İÇSEL METRİK UZAYLAR

Mehmet KILIÇ

Doktora Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Ekim 2015

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Mehmet Kılıç'ın **"İçsel Metrik Uzaylar"** başlıklı Matematik Anabilim Dalındaki Doktora tezi 08.10.2015 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

		Adı - Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	**:**	**Doç.Dr. Yunus ÖZDEMİR**	....
Üye	**:**	**Prof.Dr. Zekeriya ARVASİ**	....
Üye	**:**	**Prof.Dr. Mahmut KOÇAK**	....
Üye	**:**	**Prof.Dr. Bünyamin DEMİR**	....
Üye	**:**	**Doç.Dr. Hakan CEBECİ**	....

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof.Dr. Hasan Ferdi GERÇEL
Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

İÇSEL METRİK UZAYLAR

Mehmet KILIÇ

Anadolu Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Geometri Anabilim Dalı

Danışman: Doç.Dr. Yunus ÖZDEMİR

2015, 70 Sayfa

Bu tezde içsel metrik uzaylarla ve hiperkonvekslik, injektiflik ve sıkı germe kavramlarıyla ilgilenilmiştir. İçsel ve kesin içsel metrik uzayların özellikleri incelendikten sonra tek jeodezik uzayları tanıtılmış, iki tek jeodezik uzayının çarpımının, çarpım uzayı üzerindeki hangi metriklerle tek jeodezik uzayı olacağı tartışılmıştır. $\mathbb{R}^n$ üzerindeki d_1 ve d_∞ metrikleriyle jeodezikler karakterize edilmiştir. Daha sonra injektiflik, hiperkonvekslik ve sıkı germe kavramları tanıtılmış ve bunların birbirleriyle olan ilişkileri incelenmiştir. $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ içindeki bir alt kümenin sıkı germesinin $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ içinde nasıl bir kümeye izometrik olacağı tespit edilmiş ve bu tespitin $\mathbb{R}^n$'ye genelleştirilemeyeceği saptanmıştır.

Anahtar Kelimeler: İçsel Metrik Uzay, Jeodezik, İnjektiflik, Hiperkonvekslik, Sıkı germe.

ABSTRACT

PhD Dissertation

INTRINSIC METRIC SPACES

Mehmet KILIÇ

Anadolu University

Graduate School of Sciences

Mathematics Program

Supervisor: Assoc.Prof.Dr. Yunus ÖZDEMİR

2015, 70 Pages

In this thesis, intrinsic metric spaces and the notions of hyperconvexity, injectivity, tight span are investigated. Properties of intrinsic metric spaces and strictly intrinsic metric spaces are investigated. It is defined the notion of uniquely geodesic space and discussed under what conditions the product of two uniquely geodesic metric spaces is also uniquely geodesic space. Geodesic segment on $\mathbb{R}^n$ associated with the metrics d_1 and d_∞ are characterized. Then the notions of injectivity, hyperconvexity and tight span are defined and relationships between these notions are studied. Tight span of a subset of $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ is examined isometrically and it is seen that this characterization can not be generalized to $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$.

Keywords: Intrinic Metric Space, Geodesic, Injectivity, Hyperconvexity, Tight span.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında ve üzerimde büyük emekleri olan değerli hocam Prof.Dr. Şahin KOÇAK'a ve beni her zaman destekleyen sevgili anneme en içten teşekkürlerimi sunarım.

Mehmet Kılıç

Ekim 2015

İÇİNDEKİLER

Şekiller Dizini

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$L_d(\alpha)$	: α yolunun d metriğine göre uzunluğu
$B(x,r)$	: x merkezli, r yarıçaplı açık yuvar
$\bar{B}(x,r)$	: x merkezli, r yarıçaplı kapalı yuvar
$S_i^{\varepsilon}(x)$	: x'in i. eksen üzerindeki ε işaretli sektörü
$O^{\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n}(x)$	: x'in $\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n$-ortantı
$Ob(\mathcal{C})$	: C kategorisinin objeler ailesi
$C[X,Y]$	: C kategorisi içinde, X objesinden Y objesine morfizmler kümesi
$T(X)$	: X metrik uzayının sıkı germesi
$I^{\varepsilon\beta}(x)$	: x'in $\varepsilon\beta$ ışını

1 GİRİŞ

Jeodezik uzaylar olarak da bilinen (kesin) içsel metrik uzay kavramı metrik geometride önemli bir yere sahiptir. Bir metrik uzay ve bu metrik uzay içinde bir yol verildiği zaman bu yolun uzunluğunu, diğer bölümde yapacağımız üzere, sahip olduğumuz metrik yardımıyla tanımlamak mümkündür. Şu halde bir metrik uzay ve bu metrik uzay içinde iki nokta verildiğinde bu iki noktayı birleştiren ve uzunluğu bu iki nokta arasındaki uzaklığa eşit olan bir yolun var olup olmadığı sorusu akla gelebilir. Eğer verilen herhangi iki nokta için bu mümkün oluyorsa sözü edilen metrik uzaya kesin içsel metrik uzay denir. Eğer bir metrik uzaydan aldığımız herhangi iki nokta için, uzunluğu bu iki nokta arasındaki uzaklığa eşit olan bir yol bulunmasa dahi, uzunluğu bu iki nokta arasındaki uzaklığa istenildiği kadar yakın bir yol bulunabiliyorsa bu metrik uzaya içsel metrik uzay denir. Örneğin standart metrik ile donatılmış düzlem kesin içseldir, ancak onun alt kümesi olan birim çember (aynı metrikle) içsel dahi değildir. Çünkü çember üzerinde antipodal iki nokta arasında uzunluğu π'den küçük olan bir yol bulmak mümkün değildir.

Kesin içsel bir metrik uzay verildiğinde bu uzay içindeki herhangi iki nokta arasında, uzunluğu bu iki nokta arasındaki uzaklığa eşit olan (yeniden parametrize edilmiş yolları bir tutmak kaydıyla) tek bir yol varsa bu uzaya tek jeodezik uzayı denir. İçsel metrik uzaylar kısmında iki tek jeodezik uzayın çarpımının çarpım uzayı üzerinde hangi metriklerle tek jeodezik uzayı olacağı tartışılmıştır. (X, d_X) ve (Y, d_Y) iki tek jeodezik uzay ise $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$ olmak üzere

$$d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2)$$

ve

$$d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\}$$

şeklinde tanımlanan d_1 ve d_∞ metrikleri ile $X \times Y$'nin tek jeodezik uzayı olmayacağına dair örnekler verilmiş ve özgün bir sonuç olarak $p \in (1, \infty)$ için

$$d_p((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt[p]{d_X^p(x_1, x_2) + d_Y^p(y_1, y_2)}$$

olarak tanımlanan d_p metriği ile birlikte $X \times Y$ çarpım uzayının da tek jeodezik uzayı olacağı ispatlanmıştır.

Tez çalışmasında ayrıca, birbirleriyle ilişkili olan injektiflik, hiperkonvekslik ve sıkı germe kavramları irdelenmiştir. Hiperkonvekslik kavramı ve onunla ilşkili olan, bir metrik uzayın hiperkonveks zarfı (veya injektif zarfı) kavramı ilk olarak Aronszajnand-Panitchpakdi [2] ve Isbell [8] tarafından tanıtılmıştır. Yaklaşık yirmi yıl kadar sonra Dress [5], bir metrik uzayın injektif zarfı kavramını “tight span” ismiyle yeniden keşfetmiş ve “sonlu metrik uzayların ağırlıklı çizgelerde optimal temsili” probleminin çözümüne dair yeni yollar açmıştır.

Aronszajnand-Panitchpakdi hiperkonveks metrik uzay kavramını şu şekilde tanımlamışlardır: Bir (X, d) metrik uzayında verilen herhangi $(x_i)_{i\in I}$ noktaları ve her $i, j \in I$ için $d(x_i, x_j) \leq r_i + r_j$ koşulunu sağlayan ve negatif olmayan herhangi $(r_i)_{i\in I}$ sayıları için $\bigcap_{i\in I} \bar{B}(x_i, r_i) \neq \emptyset$ oluyorsa (X, d) metrik uzayına hiperkonveks denir. Ayrıca X hiperkonveks bir metrik uzay ve Y de onu kapsayan herhangi bir metrik uzaysa X'i Y'nin genişletmeyen bir retraksiyonu olarak elde edebileceğimizi ispatlamışlardır (burada genişletmeyen retraksiyonla kastedilen uzaklıkları arttırmayan ve X'in noktalarını sabitleyen bir fonksiyondur).

Isbell konuya kategorik bir açıdan yaklaşmış ve objeleri metrik uzaylar, morfizmleri genişletmeyen dönüşümler olan bir kategori inşaa etmiştir. Bu kategoride bir X injektif objesi aşağıdaki koşulu sağlayan bir metrik uzaydır: $i : Y \hookrightarrow Z$ herhangi bir izometrik gömme ve $f : Y \to X$ bu kategorinin herhangi bir morfizmi ise f'nin Z'ye bir $\tilde{f}$ genişlemesi vardır. Yani öyle bir $\tilde{f} : Z \to X$ morfizmi vardır ki $f = \tilde{f} \circ i$ olur.

Isbell herhangi bir X metrik uzayı için $i : X \to \tilde{X}$ izometrik gömmesiyle birlikte öyle bir $\tilde{X}$ injektif metrik uzayı inşaa etmiştir ki $\tilde{X}$'nın $i(X)$'i kapsayan hiçbir öz alt kümesi injektif değildir. Ayrıca bu $\tilde{X}$'nın izometri farkıyla tek olduğunu göstermiştir ve bu metrik uzayı X'in injektif zarfı olarak adlandırmıştır. Hiperkonveksite ile injektiflik arasındaki bağı anlamak için Khamsi-Espinola [7] iyi bir referanstır. Orada bir metrik uzayın injektif olmasıyla hiperkonveks olmasının eşdeğerliği kanıtlanmış böylece bir metrik uzayın injektif zarfı ile hiperkonveks zarfının izometrik objeler olacağı sonucuna varılmıştır.

Şimdi Isbell'in injektif zarf inşaasını (diğer bir terminolojiyle Dress'in “tight span” (sıkı germe) inşaası) kısaca hatırlatalım: (X, d) herhangi bir metrik uzay olsun. Aşağıdaki iki koşulu sağlayan $f : X \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ fonksiyonlarının kümesi olan $T(X)$'i göz önüne alalım:

i) Her $x, y \in X$ için $d(x, y) \leq f(x) + f(y)$

ii) Her $x \in X$ için $\inf_{y \in X} \{f(x) + f(y) - d(x, y)\} = 0$

Burada ikinci koşul f'nin noktasal olarak minimalliğini garanti eden bir koşuldur. Diğer yandan birinci koşulu sağlayan ve noktasal olarak minimal olan bir f fonksiyonu ikinci koşulu da sağlar ve dolayısıyla $f \in T(X)$ olur.

X'in sıkı germesi $T(X)$ üzerine d_∞ metriği konularak elde edilir:

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$$

Bu tezde ikinci bir özgün sonuç olarak $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ düzleminin kapalı ve kesin içsel her alt kümesinin hiperkonveks olacağı ispatlanmış ve bu sayede bu düzlem içindeki herhangi bir alt kümenin injektif zarfı karakterize edilmiştir: $A \subseteq (\mathbb{R}^2, d_\infty)$ boştan farklı bir alt küme olmak üzere A'yı kapsayan kesin içsel, kapalı ve bu özellikleriyle minimal bir küme, A'nın $T(A)$ sıkı germesine izometriktir. Ayrıca bu teoremin $\mathbb{R}^n$'ye taşınamayacağı tespit edilmiştir.

2 İÇSEL METRİK UZAYLAR

2.1 Yol Uzunluğu, İçsellik ve Jeodezikler

Tanım 2.1. *(X, d) bir metrik uzay ve $\alpha : [0,1] \to X$ bir yol olsun. $[0,1]$ aralığının bir $0 = c_0 < c_1 < \cdots < c_n = 1$ bölüntüsü için $\sum_{i=1}^{n} d(\alpha(c_{i-1}), \alpha(c_i))$ toplamına bakalım. Bu toplamın $[0,1]$ aralığının tüm bölüntüleri üzerinden supremum değerine α'nın uzunluğu denir ve $L_d(\alpha)$ ile gösterilir. Eğer bu supremum değeri bir gerçel sayıya eşitse α'ya rektifiye edilebilir yol denir.*

Tanım 2.2. *(X, d) bir metrik uzay olsun. Eğer her $x, y \in X$ için*

$$d(x, y) = \inf \{L_d(\alpha) |\ \alpha : [0,1] \to X,\ \alpha(0) = x,\ \alpha(1) = y\}$$

eşitliği sağlanıyorsa (X, d)'ye içsel metrik uzay denir. Eğer her $x, y \in X$ için x ile y'yi birleştiren ve $d(x, y) = L_d(\alpha)$ koşulunu sağlayan bir α yolu varsa (yani yukarıdaki infimum aynı zamanda minimum oluyorsa) (X, d)'ye kesin içsel metrik uzay denir.

Örnek 2.1.

a) $(\mathbb{R}^2, d_2)$ *kesin içsel metrik uzaydır.*

b) $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, d_2)$ *içsel metrik uzaydır, ancak kesin içsel değildir.*

c) $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ *aynı metrikle içsel değildir.*

Önerme 2.1. *(X, d) bir metrik uzay ve $\alpha : [0,1] \to X$ bir yol olsun.*

i) *Eğer α, $\alpha(t) = x_0$ şeklinde sabit bir yolsa $L_d(\alpha) = 0$'dır.*

ii) *Eğer $\alpha(0) = x, \alpha(1) = y$ ise $L_d(\alpha) \geq d(x, y)$'dir.*

iii) *$\bar{\alpha} : [0,1] \to X$, $\bar{\alpha}(t) = \alpha(1-t)$ ise $L_d(\bar{\alpha}) = L_d(\alpha)$ olur.*

iv) *$0 < t < 1$ ise $L_d(\alpha) = L_d(\alpha |_{[0,t]}) + L_d(\alpha |_{[t,1]})$ şeklindedir.*

Kanıt.

i) $0 = c_0 < c_1 < \cdots < c_n = 1$, $[0,1]$ aralığının herhangi bir bölüntüsü ise

$$\sum_{i=1}^{n} d(\alpha(c_{i-1}), \alpha(c_i)) = \sum_{i=1}^{n} d(x_0, x_0) = 0$$

olduğundan $L_d(\alpha) = 0$ elde edilir.

ii) $0 = c_0 < c_1 < \cdots < c_n = 1$, $[0,1]$ aralığının herhangi bir bölüntüsü ise üçgen eşitsizliğinden

$$\sum_{i=1}^{n} d(\alpha(c_{i-1}), \alpha(c_i) \geq d(x,y)$$

olur. Öyleyse

$$L_d(\alpha) \geq \sum_{i=1}^{n} d(\alpha(c_{i-1}), \alpha(c_i) \geq d(x,y)$$

olur.

iii) $f : [0,1] \to [0,1]$, $f(t) = 1 - t$ fonksiyonu azalan bir eşlemedir. Bu yüzden $0 = c_0 < c_1 < \cdots < c_n = 1$, $[0,1]$ aralığının herhangi bir bölüntüsü ise $0 = f(c_n) < f(c_{n-1}) < \cdots < f(c_0) = 1$ de $[0,1]$ aralığının bir başka bölüntüsüdür ve

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} d(\bar{\alpha}(f(c_{i-1})), \bar{\alpha}(f(c_i))) &= \sum_{i=1}^{n} d(\bar{\alpha}(1 - c_{i-1}), \bar{\alpha}(1 - c_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} d(\alpha(c_{i-1}), \alpha(c_i)) \end{aligned}$$

olduğundan $L_d(\bar{\alpha}) \geq L_d(\alpha)$ elde edilir. Ayrıca $\bar{\bar{\alpha}} = \alpha$ olduğundan $L_d(\bar{\alpha}) \leq L_d(\alpha)$ ve böylece $L_d(\bar{\alpha}) = L_d(\alpha)$ olduğu görülür.

iv) $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$ ve $t = t_n < t_{n+1} < \cdots < t_m = 1$ sırasıyla $[0,t]$ ve $[t,1]$'in keyfi iki bölüntüsü olsunlar. O zaman

$$\sum_{i=1}^{m} d(\alpha(t_{i-1}), \alpha(t_i)) = \sum_{i=1}^{n} d(\alpha(t_{i-1}), \alpha(t_i)) + \sum_{i=n+1}^{m} d(\alpha(t_{i-1}), \alpha(t_i))$$

olup $L\ _d(\alpha) \geq L_d(\alpha\ |_{([0,t]}) + L_d(\alpha\ |_{[t,1]})$ elde edilir. Diğer yandan $[0,1]$'in herhangi bir $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ bölüntüsü verildiğinde eğer $t \notin \{t_0, t_1, \cdots, t_n\}$ ise t'yi de bu kümeye ekleyerek yeni bir bölüntü oluşturalım. $t_r \leq t \leq t_{r+1}$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} d(\alpha(t_{i-1}), \alpha(t_i)) &\leq \left[\sum_{i=1}^{r} d(\alpha(t_{i-1}), \alpha(t_i)) + d(\alpha(t_r), \alpha(t))\right] \\ &+ \left[d(\alpha(t), \alpha(t_{r+1})) + \sum_{i=r+2}^{n} d(\alpha(t_{i-1}), \alpha(t_i))\right] \end{aligned}$$

olup

$$L_d(\alpha) \leq L_d(\alpha\ |_{([0,t]}) + L_d(\alpha\ |_{[t,1]})$$

ve dolayısıyla

$$L_d(\alpha) = L_d(\alpha \mid_{([0,t])}) + L_d(\alpha \mid_{[t,1]})$$

bulunur.

$\square$

Sonuç 2.2. *(X,d) metrik uzayı verildiğinde*

$$\hat{d}(x,y) = \inf_{\gamma}\{L_d(\gamma) \mid \gamma : [0,1] \to X,\ \gamma(0) = x,\ \gamma(1) = y\}$$

olarak tanımlanan $\hat{d}$ bir metriktir.

Kanıt. $M1)$ $e_x : [0,1] \to X, e_x(t) = x$ ise Önerme 2.1 (i) 'den $L_d(e_x) = 0$ ve dolayısıyla $\hat{d}(x,x) = 0$ olur. $x \neq y$ ise Önerme 2.1 (ii)'den $\hat{d}(x,y) \geq d(x,y) > 0$ elde edilir.

$M2)$ α, x ile y'yi birleştiren bir yolsa $\bar{\alpha}(t) = \alpha(1-t)$ de y ile x'i birleştiren bir yoldur ve benzer şekilde α, y ile x'i birleştiren bir yolsa $\bar{\alpha}(t) = \alpha(1-t)$ de x ile y'yi birleştiren bir yoldur. Böylece Önerme 2.1 (iii) gereğince $L_d(\bar{\alpha}) = L_d(\alpha)$ olduğundan $\hat{d}(x,y) = \hat{d}(y,x)$ elde edilir.

$M3)$ $\hat{d}(x,z) \leq \hat{d}(x,y) + \hat{d}(y,z)$ olduğunu görelim. α, x ile y'yi, β da y ile z'yi birleştiren herhangi iki yol olsun. $\gamma : [0,1] \to X$ yolunu

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & , \quad t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(2t-1) & , \quad t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda Önerme 2.1 (iv) gereğince

$$L_d(\gamma) = L_d(\gamma \mid_{[0,\frac{1}{2}]}) + L_d(\gamma \mid_{[\frac{1}{2},1]}) = L_d(\alpha) + L_d(\beta)$$

olur. Öyleyse $\hat{d}(x,z) \leq \hat{d}(x,y) + \hat{d}(y,z)$ elde edilir (dikkat edilirse $\hat{d}(x,z)$ hesabında infimuma giren γ 'dan başka yollar da olabilir, bu yüzden daha küçük olabilir). $\square$

Sonuç 2.3. *(X,d) metrik uzayında $\alpha : [0,1] \to X$ yolu $\hat{d}-$sürekli ise $d-$süreklidir.*

Kanıt. α, $\hat{d}-$sürekli olduğundan herhangi bir $t_0 \in [0,1]$ için $|t - t_0| \to 0$ ise $\hat{d}(\alpha(t), \alpha(t_0)) \to 0$ olur. O zaman $\hat{d}(x,y) \geq d(x,y)$ olduğundan $t_0 \in [0,1]$ için $|t - t_0| \to 0$ ise $d(\alpha(t), \alpha(t_0)) \to 0$ olup α $d-$süreklidir. $\square$

Önerme 2.4. *(X,d) bir metrik uzay ve $\alpha : [0,1] \to X$ rektifiye edilebilir bir yol olsun. Bu durumda*

$$L_d(\alpha, .) : [0,1] \to \mathbb{R}^{\geq 0}$$

$$L_d(\alpha, t) = L(\alpha \mid_{[0,t]})$$

olarak tanımlanan $L_d(\alpha, .)$ fonksiyonu süreklidir.

