{e_i} \Psi\big) \\ &= \sum_{i=1}^{8} \kappa_8(e_i) \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} + \frac{1}{2} A_i \psi_1 \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x_i} + \frac{1}{2} A_i \psi_2 \\ \vdots \\ \frac{\partial \psi_8}{\partial x_i} + \frac{1}{2} A_i \psi_8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olur ve $D_A^+\Psi=0$ denkleminin açık hali aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$
\begin{aligned}
-\ & \tfrac{\partial}{\partial x_1}\psi_1+\tfrac{\partial}{\partial x_3}\psi_2+\tfrac{\partial}{\partial x_5}\psi_3+\tfrac{\partial}{\partial x_7}\psi_4+\tfrac{\partial}{\partial x_2}\psi_5+\tfrac{\partial}{\partial x_4}\psi_6+\tfrac{\partial}{\partial x_6}\psi_7+\tfrac{\partial}{\partial x_8}\psi_8\\
+\ & \tfrac{1}{2}\Big(-\psi_1A_1+\psi_5A_2+\psi_2A_3+\psi_6A_4+\psi_3A_5+\psi_7A_6+\psi_4A_7+\psi_8A_8\Big)=0\\
-\ & \tfrac{\partial}{\partial x_3}\psi_1-\tfrac{\partial}{\partial x_1}\psi_2+\tfrac{\partial}{\partial x_7}\psi_3-\tfrac{\partial}{\partial x_5}\psi_4-\tfrac{\partial}{\partial x_4}\psi_5+\tfrac{\partial}{\partial x_2}\psi_6+\tfrac{\partial}{\partial x_6}\psi_8-\tfrac{\partial}{\partial x_8}\psi_7\\
+\ & \tfrac{1}{2}\Big(-\psi_2A_1+\psi_6A_2-\psi_1A_3-\psi_5A_4-\psi_4A_5+\psi_8A_6+\psi_3A_7-\psi_7A_8\Big)=0\\
-\ & \tfrac{\partial}{\partial x_5}\psi_1-\tfrac{\partial}{\partial x_7}\psi_2-\tfrac{\partial}{\partial x_1}\psi_3+\tfrac{\partial}{\partial x_3}\psi_4-\tfrac{\partial}{\partial x_6}\psi_5+\tfrac{\partial}{\partial x_2}\psi_7-\tfrac{\partial}{\partial x_4}\psi_8+\tfrac{\partial}{\partial x_8}\psi_6\\
+\ & \tfrac{1}{2}\Big(-\psi_3A_1+\psi_7A_2+\psi_4A_3-\psi_8A_4-\psi_1A_5-\psi_5A_6-\psi_2A_7+\psi_6A_8\Big)=0\\
-\ & \tfrac{\partial}{\partial x_7}\psi_1+\tfrac{\partial}{\partial x_5}\psi_2-\tfrac{\partial}{\partial x_3}\psi_3-\tfrac{\partial}{\partial x_1}\psi_4-\tfrac{\partial}{\partial x_6}\psi_6+\tfrac{\partial}{\partial x_4}\psi_7+\tfrac{\partial}{\partial x_2}\psi_8-\tfrac{\partial}{\partial x_8}\psi_5\\
+\ & \tfrac{1}{2}\Big(-\psi_4A_1+\psi_8A_2-\psi_3A_3+\psi_7A_4+\psi_2A_5-\psi_6A_6-\psi_1A_7-\psi_5A_8\Big)=0\\
-\ & \tfrac{\partial}{\partial x_2}\psi_1+\tfrac{\partial}{\partial x_4}\psi_2+\tfrac{\partial}{\partial x_6}\psi_3-\tfrac{\partial}{\partial x_1}\psi_5-\tfrac{\partial}{\partial x_3}\psi_6-\tfrac{\partial}{\partial x_5}\psi_7-\tfrac{\partial}{\partial x_7}\psi_8+\tfrac{\partial}{\partial x_8}\psi_4\\
+\ & \tfrac{1}{2}\Big(-\psi_5A_1-\psi_1A_2-\psi_6A_3-\psi_7A_5+\psi_3A_6-\psi_8A_7+\psi_4A_8+\psi_2A_4\Big)=0\\
-\ & \tfrac{\partial}{\partial x_4}\psi_1-\tfrac{\partial}{\partial x_2}\psi_2+\tfrac{\partial}{\partial x_6}\psi_4+\tfrac{\partial}{\partial x_3}\psi_5-\tfrac{\partial}{\partial x_1}\psi_6-\tfrac{\partial}{\partial x_7}\psi_7+\tfrac{\partial}{\partial x_5}\psi_8-\tfrac{\partial}{\partial x_8}\psi_3\\
+\ & \tfrac{1}{2}\Big(-\psi_6A_1-\psi_2A_2+\psi_5A_3-\psi_1A_4+\psi_8A_5+\psi_4A_6-\psi_7A_7-\psi_3A_8\Big)=0\\
-\ & \tfrac{\partial}{\partial x_6}\psi_1-\tfrac{\partial}{\partial x_2}\psi_3-\tfrac{\partial}{\partial x_4}\psi_4+\tfrac{\partial}{\partial x_5}\psi_5+\tfrac{\partial}{\partial x_7}\psi_6-\tfrac{\partial}{\partial x_1}\psi_7-\tfrac{\partial}{\partial x_3}\psi_8+\tfrac{\partial}{\partial x_8}\psi_2\\
+\ & \tfrac{1}{2}\Big(-\psi_7A_1-\psi_3A_2-\psi_8A_3-\psi_4A_4+\psi_5A_5-\psi_1A_6+\psi_6A_7+\psi_2A_8\Big)=0\\
-\ & \tfrac{\partial}{\partial x_6}\psi_2+\tfrac{\partial}{\partial x_4}\psi_3-\tfrac{\partial}{\partial x_2}\psi_4+\tfrac{\partial}{\partial x_7}\psi_5-\tfrac{\partial}{\partial x_5}\psi_6+\tfrac{\partial}{\partial x_3}\psi_7-\tfrac{\partial}{\partial x_1}\psi_8-\tfrac{\partial}{\partial x_8}\psi_1\\
+\ & \tfrac{1}{2}\Big(-\psi_8A_1-\psi_4A_2+\psi_7A_3+\psi_3A_4-\psi_6A_5-\psi_2A_6+\psi_5A_7-\psi_1A_8\Big)=0
\end{aligned}
$$

$\{e_1,...,e_8\}$ $\mathbb{R}^8$ in ortonormal tabanı ve bu tabanlara karşılık gelen dual tabanlar $\{e^1,...,e^8\}$ olsun. O halde eğrilik denkleminin açık hali $\Omega_7^{2,3}(\mathbb{R}^8,i\mathbb{R})$ uzayının

$$
\begin{aligned}
f_1 &= e^1\wedge e^5+e^2\wedge e^6+e^3\wedge e^7+e^4\wedge e^8,\\
f_2 &= e^1\wedge e^2+e^3\wedge e^4-e^5\wedge e^6-e^7\wedge e^8\\
f_3 &= e^1\wedge e^6-e^2\wedge e^5-e^3\wedge e^8+e^4\wedge e^7,\\
f_4 &= e^1\wedge e^3-e^2\wedge e^4-e^5\wedge e^7+e^6\wedge e^8,\\
f_5 &= e^1\wedge e^7+e^2\wedge e^8-e^3\wedge e^5-e^4\wedge e^6,\\
f_6 &= e^1\wedge e^4+e^2\wedge e^3-e^5\wedge e^8-e^6\wedge e^7,\\
f_7 &= e^1\wedge e^8-e^2\wedge e^7+e^3\wedge e^6-e^4\wedge e^5.
\end{aligned}
$$

şeklindeki taban elemanlarına bağlı olarak bağlı aşağıdaki gibi elde edilir. Matrisler uzayı üzerinde tanımlanan iç çarpım ve $\langle\rho^+(f_i),\rho^+(f_i)\rangle = 4$ elde edilen eşitlik ile

$$\begin{aligned}\rho^+(F_A^+) &= \big(\Psi\Psi^*\big)^+\\ &= \tfrac{1}{4}\sum_{i=1}^{7}\big\langle\rho^+(f_i),(\Psi\Psi^*)\big\rangle\rho^+(f_i).\end{aligned}$$

elde edilir.

Yukarıda verilen bilgiler yardımı ile ikinci denklemin açık hali aşağıdaki gibi olur:

$$\rho^+\big(F_A^+\big) = \sum_{i=1}^{7}\frac{\big\langle\rho^+(f_i),(\Psi\Psi^*)\big\rangle}{\big\langle\rho^+(f_i),\rho^+(f_i)\big\rangle}\rho^+(f_i)$$

daha da açık bir şekildeki ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
F_{15}+F_{26}+F_{37}+F_{48} &= \tfrac{1}{4}(\psi_1\overline{\psi_3}-\psi_3\overline{\psi_1}-\psi_2\overline{\psi_4}+\psi_4\overline{\psi_2}-\psi_5\overline{\psi_7}+\psi_7\overline{\psi_5}-\psi_4\overline{\psi_8}+\psi_8\overline{\psi_6})\\
F_{12}+F_{34}-F_{56}-F_{78} &= \tfrac{1}{4}(\psi_1\overline{\psi_5}-\psi_5\overline{\psi_1}-\psi_2\overline{\psi_6}+\psi_6\overline{\psi_2}+\psi_3\overline{\psi_7}-\psi_7\overline{\psi_3}+\psi_4\overline{\psi_8}-\psi_8\overline{\psi_4})\\
F_{16}-F_{25}-F_{38}+F_{47} &= \tfrac{1}{4}(\psi_1\overline{\psi_7}-\psi_7\overline{\psi_1}+\psi_2\overline{\psi_8}-\psi_8\overline{\psi_2}-\psi_3\overline{\psi_5}+\psi_5\overline{\psi_3}+\psi_4\overline{\psi_6}-\psi_6\overline{\psi_4})\\
F_{13}-F_{24}-F_{57}+F_{68} &= \tfrac{1}{4}(\psi_1\overline{\psi_2}-\psi_2\overline{\psi_1}+\psi_3\overline{\psi_4}-\psi_4\overline{\psi_3}+\psi_5\overline{\psi_6}-\psi_6\overline{\psi_5}-\psi_7\overline{\psi_8}+\psi_8\overline{\psi_7})\\
F_{17}+F_{28}-F_{35}-F_{46} &= \tfrac{1}{4}(\psi_1\overline{\psi_4}-\psi_4\overline{\psi_1}+\psi_2\overline{\psi_3}-\psi_3\overline{\psi_2}-\psi_5\overline{\psi_8}+\psi_8\overline{\psi_5}+\psi_6\overline{\psi_7}-\psi_7\overline{\psi_6})\\
F_{14}+F_{23}-F_{58}-F_{67} &= \tfrac{1}{4}(\psi_6\overline{\psi_1}-\psi_1\overline{\psi_6}-\psi_2\overline{\psi_5}+\psi_5\overline{\psi_2}-\psi_3\overline{\psi_8}+\psi_8\overline{\psi_3}+\psi_4\overline{\psi_7}-\psi_7\overline{\psi_4})\\
F_{18}-F_{27}-F_{36}-F_{45} &= \tfrac{1}{4}(\psi_1\overline{\psi_8}-\psi_8\overline{\psi_1}-\psi_2\overline{\psi_7}+\psi_7\overline{\psi_2}-\psi_3\overline{\psi_6}+\psi_6\overline{\psi_3}-\psi_4\overline{\psi_5}-\psi_5\overline{\psi_4}).
\end{aligned}$$

Aşağıdaki bölümde $M=\mathbb{R}^8$ manifoldu üzerinde, yukarıda tanımlanan Spin$^c$ yapısı üzerinde Seiberg$-$Witten denklemlerinin ikincisi olan eğrilik denklemine karşılık gelen denklem sistemine alternatif bir formül verilmiştir.

### 5.4.2 8$-$boyutta eğrilik denklemi için alternatif formül

Seiberg-Witten denklemlerini ikinci denkleme benzer bir denklem yazabilmek için öncelikle

$$\begin{aligned}\sigma^+:\Gamma\big(S^+\big) &\rightarrow \Omega_7^{2,3}\big(M,i\mathbb{R}\big)\\ \Psi &\mapsto \sigma^+(\Psi)=\sum_{i=1}^{7}\frac{\big\langle f_i,\sigma^+(\Psi)\big\rangle}{\big\langle f_i,f_i\big\rangle}f_i\end{aligned}$$

quadratik dönüşümü yazılır. Burada $\{f_1,f_2,...,f_7\}$, $M$ manifoldu üzerindeki ortonormal $\{e_1,e_2,...,e_8\}$ çatısına göre $\Omega_7^{2,3}\big(M,i\mathbb{R}\big)$ vektör uzayının tabanıdır. Bu dönüşüm yardımı ile Seiberg$-$Witten denkleminin ikinci denklemi olan eğrilik denklemi aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$F_A^+ = \tfrac{1}{8}\sigma^+(\Psi).$$

benzer bir yaklaşım [6] da vardır. O halde $\Omega_7^{2;3}(M, i\mathbb{R})$ uzayının $\left\{f_1, f_2, .., f_7\right\}$ tabanının elemanlarını kullanarak 2−formlar üzerinde tanımlanan iç çarpım ile $\left\langle f_i, f_i\right\rangle = 4$ elde edilir. Elde edilen bu eşitlik aşağıdaki alternatif formülde yerine yazılırsa, eğrilik denklemi

$$\begin{aligned}\sigma^+(\Psi) &= \tfrac{1}{8}\sum_{i=1}^{7}\frac{\left\langle f_i, \sigma(\Psi)\right\rangle}{\left\langle f_i, f_i\right\rangle} f_i \\ &= \tfrac{1}{32}\sum_{i=1}^{7}\left\langle f_i, \sigma(\Psi)\right\rangle f_i\end{aligned}$$

halini alır. Yukarıda verilenler denklemde yerine yazılırsa, ikinci denkleme karşılık gelen alternatif formülün denkleminin açık olarak ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
F_{15} + F_{26} + F_{37} + F_{48} &= \tfrac{1}{4}(\psi_1\overline{\psi_3} - \psi_3\overline{\psi_1} - \psi_2\overline{\psi_4} + \psi_4\overline{\psi_2} - \psi_5\overline{\psi_7} + \psi_7\overline{\psi_5} - \psi_4\overline{\psi_8} + \psi_8\overline{\psi_6}) \\
F_{12} + F_{34} - F_{56} - F_{78} &= \tfrac{1}{4}(\psi_1\overline{\psi_5} - \psi_5\overline{\psi_1} - \psi_2\overline{\psi_6} + \psi_6\overline{\psi_2} + \psi_3\overline{\psi_7} - \psi_7\overline{\psi_3} + \psi_4\overline{\psi_8} - \psi_8\overline{\psi_4}) \\
F_{16} - F_{25} - F_{38} + F_{47} &= \tfrac{1}{4}(\psi_1\overline{\psi_7} - \psi_7\overline{\psi_1} + \psi_2\overline{\psi_8} - \psi_8\overline{\psi_2} - \psi_3\overline{\psi_5} + \psi_5\overline{\psi_3} + \psi_4\overline{\psi_6} - \psi_6\overline{\psi_4}) \\
F_{13} - F_{24} - F_{57} + F_{68} &= \tfrac{1}{4}(\psi_1\overline{\psi_2} - \psi_2\overline{\psi_1} + \psi_3\overline{\psi_4} - \psi_4\overline{\psi_3} + \psi_5\overline{\psi_6} - \psi_6\overline{\psi_5} - \psi_7\overline{\psi_8} + \psi_8\overline{\psi_7}) \\
F_{17} + F_{28} - F_{35} - F_{46} &= \tfrac{1}{4}(\psi_1\overline{\psi_4} - \psi_4\overline{\psi_1} + \psi_2\overline{\psi_3} - \psi_3\overline{\psi_2} - \psi_5\overline{\psi_8} + \psi_8\overline{\psi_5} + \psi_6\overline{\psi_7} - \psi_7\overline{\psi_6}) \\
F_{14} + F_{23} - F_{58} - F_{67} &= \tfrac{1}{4}(\psi_6\overline{\psi_1} - \psi_1\overline{\psi_6} - \psi_2\overline{\psi_5} + \psi_5\overline{\psi_2} - \psi_3\overline{\psi_8} + \psi_8\overline{\psi_3} + \psi_4\overline{\psi_7} - \psi_7\overline{\psi_4}) \\
F_{18} - F_{27} - F_{36} - F_{45} &= \tfrac{1}{4}(\psi_1\overline{\psi_8} - \psi_8\overline{\psi_1} - \psi_2\overline{\psi_7} + \psi_7\overline{\psi_2} - \psi_3\overline{\psi_6} + \psi_6\overline{\psi_3} - \psi_4\overline{\psi_5} - \psi_5\overline{\psi_4}).
\end{aligned}$$

Yukarıda alternatif formül ile ifade edilen eğrilik denklemi ile [4] de verilen denklemin denklem kümesi ile aynı sonucu verdiği açıkça görülür. Aşağıdaki bölümde $\mathbb{H}^8$ üzerinde Seiberg−Witten denklemleri ifade edilmiştir.

### 5.4.3 $\mathbb{H}^8$ üzerinde Seiberg$-$Witten denklemleri

$\mathbb{H}^4$ üzerinde konneksiyon 1$-$formların genel ifadesi elde edilmişti. Dolayısıyla bu formülasyondan yararlanarak $\mathbb{H}^8$ üzerinde konneksiyon 1$-$formu aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\omega_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{dx^1}{x_8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{dx^2}{x_8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{dx^3}{x_8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{dx^4}{x_8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{dx^5}{x_8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{dx^6}{x_8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{dx^7}{x_8} \\ \frac{dx^1}{x_8} & \frac{dx^2}{x_8} & \frac{dx^3}{x_8} & \frac{dx^4}{x_8} & \frac{dx^5}{x_8} & \frac{dx^6}{x_8} & \frac{dx^7}{x_8} & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbb{H}^4$ te kullanılan benzer yöntemlerle de Dirac denklemi:

$$\begin{aligned}
\Big( & - \tfrac{\partial}{\partial x_1}\psi_1 + \tfrac{\partial}{\partial x_3}\psi_2 + \tfrac{\partial}{\partial x_5}\psi_3 + \tfrac{\partial}{\partial x_7}\psi_4 + \tfrac{\partial}{\partial x_2}\psi_5 + \tfrac{\partial}{\partial x_4}\psi_6 + \tfrac{\partial}{\partial x_6}\psi_7 \\
& + \tfrac{\partial}{\partial x_8}\psi_8 + \tfrac{1}{2}\big( - \psi_1 A_1 + \psi_5 A_2 + \psi_2 A_3 + \psi_6 A_4 + \psi_3 A_5 + \psi_7 A_6 \\
& + \psi_4 A_7 + \psi_8 A_8\big)\Big) x_8 + \tfrac{5\psi_8}{2} = 0 \\
\Big( & - \tfrac{\partial}{\partial x_3}\psi_1 - \tfrac{\partial}{\partial x_1}\psi_2 + \tfrac{\partial}{\partial x_7}\psi_3 - \tfrac{\partial}{\partial x_5}\psi_4 - \tfrac{\partial}{\partial x_4}\psi_5 + \tfrac{\partial}{\partial x_2}\psi_6 + \tfrac{\partial}{\partial x_6}\psi_8 \\
& - \tfrac{\partial}{\partial x_8}\psi_7 + \tfrac{1}{2}\big( - \psi_2 A_1 + \psi_6 A_2 - \psi_1 A_3 - \psi_5 A_4 - \psi_4 A_5 + \psi_8 A_6 \\
& + \psi_3 A_7 - \psi_7 A_8\big)\Big) x_8 - \tfrac{5\psi_7}{2} = 0 \\
\Big( & - \tfrac{\partial}{\partial x_5}\psi_1 - \tfrac{\partial}{\partial x_7}\psi_2 - \tfrac{\partial}{\partial x_1}\psi_3 + \tfrac{\partial}{\partial x_3}\psi_4 - \tfrac{\partial}{\partial x_6}\psi_5 + \tfrac{\partial}{\partial x_2}\psi_7 - \tfrac{\partial}{\partial x_4}\psi_8 \\
& + \tfrac{\partial}{\partial x_8}\psi_6 + \tfrac{1}{2}\big( - \psi_3 A_1 + \psi_7 A_2 + \psi_4 A_3 - \psi_8 A_4 - \psi_1 A_5 - \psi_5 A_6 \\
& - \psi_2 A_7 + \psi_6 A_8\big)\Big) x_8 + \tfrac{5\psi_6}{2} = 0 \\
\Big( & - \tfrac{\partial}{\partial x_7}\psi_1 + \tfrac{\partial}{\partial x_5}\psi_2 - \tfrac{\partial}{\partial x_3}\psi_3 - \tfrac{\partial}{\partial x_1}\psi_4 - \tfrac{\partial}{\partial x_6}\psi_6 + \tfrac{\partial}{\partial x_4}\psi_7 + \tfrac{\partial}{\partial x_2}\psi_8 \\
& - \tfrac{\partial}{\partial x_8}\psi_5 + \tfrac{1}{2}\big( - \psi_4 A_1 + \psi_8 A_2 - \psi_3 A_3 + \psi_7 A_4 + \psi_2 A_5 - \psi_6 A_6 \\
& - \psi_1 A_7 - \psi_5 A_8\big)\Big) x_8 - \tfrac{5\psi_5}{2} = 0 \\
\Big( & - \tfrac{\partial}{\partial x_2}\psi_1 + \tfrac{\partial}{\partial x_4}\psi_2 + \tfrac{\partial}{\partial x_6}\psi_3 - \tfrac{\partial}{\partial x_1}\psi_5 - \tfrac{\partial}{\partial x_3}\psi_6 - \tfrac{\partial}{\partial x_5}\psi_7 - \tfrac{\partial}{\partial x_7}\psi_8 \\
& + \tfrac{\partial}{\partial x_8}\psi_4 + \tfrac{1}{2}\big( - \psi_5 A_1 - \psi_1 A_2 - \psi_6 A_3 - \psi_7 A_5 + \psi_3 A_6 \\
& - \psi_8 A_7 + \psi_4 A_8 + \psi_2 A_4\big)\Big) x_8 + \tfrac{5\psi_4}{2} = 0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Big( & - \tfrac{\partial}{\partial x_4}\psi_1 - \tfrac{\partial}{\partial x_2}\psi_2 + \tfrac{\partial}{\partial x_6}\psi_4 + \tfrac{\partial}{\partial x_3}\psi_5 - \tfrac{\partial}{\partial x_1}\psi_6 - \tfrac{\partial}{\partial x_7}\psi_7 + \tfrac{\partial}{\partial x_5}\psi_8 \\
& - \tfrac{\partial}{\partial x_8}\psi_3 + \tfrac{1}{2}\big( - \psi_6 A_1 - \psi_2 A_2 + \psi_5 A_3 - \psi_1 A_4 + \psi_8 A_5 + \psi_4 A_6 \\
& - \psi_7 A_7 - \psi_3 A_8\big)\Big) x_8 - \tfrac{5\psi_3}{2} = 0 \\
\Big( & - \tfrac{\partial}{\partial x_6}\psi_1 - \tfrac{\partial}{\partial x_2}\psi_3 - \tfrac{\partial}{\partial x_4}\psi_4 + \tfrac{\partial}{\partial x_5}\psi_5 + \tfrac{\partial}{\partial x_7}\psi_6 - \tfrac{\partial}{\partial x_1}\psi_7 - \tfrac{\partial}{\partial x_3}\psi_8 \\
& + \tfrac{\partial}{\partial x_8}\psi_2 + \tfrac{1}{2}\big( - \psi_7 A_1 - \psi_3 A_2 - \psi_8 A_3 - \psi_4 A_4 + \psi_5 A_5 - \psi_1 A_6 \\
& + \psi_6 A_7 + \psi_2 A_8\big)\Big) x_8 + \tfrac{5\psi_2}{2} = 0 \\
\Big( & - \tfrac{\partial}{\partial x_6}\psi_2 + \tfrac{\partial}{\partial x_4}\psi_3 - \tfrac{\partial}{\partial x_2}\psi_4 + \tfrac{\partial}{\partial x_7}\psi_5 - \tfrac{\partial}{\partial x_5}\psi_6 + \tfrac{\partial}{\partial x_3}\psi_7 - \tfrac{\partial}{\partial x_1}\psi_8 \\
& - \tfrac{\partial}{\partial x_8}\psi_1 + \tfrac{1}{2}\big( - \psi_8 A_1 - \psi_4 A_2 + \psi_7 A_3 + \psi_3 A_4 - \psi_6 A_5 - \psi_2 A_6 \\
& + \psi_5 A_7 - \psi_1 A_8\big)\Big) x_8 - \tfrac{5\psi_1}{2} = 0
\end{aligned}
$$

