

**GENEL ROSENAU RLW DENKLEMİNİN
AĞSIZ ÇEKİRDEK TABANLI
ÇİZGİLER METODU İLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ**

Yüksek Lisans Tezi
Murat ARI

Eskişehir, 2016

**GENEL ROSENAU RLW DENKLEMİNİN
AĞSIZ ÇEKİRDEK TABANLI ÇİZGİLER METODU İLE
SAYISAL ÇÖZÜMÜ**

Murat ARI

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Yılmaz DERELİ**

**Eskişehir
Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Ağustos, 2016**

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Murat Arı'nın "Genel Rosenau RLW Denklemine Ağız Çekirdek Tabanlı Çizgiler Metodu ile Sayısal Çözümü" başlıklı tezi 15/08/2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek "Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği"nin ilgili maddeleri uyarınca, Matematik Anabilim dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

| | Unvanı-Adı Soyadı | İmza |
|---------------------|--------------------------------|-------|
| Üye (Tez Danışmanı) | : Doç. Dr. Yılmaz DERELİ | |
| Üye | : Doç. Dr. Dursun IRK | |
| Üye | : Yrd. Doç. Dr. Mustafa SALTAN | |

.....
Enstitü Müdürü

ÖZET

GENEL ROSENAU RLW DENKLEMİNİN AĞSIZ ÇEKİRDEK TABANLI ÇİZGİLER METODU İLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Murat ARI

Matematik Anabilim Dalı

Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ağustos, 2016

Danışman: Doç. Dr. Yılmaz DERELİ

Bilim ve mühendisliğin farklı alanlarında ortaya çıkan kısmi diferansiyel denklemlerin çoğu lineer olmayan denklemlerdir. Bu denklemleri çözmek için çeşitli nümerik metotlar kullanılır. Sonlu farklar metodu, sonlu elemanlar metodu ve sonlu hacimler metodu en çok kullanılan nümerik tekniklerdir. Bu metotlar ağa bağlı metotlardır. Bu metotlar ağ oluşturma, konuma bağımlı olma, yavaş yakınsama oranı, kararsızlık ve düşük doğruluk gibi sınırlamalara sahiptirler. Sayısal yöntemlerinin diğer bir sınıfı da ağsız metotlardır. Ağsız metotların ağ tabanlı metotlardan daha yüksek doğruluklu sayısal çözümler üretmesi beklenir. Radyal tabanlı fonksiyonları kullanan ağsız metotlar daha yüksek yakınsaklık oranına sahiptir. Bu metotlar büyük konum adım aralığı kullanarak yüksek doğrulukta nümerik çözümler üretirler.

Bu tezde radyal tabanlı fonksiyonları kullanan ağsız çekirdek tabanlı çizgiler metodu ile lineer olmayan zaman bağımlı Genel Rosenau-RLW denkleminin sayısal çözümü hesaplanır. Bahsedilen metot denkleme uygulandığında bir adi diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Böylece elde edilen adi diferansiyel denklem sistemi çok adımlı bir metot olan Adams-Bashforth-Moulton metodu ile çözülür. Metot bazı test problemlerine uygulandı ve literatürdeki diğer sayısal sonuçlarla karşılaştırmalar yapıldı. Metodun performansı L_2 , L_∞ hata normları, enerji ve kütle korunumları hesaplanarak incelendi. Metodun kararlılığı Von Neumann kararlılık analizi ile gösterildi. Sayısal sonuçlar kullanılan yöntemin etkili ve yüksek doğruluklu sonuçlar verdiğini gösterdi. Böylece ağsız çekirdek tabanlı çizgiler metodunun bu tip lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlere uygulanabileceği görüldü.

Anahtar Kelimeler: Çizgiler Metodu, Rosenau-RLW denklemi, Radyal Tabanlı Fonksiyonlar

ABSTRACT

NUMERICAL SOLUTION OF THE GENERAL ROSENAU EQUATION BY MESHLESS KERNEL BASED METHOD OF LINES

Murat ARI

Department of Mathematics

Anadolu University, Graduate School of Sciences, August, 2016

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Yılmaz DERELİ

Most of the partial differential equations are emerged from different areas of science and engineering are non-linear equations. Several numerical methods are used to solve these equations. Commonly used numerical techniques are finite differences, finite elements and finite volume methods. These methods are depend on a mesh. These mesh dependent methods posses some limitations such as mesh generation, spatial dependence, slow convergence rate, instability and low accuracy. Another class of numerical methods are meshfree methods. Meshfree methods are expected to give superior numerical results than mesh based methods. Meshfree methods using radial basis functions have higher convergence rate. These methods provide accurate numerical solution by using large space step sizes.

In this thesis, numerical solution of General Rosenau-RLW equation which is a nonlinear time dependent partial differential equation is evaluated by meshless kernel based method of lines using radial basis functions. When the present method is applied to the equation a system of ordinary differential equations is obtained. Therefore this obtained system of ordinary differential equations is solved by using Adams-Bashforth-Moulton method which is a multi-step method. The method is applied to some test problems and results are compared with other numerical techniques in literature. Performance of the method is studied by L_2 and L_∞ error norms and conservation of mass and energy. Stability of the method is shown by Von Neumann stability analysis. The numerical results show that using present method is effective and provides very accurate solutions. Therefore it is seen that the meshless kernel based method of lines can be applied to these types of non-linear partial differential equations.

Keywords: Method of lines, Rosenau-RLW equation, Radial Basis Functions

26/08/2016

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilemeyen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmamın Anadolu Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı”yla tarandığımı ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm.

Murat Arı

TEŐEKKÖR

Yüksek Lisans çalışmamın her safhasında benden yardımlarını esirgemeyen danışmanım Doç. Dr. Yılmaz DERELİ'ye teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca tez çalışmalarım boyunca manevi desteğini benden esirgemeyen aileme de şükranlarımı sunarım.

Murat ARI
Ağustos 2016

İÇİNDEKİLER

| | |
|---|-----------|
| BAŞLIK SAYFASI..... | i |
| JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI..... | ii |
| ÖZET..... | iii |
| ABSTRACT..... | iv |
| ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ | v |
| TEŞEKKÜR..... | vi |
| İÇİNDEKİLER..... | vii |
| ŞEKİLLER DİZİNİ..... | viii |
| ÇİZELGELER DİZİNİ..... | ix |
| SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ..... | x |
| 1. GİRİŞ | 1 |
| 1.1. RBF'leri Kullanan Çizgiler Metodu | 4 |
| 1.2. Kararlılık Analizi | 10 |
| 1.3. Soliton ve Solitary Dalgalar | 11 |
| 2. METODUN UYGULANMASI | 13 |
| 2.1. Rosenau-RLW denklemi | 13 |
| 2.2. Metodun Rosenau-RLW denklemine Uygulanması | 14 |
| 2.3. Çok Adımlı Metotlar | 16 |
| 3. SAYISAL ÖRNEKLER | 17 |
| 4. KARARLILIK ANALİZİNİN METODA UYGULANMASI | 46 |
| 5. SONUÇ | 47 |
| KAYNAKLAR | 48 |
| ÖZGEÇMİŞ | 57 |

ŞEKİLLER DİZİNİ

| | |
|--|----|
| 1.1. (a) 3-noktalı üçgensel sonlu elemanlar metodu, (b) sınır elemanlar metodu ve (c) ağsız metot kullanılarak düzensiz tanım kümesinin ayrıştırılması | 3 |
| 1.2. Basit bir dalga profili | 11 |
| 3.3. Katsayılar matrisinin yapısı | 39 |
| 3.4. $p = 2$ için solitary dalganın hareketi | 40 |
| 3.5. $p = 4$ için solitary dalganın hareketi | 40 |
| 3.6. $p = 8$ için solitary dalganın hareketi | 41 |
| 3.7. $p = 16$ için solitary dalganın hareketi | 41 |

ÇİZELGELER DİZİNİ

| | |
|--|----|
| 3.1. $p = 2, p = 4, p = 8,$ ve $p = 16,$ için korunumların analitik değerleri . . . | 18 |
| 3.2. $p = 2, h = 0.25$ için hata ve korunumların karşılaştırılması | 18 |
| 3.3. $p = 2, h = 0.5$ için hata ve korunumların karşılaştırılması | 18 |
| 3.4. $p = 4, h = 0.25$ için hata ve korunumların karşılaştırılması | 19 |
| 3.5. $p = 4, h = 0.5$ için hata ve korunumların karşılaştırılması | 19 |
| 3.6. $p = 8, h = 0.25$ için hata ve korunumların karşılaştırılması | 19 |
| 3.7. $p = 8, h = 0.5$ için hata ve korunumların karşılaştırılması | 20 |
| 3.8. $p = 16, h = 0.25$ için hata ve korunumların karşılaştırılması | 20 |
| 3.9. $p = 16, h = 0.5$ için hata ve korunumların karşılaştırılması | 20 |
| 3.10. $p = 2, h = 0.25, h = 0.5,$ ve $h = 1$ için $T = 0$ anında hata ve korunumların karşılaştırılması | 22 |
| 3.11. $p = 4, h = 0.25, h = 0.5,$ ve $h = 1$ için $T = 0$ anında hata ve korunumların karşılaştırılması | 23 |
| 3.12. $p = 8, h = 0.25, h = 0.5,$ ve $h = 1$ için $T = 0$ anında hata ve korunumların karşılaştırılması | 24 |
| 3.13. $p = 16, h = 0.25, h = 0.5,$ ve $h = 1$ için $T = 0$ anında hata ve korunumların karşılaştırılması | 25 |
| 3.14. $p = 2, h = 0.25, h = 0.5,$ ve $h = 1$ için $T = 10$ anında hata ve korunumların karşılaştırılması | 26 |
| 3.15. $p = 4, h = 0.25, h = 0.5,$ ve $h = 1$ için $T = 10$ anında hata ve korunumların karşılaştırılması | 27 |
| 3.16. $p = 8, h = 0.25, h = 0.5,$ ve $h = 1$ için $T = 10$ anında hata ve korunumların karşılaştırılması | 28 |
| 3.17. $p = 16, h = 0.25, h = 0.5,$ ve $h = 1$ için $T = 10$ anında hata ve korunumların karşılaştırılması | 29 |
| 3.18. $p = 2, h = 0.25, h = 0.5,$ ve $h = 1$ için $T = 20$ anında hata ve korunumların karşılaştırılması | 30 |
| 3.19. $p = 4, h = 0.25, h = 0.5,$ ve $h = 1$ için $T = 20$ anında hata ve korunumların karşılaştırılması | 31 |
| 3.20. $p = 8, h = 0.25, h = 0.5,$ ve $h = 1$ için $T = 20$ anında hata ve korunumların karşılaştırılması | 32 |
| 3.21. $p = 16, h = 0.25, h = 0.5,$ ve $h = 1$ için $T = 20$ anında hata ve korunumların karşılaştırılması | 33 |
| 3.22. $p = 2, h = 0.25, h = 0.5,$ ve $h = 1$ için $T = 30$ anında hata ve korunumların karşılaştırılması | 34 |

| | |
|--|----|
| 3.23. $p = 4$, $h = 0.25$, $h = 0.5$, ve $h = 1$ için $T = 30$ anında hata ve korunumların karşılaştırılması | 35 |
| 3.24. $p = 8$, $h = 0.25$, $h = 0.5$, ve $h = 1$ için $T = 30$ anında hata ve korunumların karşılaştırılması | 36 |
| 3.25. $p = 16$, $h = 0.25$, $h = 0.5$, ve $h = 1$ için $T = 30$ anında hata ve korunumların karşılaştırılması | 37 |
| 3.26. $p = 2$, $h = 1$ için $T = 40$ anında hata ve korunumların karşılaştırılması | 38 |
| 3.27. $p = 4$, $h = 1$ için $T = 40$ anında hata ve korunumların karşılaştırılması | 38 |
| 3.28. $p = 8$, $h = 1$ için $T = 40$ anında hata ve korunumların karşılaştırılması | 38 |
| 3.29. $p = 16$, $h = 1$ için $T = 40$ anında hata ve korunumların karşılaştırılması | 39 |
| 3.30. $p = 2$, $h = 0.25$ için tepe noktası ve dalga yüksekliği | 42 |
| 3.31. $p = 4$, $h = 0.25$ için tepe noktası ve dalga yüksekliği | 42 |
| 3.32. $p = 8$, $h = 0.25$ için tepe noktası ve dalga yüksekliği | 42 |
| 3.33. $p = 16$, $h = 0.25$ için tepe noktası ve dalga yüksekliği | 43 |
| 3.34. $p = 2$, $h = 0.5$ için tepe noktası ve dalga yüksekliği | 43 |
| 3.35. $p = 4$, $h = 0.5$ için tepe noktası ve dalga yüksekliği | 43 |
| 3.36. $p = 8$, $h = 0.5$ için tepe noktası ve dalga yüksekliği | 44 |
| 3.37. $p = 16$, $h = 0.5$ için tepe noktası ve dalga yüksekliği | 44 |
| 3.38. $p = 2$, $h = 1$ için tepe noktası ve dalga yüksekliği | 44 |
| 3.39. $p = 4$, $h = 1$ için tepe noktası ve dalga yüksekliği | 45 |
| 3.40. $p = 8$, $h = 1$ için tepe noktası ve dalga yüksekliği | 45 |
| 3.41. $p = 16$, $h = 1$ için tepe noktası ve dalga yüksekliği | 45 |

SİMGELELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

| | |
|------------|---|
| h | : Konum adımı uzunluğu |
| Δt | : Zaman adımı uzunluğu |
| ADD | : Adi Diferansiyel Denklem |
| KDD | : Kısmi Diferansiyel Denklem |
| FDM | : Finite Difference Method (Sonlu Farklar Metodu) |
| FEM | : Finite Element Method (Sonlu Elemanlar Metodu) |
| FVM | : Finite Volume Method (Sonlu Hacimler Metodu) |
| BEM | : Boundary Element Method (Sınırlı Elemanlar Metodu) |
| RBF | : Radial Based Functions (Radyal Tabanlı Fonksiyonlar) |
| CSRBF | : Compactly Supported RBFs (Kompakt Destekli Radyal Tabanlı Fonksiyonlar) |
| ACBF | : Approximate Cardinal Basis Function (Yaklaşık Kardinal Tabanlı Fonksiyon) |
| DDM | : Domain Discretization Method (Tanım Kümesi Ayırıştırma Metodu) |

1 GİRİŞ

Bilim ve mühendisliğin çeşitli alanlarında ortaya çıkan birçok problem lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerle tanımlanabilir. “Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için nümerik metodlar son 40 yılda teorik ve uygulama açısından büyük ilgi görmüştür. Mühendislik ve bilimsel uygulama alanında ortaya çıkmış bir çok kısmi diferansiyel denklem, nümerik tekniklerdeki gelişme ve bilgisayar teknolojisindeki hızlı ilerlemelerle birlikte rutin olarak çözülmeye başlandı [1]”. Bu sözlerin söylenmesinin üzerinden 40 yıla yakın zaman geçmiştir ancak bu ilgi azalmamıştır. Lineer olmayan optik, hidrodinamik, plazma fiziği, kuantum fiziği ve fiber iletişim gibi çeşitli alanlarda ortaya çıkan lineer olmayan dalga ve solitary dalgaları tanımlayan lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler türetilmiştir [2]. Çoğunlukla bu denklemlerin çözümü yoktur. Bu yüzden çözümün nümerik olarak bulunması gerekir.

Sonlu farklar metodu (FDM), sonlu elemanlar metodu (FEM), sonlu hacimler metodu (FVM) ve sınırlı elemanlar metodu (BEM) bir çok kısmi diferansiyel denklemleri çözmek için kullanılmıştır. Bu metodlar tanım kümesini bir ağ, örgü ya da aralarında belirli bir bağıntı olan noktalara ayırır. Sonlu farklar metodunda genellikle kare ya da dikdörtgen örgü şeklinde veriler gereklidir ki tanım kümesi düzenli değilse oldukça uğraştırıcıdır. Sonlu elemanlar ve sonlu hacimler metodu karmaşık şekiller için uygun olsalar da 3-boyutlu veri yapıları ve bilgisayar programlaması zordur (Demkowicz vd. [3] ve Rachowicz vd. [4]). Sürekli mekanikte ise şekil bozulmasından dolayı ağın bozulması durumuyla karşılaşılabilir. Tüm bu durumlarda yapılandırılmış bir ağ ile uğraşmak çok zordur. Bu zorluktan hariç bir diğer problem ise kullanılan yöntemle ilgili olan doğruluğun sağlanmasıdır. Polinom savrulması probleminin önüne geçmek için sadece düşük mertebeli yaklaşımlarla fonksiyona yaklaşmak için sadece ağ boyunca kullanılır ancak kısmi türevler kullanılmaz. Türevlere daha doğru yaklaşım için ek hesaplamalar içeren yüksek mertebeli yöntemler gereklidir. Düşük mertebeli yöntemlerin doğruluğu ağı incelterek sağlanabilir ancak daha fazla hesaplama gerekecektir [5].

Kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için iyi bilinen bir başka metot ise çizgiler metodudur. Metot aslında matematikçiler tarafından (Zafarullah [6], Carver ve Hinds [7] ve Schiesser [8]) fizikteki sınır değer problemleri için geliştirilmiş ve kullanılmıştır. Daha sonra ise Pregla vd. [9–11] tarafından elektro manyetizma problemleri için daha da geliştirildi. Çizgiler metodu, sonlu farklar metodunun (FDM) doğruluk ve hesaplama maliyeti açısından daha etkin özel bir halidir. Bu metot uygun ve oldukça güvenilir yarı ayrık bir metottur. Bu metotta sadece konum türevleri ayrıştırılır ve zaman değişkeni sürekli bırakılır. Başlangıçtaki kısmi dife-

ransiyel denklem adi diferansiyel denklem sistemine dönüştürüldükten sonra zamana göre integre edilir. Metodun kararlılık ve yakınsaklık özellikleri konum ve zaman ayrıştırılması ile kolayca görülebilir. Standart adi diferansiyel denklem çözücülerini kullanarak programlama zahmeti de azaltılır. Konum türevlerinin farklı yaklaşımlarının doğruluk ve etkinliği farklı ADD'ler çözülerek kolayca görülebilir [12]. Ayrıca çizgiler metodunu kullanmanın aşağıdaki avantajları vardır:

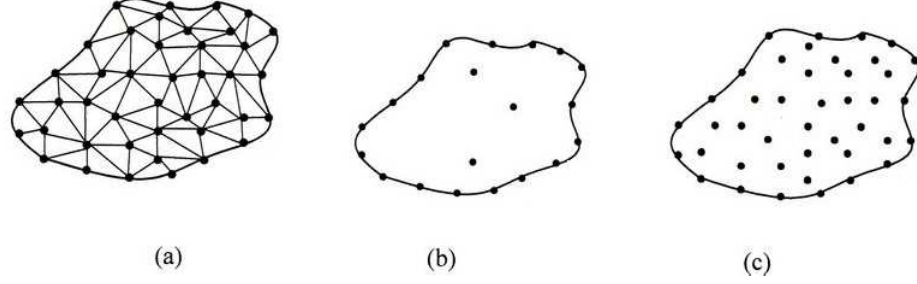
- a) Hesaplama etkinliği: Yöntemin yarı analitik karakteri sayesinde basit ve kompakt bir algoritma elde edilir böylece hesaplamayla diğer tekniklerden daha az uğraşarak doğru sonuçlar elde edilir.
- b) Sayısal kararlılık: Zaman ve konum ayrıştırmasından dolayı geniş yelpazede problemler için kararlılık ve yakınsaklığı belirlemek kolaydır.
- c) Azalmış programlama zahmeti: Güvenilirliği kanıtlanmış adi diferansiyel denklem çözücülerini kullanarak programlama zahmeti önemli ölçüde azaltılır.
- d) Kısalmış hesaplama zamanı: Hesaplama için az miktarda ayrıştırma gerekli olduğundan büyük denklem sistemleri çözmeye gerek yoktur bu yüzden hesaplama zamanı kısadır.

Ağ tabanlı metotlarda karşılaşılan zorluklar araştırmacıları geleneksel ağ tabanlı metotlara alternatif aramaya yöneltti. Böylece bu yeni ağsız metotlar alanı ortaya çıktı ve ilk ağsız metot "Düzgün Parçacık Hidrodinamiği" 1977'de Gingold ve Monaghan [13] ve Lucy [14] tarafından astrofizik problemlerinin modellenmesi için sunuldu. Son yirmi yılda KDD'lerin çözümünde ağsız metotlar çok ilgi çekti ve dikkate değer bir gelişme gösterdi. Bu metotların temel amacı; sonlu farklar metodu (FDM), sonlu elemanlar metodu (FEM) ve sonlu hacimler metodu (FVM) gibi geleneksel ağ tabanlı metotları kullanırken bir birine bağlı ağların ve elemanların karmaşık şekiller yüzünden karşılaştığı zorlukları ortadan kaldırmaktır. Geliştirilen çeşitli ağsız metotları üç grupta sınıflandırabiliriz;

- (1) Sistemin durumunu tanımlamak ve sistemin hareketini kaydetmek için sonlu sayıda ayrık parçacık kullanan ağsız parçacık metotları
- (2) KDD'ler üzerinde çalışan zayıf ağsız metotlar
- (3) KDD'ler üzerinde çalışan kollasyon tekniğine dayalı metotlar. Ağsız metotların temel özelliği; sınırların mümkün olan her türden dağıntı düğümleri veya ağsız parçacıklar olan kısmi diferansiyel denklemler veya integral denklemleri için kararlı çözümler vermesidir.

Şekil 1.1 noktalı üçgensel sonlu elemanlar, sınırlı elemanları ve ağsız metodun tanım kümesi ayrıştırmasını göstermektedir [15]. Şekil 1.1(a) daki sonlu elemanlar

metodunda (FEM) bir iç ağ ve Şekil 1.1(b) deki sınır elemanlar metodunda (BEM) ise sınır boyunca lineer elemanlar gerekmektedir. Her iki metotta da tanımlanmış bu noktalardaki değerleri elde etmek için etkin bir matris çözücüsüne ihtiyaç vardır ki bu oldukça sınırlayıcı ve zaman alıcı olabilir. Sınır eleman metodu ağsız metotta Şekil 1.1 (b), (c) den görüldüğü gibi ağ yapısı gerekli değildir.



Şekil 1.1: (a) 3-nodal üçgensel sonlu elemanlar metodu, (b) sınır elemanlar metodu ve (c) ağsız metot kullanılarak düzensiz tanım kümesinin ayrıştırılması

Bugün gelişmekte olan ağsız metotların geniş bir sınıfı Kansa'nın metodu olarak da bilinen radyal tabanlı kollakasyon metotlarıdır. Radyal tabanlı fonksiyonları kullanan ağsız metotlar çok boyutlu karmaşık tanım kümeleri de dahil KDD'lerin çözümünde başarıyla kullanıldı. Radyal tabanlı metotların düğüm konumlarının seçiminde üstel yakınsaklık ve esneklik avantajı vardır. Radyal tabanlı yaklaşım, veri noktalarının ikili uzaklıklarını içerdiğinden yüksek boyutlu problemlerde bir karmaşıklık yaşamaz. Radyal tabanlı fonksiyonların literatürü R.L. Hardy'nin [16] coğrafik yüzeyler, yerçekim ve manyetik anormalliklerin dahil olduğu dağınık veri interpolasyonuna dayanır. 90'ların başında E.J. Kansa [17,18] radyal tabanlı fonksiyonları eliptik, parabolik ve hiperbolik KDD'leri çözmek için kullandı. Golberg ve Chen [19] radyal tabanlı fonksiyonların KDD'leri çözmenin yanında integral denklemlerini çözmede de çok kullanışlı olduğunu deneysel olarak gösterdi. Kansa [18] ve Zerroukat vd. [20] yaptıkları öncü çalışmalarda RBF'lerin performansının sonlu farklar metodundan (FDM) çok daha iyi olduğunu gösterdiler. Larsson ve Fornberg [21] RBF, FDM ve pseudospectral metodlarını karşılaştırdılar ve RBF'lerin yüksek merteben doğruluk verdiğini buldular. RBF metotları ile sonlu fark metotları (FDM) arasında direkt veri karşılaştırması Jichun vd. [22] tarafından yapıldı ve RBF metotların üstünlüğü kanıtlandı. Franke'nin makalesinde [23] multiquadric RBF'u birçok iki boyutlu interpolasyon fonksiyonu arasında kararlılık, doğruluk, etkinlik, kolay uygulanabilirlik ve hafıza gereksinimi açısından en iyi olarak değerlendirildi. Micchelli [24], RBF kollakasyon matrisinin non-singularitesini garantileyen matematiksel ispatı verdi. RBF'lerin varlık, teklik ve yakınsaklığı çok değişkenli dağınık veri interpolasyonu için Micchelli [24], Powel [25], Mandych ve Nelson [26] ve Schaback [27]

tarafından ispatlanırken Wu [28], Franke ve Schaback [29] ve Wendland [30] bu bulguları KDD'lerin çözümü için kanıtladı. Bu makalelerde RBF'lerin iki önemli yönü gözlemlendi:

- 1) Metot gerçekten ağsız bir algoritmaya sahiptir ve kollakasyon noktaları arasında herhangi bir bağ olmadan özgürce seçilebilir. Böylece karmaşık ağ yapılarından kaçınılabılır.
- 2) Kollakasyon noktalarının yoğunluğu h , konum boyutu d olmak üzere $O(h^{d+1})$ yakınsaklığı konum boyutundan bağımsızdır.

Golberg ve Chen [31] üç boyutlu Poisson denklemini rastgele dağılmış 60 adet nokta ile çözmüş ve sonlu elemanlar metodunun (FEM) 71.000 eleman ile elde ettiği sonuçları elde etmişlerdir. Ayrıca Fornberg ve Driscoll [32], Hon ve Wu [33], Chen ve Hon [34], Chen ve Tanaka [35] ve Chen [36] gibi araştırmacılarda RBF'leri kullanarak KDD'leri çözmeye katkıları olmuştur. Fasshauer [37] Kansa'nın metodunu değiştirerek Hermite tipi kollakasyon metodu elde etmiştir. Daha sonra Hon RBF metodunu başlangıç değer problemleri [38], Burgers şok dalgalı lineer olmayan denklemi [39], Amerikan opsiyon fiyatlama gibi sınırlı olmayan problemleri [40, 41] ve düzensiz sınırları olan sığ su gelgitleri ve akım simülasyonu gibi problemleri [42] için geliştirmiştir. Kortewedge-de-Vries denklem sınıfları [43–45], lineer olmayan Shrödinger denklemi [46, 47], Couple Sine Gordon denklemi [48] ve iki boyutlu Reaction-Diffusion Brusselator sistemi [49] radyal tabanlı fonksiyonların kollakasyon yaklaşımı kullanılarak çalışılmıştır. Flyer ve Wright [50] küre üzerinde sığ su denklemini çözmek için ilk defa RBF'leri kullandı ve Fornberg ve Piret [51], küre üzerinde konvektif KDD'leri RBF yaklaşımıyla çözdüler. RBF'lerin metodolojisinin daha fazla detayı için [52, 53]'ye bakılabilir.

Çizgiler metodu ile radyal tabanlı fonksiyonları birleştirmek metodu daha kesin yapar ve problemin tanım kümesi için ağ gerekmediğinden uygulaması kolaydır [54–56]. Konum türevlerine RBF'ler yaklaşımının sonucu olarak elde edilen ADD sistemi yüksek kaliteli ADD çözümleri kullanılarak çözülebilir. KDD'ler için ağsız çizgiler metodu literatürü oldukça sınırlıdır.

1.1 RBF'leri Kullanan Çizgiler Metodu

Metodu tanımlamadan önce aşağıdaki tanımları sunalım:

Tanım 1.1.1. $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ($d = 1, 2, 3$) reel değerli fonksiyonunun değerleri sadece $x \in \mathbb{R}^d$ ve sabit bazı $x_j \in \mathbb{R}^d$, $j = 1, 2, \dots, N$ noktalarına bağlı olsun öyle ki

$\phi(x, x_j) = \phi(\|x - x_j\|) = \phi(r)$ olsun. Bu şekilde tanımlı fonksiyonlara radyal tabanlı fonksiyon (RBF) denir. Burada norm genellikle öklid normudur.

Aşağıda tanımlanan RBF'lerin pozitif tanımlılığı bunların uygulamasında hayati önem taşır.

Tanım 1.1.2. $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu her bir $x_1, x_2, \dots, x_N \in \mathbb{R}^d$ farklı noktası için m 'inci mertebeden pozitif tanımlı ve

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_i \lambda_j \phi(\|x_i - x_j\|) > 0 \quad (1.1)$$

olan her $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ için $\sum_{i=1}^N \lambda_i p(x_i) = 0$ olsun. Burada her p polinomu için $p \in \Pi_m^d$ 'dir. $m = 0$ 'inci mertebeden şartlı pozitif tanımlı fonksiyona da pozitif tanımlı fonksiyon denir.

Ağırsız çizgiler metodunun uygulayabilmesi için KDD'leri aşağıdaki formda kabul edildi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + L(u) = 0, \quad x \in \Omega, \quad t \geq 0, \quad (1.2)$$

burada $u = u(x, t)$ ve L ise konum türev operatörüdür. Kabul edelim ki $x_1, x_2, \dots, x_N \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$, ($d = 1, 2, 3$) noktaları tanım kümesinde verilmiş merkezler kümesi olsun. Kansa'nın metodunda [17] zamana bağlı kısmi diferansiyel denklemler için sunulan yöntem takip edilirse $u(x, t)$ yaklaşık çözümü şöyle ifade edilir:

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^N \lambda_j(t) \psi(\|x - x_j\|) \quad (1.3)$$

Burada ψ herhangi radyal tabanlı fonksiyon, x_j 'ler merkez noktaları ve $\lambda_j(t)$, ($j = 1, 2, \dots, N$) 'ler ise belirlenmesi gereken sabitlerdir. Benzer şekilde konum türevi için yaklaşık çözüm operatörü

$$Lu(x, t) = \sum_{j=1}^N \lambda_j(t) (L\psi(\|x - x_j\|)) \quad (1.4)$$

şeklindedir. Yukarıdaki (1.3) ve (1.4) yaklaşımları matris formunda

$$\mathbf{A}\lambda = \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)]^T \quad (1.5)$$

ve

$$\mathbf{B}\lambda = L(\mathbf{u}) \quad (1.6)$$

şeklindedir. Burada A matrisi aşağıdaki şekilde

$$A_{i,j} = \psi(\|x_i - x_j\|) \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (1.7)$$

ve B anti simetrik matrisi ise

$$B_{i,j} = L\psi(\|x - x_j\|)_{x=x_i} \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (1.8)$$

şeklindedir. (1.5) ve (1.6)'i kullanarak

$$L(\mathbf{u}) = (BA^{-1})\mathbf{u} \quad (1.9)$$

elde ederiz. (1.9) denklemini $D = BA^{-1}$ olmak üzere

$$L(\mathbf{u}) = D\mathbf{u} \quad (1.10)$$

şeklinde yazılabilir. (1.2) KDD'i radyal tabanlı fonksiyonlarla konuma göre ayrıştırıldıktan sonra

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = D\mathbf{u}, \quad (1.11)$$

ile verilen sistem elde edilir. (1.11) ADD sistemi herhangi bir ADD çözücü ile çözülebilir. Bu tezde [56]'de önerilen yol izlendikten sonra Adams-Bashforth-Moulton yöntemi kullanıldı. A matrisinin non-singularitesini garantilemek için $\psi(x)$ 'in gerekli koşulları ilk kez Schoenberg [57] tarafından verildi. Daha sonra Micchelli [24], Schoenberg'in fikrini genişletti. Böylece geniş bir fonksiyon sınıfı göz önüne alınabildi. Schoenberg ve Micchelli'nin şartlarına geçmeden önce bazı ilgili tanımları verelim.

Tanım 1.1.3. *Bir ψ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa kesin monotondur denir.*

- i) $\psi \in C[0, \infty)$,
- ii) $\psi \in C^\infty(0, \infty)$
- iii) Her $r > 0$ için $(-1)^l \psi^l(r) \geq 0$, $l = 0, 1, 2, \dots$

Tanım 1.1.4. *Bir A matrisi, simetrik ve her $x \neq 0$ olmak üzere, n boyutlu sütun vektörü için $x^T Ax > 0$ ise veya A matrisinin bütün özdeğerleri pozitif ise A'ya pozitif tanımlıdır denir.*

Teorem 1.1.5. *Eğer $\psi = \phi(\sqrt{r})$, $[0, \infty)$ aralığında kesin monoton ancak sabit değilse herhangi n kümesi için x_j , $j = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere A $n \times n$ matrisinin $a_{jk} = \phi(\|x_j - x_k\|)$ girdileri pozitif tanımlıdır böylece matris non-singular'dır (Schoenberg [57]).*

Teorem 1.1.6. *Eğer $\psi = \phi(\sqrt{r}) \in C^0(0, \infty)$, $r > 0$ için $\psi(r) > 0$ ve $\psi'(r) > 0$ $(0, \infty)$ aralığında kesin monoton ancak sabit değilse herhangi n kümesi için x_j , $j = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere A $n \times n$ matrisinin girdileri $a_{jk} = \phi(\|x_j - x_k\|)$ ise A non-singular'dır (Micchelli [24]).*

Aşağıdaki RBF'ler literatürde sıkça kullanılır.

Sonsuz Düzgün RBF'ler

| | |
|------------------------|------------------------------|
| Multiquadric(MQ) | $\sqrt{r^2 + c^2}$ |
| Ters multiquadric(IMQ) | $\frac{1}{\sqrt{r^2 + c^2}}$ |
| Ters quadric(IQ) | $\frac{1}{r^2 + c^2}$ |
| Gaussian(GA) | e^{-cr^2} |

Parçalı Düzgün RBF'ler

| | |
|--------------------|--------------|
| Lineer | r |
| Kübik | r^3 |
| İnce tabaka Spline | $r^2 \log r$ |

Ayrıca Wendland'ın kompakt destekli radyal tabanlı fonksiyonlarını da taban fonksiyonu olarak kullanıldı. Kompakt destekli radyal tabanlı fonksiyonların genel formu $\phi_{l,k}(r) = (1 - r)_+^l p(r)$ şeklinde tanımlanır burada p polinomu $k \geq 1$ için aşağıdaki şartlarla belirlenmiştir:

$$(1 - r)_+^n = \begin{cases} (1 - r)^n, & \text{eğer } 0 \leq r < 1 \\ 0, & \text{eğer } r \geq 1 \end{cases} \quad (1.12)$$

Bu tezde aşağıdaki Wendland kompakt destekli radyal tabanlı fonksiyonları kullanıldı:

$$\begin{aligned}\phi_{6,4}(r) &= (1-r)_+^{10}(5+50r+210r^2+450r^3+429r^4), \\ \phi_{7,5}(r) &= (1-r)_+^{12}(9+108r+566r^2+1644r^3+2697r^4+2048r^5).\end{aligned}\tag{1.13}$$

Ters multiquadratic (IMQ), ters quadratic (IQ) ve Gaussian(GA) radyal tabanlı fonksiyonlarının Teorem 1.1.5'in şartlarını sağlarken multiquadric (MQ) fonksiyon Teorem 1.1.6'nın şartlarını sağladığı kolayca ispatlanabilir ve böylece bu tip RBF'ler için denklem (1.11) her farklı veri noktası kümesi için tek türlü çözülebilir.