Kanıt. $x_0 \in [0,1]$ olsun. α, x_0'da sürekli olduğundan verilen herhangi $\varepsilon > 0$ için $|t - x_0| < \delta$ iken $d(\alpha(t), \alpha(x_0)) < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı vardır. Şimdi $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ bölüntüsünü, her $i = 1, 2, \ldots, n$ için $t_i - t_{i-1} < \delta$ ve $L_d(\alpha) - \sum_{i=1}^{n} d(\alpha(t_{i-1}), \alpha(t_i)) < \frac{\varepsilon}{2}$ koşulları sağlanacak şekilde seçelim. $t_j < x_0 < t_{j+1}$ olsun (Eğer x_0 bir t_j'ye eşitse t_j yerine t_{j-1} alalım). O halde

$$L_d(\alpha \mid_{[t_j, x_0]}) < d(\alpha(t_j), \alpha(x_0)) + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ve

$$L_d(\alpha \mid_{[x_0, t_{j+1}]}) < d(\alpha(x_0), \alpha(t_{j+1})) + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olur. $\delta_0 = \min\{x_0 - t_j, t_{j+1} - x_0\}$ dersek $|t - x_0| < \delta_0$ ise ya $t \in [t_j, x_0]$ ya da $t \in [x_0, t_{j+1}]$ olur. Eğer $t \in [t_j, x_0]$ ise

$$|L_d(\alpha, t) - L_d(\alpha, x_0)| = L_d(\alpha \mid_{[t, x_0]}) < L_d(\alpha \mid_{[t_j, x_0]}) < \varepsilon,$$

eğer $t \in [x_0, t_{j+1}]$ ise

$$|L_d(\alpha, t) - L_d(\alpha, x_0)| = L_d(\alpha \mid_{[x_0, t]}) < L_d(\alpha \mid_{[x_0, t_{j+1}]}) < \varepsilon$$

olur. Bu da $L_d(\alpha, .)$ fonksiyonunun sürekli olduğunu söyler. □

Sonuç 2.5. *(X,d) metrik uzayında $\alpha : [0,1] \to X$ yolu $d-$sürekli ve $d-$rektifiye edilebilir ise $\hat{d}-$süreklidir.*

Kanıt. $t_0 \in [0,1]$ keyfi bir eleman olsun. $L_d(\alpha, .)$ sürekli olduğundan $|t - t_0| \to 0$ iken $|L_d(\alpha, t) - L_d(\alpha, t_0)| = L_d(\alpha \mid_{[t, t_0]}) \to 0$ olur. Öte yandan

$$\hat{d}(\alpha(t), \alpha(t_0)) \leq L_d(\alpha \mid_{[t, t_0]})$$

olduğundan $|t - t_0| \to 0$ için $\hat{d}(\alpha(t), \alpha(t_0)) \to 0$ olup α, t_0 noktasında $\hat{d}-$sürekli olur. □

Önerme 2.6. *(X,d) metrik uzay $\alpha : [0,1] \to X, \alpha(0) = x$ ve $\alpha(1) = y$ yolu $d-$rektifiye edilebilir olsun. Bu durumda $L_{\hat{d}}(\alpha) = L_d(\alpha)$ eşitliği geçerlidir.*

Kanıt. $\hat{d}(x,y) \geq d(x,y)$ olduğundan $L_{\hat{d}}(\alpha) \geq L_d(\alpha)$ elde edilir. Ters eşitsizliği görelim: $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = 1$, $[0,1]$'in herhangi bir bölüntüsü olsun. O zaman $\hat{d}(\alpha(t_{i-1}), \alpha(t_i)) \leq L_d(\alpha \mid_{[t_{i-1},t_i]})$ olur (çünkü sol taraf sağ taraftaki değerlerin α'lar üzerinden infimumuna eşittir). O halde

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{d}(\alpha(t_{i-1}), \alpha(t_i)) \leq \sum_{i=1}^{n} L_d(\alpha \mid_{[t_{i-1},t_i]}) = L_d(\alpha)$$

olup $L_{\hat{d}}(\alpha) \leq L_d(\alpha)$ elde edilir. □

Sonuç 2.7. *Bir (X,d) metrik uzayından elde edilen $(X,\hat{d})$ uzayı içsel bir metrik uzaydır.*

Kanıt. Herhangi $x, y \in X$ için

$$\begin{aligned} \hat{d}(x,y) &= \inf \{L_d(\alpha) \mid \alpha : [0,1] \to X, \alpha(0) = x, \alpha(1) = y\} \\ &= \inf \{L_{\hat{d}}(\alpha) \mid \alpha : [0,1] \to X, \alpha(0) = x, \alpha(1) = y\} \end{aligned}$$

olup, ispat biter. □

Sonuç 2.8. *Bir (X,d) metrik uzayından elde edilen $\hat{d}$ ve $\hat{\hat{d}}$ metrikleri birbirlerine eşitir.*

Kanıt. Herhangi $x, y \in X$ için

$$\begin{aligned} \hat{\hat{d}}(x,y) &= \inf \{L_{\hat{d}}(\alpha) \mid \alpha : [0,1] \to X, \alpha(0) = x, \alpha(1) = y\} \\ &= \inf \{L_d(\alpha) \mid \alpha : [0,1] \to X, \alpha(0) = x, \alpha(1) = y\} = \hat{d}(x,y) \end{aligned}$$

şeklindedir. □

Teorem 2.9. *X bir metrik uzay $X_0 \subseteq X$ yoğun bir alt küme ve Y tam metrik uzay olsun. Bu durumda verilen bir $f : X_0 \to Y$ Lipschitz dönüşümü için, f'nin her Lipschitz sabiti $\widetilde{f}$ için de Lipschitz sabiti olacak şekilde bir tek $\widetilde{f} : X \to Y$ genişlemesi vardır.*

Kanıt. $x \in X$ olsun. $\overline{X}_0 = X$ olduğundan $x_n \to x$ olacak şekilde bir $\{x_n\} \subseteq X_0$ dizisi vardır. f Lipschitz olduğundan her $x, y \in X_0$ için

$$d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$$

olacak biçimde $c > 0$ sayısı vardır. O halde her $i, j \in \mathbb{N}$ için

$$d(f(x_i), f(x_j)) \leq c \cdot d(x_i, x_j)$$

olur. Ayrıca (x_n) dizisi yakınsak olduğundan Cauchy dizisi olup $i, j > N$ iken $d(x_i, x_j) < \dfrac{\varepsilon}{c}$ olacak şekilde $N \in \mathbb{N}$ vardır. Öyleyse $i, j > N$ iken

$$d(f(x_i), f(x_j)) \leq c \cdot d(x_i, x_j) < \varepsilon$$

olup $\{f(x_n)\} \subseteq Y$ bir Cauchy dizisidir. Böylece Y tam bir metrik uzay olduğundan $\{f(x_n)\}$ yakınsaktır.

$$\widetilde{f}(x) := \lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

olarak tanımlayalım. Bu tanımın geçerli olması için $\widetilde{f}(x)$'in seçilen x_n dzisinden bağımsız olduğunu görmeliyiz: y_n, x'e yakınsayan bir başka dizi olsun. O zaman

$$z_n = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}} & , \ n \text{ tekse} \\ y_{\frac{n}{2}} & , \ n \text{ çiftse} \end{cases}$$

dizisi de x'e yakınsar ve yukarıdaki gibi $f(z_n)$ yakınsaktır. Yakınsak bir dizinin her alt dizisi dizinin yakınsadığı noktaya yakınsayacağından $f(x_n)$ ve $f(y_n)$ dizileri $f(z_n)$'nin alt dizileri olarak $f(z_n)$'nin yakınsadığı noktaya yakınsarlar. Dolayısıyla $\widetilde{f}$ iyi tanımlıdır.

Şimdi $c > 0$ sayısı f için bir Lipschitz sabiti olsun. $x, y \in X$ verilsin. X_0 içinde x'e yakınsayan bir (x_n) dizisi ve y'ye yakınsayan bir (y_n) dizisi alalım. O zaman

$$\begin{aligned} d(\widetilde{f}(x), \widetilde{f}(y)) &= \lim_{n\to\infty} d(f_n(x), f_n(y)) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} c \cdot d(x_n, y_n) \\ &\leq c \cdot \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \\ &= c \cdot d(x, y) \end{aligned}$$

olup c'nin $\widetilde{f}$ için de Lipschitz sabiti olduğu görülür. Ayrıca burada $\widetilde{f}$'nin tek türlü inşa edilebileceği açıktır. $\square$

Tanım 2.3. *(X, d) bir metrik uzay $x, y, z \in X$ olsun. Eğer $d(x, y) = \frac{1}{2} \cdot d(x, z)$ ve $d(y, z) = \frac{1}{2} \cdot d(x, z)$ eşitlikleri sağlanıyorsa y'ye x ve z'nin orta noktası denir. Eğer*

$$| d(x, y) - \frac{1}{2} \cdot d(x, z) | \leq \varepsilon$$
$$| d(y, z) - \frac{1}{2} \cdot d(x, z) | \leq \varepsilon$$

eşitsizlikleri sağlanıyorsa y'ye x ve z'nin ε-orta noktası denir.

Teorem 2.10. *(i) (X, d) kesin içsel bir metrik uzay ise X'ten alınan herhangi iki noktanın en az bir orta noktası vardır.*

(ii) (X, d) içsel bir metrik uzay ise X'ten alınan herhangi iki noktanın, verilen her ε için enaz bir ε-orta noktası vardır.

(iii) (X, d) bir tam metrik uzay ise ve X'ten alınan herhangi iki noktanın en az bir orta noktası varsa (X, d) kesin içsel bir metrik uzaydır.

(iv) (X, d) bir tam metrik uzay ise ve X'ten alınan herhangi iki noktanın, her ε için enaz bir ε-orta noktası varsa (X, d) içsel bir metrik uzaydır. [4]

Kanıt. (i) $x, y \in X$ verilsin. (X, d) kesin içsel bir metrik uzay olduğundan $\alpha(0) = x, \alpha(1) = y$ ve $L_d(\alpha) = d(x, y)$ olacak şekilde bir $\alpha : [0, 1] \to X$ yolu vardır. Önerme 2.4 gereğince $L_d(\gamma, .) : [0, 1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve $L_d(\gamma, 0) = 0$ ve $L_d(\gamma, 1) = d(x, y)$ olduğundan ara değer teoreminden $L_d(\gamma, t_0) = \frac{1}{2} d(x, y)$ olacak biçimde $t_0 \in [0, 1]$ vardır. $\gamma(t_0) = z$ diyelim.

$$d(x, z) \leq L_d(\gamma |_{[0,t_0]}) = L_d(\gamma, t_0) = \frac{1}{2} \cdot d(x, y) \tag{2.1}$$

olur. Ayrıca $L_d(\gamma) = d(x, y)$ olduğundan Önerme 2.1 (iv) den

$$L_d(\gamma |_{[t_0,1]}) = \frac{1}{2} \cdot d(x, y)$$

elde edilir. Böylece

$$d(z, y) \leq L_d(\gamma |_{[t_0,1]}) = \frac{1}{2} \cdot d(x, y) \tag{2.2}$$

olur. Dolayısıyla (2.1) ve (2.2)' den

$$d(x, z) = d(z, y) = \frac{1}{2} \cdot d(x, y)$$

olup z, x ve y'nin orta noktsıdır.

(iii) $x, y \in X$ verilsin. $\gamma : [0,1] \to X$, $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$ ve $L_d(\gamma) = d(x,y)$ olacak biçimde bir γ yolu bulmak istiyoruz. γ'yı adım adım tanımlamaya çalışalım: $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$, $x_{\frac{1}{2}}$, x ile y'nin orta noktası olmak üzere $\gamma(\frac{1}{2}) = x_{\frac{1}{2}}$, $x_{\frac{1}{4}}$, x ile $x_{\frac{1}{2}}$'nin orta noktası olmak üzere $\gamma(\frac{1}{4}) = x_{\frac{1}{4}}$, $x_{\frac{3}{4}}$, $x_{\frac{1}{2}}$ ile y'nin orta noktası olmak üzere $\gamma(\frac{3}{4}) = x_{\frac{3}{4}}$ olarak tanımlayalım. Bu şekilde devam ederek her $\frac{n}{2^k} \in [0,1]$ için γ'yı tanımlamış oluruz. Ayrıca herhangi $\frac{n}{2^k}, \frac{m}{2^k} \in [0,1]$ için

$$d\left(\gamma\left(\frac{n}{2^k}\right), \gamma\left(\frac{m}{2^k}\right)\right) = \left|\frac{n}{2^k} - \frac{m}{2^k}\right| \cdot d(x,y)$$

eşitliği geçerlidir. Öyleyse (yukarıdaki eşitliği küçük eşit olarak görürsek) γ bir Lipschitz fonksiyonudur ve $d(x,y)$, γ'nın Lipschitz sabitidir.

$$A = \left\{\frac{n}{2^k} \mid k, n \in \mathbb{N}, n \leq 2^k\right\}$$

olsun. Bu duruma $\bar{A} = [0,1]$ ve X tam olduğundan Teorem 2.9 gereğince γ'nın bir tek $\widetilde{\gamma} : [0,1] \to X$ genişlemesi vardır ve herhangi $t, t' \in [0,1]$ için

$$d(\widetilde{\gamma}(t), \widetilde{\gamma}(t')) \leq |t - t'| \cdot d(x,y)$$

eşitsizliği geçerli olur. Öyleyse $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$, $[0,1]$ aralığının keyfi bir bölüntüsü olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{n} d(\widetilde{\gamma}(t_{i-1}), \widetilde{\gamma}(t_i)) \leq d(x,y) \cdot \sum_{i=1}^{n} |t_i - t_{i-1}| = d(x,y)$$

elde edilir ve dolayısıyla $L(\widetilde{\gamma}) = d(x,y)$'dir.

□

Örnek 2.2. $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\} \cup \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Q}\}$ *kümesini* $\mathbb{R}^2$*'den indirgenen metrikle düşünelim. Bu uzay içseldir fakat bu uzayda herhangi iki noktanın orta noktası var olmasına rağmen kesin içsel değildir. Çünkü tam değil.*

Şimdi (kesin) içsel iki metrik uzay verildiğinde çarpımın (kesin) içsel olup olmayacağı ve (kesin) içsel bir çarpım uzayı verildiğinde çarpanların (kesin) içsel olup olmayacağı sorusuyla ilgileneceğiz.

Uyarı 2.1. *Bir X kümesi üzerinde d_1 ve d_2 denk iki metrik olsa dahi (X, d_1)'in içsel olması (X, d_2)'nin içsel olmasını gerektirmez. Örneğin (S^1, d_2) içsel değildir. Ancak kendisinden üretilen $(S^1, \hat{d}_2)$ (kesin) içsel metriğiyle denktir. Çünkü*

$$\frac{2}{\pi} \cdot \hat{d}_2(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \hat{d}_2(x, y)$$

eşitsizliği geçerlidir.

Önerme 2.11.

a) (X, d_X) ve (Y, d_Y)'nin kesin içsel metrik uzaylar olması için gerek ve yeter koşul $(X \times Y, d_1)$'in kesin içsel olmasıdır.

b) (X, d_X) ve (Y, d_Y)'nin içsel metrik uzaylar olması için gerek ve yeter koşul $(X \times Y, d_1)$'in içsel olmasıdır.

Kanıt. a) $(\Rightarrow)$ $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in X \times Y$ verilsin. X ve Y kesin içsel uzaylar olduğundan $\alpha : [0, 1] \to X$ ve $\beta : [0, 1] \to Y$ yolları $\alpha(0) = x_0$, $\alpha(1) = x_1$, $\beta(0) = y_0$, $\beta(1) = y_1$ ve $L_{d_X}(\alpha) = d_X(x_0, x_1)$, $L_{d_Y}(\beta) = d_Y(y_0, y_1)$ olacak biçimde vardır. Şimdi $\gamma : [0, 1] \to X \times Y$, $\gamma = (\alpha, \beta)$ yolunu ele alalım. $\gamma(0) = (x_0, y_0)$, $\gamma(1) = (x_1, y_1)$ ve γ süreklidir. $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$, $[0, 1]$'in keyfi bir bölüntüsü olmak üzere

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} d_1(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) &= \sum_{i=1}^{n} [d_X(\alpha(t_{i-1}), \alpha(t_i)) + d_Y(\beta(t_{i-1}), \beta(t_i)] \\
&= \sum_{i=1}^{n} d_X(\alpha(t_{i-1}), \alpha(t_i)) + \sum_{i=1}^{n} d_Y(\beta(t_{i-1}), \beta(t_i) \\
&= d_X(x_0, x_1) + d_Y(y_0, y_1)
\end{aligned}$$

olur. Bu son eşitlikte $[0, 1]$'in tüm bölüntüleri üzerinden supremum alınırsa

$$L_{d_1}(\gamma) = d_X(x_0, x_1) + d_Y(y_0, y_1) = d_1((x_0, y_0), (y_0, y_1))$$

elde edilir. Dolayısıyla $(X \times Y, d_1)$ kesin içseldir.

$(\Leftarrow)$ $x_0, x_1 \in X$, $y_0, y_1 \in Y$ verilsin. $(X \times Y, d_1)$ kesin içsel olduğundan $\gamma : [0, 1] \to X \times Y$, $\gamma(0) = (x_0, y_0)$, $\gamma(1) = (x_1, y_1)$ ve

$$L_{d_1}(\gamma) = d_1((x_0, y_0), (x_1, y_1)) = d_X(x_0, x_1) + d_Y(y_0, y_1)$$

olacak şekilde γ yolu vardır. $\gamma = (\alpha, \beta)$ olsun. $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ $[0,1]$'in keyfi bir bölüntüsü ise

$$\begin{aligned}
d_X(x_0, x_1) + d_Y(y_0, y_1) &= d_1((x_0, y_0), (x_1, y_1)) = \sum_{i=1}^{n} d_1(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} [d_X(\alpha(t_{i-1}), \alpha(t_i)) + d_Y(\beta(t_{i-1}), \beta(t_i))] \\
&= \sum_{i=1}^{n} d_X(\alpha(t_{i-1}), \alpha(t_i)) + \sum_{i=1}^{n} d_Y(\beta(t_{i-1}), \beta(t_i))
\end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir. Ayrıca üçgen eşitsizliğinden

$$\sum_{i=1}^{n} d_X(\alpha(t_{i-1}), \alpha(t_i)) \geq d_X(x_0, x_1)$$

ve

$$\sum_{i=1}^{n} d_Y(\beta(t_{i-1}), \beta(t_i)) \geq d_Y(y_0, y_1)$$

olduğundan

$$\sum_{i=1}^{n} d_X(\alpha(t_{i-1}), \alpha(t_i)) = d_X(x_0, x_1)$$

ve

$$\sum_{i=1}^{n} d_Y(\beta(t_{i-1}), \beta(t_i)) = d_Y(y_0, y_1)$$

elde edilir. Böylece son eşitliklerin sol tarafından supremum alınarak $L_{d_X}(\alpha) = d_X(x_0, x_1)$ ve $L_{d_Y}(\beta) = d_Y(y_0, y_1)$ olduğu görülür. Dolayısıyla X ve Y kesin içseldir.

$\square$

Tanım 2.4.

1) (X, d) bir metrik uzay, $\gamma : [0,1] \to X$ bir yol olsun. Eğer her $t \in [0,1]$ için

$$L_d(\gamma, t) = t \cdot L_d(\gamma)$$

eşitliği sağlanıyorsa γ'ya doğal yol denir.

2) Eğer bir doğal yolun uzunluğu, başlangıç ve bitiş noktaları arasındaki uzaklığa eşitse bu yola jeodezik denir.

Önsav 2.12.

i) X bir metrik uzay $\gamma, \tilde{\gamma} : [0,1] \to X$ iki yol olsun. Eğer $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \varphi$ olacak şekile azalmayan sürekli ve örten bir $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ fonksiyonu varsa $L(\gamma) = L(\tilde{\gamma})$'dır.

ii) $\gamma : [0,1] \to X$ rektifiye edilebilir bir yol olsun. Bu durumda $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \varphi$ eşitliği sağlanacak şekilde $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ sürekli, azalmayan ve örten fonksiyonu ve $\tilde{\gamma} : [0,1] \to X$ doğal yolu vardır.

Önerme 2.13.

a) (X, d_X) ve (Y, d_Y)'nin kesin içsel metrik uzaylar olması için gerek ve yeter koşul $(X \times Y, d_\infty)$'un kesin içsel olmasıdır.

b) (X, d_X) ve (Y, d_Y)'nin içsel metrik uzaylar olması için gerek ve yeter koşul $(X \times Y, d_\infty)$'un içsel olmasıdır.

Kanıt. a) $(\Rightarrow)$ $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in X \times Y$ verilsin. X ve Y kesin içsel uzaylar olduğundan $\alpha : [0,1] \to X$ ve $\beta : [0,1] \to Y$ yolları $\alpha(0) = x_0$, $\alpha(1) = x_1$, $\beta(0) = y_0$, $\beta(1) = y_1$ ve $L_{d_X}(\alpha) = d_X(x_0, x_1)$, $L_{d_Y}(\beta) = d_Y(y_0, y_1)$ olacak biçimde vardır. $\tilde{\alpha}$ ve $\tilde{\beta}$ sırasıyla α ve β'dan elde edilen doğal yollar olsunlar. $\gamma = (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ olarak tanımlayalım. $t_1, t_2 \in [0,1]$ ve $t_2 > t_1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
d_\infty(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) &= \max\{d_X(\tilde{\alpha}(t_1), \tilde{\alpha}(t_2)), d_Y(\tilde{\beta}(t_1), \tilde{\beta}(t_2))\} \\
&= \max\{L_{d_X}(\tilde{\alpha}, t_2) - L_{d_X}(\tilde{\alpha}, t_1), L_{d_Y}(\tilde{\beta}, t_2) - L_{d_Y}(\tilde{\beta}, t_1) \\
&= (t_2 - t_1) \cdot \max\{L_{d_X}(\tilde{\alpha}), L_{d_Y}(\tilde{\beta})\} \\
&= (t_2 - t_1) \cdot d_\infty((x_0, y_0), (x_1, y_1))
\end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir. Öyleyse $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ keyfi bir bölüntü ise

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} d_\infty(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) &= d_\infty((x_0, y_0), (x_1, y_1)) \cdot \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \\
&= d_\infty((x_0, y_0), (x_1, y_1))
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $L_{d_\infty}(\gamma) = d_\infty((x_0, y_0), (x_1, y_1))$ olup $(X \times Y, d_\infty)$ kesin içseldir.

($\Leftarrow$) $x_0, x_1 \in X$ verilsin. Bir $y \in Y$ alalım ve sabitleyelim. $(x_0, y), (x_1, y) \in X \times Y$ ve $(X \times Y, d_\infty)$ kesin içsel olduğundan

$$\gamma = (\alpha, \beta) : [0,1] \to X \times Y, \gamma(0) = (x_0, y), \gamma(1) = (x_1, y)$$

ve

$$L_{d_\infty}(\gamma) = d_\infty((x_0, y), (x_1, y)) = d_X(x_0, x_1)$$

olacak şekilde bir γ yolu vardır. $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ herhangi bir bölüntü olmak üzere

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} d_X(\alpha(t_{i-1}), \alpha(t_i)) &\leq \sum_{i=1}^{n} d_\infty(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) \\ &= d_\infty((x_0, y), (x_1, y)) \\ &= d_X(x_0, x_1) \end{aligned}$$

elde edilir. Öyleyse $L_{d_X}(\alpha) = d_X(x_0, x_1)$ olup (X, d_X) kesin içseldir. (Y, d_Y)'nin kesin içsel olduğu da benzer şekilde görülebilir.

□

2.2 Tek Jeodezik Uzayları

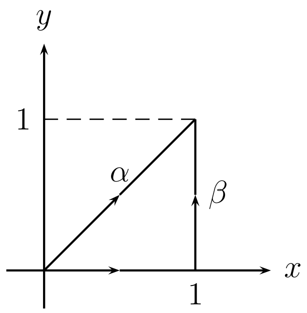
Tanım 2.5. *(X, d) bir metrik uzay olsun. Eğer X'ten alınan herhangi iki nokta için, bu iki noktayı birleştiren tek bir jeodezik varsa (X, d) uzayına tek jeodezik uzayı denir.*

Uyarı 2.2.

1) X ve Y metrik uzayları tek jeodezik uzayları ise $(X \times Y, d_1)$ de tek jeodezik uzayı olmak zorunda değildir. Çünkü $X = Y = \mathbb{R}$ alırsak $(0,0), (1,1) \in \mathbb{R}^2$ için $\alpha, \beta : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (t,t)$ ve

$$\beta(t) = \begin{cases} (2t, 0) & , \quad t \in [0, \frac{1}{2}] \\ (1, 2t-1) & , \quad t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

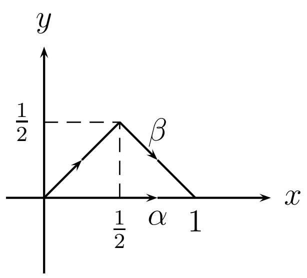
olarak tanımlanan α ve β yolları (bakınız Şekil 2.1) $(0,0)$, $(1,1)$ noktalarını birleştiren doğal yollardır ve $L_{d_1}(\alpha) = L_{d_1}(\beta) = d_1((0,0)(1,1)) = 2$ eşitliği geçerlidir. Dolayısıyla $(\mathbb{R}^2, d_1)$ tek jeodezik uzayı değildir.