şeklinde ifade edilir. $\mathbb{H}^8$ üzerinde eğrilik denklemi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$
\begin{aligned}
F_{15} + F_{26} + F_{37} + F_{48} &= \tfrac{1}{4x_8}(\psi_1\overline{\psi_3} - \psi_3\overline{\psi_1} - \psi_2\overline{\psi_4} + \psi_4\overline{\psi_2} - \psi_5\overline{\psi_7} + \psi_7\overline{\psi_5} - \psi_6\overline{\psi_8} + \psi_8\overline{\psi_6}) \\
F_{12} + F_{34} - F_{56} - F_{78} &= \tfrac{1}{4x_8}(\psi_1\overline{\psi_5} - \psi_5\overline{\psi_1} - \psi_2\overline{\psi_6} + \psi_6\overline{\psi_2} + \psi_3\overline{\psi_7} - \psi_7\overline{\psi_3} + \psi_4\overline{\psi_8} - \psi_8\overline{\psi_4}) \\
F_{16} - F_{25} - F_{38} + F_{47} &= \tfrac{1}{4x_8}(\psi_1\overline{\psi_7} - \psi_7\overline{\psi_1} + \psi_2\overline{\psi_8} - \psi_8\overline{\psi_2} - \psi_3\overline{\psi_5} + \psi_5\overline{\psi_3} + \psi_4\overline{\psi_6} - \psi_6\overline{\psi_4}) \\
F_{13} - F_{24} - F_{57} + F_{68} &= \tfrac{1}{4x_8}(\psi_1\overline{\psi_2} - \psi_2\overline{\psi_1} + \psi_3\overline{\psi_4} - \psi_4\overline{\psi_3} + \psi_5\overline{\psi_6} - \psi_6\overline{\psi_5} - \psi_7\overline{\psi_8} + \psi_8\overline{\psi_7}) \\
F_{17} + F_{28} - F_{35} - F_{46} &= \tfrac{1}{4x_8}(\psi_1\overline{\psi_4} - \psi_4\overline{\psi_1} + \psi_2\overline{\psi_3} - \psi_3\overline{\psi_2} - \psi_5\overline{\psi_8} + \psi_8\overline{\psi_5} + \psi_6\overline{\psi_7} - \psi_7\overline{\psi_6}) \\
F_{14} + F_{23} - F_{58} - F_{67} &= \tfrac{1}{4x_8}(\psi_6\overline{\psi_1} - \psi_1\overline{\psi_6} - \psi_2\overline{\psi_5} + \psi_5\overline{\psi_2} - \psi_3\overline{\psi_8} + \psi_8\overline{\psi_3} + \psi_4\overline{\psi_7} - \psi_7\overline{\psi_4}) \\
F_{18} - F_{27} - F_{36} - F_{45} &= \tfrac{1}{4x_8}(\psi_1\overline{\psi_8} - \psi_8\overline{\psi_1} - \psi_2\overline{\psi_7} + \psi_7\overline{\psi_2} - \psi_3\overline{\psi_6} + \psi_6\overline{\psi_3} - \psi_4\overline{\psi_5} - \psi_5\overline{\psi_4}).
\end{aligned}
$$

Aşağıdaki alt bölümde yukarıda olduğu gibi self−duallik seçimine bağlı olarak Seiberg−Witten denklemleri elde edilmiş ve bu denklemlere bağlı olarak aşikar olmayan sonuç elde edilmiştir.

## 5.5 8−Boyutta Farklı Bir Self−Dualliğe Bağlı Olarak Seiberg−Witten Denklemleri

Bu bölümde $\Omega^{2;-1}_{21}(M, i\mathbb{R})$ 2−formların self-dual uzayı ve [6] da elde edilen $Spin^c$−yapısı göz önüne alınmış ve buna bağlı olarak Seiberg−Witten denklemleri elde edilmiştir.

### 5.5.1 8−boyutta denklemlerin lokal ifadeleri

8−boyutlu manifoldlarda kompleks 8−spinorların vektör uzayı 16−boyutludur ve $\Delta_8 = \mathbb{C}^{16}$ ile gösterilir. $\mathbb{C}l_8$ olduğundan $\mathbb{C}l_8$ kompleks Clifford cebirinin spin temsili $\kappa_8$ aşağıdaki şekilde verilir:

$$\kappa_8 : \mathbb{C}l_8 \to End\big(\Delta_8\big)$$

$$\kappa_8(e_1) = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{bmatrix}, \quad \kappa_8(e_2) = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_1 \\ -\gamma_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \kappa_8(e_3) = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_2 \\ -\gamma_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\kappa_8(e_4) = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_3 \\ -\gamma_3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \kappa_8(e_5) = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_4 \\ -\gamma_4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \kappa_8(e_6) = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_5 \\ -\gamma_5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\kappa_8(e_7) = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_6 \\ -\gamma_6 & 0 \end{bmatrix}, \quad \kappa_8(e_8) = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_7 \\ -\gamma_7 & 0 \end{bmatrix}$$

Burada $\mathbb{I}, 8 \times 8$ lik birim matristir ve $i = 1, ..., 7$ için $\gamma_i$ matrisleri aşağıdaki gibidir:

$$\kappa(e_i) \;\; = \;\; \begin{bmatrix} 0 & \gamma(e_i) \\ -\gamma(e_i)^* & 0. \end{bmatrix}$$

$$\gamma_1 = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0 & 0 & 0 & 0 & -i \end{bmatrix}, \gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\gamma_3 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \gamma_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\gamma_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \gamma_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\gamma_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\gamma_i$ matrisleri, $\mathbb{C}l_7 \cong End(\Delta_8) \oplus End(\Delta_8)$ izomorfizmi altında $\mathbb{C}l_7$ cebirinin üreteçlerinin görüntülerinin birinci izdüşüm dönüşümü altındaki görüntüleridir. $n = 8$ durumunda $\Psi \in \Gamma(S^+)$ ve $A \in \Omega^1(M, i\mathbb{R})$ konneksiyon $1-$formu için Dirac operatörü

$$\begin{aligned} D_A^+ : \Gamma(S^+) &\rightarrow \Gamma(S^-) \\ \Psi &\mapsto D_A^+\Psi = \sum_{i=1}^{8} e_i \cdot \nabla_{e_i}^A \Psi \end{aligned}$$

olur. Lokal koordinatlarda $A$ konneksiyon $1-$formu $A_i : \mathbb{R}^8 \rightarrow i\mathbb{R}$ fonksiyonları $C^\infty$ olmak üzere

$$A = \sum_{i=1}^{8} A_i dx^i$$

şeklinde ifade edilebilir. O halde $A$ nın eğriliği $F_A$, $F_{ij} = \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right), 1 \leq i < j \leq 8$ olmak üzere, aşağıdaki gibi

$$F_A = dA = \sum_{i<j} F_{ij} dx^i \wedge dx^j \in \Omega^2(M, \mathrm{i}\mathbb{R}) \tag{5.6}$$

ifade edilir.

$\Psi \in \Gamma(S^+)$ spinorunun $\nabla^A\Psi$ kovaryant türevi $\omega_{ij} = g(\nabla e_i, e_j)$ olmak üzere

$$\nabla^A \Psi = d\Psi + \tfrac{1}{2} \sum_{i<j} \omega_{ij} e_i e_j \Psi + \tfrac{1}{2} A\Psi$$

olur. Burada $\omega_{ij} = g\big(\nabla e_i, e_j\big)$ ifadesinde geçen $\nabla$ konneksiyonu manifold üzerindeki Levi$-$Civita konneksiyonudur. Dikkat edilirse $\mathbb{R}^8$ üzerinde $\omega_{ij}$ ler sıfırdır. $e_i$ yönünde $\Psi$ spinorunun $\nabla^A_{e_i}\Psi$ kovaryant türevinin lokal ifadesi

$$\nabla^A_{e_i}\Psi \;=\; \Big(d\Psi + \tfrac{1}{2}A\Psi\Big)(e_i) \;=\; d\Psi(e_i) + \tfrac{1}{2}A\Psi(e_i)$$

şeklindedir.

$$d\Psi(e_i) = \begin{bmatrix} d\psi_1 \\ d\psi_2 \\ \vdots \\ d\psi_8 \end{bmatrix}(e_i) \;=\; \begin{bmatrix} d\psi_1(e_i) \\ d\psi_2(e_i) \\ \vdots \\ d\psi_8(e_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial x_i} \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial\psi_8}{\partial x_i} \end{bmatrix}$$

ve

$$\frac{1}{2}A\Psi(e_i) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8} A_i dx^i(e_i)\Psi = \frac{1}{2}A_i\Psi,$$

olduğundan

$$\nabla^A_{e_i}\Psi = \begin{bmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial x_i} \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial\psi_8}{\partial x_i} \end{bmatrix} + \tfrac{1}{2}A_i \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_8 \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial x_i} + \frac{1}{2}A_i\psi_1 \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial x_i} + \frac{1}{2}A_i\psi_2 \\ \vdots \\ \frac{\partial\psi_8}{\partial x_i} + \frac{1}{2}A_i\psi_8 \end{bmatrix}$$

olarak yazılabilir. Yukarıda verilenlere göre $D^+_A : \Gamma\big(S^+\big) \to \Gamma\big(S^-\big)$ Dirac operatörü

$$\begin{aligned} D^+_A\Psi \;&=\; \sum_{i=1}^{8} e_i \cdot \nabla^A_{e_i}\Psi = \sum \kappa_8(e_i)\big(\nabla^A_{e_i}\Psi\big) \\ &=\; \sum_{i=1}^{8} \kappa_8(e_i) \begin{bmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial x_i} + \frac{1}{2}A_i\psi_1 \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial x_i} + \frac{1}{2}A_i\psi_2 \\ \vdots \\ \frac{\partial\psi_8}{\partial x_i} + \frac{1}{2}A_i\psi_8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olur ve $D^+_A\Psi = 0$ denkleminin açık hali aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$-\tfrac{\partial}{\partial x_1}\psi_1 + \tfrac{\partial}{\partial x_3}\psi_2 - \tfrac{\partial}{\partial x_5}\psi_4 + \tfrac{\partial}{\partial x_7}\psi_8 + \mathbf{i}\big(\tfrac{\partial}{\partial x_2}\psi_1 - \tfrac{\partial}{\partial x_4}\psi_2 + \tfrac{\partial}{\partial x_6}\psi_4 + \tfrac{\partial}{\partial x_8}\psi_8\big)$$
$$+\tfrac{1}{2}\Big(-\psi_1 A_1 + \psi_2 A_3 - \psi_4 A_5 + \psi_8 A_7 + \mathbf{i}\big(\psi_1 A_2 - \psi_2 A_4 + \psi_4 A_6 + \psi_8 A_8\big)\Big) = 0$$

$$-\tfrac{\partial}{\partial x_3}\psi_1 - \tfrac{\partial}{\partial x_1}\psi_2 - \tfrac{\partial}{\partial x_5}\psi_3 + \tfrac{\partial}{\partial x_7}\psi_7 + \mathbf{i}\big( - \tfrac{\partial}{\partial x_4}\psi_1 - \tfrac{\partial}{\partial x_2}\psi_2 + \tfrac{\partial}{\partial x_6}\psi_3 + \tfrac{\partial}{\partial x_8}\psi_7\big)$$
$$+\tfrac{1}{2}\Big( - \psi_2 A_1 - \psi_1 A_3 - \psi_3 A_5 + \psi_7 A_7 + \mathbf{i}\big(\psi_2 A_2 - \psi_1 A_4 + \psi_3 A_6 + \psi_7 A_8\big)\Big) = 0$$

$$\tfrac{\partial}{\partial x_5}\psi_2 - \tfrac{\partial}{\partial x_1}\psi_3 + \tfrac{\partial}{\partial x_3}\psi_4 + \tfrac{\partial}{\partial x_7}\psi_6 + \mathbf{i}\big(\tfrac{\partial}{\partial x_6}\psi_2 + \tfrac{\partial}{\partial x_2}\psi_3 + \tfrac{\partial}{\partial x_4}\psi_4 + \tfrac{\partial}{\partial x_8}\psi_6\big)$$
$$+\tfrac{1}{2}\Big(-\psi_3 A_1 + \psi_4 A_3 + \psi_2 A_5 + \psi_6 A_7 + \mathbf{i}\big(\psi_3 A_2 + \psi_4 A_4 + \psi_2 A_6 + \psi_6 A_8\big)\Big) = 0$$

$$\tfrac{\partial}{\partial x_5}\psi_1 - \tfrac{\partial}{\partial x_3}\psi_3 - \tfrac{\partial}{\partial x_1}\psi_4 + \tfrac{\partial}{\partial x_7}\psi_5 + \mathbf{i}\big(\tfrac{\partial}{\partial x_6}\psi_1 + \tfrac{\partial}{\partial x_4}\psi_3 - \tfrac{\partial}{\partial x_2}\psi_4 + \tfrac{\partial}{\partial x_8}\psi_5\big)$$
$$\tfrac{1}{2}\Big(-\psi_4 A_1 - \psi_3 A_3 + \psi_1 A_5 + \psi_5 A_7 + \mathbf{i}\big( - \psi_4 A_2 + \psi_3 A_4 + \psi_1 A_6 + \psi_5 A_8\big)\Big) = 0$$

$$-\tfrac{\partial}{\partial x_7}\psi_4 - \tfrac{\partial}{\partial x_1}\psi_5 + \tfrac{\partial}{\partial x_3}\psi_6 - \tfrac{\partial}{\partial x_5}\psi_8 + \mathbf{i}\big(\tfrac{\partial}{\partial x_8}\psi_4 + \tfrac{\partial}{\partial x_2}\psi_5 - \tfrac{\partial}{\partial x_4}\psi_6 - \tfrac{\partial}{\partial x_6}\psi_8\big)$$
$$+\tfrac{1}{2}\Big(-\psi_5 A_1 + \psi_6 A_3 - \psi_8 A_5 - \psi_4 A_7 + \mathbf{i}\big(\psi_5 A_2 - \psi_6 A_4 - \psi_8 A_6 + \psi_4 A_8\big)\Big) = 0$$

$$-\tfrac{\partial}{\partial x_7}\psi_3 - \tfrac{\partial}{\partial x_3}\psi_5 - \tfrac{\partial}{\partial x_1}\psi_6 - \tfrac{\partial}{\partial x_5}\psi_7 + \mathbf{i}\big(\tfrac{\partial}{\partial x_8}\psi_3 - \tfrac{\partial}{\partial x_4}\psi_5 + \tfrac{\partial}{\partial x_2}\psi_6 - \tfrac{\partial}{\partial x_6}\psi_7\big)$$
$$+\tfrac{1}{2}\Big(-\psi_6 A_1 - \psi_5 A_3 - \psi_7 A_5 - \psi_3 A_7 + \mathbf{i}\big( - \psi_6 A_2 - \psi_5 A_4 - \psi_7 A_6 + \psi_3 A_8\big)\Big) = 0$$

$$-\tfrac{\partial}{\partial x_7}\psi_2 + \tfrac{\partial}{\partial x_5}\psi_6 - \tfrac{\partial}{\partial x_1}\psi_7 + \tfrac{\partial}{\partial x_3}\psi_8 + \mathbf{i}\big(\tfrac{\partial}{\partial x_8}\psi_2 - \tfrac{\partial}{\partial x_6}\psi_6 + \tfrac{\partial}{\partial x_2}\psi_7 + \tfrac{\partial}{\partial x_4}\psi_8\big)$$
$$+\tfrac{1}{2}\Big(-\psi_7 A_1 + \psi_8 A_3 + \psi_6 A_5 - \psi_2 A_7 + \mathbf{i}\big(\psi_7 A_2 + \psi_8 A_4 - \psi_6 A_6 + \psi_2 A_8\big)\Big) = 0$$

$$-\tfrac{\partial}{\partial x_7}\psi_1 + \tfrac{\partial}{\partial x_5}\psi_5 - \tfrac{\partial}{\partial x_3}\psi_7 - \tfrac{\partial}{\partial x_8}\psi_1 + \mathbf{i}\big(\tfrac{\partial}{\partial x_8}\psi_1 - \tfrac{\partial}{\partial x_6}\psi_5 + \tfrac{\partial}{\partial x_4}\psi_7 + \tfrac{\partial}{\partial x_2}\psi_8\big)$$
$$+\tfrac{1}{2}\Big(-\psi_8 A_1 - \psi_7 A_3 - \psi_5 A_5 - \psi_1 A_7 + \mathbf{i}\big( - \psi_8 A_2 + \psi_7 A_4 - \psi_5 A_6 + \psi_1 A_8\big)\Big) = 0.$$

$\{e_1, ..., e_8\}$ $\mathbb{R}^8$ in ortonormal tabanı ve bu tabanlara karşılık gelen dual tabanlar $\{e^1, ..., e^8\}$ olsun. O halde eğrilik denkleminin açık hali $\Omega_{21}^{2,-1}(\mathbb{R}^8, i\mathbb{R})$ uzayının şeklindeki $\{g_1, g_2, .., g_{21}\}$ taban elemanlarına bağlı olarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
g_1 &= e^1 \wedge e^5 - e^2 \wedge e^6 - e^3 \wedge e^7 + e^4 \wedge e^8 \\
g_2 &= e^1 \wedge e^2 - e^3 \wedge e^4 + e^5 \wedge e^6 - e^7 \wedge e^8 \\
g_3 &= e^1 \wedge e^6 + e^2 \wedge e^5 + e^3 \wedge e^8 + e^4 \wedge e^7 \\
g_4 &= e^1 \wedge e^3 + e^2 \wedge e^4 + e^5 \wedge e^7 + e^6 \wedge e^8 \\
g_5 &= e^1 \wedge e^7 - e^2 \wedge e^8 + e^3 \wedge e^5 - e^4 \wedge e^6 \\
g_6 &= e^1 \wedge e^4 - e^2 \wedge e^3 + e^5 \wedge e^8 - e^6 \wedge e^7 \\
g_7 &= e^1 \wedge e^8 + e^2 \wedge e^7 - e^3 \wedge e^6 - e^4 \wedge e^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_8 &= e^1 \wedge e^5 + e^2 \wedge e^6 - e^3 \wedge e^7 - e^4 \wedge e^8 \\
g_9 &= e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4 + e^5 \wedge e^6 + e^7 \wedge e^8 \\
g_{10} &= e^1 \wedge e^6 - e^2 \wedge e^5 + e^3 \wedge e^8 - e^4 \wedge e^7 \\
g_{11} &= e^1 \wedge e^3 - e^2 \wedge e^4 + e^5 \wedge e^7 - e^6 \wedge e^8 \\
g_{12} &= e^1 \wedge e^7 + e^2 \wedge e^8 + e^3 \wedge e^5 + e^4 \wedge e^6 \\
g_{13} &= e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^3 + e^5 \wedge e^8 + e^6 \wedge e^7 \\
g_{14} &= e^1 \wedge e^8 - e^2 \wedge e^7 - e^3 \wedge e^6 + e^4 \wedge e^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{15} &= e^1 \wedge e^5 - e^2 \wedge e^6 + e^3 \wedge e^7 - e^4 \wedge e^8 \\
g_{16} &= e^1 \wedge e^2 - e^3 \wedge e^4 - e^5 \wedge e^6 + e^7 \wedge e^8 \\
g_{17} &= e^1 \wedge e^6 + e^2 \wedge e^5 - e^3 \wedge e^8 - e^4 \wedge e^7 \\
g_{18} &= e^1 \wedge e^3 + e^2 \wedge e^4 - e^5 \wedge e^7 - e^6 \wedge e^8 \\
g_{19} &= e^1 \wedge e^7 - e^2 \wedge e^8 - e^3 \wedge e^5 + e^4 \wedge e^6 \\
g_{20} &= e^1 \wedge e^4 - e^2 \wedge e^3 - e^5 \wedge e^8 + e^6 \wedge e^7 \\
g_{21} &= e^1 \wedge e^8 + e^2 \wedge e^7 + e^3 \wedge e^6 + e^4 \wedge e^5
\end{aligned}$$

bağlı olarak aşağıdaki gibi elde edilir. Matrisler üzerinde tanımlanan iç çarpım ile $\langle \rho^+(g_i), \rho^+(g_i) \rangle = 4$ şeklinde elde edilen eşitlik aşağıdaki denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\rho^+\left(F_A^+\right) &= \left(\Psi\Psi^*\right)^+ \\
&= \tfrac{1}{4}\sum_{i=1}^{21} \langle \rho^+(g_i), (\Psi\Psi^*) \rangle \rho^+(g_i).
\end{aligned}$$