Multiquadric (MQ), Gaussian (GA) ve ters multiquadric (IMQ) gibi sonsuz düzgün RBF'lerin doğruluğu bu metotların içerdiği şekil parametresinin optimal değerine seçimine bağlıdır. Optimal değer derken en doğru sonuçları üreten değeri kastediyoruz. Uygulamada c olarak tanımlanan şekil parametresinin değeri, A interpolasyon matrisinin sonlu adımda terslenebilecek kadar iyi durumda olmasını sağlayacak şekilde seçilmelidir. Multiquadric interpolasyonun doğruluğunun noktaların yoğunluğuna bağlı olduğu kadar şekil parametresine de bağlı olduğu gösterilmiştir. Böylece nümerik yaklaşımın ya kollakasyon noktalarının sayısı arttırılır (ağın büyüklüğü azaltılır) ya da şekil parametresinin değeri arttırılır. Tarwater [58] $c \rightarrow \infty$ iken hatanın ortalama kare kökünün belirli bir limit değerine kadar azaldıktan sonra hızla arttığını buldu. Golberg [59] ve Hickernell ve Hon [60] şekil parametresinin optimal değerini elde etmek için çapraz doğrulama tekniğini uyguladılar. Her $c > 0$ için RBF yaklaşımını dengeli biçimde hesaplayabilen Contour-Padê yaklaşımı Fornberg vd. [61] tarafından geliştirildi. Fornberg ve Cecile [51] küre yüzeyindeki RBF interpolasyonunun kötü koşulunu aşmak için RBF-QR algoritmasını geliştirdiler.

RBF kollakasyon matrisinin durumunu düzeltmek için aşağıdaki alternatifler uygulanmıştır:

- Kompakt destekli radyal tabanlı fonksiyonlar (CSRBF) seyrek interpolasyon matrisi elde ederek fonksiyonların hızlı değerlendirilmesini sağlamak için Wendland [62,63] ve Buhmann [64] tarafından tanıtıldı. RBF'lerin aksine CSRBF'ler sadece sabitlenmiş bir d için \mathbb{R}^d üzerinde kesin pozitif tanımlıdır. [63] tarafından inşaa edilen CSRBF'ler kesik polinoma dayanır, pozitif tanımlıdır ve keyfi mertebeden C^k düzgündür [65]. Aynı CSRBF'leri inşaa etmek için Wu [66] başka bir teknik sundu ancak bu teknik verilen dereceden düzgünlük ve boyut için daha yüksek dereceden bir polinom oluşturdu.
- Yakınsak kardinal tabanlı fonksiyonlara (ACBF) dayanan ön koşullandırma tekniği (Beatson vd. [67], Ling ve Kansa [68]) KDD'ler ve interpolasyon için

etkin olarak kullanılmıştır.

- Ağsız RBF ile birleştirilmiş örtüşmeli ve örtüşmesiz tanım kümesi ayrıştırma metodu (DDM) üzerinde eşleşen ve eşleşmeyen ızgara geliştirildi. FDM ve FEM ile karşılaştırıldığında örtüşmeli DDM ile birlikte RBF [69] daha az konum çözümlenmesiyle daha iyi performans göstermiştir. Ling ve Kansa [70] ACBF ön koşullandırma ile tanım kümesi ayrıştırmayı birleştirmenin tüm sistem evirmesini direk evirmeye göre daha hızlı yaptığını doğruladılar.
- Birçok küçük örtüşmeli RBF sisteminden oluşan yerelleştirilmiş RBF metotları şartlanma sorunu olmadan geniş ölçekli problemlere esnek çözümler üretirler. Liu ve çalışma arkadaşları [71–75] iki boyutlu katıların serbest titreşimini ve bastırılmaz sıvı akım simülasyonunun çözümü için yerel RBF yaklaşımını ve iki boyutlu bastırılmaz Navier-Stokes denkleminin çözümü için dört evreli diferansiyel kollakasyon metodunu ilk kez tanıttılar.

Tanım 1.1.7. *Bir x vektörünün normu onun büyüklüğünü ölçen pozitif reel sayıdır ve $\|x\|$ ile gösterilir. Aşağıdaki aksiyomları sağlar.*

i) *Eğer $x \neq 0$ ise $\|x\| > 0$ ve eğer $x = 0$ ise $\|x\| = 0$ 'dır.*

ii) *$\|cx\| = |c|\|x\|$. Burada c reel veya kompleks sabittir.*

iii) *$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$*

Verilen $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektörü için bazı iyi bilinen vektör normları aşağıdakilerdir:

Tanım 1.1.8. *x vektörünün 1-normu x 'in bileşenlerinin modülleri toplamadır.*

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad (1.14)$$

Tanım 1.1.9. *x vektörünün 2-normu (Öklid normu) x 'in bileşenlerinin modüllerinin kareleri toplamının kareköküdür. yani,*

$$\|x\|_2 = (|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.15)$$

2-normu vektörün uzunluğunu verir.

Tanım 1.1.10. x vektörünün sonsuz (∞) normu x 'in bileşenlerinin modüllerinin maksimumudur. Yani,

$$\|x\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad (1.16)$$

Tanım 1.1.11. $f(x) \in C[a, b]$ olsun ($[a, b]$ üzerinde sürekli bütün fonksiyonların uzayı veya $f(x) \in L_2[a, b]$).

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b [f(x)]^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.17)$$

ile tanımlanan reel değerli fonksiyona f 'nin L_2 normu denir.

Bu tezde u fonksiyonunun L_2 ve L_{∞} hata normları için aşağıdaki yaklaşımları kullanılacaktır:

$$\begin{aligned} L_2 &= \left(\int_a^b (u - u_{num})^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{h \sum_{i=1}^N (u_i - u_{i(num)})^2} \\ L_{\infty} &= \max_{1 \leq j \leq N} |u_j - u_j^{num.}| \end{aligned} \quad (1.18)$$

Burada h adım aralığı, u ve u_{num} sırasıyla kesin ve nümerik çözümlerdir.

1.2 Kararlılık Analizi

Bu bölümde Von Neumann kararlılık analizi (Fourier kararlılık analizi olarak da bilinir) tanıtılacaktır. Fourier ayrıştırmasına dayalı bu analiz İngiliz araştırmacılar Crank ve Nicolson [76] tarafından 1947'de bir makalede kısaca tanıtıldıktan sonra Los Alamos ulusal laboratuvarında geliştirildi. Daha sonra metot John Von Neumann vd. tarafından daha ayrıntılı olarak verildi [77].

Metot [78]'de anlatıldığı gibi analitik çözüm hakkında bir kabul ile başlar. Bu çözüm, her bir zaman adımının farklı frekanslarında sinüs ve kosinüs fonksiyonlarından oluşur.

$$u(x) = \cos(kx) + i \sin(kx) = e^{ikx} \quad (1.19)$$

Burada i sanal birim ($i = \sqrt{-1}$) ve k dalga sayısıdır. Ayrıca bu analiz için ayırık noktaların sayısı sonsuz kabul edildi. Ayırık ızgara noktalarımızda $x = j.h$ alınırsa:

$$u(jh) = e^{ikjh} \quad (1.20)$$

olur. Bu yaklaşım çözümün sadece konum yapısını içerir. Analitik çözümden fonksiyonun zaman değişiminin üstel fonksiyon olduğu bilinmektedir. Ayırık durumda bu üstel fonksiyona büyüme katsayısı $G(k)^n$ ile yaklaşılr ve

$$G(k) = e^{\alpha(k)} \quad (1.21)$$

dır. (1.20) ve (1.21) 'i bir araya getirerek çözümdeki bir ayırık nokta için aşağıdaki yaklaşım fonksiyonu elde edilir:

$$u_{n,j} = G(k)^n e^{ikjh} \quad (1.22)$$

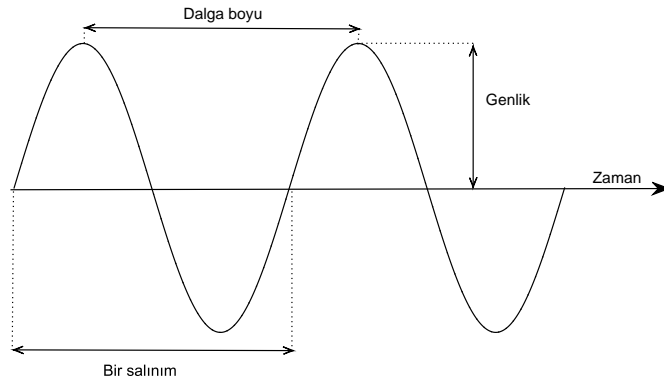
Kararlılık için

$$|G(k)| \leq 1 \quad (1.23)$$

Von Neumann koşulu sağlanmalıdır. Çünkü aksi halde $G(k) = e^{\alpha(k)}$ olduğundan çözüm üstel olarak büyür.

1.3 Soliton ve Solitary Dalgalar

Dalga, bir fizik terimi olarak, bir ortamda veya boşlukta yayılan ve sıklıkla enerjinin taşınmasına yol açan titreşime verilen isimdir. Basit bir dalga profili aşağıdaki gibidir.



Şekil 1.2: Basit bir dalga profili

Solitary dalgalar, lineer olmayan ortamda yayılan dalga paketleri veya titreşimlerdir. Sıvı mekaniği, plazma fiziği, katı hal fiziği, kimyasal kinetik ve jeokimya gibi çeşitli alanlarda ortaya çıkan birçok fenomen solitary dalgalar ile tanımlanır. Solitonlar ise solitary dalgaların özel bir hali olup sabit hızla hareket ederken şekillerini

korurlar. Şeklini ve hızını koruyor olması, her alandan birçok bilim adamının solitonlar üzerine çalışmalar yapmasına neden olmuş ve böylece Soliton teorisi doğmuştur. Solitonlar günümüz teknolojisi için oldukça önemli bir yere sahiptir. Herhangi bir sinyal iletiminde, sinyalin en az kayıpla ve yeterli büyüklükte hedefe ulaşabilmesi önemlidir. Ancak normal sinyallerin durumları değişebilir ve genliklerinde farklılıklar olabilir. Solitonlar ise yapısı gereği genliklerini ve hızlarını değiştirmeden sabit tutabildiklerinden taşınan sinyalde herhangi bir kayıp olmaksızın, büyük miktardaki bilgi binlerce kilometre boyunca taşınabilmektedir. Bu nedenle solitonlar elektronik ve telekomünikasyon alanlarında oldukça sık çalışılmaktadır. Solitonların aşağıdaki üç özelliği Drazin ve Johnson [79] tarafından tanımlanmıştır:

- Kalıcı şekilli dalgalardır
- Bir bölgeyle sınırlanmışlardır
- Diğer solitonlarla etkileşirler ve çarpışmadan faz kayması dışında şekil değiştirmeden çıkarlar

Genliği daha büyük olan bir soliton küçük olana göre daha hızlı hareket eder. Yayılma sırasında farklı genliği olan böyle iki dalga karşılaşır çarpıştıktan sonra hız ve şekillerini koruyarak ayrılırlar.

2 METODUN UYGULANMASI

2.1 Rosenau-RLW denklemi

Dalga davranışlarının dinamiğini tanımlayan birçok matematiksel model vardır [80–89]. Bu modellerden en önemlileri KdV denklemi, RLW denklemi ve Rosenau denklemidir. KdV denkleminin, manyetik sıvı dalgaları iyon ses dalgaları ve boylamsal astigmatik dalgalar gibi oldukça geniş uygulama alanları vardır [83–85]. Peregrine [86,87] tarafından ilk kez tanımlanan RLW denklemi lineer olmayan dağıtıcı dalganın değişik halleri için klasik KdV denkleminde daha iyi bir açıklama sunar. RLW denklemi iyon akustik plazma dalgaları, mıknatıssal hidrodinamik plazma dalgaları ve sığ su dalgaları gibi birçok alanda karşılaşılan bir modeldir. Literatürde gerek ağ yapılı gerekse de ağsız yöntemler kullanılarak KdV ve RLW denklemleri için yapılmış birçok çalışma mevcuttur [90–100]. Dalga-dalga ve dalga-duvar etkileşim durumları KdV denklemi tarafından tanımlanamayacağından Rosenau [88,89] tarafından ayrık yoğun sistemlerin dinamiğini tanımlamak için sunulan bu denklem Rosenau denklemi olarak bilinir. Rosenau denkleminin çözümünün varlık ve tekliği, Park tarafından ispatlandı [101,102]. Lineer olmayan dalganın daha iyi değerlendirilmesi için u_{xxt} yoğunluk teriminin eklenmesi gerekir. $p \geq 2$ bir tam sayı olmak üzere

$$u_t - u_{xxt} + u_{xxxxt} + u_x + (u^p)_x = 0 \quad (2.24)$$

denklemine genelleştirilmiş Rosenau-RLW denklemi denir. Eğer $p = 2$ ise (2.24) denkleminin klasik Rosenau denklemi denir. Eğer $p = 3$ ise modifiye Rosenau-RLW denklemi denir. Cauchy problemi ile birlikte Rosenau-RLW denkleminin çözümünü geçmiş yıllarda detaylı olarak araştırılmıştır [101–107]. (2.24) denklemi için solitary dalga çözümü aşağıdaki gibidir:

$$u(x, t) = e^{\ln\{(p+3)(3p+1)(p+1)/[2(p^2+3)(p^2+4p+7)]\}/(p+1)} \times \operatorname{sech}^{4/(p+1)}\left[\frac{(p-1)}{\sqrt{4p^2+8p+20}}(x - ct)\right] \quad (2.25)$$

Burada $p \geq 2$ bir tamsayı ve

$$c = (p^4 + 4p^3 + 14p^2 + 20p + 25)/(p^4 + 4p^3 + 10p^2 + 12p + 21) \quad (2.26)$$

dir. Rosenau-RLW denklemi çeşitli nümerik metotlarla çözülmüştür [103–107]. Zuo vd. [103] denklemin çözümü için Crank-Nicolson sonlu farklar metodunu önermişlerdir. Metodun yakınsaklık ve kararlılığı ayrıca tartışılmıştır. Açıkça [103]’deki yöntemin lineer olmayan kapalı bir yöntem olmasından dolayı yoğun ardışık hesapla-

malar gerekmektedir.

Bu çalışmada Rosenau-RLW başlangıç değer probleminin başlangıç şartları;

$$u(x, 0) = u_0(x) = 0, \quad x_l \leq x \leq x_r \quad (2.27)$$

ve sınır şartları;

$$u(x_l, t) = u(x_r, t) = 0, \quad (2.28)$$

olarak değerlendirildi. Başlangıç değer problemi aşağıdaki korunumlara sahiptir.

$$Q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x, 0) dx = Q(0),$$

ve

$$E(t) = \|u\|_{L_2}^2 + \|u_x\|_{L_2}^2 + \|u_{xx}\|_{L_2}^2 = E(0).$$

$-x_l \gg 0$ ve $x_r \gg 0$ olduğunda başlangıç değer problemi (2.24-2.28) tutarlıdır ve (2.28) sınır şartı mantıklıdır [106].

2.2 Metodun Rosenau-RLW denkleminin Uygulanması

Bu kısımda (2.24) Rosenau-RLW denkleminin (2.27 ve 2.28) başlangıç ve sınır şartlı çözümünü elde etmek için ağsız çekirdek tabanlı çizgiler metodu sunulacaktır. Bir kısmi diferansiyel denkleme ağsız çekirdek tabanlı çizgiler metodu yaklaşımı ile bir adi diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Elde edilen adi diferansiyel denklem sisteminin çözümü herhangi bir adi diferansiyel denklem sistem çözücüsü kullanılarak bulunabilir. Bu çalışmada farklı test problemleri için Rosenau-RLW denkleminin nümerik çözümünü elde ederken radyal tabanlı fonksiyonlar [108]'deki yöntemle benzer olarak kullanılacaktır. Çizgiler metodu u çözümüne

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) v_j(x), \quad (2.29)$$

lineer kombinasyonu ile yaklaşır. Burada $\alpha_j(t)$ 'ler her zaman adımı belirlenmesi gereken zaman bağlı fonksiyonlar ve $v_j(x)$ 'ler ise Multiquadric, Gaussian ve Wendland'lar gibi radyal tabanlı fonksiyonların oluşturduğu matristir.

(2.24) denklemindeki zaman ve konuma göre türevler

$$u_t(x, t) = \sum_{j=1}^N \alpha'_j(t) v_j(x), \quad (2.30)$$

$$u_x(x, t) = \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) v_j'(x), \quad (2.31)$$

$$u_{xxt}(x, t) = \sum_{j=1}^N \alpha_j'(t) v_j''(x), \quad (2.32)$$

$$u_{xxxxt}(x, t) = \sum_{j=1}^N \alpha_j'(t) v_j^{iv}(x), \quad (2.33)$$

şeklinde ifade edilir. (2.30)-(2.33) denklemleri (2.24)'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \alpha_j'(t) v_j(x) + \sum_{j=1}^N \alpha_j'(t) v_j^{iv}(x) - \sum_{j=1}^N \alpha_j'(t) v_j''(x) + \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) v_j'(x) \\ + \left[\sum_{j=1}^N \alpha_j(t) v_j'(x) \right]^p = 0 \end{aligned} \quad (2.34)$$

elde edilir. Bu denklem

$$\sum_{j=1}^N (v_j(x) + v_j^{iv}(x) - v_j''(x)) \alpha_j'(t) = - \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) v_j(x) - \left[\sum_{j=1}^N \alpha_j(t) v_j'(x) \right]^p \quad (2.35)$$

formunda yazılabilir. Bu çalışmada elde edilen denklemi çözmek için MATLAB program kodları kullanılmaktadır. Bu yüzden (2.35) denklemi MATLAB gösterimleri ile

$$(V + V^{iv} - V'') * \alpha'(t) = -(V * \alpha(t)) - (V' * \alpha(t)). \wedge p \quad (2.36)$$

şeklinde yazılır. Burada V, V'', V^{iv} matrisleri ve $\alpha(t), \alpha'(t)$ vektörleri aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\begin{aligned} V &= v_j(x_k) \\ V' &= v_j'(x_k) \\ V'' &= v_j''(x_k) \\ V^{iv} &= v_j^{iv}(x_k) \\ \alpha(t) &= [\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t)]^T \\ \alpha'(t) &= [\alpha_1'(t), \alpha_2'(t), \dots, \alpha_n'(t)]^T \end{aligned} \quad (2.37)$$

Burada $1 \leq k \leq N$ ve $1 \leq j \leq N$ dir. “*” sembolü noktasal çarpım “ $\wedge p$ ” ise vektörlerin p kez eleman elemana çarpımı ve k, j sırasıyla satır ve sütun indisleridir.