Şekil 2.1: $(\mathbb{R}^2, d_1)$ içinde $(0,0)$ ile $(1,1)$ arasında iki farklı jeodezik

2) X ve Y metrik uzayları tek jeodezik uzayları ise $(X \times Y, d_\infty)$ da tek jeodezik uzayı olmak zorunda değildir. Çünkü $X = Y = \mathbb{R}$ alırsak $(0,0), (1,0) \in \mathbb{R}^2$ için $\alpha, \beta : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (t,0)$ ve

$$\beta(t) = \begin{cases} (t,t) & , \quad t \in [0, \frac{1}{2}] \\ (t, 1-t) & , \quad t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$



Şekil 2.2: $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ içinde $(0,0)$ ile $(1,0)$ arasında iki farklı jeodezik

olarak tanımlanan α ve β yolları (bakınız Şekil 2.2) $(0,0)$, $(1,0)$ noktalarını birleştiren doğal yollardır ve

$$L_{d_\infty}(\alpha) = L_{d_\infty}(\beta) = d_\infty((0,0)(1,0)) = 1$$

eşitliği geçerlidir. Dolayısıyla $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ tek jeodezik uzayı değildir.

Önerme 2.14. *(X, d_X) ve (Y, d_Y) metrik uzaylarından elde edilen $(X \times Y, d_1)$ uzayı tek jeodezik uzayı ise (X, d_X) ve (Y, d_Y) de tek jeodezik uzayı olurlar.*

Kanıt. $(X\times Y, d_1)$ tek jeodezik uzayı olduğundan kesin içseldir. Öyleyse Önerme 2.11 gereğince (X, d_X) ve (Y, d_Y) de kesin içsel olur. Ayrıca yine Önerme 2.11'in kanıtından bildiğimiz üzere $\alpha : [0,1] \to X$ ve $\beta : [0,1] \to Y$ en kısa yollar ise $\gamma = (\alpha, \beta)$'da $X\times Y$'de bir en kısa yoldur (Burada yolun en kısa olmasından kastedeilen, uzunluğunun tam olarak başlangıç ve bitiş noktaları arasındaki uzaklığa eşit olmasıdır). O halde α ve β doğal yollar (jeodezik) ise $\gamma = (\alpha, \beta)$'nında doğal yol (jeodezik) olduğunu göstermek ispatı tamamlayacaktır. Çünkü, örneğin (X, d_X) tek jeodezik uzayı değilse X'te öyle iki nokta bulunabilir ki bu iki noktayı birleştiren α ve $\overline{\alpha}$ gibi iki jeodezik bulunabilir. Ancak, o zaman β, Y'de herhangi iki noktayı birleştiren bir jeodezik ise (α, β) ve $(\overline{\alpha}, \beta)$, $X\times Y$'de aynı iki noktayı birleştiren farklı iki jeodezik olurlar ve bu durum $X\times Y$'nin tek jeodezik uzayı olması ile çelişir. Şimdi α ile β sırasıyla X'te x_0 ile x_1'i ve Y'de y_0 ile y_1'i birleştiren jeodezikler, $t \in [0,1]$ olsun ve $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$ bölüntüsünü alalım.

$$\begin{aligned}
L(\gamma, t) &= \sum_{i=1}^{n} d_1(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} [d_X(\alpha(t_{i-1}), \alpha(t_i)) + d_Y(\beta(t_{i-1}), \beta(t_i))] \\
&= \sum_{i=1}^{n} d_X(\alpha(t_{i-1}), \alpha(t_i)) + \sum_{i=1}^{n} d_Y(\beta(t_{i-1}), \beta(t_i)) \\
&= L(\alpha, t) + L(\beta, t) = t \cdot L(\alpha) + t \cdot L(\beta) \\
&= t \cdot [d_X(x_0, x_1) + d_Y(y_0, y_1)] = t \cdot L(\gamma)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir ve böylece γ doğal yoldur. □

Önerme 2.15. *(X, d_X) ve (Y, d_Y) metrik uzaylarından elde edilen $(X \times Y, d_\infty)$ uzayı tek jeodezik uzayı ise (X, d_X) ve (Y, d_Y) de tek jeodezik uzayı olurlar.*

Kanıt. α ile β sırasıyla X'te x_0 ile x_1'i ve Y'de y_0 ile y_1'i birleştiren jeodezikler, $t \in [0,1]$ olsun ve $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$ bölüntüsünü alalım.

$$
\begin{aligned}
L(\gamma, t) &= \sum_{i=1}^{n} d_\infty(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} maks\{d_X(\alpha(t_{i-1}), \alpha(t_i)), d_Y(\beta(t_{i-1}), \beta(t_i))\} \\
&= \sum_{i=1}^{n} maks\{(t_i - t_{i-1}) \cdot d_X(x_0, x_1), (t_i - t_{i-1}) \cdot d_Y(y_0, y_1)\} \\
&= t \cdot maks\{d_X(x_0, x_1), d_Y(y_0, y_1)\} \\
&= t \cdot L_{d_\infty}(\gamma)
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir ve dolayısıyla γ doğal yoldur. Ayrıca Önerme 2.13'ün kanıtından bildiğimiz üzere γ bir en kısa yoldur. Böylece önceki önermenin kanıtında tartışıldığı üzere (X, d_X) ve (Y, d_Y) tek jeodezik uzayı olurlar. □

Teorem 2.16. *(X, d_X) ve (Y, d_Y) iki metrik uzay, $x_0, x_1 \in X$ ve $y_0, y_1 \in Y$ olsun.*

i) α ve β sırasıyla X'te x_0 ile x_1'i ve Y'de y_0 ile y_1'i birleştiren jeodezikler ise $\gamma = (\alpha, \beta)$ da $(X \times Y, d_2)$'de (x_0, y_0) ile (x_1, y_1)'i birleştiren bir jeodeziktir.

ii) $\gamma = (\alpha, \beta)$, $(X \times Y, d_2)$'de (x_0, y_0) ile (x_1, y_1)'i birleştiren bir jeodezik ise α ve β sırasıyla X'te x_0 ile x_1'i ve Y'de y_0 ile y_1'i birleştiren jeodezik olurlar.

Kanıt. i) Öncelikle herhangi bir $t \in [0, 1]$ için

$$d_2((x_0, y_0), (x_1, y_1)) = d_2((x_0, y_0), \gamma(t)) + d_2(\gamma(t), (x_1, y_1))$$

olduğunu gösterelim: Kısalık için

$$d_X(x_0, x_1) = a, \; d_Y(y_0, y_1) = b,$$

$$d_X(x_0, \alpha(t)) = c, \; d_Y(y_0, \beta(t)) = d,$$

$$d_X(\alpha(t), x_1) = e, \; d_Y(\beta(t), y_1) = f$$

diyelim. α ve β jeodezik olduklarından en kısa yol olurlar ve $a = c + e$ ve $b = d + f$ eşitlikleri geçerli olur. Ayrıca α ve β doğal yol olduklarından

$$t = \frac{d(x_0, \alpha(t))}{d(x_0, x_1)} = \frac{d(y_0, \beta(t))}{d(y_0, y_1)}$$

yani

$$t = \frac{c}{c+e} = \frac{d}{d+f}$$

olur. Öylese

$$\begin{aligned}
0 = (cf-de)^2 \;&\Rightarrow\; 2cdef = c^2f^2 + d^2e^2 \\
&\Rightarrow\; c^2e^2 + 2cdef + d^2f^2 = c^2e^2 + c^2f^2 + d^2e^2 + d^2f^2 \\
&\Rightarrow\; ce + df = \sqrt{c^2e^2 + c^2f^2 + d^2e^2 + d^2f^2} \\
&\Rightarrow\; c^2 + 2ce + e^2 + d^2 + 2df + f^2 = c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + \\
&\quad\; 2\sqrt{(c^2+d^2)(e^2+f^2)} \\
&\Rightarrow\; \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{c^2+d^2} + \sqrt{e^2+f^2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Yani gerçekten

$$d_2((x_0,y_0),(x_1,y_1)) = d_2((x_0,y_0),\gamma(t)) + d_2(\gamma(t),(x_1,y_1))$$

eşitliği doğru olur. O halde α ve β kısıtlandıkları her alt aralıkta da jeodezik olmaya devam edeceklerinden $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ herhangi bir bölüntü ise

$$d_2((x_0,y_0),\gamma(t_1)) + d_2(\gamma(t_1),\gamma(t_2)) = d_2((x_0,y_0),\gamma(t_2))$$

$$d_2((x_0,y_0),\gamma(t_2)) + d_2(\gamma(t_2),\gamma(t_3)) = d_2((x_0,y_0),\gamma(t_3))$$

$$\dots$$

$$d_2((x_0,y_0),\gamma(t_{n-1})) + d_2(\gamma(t_{n-1}),\gamma(t_n)) = d_2((x_0,y_0),\gamma(t_n))$$

ve böylece

$$\sum_{i=1}^{n} d_2(\gamma(t_{i-1}),\gamma(t_i)) = d_2((x_0,y_0),(x_1,y_1))$$

elde edilir. Öyleyse $L_{d_2}(\gamma) = d_2((x_0,y_0),(x_1,y_1))$ olur. Ayrıca α ve β doğal yollar olduğundan

$$\begin{aligned}
L_{d_2}(\gamma,t) &= \sqrt{d_X^2(x_0,\alpha(t)) + d_Y^2(y_0,\beta(t))} \\
&= \sqrt{(t\cdot d_X(x_0,x_1))^2 + (t\cdot d_Y(y_0,y_1))^2} \\
&= t\cdot\sqrt{d_X^2(x_0,x_1) + d_Y^2(y_0,y_1)} \\
&= t\cdot d_2(\gamma)
\end{aligned}$$

olup γ da doğal yoldur. Öyleyse γ bir jeodeziktir.

ii) Öncelikle keyfi bir $t \in [0,1]$ için

$$\begin{cases} d_X(x_0,x_1) = d_X(x_0,\alpha(t)) + d_X(\alpha(t),x_1) \\ d_Y(y_0,y_1) = d_Y(y_0,\beta(t)) + d_Y(\beta(t),y_1) \end{cases} \tag{2.3}$$

olduğunu gösterelim. Bunun için bu iki eşitlikten en az birinin doğru olmadığını varsayalım. Yani $d_X(x_0,x_1) = a$, $d_Y(y_0,y_1) = b$, $d_X(x_0,\alpha(t)) = c$, $d_Y(y_0,\beta(t)) = d$, $d_X(\alpha(t),x_1) = e$, $d_Y(\beta(t),y_1) = f$ olmak üzere $a < c+e$ ve $b < d+f$ eşitsizliklerinden en az birinin geçerli olduğunu varsayalım. $L_{d_2}(\gamma) = d_2((x_0,y_0),(x_1,y_1))$ olduğundan

$$\begin{aligned}
& \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{c^2+d^2} + \sqrt{e^2+f^2} \\
\Rightarrow\ & a^2+b^2 = c^2+d^2+e^2+f^2+2\sqrt{(c^2+d^2)(e^2+f^2)} \\
\Rightarrow\ & (c+e)^2+(d+f)^2 > c^2+d^2+e^2+f^2+2\sqrt{(c^2+d^2)(e^2+f^2)} \\
\Rightarrow\ & ce+df > \sqrt{c^2e^2+c^2f^2+d^2e^2+d^2f^2} \\
\Rightarrow\ & c^2e^2+2cdef+d^2f^2 > c^2e^2+c^2f^2+d^2e^2+d^2f^2 \\
\Rightarrow\ & 2cdef > c^2f^2+d^2e^2 \\
\Rightarrow\ & 0 > (cf-de)^2
\end{aligned}$$

olup çelişkiye varılır. Öyleyse (2.3) ile gösterilen eşitlikler doğrudur. O halde γ kısıtlandığı her alt aralıkta da jeodezik olmaya devam edeceğinden $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ herhangi bir bölüntü ise

$$d_X(x_0,\alpha(t_1)) + d_X(\alpha(t_1),\alpha(t_2)) = d_X(x_0,\alpha(t_2))$$

$$d_X(x_0,\alpha(t_2)) + d_X(\alpha(t_2),\alpha(t_3)) = d_X(x_0,\alpha(t_3))$$

$$\ldots$$

$$d_X(x_0,\alpha(t_{n-1})) + d_X(\alpha(t_{n-1}),\alpha(t_n)) = d_X(x_0,\alpha(t_n))$$

ve böylece

$$\sum_{i=1}^{n} d_X(\alpha(t_{i-1}),\alpha(t_i)) = d_X(x_0,x_1)$$

elde edilir. Öyleyse $L_{d_X}(\alpha) = d_X((x_0,x_1)$ olur. Yani α bir en kısa yoldur. Tabii β da benzer şekilde bir en kısa yol olur. Şimdi α ve β'nın doğal yollar olduklarını gösterelim: Yukarıdaki hesap gereği $0 = (cf-de)^2$ olur ve buradan

$$\frac{c}{e} = \frac{d}{f}$$

yani

$$\frac{d_X(x_0, \alpha(t))}{d_X(\alpha(t), x_1)} = \frac{d_Y(y_0, \beta(t))}{d_Y(\beta(t), y_1)}.$$

Öyleyse (2.3) eşitliklerinden

$$\frac{d_X(x_0, \alpha(t))}{d_X(x_0, x_1)} = \frac{d_Y(y_0, \beta(t))}{d_Y(y_0, y_1)} = k$$

elde edilir. Şimdi k'nın t'ye eşit olduğunu göstermeliyiz. γ jeodezik olduğundan

$$\begin{aligned}
L_{d_2}(\gamma, t) &= t \cdot L_{d_2}(\gamma) = t \cdot d_2((x_0, y_0), (x_1, y_1)) \\
&= t \cdot \sqrt{d_X^2(x_0, x_1) + d_Y^2(y_0, y_1)} \\
&= t \cdot \sqrt{\left[\frac{1}{k} \cdot d_X(x_0, \alpha(t))\right]^2 + \left[\frac{1}{k} \cdot d_Y(y_0, \beta(t))\right]^2} \\
&= \frac{t}{k} \cdot \sqrt{d_X^2(x_0, \alpha(t)) + d_Y^2(y_0, \beta(t))} \\
&= \frac{t}{k} \cdot L_{d_2}(\gamma, t)
\end{aligned}$$

elde edilir. Öyleyse $t = k$ olup ispat biter. □

Sonuç 2.17. *(X, d_X) ve (Y, d_Y) metrik uzaylarının (kesin) içsel olması için gerek ve yeter koşul $(X \times Y, d_2)$'nin (kesin) içsel olmasıdır.*

Sonuç 2.18. *(X, d_X) ve (Y, d_Y) metrik uzaylarının tek jeodezik uzayı olması için gerek ve yeter koşul $(X \times Y, d_2)$'nin tek jeodezik uzayı olmasıdır.*

Kanıt. (X, d_X) ve (Y, d_Y) metrik uzayları tek jeodezik uzayı olduğu halde $(X \times Y, d_2)$'nin tek jeodezik uzayı olmadığını varsayalım. O zaman $X \times Y$'de (x_0, y_0) ve (x_1, y_2) gibi öyle iki nokta vardır ki bu iki noktayı birleştiren $\gamma_1 = (\alpha_1, \beta_1)$ ve $\gamma_2 = (\alpha_2, \beta_2)$ gibi farklı iki jeodezik vardır (burada $(X \times Y, d_2)$ kesin içsel bir uzay olacağından herhangi iki nokta arasında hiçbir jeodeziğin bulunmaması mümkün değildir). O zaman $\alpha_1 \neq \alpha_2$ veya $\beta_1 \neq \beta_2$ olur. Ama o zaman α_1 ve α_2, X'te x_0 ve x_1 noktalarını birleştiren farklı iki jeodezik olurlar veya β_1 ve β_2, Y'de y_0 ve y_1 noktalarını birleştiren farklı iki jeodezik olurlar. Bu durum varsayımla çeliştiğinden $(X \times Y, d_2)$ tek jeodezik uzayıdır.

Şimdi $(X \times Y, d_2)$ tek jeodezik uzayı olduğu halde (X, d_X)'in tek jeodezik uzayı olmadığını varsayalım. O zaman X'te x_0 ve x_1 gibi öyle iki nokta vardır ki bunları birleştiren α_1 ve α_2 gibi iki farklı jeodezik bulunabilir. Fakat o zaman

$e_{y_0} : [0,1] \to Y$, $e_{y_0}(t) = y_0$ olmak üzere (α_1, e_{y_0}) ve (α_2, e_{y_0}), $X \times Y$'de (x_0, y_0) ve (x_1, y_0) noktalarını birleştiren farklı iki jeodezik olurlar. Bu durum $(X \times Y, d_2)$'nin tek jeodezik uzayı olmasıyla çeliştiğinden (X, d_X) tek jeodezik uzayı olur. Benzer şekilde (Y, d_Y)'de tek jeodezik uzayı olur. □

Teorem 2.19.

i) *(X, d) tek jeodezik uzayı ise X'ten alınan her nokta çifti için tek bir orta nokta vardır.*

ii) *(X, d) tam metrik uzaysa ve X'ten alınan her nokta çifti için tek bir orta nokta varsa (X, d) tek jeodezik uzayıdır.*

Kanıt. i) $x, z \in X$ verilsin ve x ile z'nin y_1 ve y_2 gibi iki farklı orta noktasının olduğunu varsayalım (X kesin içsel olduğundan Teorem 2.10 (i) gereğince en az bir orta noktanın varlığını biliyoruz). (X, d) tek jeodezik uzayı olduğundan x ile y_1'i birleştiren α_1, y_1 ile z'yi birleştiren β_1, x ile y_2'yi birleştiren α_2 ve y_2 ile z'yi birleştiren β_2 jeodezikleri vardır. Şimdi $i = 1, 2$ için $\gamma_i : [0,1] \to X$

$$\gamma_i = (\alpha_i * \beta_i)(t) = \begin{cases} \alpha_i(2t) & , \quad t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta_i(2t-1) & , \quad t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

yollarını tanımlayalım. α_i ve β_i'ler doğal yol olduklarından γ_i'ler de doğal yol olurlar. Ayrıca

$$\begin{aligned} L(\gamma_i) &= L(\gamma_i \mid_{[0,\frac{1}{2}]}) + L(\gamma_i \mid_{[\frac{1}{2},1]}) = L(\alpha_i) + L(\beta_i) \\ &= d(x, y_i) + d(y_i, z) = d(x, y) \end{aligned}$$

olduğundan γ_i'ler x ve y noktalarını birleştiren farklı iki jeodezik olurlar ve bu durum X'in tek jeodezik uzayı olmasıyla çelişir.

ii) $x, y \in X$ olsun ve x ile y'yi birleştiren α ve β gibi iki jeodezik olduğunu varsayalım (X tam uzay olduğundan ve X içindeki her nokta çiftinin bir orta noktası var olduğundan Teorem 2.10 (iii) gereğince X kesin içsel bir uzaydır ve dolayısıyla x ile y'yi birleştiren en az bir jeodezik vardır). O zaman x ile y'nin tek orta noktası olduğundan $\alpha(\frac{1}{2}) = \beta(\frac{1}{2})$, x ile $\alpha(\frac{1}{2})$'nin tek orta noktası olduğundan $\alpha(\frac{1}{4}) = \beta(\frac{1}{4})$, $\alpha(\frac{1}{2})$ ile y'nin tek orta noktası olduğundan $\alpha(\frac{3}{4}) = \beta(\frac{3}{4})$, bu şekilde devam edilerek

$$A = \left\{ \frac{n}{2^k} \mid n \leq 2^k,\ n, k \in \mathbb{Z}^{\geq 0} \right\}$$

kümesi üzerinde α ve β'nın eşit olduklarını söyleyebiliriz. $\bar{A} = [0,1]$ olduğundan herhangi $t \in [0,1]$ için terimleri A kümesinde olan ve t'ye yakınsayan bir (x_n) dizisi vardır. Öyleyse α ve β sürekli olduklarından

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \alpha(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} \alpha(x_n) = \lim_{n\to\infty} \beta(x_n) \\ &= \beta(\lim_{n\to\infty} x_n) = \beta(t) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla X tek jeodezik uzayıdır.

□

Sonuç 2.20. *(X, d) jeodezik uzaysa (kesin içsel) ve X'ten alınan her nokta çifti için tek bir orta nokta varsa (X, d) tek jeodezik uzayıdır.*

Teorem 2.21. *i) (X, d_X) ve (Y, d_Y) tam ve kesin içsel metrik uzaylar ise $(X \times Y, d_p)$ de kesin içseldir.*

ii) $(X \times Y, d_p)$ kesin içsel bir metrik uzaysa (X, d_X) ve (Y, d_Y) uzayları da kesin içseldir.

Kanıt. i) (X, d_X) ve (Y, d_Y) tam uzaylar olduğundan $(X \times Y, d_p)$ de tamdır. Bu yüzden $(X \times Y, d_p)$ içindeki herhangi iki noktanın, orta noktalarının varlığını göstermek kanıtı tamamlayacaktır. $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in X \times Y$ verilsin. X ve Y kesin içsel uzaylar olduğundan x_0 ve x_1'in X'te, y_0 ve y_1'in Y'de en az birer tane orta noktaları vardır. Bunlara sırasıyla $\hat{x}$ ve $\hat{y}$ diyelim. O zaman

$$\begin{cases} d_X(x_0, \hat{x}) = d_X(\hat{x}, x_1) = \frac{1}{2} \cdot d_X(x_0, x_1) \\ d_Y(y_0, \hat{y}) = d_Y(\hat{y}, y_1) = \frac{1}{2} \cdot d_Y(y_0, y_1) \end{cases}$$

eşitlikleri sağlanır. Öyleyse

$$\begin{aligned}
d_p((x_0,y_0),(\hat{x},\hat{y})) &= \sqrt[p]{d_X^p(x_0,\hat{x})+d_Y^p(y_0,\hat{y})} \\
&= \sqrt[p]{\left(\frac{1}{2}\cdot d_X(x_0,x_1)\right)^p+\left(\frac{1}{2}\cdot d_Y(y_0,y_1)\right)^p} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\sqrt[p]{d_X^p(x_0,x_1)+d_Y^p(y_0,y_1)} \\
&= \frac{1}{2}\cdot d_p((x_0,y_0),(x_1,y_1))
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$d_p((\hat{x},\hat{y}),(x_1,y_1)) = \frac{1}{2}\cdot d_p((x_0,y_0),(x_1,y_1))$$

olur ve dolayısıyla $(\hat{x},\hat{y})$ noktası (x_0,y_0) ile (x_1,y_1)'in orta noktasıdır.

ii) $x_0,x_1\in X$ verilsin. Herhangi bir $y\in Y$ alalım ve sabitleyelim. $(X\times Y,d_p)$ kesin içsel olduğundan (x_0,y) ve (x_1,y) noktalarını birleştiren $\gamma=(\alpha,\beta)$ gibi bir jeodezik vardır. $0=t_0<t_1<\cdots<t_n=1$ keyfi bir bölüntü olmak üzere

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} d_X(\alpha(t_{i-1}),\alpha(t_i)) &\leq \sum_{i=1}^{n} d_p(\gamma(t_{i-1}),\gamma(t_i)) \\
&= d_p((x_0,y),(x_1,y)) \\
&= d_X(x_0,x_1)
\end{aligned}$$

olup $L_d(\alpha)=d_X(x_0,x_1)$ elde edilir.