Yukarıda verilen bilgiler yardımı ile ikinci denklemin açık hali aşağıdaki gibi olur:

$$F_{15}-F_{26}-F_{37}+F_{48} = \tfrac{1}{4}\big(-\psi_2\overline{\psi_3}+\psi_2\overline{\psi_8}+\psi_3\overline{\psi_2}-\psi_3\overline{\psi_5}+\psi_5\overline{\psi_3}-\psi_5\overline{\psi_8}-\psi_8\overline{\psi_2}+\psi_8\overline{\psi_5}\big)$$
$$F_{12}-F_{34}+F_{56}-F_{78} = \tfrac{i}{2}\big(\psi_2\overline{\psi_2}-\psi_5\overline{\psi_5}\big)$$
$$F_{16}+F_{25}+F_{38}+F_{47} = -\tfrac{i}{4}\big(\psi_2\overline{\psi_3}-\psi_2\overline{\psi_8}+\psi_3\overline{\psi_2}+\psi_3\overline{\psi_5}+\psi_5\overline{\psi_3}-\psi_5\overline{\psi_8}-\psi_8\overline{\psi_2}-\psi_8\overline{\psi_5}\big)$$
$$F_{13}+F_{24}+F_{57}+F_{68} = \tfrac{1}{4}\big(\psi_1\overline{\psi_2}-\psi_1\overline{\psi_5}-\psi_2\overline{\psi_1}-\psi_2\overline{\psi_6}+\psi_5\overline{\psi_1}+\psi_5\overline{\psi_6}+\psi_6\overline{\psi_2}-\psi_6\overline{\psi_5}\big)$$

$$F_{17}-F_{28}+F_{35}-F_{46} = \tfrac{1}{4}\big(-\psi_1\overline{\psi_3}+\psi_1\overline{\psi_8}+\psi_3\overline{\psi_1}+\psi_3\overline{\psi_6}-\psi_6\overline{\psi_3}+\psi_6\overline{\psi_8}-\psi_8\overline{\psi_1}-\psi_8\overline{\psi_6}\big)$$
$$F_{14}-F_{23}+F_{58}-F_{67} = \tfrac{i}{4}\big(\psi_1\overline{\psi_2}+\psi_1\overline{\psi_5}+\psi_2\overline{\psi_1}+\psi_2\overline{\psi_6}+\psi_5\overline{\psi_1}+\psi_5\overline{\psi_6}+\psi_6\overline{\psi_2}+\psi_6\overline{\psi_5}\big)$$
$$F_{18}+F_{27}-F_{36}-F_{45} = \tfrac{i}{4}\big(\psi_1\overline{\psi_3}-\psi_1\overline{\psi_8}+\psi_3\overline{\psi_1}-\psi_3\overline{\psi_6}-\psi_6\overline{\psi_3}+\psi_6\overline{\psi_8}-\psi_8\overline{\psi_1}+\psi_8\overline{\psi_6}\big)$$
$$F_{15}+F_{26}-F_{37}-F_{48} = \tfrac{1}{4}\big(-\psi_1\overline{\psi_4}-\psi_1\overline{\psi_7}+\psi_4\overline{\psi_1}+\psi_4\overline{\psi_6}-\psi_6\overline{\psi_4}-\psi_6\overline{\psi_7}+\psi_7\overline{\psi_1}+\psi_7\overline{\psi_6}\big)$$

$$F_{12}+F_{34}+F_{56}+F_{78} = -\tfrac{i}{4}\big(\psi_3\overline{\psi_3}-\psi_8\overline{\psi_8}\big)$$
$$F_{16}-F_{25}+F_{38}-F_{47} = -\tfrac{i}{4}\big(\psi_1\overline{\psi_4}+\psi_1\overline{\psi_7}+\psi_4\overline{\psi_1}-\psi_4\overline{\psi_6}-\psi_6\overline{\psi_4}-\psi_6\overline{\psi_7}+\psi_7\overline{\psi_1}-\psi_7\overline{\psi_6}\big)$$
$$F_{13}-F_{24}+F_{57}-F_{68} = \tfrac{1}{4}\big(\psi_3\overline{\psi_4}+\psi_3\overline{\psi_7}-\psi_4\overline{\psi_3}+\psi_4\overline{\psi_8}-\psi_7\overline{\psi_3}+\psi_7\overline{\psi_8}-\psi_8\overline{\psi_4}-\psi_8\overline{\psi_7}\big)$$
$$F_{17}+F_{28}+F_{35}+F_{46} = \tfrac{1}{4}\big(\psi_2\overline{\psi_4}+\psi_2\overline{\psi_7}-\psi_4\overline{\psi_2}+\psi_4\overline{\psi_5}-\psi_5\overline{\psi_4}-\psi_5\overline{\psi_7}-\psi_7\overline{\psi_2}+\psi_7\overline{\psi_5}\big)$$

$$F_{14}+F_{23}+F_{58}+F_{67} = -\tfrac{i}{4}\big(\psi_3\overline{\psi_4}+\psi_3\overline{\psi_7}+\psi_4\overline{\psi_3}+\psi_4\overline{\psi_8}+\psi_7\overline{\psi_3}+\psi_7\overline{\psi_8}+\psi_8\overline{\psi_4}+\psi_8\overline{\psi_7}\big)$$
$$F_{18}-F_{27}-F_{36}+F_{45} = -\tfrac{i}{4}\big(\psi_2\overline{\psi_4}+\psi_2\overline{\psi_7}+\psi_4\overline{\psi_2}+\psi_4\overline{\psi_5}+\psi_5\overline{\psi_4}+\psi_5\overline{\psi_7}+\psi_7\overline{\psi_2}+\psi_7\overline{\psi_5}\big)$$
$$F_{15}-F_{26}+F_{37}-F_{48} = \tfrac{1}{4}\big(-\psi_2\overline{\psi_3}-\psi_2\overline{\psi_8}+\psi_3\overline{\psi_2}+\psi_3\overline{\psi_5}-\psi_5\overline{\psi_3}-\psi_5\overline{\psi_8}+\psi_8\overline{\psi_2}+\psi_8\overline{\psi_5}\big)$$
$$F_{12}-F_{34}-F_{56}+F_{78} = -\tfrac{i}{2}\big(\psi_1\overline{\psi_1}-\psi_6\overline{\psi_6}\big)$$

$$F_{16}+F_{25}-F_{38}-F_{47} = -\tfrac{i}{4}\big(\psi_2\overline{\psi_3}+\psi_2\overline{\psi_8}+\psi_3\overline{\psi_2}-\psi_3\overline{\psi_5}-\psi_5\overline{\psi_3}-\psi_5\overline{\psi_8}+\psi_8\overline{\psi_2}-\psi_8\overline{\psi_5}\big)$$
$$F_{13}+F_{24}-F_{57}-F_{68} = \tfrac{1}{4}\big(\psi_1\overline{\psi_2}+\psi_1\overline{\psi_5}-\psi_2\overline{\psi_1}+\psi_2\overline{\psi_6}-\psi_5\overline{\psi_1}+\psi_5\overline{\psi_6}-\psi_6\overline{\psi_2}-\psi_6\overline{\psi_5}\big)$$
$$F_{17}-F_{28}-F_{35}+F_{46} = \tfrac{1}{4}\big(\psi_1\overline{\psi_3}+\psi_1\overline{\psi_8}-\psi_3\overline{\psi_1}+\psi_3\overline{\psi_6}-\psi_6\overline{\psi_3}-\psi_6\overline{\psi_8}-\psi_8\overline{\psi_1}+\psi_8\overline{\psi_6}\big)$$
$$F_{14}-F_{23}-F_{58}+F_{67} = \tfrac{i}{4}\big(\psi_1\overline{\psi_2}-\psi_1\overline{\psi_5}+\psi_2\overline{\psi_1}-\psi_2\overline{\psi_6}-\psi_5\overline{\psi_1}+\psi_5\overline{\psi_6}-\psi_6\overline{\psi_2}+\psi_6\overline{\psi_5}\big)$$
$$F_{18}+F_{27}+F_{36}+F_{45} = -\tfrac{i}{4}\big(\psi_1\overline{\psi_3}+\psi_1\overline{\psi_8}+\psi_3\overline{\psi_1}+\psi_3\overline{\psi_6}+\psi_6\overline{\psi_3}+\psi_6\overline{\psi_8}+\psi_8\overline{\psi_1}+\psi_8\overline{\psi_6}\big).$$

$$A = \sum_{i=1}^{8} -2ix_i dx^i$$

ve

$$\Psi = \Big(0,0,0,e^{\sum_{j=1}^{8}-\frac{\mathrm{i}}{2}x_j^2},0,0,e^{\sum_{j=1}^{8}-\frac{\mathrm{i}}{2}x_j^2},0\Big)$$

şeklinde ifade edilen $\big(A, \Psi\big)$ yukarıdaki denklem kümesinin non$-$trivial çözümüdür. Fakat çözüm non$-$trivial olmasına rağmen flattir yani $F_A = 0$ dır. Bununla birlikte bu denklem kümesi için non$-$flat çözüm aşağıdaki gibi verilir:

$$
\begin{aligned}
&A_1 = 0,\ A_2 = 0,\ A_3 = 0,\ A_4 = 0,\ A_5 = 2\mathrm{i}x_1,\\
&A_6 = 2\mathrm{i}x_2,\ A_7 = 2\mathrm{i}x_3,\ A_8 = 2\mathrm{i}x_4
\end{aligned}
$$

için $F_A = 2idx^1 \wedge dx^5 + 2idx^2 \wedge dx^6 + 2idx^3 \wedge dx^7 + 2idx^4 \wedge dx^8$ olmak üzere;

$$
\begin{aligned}
&\psi_1 = 0,\ \psi_2 = 0,\ \psi_3 = 0,\ \psi_4 = e^{-\mathrm{i}\left(x_1x_5+x_2x_6+x_3x_7+x_4x_8\right)},\\
&\psi_5 = 0,\ \psi_6 = 0, \psi_7 = e^{-\mathrm{i}\left(x_1x_5+x_2x_6+x_3x_7+x_4x_8\right)},\ \psi_8 = 0
\end{aligned}
$$

dir. Bu şekilde elde edilen non$-$flat çözümden sonsuz çözüm üretmek mümkündür. Eğer $\big(A, \Psi\big)$, $D_A^+\big(\Psi\big) = 0$ ve $\rho^+\big(F_A^+\big) = \big(\Psi\Psi^*\big)^+$ denklemlerinin çözümü ise $\big(A + id\theta, e^{-i\theta}\Psi\big)$ de bu denklemlerin çözümüdür. Burada $\theta : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}$ düzgün bir fonksiyondur.

Yukarıda ele alınan Spin$^c-$ yapısı üzerinde Seiberg$-$Witten denklemlerinin ikincisi olan eğrilik denklemi $F_A^+ = \frac{1}{8}\sigma^+(\Psi)$ olacak şekilde ifade edildiğinde, elde edilen denklem sistemi ile yukarıdaki denklem sisteminin birbirine eşit olduğu kolaylıkla görülür.

## 5.6 $\sigma$ ve $\rho$ Dönüşümü İle İlgili Bazı Eşitlikler

Bir spinora, $i\mathbb{R}-$değerli bir $2-$form karşılık getiren $\sigma : \Gamma(S) \to \Omega^2(M, i\mathbb{R})$ dönüşümü ve kompleks değerli bir $2-$forma $S$ nin bir endomorfizmini karşılık getiren $\rho : \Omega^2(M, i\mathbb{R}) \to End(S)$ dönüşümleri eğrilik denkleminde önemlidir. Bu bölümde bu dönüşümler arasında bazı önemli eşitlikler verilecektir. Bu eşitlikler yardımı ile [4,6] çalışmalarında yer alan eğrilik deklem sistemlerinin elde edilmesinde kullanılmış olan yaklaşımların birbirileri ile olan ilişkileri irdelenecektir. En sonunda da eğrilik denklemi ile ilgili olan alternatif formülün bir genellemesi elde edilecektir.

**Önerme 5.7.** *$n-$boyutlu kompakt yönlendirilebilir $M$ manifoldu üzerinde $\kappa : TM \to End(S)$ $Spin^c-$yapısı olsun. O halde $\eta \in \Omega^2(M, i\mathbb{R})$ ve $dim(S) = k$ için*

$$|\rho(\eta)|^2 = |\eta|^2$$

*dir.*

*Kanıt.*

$$\begin{aligned} \rho : \Omega(M, i\mathbb{R}) &\to End(S) \\ \eta = \sum_{i<j} \eta_{ij} e^i \wedge e^j &\mapsto \sum_{i<j} \eta_{ij} \kappa(e_i)\kappa(e_j) \end{aligned}$$

dönüşümü yardımıyla

$$\begin{aligned} |\rho(\eta)|^2 &= \Big\langle \sum_{i<j} \eta_{ij}\kappa(e_i)\kappa(e_j), \sum_{k<l} \eta_{kl}\kappa(e_k)\kappa(e_l) \Big\rangle \\ &= \frac{1}{k} trace\Big( \sum_{i<j}\sum_{k<l} \overline{\eta_{ij}}\eta_{kl} \big(\kappa(e_i)\kappa(e_j)\big)^* \kappa(e_k)\kappa(e_l) \Big) \end{aligned}$$

dir. Yukarıdaki eşitlik için dört durum söz konusudur:

1. $(i \neq k$ ve $j = l)$, $(i = k$ ve $j \neq l)$ ve $(i \neq k$ ve $j \neq l)$ durumları için

$$\big(\kappa(e_i)\kappa(e_j)\big)^* \kappa(e_k)\kappa(e_l) = A$$

   olsun. O halde

$$\big(\kappa(e_i)\kappa(e_j)\big)^* \kappa(e_k)\kappa(e_l) + \big(\kappa(e_k)\kappa(e_l)\big)^* \kappa(e_i)\kappa(e_j) = A + A^*$$

   eşitliği elde edilir. Sonuç olarak [15] ile $trace(A + A^*) = 0$ dır.

2. $i = k$ ve $j = l$ için

$$\begin{aligned}
\big(\kappa(e_i)\kappa(e_j)\big)^*\kappa(e_k)\kappa(e_l) &= \big(\kappa(e_i)\kappa(e_j)\big)^*\kappa(e_i)\kappa(e_j) \\
&= \kappa(e_j)^*\kappa(e_i)^*\kappa(e_i)\kappa(e_j) \\
&= \mathbb{I}_{k\times k}
\end{aligned}$$

olacak şekilde $\mathbb{I}_{k\times k}$ birim matrisi elde edilir. O halde

$$\begin{aligned}
|\rho(\eta)|^2 &= \tfrac{1}{k} trace\Big(\sum_{i<j} |\eta_{ij}|^2 \mathbb{I}_{k\times k}\Big) \\
&= |\eta|^2
\end{aligned}$$

olur. □

**Önerme 5.8.** *$F, \sigma(\Psi) \in \Omega^2(M, i\mathbb{R})$ ve $\Psi \in \Gamma(S)$ için*

$$\big\langle F, \sigma(\Psi)\big\rangle = \big\langle \rho(F)\Psi, \Psi\big\rangle$$

*dir.*

*Kanıt.*

$$\begin{aligned}
\big\langle F, \sigma(\Psi)\big\rangle &= \Big\langle F, \sum_{i<j} \big\langle \kappa(e_i)\kappa(e_j)\Psi, \Psi\big\rangle e^i \wedge e^j\Big\rangle \\
&= \sum_{i<j} \big\langle \kappa(e_i)\kappa(e_j)\Psi, \Psi\big\rangle \big\langle F, e^i \wedge e^j\big\rangle \\
&= \sum_{i<j} \big\langle \rho(e^i \wedge e^j)\Psi, \Psi\big\rangle \Big\langle \sum_{k<l} F_{kl} e^k \wedge e^l, e^i \wedge e^j\Big\rangle \\
&= \sum_{i<j} \Big( -\sum_{k<l} F_{kl} \big\langle \rho(e^i \wedge e^j)\Psi, \Psi\big\rangle . \big\langle e^k \wedge e^l, e^i \wedge e^j\big\rangle\Big) \\
&= \sum_{i<j} -F_{ij} \big\langle \rho(e^i \wedge e^j)\Psi, \Psi\big\rangle \\
&= \sum_{i<j} \big\langle \rho(F_{ij} e^i \wedge e^j)\Psi, \Psi\big\rangle \\
&= \big\langle \rho(F)\Psi, \Psi\big\rangle
\end{aligned}$$

elde edilir. □

**Önerme 5.9.** *$F, \sigma(\Psi) \in \Omega^2(M, i\mathbb{R})$, $\Psi \in \Gamma(S)$ ve $dim(S) = k$ için*

$$\big\langle F, \sigma(\Psi)\big\rangle = k\big\langle \rho(F), (\Psi\Psi^*)\big\rangle$$

*dir.*

*Kanıt.*

$$\begin{aligned}
\Big\langle F, \sigma(\Psi)\Big\rangle &= \Big\langle \rho(F)\Psi, \Psi\Big\rangle \\
&= trace\Big(\big(\rho(F)\Psi\big)^{*}\Psi\Big) \\
&= trace\Big(\Psi^{*}\rho(F)^{*}\Psi\Big) \\
&= trace\Big(\Psi^{*}\big(\rho(F)^{*}\Psi\big)\Big) \\
&= trace\Big(\big(\rho(F)^{*}\Psi\big)\Psi^{*}\Big) \\
&= trace\Big(\rho(F)^{*}(\Psi\Psi^{*})\Big) \\
&= k\Big\langle \rho(F), (\Psi\Psi^{*})\Big\rangle
\end{aligned}$$

□

**Önerme 5.10.** *$\sigma(\Psi) = \sum_{i<j} \Big\langle \kappa(e_i)\kappa(e_j)\Psi, \Psi\Big\rangle e^i \wedge e^j$ dönüşümü $\sigma(\Psi)$ nin $\Omega^2(M) \otimes \mathbb{C}$ $2-$ form uzayı üzerine dik izdüşümüdür.*

*Kanıt.*

$$\begin{aligned}
\sigma(\Psi) &= \sum_{i<j} \Big\langle \kappa(e_i)\kappa(e_j)\Psi, \Psi\Big\rangle e^i \wedge e^j \\
&= \sum_{i<j} \frac{\Big\langle \kappa(e_i)\kappa(e_j)\Psi, \Psi\Big\rangle}{\Big\langle e^i\wedge e^j, e^i \wedge e^j\Big\rangle} e^i \wedge e^j \\
&= \sum_{i<j} \frac{\Big\langle e^i\wedge e^j, \sigma(\Psi)\Big\rangle}{\Big\langle e^i\wedge e^j, e^i \wedge e^j\Big\rangle} e^i \wedge e^j \\
&= Proj_{\big(\Lambda^2(M)\otimes\mathbb{C}\big)}\sigma(\Psi)
\end{aligned}$$

□

**Önerme 5.11.** *$n-$boyutlu yönlendirilebilir $M$ manifoldu üzerinde $\Omega^{2,+}(M, i\mathbb{R}) = span\Big\{f_1, ..., f_m\Big\}$ ve $dim\Big(S\Big) = k$ olsun. O halde*

$$\begin{aligned}
F_A^+ &= \sum_{i=1}^{m} \frac{\Big\langle f_i, F_A\Big\rangle}{\Big\langle f_i, f_i\Big\rangle} f_i &&= Proj_{\Omega^{2,+}(M,i\mathbb{R})} F_A \\
F_A^+ &= \sum_{i=1}^{m} \frac{\Big\langle f_i, \sigma(\Psi)\Big\rangle}{\Big\langle f_i, f_i\Big\rangle} f_i &&= Proj_{\Omega^{2,+}(M,i\mathbb{R})} \sigma(\Psi) \\
\rho(F_A^+) &= \sum_{i=1}^{m} \frac{\Big\langle \rho(f_i), \Psi\Psi^{*}\Big\rangle}{\Big\langle \rho(f_i), \rho(f_i)\Big\rangle} \rho(f_i) &&= Proj_{\rho\Big(\Omega^{2,+}(M,i\mathbb{R})\Big)} \Psi\Psi^{*}
\end{aligned}$$

*olmak üzere, $i = 1, .., m$ için*

$$\frac{\Big\langle f_i, F_A\Big\rangle}{\Big\langle f_i, f_i\Big\rangle} = \frac{\Big\langle f_i, \sigma(\Psi)\Big\rangle}{\Big\langle f_i, f_i\Big\rangle} = k\frac{\Big\langle \rho(f_i), \Psi\Psi^{*}\Big\rangle}{\Big\langle \rho(f_i), \rho(f_i)\Big\rangle}$$

*ilişkisi vardır.*

*Kanıt.* Öncelikle $\langle f_i, F_A\rangle = \langle f_i, \sigma(\Psi)\rangle$ kolaylıkla gözlemlenir. Eğrilik denklemine karşılık gelen denklem kümeleri arasındaki ilişki

$$\frac{\langle f_i,\sigma(\Psi)\rangle}{\langle f_i,f_i\rangle} = k\frac{\langle \rho(f_i),\Psi\Psi^*\rangle}{\langle f_i,f_i\rangle} = k\frac{\langle \rho(f_i),\Psi\Psi^*\rangle}{\langle \rho(f_i),\rho(f_i)\rangle}$$

şeklinde elde edilir. O halde $i = 1, .., m$ için

$$F_i = \frac{\langle f_i, F_A\rangle}{\langle f_i, f_i\rangle} = \frac{\langle f_i, \sigma(\Psi)\rangle}{\langle f_i, f_i\rangle} = k\frac{\langle \rho(f_i), \Psi\Psi^*\rangle}{\langle \rho(f_i), \rho(f_i)\rangle}$$

olur. Seiberg−Witten denklemlerinden ikincisi olan eğrilik denkleminin denklem kümesi için aşağıdaki gibi birbirine denk olan iki formülizasyon verilebilir:

$$\begin{aligned} F_A^+ &= \sum_{i=1}^{m} \frac{\langle f_i,\sigma(\Psi)\rangle}{k\langle f_i,f_i\rangle} f_i \\ \rho(F_A^+) &= \sum_{i=1}^{m} \frac{\langle \rho(f_i),\Psi\Psi^*\rangle}{\langle \rho(f_i),\rho(f_i)\rangle}\rho(f_i) \end{aligned}$$

□

**Önerme 5.12.**

$$\big(\Psi\Psi^*\big)^+ = Proj_{\rho\left(\Lambda^2(M)\otimes\mathbb{C}\right)}\Psi\Psi^* = \sum_{i<j} \frac{\langle \rho(e^i\wedge e^j),\Psi\Psi^*\rangle}{\langle \rho(e^i\wedge e^j),\rho(e^i\wedge e^j)\rangle}\rho(e^i\wedge e^j)$$

*olmak üzere aşağıdaki eşitlikler mevcuttur:*

1. $\langle \rho(F_A), \big(\Psi\Psi^*\big)^+\rangle = \langle \rho(F_A), \Psi\Psi^*\rangle = \frac{1}{k}\langle \rho(F_A)\Psi, \Psi\rangle$
2. $\langle \big(\Psi\Psi^*\big)^+, \big(\Psi\Psi^*\big)^+\rangle = \frac{1}{k^2}\langle \sigma(\Psi), \sigma(\Psi)\rangle$
3. $\big(\Psi\Psi^*\big)^+ = \frac{1}{k}\rho\big(\sigma(\Psi)\big)$
4. $\langle \big(\Psi\Psi^*\big)^+\Psi, \Psi\rangle = \frac{1}{k}\langle \rho\big(\sigma(\Psi)\big)\Psi, \Psi\rangle = \frac{1}{k}\langle \sigma(\Psi), \sigma(\Psi)\rangle$

*Kanıt.*

1.

$$\begin{aligned} \langle \rho(F_A), \big(\Psi\Psi^*\big)^+\rangle &= \Big\langle \sum_{i<j} F_{ij}\rho(e^i\wedge e^j), \sum_{k<l} \frac{\langle \rho(e^k\wedge e^l),\Psi\Psi^*\rangle}{\langle \rho(e^k\wedge e^l),\rho(e^k\wedge e^l)\rangle}\rho(e^k\wedge e^l)\Big\rangle \\ &= \sum_{i<j} -F_{ij}\langle \rho(e^i\wedge e^j), \Psi\Psi^*\rangle \sum_{k<l} \langle \rho(e^i\wedge e^j), \rho(e^k\wedge e^l)\rangle \\ &= \sum_{i<j} -F_{ij}\langle \rho(e^i\wedge e^j), \Psi\Psi^*\rangle \\ &= \langle \rho(F_A), \Psi\Psi^*\rangle \\ &= \frac{1}{k}\langle \rho(F_A)\Psi, \Psi\rangle \end{aligned}$$

2. $\Big\langle \big(\Psi\Psi^*\big)^+, \big(\Psi\Psi^*\big)^+ \Big\rangle$ eşitliği açık bir şekilde aşağıdaki gibi yazılırsa:

$$\begin{aligned}
& \Big\langle \sum_{k<l} \frac{\big\langle \rho(e^i\wedge e^j), \Psi\Psi^*\big\rangle}{\big\langle \rho(e^i\wedge e^j), \rho(e^i\wedge e^j)\big\rangle} \rho(e^i \wedge e^j), \sum_{k<l} \frac{\big\langle \rho(e^k\wedge e^l), \Psi\Psi^*\big\rangle}{\big\langle \rho(e^k\wedge e^l), \rho(e^k\wedge e^l)\big\rangle} \rho(e^k \wedge e^l) \Big\rangle \\
= & \sum_{i<j} \overline{\big\langle \rho(e^i \wedge e^j), \Psi\Psi^* \big\rangle} \sum_{k<l} \big\langle \rho(e^k \wedge e^l), \Psi\Psi^* \big\rangle \big\langle \rho(e^i \wedge e^j), \rho(e^k \wedge e^l) \big\rangle \\
= & \frac{1}{k} \sum_{i<j} \overline{\big\langle \rho(e^i \wedge e^j)\Psi, \Psi \big\rangle} \frac{1}{k} \big\langle \rho(e^i \wedge e^j)\Psi, \Psi \big\rangle \\
= & \frac{1}{k^2} \big\langle \sigma(\Psi), \sigma(\Psi) \big\rangle
\end{aligned}$$

elde edilir.

3.

$$\begin{aligned}
\big(\Psi\Psi^*\big)^+ &= \sum_{i<j} \frac{\big\langle \rho(e^i\wedge e^j), \Psi\Psi^*\big\rangle}{\big\langle \rho(e^i\wedge e^j), \rho(e^i\wedge e^j)\big\rangle} \rho(e^i \wedge e^j) \\
&= \frac{1}{k} \sum_{i<j} \big\langle \rho(e^i \wedge e^j)\Psi, \Psi \big\rangle \rho(e^i \wedge e^j) \\
&= \frac{1}{k} \sum_{i<j} \big\langle \kappa(e_i)\kappa(e_j)\Psi, \Psi \big\rangle \rho(e^i \wedge e^j) \\
&= \frac{1}{k} \rho\big(\sigma(\psi)\big)
\end{aligned}$$

dir.