V, V'', V^{iv} matrisleri terslenebilir olduklarından (2.36) denklemi aşağıdaki gibi

yazılabilir;

$$\alpha'(t) = -(V + V^{iv} - V'')^{-1} * [(V * \alpha(t)) + (V' * \alpha(t)). \wedge p] \quad (2.38)$$

(2.25) denklemi $\alpha(t)$ 'ye göre bir adi diferansiyel denklem sistemidir. Bu sistemi çözmek için MATLAB ode113 çözücüsü yani Adams-Bashforth-Moulton çözücü kullanıldı.

2.3 Çok Adımlı Metotlar

Euler, Heun, Taylor ve Runge-Kutta metotları tek adımlı metotlar olarak adlandırılırlar çünkü hesaplanmak istenen noktayı bulmak için bir önceki noktanın değerlerini kullanırlar. Yani (t_1, y_1) noktası için sadece (t_0, y_0) noktası kullanılır ve genel olarak y_{k+1} için y_k gereklidir. Bu şekilde bir kaç nokta hesaplandıktan sonra bu noktaları kullanmak mümkündür. Birden çok nokta kullanan metotlara çok adımlı metot denir.

Adams-Bashforth-Moulton çok adımlı metodu $y_{k-3}, y_{k-2}, y_{k-1}$ ve y_k noktalarını kullanarak y_{k+1} noktasını hesaplar. Bu metot kendiliğinden başlayan bir metot değildir. (t_4, y_4) noktasını bulmak için dört başlangıç noktası $(t_0, y_0), (t_1, y_1), (t_2, y_2)$ ve (t_3, y_3) önceden verilmiş olmalı ya da tek adımlı bir metot ile hesaplanmalıdır [109].

Teorem 2.3.1. (Adams-Bashforth-Moulton Metodu) Kabul edelim ki $f(t, y)$ fonksiyonu sürekli ve y değişkeni için Lipschits şartını [110] sağlasın.

$y' = f(t, y), y(a) = t_0 = a$ başlangıç değer problemi $a \leq t \leq b$ aralığında göz önüne alınırsa Adams-Bashforth-Moulton metodu $t_{k+1} = t_k + h$ ve

$$\text{öngörücü} \quad p_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}(-9f_{k-3} + 37f_{k-2} - 59f_{k-1} + 55f_k)$$

düzeltilici $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}(f_{k-2} - 5f_{k-1} + 19f_k + 9f_{t_{k+1}, p_{k+1}})$, $k = 3, 4, \dots, m - 1$ formülleri ile $(t_k, y_k)_{k=0}^m$ ayrık noktalarını kullanarak diferansiyel denklemin çözümüne yaklaşır.

Not: Adams-Bashforth-Moulton metodu kendiliğinden başlayan bir metot değildir. y_1, y_2, y_3 başlangıç değerleri verilmelidir. Bunlar genellikle Runge-Kutta metodu ile hesaplanır.

3 SAYISAL ÖRNEKLER

Bu bölümde metodumuzun doğruluğunu göstermek ve onaylamak için sayısal deneyler sunuldu. Analitik çözümler için enerji (E) ve kütle (Q) korunumları Çizelge 3.1’de verildi. Metodun doğruluğu nümerik sonuçlarla analitik sonuçların karşılaştırılmasıyla ölçüldüğü gibi [106, 107]’daki metotların sayısal çözümlerinin $\|\cdot\|$ ve $\|\cdot\|_\infty$ normları kullanılarak karşılaştırılmasıyla da ölçülmüştür. Çizelge 3.2-3.9’da $T = 40$ anında p ’nin farklı değerlerinin $[x_l, x_r] = [-60, 120]$ aralığında $\Delta t = 0.1$ için $h = 0.25$ ve $h = 0.5$ alınarak elde edilen sonuçlar karşılaştırmalı olarak gösterilmiştir. Multiquadrik, Gaussian ve Wendland fonksiyonları kullanılarak elde edilen sonuçlar bu sonuçlarla karşılaştırıldı. Multiquadric, Gaussian ve Wendland’ları kullanan bu metot [106, 107]’daki sonuçlarla karşılaştırıldığında yüksek doğruluğa sahiptir. Ayrıca Çizelge 3.10-3.29 ’da ise $T = 0$, $T = 10$, $T = 20$, $T = 30$ ve $T = 40$ anlarında farklı p değerlerinin $(x_l, x_r) = (-60, 120)$ aralığında $\Delta t = 0.1$ için $h = 0.25$, $h = 0.5$ ve $h = 1$ alınarak elde edilen sonuçları gösterilmiştir. Gaussian ve Multiquadric fonksiyonları tam (full) matrisleri kullanırken Wendland fonksiyonları seyrek bant matrisleri kullanırlar. W(7,5) çekirdek fonksiyonu $p = 4$ durumunda Şekil 3.3’de görüldüğü gibi 721×721 matris girdisinden 26335 tanesi kullanarak elde edilmiştir. Yani matris girdilerinin yaklaşık %5’i kullanılmış, diğer girdiler sıfır olarak alınmıştır. Metodumuz çekirdek fonksiyonlarından W(7,5)’i kullanırken en düşük hataları vermiştir, MQ’te ise en büyük hataları vermiştir. Korunumların değerleri analitik değerlerle karşılaştırıldığında neredeyse sabit kalmıştır. Hesaplanan nümerik sonuçlar oldukça tatmin edicidir.

Solitary dalganın hareketi Şekil 3.4-3.7 ’de gösterilmiştir. Şekiller sadece W(7,5) fonksiyonu için verilmiştir. Diğer çekirdek fonksiyonlarının şekilleri de buna benzerdir. Program çözüm kümesinde $T = 40$ anına kadar çalıştırılmıştır. Şekillerden dalganın genişliğini ve şeklini koruyarak ilerlediği açıktır. Başlangıç anında orjinde olan dalgaların $T = 40$ anında tepe noktalarının konumları ve yükseklikleri Çizelge 3.30-3.41’de gösterilmiştir.

Çizelge 3.1: $p = 2$, $p = 4$, $p = 8$, ve $p = 16$, için korunumların analitik değerleri

| p | Q | E |
|----|--------------------|-------------------|
| 2 | 3.795317132067327 | 1.066355064087552 |
| 4 | 6.265806200726043 | 2.867694556570600 |
| 8 | 9.742085633375613 | 4.735164052229236 |
| 16 | 17.148840626830460 | 8.375324226689992 |

Çizelge 3.2: $p = 2$, $h = 0.25$ için hata ve korunumların karşılaştırılması

| Metot | h | Δt | T | L_2 | L_∞ | Q | E |
|--------|------|------------|-----|-----------|------------|----------|----------|
| W(7,5) | 0.25 | 0.1 | 40 | 0.0001275 | 0.00004598 | 3.795232 | 1.066294 |
| W(6,4) | 0.25 | 0.1 | 40 | 0.0013638 | 0.00042136 | 3.795328 | 1.066412 |
| G | 0.25 | 0.1 | 40 | 0.0013485 | 0.00033208 | 3.795317 | 1.066441 |
| MQ | 0.25 | 0.1 | 40 | 0.0164736 | 0.00609368 | 3.795374 | 1.065693 |
| [106] | 0.25 | 0.1 | 40 | 0.0023608 | 0.00088670 | | |
| [107] | 0.25 | 0.1 | 40 | 0.0078777 | 0.00288972 | | |

Çizelge 3.3: $p = 2$, $h = 0.5$ için hata ve korunumların karşılaştırılması

| Metot | h | Δt | T | L_2 | L_∞ | Q | E |
|--------|-----|------------|-----|------------|------------|----------|----------|
| W(7,5) | 0.5 | 0.1 | 40 | 0.00030471 | 0.00011406 | 3.795680 | 1.066561 |
| W(6,4) | 0.5 | 0.1 | 40 | 0.00002320 | 0.00000800 | 3.795340 | 1.066369 |
| G | 0.5 | 0.1 | 40 | 0.00122407 | 0.00028836 | 3.795317 | 1.066420 |
| MQ | 0.5 | 0.1 | 40 | 0.00044057 | 0.00016465 | 3.795444 | 1.066335 |
| [106] | 0.5 | 0.1 | 40 | 0.00230294 | 0.00086284 | | |
| [107] | 0.5 | 0.1 | 40 | 0.03252880 | 0.01194600 | | |

Çizelge 3.4: $p = 4$, $h = 0.25$ için hata ve korunumların karşılaştırılması

| Metot | h | Δt | T | L_2 | L_∞ | Q | E |
|--------|------|------------|-----|-----------|------------|----------|----------|
| W(7,5) | 0.25 | 0.1 | 40 | 0.0005668 | 0.00022937 | 6.265656 | 2.867499 |
| W(6,4) | 0.25 | 0.1 | 40 | 0.0004304 | 0.00013850 | 6.265825 | 2.867714 |
| G | 0.25 | 0.1 | 40 | 0.0005819 | 0.00024612 | 6.265806 | 2.867687 |
| MQ | 0.25 | 0.1 | 40 | 0.0378323 | 0.01421842 | 6.265895 | 2.865306 |
| [106] | 0.25 | 0.1 | 40 | 0.0047254 | 0.00181252 | | |
| [107] | 0.25 | 0.1 | 40 | 0.0173066 | 0.00647969 | | |

Çizelge 3.5: $p = 4$, $h = 0.5$ için hata ve korunumların karşılaştırılması

| Metot | h | Δt | T | L_2 | L_∞ | Q | E |
|--------|-----|------------|-----|------------|------------|----------|----------|
| W(7,5) | 0.5 | 0.1 | 40 | 0.00093510 | 0.00035069 | 6.266377 | 2.868226 |
| W(6,4) | 0.5 | 0.1 | 40 | 0.00002355 | 0.00001031 | 6.265844 | 2.867735 |
| G | 0.5 | 0.1 | 40 | 0.00066954 | 0.00029706 | 6.265806 | 2.867684 |
| MQ | 0.5 | 0.1 | 40 | 0.00110452 | 0.00042250 | 6.265992 | 2.867617 |
| [106] | 0.5 | 0.1 | 40 | 0.00447881 | 0.00171122 | | |
| [107] | 0.5 | 0.1 | 40 | 0.07451730 | 0.02787120 | | |

Çizelge 3.6: $p = 8$, $h = 0.25$ için hata ve korunumların karşılaştırılması

| Metot | h | Δt | T | L_2 | L_∞ | Q | E |
|--------|------|------------|-----|-----------|------------|----------|----------|
| W(7,5) | 0.25 | 0.1 | 40 | 0.0015201 | 0.00056494 | 9.742557 | 4.735389 |
| W(6,4) | 0.25 | 0.1 | 40 | 0.0015381 | 0.00058230 | 9.742184 | 4.735363 |
| G | 0.25 | 0.1 | 40 | 0.0135710 | 0.00499149 | 9.742171 | 4.736608 |
| MQ | 0.25 | 0.1 | 40 | 0.0417588 | 0.01544258 | 9.741917 | 4.732773 |
| [106] | 0.25 | 0.1 | 40 | 0.0046713 | 0.00175739 | | |
| [107] | 0.25 | 0.1 | 40 | 0.0180583 | 0.00666740 | | |

Çizelge 3.7: $p = 8$, $h = 0.5$ için hata ve korunumların karşılaştırılması

| Metot | h | Δt | T | L_2 | L_∞ | Q | E |
|--------|------|------------|-----|------------|------------|----------|----------|
| W(7,5) | 0.5 | 0.1 | 40 | 0.00038078 | 0.00013784 | 9.742126 | 4.735346 |
| W(6,4) | 0.5 | 0.1 | 40 | 0.00007522 | 0.00002949 | 9.742181 | 4.735225 |
| G | 0.5 | 0.1 | 40 | 0.00170387 | 0.00062856 | 9.742146 | 4.735302 |
| MQ | 0.5 | 0.1 | 40 | 0.00127623 | 0.00047892 | 9.742227 | 4.735082 |
| [106] | 0.25 | 0.1 | 40 | 0.00431841 | 0.00161891 | | |
| [107] | 0.5 | 0.1 | 40 | 0.08037300 | 0.02953370 | | |

Çizelge 3.8: $p = 16$, $h = 0.25$ için hata ve korunumların karşılaştırılması

| Metot | h | Δt | T | L_2 | L_∞ | Q | E |
|--------|------|------------|-----|-----------|------------|-----------|----------|
| W(7,5) | 0.25 | 0.1 | 40 | 0.0037772 | 0.00069703 | 17.177647 | 8.376023 |
| W(6,4) | 0.25 | 0.1 | 40 | 0.0039010 | 0.00070390 | 17.177793 | 8.375375 |
| G | 0.25 | 0.1 | 40 | 0.0067420 | 0.00200093 | 17.180371 | 8.375890 |
| MQ | 0.25 | 0.1 | 40 | 0.0342397 | 0.01193357 | 17.098244 | 8.374013 |
| [106] | 0.25 | 0.1 | 40 | 0.0038438 | 0.00130630 | | |
| [107] | 0.25 | 0.1 | 40 | 0.0137857 | 0.00505919 | | |

Çizelge 3.9: $p = 16$, $h = 0.5$ için hata ve korunumların karşılaştırılması

| Metot | h | Δt | T | L_2 | L_∞ | Q | E |
|--------|-----|------------|-----|------------|------------|-----------|----------|
| W(7,5) | 0.5 | 0.1 | 40 | 0.00233340 | 0.00044109 | 17.168699 | 8.375376 |
| W(6,4) | 0.5 | 0.1 | 40 | 0.00231987 | 0.00044493 | 17.169258 | 8.375400 |
| G | 0.5 | 0.1 | 40 | 0.00302310 | 0.00053860 | 17.172776 | 8.375393 |
| MQ | 0.5 | 0.1 | 40 | 0.00762184 | 0.00227095 | 17.116828 | 8.375272 |
| [106] | 0.5 | 0.1 | 40 | 0.00357253 | 0.00118759 | | |
| [107] | 0.5 | 0.1 | 40 | 0.06130440 | 0.02254710 | | |

Çizelge 3.2-3.9'daki parametreler [106] ve [107]'daki değerler ile karşılaştırma yapabilmek için uyumlu seçilmiştir. Çizelge 3.2'deki L_2 ve L_∞ değerleri incelendiğinde metodun MQ çekirdek fonksiyonu hariç [106] ve [107]'dan daha küçük hatalar verdiği görülmektedir. En az hata ise $W(7,5)$ için elde edilmiştir. Çizelge 3.3' de bütün çekirdek fonksiyonları [106] ve [107]'dan düşük hatalar vermiş ve en düşük hatayı $W(6,4)$ vermiştir. Çizelge 3.4'de MQ hariç diğer çekirdek fonksiyonları daha düşük hata vermiştir en düşük hatayı ise $W(6,4)$ vermiştir. Çizelge 3.5'de bütün çekirdek fonksiyonları için referanslardan daha düşük hatalar elde edilmiş ve yine en düşük hatayı $W(6,4)$ vermiştir. Çizelge 3.6'da MQ [106] ve [107]' dan G ise [106]'den biraz daha büyük hata vermiştir. Wendland'lar ise daha küçük hata ve birbirine oldukça yakın sonuçlar vermişlerdir. $W(7,5)$ biraz daha düşük hatalı olduğu görülmektedir. Çizelge 3.7'ye baktığımızda bütün çekirdek fonksiyonlarının daha düşük hatalı olduğunu en düşüğünün ise $W(6,4)$ olduğunu görürüz. Çizelge 3.8'de [106] ve [107]'nın ikisinden de düşük hata veren sadece $W(7,5)$ 'dir. $W(6,4)$ ve G fonksiyonları [106]'den düşük ancak [107]'dan büyük hatalıdır. MQ ise her ikisinden de büyük hatalar vermiştir. Son olarak Çizelge 3.9'u incelersek $W(7,5)$ ve $W(6,4)$ çekirdek fonksiyonlarının ikisi de [106] ve [107]'dan daha düşük hatalıdır. G fonksiyonu [106]'den düşük [107]'dan büyüktür. MQ ise ikisiden de büyük hata vermiştir.