□

Önsav 2.22. *$a\in\mathbb{R}^{>0}$, $0<r\leq a$ ve $p>1$ olsun. Bu durumda*

$$2a^p<(a-r)^p+(a+r)^p$$

eşitsizliği geçerlidir.

Kanıt. Eğer $r=a$ ise $p>1$ için $2<2^p$ olduğundan eşitsizlik geçerlidir. Şimdi $0<r<a$ durumuna bakalım: $p>1$ ise $f:\mathbb{R}^{>0}\to\mathbb{R}^{>0}$, $f(x)=x^p$ fonksiyonu kesin konvekstir (çünkü $f''(x)>0$ dır). Öyleyse $x,y\in\mathbb{R}^{>0}$ ve $t\in(0,1)$ için

$$f((1-t)x+ty)<(1-t)\cdot f(x)+t\cdot f(y)$$

olur. $x = a - r$, $y = a + r$ ve $t = \frac{1}{2}$ alırsak

$$a^p < \frac{1}{2}(a-r)^p + \frac{1}{2}(a+r)^p$$

bulunur ve bu kanıtlamak istediğimiz eşitsizliktir. □

Teorem 2.23.

i) (X, d_X) *ve* (Y, d_Y) *tam ve tek jeodezik uzaylar ise* $(X \times Y, d_p)$ *de tek jeodezik uzayıdır.*

ii) $(X \times Y, d_p)$ *tek jeodezik uzayı ise* (X, d_X) *ve* (Y, d_Y) *de tek jeodezik uzaylarıdır.*

Kanıt. i) (X, d_X) ve (Y, d_Y) tam uzaylar olduğundan $(X \times Y, d_p)$ de tamdır. Bu yüzden $(X \times Y, d_p)$ içindeki herhangi iki noktanın, tek bir orta noktalarının olduğunu göstermek yeterlidir. $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in X \times Y$ verilsin. X ve Y tek jeodezik uzayı olduklarından x_0 ve x_1'in X'te, y_0 ve y_1'in Y'de birer tane ve yanlızca birer tane orta noktaları vardır. Bunlara sırasıyla $\hat{x}$ ve $\hat{y}$ diyelim. $(\hat{x}, \hat{y})$'nin, (x_0, y_0) ile (x_1, y_1) orta noktası olduğunu Teorem 2.21 (i)'in ispatından biliyoruz. $d(x_0, \hat{x}) = d(\hat{x}, x_1) = \frac{1}{2} \cdot d(x_0, x_1) = a$ $d(y_0, \hat{y}) = d(\hat{y}, y_1) = \frac{1}{2} \cdot d(y_0, y_1) = b$ diyelim. (x_0, y_0) ile (x_1, y_1)'in başka bir orta noktasının olmadığını göstereceğiz. Varsayalım ki $(\tilde{x}, \tilde{y})$, (x_0, y_0) ile (x_1, y_1)'in başka bir orta noktası olsun.

İddia: $d(x_0, \tilde{x}) \neq a$.

Bunu ispatlamak için $d(x_0, \tilde{x}) = a$ olduğunu varsayalım. O zaman $d_p((x_0, y_0), (\tilde{x}, \tilde{y})) = d_p((x_0, y_0), (\hat{x}, \hat{y}))$ olduğundan

$$\sqrt[p]{d_X^p(x_0, \tilde{x}) + d_Y^p(y_0, \tilde{y})} = \sqrt[p]{d_X^p(x_0, \hat{x}) + d_Y^p(y_0, \hat{y})}$$

$$a^p + d_Y^p(y_0, \tilde{y}) = a^p + b^p$$

$$d_Y^p(y_0, \tilde{y}) = b$$

elde edilir. Şimdi $(\tilde{x}, \tilde{y}) \neq (\hat{x}, \hat{y})$ olduğundan $\tilde{x} \neq \hat{x}$ veya $\tilde{y} \neq \hat{y}$ olur. Bu durumda x_0 ile x_1'in tek orta noktası $\hat{x}$ ve y_0 ile y_1'in tek orta noktası

$\hat{y}$ olduğundan $d_X(\tilde{x}, x_1) > a$ ve $d_Y(\tilde{y}, y_1) > b$ eşitsizliklerinden en az biri geçerlidir. Ama öyleyse

$$\sqrt[p]{d_X^p(\tilde{x}, x_1) + d_Y^p(\tilde{y}, y_1)} > \sqrt[p]{a^p + b^p}$$

olup bu durum $(\tilde{x}, \tilde{y})$'nin (x_0, y_0) ile (x_1, y_1)'in orta noktası olmasıyla çelişir. Dolayısıyla gerçekten $d(x_0, \tilde{x}) \neq a$. Benzer şekilde $d_X(\tilde{x}, x_1) \neq a$ eşitsizliği de doğru olur. Şimdi $d_X(x_0, x_1) = 2a$ olduğundan hem $d_X(x_0, \tilde{x}) < a$, hem $d_X(\tilde{x}, x_1) < a$ olamaz. Hem $d_X(x_0, \tilde{x}) > a$, hem $d_X(\tilde{x}, x_1) > a$ da olamaz. Çünkü $(\tilde{x}, \tilde{y})$, (x_0, y_0) ile (x_1, y_1)'in orta noktası olduğundan $i = 0, 1$ için

$$\sqrt[p]{d_X^p(\tilde{x}, x_i) + d_Y^p(\tilde{y}, y_i)} = \sqrt[p]{a^p + b^p} \tag{2.4}$$

olup $d_Y(y_0, \tilde{y}) < b$ ve $d_Y(\tilde{y}, y_1) < b$ elde edilir ve bu durum $d_Y(y_0, y_1) = 2b$ olmasıyla çelişir. Öyleyse $d_X(x_0, \tilde{x})$ ile $d_X(\tilde{x}, x_1)$'den biri a'dan küçük biri büyük olacaktır. $d_X(x_0, \tilde{x}) < a$ olsun. O zaman $0 < r \leq a$ olan öyle bir $r \in \mathbb{R}$ vardır ki $d_X(x_0, \tilde{x}) = a - r$ olur. O zaman üçgen eşitsizliğinden $d_X(\tilde{x}, x_1) \geq a + r$ olur. Ayrıca (2.4) eşitliğinden $d_Y(y_0, \tilde{y}) > b$ ve $d_Y(\tilde{y}, y_1) < b$ olur. Bir $0 < s \leq b$ için $d_Y(\tilde{y}, y_1) = b - s$ olsun. O zaman yine üçgen eşitsizliğinden $d_Y(y_0, \tilde{y}) \geq b + s$ olur. Öyleyse yine (2.4) eşitliğinden

$$\begin{cases} a^p + b^p = d_X^p(x_0, \tilde{x}) + d_Y^p(y_0, \tilde{y}) \geq (a - r)^p + (b + s)^p \\ a^p + b^p = d_X^p(\tilde{x}, x_1) + d_Y^p(\tilde{y}, y_1) \geq (a + r)^p + (b - s)^p \end{cases}$$

eşitsizlikleri taraf tarafa toplanarak

$$2a^p + 2b^p \geq (a - r)^p + (a + r)^p + (b - s)^p + (b + s)^p$$

elde edilir. Ancak bu durum Önsav 2.22 ile çelişir.

ii) Varsayalım ki (X, d_X) tek jeodezik uzayı olmasın. O zaman öyle $x_0, x_1 \in X$ bulunabilir ki bu iki noktayı birleştiren α ve β gibi iki jeodezik vardır ($(X \times Y, d_p)$ tek jeodezik uzayı olduğundan kesin içsel olup Teorem 2.21 (ii) gereğince (X, d_X)'de kesin içseldir, dolayısıyla X'in herhangi iki noktasını birleştiren en az bir jeodezik daima mecuttur). Bir $y \in Y$ alalım ve

$e_y : [0,1] \to Y$, $e_y(t) = y$ olsun. Bu durumda $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ herhangi bir bölüntü olmak üzere

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} d_p((\alpha, e_y)(t_{i-1}), (\alpha, e_y)(t_i)) &= \sum_{i=1}^{n} d_X(\alpha(t_{i-1}), \alpha(t_i)) \\ &= d_X(x_0, x_1) \\ &= d_p((x_0, y), (x_1, y))\end{aligned}$$

olduğundan (α, e_y), (x_0, y) ile (x_1, y) noktalarını birleştiren bir jeodeziktir. Benzer şekilde (β, e_y) de (x_0, y) ile (x_1, y) noktalarını birleştiren bir jeodeziktir. Ancak bu durum $(X \times Y, d_p)$'nin tek jeodezik uzayı olmasıyla çelişeceğinden (X, d_X) tek jeodezik uzayı olur. Benzer şekilde (Y, d_Y) de tek jeodezik uzayıdır.

□

Teorem 2.24. *E bir normlu vektör uzayı, O da bu uzayın orjini olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir:*

i) *E tek jeodezik uzayıdır.*

ii) *Her $x \in E$ için O ile x'i birleştiren tek bir jeodezik vardır.*

iii) *$x, y \in E$ için $\|x\| + \|y\| = \|x + y\|$ ise ya $y = 0$ olur, ya da bir $k > 0$ için $x = ky$ olur.*

iv) *$x, y, z \in E$ için $\|x - y\| + \|y - z\| = \|x - z\|$ eşitliği sağlanıyorsa, $y = (1-t)x + tz$ olacak şekilde $t \in [0,1]$ vardır.*

v) *E normlu uzayı kesin konvekstir.*

vi) *Herhangi $x, y \in E$ için $\|x\| = \|y\| = 1$ ve $x \neq y$ ise $\|x + y\| < 2$'dir.*

vii) *x ve y lineer olmayan vektörler ise $\|x + y\| < \|x\| + \|y\|$ olur.*

viii) *$x, y \in E$, $x \neq y$ ve $p \in (1, \infty)$ ise*

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^p < \frac{1}{2} \cdot (\|x\|^p + \|y\|^p)$$

olur. [11]

Teorem 2.25. *$(X, \|.\|_X)$ ve $(Y, \|.\|_Y)$ normlu tek jeodezik uzaylar olsun. Bu durumda her $p \in (1, \infty)$ için $(X \times Y, \|.\|_p)$ de tek jeodezik uzayı olur.*

Kanıt. $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in X \times Y$, $\|(x_0, y_0)\| = \|(x_1, y_1)\| = 1$ ve $(x_0, y_0) \neq (x_1, y_1)$ olsun. $\|(x_0 + x_1, y_0 + y_1)\|_p < 2$ olduğunu görürsek Teorem 2.24(vi) gereğince kanıt tamamlanacaktır. Önce $\|x_0\|_X = \|x_1\|_X = r$ olsun. O zaman $i = 0, 1$ için

$$\|x_i\|_X^p + \|y_i\|_Y^p = 1$$

olduğundan $\|y_0\|_Y = \|y_1\|_Y = \sqrt[p]{1 - r^p}$ olur. Ayrıca $(x_0, y_0) \neq (x_1, y_1)$ oduğundan $x_0 \neq x_1$ veya $y_0 \neq y_1$ olur. Genelliği bozmadan $x_0 \neq x_1$ kabul edebiliriz. O zaman

$$\frac{x_0}{r} \neq \frac{x_1}{r}$$

ve

$$\left\|\frac{x_0}{r}\right\|_X = \left\|\frac{x_1}{r}\right\|_X = 1$$

olup $(X, \|.\|_X)$ tek jeodezik uzayı olduğundan Teorem 2.24(vi) gereğince

$$\left\|\frac{x_0}{r} + \frac{x_1}{r}\right\|_X < 2$$

yani

$$\|x_0 + x_1\|_X < 2r$$

olur. Öyleyse

$$\begin{aligned}
\|x_0 + x_1\|_X^p + \|y_0 + y_1\|_Y^p &< (2r)^p + (\|y_0\|_Y + \|y_1\|_Y)^p \\
&= (2r)^p + (2\sqrt[p]{1 - r^p})^p = 2^p(r^p + 1 - r^p) \\
&= 2^p
\end{aligned}$$

elde edilir ve dolayısıyla $\|(x_0 + x_1, y_0 + y_1)\|_p < 2$ olur.

Şimdi $\|x_0\|_X \neq \|x_1\|_X$ olsun. Genelliği bozmadan $\|x_0\|_X > \|x_1\|_X$ varsayabiliriz. O zaman $\|y_1\|_Y > \|y_0\|_Y$ olur. $\|x_0\|_X = a$, $\|x_1\|_X = a - \varepsilon$, $\|y_0\|_Y = b$ ve $\|y_1\|_Y = b + \delta$ olsun (Tabii burada $0 < \varepsilon \leq a$ ve $\delta > 0$ olmalı).

$$a^p + b^p = 1$$

ve

$$(a - \varepsilon)^p + (b + \delta)^p = 1$$

olduğunu biliyoruz ve

$$\begin{aligned}\|(x_0+x_1, y_0+y_1)\|_p &= \sqrt[p]{\|x_0+x_1\|_X^p + \|y_0+y_1\|_Y^p} \\ &\leq \sqrt[p]{(\|x_0\|_X + \|x_1\|_X)^p + (\|y_0\|_Y + \|y_1\|_Y)^p} \\ &= \sqrt[p]{(2a-\varepsilon)^p + (2b+\delta)^p}\end{aligned}$$

olduğundan

$$(2a-\varepsilon)^p + (2b+\delta)^p < 2^p$$

olduğunu görmek ispatı tamamlayacaktır. Şimdi

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$$

kümesi $\mathbb{R}^2$ içinde konvekstir ve $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^p + y^p$ fonksiyonu (her $p > 1$ için) kesin konvekstir. Öyleyse $p, q \in A$, $p \neq q$ ve $t \in (0,1)$ için

$$f((1-t)p + tq) < (1-t)f(p) + tf(q)$$

olur. Eğer $t = \frac{1}{2}$, $p = (2a, 2b)$ ve $q = (2a - 2\varepsilon, 2b + 2\delta)$ alırsak

$$(2a-\varepsilon)^p + (2b+\delta)^p < \frac{1}{2} \cdot 2^p + \frac{1}{2} \cdot 2^p = 2^p$$

elde edilir.

□

2.3 $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ Uzayında Jeodezikler

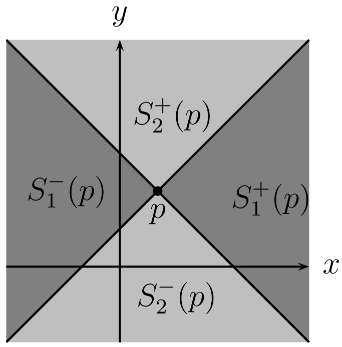
Tanım 2.6. *$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ve $\varepsilon = \pm$ olmak üzere x'in i. eksen üzerindeki ε işaretli sektörü*

$$\begin{aligned}S_i^\varepsilon(x) &= \{y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n |\ \varepsilon(y_i - x_i) \geq |y_j - x_j|\ ,\ j = 1, 2, \cdots, n\} \\ &= \{y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n |\ d_\infty(x,y) = \varepsilon(y_i - x_i)\}\end{aligned}$$

olarak tanımlanır.

$\mathbb{R}^n$'de her noktanın $2n$ tane sektörü vardır.

Teorem 2.26. *$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ verilsin ve $y \in S_i^\varepsilon(x)$ olsun. Bunun dışında $\alpha(0) = x$ ve $\alpha(1) = y$ olan bir $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ doğal yolu verilsin. Bu durumda α'nın $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ içinde bir jeodezik olması için gerek ve yeter koşul $t < t'$ özelliğindeki her $t, t' \in [0,1]$ için $\alpha(t') \in S_i^\varepsilon(\alpha(t))$ olmasıdır.*



Şekil 2.3: Düzlemdeki bir p noktasının tüm sektörleri

Kanıt. $(\Rightarrow)$

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ bir jeodezik olsun ve bir $t < t'$ için $\alpha(t') \notin S_i^\varepsilon(\alpha(t))$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $d_\infty(\alpha(t), \alpha(t')) > \varepsilon(\alpha_i(t') - \alpha_i(t))$ olur. $y \in S_i^\varepsilon(x)$ olduğundan $d_\infty(x, y) = \varepsilon(y_i - x_i)$. Ancak $0 < t < t' < 1$ bölüntüsü için

$$\begin{aligned} d_\infty(\alpha(0), \alpha(t)) + d_\infty(\alpha(t), \alpha(t')) + d_\infty(\alpha(t'), \alpha(1)) &> \\ \varepsilon(\alpha_i(t) - \alpha_i(0)) + \varepsilon(\alpha_i(t') - \alpha_i(t)) + \varepsilon(\alpha_i(1) - \alpha_i(t')) &= \varepsilon(\alpha_i(1) - \alpha_i(0)) \end{aligned}$$

elde edilir ve bu $L_{d_\infty}(\alpha) > \varepsilon(\alpha_i(1) - \alpha_i(0) = d_\infty(x, y)$ olmasını gerektirir.

$(\Leftarrow)$ $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ herhangi bir bölüntü olsun. Her $j = 1, 2, \cdots, n$ için $\alpha(t_j) \in S_i^\varepsilon(\alpha(t_{j-1}))$ olduğundan

$$d_\infty(\alpha(t_j), \alpha(t_{j-1})) = \varepsilon(\alpha_i(t_j) - \alpha_i(t_{j-1}))$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} d_\infty(\alpha(t_j), \alpha(t_{j-1})) &= \sum_{j=1}^{n} \varepsilon(\alpha_i(t_j) - \alpha_i(t_{j-1})) \\ &= \varepsilon(\alpha_i(1) - \alpha_i(0)) \\ &= \varepsilon(y_i - x_i) \end{aligned}$$

elde edilir ve $L_{d_\infty}(\alpha) = d_\infty(x, y)$ olup α bir jeodeziktir. $\square$

Önsav 2.27. *$x, y \in (\mathbb{R}^n, d_\infty)$ ve $y \in S_i^\varepsilon(x)$ olsun. Bu durumda $S_i^\varepsilon(y) \subseteq S_i^\varepsilon(x)$ kapsaması geçerlidir.*

Kanıt. $a \in S_i^\varepsilon(y)$ olsun. O zaman her $j = 1, 2, \cdots, n$ için

$$|a_j - y_j| \leq \varepsilon(a_i - y_i)$$

olur. Ayrıca $y \in S_i^\varepsilon(x)$ olduğundan her $j = 1, 2, \cdots, n$ için

$$|x_j - y_j| \leq \varepsilon(y_i - x_i)$$

olur. O halde yine her $j = 1, 2, \cdots, n$ için

$$\begin{aligned} |x_j - a_j| &\leq |x_j - y_j| + |y_j - a_j| \\ &\leq \varepsilon(y_i - x_i) + \varepsilon(a_i - y_i) \\ &= \varepsilon(a_i - x_i) \end{aligned}$$

elde edilir. Öyleyse $a \in S_i^\varepsilon(x)$ olup $S_i^\varepsilon(y) \subseteq S_i^\varepsilon(x)$ elde edilir. □

Önerme 2.28. *$\alpha, \beta : [0, 1] \to (\mathbb{R}^n, d_\infty)$, $\alpha(0) = x$, $\alpha(1) = y$, $\beta(0) = y$, $\beta(1) = z$ ve α ile β, $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$'da birer jeodezik olsunlar. Bu durumda*
$\gamma = \alpha * \beta : [0, 1] \to (\mathbb{R}^n, d_\infty)$

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & , \quad t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(2t - 1) & , \quad t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

olarak tanımlanan γ'nın da $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ içinde bir jeodezik olması için gerek ve yeter koşul x'in y'yi içeren sektörü ile y'nin z'yi içeren sektörünün aynı (yönlü ve işaretli) olmasıdır.

Kanıt. ($\Rightarrow$) γ bir jeodezik ve $z \in S_i^\varepsilon(x)$ ise Teorem 2.26'ye göre $z \in S_i^\varepsilon(y)$ ve $y \in S_i^\varepsilon(x)$ olur.

($\Leftarrow$) $z \in S_i^\varepsilon(y)$ ve $y \in S_i^\varepsilon(x)$ olsun ve $t < t'$ olacak şekilde $t, t' \in [0, 1]$ verilsin. Eğer $t, t' \in [0, \frac{1}{2}]$ veya $t, t' \in [\frac{1}{2}, 1]$ ise $\gamma|_{[0, \frac{1}{2}]}$ ve $\gamma|_{[\frac{1}{2}, 1]}$ birer jeodezik olduklarından Teorem 2.26'ye göre $\gamma(t') \in S_i^\varepsilon(\gamma(t))$ olur.

Şimdi $0 < t < \frac{1}{2} < t' < 1$ olsun. $\gamma|_{[0, \frac{1}{2}]}$ bir jeodezik ve $y \in S_i^\varepsilon(x)$ olduğundan $y \in S_i^\varepsilon(\gamma(t))$ olur. Öyleyse Önsav 2.27 gereğince $S_i^\varepsilon(y) \subseteq S_i^\varepsilon(\gamma(t))$ olur. Ayrıca $\gamma|_{[\frac{1}{2}, 1]}$ da jeodezik olduğundan $\gamma(t') \in S_i^\varepsilon(y)$ ve dolayısıyla $\gamma(t') \in S_i^\varepsilon(\gamma(t))$ elde edilir. □

2.4 $(\mathbb{R}^n, d_1)$ Uzayında Jeodezikler

Tanım 2.7. *$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ve $\varepsilon_i = \pm 1$ olmak üzere*

$$\begin{aligned} O^{\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n}(x) &= \{y \in \mathbb{R}^n \mid \varepsilon_i(y_i - x_i) \geq 0\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^n \mid d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(y_i - x_i)\} \end{aligned}$$

kümesine x'in $\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n$-ortantı denir. $\mathbb{R}^n$'de her noktanın 2^n tane ortantı vardır.