4.

$$\Big\langle \big(\Psi\Psi^*\big)^+ \Psi, \Psi \Big\rangle = \frac{1}{k} \Big\langle \rho\big(\sigma(\Psi)\big)\Psi, \Psi \Big\rangle = \frac{1}{k} \big\langle \sigma(\Psi), \sigma(\Psi) \big\rangle.$$

□

**Önerme 5.13.** $\rho(F_A) = (\Psi\Psi^*)^+$ *ise* $\frac{1}{k^2}\big\langle \sigma(\psi), \sigma(\Psi) \big\rangle = \big\langle F_A, F_A \big\rangle$ *eşitliği vardır.*

*Kanıt.*

$$\begin{aligned}
\big\langle F_A, F_A \big\rangle &= \big\langle \rho(F_A), \rho(F_A) \big\rangle \\
&= \big\langle (\Psi\Psi^*)^+, (\Psi\Psi^*)^+ \big\rangle \\
&= \frac{1}{k^2} \big\langle \sigma(\Psi), \sigma(\Psi) \big\rangle
\end{aligned}$$

□

**Önerme 5.14.** $(\Psi\Psi^*)_0 = \Psi\Psi^* - \frac{1}{k}\big\langle \Psi, \Psi \big\rangle \mathbb{I}_{k\times k}$ *olmak üzere, aşağıdaki eşitlikler sağlanır:*

*1.* $\big\langle \rho(F), (\Psi\Psi^*)_0 \big\rangle = \big\langle \rho(F), \Psi\Psi^* \big\rangle = \frac{1}{k}\big\langle F, \sigma(\Psi) \big\rangle$

*2.* $\big\langle (\Psi\Psi^*)_0, (\Psi\Psi^*)_0 \big\rangle = \frac{|\Psi|^4}{k}\Big(\frac{k-1}{k}\Big)$

*Kanıt.*

1.
$$\begin{aligned}\left\langle \rho(F), (\Psi\Psi^*)_0 \right\rangle &= \left\langle \rho(F), \Psi\Psi^* - \tfrac{1}{k}\left\langle \Psi, \Psi \right\rangle \mathbb{I}_{k\times k} \right\rangle \\ &= \left\langle \rho(F), \Psi\Psi^* \right\rangle - \left\langle \rho(F), \tfrac{1}{k}\left\langle \Psi, \Psi \right\rangle \mathbb{I}_{k\times k} \right\rangle \\ &= \left\langle \rho(F), \Psi\Psi^* \right\rangle \\ &= \tfrac{1}{k}\left\langle F, \sigma(\Psi) \right\rangle\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}\left\langle (\Psi\Psi^*)_0, (\Psi\Psi^*)_0 \right\rangle &= \left\langle \Psi\Psi^* - \tfrac{1}{k}\left\langle \Psi, \Psi \right\rangle \mathbb{I}_{k\times k}, \Psi\Psi^* - \tfrac{1}{k}\left\langle \Psi, \Psi \right\rangle \mathbb{I}_{k\times k} \right\rangle \\ &= \left\langle \Psi\Psi^*, \Psi\Psi^* \right\rangle - \tfrac{1}{k}\left\langle \Psi, \Psi \right\rangle \left\langle \Psi\Psi^*, \mathbb{I}_{k\times k} \right\rangle \\ &\quad -\tfrac{1}{k}\left\langle \Psi, \Psi \right\rangle \left\langle \mathbb{I}_{k\times k}, \Psi\Psi^* \right\rangle \\ &\quad +\tfrac{1}{k^2}(\left\langle \Psi, \Psi \right\rangle)^2 \left\langle \mathbb{I}_{k\times k}, \mathbb{I}_{k\times k} \right\rangle \\ &= \tfrac{|\Psi|^4}{k}\left(\tfrac{k-1}{k}\right)\end{aligned}$$

elde edilir.

$\square$

# 6 SELF$-$DUALİTE KAVRAMI OLMADAN SEIBERG$-$WITTEN DENKLEMLERİNİN ELDE EDİLMESİ

Seiberg$-$Witten denklemlerinin ilki olan Dirac denkleminin genellemesi yüksek boyutlarda yapılabilmesine rağmen, bu denklemin ikincisi olan eğrilik denkleminin yüksek boyutlardaki tanımlaması farklılıklar göstermektedir. Örneğin; $Spin(7)-$yapısına sahip $8-$boyutlu $(M, g, \Phi)$ manifoldu üzerinde $\Phi$ temel $4-$formu yardımıyla $2-$form uzayının $\Omega^2(M) = \Omega^2_7(M) \oplus \Omega^2_{21}(M)$ ayrışımı ile genelleştirilmiş self$-$dualite kavramı kullanılarak Seiberg$-$Witten denklemleri yazıldı [6]. $G_2-$yapısına sahip $7-$boyutlu $(M, g, \Phi)$ manifoldu üzerinde $\Phi$ temel $3-$formu yardımıyla $2-$form uzayının $\Omega^2(M) = \Omega^2_7(M) \oplus \Omega^2_{14}(M)$ ayrışımı ile genelleştirilmiş self$-$dualite kavramı kullanılarak Seiberg$-$Witten denklemleri yazıldı [5]. $6-$boyutta simplektik yapıya sahip $(M, g, \Phi)$ manifoldu üzerinde $\Phi$ simplektik $2-$formu yardımıyla $2-$form uzayının $\Omega^2(M) = \Omega^2_8(M) \oplus \Omega^2_6(M) \oplus \Omega^2_1(M)$ ayrışımı ile genelleştirilmiş self$-$dualite kavramı kullanılarak Seiberg$-$Witten denklemleri yazıldı [8]. Son olarak $5-$boyutlu kontakt metrik manifoldlar üzerinde $\Phi$ kontakt $1-$formu yardımıyla $2-$form uzayının $\Omega^2(M) = \Omega^2_3(M) \oplus \Omega^2_4(M) \oplus \Omega^2_3(M)$ ayrışımı ile genelleştirilmiş self$-$dualite kavramı kullanılarak Seiberg$-$Witten denklemleri yazıldı [10].

Bu bölümde de literatürdeki bilinen tanımlamaların aksine, self$-$dualite kavramına başvurmadan Seiberg$-$Witten denklemlerinin ikincisi olan eğrilik denkleminin $4-$boyutta irdelemesi yapılacaktır. Buna ek olarak self$-$dualitesiz olarak tanımlanan Seiberg$-$Witten denklemlerine Kahler manifoldları üzerinde çözüm verilecektir. Sonra $n = 5, 6, 7, 8$ için self$-$dualitesiz Seiberg$-$Witten denklemleri yazılacak ve bu denklemlere çözüm verilecektir. Sonunda da $n = 5, 6$ için bu denklemlerin çözümü olan $\Psi$ lere sınır getirilecek ve $\Psi$ ler yardımıyla $F_A$ nın da sınırlı olduğu gösterilecektir.

## 6.1 $4-$Boyutta Self$-$Dualitesiz Seiberg$-$Witten Denklemleri

$\rho^+ : \Omega^2\big(M, i\mathbb{R}\big) \to End\big(S^+\big)$ dönüşümü yardımı ile

$$\rho^+\big(\Omega^2(M, i\mathbb{R})\big) = W' \subset End(S)$$

olsun. O halde $\Psi\Psi^*$ ın $W'$ üstüne dik izdüşümü $\big(\Psi\Psi^*\big)^+ = Proj_{W'}\big(\Psi\Psi^*\big)$ için $M$ manifoldu üzerindeki Seiberg$-$Witten denklemleri:

1. $D_A^+\big(\Psi\big) = 0$

2. $\rho^+\big(F_A\big) = \frac{1}{2}\big(\Psi\Psi^*\big)^+ = \frac{1}{2}\sum_{i<j} \frac{\big\langle \rho^+(e^i\wedge e^j),\Psi\Psi^*\big\rangle}{\big\langle \rho^+(e^i\wedge e^j),\rho^+(e^i\wedge e^j)\big\rangle}\rho^+(e^i\wedge e^j)$

şeklinde ifade edilir. Dikkat edilirse Seiberg$-$Witten denklemlerinin yukarıdaki ifade edilişinde self$-$dualite kavramı kullanılmamıştır. Özel olarak $M=\mathbb{R}^4$ durumunda yukarıdaki formda yazılan Seiberg$-$Witten denklemleri aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

### 6.1.1 $\mathbb{R}^4$ üzerinde Seiberg$-$Witten denklemleri

Bölüm 4 te elde edilen $\mathbb{C}l_4$ kompleks Clifford cebirinin Spin temsili $\kappa_4$ kullanılarak elde edilen Dirac denklemi tanımlanışı itibari ile [4, 27] deki klasik denklem ile aynıdır. Eğrilik denklemi ise $\Omega^2(\mathbb{R}^4, i\mathbb{R})$ uzayının taban elemanları yardımıyla aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{bmatrix} iF_{12}+iF_{34} & F_{13}-F_{24}+iF_{14}+iF_{23} \\ -F_{13}+F_{24}+iF_{14}+iF_{23} & -iF_{12}-iF_{34}. \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(|\psi_1|^2-|\psi_2|^2) & \psi_1\overline{\psi_2} \\ \psi_2\overline{\psi_2} & \frac{1}{2}(-|\psi_1|^2+|\psi_2|^2) \end{bmatrix}.$$

Yukarıdaki iki matrisin eşitliğine karşılık gelen eğrilik denklemi çözümlenirse aşağıdaki gibi denklem sistemi elde edilir:

$$\begin{aligned} F_{12}+F_{34} &= -\tfrac{i}{2}\big(|\psi_1|^2-|\psi_2|^2\big) \\ F_{14}+F_{23} &= -\tfrac{i}{2}\big(\psi_1\overline{\psi_2}+\psi_2\overline{\psi_1}\big) \\ F_{13}-F_{24} &= \tfrac{1}{2}\big(\psi_1\overline{\psi_2}-\psi_2\overline{\psi_1}\big). \end{aligned}$$

Dikkat edilirse self$-$dualite kavramı kullanılmadan elde edilen eğrilik denklem sistemi ile [4, 27] deki klasik denklem aynıdır.

### 6.1.2 Kahler manifoldları için Seiberg$-$Witten denklemlerine global çözüm

Bu bölümde Kahler manifoldları için

1. $D_A^+\Psi = 0$

2. $\rho^+(F_A) = \frac{1}{2}(\Psi\Psi^*)^+$

şeklinde tanımlanmış Seiberg$-$Witten denklemlerine [12] den uyarlanan bir çözüm verilecektir.

$J : TM \to TM,\ J^2 = -Id$ 4$-$boyutlu $M$ manifoldu üzerinde yaklaşık kompleks yapısı için $\Omega(X,Y) = g(X, JY)$, $(M, g, J)$ nin Kahler formu olsun. Burada dikkat edilecek olursa Bölüm 4 te ele alınan $Spin^c-$yapısı ile birlikte $\Omega : S^+ \to S^+$ $(\pm 2i)$ özdeğerine sahip bir endomorfizmdir. Dahası $\Omega$ nın $\mathbb{R}^4$ ün $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ standart tabanına göre açık ifadesi $\Omega = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4$ şeklindedir. $(\pm 2i)$ özdeğerleri ile ilişkili olan $S^+(2i) \oplus S^+(-2i) = S^+$ alt demetleri için $\frac{(\Psi\Psi^*)^+}{2}$ eğrilik denklemi göz önüne alındığında aşağıdaki durumlar söz konusudur:

1. $\Psi \in S^+(2i)$ için $\Omega\Psi = 2i\Psi$ dir. $S^+ \cong \mathbb{C}^2$ olduğundan $\Psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ bileşenlerine sahip ve
$$\frac{(\Psi\Psi^*)^+}{2} = \begin{bmatrix} \frac{|\psi_1|^2}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{|\psi_1|^2}{2} \end{bmatrix}$$
eşitliği sağlanır.

2. $\Psi \in S^+(-2i)$ için $\Omega\Psi = -2i\Psi$ dir. $S^+ \cong \mathbb{C}^2$ olduğundan $\Psi = \begin{bmatrix} 0 \\ \psi_2 \end{bmatrix}$ bileşenlerine sahip ve
$$\frac{(\Psi\Psi^*)^+}{2} = \begin{bmatrix} -\frac{|\psi_2|^2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{|\psi_2|^2}{2} \end{bmatrix}$$
eşitliği sağlanır.

$(M, g, J)$ Hermityen manifoldu ile birlikte $Spin^c(2n)$ nin Spinor demeti $S \cong \Lambda^{0,*}$ dir. Ayrıca $S = S^+ \oplus S^-$ şeklinde dekompoze olduğundan, $S^+(2i) \cong \Lambda^{0,2}$ $S^+(-2i) \cong \Lambda^{0,0}$ şeklinde ifade edilir. Buradan da $\Psi_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in S^+(-2i) \cong \Lambda^{0,0}$ için
$$\frac{(\Psi\Psi^*)^+}{2} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$
elde edilir.

$\overline{\partial} \oplus \overline{\partial^*} : \Lambda^{0,even} \rightarrow \Lambda^{0,odd}$, $\overline{\partial}$ Dolbeault operatörü $\overline{\partial^*}$ da $\overline{\partial}$ operatörünün Hermityen adjointi olmak üzere, kanonik $Spin^c-$yapısının $\mathcal{L} = \Lambda^2(TM)$ doğru demetinin $A_0$ Levi$-$Civita konneksiyonu ile Dirac operatörü $D_{A_0}$

$$D_{A_0} : \Gamma(S^+) \rightarrow \Gamma(S^-) \quad ; \quad \sqrt{2}(\overline{\partial} \oplus \overline{\partial^*}) : \Omega^{0,0} \oplus \Omega^{0,2} \rightarrow \Omega^{0,1}$$

şeklinde tanımlanır [12].

**Önerme 6.1.** *$(M, g, J)$ Kahler manifoldu $s < 0$ skaler eğriliği ve $1$ sabit fonksiyonu ile ilişkili $\Psi_0 \in S^+(-2i) \cong \Lambda^{0,0} \cong \Omega^{0,0}$ Spinoru için $(A_0, \Psi = \sqrt{-s}\Psi_0)$ Seiberg$-$ Witten denkleminin bir çözümüdür.*

*Kanıt.* $D_{A_0}\Psi = 0$ olduğu $D_{A_0}$ ın tanımından aşikardır. O halde geriye sadece $\rho^+(F_{A_0}) = \frac{(\Psi\Psi^*)^+}{2}$ nın gösterilmesi kalır. $\mathcal{L} = \Lambda^2(TM)$ doğru demeti üzerinde $F_{A_0}$, $A_0$ ın eğriliği olsun. $\rho_{ric}(X, Y) = g\big(X, J \circ RicY\big)$ ve $Ric : TM \rightarrow TM$ şeklinde tanımlanan $\rho_{ric}$ ve $Ric$ için

$$F_{A_0} = i\rho_{ric}$$

tir [12]. Lokal koordinatlarda $J$ yaklaşık kompleks yapısı ve Ricci tensörüne karşılık gelen matrisler aşağıdaki gibidir:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad Ric = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{bmatrix}.$$

Dahası $J$ ve $Ric$ değişmeli olduğundan $J \circ Ric = Ric \circ J$ ile

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -A & D & -C \\ A & 0 & C & D \\ -D & -C & 0 & -B \\ C & -D & B & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Burada $R_{11} = R_{22} = A$, $R_{14} = -R_{23} = D$, $R_{24} = R_{13} = C$, $R_{33} = R_{44} = B$ olarak alınmıştır. $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ taban elemanları için $\rho_{ric}(X, Y) = g\big(X, J \circ RicY\big)$ tanımından $\rho_{ric}$ aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\rho_{ric} = -Ae_1 \wedge e_2 + D(e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4) + C(e_2 \wedge e_3 - e_1 \wedge e_4) - Be_3 \wedge e_4.$$

Tüm bu elde edilenler ile birlikte $F_{A_0} = i\rho_{ric}$ den $\rho^+(F_{A_0}) = i\rho^+(\rho_{ric})$ olur. Ayrıca $\Psi = \sqrt{-s}\Psi_0$ spinoru için $A + B = \frac{s}{2}$ alınırsa aşağıdaki iki matris

$$\begin{bmatrix} A+B & 0 \\ 0 & -A-B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{s}{2} \end{bmatrix}$$

eşit olur. Yani $i\rho^+(\rho_{ric}) = \frac{1}{2}(\Psi\psi^*)^+$ den $\rho^+(F_{A_0}) = \frac{1}{2}(\Psi\Psi^*)^+$ olur. Yukarıda elde edilenlerle $s$ skaler eğriliği $s = tr Ric = (R_{11} + R_{22} + R_{33} + R_{44}) = (2A + 2B) = s$ dir. $\square$

## 6.2 5−Boyutta Self−Dualitesiz Seiberg−Witten Denklemleri

$\rho : \Omega^2\big(M, i\mathbb{R}\big) \to End\big(S\big)$ dönüşümü yardımı ile

$$\rho\big(\Omega^2(M, i\mathbb{R})\big) = W' \subset End(S)$$

olsun. O halde $\Psi\Psi^*$ ın $W'$ üstüne dik izdüşümü $\big(\Psi\Psi^*\big)^+ = Proj_{W'}\big(\Psi\Psi^*\big)$ için $M$ manifoldu üzerindeki Seiberg−Witten denklemleri:

1. $D_A\big(\Psi\big) = 0$
2. $\rho\big(F_A\big) = \frac{1}{2}\big(\Psi\Psi^*\big)^+ = \frac{1}{2}\sum\limits_{i<j} \frac{\big\langle \rho(e^i \wedge e^j), \Psi\Psi^* \big\rangle}{\big\langle \rho(e^i \wedge e^j), \rho(e^i \wedge e^j) \big\rangle} \rho(e^i \wedge e^j)$

şeklinde ifade edilsin. Aşağıda 5−boyutta Seiberg−Witten denklemleri açık bir şekilde ifade edilmiştir.

### 6.2.1 5−boyutta Seiberg−Witten denklemleri

5−boyutlu manifoldlar için kompleks 5−spinorların vektör uzayı 4−boyutludur ve $\Delta_5 = \mathbb{C}^4$ ile gösterilir. $\mathbb{C}l_5 \cong End\big(\Delta_5\big) \oplus End\big(\Delta_5\big)$ olduğundan $\mathbb{C}l_5$ kompleks Clifford cebirinin spin temsili $\kappa_5$ aşağıdaki şekilde verilir [10]:

$$\kappa_5 : \mathbb{C}l_5 \to End\big(\Delta_5\big)$$

$$\kappa(e_1) = \begin{bmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \quad \kappa(e_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \kappa(e_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\kappa(e_4) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \kappa(e_5) = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{bmatrix}.$$

Burada $\kappa(e_i), i = 1, ..., 5$ matrisleri $\mathbb{C}l_5 \cong End\big(\Delta_5\big) \oplus End\big(\Delta_5\big)$ izomorfizmi altında $\mathbb{C}l_5$ cebirinin üreteçlerinin görüntülerinin birinci izdüşüm dönüşümü altındaki görüntüleridir. Bu temsillere bağlı olarak $D_A\Psi = 0$ denkleminin açık hali de aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$
\begin{aligned}
0 &= \Big(\tfrac{\partial\psi_2}{\partial x_2}+\tfrac{\psi_2 A_2}{2}\Big)+\Big(\tfrac{\partial\psi_4}{\partial x_3}+\tfrac{\psi_4 A_3}{2}\Big)+i\Big(\tfrac{\partial\psi_1}{\partial x_5}+\tfrac{\psi_1 A_5}{2}\Big)+i\Big(\tfrac{\partial\psi_2}{\partial x_1}+\tfrac{\psi_2 A_1}{2}\Big)\\
&\quad +i\Big(\tfrac{\partial\psi_4}{\partial x_4}+\tfrac{\psi_4 A_4}{2}\Big)\\
0 &= -\Big(\tfrac{\partial\psi_1}{\partial x_2}+\tfrac{\psi_1 A_2}{2}\Big)-\Big(\tfrac{\partial\psi_3}{\partial x_3}+\tfrac{\psi_3 A_3}{2}\Big)+i\Big(\tfrac{\partial\psi_1}{\partial x_1}+\tfrac{\psi_1 A_1}{2}\Big)-i\Big(\tfrac{\partial\psi_2}{\partial x_5}+\tfrac{\psi_2 A_5}{2}\Big)\\
&\quad -i\Big(\tfrac{\partial\psi_3}{\partial x_4}+\tfrac{\psi_3 A_4}{4}\Big)\\
0 &= -\Big(\tfrac{\partial\psi_4}{\partial x_2}+\tfrac{\psi_4 A_2}{2}\Big)+\Big(\tfrac{\partial\psi_2}{\partial x_3}+\tfrac{\psi_2 A_3}{2}\Big)-i\Big(\tfrac{\partial\psi_2}{\partial x_4}+\tfrac{\psi_4 A_2}{2}\Big)+i\Big(\tfrac{\partial\psi_3}{\partial x_5}+\tfrac{\psi_3 A_5}{2}\Big)\\
&\quad +i\Big(\tfrac{\partial\psi_4}{\partial x_1}+\tfrac{\psi_4 A_1}{2}\Big)\\
0 &= \Big(\tfrac{\partial\psi_3}{\partial x_2}+\tfrac{\psi_3 A_2}{2}\Big)-\Big(\tfrac{\partial\psi_1}{\partial x_3}+\tfrac{\psi_1 A_3}{2}\Big)+i\Big(\tfrac{\partial\psi_1}{\partial x_4}+\tfrac{\psi_1 A_4}{2}\Big)+i\Big(\tfrac{\partial\psi_3}{\partial x_1}+\tfrac{\psi_3 A_1}{2}\Big)\\
&\quad -i\Big(\tfrac{\partial\psi_4}{\partial x_5}+\tfrac{\psi_4 A_5}{2}\Big).
\end{aligned}
$$

Eğrilik denklemi ise $\Omega^2(M, i\mathbb{R})$ uzayının taban elemanları yardımıyla aşağıdaki gibi elde edilir:

$$
\begin{bmatrix}
-iF_{12}+iF_{34} & F_{15}-iF_{25} & F_{14}-F_{23}-iF_{13}-iF_{24} & F_{45}-iF_{35}\\
-F_{15}-iF_{25} & iF_{12}+iF_{34} & F_{45}-iF_{35} & -F_{14}-F_{23}+iF_{13}-iF_{24}\\
-F_{14}+F_{23}-iF_{13}-iF_{24} & -F_{45}-iF_{35} & iF_{12}-iF_{34} & F_{15}+iF_{25}\\
-F_{45}-iF_{35} & F_{14}+F_{23}+iF_{13}-iF_{24} & -F_{15}+iF_{25} & -iF_{12}-iF_{34}
\end{bmatrix}
$$

Denklemin diğer tarafı olan $\frac{1}{2}\big(\Psi\Psi^*\big)^+ = \frac{1}{2}\sum_{i<j}\frac{\big\langle \rho(e^i\wedge e^j),\Psi\Psi^*\big\rangle}{\big\langle \rho(e^i\wedge e^j),\rho(e^i\wedge e^j)\big\rangle}\rho(e^i\wedge e^j)$ denklemine karşılık gelen matris aşağıda verilmiştir:

$$
\begin{bmatrix}
\frac{1}{4}(|\psi_1|^2-|\psi_3|^2) & \frac{1}{4}(\psi_1\overline{\psi_2}-\psi_4\overline{\psi_3}) & \frac{1}{2}(\psi_1\overline{\psi_3}) & \frac{1}{4}(\psi_2\overline{\psi_3}+\psi_1\overline{\psi_4})\\
\frac{1}{4}(\psi_2\overline{\psi_1}-\psi_3\overline{\psi_4}) & \frac{1}{4}(|\psi_2|^2-|\psi_4|^2) & \frac{1}{4}(\psi_2\overline{\psi_3}+\psi_1\overline{\psi_4}) & \frac{1}{2}(\psi_2\overline{\psi_4})\\
\frac{1}{2}(\psi_3\overline{\psi_1}) & \frac{1}{4}(\psi_4\overline{\psi_1}+\psi_3\overline{\psi_2}) & \frac{1}{4}(-|\psi_1|^2+|\psi_3|^2) & \frac{1}{4}(-\psi_2\overline{\psi_1}+\psi_3\overline{\psi_4})\\
\frac{1}{4}(\psi_4\overline{\psi_1}+\psi_3\overline{\psi_2}) & \frac{1}{2}(\psi_4\overline{\psi_2}) & \frac{1}{4}(-\psi_1\overline{\psi_2}+\psi_4\overline{\psi_3}) & \frac{1}{4}(-|\psi_2|^2+|\psi_4|^2)
\end{bmatrix}
$$

Yukarıdaki iki matrisin eşitliğine karşılık gelen eğrilik denklemi çözümlenirse aşağıdaki gibi denklem sistemi elde edilir:

$$
\begin{aligned}
F_{12} &= \tfrac{i}{8}\big(|\psi_1|^2-|\psi_2|^2-|\psi_3|^2+|\psi_4|^2\big)\\
F_{13} &= \tfrac{i}{8}\big(\psi_3\overline{\psi}_1+\psi_1\overline{\psi_3}-\psi_4\overline{\psi_2}-\psi_2\overline{\psi_4}\big)\\
F_{14} &= \tfrac{1}{8}\big(-\psi_3\overline{\psi}_1+\psi_1\overline{\psi_3}+\psi_4\overline{\psi_2}-\psi_2\overline{\psi_4}\big)\\
F_{15} &= \tfrac{1}{8}\big(\psi_1\overline{\psi}_2-\psi_2\overline{\psi_1}-\psi_4\overline{\psi_3}+\psi_3\overline{\psi_4}\big)\\
F_{23} &= \tfrac{1}{8}\big(\psi_3\overline{\psi}_1-\psi_1\overline{\psi_3}+\psi_4\overline{\psi_2}-\psi_2\overline{\psi_4}\big)\\
F_{24} &= \tfrac{i}{8}\big(\psi_3\overline{\psi}_1+\psi_1\overline{\psi_3}+\psi_4\overline{\psi_2}+\psi_2\overline{\psi_4}\big)\\
F_{25} &= \tfrac{i}{8}\big(\psi_2\overline{\psi}_1+\psi_1\overline{\psi_2}-\psi_4\overline{\psi_3}-\psi_3\overline{\psi_4}\big)\\
F_{34} &= \tfrac{i}{8}\big(-|\psi_1|^2-|\psi_2|^2+|\psi_3|^2+|\psi_4|^2\big)\\
F_{35} &= \tfrac{i}{8}\big(\psi_4\overline{\psi}_1+\psi_1\overline{\psi_4}+\psi_3\overline{\psi_2}+\psi_2\overline{\psi_3}\big)\\
F_{45} &= \tfrac{1}{8}\big(-\psi_4\overline{\psi}_1+\psi_1\overline{\psi_4}-\psi_3\overline{\psi_2}+\psi_2\overline{\psi_3}\big)
\end{aligned}
$$

**Önerme 6.2.** *$\kappa : TM \to End(S)$ 5−boyutlu kompakt $M$ Rieamann manifoldu üzerinde $Spin^c$−yapısı olsun. O halde $\forall\Psi \in \Gamma(S)$ ve $\sigma(\Psi) \in \Omega^2(M, i\mathbb{R})$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır:*

1. $\big\langle \sigma(\Psi)\Psi,\ \Psi \big\rangle = 2|\Psi|^4$
2. $\big\langle \sigma(\Psi),\ \sigma(\Psi) \big\rangle = 2|\Psi|^4$.