Çizelge 3.10: $p = 2$, $h = 0.25$, $h = 0.5$, ve $h = 1$ için $T = 0$ anında hata ve korunumların karşılaştırılması

| Metot | h | Δt | T | L_2 | L_∞ | Q | E |
|--------|------|------------|-----|-----------|------------|----------|----------|
| W(7,5) | 0.25 | 0.1 | 0 | 0.0000889 | 0.0000523 | 3.795232 | 1.066292 |
| W(6,4) | 0.25 | 0.1 | 0 | 0.0000045 | 0.0000024 | 3.795328 | 1.066363 |
| G | 0.25 | 0.1 | 0 | 0.0000000 | 0.0000000 | 3.795317 | 1.066355 |
| MQ | 0.25 | 0.1 | 0 | 0.0000006 | 0.0000001 | 3.795324 | 1.066355 |
| W(7,5) | 0.5 | 0.1 | 0 | 0.0001320 | 0.0000760 | 3.795680 | 1.066555 |
| W(6,4) | 0.5 | 0.1 | 0 | 0.0000071 | 0.0000030 | 3.795340 | 1.066369 |
| G | 0.5 | 0.1 | 0 | 0.0000000 | 0.0000000 | 3.795317 | 1.066355 |
| MQ | 0.5 | 0.1 | 0 | 0.0000057 | 0.0000008 | 3.795253 | 1.066354 |
| W(7,5) | 1 | 0.1 | 0 | 0.0000320 | 0.0000110 | 3.795173 | 1.066323 |
| W(6,4) | 1 | 0.1 | 0 | 0.0000007 | 0.0000002 | 3.795320 | 1.066356 |
| G | 1 | 0.1 | 0 | 0.0000000 | 0.0000000 | 3.795317 | 1.066355 |
| MQ | 1 | 0.1 | 0 | 0.0000007 | 0.0000001 | 3.795309 | 1.066355 |

Çizelge 3.11: $p = 4$, $h = 0.25$, $h = 0.5$, ve $h = 1$ için $T = 0$ anında hata ve korunumların karşılaştırılması

| Metot | h | Δt | T | L_2 | L_∞ | Q | E |
|--------|------|------------|-----|-----------|------------|----------|----------|
| W(7,5) | 0.25 | 0.1 | 0 | 0.0001436 | 0.0000876 | 6.265656 | 2.867501 |
| W(6,4) | 0.25 | 0.1 | 0 | 0.0000074 | 0.0000041 | 6.265825 | 2.867716 |
| G | 0.25 | 0.1 | 0 | 0.0000000 | 0.0000000 | 6.265806 | 2.867694 |
| MQ | 0.25 | 0.1 | 0 | 0.0000009 | 0.0000001 | 6.265816 | 2.867695 |
| W(7,5) | 0.5 | 0.1 | 0 | 0.0002090 | 0.0001211 | 6.266376 | 2.868181 |
| W(6,4) | 0.5 | 0.1 | 0 | 0.0000116 | 0.0000050 | 6.265844 | 2.867733 |
| G | 0.5 | 0.1 | 0 | 0.0000000 | 0.0000000 | 6.265806 | 2.867694 |
| MQ | 0.5 | 0.1 | 0 | 0.0000097 | 0.0000014 | 6.265697 | 2.867694 |
| W(7,5) | 1 | 0.1 | 0 | 0.0000497 | 0.0000170 | 6.265579 | 2.867632 |
| W(6,4) | 1 | 0.1 | 0 | 0.0000012 | 0.0000003 | 6.265812 | 2.867697 |
| G | 1 | 0.1 | 0 | 0.0000000 | 0.0000000 | 6.265806 | 2.867694 |
| MQ | 1 | 0.1 | 0 | 0.0000013 | 0.0000002 | 6.265791 | 2.867694 |

Çizelge 3.12: $p = 8$, $h = 0.25$, $h = 0.5$, ve $h = 1$ için $T = 0$ anında hata ve korunumların karşılaştırılması

| Metot | h | Δt | T | L_2 | L_∞ | Q | E |
|--------|------|------------|-----|-----------|------------|----------|----------|
| W(7,5) | 0.25 | 0.1 | 0 | 0.0002782 | 0.0001826 | 9.742485 | 4.735203 |
| W(6,4) | 0.25 | 0.1 | 0 | 0.0000092 | 0.0000048 | 9.742110 | 4.735196 |
| G | 0.25 | 0.1 | 0 | 0.0000000 | 0.0000000 | 9.742084 | 4.735164 |
| MQ | 0.25 | 0.1 | 0 | 0.0000032 | 0.0000005 | 9.742120 | 4.735165 |
| W(7,5) | 0.5 | 0.1 | 0 | 0.0001090 | 0.0000358 | 9.742082 | 4.735335 |
| W(6,4) | 0.5 | 0.1 | 0 | 0.0000145 | 0.0000061 | 9.742135 | 4.735224 |
| G | 0.5 | 0.1 | 0 | 0.0000000 | 0.0000000 | 9.742085 | 4.735164 |
| MQ | 0.5 | 0.1 | 0 | 0.0000118 | 0.0000018 | 9.741952 | 4.735162 |
| W(7,5) | 1 | 0.1 | 0 | 0.0001004 | 0.0000293 | 9.741550 | 4.734897 |
| W(6,4) | 1 | 0.1 | 0 | 0.0000025 | 0.0000006 | 9.742099 | 4.735171 |
| G | 1 | 0.1 | 0 | 0.0000000 | 0.0000000 | 9.742085 | 4.735164 |
| MQ | 1 | 0.1 | 0 | 0.0000040 | 0.0000006 | 9.742039 | 4.735163 |

Çizelge 3.13: $p = 16$, $h = 0.25$, $h = 0.5$, ve $h = 1$ için $T = 0$ anında hata ve korunumların karşılaştırılması

| Metot | h | Δt | T | L_2 | L_∞ | Q | E |
|--------|------|------------|-----|-----------|------------|-----------|----------|
| W(7,5) | 0.25 | 0.1 | 0 | 0.0005016 | 0.0002432 | 17.148690 | 8.375955 |
| W(6,4) | 0.25 | 0.1 | 0 | 0.0000112 | 0.0000054 | 17.148539 | 8.375369 |
| G | 0.25 | 0.1 | 0 | 0.0000000 | 0.0000000 | 17.148501 | 8.375324 |
| MQ | 0.25 | 0.1 | 0 | 0.0000070 | 0.0000010 | 17.148580 | 8.375328 |
| W(7,5) | 0.5 | 0.1 | 0 | 0.0001996 | 0.0000557 | 17.148256 | 8.375367 |
| W(6,4) | 0.5 | 0.1 | 0 | 0.0000136 | 0.0000052 | 17.148673 | 8.375395 |
| G | 0.5 | 0.1 | 0 | 0.0000000 | 0.0000000 | 17.148615 | 8.375324 |
| MQ | 0.5 | 0.1 | 0 | 0.0000145 | 0.0000021 | 17.148452 | 8.375317 |
| W(7,5) | 1 | 0.1 | 0 | 0.0000019 | 0.0000007 | 17.148835 | 8.375320 |
| W(6,4) | 1 | 0.1 | 0 | 0.0000055 | 0.0000015 | 17.148869 | 8.375347 |
| G | 1 | 0.1 | 0 | 0.0000000 | 0.0000000 | 17.148840 | 8.375324 |
| MQ | 1 | 0.1 | 0 | 0.0000093 | 0.0000014 | 17.148736 | 8.375319 |

Çizelge 3.14: $p = 2$, $h = 0.25$, $h = 0.5$, ve $h = 1$ için $T = 10$ anında hata ve korunumların karşılaştırılması

| Metot | h | Δt | T | L_2 | L_∞ | Q | E |
|--------|------|------------|-----|-----------|------------|----------|----------|
| W(7,5) | 0.25 | 0.1 | 10 | 0.0000973 | 0.0000557 | 3.795232 | 1.066295 |
| W(6,4) | 0.25 | 0.1 | 10 | 0.0009722 | 0.0003958 | 3.795328 | 1.066448 |
| G | 0.25 | 0.1 | 10 | 0.0006528 | 0.0002793 | 3.795317 | 1.066402 |
| MQ | 0.25 | 0.1 | 10 | 0.0057760 | 0.0023864 | 3.795325 | 3.795332 |
| W(7,5) | 0.5 | 0.1 | 10 | 0.0001782 | 0.0000648 | 3.795680 | 1.066563 |
| W(6,4) | 0.5 | 0.1 | 10 | 0.0000142 | 0.0000061 | 3.795340 | 1.066369 |
| G | 0.5 | 0.1 | 10 | 0.0006479 | 0.0002771 | 3.795317 | 1.066402 |
| MQ | 0.5 | 0.1 | 10 | 0.0001621 | 0.0000690 | 3.795261 | 1.066348 |
| W(7,5) | 1 | 0.1 | 10 | 0.0000397 | 0.0000152 | 3.795173 | 1.066322 |
| W(6,4) | 1 | 0.1 | 10 | 0.0000011 | 0.0000005 | 3.795320 | 1.066356 |
| G | 1 | 0.1 | 10 | 0.0000057 | 0.0000027 | 3.795317 | 1.066355 |
| MQ | 1 | 0.1 | 10 | 0.0000074 | 0.0000032 | 3.795304 | 1.066354 |

Çizelge 3.15: $p = 4$, $h = 0.25$, $h = 0.5$, ve $h = 1$ için $T = 10$ anında hata ve korunumların karşılaştırılması

| Metot | h | Δt | T | L_2 | L_∞ | Q | E |
|--------|------|------------|-----|-----------|------------|----------|----------|
| W(7,5) | 0.25 | 0.1 | 10 | 0.0004050 | 0.0001764 | 6.265656 | 2.867552 |
| W(6,4) | 0.25 | 0.1 | 10 | 0.0003435 | 0.0001624 | 6.265825 | 2.867761 |
| G | 0.25 | 0.1 | 10 | 0.0003467 | 0.0001412 | 6.265806 | 2.867724 |
| MQ | 0.25 | 0.1 | 10 | 0.0109727 | 0.0047254 | 6.265818 | 2.866947 |
| W(7,5) | 0.5 | 0.1 | 10 | 0.0003838 | 0.0001560 | 6.266376 | 2.868219 |
| W(6,4) | 0.5 | 0.1 | 10 | 0.0000138 | 0.0000068 | 6.265844 | 2.867734 |
| G | 0.5 | 0.1 | 10 | 0.0003775 | 0.0001486 | 6.265806 | 2.867734 |
| MQ | 0.5 | 0.1 | 10 | 0.0003352 | 0.0001483 | 6.265710 | 2.867666 |
| W(7,5) | 1 | 0.1 | 10 | 0.0000619 | 0.0000214 | 6.265579 | 2.867630 |
| W(6,4) | 1 | 0.1 | 10 | 0.0000067 | 0.0000028 | 6.265812 | 2.867697 |
| G | 1 | 0.1 | 10 | 0.0000011 | 0.0000003 | 6.265806 | 2.867694 |
| MQ | 1 | 0.1 | 10 | 0.0000246 | 0.0000106 | 6.265780 | 2.867691 |

Çizelge 3.16: $p = 8$, $h = 0.25$, $h = 0.5$, ve $h = 1$ için $T = 10$ anında hata ve korunumların karşılaştırılması

| Metot | h | Δt | T | L_2 | L_∞ | Q | E |
|--------|------|------------|-----|-----------|------------|----------|----------|
| W(7,5) | 0.25 | 0.1 | 10 | 0.0002601 | 0.0001574 | 9.742505 | 4.735245 |
| W(6,4) | 0.25 | 0.1 | 10 | 0.0006510 | 0.0002906 | 9.742130 | 4.735289 |
| G | 0.25 | 0.1 | 10 | 0.0017284 | 0.0006386 | 9.742108 | 4.735458 |
| MQ | 0.25 | 0.1 | 10 | 0.0091215 | 0.0039293 | 9.742119 | 4.734662 |
| W(7,5) | 0.5 | 0.1 | 10 | 0.0001027 | 0.0000323 | 9.742096 | 4.735331 |
| W(6,4) | 0.5 | 0.1 | 10 | 0.0000226 | 0.0000112 | 9.742150 | 4.735225 |
| G | 0.5 | 0.1 | 10 | 0.0007350 | 0.0002959 | 9.742104 | 4.735271 |
| MQ | 0.5 | 0.1 | 10 | 0.0002854 | 0.0001275 | 9.741972 | 4.735143 |
| W(7,5) | 1 | 0.1 | 10 | 0.0001244 | 0.0000400 | 9.741561 | 4.734893 |
| W(6,4) | 1 | 0.1 | 10 | 0.0000133 | 0.0000062 | 9.742110 | 4.735170 |
| G | 1 | 0.1 | 10 | 0.0000018 | 0.0000006 | 9.742098 | 4.735163 |
| MQ | 1 | 0.1 | 10 | 0.0000308 | 0.0000122 | 9.742028 | 4.735160 |

Çizelge 3.17: $p = 16$, $h = 0.25$, $h = 0.5$, ve $h = 1$ için $T = 10$ anında hata ve korunumların karşılaştırılması

| Metot | h | Δt | T | L_2 | L_∞ | Q | E |
|--------|------|------------|-----|-----------|------------|-----------|----------|
| W(7,5) | 0.25 | 0.1 | 10 | 0.0010070 | 0.0004815 | 17.156718 | 8.375952 |
| W(6,4) | 0.25 | 0.1 | 10 | 0.0009851 | 0.0004897 | 17.156640 | 8.375374 |
| G | 0.25 | 0.1 | 10 | 0.0021253 | 0.0008164 | 17.157260 | 8.375433 |
| MQ | 0.25 | 0.1 | 10 | 0.0058167 | 0.0024848 | 17.152182 | 8.375122 |
| W(7,5) | 0.5 | 0.1 | 10 | 0.0005250 | 0.0002850 | 17.154937 | 8.375361 |
| W(6,4) | 0.5 | 0.1 | 10 | 0.0005028 | 0.0002893 | 17.155385 | 8.375396 |
| G | 0.5 | 0.1 | 10 | 0.0007813 | 0.0004111 | 17.156198 | 8.375336 |
| MQ | 0.5 | 0.1 | 10 | 0.0004684 | 0.0002755 | 17.152674 | 8.375309 |
| W(7,5) | 1 | 0.1 | 10 | 0.0000870 | 0.0000566 | 17.154219 | 8.375320 |
| W(6,4) | 1 | 0.1 | 10 | 0.0000630 | 0.0000411 | 17.154191 | 8.375346 |
| G | 1 | 0.1 | 10 | 0.0001712 | 0.0001052 | 17.154451 | 8.375324 |
| MQ | 1 | 0.1 | 10 | 0.0000964 | 0.0000603 | 17.153692 | 8.375318 |

Çizelge 3.18: $p = 2$, $h = 0.25$, $h = 0.5$, ve $h = 1$ için $T = 20$ anında hata ve korunumların karşılaştırılması

| Metot | h | Δt | T | L_2 | L_∞ | Q | E |
|--------|------|------------|-----|-----------|------------|----------|----------|
| W(7,5) | 0.25 | 0.1 | 20 | 0.0001042 | 0.0000523 | 3.795232 | 1.066294 |
| W(6,4) | 0.25 | 0.1 | 20 | 0.0013278 | 0.0004369 | 3.795328 | 1.066425 |
| G | 0.25 | 0.1 | 20 | 0.0010717 | 0.0003774 | 3.795317 | 1.066425 |
| MQ | 0.25 | 0.1 | 20 | 0.0101974 | 0.0039806 | 3.795332 | 1.065929 |
| W(7,5) | 0.5 | 0.1 | 20 | 0.0002142 | 0.0000798 | 3.795680 | 1.066562 |
| W(6,4) | 0.5 | 0.1 | 20 | 0.0000160 | 0.0000048 | 3.795340 | 1.066369 |
| G | 0.5 | 0.1 | 20 | 0.0010086 | 0.0003452 | 3.795317 | 1.066422 |
| MQ | 0.5 | 0.1 | 20 | 0.0002790 | 0.0001099 | 3.795289 | 1.066341 |
| W(7,5) | 1 | 0.1 | 20 | 0.0000508 | 0.0000191 | 3.795173 | 1.066321 |
| W(6,4) | 1 | 0.1 | 20 | 0.0000012 | 0.0000006 | 3.795320 | 1.066356 |
| G | 1 | 0.1 | 20 | 0.0000059 | 0.0000020 | 3.795317 | 1.066354 |
| MQ | 1 | 0.1 | 20 | 0.0000113 | 0.0000043 | 3.795296 | 1.066354 |

Çizelge 3.19: $p = 4$, $h = 0.25$, $h = 0.5$, ve $h = 1$ için $T = 20$ anında hata ve korunumların karşılaştırılması

| Metot | h | Δt | T | L_2 | L_∞ | Q | E |
|--------|------|------------|-----|-----------|------------|----------|----------|
| W(7,5) | 0.25 | 0.1 | 20 | 0.0005132 | 0.0002012 | 6.265656 | 2.867534 |
| W(6,4) | 0.25 | 0.1 | 20 | 0.0004105 | 0.0001539 | 6.265825 | 2.867745 |
| G | 0.25 | 0.1 | 20 | 0.0005254 | 0.0002098 | 6.265806 | 2.867712 |
| MQ | 0.25 | 0.1 | 20 | 0.0203975 | 0.0081387 | 6.265829 | 2.866213 |
| W(7,5) | 0.5 | 0.1 | 20 | 0.0005765 | 0.0002248 | 6.266377 | 2.868227 |
| W(6,4) | 0.5 | 0.1 | 20 | 0.0000164 | 0.0000079 | 6.265844 | 2.867734 |
| G | 0.5 | 0.1 | 20 | 0.0005446 | 0.0002321 | 6.265806 | 2.867717 |
| MQ | 0.5 | 0.1 | 20 | 0.0006051 | 0.0002462 | 6.265753 | 2.867644 |
| W(7,5) | 1 | 0.1 | 20 | 0.0000816 | 0.0000285 | 6.265580 | 2.867626 |
| W(6,4) | 1 | 0.1 | 20 | 0.0000081 | 0.0000033 | 6.265812 | 2.867696 |
| G | 1 | 0.1 | 20 | 0.0000015 | 0.0000005 | 6.265806 | 2.867694 |
| MQ | 1 | 0.1 | 20 | 0.0000396 | 0.0000156 | 6.265748 | 2.867690 |