Teorem 2.29. *$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ verilsin ve $y \in O^{\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n}(x)$ olsun. Ayrıca $\alpha(0) = x$ ve $\alpha(1) = y$ olan bir $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ doğal yolu verilsin. Bu durumda α'nın $(\mathbb{R}^n, d_1)$ içinde bir jeodejik olması için gerek ve yeter koşul $t < t'$ özelliğindeki her $t, t' \in [0,1]$ için $\alpha(t') \in O^{\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n}(\alpha(t))$ olmasıdır.*

Kanıt. $(\Rightarrow)$ $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ bir jeodezik olsun ve bir $t < t'$ için $\alpha(t') \notin O^{\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n}(\alpha(t))$ olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$d_1(\alpha(t), \alpha(t')) > \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(\alpha_i(t') - \alpha_i(t))$$

olur. $y \in O^{\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n}(x))$ olduğundan

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(y_i - x_i)$$

dir. Ancak $0 < t < t' < 1$ bölüntüsü için

$$\begin{aligned} & d_1(\alpha(0), \alpha(t)) + d_1(\alpha(t), \alpha(t')) + d_1(\alpha(t'), \alpha(1)) \\ > & \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(\alpha_i(t) - \alpha_i(0)) + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(\alpha_i(t') - \alpha_i(t)) + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(\alpha_i(1) - \alpha_i(t')) \\ = & \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(\alpha_i(1) - \alpha_i(0)) \end{aligned}$$

elde edilir ve bu $L_{d_1}(\alpha) > \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(\alpha_i(1) - \alpha_i(0) = d_1(x,y)$ olmasını gerektirir.

$(\Leftarrow)$ $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = 1$ herhangi bir bölüntü olsun. Her $i = 1, 2, \cdots, m$ için $\alpha(t_i) \in O^{\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n}(\alpha(t_{i-1}))$ olduğundan

$$d_1(\alpha(t_i), \alpha(t_{i-1})) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(\alpha_i(t_i) - \alpha_i(t_{i-1}))$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m} d_1(\alpha(t_j), \alpha(t_{j-1})) &= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(\alpha_i(t_j) - \alpha_i(t_{j-1})) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_i(\alpha_i(t_j) - \alpha_i(t_{j-1})) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(\alpha_i(1) - \alpha_i(0)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(y_i - x_i) \\
&= d_1(x, y)
\end{aligned}$$

elde edilir ve böylece $L_{d_1}(\alpha) = d_1(x, y)$ olup α bir jeodeziktir. □

Önsav 2.30. *$x, y \in (\mathbb{R}^n, d_1)$ ve $y \in O^{\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n}(x)$ olsun. Bu durumda*

$$O^{\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n}(y) \subseteq O^{\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n}(x)$$

şeklindedir.

Kanıt. $a \in O^{\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n}(y)$ olsun. O zaman her $i = 1, 2, \cdots, n$ için

$$\varepsilon_i(a_i - y_i) \geq 0$$

olur. Ayrıca $y \in O^{\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n}(x)$ olduğundan her $i = 1, 2, \cdots, n$ için

$$\varepsilon_i(y_i - x_i) \geq 0$$

olur. O halde yine her $i = 1, 2, \cdots, n$ için

$$\varepsilon_i(a_i - y_i) + \varepsilon_i(y_i - x_i) = \varepsilon_i(a_i - x_i) \geq 0$$

elde edilir. Öyleyse $a \in O^{\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n}(x)$ olup $O^{\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n}(y) \subseteq O^{\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n}(x)$ elde edilir.

□

Önerme 2.31. *$\alpha, \beta : [0, 1] \to (\mathbb{R}^n, d_1)$, $\alpha(0) = x$, $\alpha(1) = y$, $\beta(0) = y$, $\beta(1) = z$ ve α ile β, $(\mathbb{R}^n, d_1)$'de birer jeodezik olsunlar. Bu durumda*

$$\gamma = \alpha * \beta :\to (\mathbb{R}^n, d_1),\ \gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & , \ t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(2t-1) & , \ t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

olarak tanımlanan γ'nın da $(\mathbb{R}^n, d_1)$ içinde bir jeodezik olması için gerek ve yeter koşul x'in y'yi içeren ortantı ile y'nin z'yi içeren ortantının aynı olmasıdır.

Kanıt. ($\Rightarrow$) γ bir jeodezik ve $z \in O^{\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n}(x)$ ise Teorem 2.29'ya göre $z \in O^{\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n}(y)$ ve $y \in O^{\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n}(x)$ olur.

($\Leftarrow$) $z \in O^{\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n}(y)$ ve $y \in O^{\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n}(x)$ olsun ve $t < t'$ olacak şekilde $t, t' \in [0, 1]$ verilsin. Eğer $t, t' \in [0, \frac{1}{2}]$ veya $t, t' \in [\frac{1}{2}, 1]$ ise $\gamma|_{[0,\frac{1}{2}]}$ ve $\gamma|_{[\frac{1}{2},1]}$ birer jeodezik olduklarından Teorem 2.29'a göre $\gamma(t') \in O^{\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n}(\gamma(t))$ olur.

Şimdi $0 < t < \frac{1}{2} < t' < 1$ olsun. $\gamma|_{[0,\frac{1}{2}]}$ bir jeodezik ve $y \in O^{\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n}(x)$ olduğundan $y \in O^{\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n}(\gamma(t))$ olur. Öyleyse Önsav 2.30 gereğince

$$O^{\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n}(y) \subseteq O^{\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n}(\gamma(t))$$

olur. Ayrıca $\gamma|_{[\frac{1}{2},1]}$ da jeodezik olduğundan $\gamma(t') \in O^{\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n}(y)$ ve dolayısıyla $\gamma(t') \in O^{\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n}(\gamma(t))$ elde edilir. $\square$

3 PROJEKTİF VE İNJEKTİF METRİK UZAYLAR

Objeleri metrik uzaylar, morfizmleri genişletmeyen dönüşümler (yani $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$ eşitsizliğini sağlayan dönüşümler) olan kategoriye "metrik kategori" denir. Bu bölümde metrik kategoride projektif objenin ve injektif objenin ne olduğunu tartışacağız.

Tanım 3.1. *$\mathcal{C}$ bir kategori $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ ve $f \in \mathcal{C}[X, Y]$ olsun. Eğer her $Z \in Ob(\mathcal{C})$ ve $g, h \in \mathcal{C}[Z, X]$ için $f \circ g = f \circ h$ olması $g = h$ olmasını gerektiriyorsa f'ye monomorfizm denir.*

Önerme 3.1. *Metrik kategoride bir morfizmin monomorfizm olması için gerek ve yeter koşul birebir olmasıdır.*

Kanıt. $f : X \to Y$ monomorfizm ve $f(x_1) = f(x_2)$ olsun. Z herhangi bir metrik uzay olmak üzere $g, h : Z \to X$, $g(z) = x_1$, $h(z) = x_2$ olarak tanımlanan sabit dönüşümler birer genişletmeyen dönüşümdür ve $f \circ g = f \circ h$ sağlanır. Öyleyse f monomorfizm olduğundan $g = h$ yani $x_1 = x_2$ elde edilir. O halde f birebirdir.

Şimdi $f : X \to Y$ birebir olsun ve $g, h : Z \to X$ morfizmleri için $f \circ g = f \circ h$ eşitliği sağlansın. f birebir olduğundan $z \in Z$ keyfi bir eleman olmak üzere $f(g(z)) = f(h(z))$ eşitliğinden $g(z) = h(z)$ çıkar. Öyleyse $g = h$ oup f monomorfizmdir. □

Tanım 3.2. *$\mathcal{C}$ bir kategori $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ ve $f \in \mathcal{C}[X, Y]$ olsun. Eğer her $Z \in Ob(\mathcal{C})$ ve $g, h \in \mathcal{C}[Y, Z]$ için $g \circ f = h \circ f$ olması $g = h$ olmasını gerektiriyorsa f'ye epimorfizm denir.*

Önerme 3.2. *Metrik kategoride bir morfizmin epimorfizm olması için gerek ve yeter koşul görüntü kümesinin değer kümesi içinde yoğun olmasıdır.*

Kanıt. $f : X \to Y$ epimorfizm olsun ve $f(X)$'in Y içinde yoğun olmadığını varsayalım. O halde öyle bir $y_0 \in Y$ ve $r > 0$ gerçel sayısı vardır ki

$$B(y_0, r) \cap f(X) = \emptyset$$

olur. Şimdi $[0, r]$ aralığını standart metrikle düşünelim ve $g, h : Y \to [0, r]$ fonksiyonlarını aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$g(y) = \begin{cases} r & , \quad d(y, y_0) \geq r \\ d(y, y_0) & , \quad d(y, y_0) < r \end{cases}$$

$$h(y)=\begin{cases} r & , \quad d(y,y_0)\geq r \\ \dfrac{r}{2}+\dfrac{d(y,y_0)}{2} & , \quad d(y,y_0)<r \end{cases}$$

Bu şekilde tanımlanan g ve h dönüşümleri genişletmeyen dönüşümlerdir ve $g\circ f = h\circ f$ eşitliği sağlanır. Ancak $g\neq h$ olduğundan bu durum f'nin epimorfizm olmasıyla çelişir. O halde $f(X)$, Y içinde yoğun olmalıdır.

Şimdi $f: X\to Y$ genişletmeyen dönüşümü verilsin ve $f(X)$, Y içinde yoğun olsun. Bu durumda bir Z metrik uzayı ve $g,h: Y\to Z$ genişletmeyen dönüşümleri için $g\circ f = h\circ f$ eşitliği sağlanıyorsa g ve h, $f(X)$ üzerinde eşit olurlar. g ve h genişletmeyen dönüşüm olduklarından süreklidirler ve yoğun bir küme üzerinde eşit olan sürekli fonksiyonlar tüm küme üzerinde de eşit olacaklarından $g=h$ olur ve dolayısıyla f epimorfizmdir. $\square$

Sonuç 3.3. *Kompakt metrik uzaylar kategorisinde (objeleri kompakt metrik uzaylar, morfizmleri genişletmeyen dönüşümler olan kategori) bir morfizmin epimiorfizm olması için gerek ve yeter koşul örten olmasıdır.*

Tanım 3.3. *$\mathcal{C}$ bir kategori, $P\in Ob(\mathcal{C})$ olsun. X ve Y, $\mathcal{C}$'de herhangi iki obje olmak üzere her $p: Y\to X$ epimorfizmi ve her $f: P\to X$ morfizmi için aşağıdaki diyagramı değişmeli yapan yani $f = p\circ\widetilde{f}$ eşitliğini sağlayan bir $\widetilde{f}: P\to Y$ morfizmi bulunabiliyorsa P'ye projektif obje denir.*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\widetilde{f}"'] \arrow[dr, "f"] & \\ Y \arrow[rr, two heads, "p"'] & & X \end{tikzcd}$$

Önerme 3.4. *Metrik kategoride boştan farklı projektif obje yoktur.*

Kanıt. Varsayalım ki P projektif metrik uzay olsun.

$$X=[0,1] \text{ ve } Y=[0,1]\cap\mathbb{Q}$$

alalım. Y, X içinde yoğun olduğundan, $p: Y\to X$ gömme dönüşümü epimorfizmdir. $f: P\to X$, $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ olarak tanımlanan f sabit dönüşümü genişletmeyen dönüşümdür. Ancak $f=p\circ\widetilde{f}$ eşitliğini sağlayan bir $\widetilde{f}: P\to Y$ genişletmeyen dönüşüm yoktur. O halde P projektif uzay olamaz. $\square$

Önerme 3.5. *Kompakt metrik uzaylar kategorisinde tek noktalı uzaydan başka projektif uzay yoktur.*

Kanıt. Kompakt metrik uzaylar kategorisinde epimorfizmler örten dönüşümler olduğundan tek noktalı metrik uzayın projektif uzay olduğu barizdir. Şimdi P metrik uzayı birbirinden farklı x ve y gibi iki eleman içersin ve $d(x,y) = r$ olsun. $X = [0,r]$, $Y = [0,2r]$ ve $p : Y \to X$, $p(t) = \frac{t}{2}$ alalım. Bu durumda $f : P \to X$ dönüşümünü $f(x) = 0$ ve $f(y) = r$ olacak şekilde seçersek $f = p \circ \widetilde{f}$ eşitliğini sağlayan bir $\widetilde{f} : P \to Y$ genişletmeyen dönüşümü bulamayız. O halde P projektif uzay olamaz. $\square$

Tanım 3.4. *$\mathcal{C}$ bir kategori $M \in Ob(\mathcal{C})$ olsun. X ve Y, $\mathcal{C}$'de herhangi iki obje olmak üzere her $i : X \to Y$ monomorfizmi ve her $f : X \to M$ morfizmi için aşağıdaki diyagramı değişmeli yapan yani $f = \widetilde{f} \circ i$ eşitliğini sağlayan bir $\widetilde{f} : Y \to M$ morfizmi bulunabiliyorsa M'ye injektif obje denir.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, hook, "i"] \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, dashed, "\widetilde{f}"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Yukarıdaki tanımda i'yi monomorfizm almak yerine, seçilmiş morfizmler sınıfı olan bir $\mathcal{H}$'den alırsak M'ye $\mathcal{H}$-injektif obje denir.

Tanım 3.5. *Metrik kategoride $\mathcal{H}$ olarak izometrik gömmeler alınırsa $\mathcal{H}$-injektif obje olan metrik uzaylara injektif metrik uzay denir. Öyleyse injektif metrik uzay tanımı şöyle de yapılabilir: Y herhangi bir metrik uzay ve X'te Y'nin herhangi bir altkümesi olmak üzere $f : X \to M$ her genişletmeyen dönüşüm $\widetilde{f} : Y \to M$ genişletmeyen dönüşümüne genişletilebiliyorsa M'ye injektif metrik uzay denir.*

Örnek 3.1. *Tek noktalı metrik uzay bir injektif metrik uzaydır. Bunu görmek kolay. Ancak iki noktalı bir uzay injektif değildir. Şimdi bunu gösterelim.*

$M = \{x,y\}$ ve $d(x,y) = r$ olsun. $Y = [0,r]$ ve $X = M$ alırsak $X \to M$ birim dönüşümü Y'ye genişletemeyiz.

4 HİPERKONVEKS UZAYLAR

Tanım 4.1. (X, d) *bir metrik uzay olmak üzere* X *içinde herhangi* $(x_i)_{i\in I}$ *koleksiyonu ve her* $i, j \in I$ *için* $d(x_i, x_j) \leq r_i + r_j$ *koşuluna uyan her* $(r_i)_{i\in I}$ *pozitif sayıları için* $\bigcap_{i\in I} \bar{B}(x_i, r_i) \neq \emptyset$ *oluyorsa* (X, d) *ikilisine hiperkonveks metrik uzay denir.*

Teorem 4.1. (X, d) *bir metrik uzay olmak üzere aşağıdakiler denktir:*

i) X *hiperkonvekstir.*

ii) X *injektiftir. [7]*

Kanıt. X hiperkonveks olsun. M bir metrik uzay, $D \subseteq M$ ve $T : D \to X$ genişletmeyen bir dönüşüm olsun.

$\mathcal{C} = \{(T_F, F)|\ D \subseteq F \subseteq M,\ T_F : F \to X,\ \text{T'nin genişletmeyen bir genişlemesi}\}$

kümesi boştan farklıdır. Çünkü $(T, D) \in \mathcal{C}$. Ayrıca bu küme

$$(T_F, F) \leq (T_G, G) \Leftrightarrow F \subseteq G$$

ve $T_G|_F = T_F$ bağıntısıyla kısmi sıralıdır. $\mathcal{C}$ bu sıralama bağıntısıyla Zorn Önsavı'nın koşullarını sağlar ve bu yüzden maksimal elemanlara sahiptir.

(T_1, F_1), $\mathcal{C}$'nin bir maksimal elemanı olsun ve $F_1 = M$ olduğunu gösterelim. Varsayalım ki $F_1 \neq M$. Bir $z \in M - F_1$ alalım ve $F = F_1 \cup \{z\}$ kümesini ele alalım. T_1'i F'ye genişleteceğiz. Tüm $x \in F_1$'ler için $T_1(x)$ noktalarını ve bunlara karşılık $d(x, z)$ pozitif sayılarını düşünürsek

$$d(T_1(x), T_1(y))) \leq d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

olduğundan ve X hiperkonveks olduğundan

$$\bigcap_{x\in X} \bar{B}(T_1(x), d(x, z)) \neq \emptyset$$

yazılır. w bu kesişime ait herhangi bir nokta olsun ve $T^* : F \to X$

$$T^*(x) = \begin{cases} T_1(x) & , \quad x \neq z \\ w & , \quad x = z \end{cases}$$

dönüşümünü tanımlayalım. w'nun tanımı gereği

$$d(T^*(x), T^*(z)) = d(T_1(x), w) \leq d(x, z)$$

olup $(T^*, F) \in \mathcal{C}$ elde edilir. Ancak $(T_1, F_1) \leq (T^*, F)$ ve $(T_1, F_1) \neq (T^*, F)$ olduğundan bu durum (T_1, F_1)'in maksimalliği ile çelişir ve dolayısıyla $F_1 = M$ olmalıdır. Böylece T'yi M'ye genişletmeyen bir dönünüşüm kalacak şekilde genişletebiliriz.

Şimdi X injektif olsun. Her $i, j \in I$ için $d(x_i, x_j) \leq r_i + r_j$ olacak şekilde $(x_i)_{i \in I}$ noktaları ve $(r_i)_{i \in I}$ pozitif sayıları verilsin. $D = \{x_i |\ i \in I\}$ kümesi üzerinde tanımlı, her $i, j \in I$ için $d(x_i, x_j) \leq f(x_i) + f(x_j)$ koşulunu sağlayan tüm pozitif gerçel değerli fonksiyonların kümesi $\mathcal{F}$ olsun. $r : D \to \mathbb{R}$, $r(x_i) = r_i$ fonksiyonu bu kümeye ait olduğundan $\mathcal{F} \neq \emptyset$. $\mathcal{F}$ gerçel sayılar üzerindeki noktasal sıralamaya göre kısmi sıralıdır. $\mathcal{F}$ içinde herhangi azalan zincir alttan sınırlı olacağından Zorn Önsavı'na göre $f \leq r$ olacak şekilde bir $f \in \mathcal{F}$ minimal elemanı vardır. Şimdi f'nin minimalliğini kullanarak her $i, j \in I$ için

$$f(x_i) \leq d(x_i, x_j) + f(x_j)$$

eşitsizliğini gösterelim. Varsayalım ki $d(x_{i_0}, x_{j_0}) + f(x_{j_0}) < f(x_{i_0})$ eşitsizliğini gerçekleyen $i_0, j_0 \in I$ varolsun. $F : D \to \mathbb{R}$,

$$F(x_i) = \begin{cases} f(x_i) & , \quad x_i \neq x_{i_0} \\ d(x_{i_0}, x_{j_0}) + f(x_{j_0}) & , \quad x_i = x_{i_0} \end{cases}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Her $k \in I$ için

$$\begin{aligned} d(x_{i_0}, x_k) &\leq d(x_{i_0}, x_{j_0}) + d(x_{j_0}, x_k) \\ &\leq d(x_{i_0}, x_{j_0}) + f(x_{j_0}) + f(x_k) \\ &\leq F(x_{i_0}) + F(x_k) \end{aligned}$$

olduğundan $F \in \mathcal{F}$ olur. Ancak $F \leq f$ ve $F \neq f$ olduğundan bu durum f'nin minimalliği ile çelişir. Şimdi D'ye, X'e ait olmayan bir y noktası ekleyelim. Yukarıda yapılan tartışmaya göre $d(x_i, y) := f(x_i)$ tanımıyla D üzerindeki metriği $D \cup \{y\}$'ye genişletmiş oluruz. X injektif olduğundan $D \hookrightarrow X$ gömme dönüşümünün $D \cup \{y\}$'ye genişletmeyen bir R genişlemesi vardır. Şimdi her

$i \in I$ için

$$d(R(x_i), R(y)) = d(x_i, R(y)) \leq d(x_i, y) = f(x_i) \leq r_i$$

olduğunudan

$$R(y) \in \bigcap_{i \in I} \bar{B}(x_i, r_i)$$

elde edilir ve dolayısıyla X hiperkonvekstir.

□

Teorem 4.2. (X, d) *bir metrik uzay olmak üzere aşağıdakiler denktir:*

i) X *hiperkonvekstir.*

ii) $X \subseteq Y$ *ise* $Y \to X$ *genişletmeyen bir retraksiyon vardır.*

iii) $y \notin X$ *olmak üzere* $X \cup \{y\} \to X$ *genişletmeyen bir retraksiyon vardır. [7]*

Kanıt. Önceki Teoreme göre $(i) \Rightarrow (ii)$ doğrudur. Çünkü $Y \to X$ genişletmeyen bir retraksiyon $X \to X$ birim dönüşümün genişletmeyen bir genişlemesidir. $(ii) \Rightarrow (iii)$ her durumda doğrudur. Öyleyse $(iii) \Rightarrow (i)$ olduğunu göstermeliyiz:

Her $i, j \in I$ için $d(x_i, x_j) \leq r_i + r_j$ olacak şekilde $(x_i)_{i \in I}$ noktaları ve $(r_i)_{i \in I}$ pozitif sayıları verilsin. $D = \{x_i |\ i \in I\}$ kümesi üzerinde tanımlı, her $i, j \in I$ için $d(x_i, x_j) \leq f(x_i) + f(x_j)$ koşulunu sağlayan tüm pozitif gerçel değerli fonksiyonların kümesi $\mathcal{F}$ olsun. $r : D \to \mathbb{R}$, $r(x_i) = r_i$ fonksiyonu bu kümeye ait olduğundan $\mathcal{F} \neq \emptyset$. $\mathcal{F}$ gerçel sayılar üzerindeki noktasal sıralamaya göre kısmi sıralıdır. $\mathcal{F}$ içinde herhangi azalan zincir alttan sınırlı olacağından Zorn Önsavı'na göre $f \leq r$ olacak şekilde bir $f \in \mathcal{F}$ minimal elemanı vardır. Şimdi f'nin minimalliğini kullanarak her $i, j \in I$ için

$$f(x_i) \leq d(x_i, x_j) + f(x_j)$$

eşitsizliğini gösterelim. Varsayalım ki

$$d(x_{i_0}, x_{j_0}) + f(x_{j_0}) < f(x_{i_0})$$

eşitsizliğini gerçekleyen $i_0, j_0 \in I$ var olsun. $F : D \to \mathbb{R}$,

$$F(x_i) = \begin{cases} f(x_i) & , \quad x_i \neq x_{i_0} \\ d(x_{i_0}, x_{j_0}) + f(x_{j_0}) & , \quad x_i = x_{i_0} \end{cases}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Her $k \in I$ için

$$\begin{aligned} d(x_{i_0}, x_k) &\leq d(x_{i_0}, x_{j_0}) + d(x_{j_0}, x_k) \\ &\leq d(x_{i_0}, x_{j_0}) + f(x_{j_0}) + f(x_k) \\ &\leq F(x_{i_0}) + F(x_k) \end{aligned}$$

olduğundan $F \in \mathcal{F}$ olur. Ancak $F \leq f$ ve $F \neq f$ olduğundan bu durum f'nin minimalliği ile çelişir. Şimdi D'ye, X'e ait olmayan bir y noktası ekleyelim. Yukarıda yapılan tartışmaya göre $d(x_i, y) := f(x_i)$ tanımıyla D üzerindeki metriği $D \cup \{y\}$'ye genişletmiş oluruz. Önerme 4.3 gereğince $D \cup \{y\}$ üzerindeki metrik ($D \cup \{y\}$ üzerindeki ve X üzerindeki uzaklıklar korunacak şekilde) $X \cup \{y\}$'ye genişletilebilir. O halde varsayım gereği $R : X \cup \{y\} \to X$ genişletmeyen dönüşümü vardır. Şimdi her $i \in I$ için

$$d(R(x_i), R(y)) = d(x_i, R(y)) \leq d(x_i, y) = f(x_i) \leq r_i$$

olduğunudan

$$R(y) \in \bigcap_{i \in I} \bar{B}(x_i, r_i)$$

elde edilir ve dolayısıyla X hiperkonvekstir. □

Önerme 4.3. *(X, d_X), (Y, d_Y) metrik uzaylar ve $d_X|_{X \cap Y} = d_Y|_{X \cap Y}$ olsun. Bu durumda $X \cup Y$ üzerinde öyle bir d metriği vardır ki $d|_X = d_X$ ve $d|_Y = d_Y$ olur.*

Kanıt. $x \in X$, $y \in Y$ için

$$d(x, y) := \inf_{u \in X \cap Y} \{d(x, u) + d(u, y)\}$$

olarak tanımlansın. $x_1, x_2 \in X$, $y \in Y$ verilsin. Her $u, v \in X \cap Y$ için

$$d(x_1, x_2) \leq d(x_1, u) + d(u, y) + d(y, v) + d(v, x_2)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} d(x_1, x_2) &\leq \inf_{u \in X \cap Y} \{d(x_1, u) + d(u, y)\} + \inf_{v \in X \cap Y} \{d(y, v) + d(v, x_2)\} \\ &\leq d(x_1, y) + d(y, x_2) \end{aligned}$$

elde edilir.