*Kanıt.*

1. $\Psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^4$ için

$$\begin{aligned}
\sigma(\Psi) &= \sum_{i<j} \big\langle \kappa(e_i)\kappa(e_j)\Psi, \Psi \big\rangle e^i \wedge e^j \\
&= i\big(|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2 - |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2\big) e^1 \wedge e^2 \\
&\quad + i\big(\psi_3\overline{\psi}_1 + \psi_1\overline{\psi_3} - \psi_4\overline{\psi_2} - \psi_2\overline{\psi_4}\big) e^1 \wedge e^3 \\
&\quad + \big(-\psi_3\overline{\psi}_1 + \psi_1\overline{\psi_3} + \psi_4\overline{\psi_2} - \psi_2\overline{\psi_4}\big) e^1 \wedge e^4 \\
&\quad + \big(\psi_1\overline{\psi}_2 - \psi_2\overline{\psi_1} - \psi_4\overline{\psi_3} + \psi_3\overline{\psi_4}\big) e^1 \wedge e^5 \\
&\quad + \big(\psi_3\overline{\psi}_1 - \psi_1\overline{\psi_3} + \psi_4\overline{\psi_2} - \psi_2\overline{\psi_4}\big) e^2 \wedge e^3 \\
&\quad + i\big(\psi_3\overline{\psi}_1 + \psi_1\overline{\psi_3} + \psi_4\overline{\psi_2} + \psi_2\overline{\psi_4}\big) e^2 \wedge e^4 \\
&\quad + i\big(\psi_2\overline{\psi}_1 + \psi_1\overline{\psi_2} - \psi_4\overline{\psi_3} - \psi_3\overline{\psi_4}\big) e^2 \wedge e^5 \\
&\quad + \big(-|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2\big) e^3 \wedge e^4 \\
&\quad + i\big(\psi_4\overline{\psi}_1 + \psi_1\overline{\psi_4} + \psi_3\overline{\psi_2} + \psi_2\overline{\psi_3}\big) e^3 \wedge e^5 \\
&\quad + \big(-\psi_4\overline{\psi}_1 + \psi_1\overline{\psi_4} - \psi_3\overline{\psi_2} + \psi_2\overline{\psi_3}\big) e^4 \wedge e^5
\end{aligned}$$

dir. $\sigma(\Psi)$ nin aşağıdaki gibi Hermityen iç çarpımı alınırsa

$$\begin{aligned}
\big\langle \sigma(\Psi)\Psi,\ \Psi \big\rangle &= 2\big(|\psi_1|^4 + |\psi_2|^4 + |\psi_3|^4 + |\psi_4|^4 + 2|\psi_1|^2|\psi_2|^2 + 2|\psi_1|^2|\psi_3|^2 \\
&\quad + 2|\psi_1|^2|\psi_4|^2 + 2|\psi_2|^2|\psi_3|^2 + 2|\psi_2|^2|\psi_4|^2 + 2|\psi_3|^2|\psi_4|^2\big) \\
&= 2|\Psi|^4
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

2. $\sigma(\Psi) \in \Omega^2(M, i\mathbb{R})$ kendisi ile Hermityen iç çarpımı ile

$$\big\langle \sigma(\Psi),\ \sigma(\Psi) \big\rangle = 2|\Psi|^4 \ dir.$$

$\square$

**Önerme 6.3.** *M 5−boyutlu Riemann manifoldu üzerinde* $(A,\Psi)$ *ikilisi* $D_A\Psi = 0$ *ve* $\rho(F_A) = \frac{1}{2}(\Psi\Psi^*)^+$ *Seiberg− Witten denklemlerinin çözümü olsun. O halde s, M manifoldu üzerinde skaler eğrilik olmak üzere*

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|\Psi(x)|^2 \quad\leq\quad -s_{min},\ s_{min} = min\{s(m) : m \in M\}$$

*dir.*

*Kanıt.* $|\Psi(x)|^2$ in maksimum değerini aldığı $x$ noktasında $0 \leq \Delta|\Psi|^2$ dır. $\nabla^A$ kovaryant türev operatörünün adjointi olan $(\nabla^A)^*$ ı kullanarak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\begin{aligned}
0 \leq \Delta|\Psi|^2 &= 2\big\langle(\nabla^A)^*\nabla^A\Psi,\Psi\big\rangle - 2\big\langle\nabla^A\Psi,\nabla^A\Psi\big\rangle \\
&\leq 2\big\langle(\nabla^A)^*\nabla^A\Psi,\Psi\big\rangle \\
&= 2\big\langle\Delta_A\Psi,\Psi\big\rangle,\ (D_A^2\Psi = \Delta_A\Psi + \tfrac{s}{4}\Psi + \tfrac{1}{2}dA\Psi'\textit{nin yardımıyla}) \\
&= 2\big\langle D_A^2\Psi - \tfrac{s}{4}\Psi - \tfrac{1}{2}dA\Psi,\ \Psi\big\rangle, (\ D_A\Psi = 0\ \textit{ile}) \\
&= \big\langle -\tfrac{s}{2}\Psi - dA\Psi,\ \Psi\big\rangle \\
&= -\tfrac{s}{2}|\Psi|^2 - \big\langle dA\Psi,\ \Psi\big\rangle,\quad dA\Psi = \rho(F_A)\Psi \\
&= -\tfrac{s}{2}|\Psi|^2 - \big\langle\rho(F_A)\Psi,\Psi\big\rangle,\ \big\langle\rho(F_A)\Psi,\Psi\big\rangle = \tfrac{1}{8}\big\langle\sigma(\Psi)\Psi,\ \Psi\big\rangle \\
&= -\tfrac{s}{2}|\Psi|^2 - \tfrac{1}{4}|\Psi|^4
\end{aligned}$$

$0 \leq -\frac{s}{2}|\Psi|^2 - \frac{1}{4}|\Psi|^4$ ile $\frac{1}{\sqrt{2}}|\Psi|^2 \leq -s$ elde edilir. $\square$

**Önerme 6.4.** *M, 5−boyutlu Riemann manifoldu üzerinde* $(A,\Psi)$ *ikilisi* $D_A\Psi = 0$ *ve* $\rho(F_A) = \frac{1}{2}(\Psi\Psi^*)^+$ *Seiberg− Witten denklemlerinin çözümü olsun. Eğer* $\frac{1}{\sqrt{2}}|\Psi(x)|^2 \leq -s$ *ise* $|F_A| \leq \frac{1}{4}|s|$ *dir.*

*Kanıt.*

$$\begin{aligned}
|F_A|^2 &= \big\langle\rho(F_A),\rho(F_A)\big\rangle \\
&= \tfrac{1}{4}\big\langle(\Psi\Psi^*)^+,(\Psi\Psi^*)^+\big\rangle \\
&= \tfrac{1}{64}\big\langle\sigma(\psi),\sigma(\psi)\big\rangle \\
&= \tfrac{1}{32}|\Psi|^4
\end{aligned}$$

Buradan $|F_A| = \frac{1}{4\sqrt{2}}|\Psi|^2 \leq \frac{|s|}{4}$ elde edilir. $\square$

### 6.2.2 5−boyutlu Kontakt metrik manifoldlarda Seiberg−Witten denklemlerine global çözüm

Bu bölümde 5−boyutlu kontakt metrik manifoldu üzerinde Seiberg−Witten denklemlerine strictly pseudoconveks CR manifoldu üzerinde çözüm verilecektir. Fakat çözüm verilmeden önce kontakt manifoldlarla ilgili bir takım yararlı bilgiler verilecektir.

$(2n+1)-$boyutlu düzgün $M$ manifoldu üzerinde, $\eta$ kontakt formu $\forall p \in M$ için $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ dır. $\eta$ kontakt formu, $H = Ker\eta$ ile verilen, $TM$ nin hiperalt düzlemini indirger. $\eta$ ile ilişkili *Rebb* vektör alanı, $\eta(\xi) = 1$ ve $d\eta(\xi, .) = 0$ özelliğini sağlar. Bu özellikleri sağlayan $(M, \eta)$ ya $(n, \xi)$ ile birlikte bir Kontakt manifold denir. $H = ker\eta$ ve $\eta(\xi) = 1$ için $TM = H \oplus \mathbb{R}\xi$ olacak şekilde dekompoze olur. O halde $M$ üzerindeki herhangi bir vektör alanı, $X_H$, $X$ nin dikey kısmı olmak üzere $X = X_H + f\xi$, $\forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ şeklinde ifade edilir. . Eğer $(M, \eta)$ kontakt manifold ise $(H, d\eta\big|_H)$ çiftine simplektik vektör demeti denir. $H$ üzerinde $J_H$ yaklaşık kompleks yapısı $d\eta\big|_H\big(J_H(X), J_H(Y)\big) = d\eta\big|_H(X, Y)$ tanımlanırsa, $J_H$ tanjant demetinin $J$ endomorfizmine $J\xi = 0$ olacak şekilde genişletilebilir. Dahası $TM$ de $J$ kompleks yapısı $J^2 = -I_d + \eta \otimes \xi$ özelliği sağlanır. Bu tanım altında, $TM$ de

$$g_\eta(X, Y) = d\eta(X, JY) + \eta(X)\eta(Y)$$

Rieamann metriğini tanımlayabiliriz. $g_\eta$ ya $\eta$ ile ilişkili Webster metriği denir ve $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$g_\eta(\xi, X) = \eta(X),\ g_\eta(JX, Y) = d\eta(X, Y),\ g_\eta(JX, JY) = g\eta(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

özelliği sağlanıyorsa $(M, g_\eta, \eta, \xi, J)$ ye Kontakt metrik manifold denir. Genelleştirilmiş, $\nabla$ Tanaka−Webster konneksiyonu $(M, g_\eta, \eta, \xi, J)$ kontakt metrik manifoldu üzerinde iyi bilinen bir konneksiyondur. $\nabla$ konneksiyonu $\nabla\eta = 0$ ve $\nabla g_\eta = 0$ özelliğini sağlar. Ayrıca $J$ integre edilebilirdir. Yani $\nabla J = 0$ dır. O halde $(M, g_\eta, \eta, \xi, J)$ kontakt metrik manifolduna strictly pseudoconveks CR manifoldu denir.

$(M, g_\eta, \eta, \xi, J)$ 5−boyutlu Kontakt metrik manifold üzerinde, $i$ Kontraksiyon operatörü olmak üzere, $i(\xi)\alpha = 0$ ise $\alpha$ ya dikey $p-$form denir. Herhangi bir

$\alpha \in \Omega^2(M)$ için $\alpha_H : \alpha \circ \pi$, $\pi : TM \to H$ kanonikal projeksiyon ve $\alpha_\xi = \eta \wedge i(\xi)\alpha$ olmak üzere, $\alpha = \alpha_H + \alpha_\xi$ olacak şekilde dekompoze olur.
$\Omega^2_H(M)$ ve $\Omega^1_H(M)$ dikey formların alt demetleri olmak üzere, $\Omega^2(M)$ nin dekompozisyonu

$$\Omega^2(M) = \Omega^2_H(M) \oplus \eta \wedge \Omega^1_H(M)$$

şeklindedir. 5−boyutlu kontakt manifoldlarda $\{e_1, e_2 = J(e_1), e_3, e_4 = J(e_3), \xi\}$ lokal ortonormal çatı alanı ve bu çatı alanına karşılık gelen duali $\{e^1, e^2, e^3, e^4, \eta\}$ olmak üzere $d\eta = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4$ ile gösterilir.

**Tanım 6.5.** *$(M, g_\eta, \eta, \xi, J)$ $Spin^c$−yapısı ile donatılmış kontakt metrik manifold olsun. $\mathcal{L}$ doğru demeti üzerindeki uniter $A$ konneksiyonu, genelleştirilmiş $'\nabla'$ Tanaka−Webster konneksiyonu ile $S$ ye $\nabla^A$ spinoriel konneksiyon indirger. Buna bağlı olarak $\{e_i\}$ ler $H$ nin lokal ortonormal çatısı olmak üzere, $D^A_H$ ile gösterilen Kohn−Dirac operatörü aşağıdaki gibi tanımlanır:*

$$D^A_H = \sum_{i=1}^{2n} \kappa(e_i)(\nabla^A_{e_i}).$$

*$D_A$ Dirac operatörü ise*

$$D_A = D^A_H + \xi \cdot \nabla^A_\xi$$

*şeklinde tanımlanır.*

Aşağıdaki önermede [10] da izlenen metoda benzer şekilde $\rho(F_A) = \frac{1}{2}(\Psi\Psi^*)^+$ eğrilik denklemi $\rho(F_A)$ $H$ ya kısıtlanacak ve $\rho_H(F_A)$ ile gösterilecek olan denkleme strictly pseudoconvex CR manifoldları üzerinde çözüm verilecektir. Bu aşamadan itibaren Seiberg−Witten denklemlerine çözüm verebilmek için $(M, g_\eta, \eta, \xi, J)$ nın strictly pseudoconveks CR manifoldu olduğu kabul edilecektir.
$(M, g_\eta)$, $Spin^c$−yapısı ile donatılmış kontakt metrik manifold olsun. O halde $Spin^c$ yapısı ile birlikte $\kappa(d\eta) : S \to S$ $\{\pm 2i, 0\}$ özdeğerlerine sahip bir endomorfizmdir. Burada $d\eta = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4$ şeklindedir. $\{\pm 2i, 0\}$ özdeğerleri ile ilişkili olan spinor demeti $S = \Lambda^{0,2}_H(M) \oplus \Lambda^{0,1}_H(M) \oplus \Lambda^{0,0}_H(M)$ için $\rho_H(F_A) = \frac{(\Psi\Psi^*)^+_H}{2}$ eğrilik denklemi göz önüne alındığında aşağıdaki durum söz konusudur:

$\Psi \in S(-2i)$ için $\Omega\Psi = -2i\Psi$ dir. $S \cong \mathbb{C}^4$ olduğundan $\Psi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ bileşenlerine sahip ve

$$\frac{(\Psi\Psi^*)^+_H}{2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

elde edilir.

$\overline{\partial} \oplus \overline{\partial^*} : \Lambda^{0,even} \to \Lambda^{0,odd}$, $\overline{\partial}$ Dolbeault operatörü $\overline{\partial^*}$ da $\overline{\partial}$ operatörünün Hermityen adjointi olmak üzere, kanonik $Spin^c-$yapısının $\mathcal{L} = \Lambda^2(M)$ doğru demetinin $A_0$ Levi$-$Civita konneksiyonu ile $D_{A_0}$ Dirac operatörü

$$D_{A_0} : \Gamma(S^+) \to \Gamma(S^-) \quad ; \quad \sqrt{2}(\overline{\partial} \oplus \overline{\partial^*}) : \Omega^{0,0} \oplus \Omega^{0,2} \to \Omega^{0,1}$$

şeklinde tanımlanır.

**Önerme 6.6.** $(M, g_\eta, \eta, \xi, J)$ *5$-$boyutlu strictly pseudoconveks kontakt manifold olsun. Kabul edelim ki $H$ alt demetinin $s_H$ skaler eğriliği negatif ve sabit olsun. O halde $\Psi_0 \in S(-2i) \cong \Lambda^{0,0} \cong \Omega^{0,0}$ Spinoru için $(A_0, \Psi = \sqrt{-s}\Psi_0)$ Seiberg$-$Witten denkleminin bir çözümüdür.*

*Kanıt.* $D_{A_0}\Psi = D_H^{A_0}\Psi + \xi \cdot \nabla_\xi^{A_0}\Psi$ için $D_H^{A_0}\Psi = 0$ dır [12]. Ayrıca $M$ manifoldu üzerinde Spin$-$yapısı var ise $\nabla_\xi^{A_0}\Psi = \mathcal{L}_\xi\Psi$ dir [26]. $\Psi$ sabit olduğundan $\xi \cdot \nabla_\xi^{A_0}\Psi = 0$ dır. Dolayısıyla $D_{A_0}\Psi = D_H^{A_0}\Psi + \xi \cdot \nabla_\xi^{A_0}\Psi = 0$ dır. O halde geriye sadece
$\rho^+(F_{A_0}) = \frac{1}{2}(\Psi\Psi^*)^+$ nın gösterilmesi kalır.
$F_{A_0}$, $A_0$ ın eğriliği olsun. $\forall X, Y \in \Gamma(H)$ için $\rho^H_{ric}(X,Y) = g(X, J_H \circ RicY)$ ve $Ric : \Gamma(H) \to \Gamma(H)$ şeklinde tanımlanan $\rho^H_{ric}$ ve $Ric$ için

$$F_A = i\rho^H_{ric}$$

tir [1]. Lokal koordinatlarda $J$ yaklaşık kompleks yapısı ve Ricci tensörüne karşılık gelen matrisler aşağıdaki gibidir:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad Ric = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} & R_{15} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} & R_{25} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} & R_{35} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} & R_{45} \\ R_{51} & R_{52} & R_{53} & R_{54} & R_{55} \end{bmatrix}.$$

Dahası $J$ ve $Ric$ değişmeli olduğundan $J \circ Ric = Ric \circ J$ ile

$$\begin{bmatrix} R_{11} & 0 & R_{13} & R_{14} & 0 \\ 0 & R_{11} & -R_{14} & R_{13} & 0 \\ R_{13} & -R_{14} & R_{33} & 0 & 0 \\ R_{14} & R_{13} & 0 & R_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{55} \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Ayrıca $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ taban elemanları için

$$\rho^H_{ric}(X, Y) = Ric(X, J_H Y) = g(X, J_H \circ RicY)$$

tanımından $\rho_{ric}$ aşağıdaki gibi elde edilir [10]:

$$\rho^H_{ric} = -R_{11} e_1 \wedge e_2 + R_{14}(e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4) + R_{13}(e_2 \wedge e_3 - e_1 \wedge e_4) - R_{33} e_3 \wedge e_4.$$

Tüm bu elde edilenler ile birlikte $F_{A_0} = i\rho_{ric}$ den $\rho(F_{A_0}) = i\rho(\rho_{ric})$ dir. Ayrıca $R_{11} = R_{33}$ ve $R_{14} = R_{13} = 0$ için aşağıdaki iki matris

$$\begin{bmatrix} -R_{11} + R_{33} & 0 & 2(-iR_{13} + R_{14}) & 0 \\ 0 & R_{11} + R_{33} & 0 & 0 \\ 2(iR_{13} + R_{14}) & 0 & R_{11} - R_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R_{11} - R_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \\ 0 & \frac{s_H}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{s_H}{2} \end{bmatrix}$$

eşit olur. O halde $i\rho(\rho_{ric}) = \frac{1}{2}(\Psi\Psi^*)^+$ dan $\rho(F_{A_0}) = \frac{1}{2}(\Psi\Psi^*)^+$ olur. Dahası $R_{11} + R_{33} = \frac{s_H}{2}$ ile $s_H$ skaler eğriliği $s_H = trRic = (R_{11} + R_{22} + R_{33} + R_{44})$ dir. Ayrıca yukarıdaki iki matris eşitliğininden gelen denklem sisteminin çözümü ile Ricci tensörünün açık hali

$$\begin{bmatrix} R_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{55} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. $\square$

## 6.3 6−Boyutta Self−Dualitesiz Seiberg−Witten Denklemleri

$\rho^+ : \Omega^2\big(M, i\mathbb{R}\big) \to End\big(S\big)$ dönüşümü yardımı ile

$$\rho^+\big(\Omega^2(M, i\mathbb{R})\big) = W' \subset End(S)$$

olsun. O halde $\Psi\Psi^*$ ın $W'$ üstüne dik izdüşümü $\big(\Psi\Psi^*\big)^+ = Proj_{W'}\big(\Psi\Psi^*\big)$ için $M$ manifoldu üzerindeki Seiberg−Witten denklemleri:

1. $D_A^+\big(\Psi\big) = 0$
2. $\rho^+\big(F_A\big) = \frac{1}{2}\big(\Psi\Psi^*\big)^+ = \frac{1}{2}\sum\limits_{i<j} \frac{\big\langle \rho^+(e^i \wedge e^j), \Psi\Psi^* \big\rangle}{\big\langle \rho^+(e^i \wedge e^j), \rho^+(e^i \wedge e^j) \big\rangle} \rho^+(e^i \wedge e^j)$

şeklinde ifade edilsin. Aşağıda 6−boyutta Seiberg−Witten denklemleri açık bir şekilde ifade edilmiştir.