Çizelge 3.20: $p = 8$, $h = 0.25$, $h = 0.5$, ve $h = 1$ için $T = 20$ anında hata ve korunumların karşılaştırılması

| Metot | h | Δt | T | L_2 | L_∞ | Q | E |
|--------|------|------------|-----|-----------|------------|----------|----------|
| W(7,5) | 0.25 | 0.1 | 20 | 0.0005376 | 0.0002081 | 9.742523 | 4.735310 |
| W(6,4) | 0.25 | 0.1 | 20 | 0.0005394 | 0.0002205 | 9.742149 | 4.735282 |
| G | 0.25 | 0.1 | 20 | 0.0037342 | 0.0015064 | 9.742130 | 4.735780 |
| MQ | 0.25 | 0.1 | 20 | 0.0187154 | 0.0074341 | 9.742080 | 4.734044 |
| W(7,5) | 0.5 | 0.1 | 20 | 0.0001688 | 0.0000661 | 9.742108 | 4.735334 |
| W(6,4) | 0.5 | 0.1 | 20 | 0.0000435 | 0.0000186 | 9.742162 | 4.735228 |
| G | 0.5 | 0.1 | 20 | 0.0006337 | 0.0002553 | 9.742120 | 4.735236 |
| MQ | 0.5 | 0.1 | 20 | 0.0005741 | 0.0002332 | 9.742005 | 4.735123 |
| W(7,5) | 1 | 0.1 | 20 | 0.0001763 | 0.0000605 | 9.741564 | 4.734888 |
| W(6,4) | 1 | 0.1 | 20 | 0.0000181 | 0.0000076 | 9.742113 | 4.735170 |
| G | 1 | 0.1 | 20 | 0.0000029 | 0.0000007 | 9.742106 | 4.735164 |
| MQ | 1 | 0.1 | 20 | 0.0000569 | 0.0000200 | 9.741957 | 4.735158 |

Çizelge 3.21: $p = 16$, $h = 0.25$, $h = 0.5$, ve $h = 1$ için $T = 20$ anında hata ve korunumların karşılaştırılması

| Metot | h | Δt | T | L_2 | L_∞ | Q | E |
|--------|------|------------|-----|-----------|------------|-----------|----------|
| W(7,5) | 0.25 | 0.1 | 20 | 0.0021106 | 0.0006446 | 17.164146 | 8.375973 |
| W(6,4) | 0.25 | 0.1 | 20 | 0.0022167 | 0.0006531 | 17.164143 | 8.375370 |
| G | 0.25 | 0.1 | 20 | 0.0037545 | 0.0010974 | 17.165435 | 8.375472 |
| MQ | 0.25 | 0.1 | 20 | 0.0129596 | 0.0050008 | 17.145216 | 8.374825 |
| W(7,5) | 0.5 | 0.1 | 20 | 0.0013048 | 0.0004185 | 17.160266 | 8.375361 |
| W(6,4) | 0.5 | 0.1 | 20 | 0.0013028 | 0.0004223 | 17.160751 | 8.375397 |
| G | 0.5 | 0.1 | 20 | 0.0017179 | 0.0005258 | 17.162555 | 8.375350 |
| MQ | 0.5 | 0.1 | 20 | 0.0019825 | 0.0008740 | 17.148515 | 8.375300 |
| W(7,5) | 1 | 0.1 | 20 | 0.0003307 | 0.0001196 | 17.156753 | 8.375320 |
| W(6,4) | 1 | 0.1 | 20 | 0.0002737 | 0.0001056 | 17.156553 | 8.375346 |
| G | 1 | 0.1 | 20 | 0.0004669 | 0.0001509 | 17.157357 | 8.375324 |
| MQ | 1 | 0.1 | 20 | 0.0005078 | 0.0002313 | 17.153743 | 8.375317 |

Çizelge 3.22: $p = 2$, $h = 0.25$, $h = 0.5$, ve $h = 1$ için $T = 30$ anında hata ve korunumların karşılaştırılması

| Metot | h | Δt | T | L_2 | L_∞ | Q | E |
|--------|------|------------|-----|-----------|-------------|----------|----------|
| W(7,5) | 0.25 | 0.1 | 30 | 0.0001141 | 0.0000491 | 3.795232 | 1.066294 |
| W(6,4) | 0.25 | 0.1 | 30 | 0.0013405 | 0.000462102 | 3.795328 | 1.066416 |
| G | 0.25 | 0.1 | 30 | 0.0011626 | 0.0003048 | 3.795317 | 1.066422 |
| MQ | 0.25 | 0.1 | 30 | 0.0136111 | 0.0051348 | 3.795348 | 1.065780 |
| W(7,5) | 0.5 | 0.1 | 30 | 0.0002571 | 0.0000967 | 3.795680 | 1.066561 |
| W(6,4) | 0.5 | 0.1 | 30 | 0.0000193 | 0.0000064 | 3.795340 | 1.066369 |
| G | 0.5 | 0.1 | 30 | 0.0010976 | 0.0002870 | 3.795317 | 1.066416 |
| MQ | 0.5 | 0.1 | 30 | 0.0003667 | 0.0001399 | 3.795349 | 1.066337 |
| W(7,5) | 1 | 0.1 | 30 | 0.0000616 | 0.0000225 | 3.795173 | 1.066320 |
| W(6,4) | 1 | 0.1 | 30 | 0.0000014 | 0.0000006 | 3.795320 | 1.066356 |
| G | 1 | 0.1 | 30 | 0.0000061 | 0.0000017 | 3.795317 | 1.066354 |
| MQ | 1 | 0.1 | 30 | 0.0000137 | 0.0000052 | 3.795292 | 1.066354 |

Çizelge 3.23: $p = 4$, $h = 0.25$, $h = 0.5$, ve $h = 1$ için $T = 30$ anında hata ve korunumların karşılaştırılması

| Metot | h | Δt | T | L_2 | L_∞ | Q | E |
|--------|------|------------|-----|-----------|------------|----------|----------|
| W(7,5) | 0.25 | 0.1 | 30 | 0.0005713 | 0.0002395 | 6.265656 | 2.867518 |
| W(6,4) | 0.25 | 0.1 | 30 | 0.0004303 | 0.0001629 | 6.265825 | 2.867732 |
| G | 0.25 | 0.1 | 30 | 0.0005710 | 0.0002149 | 6.265806 | 2.867685 |
| MQ | 0.25 | 0.1 | 30 | 0.0291910 | 0.0112010 | 6.265854 | 2.865698 |
| W(7,5) | 0.5 | 0.1 | 30 | 0.0007576 | 0.0002893 | 6.266377 | 2.868228 |
| W(6,4) | 0.5 | 0.1 | 30 | 0.0000199 | 0.0000091 | 6.265844 | 2.867735 |
| G | 0.5 | 0.1 | 30 | 0.0006512 | 0.0002887 | 6.265806 | 2.867701 |
| MQ | 0.5 | 0.1 | 30 | 0.0008566 | 0.0003349 | 6.265844 | 2.867628 |
| W(7,5) | 1 | 0.1 | 30 | 0.0001037 | 0.0000369 | 6.265579 | 2.867624 |
| W(6,4) | 1 | 0.1 | 30 | 0.0000097 | 0.0000042 | 6.265812 | 2.867696 |
| G | 1 | 0.1 | 30 | 0.0000021 | 0.0000008 | 6.265806 | 2.867694 |
| MQ | 1 | 0.1 | 30 | 0.0000549 | 0.0000207 | 6.265705 | 2.867689 |

Çizelge 3.24: $p = 8$, $h = 0.25$, $h = 0.5$, ve $h = 1$ için $T = 30$ anında hata ve korunumların karşılaştırılması

| Metot | h | Δt | T | L_2 | L_∞ | Q | E |
|--------|------|------------|-----|-----------|------------|----------|----------|
| W(7,5) | 0.25 | 0.1 | 30 | 0.0009541 | 0.0003627 | 9.742541 | 4.735349 |
| W(6,4) | 0.25 | 0.1 | 30 | 0.0009672 | 0.0003781 | 9.742167 | 4.735321 |
| G | 0.25 | 0.1 | 30 | 0.0077592 | 0.0029844 | 9.742151 | 4.736201 |
| MQ | 0.25 | 0.1 | 30 | 0.0294867 | 0.0112052 | 9.742012 | 4.733419 |
| W(7,5) | 0.5 | 0.1 | 30 | 0.0002662 | 0.0001003 | 9.742117 | 4.735340 |
| W(6,4) | 0.5 | 0.1 | 30 | 0.0000634 | 0.0000241 | 9.742172 | 4.735225 |
| G | 0.5 | 0.1 | 30 | 0.0011106 | 0.0004239 | 9.742134 | 4.735268 |
| MQ | 0.5 | 0.1 | 30 | 0.0009006 | 0.0003488 | 9.742085 | 4.735103 |
| W(7,5) | 1 | 0.1 | 30 | 0.0002478 | 0.0000876 | 9.741566 | 4.734883 |
| W(6,4) | 1 | 0.1 | 30 | 0.0000256 | 0.0000095 | 9.742115 | 4.735169 |
| G | 1 | 0.1 | 30 | 0.0000038 | 0.0000008 | 9.742113 | 4.735163 |
| MQ | 1 | 0.1 | 30 | 0.0000883 | 0.0000302 | 9.741849 | 4.735156 |

Çizelge 3.25: $p = 16$, $h = 0.25$, $h = 0.5$, ve $h = 1$ için $T = 30$ anında hata ve korunumların karşılaştırılması

| Metot | h | Δt | T | L_2 | L_∞ | Q | E |
|--------|------|------------|-----|-----------|------------|-----------|----------|
| W(7,5) | 0.25 | 0.1 | 30 | 0.0030049 | 0.0006887 | 17.171180 | 8.375997 |
| W(6,4) | 0.25 | 0.1 | 30 | 0.0031536 | 0.0006962 | 17.171255 | 8.375371 |
| G | 0.25 | 0.1 | 30 | 0.0043713 | 0.0010316 | 17.173202 | 8.375646 |
| MQ | 0.25 | 0.1 | 30 | 0.0222572 | 0.0080687 | 17.127428 | 8.374461 |
| W(7,5) | 0.5 | 0.1 | 30 | 0.0018915 | 0.0004346 | 17.164883 | 8.375368 |
| W(6,4) | 0.5 | 0.1 | 30 | 0.0018893 | 0.0004384 | 17.165406 | 8.375398 |
| G | 0.5 | 0.1 | 30 | 0.0024304 | 0.0005312 | 17.168111 | 8.375369 |
| MQ | 0.5 | 0.1 | 30 | 0.0044418 | 0.0015633 | 17.136550 | 8.375287 |
| W(7,5) | 1 | 0.1 | 30 | 0.0004793 | 0.0001234 | 17.158170 | 8.375320 |
| W(6,4) | 1 | 0.1 | 30 | 0.0004195 | 0.0001089 | 17.157876 | 8.375345 |
| G | 1 | 0.1 | 30 | 0.0006178 | 0.0001564 | 17.158956 | 8.375323 |
| MQ | 1 | 0.1 | 30 | 0.0011724 | 0.0004090 | 17.150773 | 8.375315 |

Çizelge 3.26: $p = 2$, $h = 1$ için $T = 40$ anında hata ve korunumların karşılaştırılması

| Metot | h | Δt | T | L_2 | L_∞ | Q | E |
|--------|-----|------------|-----|-----------|------------|----------|----------|
| W(7,5) | 1 | 0.1 | 40 | 0.0000716 | 0.0000259 | 3.795173 | 1.066320 |
| W(6,4) | 1 | 0.1 | 40 | 0.0000016 | 0.0000007 | 3.795320 | 1.066356 |
| G | 1 | 0.1 | 40 | 0.0000063 | 0.0000015 | 3.795317 | 1.066354 |
| MQ | 1 | 0.1 | 40 | 0.0000157 | 0.0000059 | 3.795288 | 1.066354 |

Çizelge 3.27: $p = 4$, $h = 1$ için $T = 40$ anında hata ve korunumların karşılaştırılması

| Metot | h | Δt | T | L_2 | L_∞ | Q | E |
|--------|-----|------------|-----|-----------|------------|----------|----------|
| W(7,5) | 1 | 0.1 | 40 | 0.0001271 | 0.0000457 | 6.265579 | 2.867622 |
| W(6,4) | 1 | 0.1 | 40 | 0.0000114 | 0.0000047 | 6.265812 | 2.867696 |
| G | 1 | 0.1 | 40 | 0.0000028 | 0.0000010 | 6.265807 | 2.867694 |
| MQ | 1 | 0.1 | 40 | 0.0000709 | 0.0000258 | 6.265647 | 2.867688 |

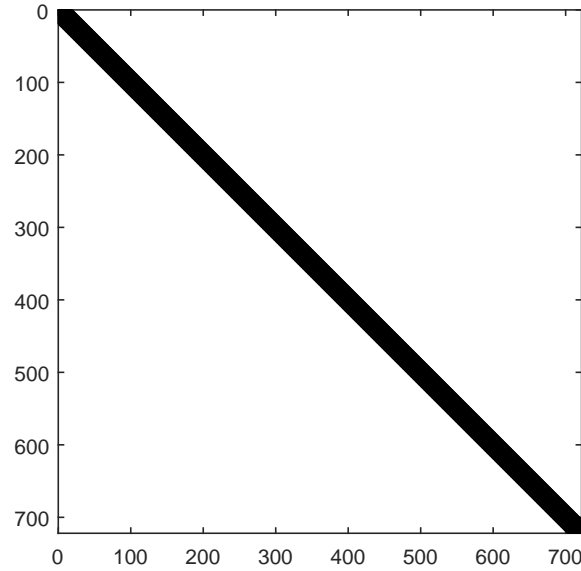
Çizelge 3.28: $p = 8$, $h = 1$ için $T = 40$ anında hata ve korunumların karşılaştırılması

| Metot | h | Δt | T | L_2 | L_∞ | Q | E |
|--------|-----|------------|-----|-----------|------------|----------|----------|
| W(7,5) | 1 | 0.1 | 40 | 0.0003363 | 0.0001183 | 9.741567 | 4.734878 |
| W(6,4) | 1 | 0.1 | 40 | 0.0000340 | 0.0000127 | 9.742116 | 4.735169 |
| G | 1 | 0.1 | 40 | 0.0000048 | 0.0000010 | 9.742122 | 4.735163 |
| MQ | 1 | 0.1 | 40 | 0.0001246 | 0.0000399 | 9.741700 | 4.735155 |

Çizelge 3.29: $p = 16$, $h = 1$ için $T = 40$ anında hata ve korunumların karşılaştırılması

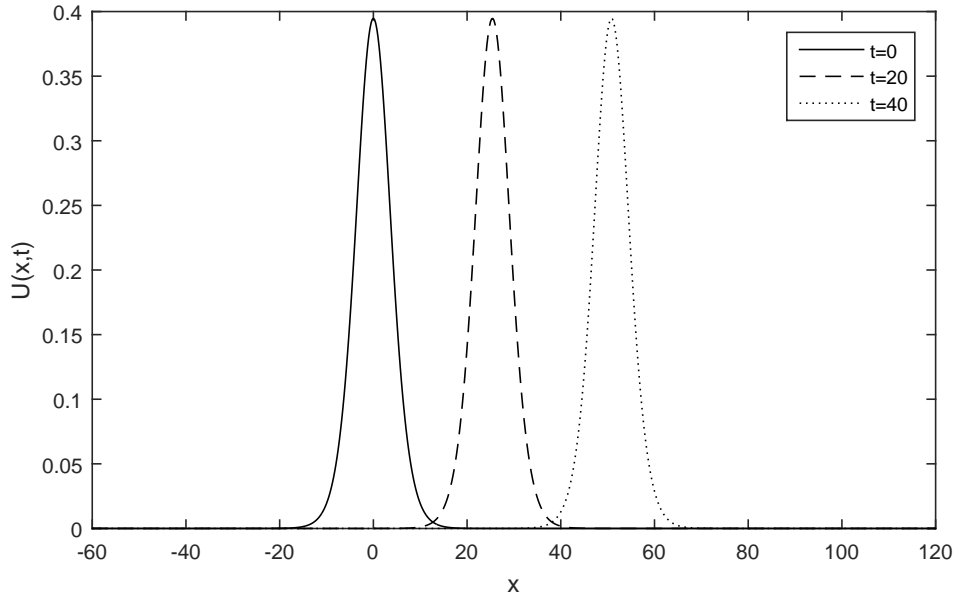
| Metot | h | Δt | T | L_2 | L_∞ | Q | E |
|--------|-----|------------|-----|-----------|------------|-----------|----------|
| W(7,5) | 1 | 0.1 | 40 | 0.0005487 | 0.0001259 | 17.158624 | 8.375319 |
| W(6,4) | 1 | 0.1 | 40 | 0.0004909 | 0.0001112 | 17.158287 | 8.375344 |
| G | 1 | 0.1 | 40 | 0.0006799 | 0.0001592 | 17.159463 | 8.375323 |
| MQ | 1 | 0.1 | 40 | 0.0019579 | 0.0005586 | 17.145462 | 8.375314 |

Çizelge 3.10-3.29'de T 'nin 0, 10, 20, 30 ve 40 anları için elde ettiğimiz sonuçların karşılaştırılması verilmiştir. Çizelge 3.10-3.13 arasında görülen G'nın değerleri 10^{-7} 'den küçük olduğu için sıfıra yuvarlanmıştır ve en iyi değerlerdir. $T = 0$ anında elde edilen nümerik sonuçlarda ikinci sırada MQ vardır. En kötü sonuçları ise W(7,5) vermiştir. Ancak zaman ilerledikçe W(6,4) ve W(7,5) en iyi sonuçları vermiş G ve MQ için sonuçlar bozulmuştur. Genelde MQ biraz daha düşük doğrulukta sonuçlar vermiştir. Aynı T anı için h adım aralığı büyüdükçe sonuçlar beklenmedik şekilde düzelmiş ve $h = 1$ için bütün çekirdek fonksiyonları en iyi değerlerini vermiştir.