Ayrıca her $u \in X \cap Y$ için

$$d(x_1, y) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, u) + d(u, y)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} d(x_1, y) &\leq d(x_1, x_2) + \inf_{u \in X \cap Y} \{d(x_2, u) + d(u, y)\} \\ &\leq d(x_1, x_2) + d(x_2, y) \end{aligned}$$

şeklinde elde edilmiş olur. □

Uyarı 4.1. *$X \cap Y = \emptyset$ iken de $X \cup Y$ üzerinde $d|_X = d_X$ ve $d|_Y = d_Y$ olacak biçimde bir d metriği tanımlamak mümkündür. $x_0 \in X$ ve $y_0 \in Y$ seçelim ve bir $r > 0$ için $d(x, y) = r$ olarak tanımlayalım. Şimdi herhangi $x \in X$ ve $y \in Y$ için*

$$d(x, y) := d_X(x, x_0) + r + d_Y(y_0, y)$$

istenildiği gibi bir metrik tanımlar.

Önerme 4.4. *Hiperkonveks bir uzay tamdır.*

Kanıt. (X, d) hiperkonveks bir uzay ve $(x_n) \subseteq X$ bir Cauchy dizisi olsun. $\tilde{X}$, X'in tamlanışı olsun. O halde $x_n \to x_0$ olacak şekilde bir $x_0 \in \tilde{X}$ vardır. X hiperkonveks olduğundan injektiftir ve dolayısıyla $r : \tilde{X} \to X$ genişletmeyen retraksiyonu vardır. $r(x_0) = x_0'$ ise $r(x_n) \to x_0'$ ve $r(x_n) = x_n$ olduğundan $x_0' = x_0$ olup $x_0 \in X$ elde edilir. □

Teorem 4.5. *Hiperkonveks bir uzay kesin içseldir.*

Kanıt. (X, d) bir hiperkonveks uzay, $x, y \in X$ olsun ve x ile y'nin orta noktasının olmadığını varsayalım. Bir $z \notin X$ için $d(x, z) := \frac{1}{2}d(x, y)$ ve $d(z, y) := \frac{1}{2}d(x, y)$ tanımları ile $\{x, y, z\}$ kümesi üzerinde bir metrik tanımlamış oluruz. Önerme 4.3'ye göre $X \cup \{z\}$ kümesi üzerinde X üzerindeki ve $\{x, y, z\}$ üzerindeki metrikler korunacak şekilde bir metrik vardır. X hiperkonveks olduğundan injektiftir ve $r : X \cup \{z\} \to X$ genişletmeyen retraksiyonu vardır. $r(z) = z'$ ise

$$d(x, z) = \frac{1}{2}d(x, y) \geq d(x, z')$$

ve

$$d(y, z) = \frac{1}{2}d(x, y) \geq d(y, z')$$

olup buradan z''nün x ile y'nin orta noktası olduğu görülür. □

5 SIKI GERME

(X,d) sonlu bir metrik uzay olsun. $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ diyelim. Şimdi X uzayına yeni bir a noktası eklemeye çalışalım. Bunun için $i = 1, 2, ..., n$ olmak üzere $d(a, x_i)$ uzaklıklarını tanımlamalıyız. Bu aslında X üzerine $x_i \mapsto d(a, x_i)$ kuralıyla tanımlı sınırlı bir fonksiyon demek. Bu uzaklıkları mümkün olan en küçük şekilde tanımlamaya çalışalım. Üçgen eşitsizliğinden dolayı her $x_i, x_j \in X$ için

i) $d(x_i, a) + d(a, x_j) \geq d(x_i, x_j)$

ii) $d(a, x_i) + d(x_i, x_j) \geq d(a, x_j)$

eşitsizlikleri sağlanmalıdır. Ya da uzaklıkları fonksiyon olarak yazacak olursak;

i) $f(x_i) + f(x_j) \geq d(x_i, x_j)$

ii) $f(x_i) + d(x_i, x_j) \geq f(x_j)$

eşitsizlikleri sağlanmalıdır.

Uzaklıkları mümkün olan en küçük şekilde tanımlamak istediğimizden, yukarıdaki iki koşulu sağlayan öyle bir $f : X \to \mathbb{R}^{>0}$ arıyoruz ki, her $i = 1, 2, ..., n$ için $g(x_i) \leq f(x_i)$ olan bir $g : X \to \mathbb{R}^{>0}$ fonksiyonu en az bir $x_i \in X$ için $g(x_i) < f(x_i)$ oluyorsa yukarıdaki iki koşuldan en az birini sağlayamasın. Şimdi f'nin aşağıdaki koşulu sağladığını varsayalım.

iii) Her $x_i \in X$ için öyle bir $x_j \in X$ olsun ki $f(x_i) + f(x_j) = d(x_i, x_j)$ eşitliği sağlansın.

Bu durumda $g(x_i) \leq f(x_i)$ olan bir $g : X \to \mathbb{R}^{>0}$ fonksiyonu en az bir $x_i \in X$ için $g(x_i) < f(x_i)$ oluyorsa g fonksiyonu (i) koşulunu sağlayamaz. Çünkü (iii)'ye göre $f(x_i) + f(x_j) = d(x_i, x_j)$ koşulunu sağlayan bir $x_j \in X$ var ve bu x_j için $g(x_i) + g(x_j) < d(x_i, x_j)$ olur. Dolayısıyla (iii) koşulu uzaklıkları minimal tanımlamamızı garanti eden bir koşuldur.

Şimdi bir $f : X \to \mathbb{R}^{>0}$ fonksiyonu (i) ve (iii) koşullarını sağlasın. Bu takdirde (ii) koşululunun da sağlanacağını göreceğiz. Bunun için $x_i, x_j \in X$

noktalarını alalım. (iii)'den

$$f(x_j) + f(x_k) = d(x_j, x_k)$$

olacak şekilde $x_k \in X$ vardır. Üçgen eşitsizliğinden

$$d(x_j, x_k) \leq d(x_j, x_i) + d(x_i, x_k)$$

yazabiliriz ve böylece

$$f(x_j) \leq d(x_j, x_i) + d(x_i, x_k) - f(x_k) \tag{5.1}$$

elde edilir. Ayrıca (i)'den

$$f(x_k) \geq d(x_i, x_k) - f(x_i)$$

olup bunu (5.1) eşitsizliğinde yerine yazarsak

$$f(x_j) \leq d(x_j, x_i) + f(x_i)$$

olur, yani (ii) özelliği sağlanır.

Öyleyse aradığımız fonksiyonlar (i) ve (iii) özelliklerini sağlayan fonksiyonlardır. İşte bu fonksiyonların kümesine (maksimum metriği ile) X'in sıkı germesi denir ve $T(X)$ ile gösterilir. Yani

$$T(X) = \{f : X \to \mathbb{R}^{>0} : f \ (i) \text{ ve } (iii) \text{ özelliklerini sağlar}\}$$

şeklindedir.

Önerme 5.1. $X \hookrightarrow T(X)$ *izometrik gömmesi vardır.*

Kanıt.

$$\begin{aligned} \varphi : X &\longrightarrow \ T(X) \\ x_i &\longmapsto \ f_{x_i} : X \longrightarrow R \\ &\qquad\qquad x_j \longmapsto d(x_i, x_j) \end{aligned}$$

olarak tanımlansın.

i) $f_{x_i}(x_j) + f_{x_i}(x_k) = d(x_i, x_j) + d(x_i, x_k) \geq d(x_j, x_k)$

iii) Her $x_j \in X$ için $f_{x_i}(x_j) + f_{x_i}(x_i) = d(x_i, x_j) + d(x_i, x_i) = d(x_i, x_j)$

olduğundan $f_{x_i} \in T(X)$ olup φ iyi tanımlıdır. Ayrıca

$$d(x_i, x_j) \geq |d(x_i, x_k) - d(x_k, x_j)|$$

olduğundan

$$d_\infty(f_{x_i}, f_{x_j}) = d(x_i, x_j)$$

olup φ bir izometrik gömmedir. □

Teorem 5.2. *(X, d) sonlu bir metrik uzay, $y \in X$ ve $Y = X \backslash \{y\}$ olsun. Bu durumda $T(Y) \hookrightarrow T(X)$ izometrik gömmesi vardır.*

Kanıt. $f \in T(Y)$ verilsin. $\widetilde{f} : X \to \mathbb{R}^{\geq 0}$,

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x \in Y \\ \max\limits_{x \in Y}\{d(x, y) - f(x)\} & , \quad x = y \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda en az bir $x \in X$ için $\widetilde{f}(y) = d(x, y) - \widetilde{f}(x)$ ve her $x \in X$ için $\widetilde{f}(y) \geq d(x, y) - \widetilde{f}(x)$ olur. Öyleyse $\widetilde{f} \in T(X)$ olur. Böylece $T(Y)$'den alınan bir f'e $T(X)$'te bir $\widetilde{f}$ karşılık getirmiş olduk. Şimdi bu karşılık getirmenin izometrik gömme olduğunu görelim:

$$\begin{aligned} |\widetilde{f}(y) - \widetilde{g}(y)| &= |\max_{x \in Y}\{d(x, y) - f(x)\} - \max_{x \in Y}\{d(x, y) - g(x)\}| \\ &\leq \max_{x \in Y}\{f(x) - g(x)\} \end{aligned}$$

olduğundan $d_\infty(\widetilde{f}, \widetilde{g}) = d_\infty(f, g)$ elde edilir. □

Sonuç 5.3. *X ve Y sonlu metrik uzaylar ve $X \subseteq Y$ olsun. Bu durumda $T(X) \subseteq T(Y)$ olur.*

Teorem 5.4. *$X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ bir metrik uzay olmak üzere $T(X)$ tam metrik uzaydır.*

Kanıt. $(f_i) \subseteq T(X)$ Cauchy dizisi olsun. Öyleyse her $\varepsilon > 0$ için $n, m \geq N$ iken $\max\limits_{x \in X}|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde $N \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda her $x \in X$ için $n, m \geq N$ iken $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ olur ve dolayısıyla her $x \in X$ için $(f_n(x))$, $\mathbb{R}$'de bir Cauchy dizisidir. $\mathbb{R}$ tam olduğundan her $x \in X$ için $(f_n(x))$ yakınsak olur. $f_n(x) \to f(x)$ diyelim. Böylece X'ten $\mathbb{R}$'ye bir f fonksiyonu elde etmiş olduk. Maksimum metriğiyle $f_n \to f$ ve $f \in T(X)$ olduğunu göstereceğiz.

$\varepsilon > 0$ verilsin. $i = 1, 2, \cdots, n$ için $f_n(x_i) \to f(x_i)$ olduğundan $n \geq N_i$ iken $|f_n(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon$ olacak biçimde N_i doğal sayıları vardır. Bunların en büyüğüne N diyecek olursak $n \geq N$ olduğunda $d_\infty(f_n, f) < \varepsilon$ olacağı barizdir. Öyleyse $f_n \to f$ olur.

Şimdi $f \in T(X)$ olduğunu görelim.

i) x_i ve x_j X'te keyfi iki eleman olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n \in T(X)$ olduğundan $f_n(x_i) + f_n(x_j) \geq d(x_i, x_j)$ olur. Öyleyse $n \to \infty$ için $f(x_i) + f(x_j) \geq d(x_i, x_j)$ elde edilir.

iii) $x_i \in X$ verilsin ve her $x_j \in X$ için $f(x_i) + f(x_j) \neq d(x_i, x_j)$ olduğunu varsayalım. O zaman her $x_j \in X$ için $f(x_i) + f(x_j) > d(x_i, x_j)$ olur. $f(x_i)+f(x_j) = d(x_i, x_j)+\varepsilon_j$ olsun ve bu ε_j'lerin minimumlarının yarısından küçük pozitif bir ε seçelim. $f_n \to f$ olduğundan $n \geq N$ iken $d_\infty(f_n, f) < \varepsilon$ olacak şekilde $N \in \mathbb{N}$ vardır. $n_0 \geq N$ olsun. $f_{n_0} \in T(X)$ olduğundan $f_{n_0}(x_i) + f_{n_0}(x_j) = d(x_i, x_j)$ olacak şekilde bir $x_j \in X$ vardır. Öyleyse

$$|f_{n_0}(x_i)+f_{n_0}(x_j)-f(x_i)+f(x_j)| \leq |f_{n_0}(x_i)-f(x_i)|+|f_{n_0}(x_j)-f(x_j)| < 2\varepsilon$$

elde edilir. Oysa diğer yandan

$$\begin{aligned} |(f_{n_0}(x_i) + f_{n_0}(x_j)) - (f(x_i) + f(x_j))| &= |d(x_i, x_j) - (d(x_i, x_j) + \varepsilon_j)| \\ &= \varepsilon_j > 2\varepsilon \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise çelişkidir.

□

Şu ana kadar sonlu bir metrik uzayın sıkı germesiyle ilgilendik. Şimdi (X, d) herhangi bir metrik uzay olsun. Herhangi $x \in X$ için $f_x : X \to [0, \infty)$,

$$f_x(y) = d(x, y)$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. Bu fonksiyonlar aşağıdaki özelliklere sahiptir:

1) Üçgen eşitsizliği: Herhangi x, y,$a \in X$ için

$$d(x, y) \leq f_a(x) + f_a(y)$$

ve

$$f_a(x) \leq d(x, y) + f_a(y)\,.$$

2) Minimallik: $f : X \to [0, \infty)$ fonksiyonu her $x, y \in X$ için $d(x, y) \leq f(x) + f(y)$ koşulunu sağlasın ve bir $a \in X$ için $f \leq f_a$ (yani her $x \in X$ için $f(x) \leq f_a(x)$) olsun. Bu durumda $f = f_a$ olur. Çünkü ilk olarak $f(a) \leq f_a(a) = 0$ olup $f(a) = 0$ olur ve buradan da her $x \in X$ için

$$f_a(x) = d(x, a) \leq f(x) + f(a) = f(x)$$

elde edilir.

Tanım 5.1. *(X, d) bir metrik uzay olsun ve $f : X \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ fonksiyonu her $x, y \in X$ için $d(x, y) \leq f(x) + f(y)$ koşulunu sağlayan minimal bir fonksiyon olsun. Bu durumda f'ye X'in bir dışsal fonksiyonu denir. X'in tüm dışsal fonksiyonlarının kümesine de (supremum metriğiyle birlikte) X'in sıkı germesi denir ve $T(X)$ ile gösterilir.*

Açıkça her $x \in X$ için $f_x \in T(A)$ olur ve $e : X \to T(X)$, $e(a) = f_a$ dönüşümü bir izometrik gömmedir. Çünkü

$$d(e(a), e(b)) = \sup_{x \in X} |f_a(x) - f_b(x)| = \sup_{x \in X} |d(a, x) - d(b, x)| = d(a, b)$$

olur. Bu yüzden X ile $e(X)$'i özdeşleştirerek $X \subseteq T(X)$ olarak düşünebiliriz.

Önsav 5.5. *(X, d) bir metrik uzay, $A \subseteq X$ boş kümeden farklı ve $r : A \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ fonksiyonu her $x, y \in A$ için $d(x, y) \leq r(x) + r(y)$ eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda r'nin öyle bir $R : X \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ genişlemesi vardır ki her $x, y \in X$ için $d(x, y) \leq R(x) + R(y)$ eşitsizliği sağlanır. Üstelik X üzerinde $f \leq R$ olacak şekilde bir dışsal f fonksiyonu vardır.*

Kanıt. Herhangi bir $a \in A$ alalım ve

$$R(x) = d(x, a) + r(a)$$

olarak tanımlayalım. $x, y \in X$ verilsin. Eğer $x, y \in A$ ise

$$d(x, y) \leq r(x) + r(y) = R(x) + R(y)$$

olur. $x, y \in X - A$ ise

$$d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y) \leq R(x) + R(y)$$

olur. $x \in X - A$, $y \in A$ ise

$$d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,b) \leq d(x,a) + r(a) + r(b) = R(x) + R(b)$$

olur. Son iddia Zorn Önsavının sonucudur. □

Önerme 5.6. *Aşağıdaki önermeler doğrudur:*

1) $f \in T(X)$ *olmak üzere her* $x, y \in X$ *için*

$$f(x) \leq d(x,y) + f(y)$$

eşitsizliği geçerlidir. Üstelik

$$f(x) = \sup_{y \in X} |f(y) - f_x(y)| = d(f, e(x))$$

olur.

2) $f \in T(X)$, $\delta > 0$, *ve* $x \in X$ *olsun. Bu durumda*

$$f(x) + f(y) < d(x,y) + \delta$$

olacak şekişlde $y \in X$ *vardır.*

3) Eğer s, $T(X)$ *üzerinde bir dışsal fonksiyonsa,* $s \circ e$ *de* X *üzerinde bir dışsal fonksiyondur. Yani* $s \in T(T(X))$ *ise* $s \circ e \in T(X)$*'tir. [9]*

Kanıt.

1) Varsayalım ki X içinde $d(x_0, y_0) + f(y_0) < f(x_0)$ eşitsizliğini sağlayacak şekişde x_0 ve y_0 noktaları varolsun. $g : X \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ fonksiyonunu

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x \neq x_0 \text{ } ise \\ d(x_0, y_0) + f(y_0) & , \quad x = x_0 \text{ } ise \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Açıkça her $x \in X$ için $g(x) \leq f(x)$ olur ve özel olarak $g(x_0) < f(x_0)$ dır. Diğer yandan herhangi $y \in X - \{x_0\}$ için

$$\begin{aligned} d(x_0, y) &\leq d(x_0, y_0) + d(y_0, y) \\ &\leq d(x_0, y_0) + f(y_0) + f(y) \\ &= g(x_0) + g(y) \end{aligned}$$

olduğundan her $x, y \in X$ için $d(x, y) \leq g(x) + g(y)$ eşitsizliği sağlanır. Ancak bu durum f'nin minimalliği ile çelişir.

Burada ispatladığımız eşitsizliği dışsal fonksiyon tanımındaki eşitsizlikle birleştirirsek her $x, y \in X$ için

$$|f(y) - f_x(y)| \leq f(x)$$

elde ederiz. $y = x$ için eşitlik sağlandığından

$$f(x) = \sup_{y \in X} |f(y) - f_x(y)| = d(f, e(x))$$

olur.

2) Varsayalım ki öyle bir $x_0 \in X$ ve $\delta > 0$ varolsun ki (burada δ'yı $f(x_0)$'dan küçük seçebiliriz), her $y \in X$ için

$$d(x_0, y) + \delta \leq f(x_0) + f(y)$$

olsun. Bu durumda

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x \neq x_0 \ ise \\ f(x_0) - \delta & , \quad x = x_0 \ ise \end{cases}$$

olarak tanımlanan $g : X \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ fonksiyonu her $x, y \in X$ için

$$d(x, y) \leq g(x) + g(y)$$

eşitsizliğini sağlar. Ayrıca $g \leq f$ ve $g \neq f$ olduğundan bu durum f'nin minimalliği ile çelişir.

3) s, $T(X)$ üzerinde bir dışsal fonksiyon olsun. Bu durumda her $x, y \in X$ için

$$d(x, y) = d(f_x, f_y) \leq s(f_x) + s(f_y) = (s \circ e)(x) + (s \circ e)(y)$$

elde ederiz. Şimdi $s \circ e$'nin dışsal olmadığını varsayalım. Bu durumda öyle bir $h \in T(X)$ vardır ki her $x \in X$ için $h(x) \leq (s \circ e)(x)$ olur ve bir $x_0 \in X$ için eşitsizlik kesindir. Şimdi $t : T(X) \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ fonksiyonunu

$$t(f) = \begin{cases} s(f) & , \quad f \neq e(x_0) \ ise \\ h(x_0) & , \quad f = e(x_0) \ ise \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Eğer her $f, g \in T(X)$ için

$$d(f, g) \leq t(f) + t(g)$$

olduğunu gösterirsek bu durum s'nin minimalliğiyle çelişecek ve ispat tamamlanacaktır. Bunun için $f \neq e(x_0)$ olmak üzere

$$d(f, e(x_0)) \leq t(f) + t(e(x_0))$$

olduğunu görmek yeterlidir. Her $\delta > 0$ için $f(x_0) + f(y) < d(x_0, y) + \delta$ olacak şekilde bir $y \in X$ vardır. Eğer $y = x_0$ ise $f(x_0) < \frac{1}{2}\delta$ olup

$$d(f, e(x_0)) = f(x_0) < \frac{1}{2}\delta + t(f) + t(e(x_0))$$

elde edilir. Eğer $y \neq x_0$ ise

$$d(f, e(x_0)) + f(y) - \delta = f(x_0) + f(y) - \delta < d(x_0, y)$$

ve

$$d(x_0, y) \leq h(x_0) + h(y) \leq h(x_0) + (s \circ e)(y) = t(e(x_0)) + t(e(y))$$

elde edilir.

Ayrıca s dışsal fonksiyon olduğundan

$$t(e(y)) = s(e(y)) \leq s(f) + d(f, e(y)) = t(f) + f(y)$$

ve böylece her $\delta > 0$ için

$$d(f, e(x_0)) + f(y) - \delta < t(e(x_0)) + t(f) + f(y)$$

elde edilir. Buradan da $\delta \to 0$ için

$$d(f, e(x_0)) \leq t(f) + t(e(x_0))$$

bulunur.