### 6.3.1 6− boyutta Seiberg−Witten denklemleri

6−boyutlu manifoldlar için kompleks 6−spinorların vektör uzayı 4−boyutludur ve $\Delta_6 = \mathbb{C}^4$ ile gösterilir. $\mathbb{C}l_6 \cong End\big(\Delta_6\big)$ olduğundan $\mathbb{C}l_6$ kompleks Clifford cebirinin spin temsili $\kappa_6$ aşağıdaki şekilde verilir [8]:

$$\kappa_6 : \mathbb{C}l_6 \to End\big(\Delta_6\big)$$

$$\kappa(e_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \kappa(e_2) = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 20 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{bmatrix}, \quad \kappa(e_3) = \begin{bmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{bmatrix}$$

$$\kappa(e_4) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \kappa(e_5) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 061 & 0 & 0 & \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \kappa(e_6) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Burada $\kappa(e_i), i = 1, ..., 6$ matrisleri $\mathbb{C}l_6 \cong End\big(\Delta_6\big)$ izomorfizmi altında $\mathbb{C}l_6$ cebrinin üreteçlerinin görüntüleridir. Bu izomorfizma açık olarak $\mathbb{C}l_6 \cong \mathbb{C}l_4 \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(2)$ indirgeme formülünden elde edilebilir [12].
Bu temsillere bağlı olarak $D_A^+\Psi = 0$ denkleminin açık hali de aşağıdaki şekilde

elde edilir:

$$
\begin{aligned}
0 &= \Big(\tfrac{\partial\psi_1}{\partial x_1}+\tfrac{\psi_1 A_1}{2}\Big)+\Big(\tfrac{\partial\psi_2}{\partial x_4}+\tfrac{\psi_2 A_4}{2}\Big)+\Big(\tfrac{\partial\psi_4}{\partial x_5}+\tfrac{\psi_4 A_5}{2}\Big)+i\Big(\tfrac{\partial\psi_1}{\partial x_2}+\tfrac{\psi_1 A_2}{2}\Big)\\
&\quad +i\Big(\tfrac{\partial\psi_2}{\partial x_3}+\tfrac{\psi_2 A_3}{2}\Big)-i\Big(\tfrac{\partial\psi_4}{\partial x_6}+\tfrac{\psi_4 A_6}{2}\Big)\\
0 &= \Big(\tfrac{\partial\psi_2}{\partial x_1}+\tfrac{\psi_2 A_1}{2}\Big)-\Big(\tfrac{\partial\psi_1}{\partial x_4}+\tfrac{\psi_1 A_4}{2}\Big)-\Big(\tfrac{\partial\psi_3}{\partial x_5}+\tfrac{\psi_3 A_5}{2}\Big)+i\Big(\tfrac{\partial\psi_1}{\partial x_3}+\tfrac{\psi_1 A_3}{2}\Big)\\
&\quad -i\Big(\tfrac{\partial\psi_2}{\partial x_2}+\tfrac{\psi_2 A_2}{2}\Big)+i\Big(\tfrac{\partial\psi_3}{\partial x_6}+\tfrac{\psi_3 A_6}{2}\Big)\\
0 &= \Big(\tfrac{\partial\psi_3}{\partial x_1}+\tfrac{\psi_3 A_1}{2}\Big)-\Big(\tfrac{\partial\psi_4}{\partial x_4}+\tfrac{\psi_4 A_4}{2}\Big)+\Big(\tfrac{\partial\psi_2}{\partial x_5}+\tfrac{\psi_2 A_5}{2}\Big)+i\Big(\tfrac{\partial\psi_2}{\partial x_6}+\tfrac{\psi_2 A_6}{2}\Big)\\
&\quad +i\Big(\tfrac{\partial\psi_3}{\partial x_2}+\tfrac{\psi_3 A_2}{2}\Big)+i\Big(\tfrac{\partial\psi_4}{\partial x_3}+\tfrac{\psi_4 A_3}{2}\Big)\\
0 &= \Big(\tfrac{\partial\psi_4}{\partial x_1}+\tfrac{\psi_4 A_1}{2}\Big)+\Big(\tfrac{\partial\psi_3}{\partial x_4}+\tfrac{\psi_3 A_4}{2}\Big)-\Big(\tfrac{\partial\psi_1}{\partial x_5}-\tfrac{\psi_1 A_5}{2}\Big)-i\Big(\tfrac{\partial\psi_1}{\partial x_6}+\tfrac{\psi_1 A_6}{2}\Big)\\
&\quad +i\Big(\tfrac{\partial\psi_3}{\partial x_3}+\tfrac{\psi_3 A_3}{2}\Big)-i\Big(\tfrac{\partial\psi_4}{\partial x_2}+\tfrac{\psi_4 A_2}{2}\Big).
\end{aligned}
$$

Eğrilik denklemi ise $\Omega^2(M, i\mathbb{R})$ uzayının taban elemanları yardımıyla aşağıdaki gibi elde edilir:

$$
\begin{bmatrix}
iF_{12}-iF_{34}-iF_{56} & F_{14}-F_{23}+iF_{13}+iF_{24} & -F_{36}-F_{45}-iF_{35}+iF_{46} & F_{15}+F_{26}-iF_{16}+iF_{25}\\
-F_{14}+F_{23}+iF_{13}+iF_{24} & -iF_{12}+iF_{34}-iF_{56} & -F_{15}+F_{26}+iF_{16}+iF_{25} & F_{36}-F_{45}+iF_{35}+iF_{46}\\
F_{36}+F_{45}-iF_{35}+iF_{46} & F_{15}-F_{26}+iF_{16}+iF_{25} & iF_{12}+iF_{34}+iF_{56} & -F_{14}-F_{23}+iF_{13}-iF_{24}\\
-F_{15}-F_{26}-iF_{16}+iF_{25} & -F_{36}+F_{45}+iF_{35}+iF_{46} & F_{14}+F_{23}+iF_{13}+iF_{24} & -iF_{12}-iF_{34}+iF_{56}
\end{bmatrix}.
$$

Denklemin diğer tarafı olan $\frac{1}{2}\big(\Psi\Psi^*\big)^+ = \frac{1}{2}\sum_{i<j}\frac{\big\langle \rho^+(e^i\wedge e^j), \Psi\Psi^*\big\rangle}{\big\langle \rho^+(e^i\wedge e^j), \rho^+(e^i\wedge e^j)\big\rangle}\rho^+(e^i\wedge e^j)$ denklemine karşılık gelen matrisin her bir satırı aşağıda verilmiştir:

$$\Big[\frac{1}{8}\big(3|\psi_1|^2-|\psi_2|^2-|\psi_3|^2-|\psi_4|^2\big), \frac{1}{2}(\psi_1\overline{\psi_2}),\ \frac{1}{2}(\psi_1\overline{\psi_3}),\ \frac{1}{2}(\psi_1\overline{\psi_4})\Big]$$

$$\Big[\frac{1}{2}(\psi_2\overline{\psi_1}),\ \frac{1}{8}\big(-|\psi_1|^2+3|\psi_2|^2-|\psi_3|^2-|\psi_4|^2\big),\ \frac{1}{2}(\psi_2\overline{\psi_3}),\ \frac{1}{2}(\psi_2\overline{\psi_4})\Big]$$

$$\Big[\frac{1}{2}(\psi_3\overline{\psi_1}),\ \frac{1}{2}(\psi_3\overline{\psi_2}),\ \frac{1}{8}\big(-|\psi_1|^2-|\psi_2|^2+3|\psi_3|^2-|\psi_4|^2\big),\ \frac{1}{2}(\psi_3\overline{\psi_4})\Big]$$

$$\Big[\frac{1}{2}(\psi_4\overline{\psi_1}),\ \frac{1}{2}(\psi_4\overline{\psi_2}),\ \frac{1}{2}(\psi_4\overline{\psi_3}),\ \frac{1}{8}\big(-|\psi_1|^2-|\psi_2|^2-|\psi_3|^2+3|\psi_4|^2\big)\Big].$$

Yukarıdaki iki matrisin eşitliğine karşılık gelen eğrilik denklemi çözümlenirse aşağıdaki gibi denklem sistemi elde edilir:

$$
\begin{aligned}
F_{12} &= -\tfrac{i}{8}\big(-|\psi_1|^2+|\psi_2|^2-|\psi_3|^2+|\psi_4|^2\big)\\
F_{13} &= -\tfrac{i}{8}\big(\psi_2\overline{\psi}_1+\psi_1\overline{\psi_2}+\psi_4\overline{\psi_3}+\psi_3\overline{\psi_4}\big)\\
F_{14} &= -\tfrac{1}{8}\big(\psi_2\overline{\psi}_1-\psi_1\overline{\psi_2}-\psi_4\overline{\psi_3}+\psi_3\overline{\psi_4}\big)\\
F_{15} &= \tfrac{1}{8}\big(-\psi_4\overline{\psi}_1+\psi_1\overline{\psi_4}-\psi_2\overline{\psi_3}+\psi_3\overline{\psi_2}\big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{16} &= \tfrac{i}{8}\big(\psi_4\overline{\psi}_1+\psi_1\overline{\psi_4}-\psi_2\overline{\psi_3}-\psi_3\overline{\psi_2}\big)\\
F_{23} &= \tfrac{1}{8}\big(\psi_2\overline{\psi}_1-\psi_1\overline{\psi_2}+\psi_4\overline{\psi_3}-\psi_3\overline{\psi_4}\big)\\
F_{24} &= -\tfrac{i}{8}\big(\psi_2\overline{\psi}_1+\psi_1\overline{\psi_2}-\psi_4\overline{\psi_3}-\psi_3\overline{\psi_4}\big)\\
F_{25} &= -\tfrac{i}{8}\big(\psi_4\overline{\psi}_1+\psi_1\overline{\psi_4}+\psi_2\overline{\psi_3}+\psi_3\overline{\psi_2}\big)\\
F_{26} &= \tfrac{1}{8}\big(-\psi_4\overline{\psi}_1+\psi_1\overline{\psi_4}+\psi_2\overline{\psi_3}-\psi_3\overline{\psi_2}\big)\\
F_{34} &= \tfrac{i}{8}\big(|\psi_1|^2-|\psi_2|^2-|\psi_3|^2+|\psi_4|^2\big)\\
F_{35} &= \tfrac{i}{8}\big(\psi_3\overline{\psi}_1+\psi_1\overline{\psi_3}-\psi_2\overline{\psi_4}-\psi_4\overline{\psi_2}\big)\\
F_{36} &= \tfrac{1}{8}\big(\psi_3\overline{\psi}_1-\psi_1\overline{\psi_3}+\psi_2\overline{\psi_4}-\psi_4\overline{\psi_2}\big)\\
F_{45} &= \tfrac{1}{8}\big(\psi_3\overline{\psi}_1-\psi_1\overline{\psi_3}-\psi_2\overline{\psi_4}+\psi_4\overline{\psi_2}\big)\\
F_{46} &= -\tfrac{i}{8}\big(\psi_3\overline{\psi}_1+\psi_1\overline{\psi_3}+\psi_2\overline{\psi_4}+\psi_4\overline{\psi_2}\big)\\
F_{56} &= \tfrac{i}{8}\big(|\psi_1|^2+|\psi_2|^2-|\psi_3|^2-|\psi_4|^2\big).
\end{aligned}
$$

**Önerme 6.7.** *$\kappa : TM \to End(S)$ 6−boyutlu kompakt $M$ Rieamann manifoldu üzerinde $Spin^c$−yapısı olsun. O halde $\forall\Psi \in \Gamma(S)$ ve $\sigma(\Psi) \in \Omega^2(M, i\mathbb{R})$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır:*

1. $\big\langle \sigma(\Psi)\Psi,\ \Psi\big\rangle = 3|\Psi|^4$
2. $\big\langle \sigma(\Psi),\ \sigma(\Psi)\big\rangle = 3|\Psi|^4.$

*Kanıt.*

1. $\Psi = \begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\\ \psi_4\end{bmatrix} \in \mathbb{C}^4$ için

$$
\begin{aligned}
\sigma(\Psi) &= \sum_{i<j}\big\langle\kappa(e_i)\kappa(e_j)\Psi,\Psi\big\rangle e^i\wedge e^j\\
&= i\big(-|\psi_1|^2+|\psi_2|^2-|\psi_3|^2+|\psi_4|^2\big)e^1\wedge e^2\\
&\quad -i\big(\psi_2\overline{\psi}_1+\psi_1\overline{\psi_2}+\psi_4\overline{\psi_3}+\psi_3\overline{\psi_4}\big)e^1\wedge e^3\\
&\quad -\big(\psi_2\overline{\psi}_1-\psi_1\overline{\psi_2}-\psi_4\overline{\psi_3}+\psi_3\overline{\psi_4}\big)e^1\wedge e^4\\
&\quad +\big(-\psi_4\overline{\psi}_1+\psi_1\overline{\psi_4}-\psi_2\overline{\psi_3}+\psi_3\overline{\psi_2}\big)e^1\wedge e^5\\
&\quad +i\big(\psi_4\overline{\psi}_1+\psi_1\overline{\psi_4}-\psi_2\overline{\psi_3}-\psi_3\overline{\psi_2}\big)e^1\wedge e^6\\
&\quad +\big(\psi_2\overline{\psi}_1-\psi_1\overline{\psi_2}+\psi_4\overline{\psi_3}-\psi_3\overline{\psi_4}\big)e^2\wedge e^3\\
&\quad -i\big(\psi_2\overline{\psi}_1+\psi_1\overline{\psi_2}-\psi_4\overline{\psi_3}-\psi_3\overline{\psi_4}\big)e^2\wedge e^4\\
&\quad -i\big(\psi_4\overline{\psi}_1+\psi_1\overline{\psi_4}+\psi_2\overline{\psi_3}+\psi_3\overline{\psi_2}\big)e^2\wedge e^5\\
&\quad +\big(-\psi_4\overline{\psi}_1+\psi_1\overline{\psi_4}+\psi_2\overline{\psi_3}-\psi_3\overline{\psi_2}\big)e^2\wedge e^6\\
&\quad +i\big(|\psi_1|^2-|\psi_2|^2-|\psi_3|^2+|\psi_4|^2\big)e^3\wedge e^4\\
&\quad +i\big(\psi_3\overline{\psi}_1+\psi_1\overline{\psi_3}-\psi_2\overline{\psi_4}-\psi_4\overline{\psi_2}\big)e^3\wedge e^5\\
&\quad +\big(\psi_3\overline{\psi}_1-\psi_1\overline{\psi_3}+\psi_2\overline{\psi_4}-\psi_4\overline{\psi_2}\big)e^3\wedge e^6\\
&\quad +\big(\psi_3\overline{\psi}_1-\psi_1\overline{\psi_3}-\psi_2\overline{\psi_4}+\psi_4\overline{\psi_2}\big)e^4\wedge e^5\\
&\quad -i\big(\psi_3\overline{\psi}_1+\psi_1\overline{\psi_3}+\psi_2\overline{\psi_4}+\psi_4\overline{\psi_2}\big)e^4\wedge e^6\\
&\quad +i\big(|\psi_1|^2+|\psi_2|^2-|\psi_3|^2-|\psi_4|^2\big)e^5\wedge e^6
\end{aligned}
$$

dir. $\sigma(\Psi)$ nin aşağıdaki gibi Hermityen iç çarpımı alınırsa

$$
\begin{aligned}
\big\langle\sigma(\Psi)\Psi,\ \Psi\big\rangle &= 3\big(|\psi_1|^4+|\psi_2|^4+|\psi_3|^4+|\psi_4|^4+2|\psi_1|^2|\psi_2|^2+2|\psi_1|^2|\psi_3|^2\\
&\quad +2|\psi_1|^2|\psi_4|^2+2|\psi_2|^2|\psi_3|^2+2|\psi_2|^2|\psi_4|^2+2|\psi_3|^2|\psi_4|^2\big)\\
&= 3|\Psi|^4
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir.

2. $\sigma(\Psi)\in\Omega^2(M,\mathbb{R})$ kendisi ile Hermityen iç çarpımı ile

$$
\big\langle\sigma(\Psi),\ \sigma(\Psi)\big\rangle = 3|\Psi|^4
$$

dir.

□

**Önerme 6.8.** *$M$ 6−boyutlu Riemann manifoldu üzerinde $(A,\Psi)$ ikilisi $D_A^+\Psi=0$ ve $\rho^+(F_A)=\frac{1}{2}(\Psi\Psi^*)^+$ Seiberg− Witten denklemlerinin çözümü olsun. O* *halde s, M manifoldu üzerinde skaler eğrilik olmak üzere*

$$\tfrac{\sqrt{3}}{2}|\Psi(x)|^2 \;\; \leq \;\; -s_{min}, \;\; s_{min} = min\{s(m) : m \in M\}$$

*dir.*

*Kanıt.* $|\Psi(x)|^2$ in maksimum değerini aldığı $x$ noktasında $0 \leq \Delta|\Psi|^2$ dır. $\nabla^A$ kovaryant türev operatörünün adjointi olan $(\nabla^A)^*$'ı kullanarak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$\begin{aligned}
0 \leq \Delta|\Psi|^2 &= 2\big\langle(\nabla^A)^*\nabla^A\Psi, \Psi\big\rangle - 2\big\langle\nabla^A\Psi, \nabla^A\Psi\big\rangle \\
&\leq 2\big\langle(\nabla^A)^*\nabla^A\Psi, \Psi\big\rangle \\
&= 2\big\langle\Delta_A\Psi, \Psi\big\rangle, \; (D_A^2\Psi = \Delta_A\Psi + \tfrac{s}{4}\Psi + \tfrac{1}{2}dA\Psi' nin\ yardımıyla) \\
&= 2\big\langle D_A^2\Psi - \tfrac{s}{4}\Psi - \tfrac{1}{2}dA\Psi, \; \Psi\big\rangle, \; (D_A\Psi = 0 \ ile) \\
&= \big\langle -\tfrac{s}{2}\Psi - dA\Psi, \; \Psi\big\rangle, \\
&= -\tfrac{s}{2}|\Psi|^2 - \big\langle dA\Psi, \; \Psi\big\rangle, \;\; (dA\Psi = \rho^+(F_A)\Psi) \\
&= -\tfrac{s}{2}|\Psi|^2 - \big\langle\rho^+(F_A)\Psi, \Psi\big\rangle, \; (\big\langle\rho^+(F_A)\Psi, \Psi\big\rangle = \tfrac{1}{8}\big\langle\sigma(\Psi)\Psi, \; \Psi\big\rangle) \\
&= -\tfrac{s}{2}|\Psi|^2 - \tfrac{3}{8}|\Psi|^4
\end{aligned}$$

$0 \leq -\frac{s}{2}|\Psi|^2 - \frac{3}{8}|\Psi|^4$ ile $\frac{\sqrt{3}}{2}|\Psi|^2 \leq -s$ elde edilir. □

**Önerme 6.9.** *$M$ $6-$boyutlu Riemann manifoldu üzerinde $(A, \Psi)$ ikilisi $D_A^+\Psi = 0$ ve $\rho^+(F_A) = \frac{1}{2}(\Psi\Psi^*)^+$ Seiberg$-$Witten denklemlerinin çözümü olsun. Eğer $\frac{\sqrt{3}}{2}|\Psi(x)|^2 \leq -s$ ise $|F_A| \leq \frac{1}{4}|s|$ dir.*

*Kanıt.*

$$\begin{aligned}
|F_A|^2 &= \big\langle\rho^+(F_A), \rho^+(F_A)\big\rangle \\
&= \tfrac{1}{4}\big\langle(\Psi\Psi^*)^+, (\Psi\Psi^*)^+\big\rangle \\
&= \tfrac{1}{64}\big\langle\sigma(\psi), \sigma(\psi)\big\rangle \\
&= \tfrac{3}{64}|\Psi|^4 \\
&\Rightarrow \;\; |F_A| = \tfrac{\sqrt{3}}{8}|\Psi|^2 \leq \tfrac{|s|}{4}
\end{aligned}$$

elde edilir. □

### 6.3.2 $6-$boyutlu $SU(3)-$ manifoldları üzerinde Seiberg$-$Witten denklemlerine global çözüm

Bu bölümde

1. $D_A^+\Psi = 0$

2. $\rho^+(F_A) = \frac{1}{2}(\Psi\Psi^*)^+$

şeklinde tanımlanmış Seiberg$-$Witten denklemleri için çözüm verilecektir. Öncelikle $\mathbb{R}^6$ üzerinde $\{e_1, ..., e_6\}$ standart tabanı ve $\{e^1, ..., e^6\}$ dual tabanlarını göz önünde bulundurarak $\mathbb{R}^6$ üzerinde

$$\Omega = e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4 + e^5 \wedge e^6$$

standart simplektik formu ve $J$ kompleks yapısı

$$J(e_1) = e_2,\ J(e_3) = e_4,\ J(e_5) = e_6$$

şeklinde verilsin. O halde $\Omega : S \to S$ endomorfizmi $\{\pm 3i, \pm i\}$ özdeğerine sahip bir endomorfizmdir. $S = S(3i) \oplus S(i) \oplus S(-i) \oplus S(-3i)$ spinor demetinin dekompozisyonu için

$$S^+ = S(i) \oplus S(-3i), \quad S^- = S(-i) \oplus S(3i)$$

altdemetlerdir [8]. Ayrıca $\Psi \in S^+(-3i)$ için $\Omega\Psi = -3i\Psi$ dir. $S^+ \cong \mathbb{C}^4$ olduğundan $\Psi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ bileşenlerine sahip ve

$$\frac{(\Psi\Psi^*)^+}{2} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$$

eşitliği sağlanır.

$(M, g, J)$ Hermityen manifoldu ile birlikte $Spin^c(2n)$ nin Spinor demeti $S \cong \Lambda^{0,*}$ dir. Ayrıca $S = S^+ \oplus S^-$ şeklinde dekompoze olduğundan, $S^+(3i) \cong \Lambda^{0,2}$, $S^+(-3i) \cong \Lambda^{0,0}$ şeklinde ifade edilir.

$\overline{\partial} \oplus \overline{\partial^*} : \Lambda^{0,even} \to \Lambda^{0,odd}$, $\overline{\partial}$ Dolbeault operatörü $\overline{\partial^*}$ da $\overline{\partial}$ operatörünün Hermityen adjointi olmak üzere, kanonik $Spin^c-$yapısının $\mathcal{L} = \Lambda^2(TM)$ doğru demetinin $A_0$ Levi$-$Civita konneksiyonu ile $D_{A_0}$ Dirac operatörü

$$D_{A_0} : \Gamma(S^+) \to \Gamma(S^-) \quad ; \quad \sqrt{2}(\overline{\partial} \oplus \overline{\partial^*}) : \Omega^{0,0} \oplus \Omega^{0,2} \to \Omega^{0,1}$$

şeklinde tanımlanır.