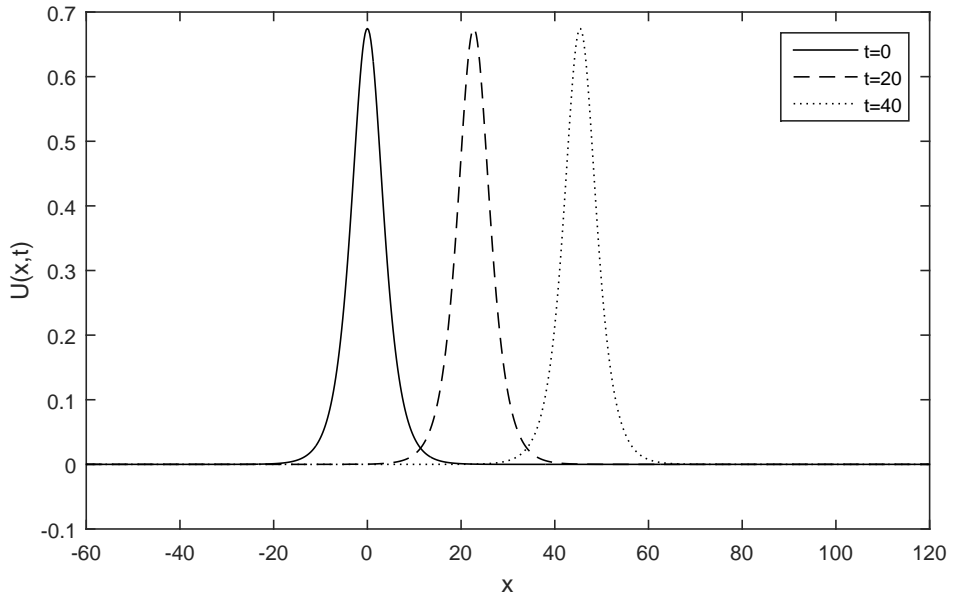


Şekil 3.3: Katsayılar matrisinin yapısı

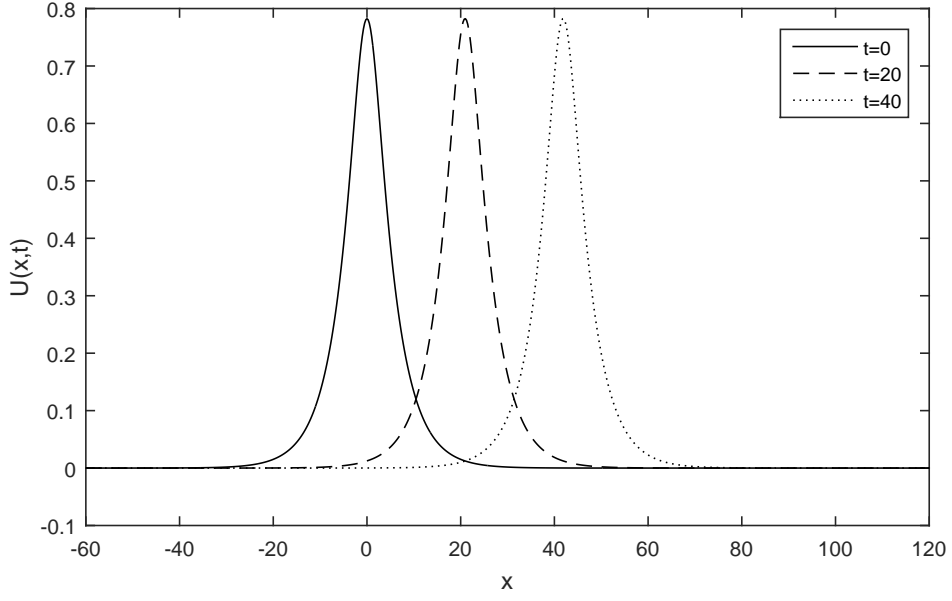
Farklı p değerleri için solitary dalganın ilerlemesinin profili Şekil 3.4-3.7 'de şu şekilde gösterilir:



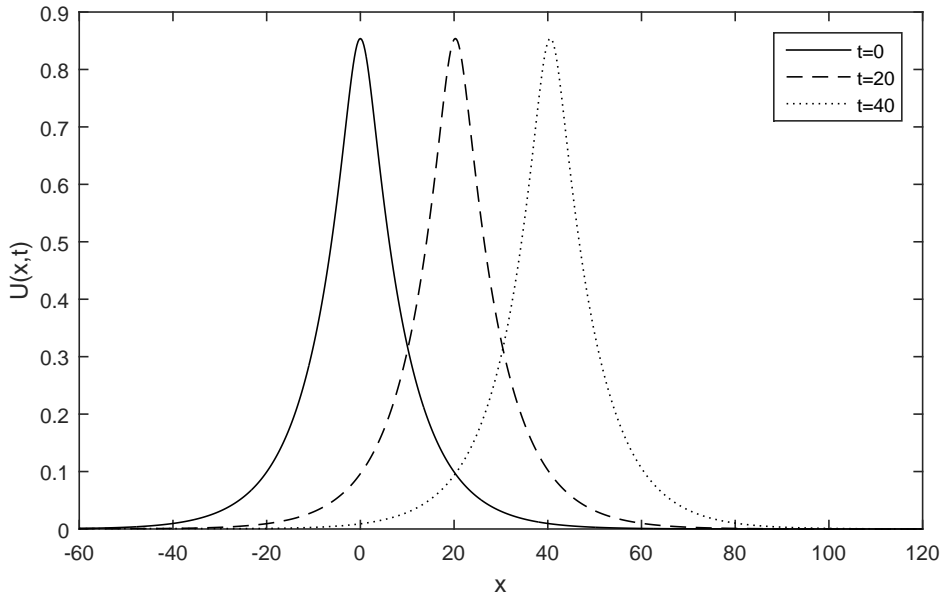
Şekil 3.4: $p = 2$ için solitary dalganın hareketi



Şekil 3.5: $p = 4$ için solitary dalganın hareketi



Şekil 3.6: $p = 8$ için solitary dalganın hareketi



Şekil 3.7: $p = 16$ için solitary dalganın hareketi

Başlangıçta en solda bulunan solitary dalga her bir p değeri için zaman arttıkça sağa doğru ilerlemektedir. Dalgaların sahip olduğu değerler Çizelge 3.30-3.41'de verilmiştir. Bu çizelgelerde dalgaların tepe noktalarının konumları ve yükseklikleri gösterilmiştir.

Çizelge 3.30: $p = 2$, $h = 0.25$ için tepe noktası ve dalga yüksekliği

| Metot | Tepe Noktasının Konumu | Dalğanın yüksekliği |
|---------------|------------------------|---------------------|
| U tam çözüm | 51 | 0.3946 |
| W(7,5) | 51 | 0.3947 |
| W(6,4) | 51 | 0.3948 |
| G | 51 | 0.3949 |
| MQ | 51 | 0.3933 |

Çizelge 3.31: $p = 4$, $h = 0.25$ için tepe noktası ve dalga yüksekliği

| Metot | Tepe Noktasının Konumu | Dalğanın yüksekliği |
|---------------|------------------------|---------------------|
| U tam çözüm | 45.75 | 0.6743 |
| W(7,5) | 45.75 | 0.6744 |
| W(6,4) | 45.75 | 0.6743 |
| G | 45.75 | 0.6743 |
| MQ | 45.50 | 0.6716 |

Çizelge 3.32: $p = 8$, $h = 0.25$ için tepe noktası ve dalga yüksekliği

| Metot | Tepe Noktasının Konumu | Dalğanın yüksekliği |
|---------------|------------------------|---------------------|
| U tam çözüm | 42.25 | 0.7818 |
| W(7,5) | 42.25 | 0.7824 |
| W(6,4) | 42.25 | 0.7822 |
| G | 42.25 | 0.7847 |
| MQ | 42 | 0.7781 |

Çizelge 3.33: $p = 16$, $h = 0.25$ için tepe noktası ve dalga yüksekliği

| Metot | Tepe Noktasının Konumu | Dalğanın yüksekliği |
|---------------|------------------------|---------------------|
| U tam çözüm | 40.75 | 0.8538 |
| $W(7,5)$ | 40.75 | 0.8541 |
| $W(6,4)$ | 40.75 | 0.8538 |
| G | 40.75 | 0.8554 |
| MQ | 40.75 | 0.8494 |

Çizelge 3.34: $p = 2$, $h = 0.5$ için tepe noktası ve dalga yüksekliği

| Metot | Tepe Noktasının Konumu | Dalğanın yüksekliği |
|---------------|------------------------|---------------------|
| U tam çözüm | 51.50 | 0.3943 |
| $W(7,5)$ | 51.50 | 0.3943 |
| $W(6,4)$ | 51.50 | 0.3943 |
| G | 51.50 | 0.3945 |
| MQ | 51.50 | 0.3942 |

Çizelge 3.35: $p = 4$, $h = 0.5$ için tepe noktası ve dalga yüksekliği

| Metot | Tepe Noktasının Konumu | Dalğanın yüksekliği |
|---------------|------------------------|---------------------|
| U tam çözüm | 46 | 0.6743 |
| $W(7,5)$ | 46 | 0.6744 |
| $W(6,4)$ | 46 | 0.6743 |
| G | 46 | 0.6742 |
| MQ | 46 | 0.6741 |

Çizelge 3.36: $p = 8$, $h = 0.5$ için tepe noktası ve dalga yüksekliği

| Metot | Tepe Noktasının Konumu | Dalğanın yüksekliği |
|---------------|------------------------|---------------------|
| U tam çözüm | 42.50 | 0.7818 |
| $W(7,5)$ | 42.50 | 0.7820 |
| $W(6,4)$ | 42.50 | 0.7818 |
| G | 42.50 | 0.7821 |
| MQ | 42.50 | 0.7817 |

Çizelge 3.37: $p = 16$, $h = 0.5$ için tepe noktası ve dalga yüksekliği

| Metot | Tepe Noktasının Konumu | Dalğanın yüksekliği |
|---------------|------------------------|---------------------|
| U tam çözüm | 41 | 0.8538 |
| $W(7,5)$ | 41 | 0.8537 |
| $W(6,4)$ | 41 | 0.8538 |
| G | 41 | 0.8540 |
| MQ | 41 | 0.8536 |

Çizelge 3.38: $p = 2$, $h = 1$ için tepe noktası ve dalga yüksekliği

| Metot | Tepe Noktasının Konumu | Dalğanın yüksekliği |
|---------------|------------------------|---------------------|
| U tam çözüm | 52 | 0.3943 |
| $W(7,5)$ | 52 | 0.3935 |
| $W(6,4)$ | 52 | 0.3943 |
| G | 52 | 0.3943 |
| MQ | 52 | 0.3943 |

Çizelge 3.39: $p = 4$, $h = 1$ için tepe noktası ve dalga yüksekliği

| Metot | Tepe Noktasının Konumu | Dalğanın yüksekliği |
|---------------|------------------------|---------------------|
| U tam çözüm | 46 | 0.6691 |
| $W(7,5)$ | 46 | 0.6725 |
| $W(6,4)$ | 46 | 0.6691 |
| G | 46 | 0.6691 |
| MQ | 46 | 0.6691 |

Çizelge 3.40: $p = 8$, $h = 1$ için tepe noktası ve dalga yüksekliği

| Metot | Tepe Noktasının Konumu | Dalğanın yüksekliği |
|---------------|------------------------|---------------------|
| U tam çözüm | 43 | 0.7818 |
| $W(7,5)$ | 43 | 0.7804 |
| $W(6,4)$ | 43 | 0.7818 |
| G | 43 | 0.7818 |
| MQ | 43 | 0.7818 |

Çizelge 3.41: $p = 16$, $h = 1$ için tepe noktası ve dalga yüksekliği

| Metot | Tepe Noktasının Konumu | Dalğanın yüksekliği |
|---------------|------------------------|---------------------|
| U tam çözüm | 42 | 0.8494 |
| $W(7,5)$ | 41 | 0.8500 |
| $W(6,4)$ | 42 | 0.8493 |
| G | 42 | 0.8494 |
| MQ | 42 | 0.8493 |

Her bir durum için ayrı ayrı inceleme yapıldığında, farklı taban fonksiyonları için elde edilen tepe noktasının konumu ve dalğanın yüksekliği birbirlerine çok yakın olarak elde edilmiştir. Bu nedenle farklı taban fonksiyonları için birbirlerine yakın sonuçlar bulunduğu görülür.

4 KARARLILIK ANALİZİNİN METODA UYGULANMASI

Bu bölümde Fourier analizi kullanılarak metodun kararlılığı araştırıldı. Rosenau–RLW denkleminde (2.24)

$$u(x, t) = c\psi(t)\varphi(x) \quad (4.39)$$

alınır ve Von Neumann'ın önerdiği metoda uygun olması için $\varphi(x)$, k Fourier katsayısı olmak üzere

$$\varphi(x) = e^{jkx}, \quad j = \sqrt{-1} \quad (4.40)$$

şeklinde alınır ve $(u^p)_x = pu^{p-1}u_x = \alpha u_x$ ifadesinde lineerliği elde etmek için α sabitini $\alpha = pu^{p-1}$ olarak alınıp (4.39) ve (4.40), (2.24)' de yerine yazılırsa

$$c \frac{d\psi}{dt} e^{jkx_i} + c \frac{d\psi}{dt} (e^{jkx_i})^{(iv)} - c \frac{d\psi}{dt} (e^{jkx_i})'' + c\psi(t)(e^{jkx_i})' + c\alpha\psi(t)(e^{jkx_i})' = 0 \quad (4.41)$$

bulunur. Denklemin düzenlenmesiyle

$$\frac{d\psi}{dt} + (jk)^4 \frac{d\psi}{dt} - (jk)^2 \frac{d\psi}{dt} + (jk)\psi(t) + \alpha(jk)\psi(t) = 0 \quad (4.42)$$

olup, buradan

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{(1 + \alpha)jk}{1 + k^4 + k^2} \psi_i \quad (4.43)$$

elde edilir. Böylece katsayılar matrisinin en büyük özdeğeri için aşağıdaki koşul sağlandığında metodumuz kararlıdır.

$$\left| \frac{(1 + \alpha)k}{1 + k^4 + k^2} \right| \leq 1 \quad (4.44)$$

5 SONUÇ

Bu tezde Genel Rosenau-RLW denkleminin sayısal çözümünü elde etmek için ağsız çekirdek tabanlı çizgiler metodu kullanıldı. Sunulan metodun etkinliği literatürdeki çalışmalarla karşılaştırılarak test edildi ve metodun doğruluğu L_2 ve L_∞ hata normları ile ölçüldü. Rosenau-RLW denklemi için sayısal örnekler solitary dalga için gösterildi. Elde edilen sonuçlarda hata normlarının oldukça küçük olduğu görüldü. Metodun en önemli avantajı büyük adım genişliği kullanıldığında oldukça doğru sonuçlar üretmesidir. Von Neumann kararlılık analizi kullanılarak metodun kararlılık koşulu gösterildi. Sunulan metotla elde edilen sonuçlar bazı önceki sonuçlarla karşılaştırıldı. Elde edilen sayısal sonuçların ilgili literatürdeki sonuçlarla uyumlu olduğu görüldü. Böylelikle kullanılan metodun yüksek doğruluklu bir metot olduğu gösterildi ve benzer türdeki lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümünde kullanılabileceği sonucuna varıldı.

KAYNAKLAR

- [1] Mitchell, A.R. and Griffiths, D.F. (1980) The Finite Difference Method in Partial Equations. *John Wiley and Son*
- [2] Debnath, L. (2005) Nonlinear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers. 2nd Ed, ISBN 0-8176-4323-0, Birkhäuser Boston
- [3] Demkowicz, L. Oden, J.T. Rachowicz, W. and Hardy , O. (1989) Toward a universal h-p adaptive finite element strategy, Part 1: constrained approximation and data structure. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg*, 77, 79-112.
- [4] Rachowicz, W. Oden J.T. and Demkowicz L. (1989) Toward a universal h-p adaptive finite element strategy. III. Design of h-p meshes. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg* , 77, 181-212.
- [5] Power, H. Barraco, V. and Universita Degli Studi di Palermo (2002) A comparison Analysis between Unsymmetric and Symmetric Radial Basis function Collocation Methods for the Numerical Solution of Partial Differential Equations. *Comput. Math. Appl*, 43, 551-583.
- [6] Zafarullah A. (1970) Application of the method of lines to parabolic partial differential equations with error estimates. *J. ACM*, 17 (2), 294-302.
- [7] Carver, M.B. and Hinds, H. W. (1978) The method of lines and the advection equation. *Simulation*, 31 (2), 59-69.
- [8] Schiesser, W. E. (1991) The Numerical Method of Lines. *Academic Press, San Diego*.
- [9] Pregla, R. and Pascher, W. (1989) The method of lines, in T. Itoh (ed.), Numerical Techniques for Microwave and Millimeter-wave Passive Structures. *John Wiley, New York* 381-446.
- [10] Pregla, R. (1986) Analysis of planar microwave structures on magnetized ferrite substrate. *Arch. Elek. Ubertragung*, 40 270-273.
- [11] Pregla, R. (1987) About the nature of the method of lines. *Arch. Elek. Ubertragung* 41(6), 368-370.
- [12] Sadiku, M.N.O. and Obiozor, C.N. (2000) A simple introduction to the method of lines. *Int. J. Electr. Eng. Educ*, 37(3), 282-296.