$\square$

Önerme 5.7. *Aşağıdaki ifadeler doğrudur:*

1) $T(X)$ hiperkonvekstir.

2) $T(X)$'in $e(X)$'i kapsayan hiçbir özalt kümesi injektif değildir. Üstelik X'e izometrik bir kümeyi kapsayan herhangi bir minimal hiperkonveks küme $T(X)$'e izometriktir. [9]

Kanıt.

1) Her i ve j için $d(f_i, f_j) \leq r_i + r_j$ olacak şekilde $\{f_i\} \subseteq T(X)$ ailesi ve $\{r_i\}$ pozitif sayıları verilsin. $r : \{f_i\} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ fonksiyonu $r(f_i) = r_i$ şeklinde tanımlansın. Önsav 5.5 gereğince r'yi, her $f, g \in T(X)$ için

$$d(f, g) \leq r(f) + r(g)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $T(X)$'e genişletebiliriz. Yine Önsav 5.5 gereğince $T(X)$ üzerinde $h \leq r$ olacak şekilde bir h dışsal fonksiyonu vardır. Önerme 5.6'nin üçüncü maddesi gereğince $h \circ e$, X üzerinde bir dışsal fonksiyondur, yani $h \circ e \in T(X)$. Ayrıca h, $T(X)$ üzerinde dışsal fonksiyon olduğundan her $f \in T(X)$ ve her $x \in X$ için

$$|f(x) - (h \circ e)(x)| = |d(f, e(x)) - (h \circ e)(x)| \leq h(f) \leq r(f)$$

olup $d(f, h \circ e) \leq r(f)$ elde edilir. Öyleyse

$$h \circ e \in \bigcap_{f \in T(X)} B(f, r(f)) \subseteq \bigcap_i B(f_i, r_i)$$

olup $T(X)$ hiperkonvekstir.

2) $e(X) \subseteq H \subseteq T(X)$ olacak şekilde bir H kümesinin hiperkonveks olduğunu varsayalım. Öyleyse $R : T(X) \to H$ genişletmeyen bir retraksiyon vardır. O zaman her $f \in T(X)$ ve her $x \in X$ için

$$d(R(f), e(x)) = R(f)(x) \leq d(f, e(x)) = f(x)$$

olduğundan $R(f) = f$ ve dolayısıyla $H = T(X)$ olur. Şimdi $\mathcal{H}$, X'in izometrik bir kopyasını kapsayan minimal hiperkonveks bir küme olsun.

$e(X)$, X'e izometrik olduğundan $i : e(X) \to \mathcal{H}$ izometrik gömmesi vardır. $\mathcal{H}$ hiperkonveks olduğundan i'nin $R_1 : T(X) \to \mathcal{H}$ şeklinde genişletmeyen bir genişlemesi vardır. $T(X)$ hiperkonveks olduğundan $i^{-1} : i(e(X)) \to e(X) \subseteq T(X)$ dönüşümünün $R_2 : \mathcal{H} \to T(X)$ şeklinde genişletmeyen bir genişlemesi vardır. Şimdi $R_2 \circ R_1 : T(X) \to T(X)$ dönüşümünü düşünelim. Bu dönüşüm $e(X)$ üzerinde birim dönüşümdür. Ayrıca iki genişletmeyen dönüşümün bileşkesi olduğundan genişletmeyen bir dönüşümdür. Öyleyse her $f \in T(X)$ ve her $x \in X$ için

$$d((R_2 \circ R_1)(f), e(x)) \leq d(f, e(x))$$

yani

$$(R_2 \circ R_1)(f)(x) \leq f(x)$$

elde edilir. Bu durumda $T(X)$'in tanımından $(R_2 \circ R_1)(f) = f$ olup $R_2 \circ R_1$ tüm $T(X)$ üzerinde birim dönüşüm olur. Öyleyse R_1 ve R_2 genişletmeyen dönüşüm olduklarından ikisi de izometri olmak zorundadırlar.

□

Tanım 5.2. *(X, d) bir metrik uzay olsun. Eğer X'i kapsayan bir Y kümesi injektif oluyorsa, üstelik X'i kapsayan ve Y'nin özalt kümesi olan hiçbir küme injektif olmuyorsa Y'ye X'in injektif zarfı denir.*

Önerme 5.6'ye göre bir metrik uzayın injektif zarfı vardır, izometri farkıyla tek türlü belirlidir ve uzayın sıkı germesine izometriktir.

Teorem 5.8. *$A \subseteq (\mathbb{R}^2, d_\infty)$ boştan farklı bir alt küme olmak üzere A'yı kapsayan kesin içsel, kapalı ve bu özellikleriyle minimal bir küme, A'nın $T(A)$ sıkı germesine izometriktir.*

Bu teoremin ispatı için $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$'un boştan farklı, kapalı ve kesin içsel bir alt uzayının injektif olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Çünkü $\mathcal{H}$, A'yı kapsayan minimal, kesin içsel ve kapalı bir küme ise $\mathcal{H}$ aynı zamanda A'yı kapsayan minimal hiperkonveks küme olur. (Böyle olmasaydı $A \subseteq B \subset \mathcal{H}$ olacak şekilde bir B kümesi hiperkonveks olurdu. Ancak hiperkonveks bir küme aynı zamanda kesin içsel ve tam olduğundan $B \subseteq (\mathbb{R}^2, d_\infty)$ kapalı ve kesin içsel olur ve bu durum $\mathcal{H}$'nin tanımıyla çelişirdi). Bu durumda Önerme 5.7'nin ikinci maddesine göre $\mathcal{H}$, A'nın sıkı germesi $T(A)$'ya izometrik olur. Öyleyse Teorem 5.8 aşağıdaki teoremin bir sonucudur:

Teorem 5.9. $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$*'un boştan farklı, kapalı ve kesin içsel bir alt kümesi injektiftir (hiperkonvekstir).*

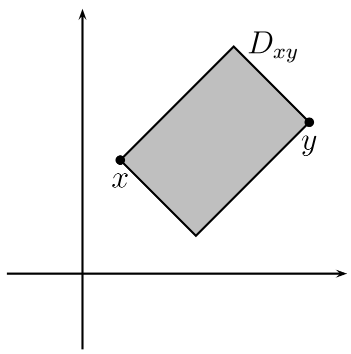
Bir $A \subseteq (\mathbb{R}^2, d_\infty)$ alt kümesinin injektif olduğunu göstermek için, her $x \in \mathbb{R}^2 - A$ için $r_x : A \cup \{x\} \to A$ genişletmeyen bir retraksiyon bulmak yeterlidir. Çünkü $A \cup \{y\}$ üzerindeki herhangi bir metrik Önerme 4.3 gereğince $\mathbb{R}^2 \cup \{y\}$'e genişletilebilir. $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ injektif olduğundan $r : \mathbb{R}^2 \cup \{y\} \to \mathbb{R}^2$ bir genişletmeyen retraksiyon vardır. Bu durumda $r(y) = x$ ve $r|_{A\cup\{y\}} = r'$ olmak üzere, $r_x \circ r' : A \cup \{y\} \to A$ bir genişletmeyen retraksiyon olur ve böylece Teorem 4.2 gereğince A injektif olur.

İspata devam etmeden önce ispat esnasında kullanacağımız birkaç tanım ve önerme vereceğiz:

Tanım 5.3. $x, y \in (\mathbb{R}^n, d_\infty)$ *olmak üzere* x *ile* y*'nin tüm ara noktalarının kümesi*

$$D_{xy} = \{z \in \mathbb{R}^n |\ d_\infty(x, z) + d_\infty(z, y) = d_\infty(x, y)\}$$

olarak tanımlansın. $n = 2$ *için* D_{xy} *kümesi Şekil 5.1'deki gibi bir dikdörtgendir.*



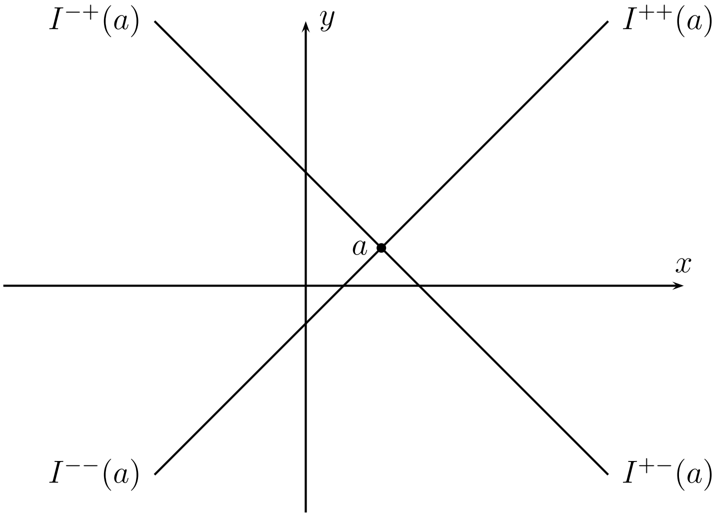
Şekil 5.1: $x, y \in (\mathbb{R}^2, d_\infty)$ için D_{xy} dikdörtgeni.

Bu tanıma göre x ile y'yi birleştiren her jeodezik segment D_{xy} içinde kalacaktır. Ayrıca $y \in S_i^\varepsilon(x)$ ise $D_{xy} = S_i^\varepsilon(x) \cap S_i^{-\varepsilon}(y)$ olacağı açıktır.

Tanım 5.4. *$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ve $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm$ olmak üzere x'in $\varepsilon_1\varepsilon_2$ ışını*

$$I^{\varepsilon_1\varepsilon_2}(x) = \{(x_1 + \varepsilon_1 t, x_2 + \varepsilon_2 t) |\ t \geq 0\}$$

olarak tanımlansın. Şekil 5.2'te bir a noktasının tüm ışınları gösterilmiştir.



Şekil 5.2: $a \in \mathbb{R}^2$ noktasının ışınları.

Bu tanıma göre $I^{\varepsilon_1\varepsilon_2}(x) = S_1^{\varepsilon_1}(x) \cap S_2^{\varepsilon_2}(x)$ olacağı kolaylıkla görülebilir.

Önerme 5.10. *$x \in \mathbb{R}^2$, $y \in S_1^{\varepsilon}(x)$, $z \in S_2^{\delta}(x)$ ve α, y ile z arasında bir jeodezik olsun. Bu durumda en az bir $t \in [0, 1]$ için $\alpha(t) \in I^{\varepsilon\delta}(x)$ olur.*

Kanıt. y veya z $S_1^{\varepsilon}(x) \cap S_2^{\delta}(x) = I^{\varepsilon\delta}(x)$ kümesine aitse $\alpha(0)$ veya $\alpha(1)$ $I^{\varepsilon\delta}(x)$ içinde olacaktır. Şimdi $y \in S_1^{\varepsilon} - I^{\varepsilon\delta}(x)$ ve $z \in S_2^{\delta}(x) - I^{\varepsilon\delta}(x)$ olsun. Bu durumda $D_{yz}(x) - I^{\varepsilon\delta}(x)$ bağlantısız bir küme olur. Çünkü $D_{yz} \cap S_1^{\varepsilon}(x)$ ve $D_{yz} \cap S_2^{\delta}(x)$, $D_{yz}(x) - I^{\varepsilon\delta}(x)$ kümesinin bir ayrışımını verirler. y ile z $D_{yz}(x) - I^{\varepsilon\delta}(x)$ kümesinin farklı bağlantı bileşenlerine ait olduğundan $\alpha(t) \in I^{\varepsilon\delta}(x)$ olacak şekilde bir $t \in (0, 1)$ vardır. □

Önerme 5.11. *$A \subseteq \mathbb{R}^2$ kesin içsel bir alt uzay ve $x \in \mathbb{R}^2$ olsun. Bu durumda eğer x'in her sektöründe A'nın en az bir elemanı varsa $x \in A$ olur.*

Kanıt. $a_1 \in S_1^{+}(x)$, $a_2 \in S_2^{+}(x)$ olsun. A kesin içsel olduğundan a_1 ile a_2'yi birleştiren bir α jeodeziği vardır. Önerme 5.10'e göre bir $t_0 \in [0, 1]$ için $\alpha(t_0) \in$

$I^{++}(x)$ olur. $b_1 \in S_1^-(x)$ ve $b_2 \in S_2^-(x)$ ise bu iki noktayı birleştiren bir β jeodeziği vardır ve benzer şekilde bir $t_1 \in [0,1]$ için $\beta(t_1) \in I^{--}(x)$ olur. Öyleyse uygun $t, k \geq 0$ için $\alpha(t_0) = (x_1 + t, x_2 + t)$ ve $\beta(t_1) = (x_1 - k, x_2 - k)$ olur. Bu iki noktayı birleştiren tek jeodezik Öklidyen jeodezik olduğundan $x \in A$ elde edilir. □

Önsav 5.12. *$A \subseteq \mathbb{R}^n$ bağlantılı bir alt uzay ve $x \in \mathbb{R}^n$ olsun. Eğer x'in iki zıt sektörü A ile kesişiyor, ancak başka hiçbir sektörü A ile kesişmiyorsa $x \in A$ olur (Burada zıt iki sektörle kastedeilen $S_i^+(x)$ ve $S_i^-(x)$ şeklinde iki sektördür).*

Kanıt. A kümesi yanlızca $S_i^+(x)$ ve $S_i^-(x)$ şeklinde iki sektörle kesişsin ancak $x \notin A$ olsun. Bu durumda $(S_i^+(x)) \cap A$ ve $(S_i^-(x)) \cap A$ kümeleri A için bir ayrışım oluştururlar ve A bağlantılı olamaz. □

Şimdi Teorem 5.9'un, ispatını verelim:

Kanıt (Teorem 5.9). A kesin içsel ve kapalı olsun. $p \in \mathbb{R}^2 - A$ verilsin. 3 ayrı durum söz konusu:

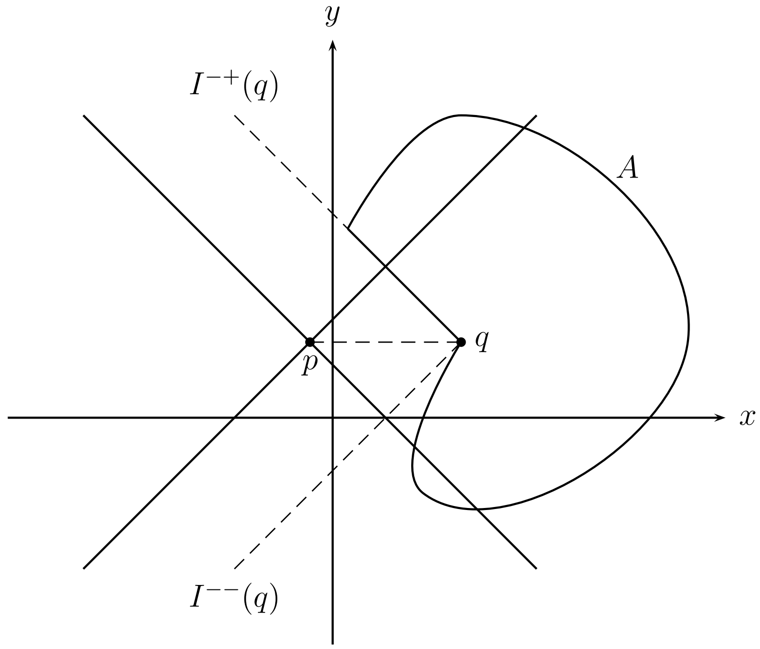
1) p'nin üç sektörünün A ile kesiştiğini varsayalım. Genelliği bozmaksızın bunları $S_1^+(p)$, $S_2^+(p)$ ve $S_2^-(p)$ olarak alabiliriz.

$$\inf\{t > 0 \mid \left[I^{-+}(p_1 + t, p_2) \cup I^{--}(p_1 + t, p_2)\right] \cap A \neq \varnothing\} =: t_0$$

olsun. $q = (p_1 + t_0, p_2) \in A$ olduğunu ispatlayalım: Böyle olmadığını varsayalım. Bu durumda t_0 yukarıda infimumu alınan kümeye ait değildir. Çünkü ait olsaydı q'nun tüm sektörleri A kümesi ile kesişirdi ve Önerme 5.11 gereğince $q \in A$ olurdu (bakınız Şekil 5.3 ve Şekil 5.4).

Öyleyse yeterince küçük öyle bir $r > 0$ sayısı vardır ki, her $\varepsilon \leq r$ için $q_\varepsilon = (p_1 + t_0 + \varepsilon, p_2)$ noktasının her sektörü A ile kesişir ve Önerme 5.11 gereğince $q_\varepsilon \in A$ olur. Ancak bu durumda $q \notin A$ olması A'nın kapalılığı ile çelişir. Şimdi

$$\begin{aligned} r : \{p\} \cup A &\longrightarrow A \\ p &\longmapsto q \end{aligned}$$



Şekil 5.3: Üç sektör durumu

retraksiyonunu tanımlayalım. Bu genişletmeyen bir retraksiyondur. Bunu ispatlayalım: $a \in A$ olsun. q noktasının tanımı gereği $a \notin (S_1^-(q))$ olur. Öyleyse $a \in S_1^+(q)$, $a \in S_2^+(q)$ veya $a \in S_2^-(q)$ olur.

$a \in S_1^+(q)$ ise

$$\begin{aligned} d_\infty(a,q) &= a_1 - q_1 = a_1 - (p_1 + t_0) \\ &< a_1 - p_1 \leq d_\infty(a,p), \end{aligned}$$

$a \in S_2^+(q)$ ise

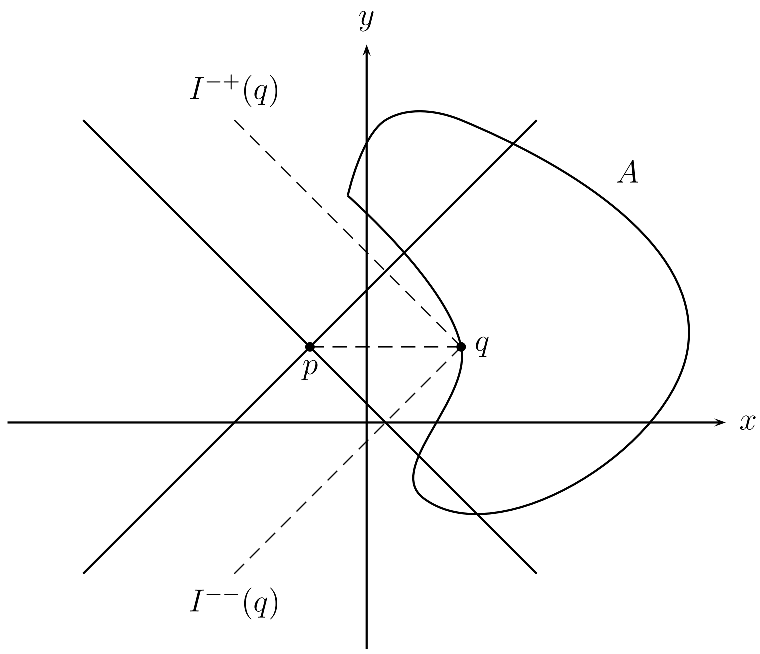
$$d_\infty(a,q) = a_2 - p_2 \leq d_\infty(a,p),$$

$a \in S_2^-(q)$ ise

$$d_\infty(a,q) = p_2 - a_2 \leq d_\infty(a,p)$$

elde edilir. O halde $d_\infty(a,q) \leq d_\infty(a,p)$ olup r genişletmeyen retraksiyondur.

2) p'nin iki sektörünün A ile kesiştiğini varsayalım. A kümesi kesin içsel olduğundan ve kesin içsel bir uzay bağlantılı olacağından Önsav 5.12 gereğince



Şekil 5.4: Üç sektör durumu

bu iki sektör zıt iki sektör olamaz. Dolayısıyla genelliği bozmaksızın bu iki sektörün $S_1^+(p)$ ile $S_2^+(p)$ olduğunu varsayabiliriz.

$$\inf\{t > 0 \mid I^{+-}(p_1 + t, p_2 + t) \cap A \neq \varnothing\} =: t_0$$

ve

$$\inf\{t > 0 \mid I^{-+}(p_1 + t, p_2 + t) \cap A \neq \varnothing\} =: t_1$$

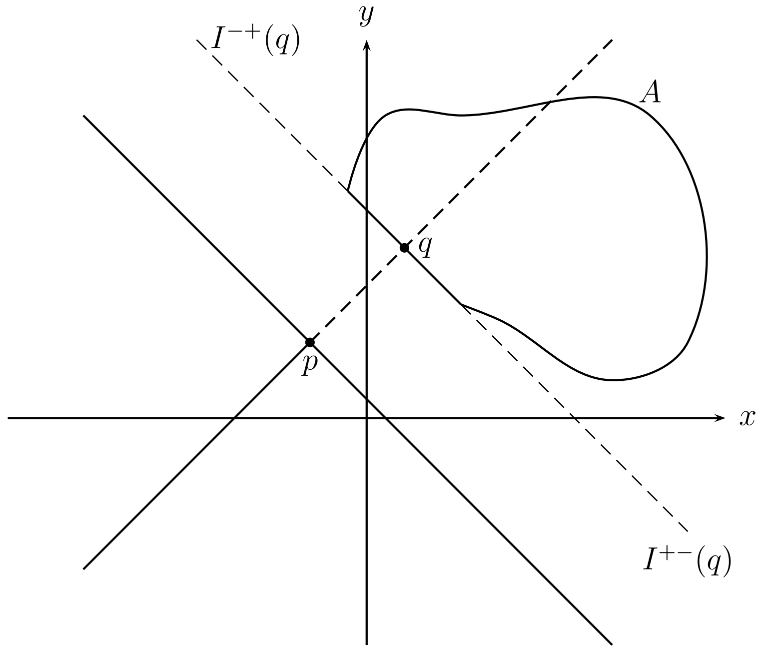
olsun. Genelliği bozmaksızın $t_0 \leq t_1$ varsayabiliriz. $q = (p_1 + t_0, p_2 + t_0)$ diyelim.