**Önerme 6.10.** *$(M, g, J)$ 6−boyutlu Kahler manifold olsun. Kabul edelim ki s skaler eğriliği negatif ve sabit olsun. O halde $\Psi_0 \in S(-3i) \cong \Lambda^{0,0} \cong \Omega^{0,0}$ Spinoru için $(A_0, \Psi = 2\sqrt{-s}\Psi_0)$ Seiberg− Witten denkleminin bir çözümüdür.*

*Kanıt.* $D_{A_0}\Psi = 0$ olduğu $D_{A_0}$ ın tanımından aşikardır [12]. O halde geriye sadece $\rho^+(F_{A_0}) = \frac{(\Psi\Psi^*)^+}{2}$ nın gösterilmesi kalır.
$\mathcal{L} = \Lambda^2(TM)$ doğru demeti ve $F_{A_0}$, $A_0$ ın eğriliği olsun.

$$\rho_{ric}(X, Y) = g(X, J \circ RicY)$$

ve $Ric : TM \to TM$ şeklinde tanımlanan $\rho_{ric}$ ve $Ric$ için

$$F_{A_0} = i\rho_{ric}$$

tir [12]. Lokal koordinatlarda $J$ yaklaşık kompleks yapısı ve Ricci tensörüne karşılık gelen matrisler aşağıdaki gibidir:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Ric = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} & R_{15} & R_{16} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} & R_{25} & R_{26} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} & R_{35} & R_{36} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} & R_{45} & R_{46} \\ R_{51} & R_{52} & R_{53} & R_{54} & R_{55} & R_{56} \\ R_{61} & R_{62} & R_{63} & R_{64} & R_{65} & R_{66} \end{bmatrix}.$$

Dahası J ve Ric değişmeli olduğundan $J \circ Ric = Ric \circ J$ ile

$$\begin{bmatrix} R_{11} & 0 & R_{13} & R_{14} & R_{15} & R_{16} \\ 0 & R_{11} & -R_{14} & -R_{13} & -R_{16} & R_{15} \\ R_{13} & -R_{14} & R_{33} & 0 & R_{35} & R_{36} \\ R_{14} & -R_{13} & 0 & R_{33} & -R_{36} & R_{35} \\ R_{15} & -R_{16} & R_{35} & -R_{36} & R_{55} & 0 \\ R_{16} & R_{15} & R_{36} & R_{35} & 0 & R_{55} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Dahası $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ taban elemanları için $\rho_{ric}(X, Y) = g(X, J \circ RicY)$ tanımından $\rho_{ric}$ aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} \rho_{ric} &= -R_{11}e_1 \wedge e_2 - R_{33}e_3 \wedge e_4 - R_{13}(e_1 \wedge e_4 - e_2 \wedge e_3) - R_{15}(e_1 \wedge e_6 - e_2 \wedge e_5) \\ &\quad +R_{14}(e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4) + R_{16}(e_1 \wedge e_5 + e_2 \wedge e_6) + R_{36}(e_3 \wedge e_5 + e_4 \wedge e_6) \\ &\quad -R_{35}(e_3 \wedge e_6 - e_4 \wedge e_5). \end{aligned}$$

Tüm bu elde edilenler ile birlikte $F_{A_0} = i\rho_{ric}$ den $\rho^+(F_{A_0}) = i\rho^+(\rho_{ric})$ dır. Ayrıca $\Psi = 2\sqrt{-s}\Psi_0$ spinoru için $R_{13} = R_{14} = R_{15} = R_{16} = R_{35} = R_{36} = 0$, $R_{11} = R_{22} = R_{33} = \frac{1}{2}s$ ve $R_{55} = R_{66} = -\frac{1}{2}s$ şeklinde alınırsa aşağıdaki iki matris

$$\begin{bmatrix} R_{11}-R_{33}-R_{55} & -2iR_{13}-2R_{14} & 0 & -2R_{15}+2iR_{16} \\ 2iR_{13}-2R_{14} & -R_{11}+R_{33}-R_{55} & 0 & -2iR_{35}-2R_{36} \\ 0 & 0 & R_{11}+R_{33}+R_{55} & 0 \\ -2(R_{15}+iR_{16}) & 2iR_{35}-2R_{36} & 0 & -R_{11}-R_{33}+R_{55} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{s}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{s}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3s}{2} \end{bmatrix}$$

eşit olur. Yukarıda elde edilen eşitlikler ile $s$ skaler eğriliği $s = trRic = (R_{11} + R_{22}+R_{33}+R_{44}+R_{55}+R_{66}) = 2\big(R_{11}+R_{33}+R_{55}\big) = s$ dir. Ayrıca önceki bölümdeki gibi yukarıdaki iki matrisin eşitliğinden elde edilen denklem sisteminin çözümü ile Ricci tensörünün açık şekildeki ifadesi

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}s \end{bmatrix}$$

şeklindedir. $\square$

## 6.4 7−Boyutta Self−Dualitesiz Seiberg−Witten Denklemleri

$\rho : \Omega^2\big(M, i\mathbb{R}\big) \to End\big(S\big)$ dönüşümü yardımı ile

$$\rho\big(\Omega^2(M, i\mathbb{R})\big) = W' \subset End(S)$$

olsun. O halde $\Psi\Psi^*$ ın $W'$ üstüne dik izdüşümü $\big(\Psi\Psi^*\big)^+ = Proj_{W'}\big(\Psi\Psi^*\big)$ için $M$ manifoldu üzerindeki Seiberg−Witten denklemleri:

1. $D_A\big(\Psi\big) = 0$
2. $\rho\big(F_A\big) = \frac{1}{2}\big(\Psi\Psi^*\big)^+ = \frac{1}{2}\sum\limits_{i<j} \frac{\big\langle \rho(e^i \wedge e^j), \Psi\Psi^* \big\rangle}{\big\langle \rho(e^i \wedge e^j), \rho(e^i \wedge e^j) \big\rangle} \rho(e^i \wedge e^j)$

şeklinde ifade edilsin. Bu durumda 7−boyutta Seiberg−Witten denklemleri aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

### 6.4.1 7−boyutta Seiberg−Witten denklemleri

Bölüm 5 te elde edilen $\mathbb{C}l_7$ kompleks Clifford cebirinin Spin temsili $\kappa_7$ kullanılarak elde edilen Dirac denklemi tanımlanışı itibari ile [5] 'teki klasik denklem ile aynıdır. Eğrilik denkleminin $\Omega^2(\mathbb{R}^7, i\mathbb{R})$ uzayının taban elemanlarına karşılık gelen matrisi:

$$\begin{aligned}
M_1 &= -iF_{23} - iF_{45} + iF_{67} & M_2 &= iF_{23} - iF_{45} + iF_{67} \\
M_3 &= iF_{23} + F_{45} + iF_{67} & M_4 &= -iF_{23} + iF_{45} + iF_{67} \\
M_5 &= F_{13} + iF_{12} & M_6 &= -F_{13} + iF_{12} \\
M_7 &= -F_{24} + F_{35} + iF_{25} + iF_{34} & M_8 &= F_{24} - F_{35} + iF_{25} + iF_{34} \\
M_9 &= -F_{24} - F_{35} - iF_{25} + iF_{34} & M_{10} &= F_{24} + F_{35} - iF_{25} + iF_{34} \\
M_{11} &= F_{15} - iF_{14} & M_{12} &= F_{15} + iF_{14} \\
M_{13} &= F_{46} + F_{57} - iF_{47} + iF_{56} & M_{14} &= -F_{46} + F_{57} + iF_{47} + iF_{56} \\
M_{15} &= -F_{46} - F_{57} - iF_{47} + iF_{56} & M_{16} &= F_{46} - F_{57} + iF_{47} + iF_{56} \\
M_{17} &= -F_{26} - F_{37} + iF_{27} - iF_{36} & M_{18} &= -F_{26} - F_{37} - iF_{27} - iF_{36} \\
M_{19} &= F_{26} - F_{37} + iF_{27} + iF_{36} & M_{20} &= F_{26} + F_{37} + iF_{27} - iF_{36} \\
M_{21} &= F_{17} + iF_{16} & M_{22} &= F_{17} - iF_{16}
\end{aligned}$$

eşitlikleri kullanılarak aşağıdaki gibi

$$\begin{bmatrix} M_1 & M_5 & M_7 & -M_{12} & M_{15} & 0 & M_{20} & -M_{22} \\ M_6 & M_2 & -M_{11} & M_{10} & 0 & M_{15} & M_{22} & -M_{19} \\ M_8 & -M_{11} & M_3 & M_6 & M_{19} & -M_{22} & M_{16} & 0 \\ M_{11} & M_9 & M_5 & M_4 & M_{22} & -M_{20} & 0 & M_{16} \\ M_{13} & 0 & -M_{18} & -M_{21} & -M_2 & M_5 & M_9 & M_{11} \\ 0 & M_{13} & M_{21} & -M_{17} & M_6 & -M_1 & -M_{11} & M_8 \\ M_{17} & -M_{21} & M_{14} & 0 & M_{10} & M_{12} & -M_4 & M_6 \\ M_{21} & M_{18} & 0 & M_{14} & -M_{12} & M_7 & M_5 & -M_3 \end{bmatrix}$$

ifade edilir.

Eğrilik denklemin diğer tarafı olan $\frac{1}{2}\big(\Psi\Psi^*\big)^+ = \frac{1}{2}\sum_{i<j} \frac{\big\langle \rho(e^i\wedge e^j),\Psi\Psi^*\big\rangle}{\big\langle \rho(e^i\wedge e^j),\rho(e^i\wedge e^j)\big\rangle}\rho(e^i\wedge e^j)$ denklemine karşılık gelen matris ise

$$\begin{aligned}
A_1 &= \tfrac{1}{16}\big(\ 3|\psi_1|^2+|\psi_2|^2-|\psi_3|^2+|\psi_4|^2-|\psi_5|^2-3|\psi_6|^2-|\psi_7|^2+|\psi_8|^2\big)\\
A_2 &= \tfrac{1}{16}\big(\ |\psi_1|^2+3|\psi_2|^2+|\psi_3|^2-|\psi_4|^2-3|\psi_5|^2-|\psi_6|^2+|\psi_7|^2-|\psi_8|^2\big)\\
A_3 &= \tfrac{1}{16}\big(\ -|\psi_1|^2+|\psi_2|^2+3|\psi_3|^2+|\psi_4|^2-|\psi_5|^2+|\psi_6|^2-|\psi_7|^2-3|\psi_8|^2\big)\\
A_4 &= \tfrac{1}{16}\big(\ |\psi_1|^2-|\psi_2|^2+|\psi_3|^2+3|\psi_4|^2+|\psi_5|^2-|\psi_6|^2-3|\psi_7|^2-|\psi_8|^2\big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_5 &= \tfrac{1}{8}\big(\psi_2\overline{\psi}_1+\psi_3\overline{\psi}_4+\psi_6\overline{\psi}_5+\psi_7\overline{\psi}_8\big)\\
A_6 &= \tfrac{1}{4}\big(\psi_3\overline{\psi}_1+\psi_6\overline{\psi}_8\big)\\
A_7 &= \tfrac{1}{8}\big(\psi_4\overline{\psi}_1-\psi_3\overline{\psi}_2-\psi_6\overline{\psi}_7+\psi_5\overline{\psi}_8\big)\\
A_8 &= \tfrac{1}{4}\big(\psi_5\overline{\psi}_1+\psi_6\overline{\psi}_2\big)\\
A_9 &= \tfrac{1}{4}\big(\psi_7\overline{\psi}_1-\psi_6\overline{\psi}_4\big)\\
A_{10} &= \tfrac{1}{8}\big(\psi_8\overline{\psi}_1-\psi_7\overline{\psi}_2+\psi_6\overline{\psi}_3-\psi_5\overline{\psi}_4\big)\\
A_{11} &= \tfrac{1}{8}\big(\psi_1\overline{\psi}_2+\psi_4\overline{\psi}_3+\psi_5\overline{\psi}_6+\psi_8\overline{\psi}_7\big)\\
A_{12} &= \tfrac{1}{4}\big(\psi_4\overline{\psi}_2+\psi_5\overline{\psi}_7\big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{13} &= \tfrac{1}{4}\big(\psi_8\overline{\psi}_2-\psi_5\overline{\psi}_3\big)\\
A_{14} &= \tfrac{1}{4}\big(\psi_1\overline{\psi}_3+\psi_8\overline{\psi}_6\big)\\
A_{15} &= \tfrac{1}{8}\big(\psi_2\overline{\psi}_3-\psi_1\overline{\psi}_4-\psi_8\overline{\psi}_5+\psi_7\overline{\psi}_6\big)\\
A_{16} &= \tfrac{1}{4}\big(\psi_7\overline{\psi}_3+\psi_8\overline{\psi}_4\big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
A_{17} &= \tfrac{1}{4}\big(\psi_1\overline{\psi}_5 + \psi_2\overline{\psi}_6\big)\\
A_{18} &= \tfrac{1}{4}\big(\psi_3\overline{\psi}_5 - \psi_2\overline{\psi}_8\big)\\
A_{19} &= \tfrac{1}{4}\big(\psi_2\overline{\psi}_4 + \psi_7\overline{\psi}_5\big)\\
A_{20} &= \tfrac{1}{8}\big(\psi_4\overline{\psi}_5 - \psi_3\overline{\psi}_6 + \psi_2\overline{\psi}_7 - \psi_1\overline{\psi}_8\big)\\
A_{21} &= \tfrac{1}{4}\big(\psi_4\overline{\psi}_6 - \psi_1\overline{\psi}_7\big)\\
A_{22} &= \tfrac{1}{4}\big(\psi_3\overline{\psi}_7 + \psi_4\overline{\psi}_8\big)
\end{aligned}
$$

eşitlikleri ile

$$
\begin{bmatrix}
A_1 & A_{11} & A_{14} & -A_{15} & A_{17} & 0 & -A_{21} & -A_{20}\\
A_5 & A_2 & A_{15} & A_{19} & 0 & A_{17} & A_{20} & A_{18}\\
A_6 & -A_7 & A_3 & A_5 & A_{18} & -A_{20} & A_{22} & 0\\
A_7 & A_{12} & A_{11} & A_4 & A_{20} & A_{22} & 0 & A_{22}\\
A_8 & 0 & -A_{13} & -A_{10} & -A_2 & A_{11} & A_{12} & A_7\\
0 & A_8 & A_{10} & -A_9 & A_5 & -A_1 & A_7 & A_6\\
A_9 & A_{10} & A_{16} & 0 & A_{19} & A_{15} & -A_4 & A_5\\
A_{10} & A_{13} & 0 & A_{16} & -A_{15} & A_{14} & A_{11} & -A_3
\end{bmatrix}
$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç olarak yukarıda elde edilen iki matrisin eşitliğinden denklemler çözümlenirse aşağıdaki gibi eğrilik denkleminin denklem sistemi elde edilir:

$$
\begin{aligned}
F_{12} &= -\tfrac{i}{16}\big(\psi_2\overline{\psi}_1 + \psi_1\overline{\psi}_2 + \psi_4\overline{\psi}_3 + \psi_3\overline{\psi}_4 + \psi_6\overline{\psi}_5 + \psi_5\overline{\psi}_6 + \psi_8\overline{\psi}_7 + \psi_7\overline{\psi}_8\big)\\
F_{13} &= \tfrac{1}{16}\big( - \psi_2\overline{\psi}_1 + \psi_1\overline{\psi}_2 + \psi_4\overline{\psi}_3 - \psi_3\overline{\psi}_4 - \psi_6\overline{\psi}_5 + \psi_5\overline{\psi}_6 + \psi_8\overline{\psi}_7 - \psi_7\overline{\psi}_8\big)\\
F_{14} &= \tfrac{i}{16}\big(\psi_4\overline{\psi}_1 + \psi_1\overline{\psi}_4 - \psi_3\overline{\psi}_2 - \psi_2\overline{\psi}_3 + \psi_8\overline{\psi}_5 + \psi_5\overline{\psi}_8 - \psi_7\overline{\psi}_6 - \psi_6\overline{\psi}_7\big)\\
F_{15} &= \tfrac{1}{16}\big(\psi_4\overline{\psi}_1 - \psi_1\overline{\psi}_4 - \psi_3\overline{\psi}_2 + \psi_2\overline{\psi}_3 - \psi_8\overline{\psi}_5 + \psi_5\overline{\psi}_8 + \psi_7\overline{\psi}_6 - \psi_6\overline{\psi}_7\big)\\
F_{16} &= -\tfrac{i}{16}\big(\psi_8\overline{\psi}_1 + \psi_1\overline{\psi}_8 - \psi_7\overline{\psi}_2 - \psi_2\overline{\psi}_7 + \psi_6\overline{\psi}_3 + \psi_3\overline{\psi}_6 - \psi_5\overline{\psi}_4 - \psi_4\overline{\psi}_5\big)\\
F_{17} &= \tfrac{i}{16}\big(\psi_8\overline{\psi}_1 - \psi_1\overline{\psi}_8 - \psi_7\overline{\psi}_2 + \psi_2\overline{\psi}_7 + \psi_6\overline{\psi}_3 - \psi_3\overline{\psi}_6 - \psi_5\overline{\psi}_4 + \psi_4\overline{\psi}_5\big)\\
F_{23} &= \tfrac{i}{16}\big( |\psi_1|^2 - |\psi_2|^2 - |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2 + |\psi_5|^2 - |\psi_6|^2 - |\psi_7|^2 + |\psi_8|^2\big)\\
F_{24} &= \tfrac{1}{16}\big(\psi_3\overline{\psi}_1 - \psi_1\overline{\psi}_3 - \psi_4\overline{\psi}_2 + \psi_2\overline{\psi}_4 + \psi_7\overline{\psi}_5 - \psi_5\overline{\psi}_7 - \psi_8\overline{\psi}_6 + \psi_6\overline{\psi}_8\big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{25} &= -\tfrac{i}{16}\big(\psi_3\overline{\psi}_1+\psi_1\overline{\psi}_3-\psi_4\overline{\psi}_2-\psi_2\overline{\psi}_4-\psi_7\overline{\psi}_5-\psi_5\overline{\psi}_7+\psi_8\overline{\psi}_6+\psi_6\overline{\psi}_8\big)\\
F_{26} &= \tfrac{1}{16}\big(-\psi_7\overline{\psi}_1+\psi_1\overline{\psi}_7+\psi_8\overline{\psi}_2-\psi_2\overline{\psi}_8-\psi_5\overline{\psi}_3+\psi_3\overline{\psi}_5+\psi_6\overline{\psi}_4-\psi_4\overline{\psi}_6\big)\\
F_{27} &= -\tfrac{i}{16}\big(\psi_7\overline{\psi}_1+\psi_1\overline{\psi}_7-\psi_8\overline{\psi}_2-\psi_2\overline{\psi}_8+\psi_5\overline{\psi}_3+\psi_3\overline{\psi}_5-\psi_6\overline{\psi}_4-\psi_4\overline{\psi}_6\big)\\
F_{34} &= -\tfrac{i}{16}\big(\psi_3\overline{\psi}_1+\psi_1\overline{\psi}_3+\psi_4\overline{\psi}_2+\psi_2\overline{\psi}_4+\psi_7\overline{\psi}_5+\psi_5\overline{\psi}_7+\psi_8\overline{\psi}_6+\psi_6\overline{\psi}_8\big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{35} &= \tfrac{1}{16}\big(-\psi_3\overline{\psi}_1+\psi_1\overline{\psi}_3-\psi_4\overline{\psi}_2+\psi_2\overline{\psi}_4+\psi_7\overline{\psi}_5-\psi_5\overline{\psi}_7+\psi_8\overline{\psi}_6-\psi_6\overline{\psi}_8\big)\\
F_{36} &= \tfrac{i}{16}\big(\psi_7\overline{\psi}_1+\psi_1\overline{\psi}_7+\psi_8\overline{\psi}_2+\psi_2\overline{\psi}_8-\psi_5\overline{\psi}_3-\psi_3\overline{\psi}_5-\psi_6\overline{\psi}_4-\psi_4\overline{\psi}_6\big)\\
F_{37} &= \tfrac{1}{16}\big(-\psi_7\overline{\psi}_1+\psi_1\overline{\psi}_7-\psi_8\overline{\psi}_2+\psi_2\overline{\psi}_8+\psi_5\overline{\psi}_3-\psi_3\overline{\psi}_5+\psi_6\overline{\psi}_4-\psi_4\overline{\psi}_6\big)\\
F_{45} &= \tfrac{i}{16}\big(\,|\psi_1|^2+|\psi_2|^2-|\psi_3|^2-|\psi_4|^2-|\psi_5|^2-|\psi_6|^2+|\psi_7|^2+|\psi_8|^2\big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{46} &= \tfrac{1}{16}\big(\psi_5\overline{\psi}_1-\psi_1\overline{\psi}_5+\psi_6\overline{\psi}_2-\psi_2\overline{\psi}_6-\psi_7\overline{\psi}_3+\psi_3\overline{\psi}_7-\psi_8\overline{\psi}_4+\psi_4\overline{\psi}_8\big)\\
F_{47} &= \tfrac{i}{16}\big(\psi_5\overline{\psi}_1+\psi_1\overline{\psi}_5+\psi_6\overline{\psi}_2+\psi_2\overline{\psi}_6-\psi_7\overline{\psi}_3-\psi_3\overline{\psi}_7-\psi_8\overline{\psi}_4-\psi_4\overline{\psi}_8\big)\\
F_{56} &= -\tfrac{i}{16}\big(\psi_5\overline{\psi}_1+\psi_1\overline{\psi}_5+\psi_6\overline{\psi}_2+\psi_2\overline{\psi}_6+\psi_7\overline{\psi}_3+\psi_3\overline{\psi}_7+\psi_8\overline{\psi}_4+\psi_4\overline{\psi}_8\big)\\
F_{57} &= \tfrac{1}{16}\big(\psi_5\overline{\psi}_1-\psi_1\overline{\psi}_5+\psi_6\overline{\psi}_2-\psi_2\overline{\psi}_6+\psi_7\overline{\psi}_3-\psi_3\overline{\psi}_7+\psi_8\overline{\psi}_4-\psi_4\overline{\psi}_8\big)\\
F_{67} &= -\tfrac{i}{16}\big(\,|\psi_1|^2+|\psi_2|^2+|\psi_3|^2+|\psi_4|^2-|\psi_5|^2-|\psi_6|^2+|\psi_7|^2-|\psi_8|^2\big).
\end{aligned}
$$

$$A = ix_1x_2dx^1 + \tfrac{i}{2}x_2^2dx^2$$

ve

$$\Psi = \Big(0, 0, e^{-\frac{i}{4}x_1^2x_2}, 0, 0, 0, 0, e^{-\frac{i}{4}x_1^2x_2}\Big)$$

için $\big(A, \Psi\big)$ yukarıdaki denklem kümesinin non$-$trivial çözümüdür. Fakat çözüm aşikar olmamasına rağmen flattir yani $F_A = 0$ dır.

## 6.5 8−Boyutta Self−Dualitesiz Seiberg−Witten Denklemleri

$\rho^+ : \Omega^2\big(M, i\mathbb{R}\big) \to End\big(S\big)$ dönüşümü yardımı ile

$$\rho^+\big(\Omega^2(M, i\mathbb{R})\big) = W' \subset End(S)$$

olsun. O halde $\Psi\Psi^*$ ın $W'$ üstüne dik izdüşümü $\big(\Psi\Psi^*\big)^+ = Proj_{W'}\big(\Psi\Psi^*\big)$ için $M$ manifoldu üzerindeki Seiberg−Witten denklemleri:

1. $D_A^+\big(\Psi\big) = 0$
2. $\rho^+\big(F_A\big) = \frac{1}{2}\big(\Psi\Psi^*\big)^+ = \frac{1}{2}\sum\limits_{i<j} \frac{\left\langle \rho^+(e^i \wedge e^j), \Psi\Psi^* \right\rangle}{\left\langle \rho^+(e^i \wedge e^j), \rho^+(e^i \wedge e^j) \right\rangle} \rho^+(e^i \wedge e^j)$

şeklinde ifade edilsin. 8−boyutlu $M$ manifoldu üzerindeki Seiberg−Witten denklemleri aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

### 6.5.1 8−boyutta Seiberg−Witten denklemleri

Bölüm 5 te elde edilen $\mathbb{C}l_8$ kompleks Clifford cebirinin Spin temsili $\kappa_8$ kullanılarak elde edilen Dirac denklemi tanımlanışı itibarı ile [6] daki klasik denklem ile aynıdır. Eğrilik denkleminin $\Omega^2(\mathbb{R}^8, i\mathbb{R})$ uzayının taban elemanları yardımıyla elde edilen matrisi:

$$\begin{aligned}
M_1 &= -iF_{12} - iF_{34} - iF_{56} + iF_{78} & M_2 &= -iF_{12} + iF_{34} - iF_{56} + iF_{78} \\
M_3 &= iF_{12} + iF_{34} + iF_{56} + iF_{78} & M_4 &= -iF_{12} - iF_{34} + iF_{56} + iF_{78} \\
M_5 &= -F_{13} - F_{24} - iF_{14} + iF_{23} & M_6 &= F_{13} + F_{24} - iF_{14} + iF_{23} \\
M_7 &= -F_{13} + F_{24} + iF_{14} + iF_{23} & M_8 &= F_{13} - F_{24} + iF_{14} + iF_{23} \\
M_9 &= F_{35} - F_{46} + iF_{36} + iF_{45} & M_{10} &= -F_{35} - F_{46} - iF_{36} + iF_{45}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{11} &= -F_{35} + F_{46} + iF_{36} + iF_{45} & M_{12} &= F_{35} + F_{46} - iF_{36} + iF_{45} \\
M_{13} &= F_{15} + F_{26} + iF_{16} - iF_{25} & M_{14} &= F_{15} - F_{26} + iF_{16} + iF_{25} \\
M_{15} &= -F_{15} + F_{26} + iF_{16} + iF_{25} & M_{16} &= -F_{15} - F_{26} + iF_{16} - iF_{25} \\
M_{17} &= F_{57} + F_{68} - iF_{58} + iF_{67} & M_{18} &= -F_{57} + F_{68} + iF_{58} + iF_{67} \\
M_{19} &= -F_{57} - F_{68} - iF_{58} + iF_{67} & M_{20} &= F_{57} - F_{68} + iF_{58} + iF_{67}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
M_{21} &= -F_{37} - F_{48} + iF_{38} - iF_{47} & M_{22} = F_{37} - F_{48} - iF_{38} - iF_{47} \\
M_{23} &= F_{37} - F_{48} + iF_{38} + iF_{47} & M_{24} = -F_{37} - F_{48} - iF_{38} + iF_{47} \\
M_{25} &= -F_{17} + F_{28} + iF_{18} + iF_{27} & M_{26} = -F_{17} - F_{28} + iF_{18} + iF_{27} \\
M_{27} &= F_{17} + F_{28} + iF_{18} - iF_{27} & M_{28} = F_{17} - F_{28} + iF_{18} + iF_{27}
\end{aligned}
$$

olmak üzere

$$
\begin{bmatrix}
M_1 & M_6 & M_{11} & M_{16} & M_{19} & 0 & -M_{24} & M_{28} \\
M_5 & M_2 & M_{15} & M_{12} & 0 & M_{19} & M_{27} & -M_{23} \\
M_9 & M_{14} & M_3 & M_8 & M_{23} & M_{28} & M_{20} & 0 \\
M_{13} & M_{10} & M_7 & M_4 & M_{27} & M_{24} & 0 & M_{20} \\
M_{17} & 0 & -M_{22} & M_{26} & -M_2 & M_6 & M_{10} & -M_{14} \\
0 & M_{17} & M_{25} & -M_{21} & M_5 & -M_1 & -M_{13} & M_9 \\
M_{21} & M_{26} & M_{18} & 0 & M_{12} & -M_{16} & -M_4 & M_8 \\
M_{25} & M_{22} & 0 & M_{18} & -M_{15} & M_{11} & M_7 & -M_3
\end{bmatrix}
$$

şeklinde elde edilir.