- [13] Gingold, R.A. and Monaghan, J. J (1977) Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars. *Monthly Notices Royal Astronomical Society* 181, 375-389.
- [14] Lucy, L.B. (1977) A numerical approach to the testing of the fission hypothesis *Astron. J.*, 8(12), 1013-1024.
- [15] Pepper, D. (2010) Meshless methods for PDEs. *Scholarpedia*, 5(5):9838.
- [16] Hardy, R. L. (1971) Multiquadric Equations of Topography and other Irregular Surfaces. *J. Geophys. Res.*, 76, 1905-1915.
- [17] Kansa, E. J. (1990) Multiquadrics-a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid dynamics-I. *Comput. Math. Appl.*, 19 (8/9), 127-145.
- [18] Kansa, E. J. (1990) Multiquadrics-a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid dynamics-II. *Comput. Math. Appl.*, 19 (8/9), 147-161.
- [19] Golberg, M. A. and Chen ,C.S. (1994) The theory of radial basis functions applied to the BEM for inhomogeneous partial differential equations. *Bound. Elem. Comm.*, 5, 57-61.
- [20] Zerroukat, M. Power, H. and Chen C.S (1998) A numerical method for heat transfer problems using collocation and radial basis functions *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 42, 1263-1278.
- [21] Larsson, E. and Fornberg,B. (2003) A numerical study of some radial basis function based solution methods for elliptic PDEs. *Comput. Math. Appl*, 46, 891-90.
- [22] Jichun, Li. Cheng A. H. D. and Chen, .C. S. (2003) A comparison of efficiency and error convergence of multiquadric collocation method and finite element method. *Eng. Anal. Bound. Elem*, 27, 251-257.
- [23] Franke, R. (1982) Scattered data interpolation: test of some methods. *Math Comput*, 38, 181-200.
- [24] Micchelli, C. A (1986) Interpolation of scattered data: distance matrices and conditionally positive definite functions. *Constr. Approx*, 2 , 11-22.
- [25] Powell, M. J. D. (1992) The theory of radial basis function approximation in 1990, in: Will Light (Ed.), *Wavelets, subdivision algorithm and radial basis functions Oxford University, Oxford*, 2, 105-203.

- [26] Madych, W. R. and Nelson, S. A. (1990) Multivariate interpolation and conditionally positive definite functions II. *Math Comp*, 54, 211-30.
- [27] Schaback R. (1995) Error estimates and condition numbers for radial basis function interpolation. *Adv. Comput. Math*, 3, 251-264.
- [28] Wu, Z. (1998) Solving PDE with radial basis function and the error estimation. *In: Z. Chen, Y. Li, C. A. Micchelli, Y. Xu, M. Dekker, Editors, Lecture notes on pure and applied mathematics*, 202, GuangZhou.
- [29] Franke, C. and Schaback, R. (1998) Convergence orders of meshless collocation methods using radial basis functions. *Adv. Comput. Math*, 8.
- [30] Wendland H. (1999) Meshless Galerkin methods using radial basis functions. *Mathematics of computation*, 68, 1521-1531.
- [31] Golberg, M. A. and Chen ,C.S. (1977), Discrete projection methods for integral equations. *Comput. Mech. Publ, Boston, MA*.
- [32] Fornberg, B. and Driscoll T.A. (2002) Interpolation in the limit of increasingly flat radial basis functions *International Journal of Computer Mathematics, Comput. Math. Appl*, 43, 413-422.
- [33] Hon, Y.C. and Wu, Z. M. A (2000) quasi-interpolation method for solving stiff ordinary differential equations. *Int.l J. Numer. Methods. Eng*, 48, 1187-1197.
- [34] Chen, W. and Hon, Y.C (2003) Numerical convergence of boundary knot method in the analysis of Helmholtz, modified Helmholtz, and convection-diffusion problems. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg*, 192, 1859-1875.
- [35] Chen, W. and Tanaka, M. A. (2002) A meshless, integration free and boundary-only RBF technique. *Comput. Math. Appl*, 43, 379-391.
- [36] Chen, C. S. Brebbia, C. A. and Power, H. (1998) Dual reciprocity method using for Helmholtz-type operators. *Bound. Elem*, 20, 495-504.
- [37] Fasshauer, G. E. (1997) Solving partial differential equations by collocation with radial basis functions, In *Surface Fitting and Multi-resolution Methods*, Mehaute AL, Rabut C, Schumaker LL (eds). *Vanderbilt University Press: U.S.A*, 131-138.
- [38] Hon, Y. C. and Mao, X. Z. (1997) A multiquadric interpolation method for solving initial value problems *Sci. Comput*, 12, 51-5.

- [39] Y. C. Hon and X. Z. Mao, *An efficient numerical scheme for Burgers equation*, *Appl. Math. Comput*, **95**, 37-50, 1998.
- [40] Y. C. Hon, K. F. Cheung, X. Z. Mao and E. J. Kansa, *A multiquadric solution for shallow water equation*, *ASCE J. Hydraulic. Engrg*, **125**, 524-533, 1999.
- [41] Hon, Y. C. and Mao, X. Z. (1999) A radial basis function method for solving options pricing model. *J. Financ. Engrg*, 8, 31-49.
- [42] Hon, Y. C. and Zhou, X. (2000) A comparison on using various radial basis functions for options pricing. *Int. J. Appl. Sci. Comput*, 7, 29-47.
- [43] Khattak, A. J. and Islam, S. (2008) A comparative study of numerical solutions of a class of KdV equation.s *Appl. Math. Comput*, 99, 425-434.
- [44] Haq, S. Islam, S. and Uddin M. (2009) A mesh-free method for the numerical solution of the KdV-Burger equation. *Appl. Math. Model*, 33, 3442-3449.
- [45] Islam, S. Haq, S. and Uddin M. (2008) , A mesh free interpolation method for the numerical solution of the coupled nonlinear partial differential Equations. *Eng. Anal. Bound. Elem*, 33, 399-409.
- [46] Derehi, Y. Irk, D. and Dağ, İ. (2009) Soliton solutions for NLS equation using radial basis functions. *Chaos, Solitons and Fractals*, 42, 1227-1233.
- [47] Dehghan, M. and Shokri, A. (2007) A numerical method for two-dimensional Schrodinger equation using collocation and radial basis functions. *Comput. Math. Appl.*, 54, 36-146.
- [48] Dehghan, M. and Shokri, A. (2008) A numerical method for solution of the two-dimensional sine-Gordon equation using the radial basis functions. *Math. Comput. Simul*, 79, 700-715.
- [49] Ali, A. (2009) Mesh free collocation method for numerical solution of initial boundary value problems using radial basis functions. *PhD thesis, Ghulam Ishaq Khan Institute of Engineering Sciences and Technology*, Pakistan.
- [50] Flyer, N. and Wright, W. B. (2007) Transport schemes on a sphere using radial basis functions *J. Comput. Phys*, 226, 1059-84.
- [51] Fornberg, B. and Cecile, P. (2008) On choosing a radial basis function and a shape parameter when solving a convective PDE on a sphere *J. Comput. Phys*, 227, 2758-2780.

- [52] M. D. Buhmann, *Radial Basis Functions Theory and Implementations*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [53] G. E. Fasshauer , *Meshfree Approximation Methods with Matlab*, World Scientific Publishing Co, Pte. Ltd, 2007.
- [54] Q. Shen, *A meshless method of lines for the numerical solution of KdV equation using radial basis functions*, Eng. Anal. Bound. Elem, **33**, 1171-1180, 2009.
- [55] S. Haq, N. Bibi, M. Usman and S. I. A. Tirmizi , *Meshless method of lines for the numerical solution of generalized Kuramoto-Sivashinsky equation*, Appl. Math.Comput, **217**, 2404-2413, 2010.
- [56] Nagina Bibi , *Meshless Method Of Lines For Numerical Solutions Of Nonlinear Time Dependent Partial Differential Equations* , PhD thesis, Ghulam Ishaq Khan Institute of Engineering Sciences and Technology, Topi, Swabi, Pakistan, 2011.
- [57] I. J. Schoenberg, *Metric spaces and completely monotone functions*, Annl. Math, **39**, pp. 811-884, 1938.
- [58] A. E. Tarwater, *A parameter study of Hardy.s multiquadric method for scattered data interpolation*, Lawrence Livermore National Laboratory, Technical Report UCRL-54670, 1985.
- [59] M. A. Golberg, C. S. Chen and S. R. Karur, *Improved multi-quadric approximation for partial differential equations*, Eng. Anal. Bound. Elem, **18**, 9-17, 1996.
- [60] J. Hickernell and Y. C. Hon , *Radial basis function approximation of the surface wind field from scattered data*, Int. J. Appl. Sci. Comput, **4**, 221-247 , 1998.
- [61] B. Fornberg and G. Wright, *Stable computation of multiquadric interpolants for all values of the shape parameter* , Comp. Math. Appl, **48**, 853-867 , 2004 .
- [62] H. Wendland, *Scattered Data Approximation*, P. Ciarlet, A. Iserles,R. Kohn, and M. Wright, Eds. Cambridge, U.K.: Cambridge Univ.Press, 2005.
- [63] H. Wendland , *Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree*, Adv. Comput. Math, **4**, 389, 1995.
- [64] M. D. Buhmann , *A new class of radial basis functions with compact support*, Math. Comput, **70**, 307-318, 2001.

- [65] G. E. Fasshauer , *On smoothing for multilevel approximation with radial basis functions, in Approximation Theory IX, 2: Computational Aspects, C.K. Chui and L.L. Schumaker (eds.)*, Vanderbilt University Press,55-62, 1998.
- [66] Z. Wu, *Compactly supported positive definite radial functions*, Int. J. Appl. Sci. Comput, **4**,Adv. Comput. Math, **4**, 283, 1995.
- [67] R. K. Beatson, J. B. Cherrie, and C. T. Mouat , *Fast fitting of radial basis functions: Methods based on preconditioned GMRES iteration*, Adv. Comput. Math., **11**, 253-270, 1999.
- [68] L. Ling and E. J. Kansa, *A least-squares preconditioner for radial basis functions collocation methods*, Adv. Comput. Math, **23**, 31-54, 2004.
- [69] J. Li and Y.C. Hon , *Domain Decomposition for Radial Basis Meshless Methods*, Numer. Meth. Part. Diff. Eq, **20**, 450-462, 2004.
- [70] L. Ling and E.J. Kansa, *Preconditioning for radial basis functions with domain decomposition methods*, Math. Comput. Model. **40**, 1413-1427, 2004.
- [71] G.R. Liu and Y.T. Gu , *A local radial point interpolation method (LRPIM) for free vibration analyses of 2-D solids*, J. Sound. Vib, **246**, 29-46, 2001.
- [72] Y.L. Wu and G.R. Liu , *A meshfree formulation of local radial point interpolation method (LRPIM) for incompressible flow simulation*, Comput Mech, **30**, 355-365, 2003.
- [73] J. G. Wang and G. R. Liu , *A point interpolation meshless method based on radial basis functions*, Int. J. Numer. Methods. Eng, **54**, 1623-1648, 2002.
- [74] J. G. Wang and G. R. Liu , *On the optimal shape parameters of radial basis functions used for 2-D meshless methods*, Comput. Methods. Appl. Mech. Eng, **191**, 2611-2630, 2002.
- [75] G. R. Liu, K.Y. Dai, K.M. Lim and Y. T. Gu , *A radial point interpolation method for simulation of two-dimensional piezoelectric structures*, Smart. Mater. Struct, **12**, 171-180, 2003.
- [76] J. Crank, P. Nicolson, *A Practical Method for Numerical Evaluation of Solutions of Partial Differential Equations of Heat Conduction Type*, Proc. Camb. Phil. Soc. **43** , 50-67, 1947.
- [77] Charney, J.G Fjørtoft, R. Von Neumann, J. (1950) Numerical Integration of the Barotropic Vorticity Equation. *Tellus*, 2 237-254.

- [78] Matthies, H.G. Kayser-Herold, O. (2002) Lecture Notes Introduction to PDEs and Numerical Methods. *Institute of Scientific Computing Technical University Braunschweig*.
- [79] Drazin, P. G and Johnson, R. S. (1996) Solitons: an introduction. *Cambridge University Press, Cambridge*.
- [80] Mohammed, K. (2007) New Exact Travelling Wave Solutions of the (3+1) Dimensional Kadomtsev-Petviashvili (KP) Equation. *IAENG International Journal of Applied Mathematics*, 37, no. 1, 17-19.
- [81] Lambers, J.V. (2008) An Explicit, Stable, High Order spectral Method for the Wave Equation Based on Block Gaussian Quadrature. *IAENG International Journal of Applied Mathematics*, 38 no. 4, 233-248.
- [82] Chen, J.C and Chen, W. (2011) Two-Dimensional Nonlinear Wave Dynamics in Blasius Boundary Layer Flow Using Combined Compact Difference Method. *IAENG International Journal of Applied Mathematics*, 41, no. 2, 162-171.
- [83] Bahadir, A.R. (2005) Exponential Finite-Difference Method Applied to Korteweg-de Vries Equation for Small Times. *Applied Mathematics and Computation*, 160, no. 3, 675-682.
- [84] Ozer, S. and Kutluay, S. (2005) An Analytical-Numerical Method Applied to Korteweg-de Vries Equation. *Applied Mathematics and Computation*, 164, no. 3, 789-797.
- [85] Cui, Y. and Mao, D.K (2007) Numerical Method Satisfying the First Two Conservation Laws for the Korteweg-de Vries Equation. *Journal of Computational Physics*, 227, 376-399.
- [86] Peregrine, D.H. (1996) Calculations of the Development of an Undular Bore. *Journal of Fluid Mechanics*, 25, 321-330.
- [87] Peregrine, D.H. (1997) Long Waves on a Beach. *Journal of Fluid Mechanics*, 27, 815-827.
- [88] Rosenau, P. (1986) A Quasi-Continuous Description of a Nonlinear Transmission Line. *Physica Scripta*, 34, 827-829.
- [89] Rosenau, P. (1988) Dynamics of Dense Discrete Systems. *Progress of Theoretical Physics*, 79, 1028-1042.

- [90] Saka, B. Dağ, İ. and Irk, D. (2008) Quintic B-spline Collocation Method for Numerical Solutions of the RLW Equation. *Anziam J.*, 49, 389-410.
- [91] Dağ, İ. Saka, B. and Irk, D. (2006) Galerkin Method for the Numerical Solution of the RLW Equation Using Quintic B-splines. *J. Comput. Appl. Math.*, 190, 532-547.
- [92] Dağ, İ. (2000) Least squares quadratic B-spline finite element method for the regularised long wave equation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 182, 205-215.
- [93] Dağ, İ. Saka, B. and Irk, D. (2004), Application of cubic B-splines for numerical solution of the RLW equation. *Applied Mathematics and Computation*, 159, 373-389.
- [94] Dağ, İ. and Dereli, Y. (2010) Numerical Solution of RLW equation Using Radial Basis Functions. *International Journal of Computer Mathematics*, 87, 63-76.
- [95] Dağ, İ. Doğan, A. and Saka, B. (2003) B-spline collocation methods for numerical solutions of RLW equation. *Internat. J. Comput. Math.*, 80, 743-757.
- [96] Irk, D. (2012) Solitary wave solutions for the regularized long-wave equation. *Physics of Wave Phenomena*, 20, 174-183.
- [97] Dağ, İ. and Dereli, Y. (2008) Numerical Solution of KdV Equation Using Radial Basis Functions. *Applied Mathematical Modelling*, **32**, 535-546.
- [98] Saka, B. (2009) Cosine Expansion Based Differential Quadrature Algorithm for Numerical Solution of the KdV Equation. *Chaos Soliton Fract*, 40, 2181-2190.
- [99] Ali, A.H.A. Gardner, L.R.T. and Gardner G.A. (1993) Numerical studies of the Korteweg-de Vries-Burgers equation using B-spline finite elements. *J. Math. Phys. Sci.*, 79, 37-53.
- [100] Zaki, S.I. (2000) Solitary waves of the Korteweg-de Vries-Burgers' equation. *Comput. Phys. Commun.*, 79, 207-218.
- [101] Park, M.A. (1990) On the Rosenau Equation. *Mathematica Applicada e Computacional*, 9, no. 2, 145-152.
- [102] Park, M.A. (1992) Pointwise Decay Estimate of Solutions of the Generalized Rosenau Equation. *Journal of the Korean Mathematical Society*, 29, 261-280.

- [103] Zuo, J.M. Zhang, Y.M. Zhang, T.D. and Chang, F. (2010) A New Conservative Difference Scheme for the General Rosenau-RLW Equation. *Boundary Value Problems*, 2010, Article ID 516260, 13.
- [104] Atouani, N. and K. Omrani, (2013) Galerkin Finite Element Method for the Rosenau-RLW Equation. *Computers and Mathematics with Applications*, 66, 289-303.
- [105] Mittal, R.C. and Jain, R.K. (2012) Numerical Solution of General Rosenau-RLW Equation Using Quintic B-Splines Collocation Method. *Communication in Numerical Analysis*, 2012, Article ID cna-00129, 16.
- [106] Wongsaijai, B. Pochinapan, K. and Disyadej, T. (2014) A Compact Finite Difference Method for Solving the General Rosenau-RLW Equation. *IAENG International Journal of Applied Mathematics*, 44:4, IJAM 44 4 05.
- [107] Pan, X. and Zhang, L. (2012) Numerical Simulation for General Rosenau-RLW Equation: An Average Linearized Conservative Scheme. *Mathematical Problems in Engineering*, 2012, Article I517818, 15.
- [108] Dereli, Y. (2012) Numerical Solution of the MRLW Equation The Meshless Kernel-Based Method of Lines *International Journal of Nonlinear Science*, 13 No:1, 28-38.
- [109] Mathews, J.H. and Fink K. (2004) Module for Adams-Bashforth-Moulton Method for O.D.E.'s. *Numerical Methods textbooks*.
- [110] Jeffreys, H. and Jeffreys, B. (1988) "The Lipschitz Condition." 1.15 in *Methods of Mathematical Physics Cambridge, England: Cambridge University Press*, p. 53.