Denklemin diğer tarafı olan $\frac{1}{2}\left(\Psi\Psi^*\right)^+ = \frac{1}{2}\sum_{i<j} \frac{\left\langle \rho^+(e^i\wedge e^j),\Psi\Psi^*\right\rangle}{\left\langle \rho^+(e^i\wedge e^j),\rho^+(e^i\wedge e^j)\right\rangle}\rho^+(e^i\wedge e^j)$ denklemine karşılık gelen matris:

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \tfrac{1}{4}\big(\,|\psi_1|^2 - |\psi_6|^2\big) & A_2 &= \tfrac{1}{4}\big(\,|\psi_1|^2 - |\psi_5|^2\big) & A_3 &= \tfrac{1}{4}\big(\,|\psi_3|^2 - |\psi_8|^2\big) \\
A_4 &= \tfrac{1}{4}\big(\,|\psi_4|^2 - |\psi_7|^2\big) & A_5 &= \tfrac{1}{4}\big(\psi_2\overline{\psi}_1 + \psi_6\overline{\psi}_5\big) & A_6 &= \tfrac{1}{4}\big(\psi_3\overline{\psi}_1 + \psi_6\overline{\psi}_8\big) \\
A_7 &= \tfrac{1}{4}\big(\psi_4\overline{\psi}_1 - \psi_6\overline{\psi}_7\big) & A_8 &= \tfrac{1}{4}\big(\psi_5\overline{\psi}_1 + \psi_6\overline{\psi}_2\big) & A_9 &= \tfrac{1}{4}\big(\psi_7\overline{\psi}_1 - \psi_6\overline{\psi}_4\big) \\
A_{10} &= \tfrac{1}{4}\big(\psi_8\overline{\psi}_1 + \psi_6\overline{\psi}_3\big) & A_{11} &= \tfrac{1}{4}\big(\psi_1\overline{\psi}_2 + \psi_5\overline{\psi}_6\big) & A_{12} &= \tfrac{1}{4}\big(\psi_3\overline{\psi}_2 - \psi_5\overline{\psi}_8\big) \\
A_{13} &= \tfrac{1}{4}\big(\psi_4\overline{\psi}_2 + \psi_5\overline{\psi}_7\big) & A_{14} &= \tfrac{1}{4}\big(\psi_7\overline{\psi}_2 + \psi_5\overline{\psi}_4\big) & A_{15} &= \tfrac{1}{4}\big(\psi_8\overline{\psi}_2 - \psi_5\overline{\psi}_3\big) \\
A_{16} &= \tfrac{1}{4}\big(\psi_1\overline{\psi}_3 - \psi_8\overline{\psi}_6\big) & A_{17} &= \tfrac{1}{4}\big(\psi_2\overline{\psi}_3 - \psi_8\overline{\psi}_5\big) & A_{18} &= \tfrac{1}{4}\big(\psi_4\overline{\psi}_3 + \psi_8\overline{\psi}_7\big) \\
A_{19} &= \tfrac{1}{4}\big(\psi_7\overline{\psi}_3 + \psi_8\overline{\psi}_4\big) & A_{20} &= \tfrac{1}{4}\big(\psi_1\overline{\psi}_4 - \psi_7\overline{\psi}_6\big) & A_{21} &= \tfrac{1}{4}\big(\psi_2\overline{\psi}_4 + \psi_7\overline{\psi}_5\big) \\
A_{22} &= \tfrac{1}{4}\big(\psi_3\overline{\psi}_4 + \psi_7\overline{\psi}_8\big) & A_{23} &= \tfrac{1}{4}\big(\psi_1\overline{\psi}_5 + \psi_2\overline{\psi}_6\big) & A_{24} &= \tfrac{1}{4}\big(\psi_3\overline{\psi}_5 - \psi_2\overline{\psi}_8\big) \\
A_{25} &= \tfrac{1}{4}\big(\psi_4\overline{\psi}_5 + \psi_2\overline{\psi}_7\big) & A_{26} &= \tfrac{1}{4}\big(\psi_3\overline{\psi}_6 + \psi_1\overline{\psi}_8\big) & A_{27} &= \tfrac{1}{4}\big(\psi_4\overline{\psi}_6 - \psi_1\overline{\psi}_7\big) \\
A_{28} &= \tfrac{1}{4}\big(\psi_3\overline{\psi}_7 + \psi_4\overline{\psi}_8\big)
\end{aligned}
$$

olmak üzere

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_{11} & A_{16} & A_{20} & A_{23} & 0 & -A_{27} & A_{26} \\ A_5 & A_2 & A_{17} & A_{21} & 0 & A_{23} & A_{25} & -A_{24} \\ A_6 & A_{12} & A_3 & A_{22} & A_{24} & A_{26} & A_{28} & 0 \\ A_7 & A_{13} & A_{18} & A_4 & A_{25} & A_{27} & 0 & A_{28} \\ A_8 & 0 & A_{15} & A_{14} & -A_2 & A_{11} & A_{13} & -A_{12} \\ 0 & A_8 & A_{10} & -A_9 & A_5 & -A_1 & -A_7 & A_6 \\ A_9 & A_{14} & A_{19} & 0 & A_{21} & A_{20} & -A_4 & A_{22} \\ A_{10} & A_{15} & 0 & A_{19} & A_{17} & A_{16} & A_{18} & -A_3 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

Yukarıdaki iki matrisin eşitliğine karşılık gelen eğrilik denklemi çözümlenirse aşağıdaki gibi denklem sistemi elde edilir:

$$\begin{aligned}
F_{12} &= \tfrac{i}{16}\big( -|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 - |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2 - |\psi_5|^2 + |\psi_6|^2 - |\psi_7|^2 + |\psi_8|^2\big) \\
F_{13} &= \tfrac{1}{16}\big( -\psi_2\overline{\psi}_1 + \psi_1\overline{\psi}_2 - \psi_4\overline{\psi}_3 + \psi_3\overline{\psi}_4 - \psi_6\overline{\psi}_5 + \psi_5\overline{\psi}_6 - \psi_8\overline{\psi}_7 + \psi_7\overline{\psi}_8\big) \\
F_{14} &= \tfrac{i}{16}\big(\psi_2\overline{\psi}_1 + \psi_1\overline{\psi}_2 - \psi_4\overline{\psi}_3 - \psi_3\overline{\psi}_4 + \psi_6\overline{\psi}_5 + \psi_5\overline{\psi}_6 - \psi_8\overline{\psi}_7 + \psi_7\overline{\psi}_8\big) \\
F_{15} &= \tfrac{1}{16}\big(\psi_4\overline{\psi}_1 - \psi_1\overline{\psi}_4 + \psi_3\overline{\psi}_2 - \psi_2\overline{\psi}_3 + \psi_8\overline{\psi}_5 - \psi_5\overline{\psi}_8 + \psi_7\overline{\psi}_6 - \psi_6\overline{\psi}_7\big) \\
F_{16} &= \tfrac{i}{16}\big( -\psi_4\overline{\psi}_1 - \psi_1\overline{\psi}_4 - \psi_3\overline{\psi}_2 - \psi_2\overline{\psi}_3 + \psi_8\overline{\psi}_5 + \psi_5\overline{\psi}_8 + \psi_7\overline{\psi}_6 + \psi_6\overline{\psi}_7\big) \\
\\
F_{17} &= \tfrac{1}{16}\big( -\psi_8\overline{\psi}_1 + \psi_1\overline{\psi}_8 - \psi_7\overline{\psi}_2 + \psi_2\overline{\psi}_7 - \psi_6\overline{\psi}_3 + \psi_3\overline{\psi}_6 - \psi_5\overline{\psi}_4 + \psi_4\overline{\psi}_5\big) \\
F_{18} &= \tfrac{i}{16}\big( -\psi_8\overline{\psi}_1 - \psi_1\overline{\psi}_8 - \psi_7\overline{\psi}_2 - \psi_2\overline{\psi}_7 - \psi_6\overline{\psi}_3 - \psi_3\overline{\psi}_6 - \psi_5\overline{\psi}_4 - \psi_4\overline{\psi}_5\big) \\
F_{23} &= \tfrac{i}{16}\big( -\psi_2\overline{\psi}_1 - \psi_1\overline{\psi}_2 - \psi_4\overline{\psi}_3 - \psi_3\overline{\psi}_4 - \psi_6\overline{\psi}_5 - \psi_5\overline{\psi}_6 - \psi_8\overline{\psi}_7 - \psi_7\overline{\psi}_8\big) \\
F_{24} &= \tfrac{1}{16}\big( -\psi_2\overline{\psi}_1 + \psi_1\overline{\psi}_2 + \psi_4\overline{\psi}_3 - \psi_3\overline{\psi}_4 - \psi_6\overline{\psi}_5 + \psi_5\overline{\psi}_6 + \psi_8\overline{\psi}_7 - \psi_7\overline{\psi}_8\big) \\
F_{25} &= \tfrac{i}{16}\big(\psi_4\overline{\psi}_1 + \psi_1\overline{\psi}_4 - \psi_3\overline{\psi}_2 - \psi_2\overline{\psi}_3 + \psi_8\overline{\psi}_5 + \psi_5\overline{\psi}_8 - \psi_7\overline{\psi}_6 - \psi_6\overline{\psi}_7\big) \\
F_{26} &= \tfrac{1}{16}\big(\psi_4\overline{\psi}_1 - \psi_1\overline{\psi}_4 - \psi_3\overline{\psi}_2 + \psi_2\overline{\psi}_3 - \psi_8\overline{\psi}_5 + \psi_5\overline{\psi}_8 + \psi_7\overline{\psi}_6 - \psi_6\overline{\psi}_7\big) \\
\\
F_{27} &= \tfrac{i}{16}\big( -\psi_8\overline{\psi}_1 - \psi_1\overline{\psi}_8 + \psi_7\overline{\psi}_2 + \psi_2\overline{\psi}_7 - \psi_6\overline{\psi}_3 - \psi_3\overline{\psi}_6 + \psi_5\overline{\psi}_4 + \psi_4\overline{\psi}_5\big) \\
F_{28} &= \tfrac{1}{16}\big(\psi_8\overline{\psi}_1 - \psi_1\overline{\psi}_8 - \psi_7\overline{\psi}_2 + \psi_2\overline{\psi}_7 + \psi_6\overline{\psi}_3 - \psi_3\overline{\psi}_6 - \psi_5\overline{\psi}_4 + \psi_4\overline{\psi}_5\big) \\
F_{34} &= \tfrac{i}{16}\big( |\psi_1|^2 - |\psi_2|^2 - |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2 + |\psi_5|^2 - |\psi_6|^2 - |\psi_7|^2 + |\psi_8|^2\big) \\
F_{35} &= \tfrac{1}{16}\big(\psi_3\overline{\psi}_1 - \psi_1\overline{\psi}_3 - \psi_4\overline{\psi}_2 + \psi_2\overline{\psi}_4 + \psi_7\overline{\psi}_5 - \psi_5\overline{\psi}_7 - \psi_8\overline{\psi}_6 + \psi_6\overline{\psi}_8\big) \\
F_{36} &= \tfrac{i}{16}\big( -\psi_3\overline{\psi}_1 - \psi_1\overline{\psi}_3 + \psi_4\overline{\psi}_2 + \psi_2\overline{\psi}_4 + \psi_7\overline{\psi}_5 + \psi_5\overline{\psi}_7 - \psi_8\overline{\psi}_6 - \psi_6\overline{\psi}_8\big) \\
F_{37} &= \tfrac{1}{16}\big( -\psi_7\overline{\psi}_1 + \psi_1\overline{\psi}_7 + \psi_8\overline{\psi}_2 - \psi_2\overline{\psi}_8 - \psi_5\overline{\psi}_3 + \psi_3\overline{\psi}_5 + \psi_6\overline{\psi}_4 - \psi_4\overline{\psi}_6\big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
F_{38} &= \tfrac{i}{16}\big(-\psi_7\overline{\psi}_1-\psi_1\overline{\psi}_7+\psi_8\overline{\psi}_2+\psi_2\overline{\psi}_8-\psi_5\overline{\psi}_3-\psi_3\overline{\psi}_5+\psi_6\overline{\psi}_4+\psi_4\overline{\psi}_6\big)\\
F_{45} &= \tfrac{i}{16}\big(-\psi_3\overline{\psi}_1-\psi_1\overline{\psi}_3-\psi_4\overline{\psi}_2-\psi_2\overline{\psi}_4-\psi_7\overline{\psi}_5-\psi_5\overline{\psi}_7-\psi_8\overline{\psi}_6-\psi_6\overline{\psi}_8\big)\\
F_{46} &= \tfrac{1}{16}\big(-\psi_3\overline{\psi}_1+\psi_1\overline{\psi}_3-\psi_4\overline{\psi}_2+\psi_2\overline{\psi}_4+\psi_7\overline{\psi}_5-\psi_5\overline{\psi}_7+\psi_8\overline{\psi}_6-\psi_6\overline{\psi}_8\big)\\
F_{47} &= \tfrac{i}{16}\big(\psi_7\overline{\psi}_1+\psi_1\overline{\psi}_7+\psi_8\overline{\psi}_2+\psi_2\overline{\psi}_8-\psi_5\overline{\psi}_3-\psi_3\overline{\psi}_5-\psi_6\overline{\psi}_4-\psi_4\overline{\psi}_6\big)\\
F_{48} &= \tfrac{1}{16}\big(-\psi_7\overline{\psi}_1+\psi_1\overline{\psi}_7-\psi_8\overline{\psi}_2+\psi_2\overline{\psi}_8+\psi_5\overline{\psi}_3-\psi_3\overline{\psi}_5+\psi_6\overline{\psi}_4-\psi_4\overline{\psi}_6\big)\\
F_{56} &= \tfrac{i}{16}\big(\,|\psi_1|^2+|\psi_2|^2-|\psi_3|^2-|\psi_4|^2-|\psi_5|^2-|\psi_6|^2+|\psi_7|^2+|\psi_8|^2\big)\\
F_{57} &= \tfrac{1}{16}\big(\psi_5\overline{\psi}_1-\psi_1\overline{\psi}_5+\psi_6\overline{\psi}_2-\psi_2\overline{\psi}_6-\psi_7\overline{\psi}_3+\psi_3\overline{\psi}_7-\psi_8\overline{\psi}_4+\psi_4\overline{\psi}_8\big)\\
F_{58} &= \tfrac{i}{16}\big(\psi_5\overline{\psi}_1+\psi_1\overline{\psi}_5+\psi_6\overline{\psi}_2+\psi_2\overline{\psi}_6-\psi_7\overline{\psi}_3-\psi_3\overline{\psi}_7-\psi_8\overline{\psi}_4-\psi_4\overline{\psi}_8\big)\\
F_{67} &= \tfrac{i}{16}\big(-\psi_5\overline{\psi}_1-\psi_1\overline{\psi}_5-\psi_6\overline{\psi}_2-\psi_2\overline{\psi}_6-\psi_7\overline{\psi}_3-\psi_3\overline{\psi}_7-\psi_8\overline{\psi}_4-\psi_4\overline{\psi}_8\big)\\
F_{68} &= \tfrac{1}{16}\big(\psi_5\overline{\psi}_1-\psi_1\overline{\psi}_5+\psi_6\overline{\psi}_2-\psi_2\overline{\psi}_6+\psi_7\overline{\psi}_3-\psi_3\overline{\psi}_7+\psi_8\overline{\psi}_4-\psi_4\overline{\psi}_8\big)\\
F_{78} &= \tfrac{i}{16}\big(\;-|\psi_1|^2-|\psi_2|^2-|\psi_3|^2-|\psi_4|^2+|\psi_5|^2+|\psi_6|^2+|\psi_7|^2+|\psi_8|^2\big).
\end{aligned}
$$

$$A = \sum_{i=1}^{8} -2ix_i dx^i$$

ve

$$\Psi = \Big(0,0,0,e^{\sum_{j=1}^{8}-\frac{i}{2}x_j^2},0,0,e^{\sum_{j=1}^{8}-\frac{i}{2}x_j^2},0\Big) \text{ dir.}$$

Bu şekilde verilen $\big(A,\Psi\big)$, yukarıdaki denklem kümesinin aşikar olmayan çözümüdür. Fakat çözüm aşikar olmamasına rağmen flattir yani $F_A = 0$ dır.

# 7 SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

## 7.1 Sonuç

Bu tez çalışmasında literatürde bilinen yüksek boyutlu Seiberg$-$Witten denklemleri irdelenmiş, bazılarına alternatif formüller önerilmiştir. Ayrıca 8$-$boyutta farklı bir self$-$dualite seçimine bağlı olarak Seiberg$-$Witten denklemleri elde edilmiş ve bu denklemlere çözüm verilmiştir. Spinor uzayı üzerinde tanımlanan Hermityen iç çarpım kullanılarak, eğrilik denkleminin ifadesinde kullanılan $\sigma$ ve $\rho$ dönüşümleri ile ilgili bazı yararlı eşitlikler verilmiştir. Bu tez çalışmasının son bölümde de öncelikle 4$-$boyuttaki klasik denklemlere self$-$dualite kavramına ihtiyaç duymadan alternatif bir yaklaşım öne sürülmüş ve bu yaklaşımın literatürde çok iyi bilinen klasik denklemlere benzerliği gözlemlenmiştir. Son olarak da bu yaklaşım ile $5, 6, 7$ ve 8$-$boyut lu manifoldlar üzerinde self$-$dualite kavramı olmaksızın Seiberg-Wittten denklemleri yazımış ve bu denklemlere çözümler verilmiştir. Yüksek boyutlarda yazılmış olan tüm denklemlerin açık ifadelerinin 4$-$boyuttaki orjinal denklemlere benzerliği gözlemlenmiştir.

## 7.2 Tartışma

4$-$boyuttaki Seiberg$-$Witten denklenlerinin çözüm uzayı kompakt ve manifold yapısına sahip idi. Benzer bir durumun yüksek boyuttaki Seiberg$-$Witten denk lemleri için geçerli olup olmadığı açık bir sorudur. Dahası çözüm uzayının araştırılması ve diferensiyel topolojik invaryantlarının 4$-$boyuttakine benzer şeklilde elde edilmesi ayrı bir çalışmanın konusudur.

## 7.3 Öneriler

Non$-$lineer Dirac denklemi için Seiberg$-$Witten denklemleri self$-$dualite kavramı dikkate alınarak veya alınmayarak incelenebilir. Yüksek boyutlarda çözüm uzaylarınında diferensiyel topolojik invaryantlarının, 4$-$boyuttakine benzer şeklilde elde edilip edilemiyeceği incelenebilir. Self$-$dualite kavramı kullanılmadan verilen çözüm ile farklı bir metriğe bağlı olarak elde edilen Seiberg$-$Witten denklemleri için çözümler verilebilir.

## KAYNAKÇA


[1] Baum, H. (1996). Lorentzian twistor spinors and CR-geometry. Diff. Geo and its Appl., 11, 69-96.

[2] Bedulli, L. and Vezzoni, L. (2007). The ricci tensor of SU(3) manifolds. J. of Geom. and Phys., 57, 1125-1146.

[3] Bedulli, L. and Vezzoni, L. (2009). Torsion of SU(2)-structures and ricci curvature in dimension 5. Differential Geom. Appl., 27, 85-99.

[4] Bilge, A., Dereli, T. and Koçak, Ş. (1999). Monopole equations on $8-$manifolds with $Spin(7)$ holonomy. Commun. Math. Phys., 21, 203(1).

[5] Değirmenci, N. and Özdemir, N. (2005). Seiberg$-$Witten like equations on $7-$manifolds with $G_2-$structure. Journal of Nonlinear Mathematical Physics, 12, 457-461.

[6] Değirmenci, N. and Özdemir, N. (2009). Seiberg$-$Witten like equations on $8-$manifolds with structure group $Spin(7)$. Journal of Dynamical System and Geometric Theories, 7(1), 21-39.

[7] Değirmenci, N. and Karapazar, Ş. (2010). Seiberg$-$Witten equations on $\mathbb{R}^6$. Eleventh International Conference on Geometry, Integrability and Quantization, Varna, Bulgaria, 97-107.

[8] Değirmenci, N and Karapazar, Ş. (2010). Seiberg$-$Witten like equations on 6-dimensional SU(3)-manifolds. Balkan Journal of Geometry and Its Applications, 20, 23-31.

[9] Değirmenci, N. and Karapazar, Ş. (2011). Seiberg $-$Witten like monopole equations on $\mathbb{R}^5$. Journal of Partial Differantial Equations, 24(2), 150-157.

[10] Değirmenci, N. and Bulut, Ş. (2014). Seiberg-Witten-like equations on 5-dimensional contact metric manifolds. Turk. J. Math., 38, 812-818.

[11] Donaldson, S.K. (1996). Seiberg$-$Witten equations and $4-$manifold topology. Bulletin of the American Mathematical Society, 33, 45-70.

[12] Friedrich, T. (2000). Dirac operators in riemannian geometry. Grauate Studies in Mathematics 25, American Mathematical Society.

[13] Fulton, W. and Harris, J. (1991). Representation theory. A first course, Springer-Verlag, New York.

[14] Gao, Y.H. and Tian, G. (2000). Instantions and the monopole−like equations in eight dimensions. Journal of Heigh Energy Physics, 5.

[15] Gerald, N.H. and Lounesto, P. (1990). Matrix representations of Clifford algebras. Linear Algebra and its Applications, 128, 51-63.

[16] Gilbert, E.J. and Murray, A.M.M. (1991). Clifford algebra and Dirac operators in harmonic analysis. Cambridge: Cambridge University Press.

[17] Karapazar, Ş. (2004). Reel clifford cebirlerinin temsilleri. Yüksek Lisans Tezi, Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.

[18] Karapazar, Ş. (2008). Kahler Norden manifoldları üzerinde spinorlar ve Dirac Operatörü. Fen Bilimleri Enstitüsü.

[19] Kobayashi, S. and Nomizu, K. (1969). Foundations of differantial geometry, Volume II, Interscience Publishers.

[20] Lawson, A. and Michelsohn, M.L. (1989). Spin geometry. Princeton University.

[21] Lee, J.M. (2003). Introduction to smooth manifolds. Springer-Verlag.

[22] Morgan, J. (1996). The Seiberg−Witten equations and applications to the topology of smooth four−manifolds. Princeton Newjersey: Princeton Univ. Press.

[23] Morita, S. (2001). Geometry of differential forms, AMS.

[24] Naber, G.L. (1996). Topology, geometry, and gauge fields. New York:Springer-Verlag.

[25] O' Neil, B. (1983). Semi-riemannian geometry. Academic Press.

[26] Petit, R. (2005). Spin$^c$−structures and dirac operators on contact manifolds. Dif. Geo. and its Appl., 22, 2295-252.

[27] Salamon, D. (1995). Spin geometry and Seiberg−Witten invariants. Zürich: ETH.

[28] Stenberg, S. (2012). Curvature in mathematics and physics. Dover.

[29] Witten, E. (1994). Monopole and four-manifolds. Math. Res. Lett., 1, 769-796.