Şimdi $r : A \cup \{p\} \to A \cup \{q\}$,

$$r(x) = \begin{cases} x & , \quad x \in A \\ q & , \quad x = p \end{cases}$$

dönüşümünü tanımlayalım. Bu dönüşüm genişletmeyen bir dönüşümdür. Bunu ispatlayalım: $a \in A$ verilsin. $a \in S_1^+(q)$ veya $a \in S_2^+(q)$ olur. $a \in S_1^+(q)$ ise

$$d_\infty(a, q) = a_1 - q_1 = a_1 - (p_1 + t_0) < a_1 - p_1 \leq d_\infty(a, p)$$



Şekil 5.5: $q \in A$ olan iki sektör durumu

ve $a \in S_2^+(q)$ ise

$$d_\infty(a,q) = a_2 - q_2 = a_2 - (p_2 + t_0) < a_2 - p_2 \leq d_\infty(a,p)$$

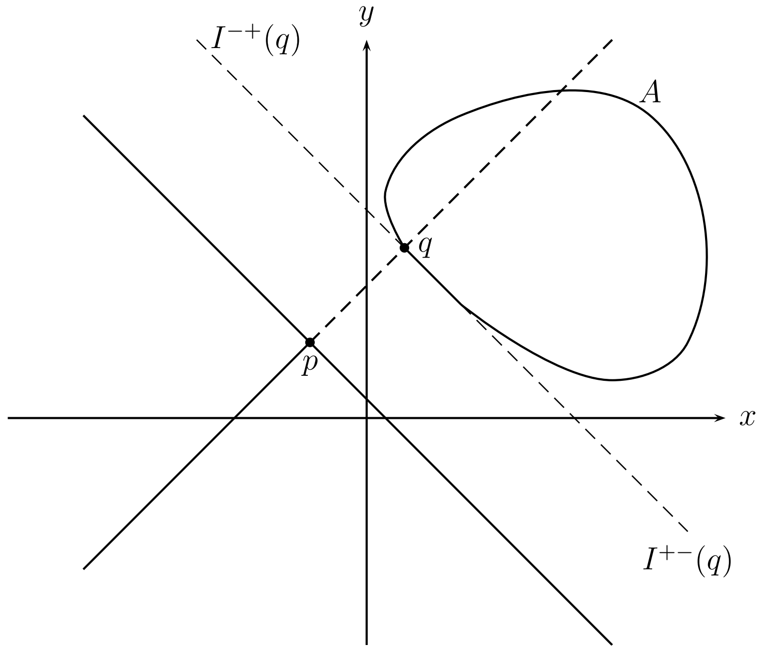
elde edilir. Öyleyse her $a \in A$ için $d_\infty(a,q) < d_\infty(a,p)$ olup, r dönüşümü genişletmeyen bir dönüşümdür. Eğer $q \in A$ ise $r : A \cup \{p\} \to A$ genişletmeyen bir retraksiyon olur (bkz. Şekil 5.5, Şekil 5.6 ve Şekil 5.7).

Şimdi $q \notin A$ olsun. Bu durumda $t_0 < t_1$ olur. Bunu görmek için $t_0 = t_1$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde öyle bir $r > 0$ sayısı bulunabilir ki ($r = \min\{\delta > 0 | \ (p_1 + t_0 + \delta, p_2 + t_0 + \delta) \in A\}$ seçilebilir, A kapalı olduğundan bu minimum vardır) her $\varepsilon \leq r$ için

$$q_{\varepsilon\varepsilon} = (p_1 + t_0 + \varepsilon, p_2 + t_0 + \varepsilon)$$

noktasının her sektörü A ile kesişir ve Önerme 5.11 gereğince $q_{\varepsilon\varepsilon} \in A$ olur. Ancak bu durumda $q \notin A$ olması A'nın kapalılığı ile çelişir (bkz. Şekil 5.8 ve Şekil 5.9).

A kapalı olduğundan uygun bir $\varepsilon_1 > 0$ sayısı için q'nun $\bar{B}(q, \varepsilon_1)$ kapalı yuvarı A ile kesişmez. $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, t_1 - t_0\}$ olarak seçilirse $q_\varepsilon = (p_1 + t_0 + \varepsilon, p_2 + t_0)$ noktasının yanlızca üç sektörü ($S_1^+(q)$, $S_2^+(q)$ ve $S_2^-(q)$) A



Şekil 5.6: $q \in A$ olan iki sektör durumu

ile kesişir ve dolayısıyla bu nokta A'nın tüm noktalarına q'dan daha yakın olur. Böylece birinci durumda olduğu gibi $r' : A \cup \{q_\varepsilon\} \to A$ genişletmeyen bir retraksiyon bulabiliriz. O halde $q' = r'(q_\varepsilon)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} R : \{p\} \cup A &\longrightarrow A \\ p &\longmapsto q' \end{aligned}$$

retraksiyonu genişletmeyen bir retraksiyon olur.

3) p'nin yanlızca bir sektörü A kümesi ile kesişsin ve bu sektörün $S_1^+(p)$ olduğunu varsayalım.

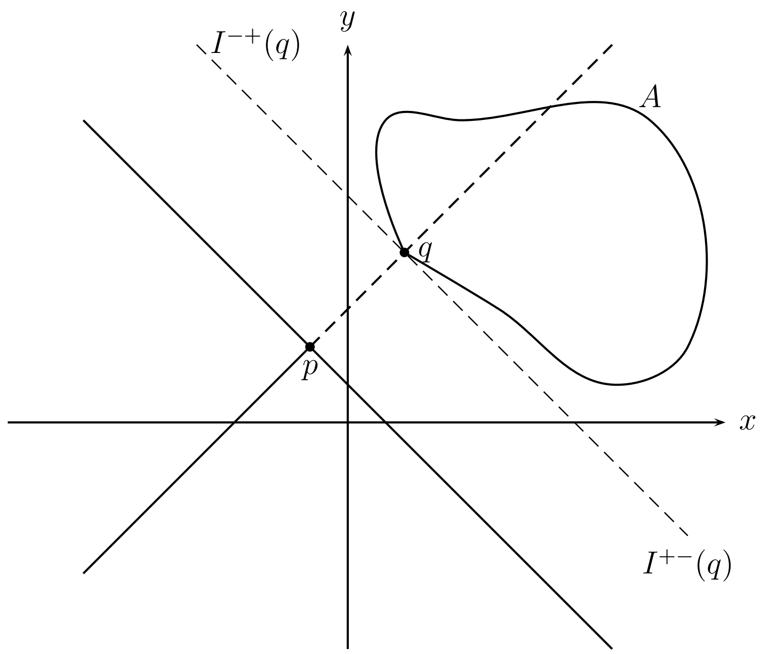
$$\inf\{t > 0 \mid \left[I^{++}(p_1 + t, p_2) \cup I^{+-}(p_1 + t, p_2)\right] \cap A \neq \varnothing\} =: t_0$$

olarak tanımlansın ve $q = (p_1 + t_0, p_2)$ diyelim.

Şimdi $r : A \cup \{p\} \to A \cup \{q\}$,

$$r(x) = \begin{cases} x & , \quad x \in A \\ q & , \quad x = p \end{cases}$$

dönüşümünü tanımlayalım. Bu dönüşüm genişletmeyen bir dönüşümdür. Bunu ispatlayalım: $a \in A$ verilsin. q'nun tanımı gereği $a \in S_1^+(q)$ olur. Bu



Şekil 5.7: $q \in A$ olan iki sektör durumu

durumda

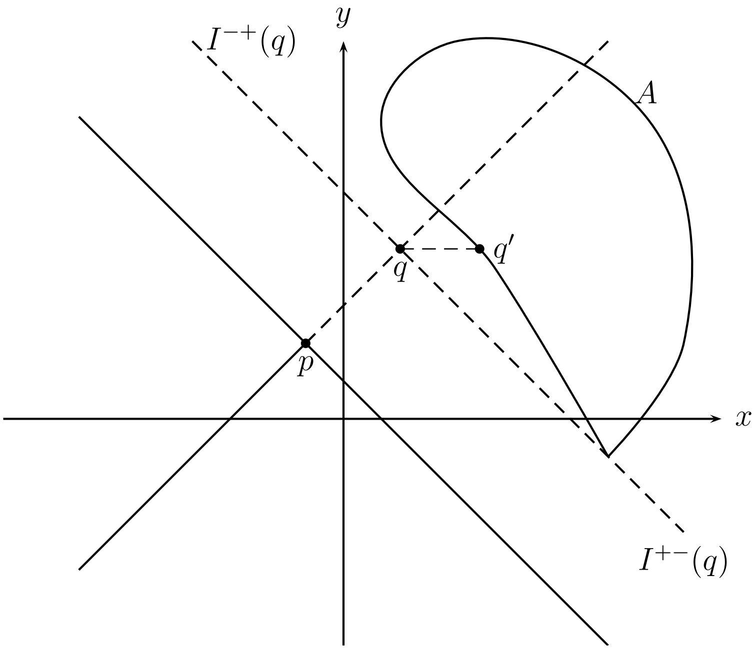
$$d_\infty(a,q) = a_1 - q_1 = a_1 - (p_1 + t_0) < a_1 - p_1 \leq d_\infty(a,p)$$

olduğundan r genişletmeyen bir dönüşüm olur. Eğer $q \in A$ ise

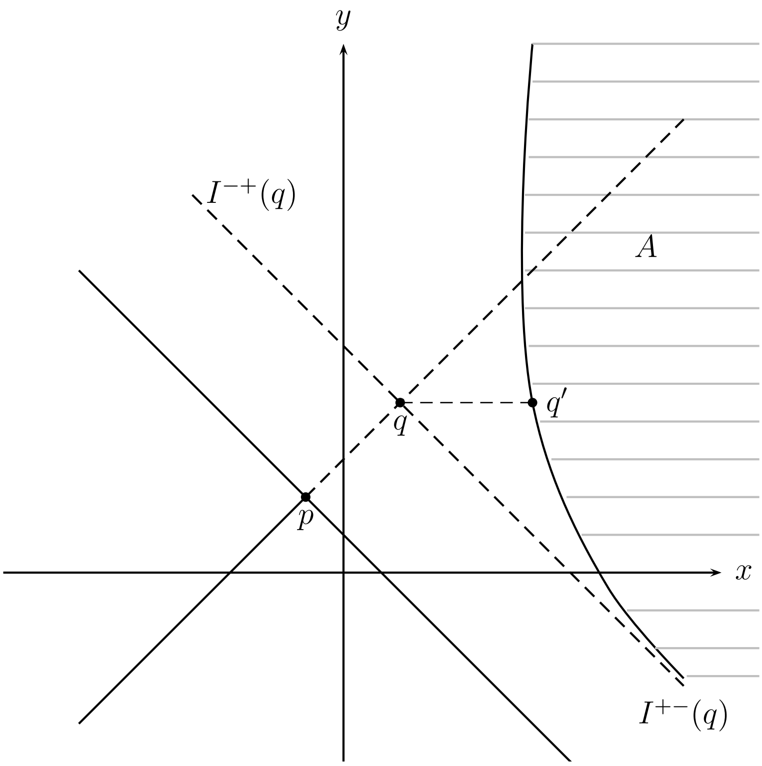
$$r : A \cup \{p\} \to A$$

genişletmeyen bir retraksiyon olur (bkz Şekil 5.10).

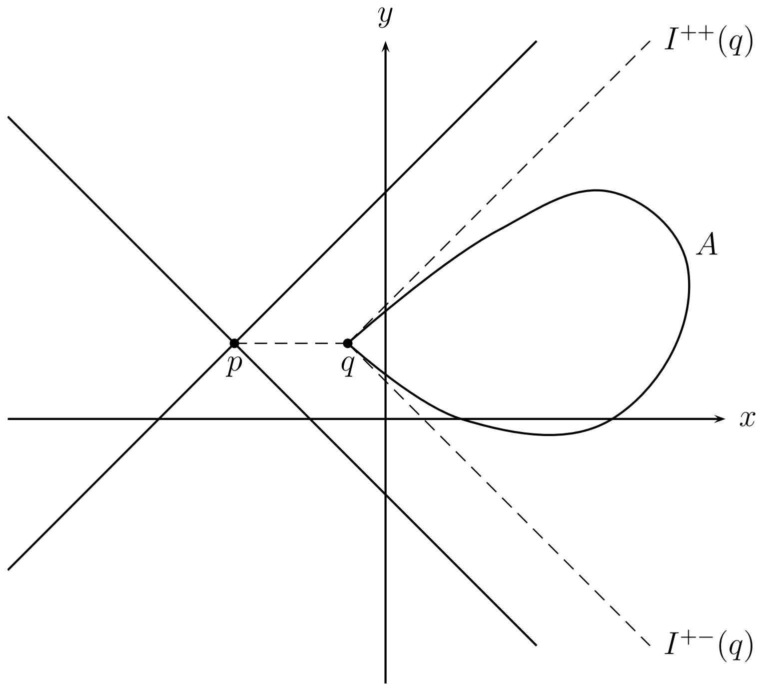
Şimdi $q \notin A$ olsun. Bu durumda yeterince küçük bir $\varepsilon \geq 0$ için A kümesi, $q_\varepsilon = (p_1 + t_0 + \varepsilon, p_2)$ noktasının $S_1^+(q)$ sektörü ve $S_2^+(q)$ ile $S_2^-(q)$ sektörlerinden en az biriyle kesişir ve $S_1^-(q)$ sektörüyle kesişmez. (Eğer $t_0 > 0$ sayısı infimumu olarak tanımlandığı kümenin elemanıysa $\varepsilon = 0$, yani $q_\varepsilon = q$ olarak seçilebilir. Aksi takdirde A kümesi kapalı olduğundan q'nun bir $\delta > 0$ kapalı yuvarı A ile kesişmez ve $0 < \varepsilon \leq \delta$ olarak seçilebilir). Dolayısıyla q_ε noktası A'nın tüm noktalarına q'dan daha yakın olur. Böylece 1. ve 2. durumda olduğu gibi $r' : A \cup \{q_\varepsilon\} \to A$ genişletmeyen bir retraksiyon bulabiliriz (bkz. Şekil 5.11-5.15).



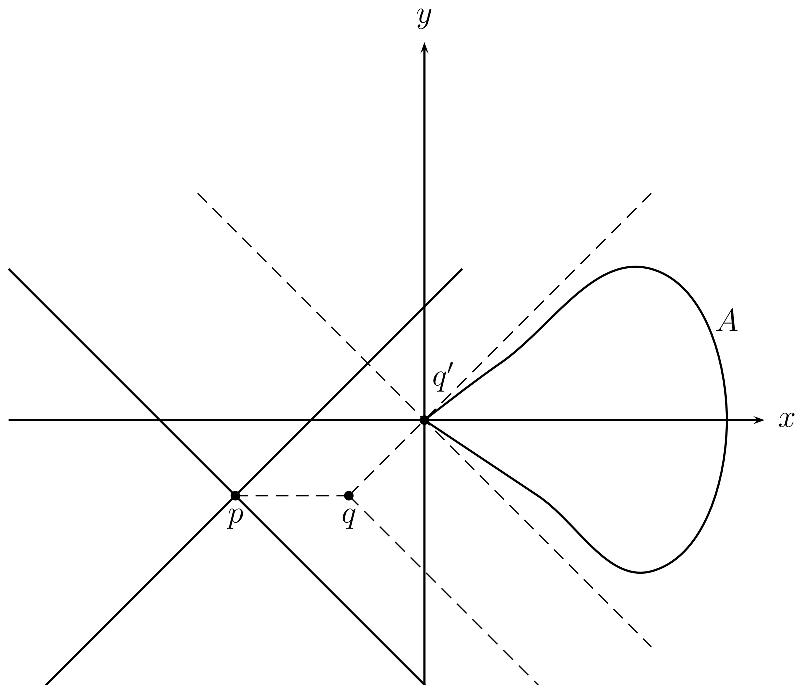
Şekil 5.8: $q \notin A$ olan iki sektör durumu



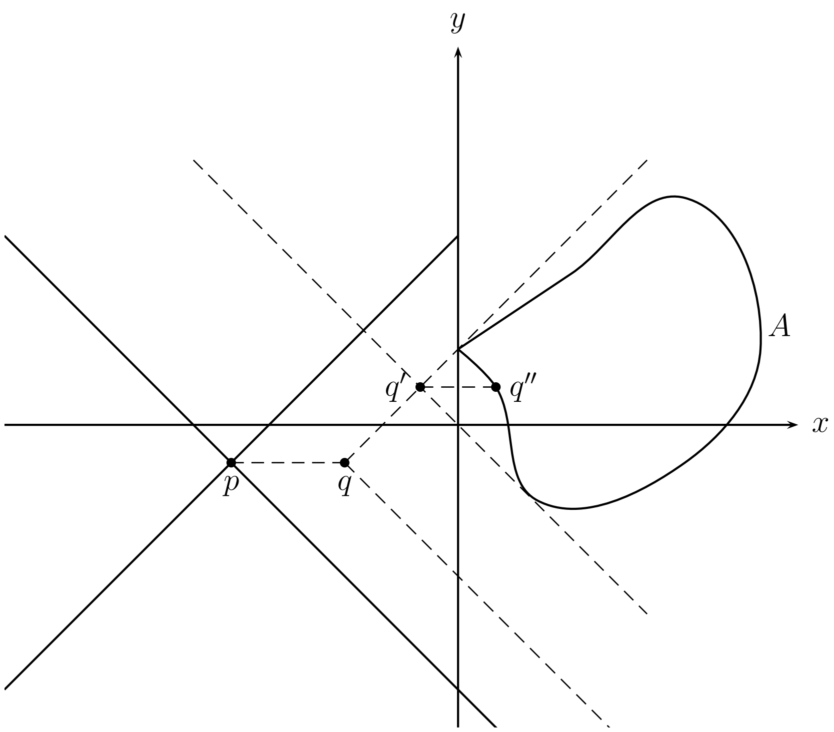
Şekil 5.9: $q \notin A$ olan iki sektör durumu



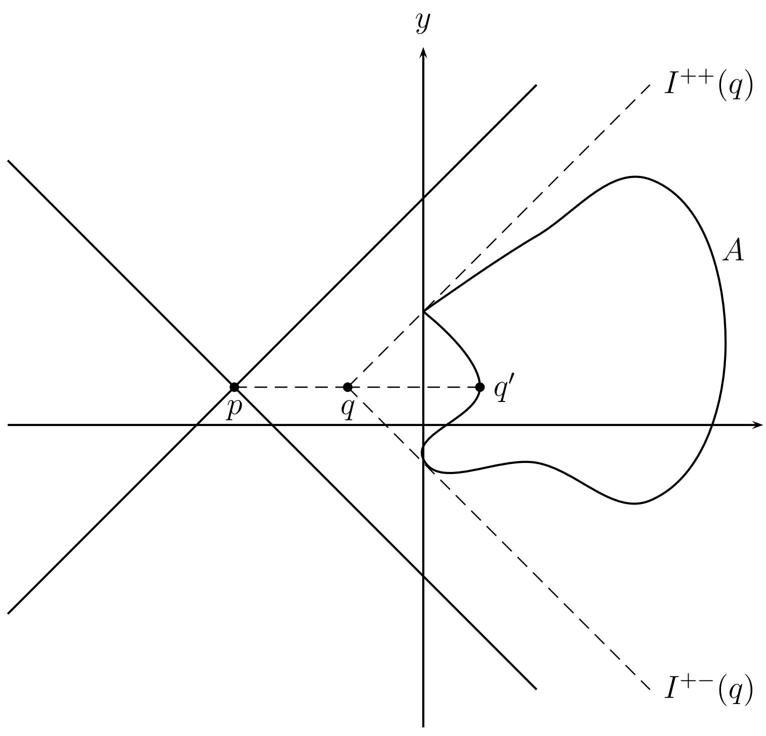
Şekil 5.10: $q \in A$ olan tek sektör durumu



Şekil 5.11: $q \notin A$ olan tek sektör durumu



Şekil 5.12: $q \notin A$ olan tek sektör durumu

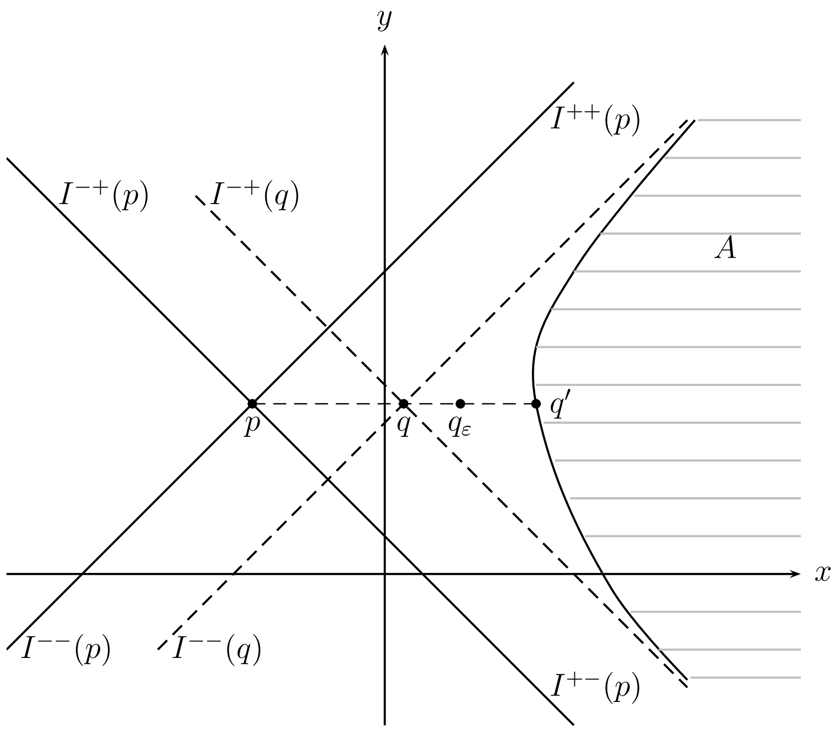


Şekil 5.13: $q \notin A$ olan tek sektör durumu

O halde $r'(q_\varepsilon) = q'$ olmak üzere

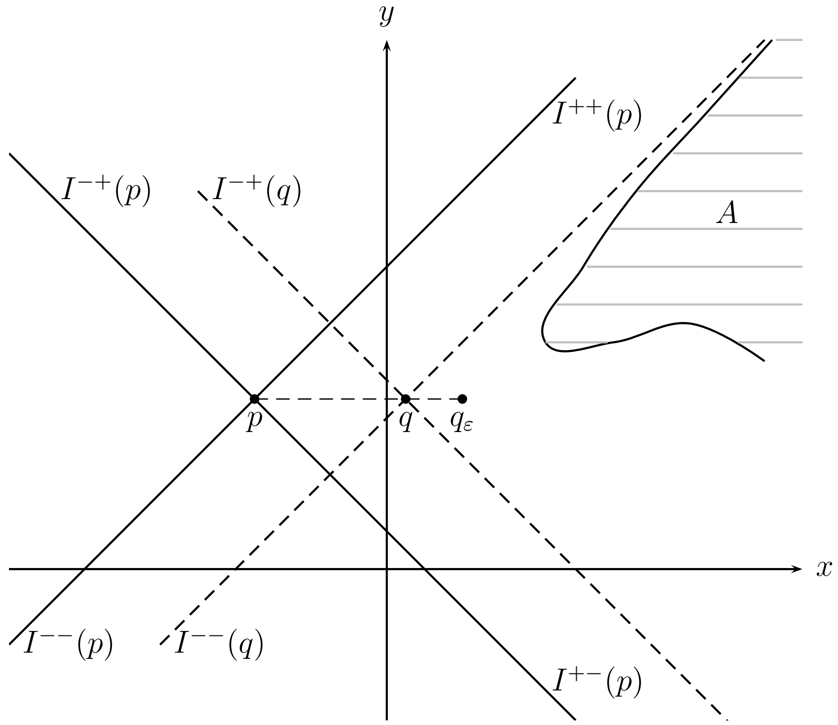
$$\begin{aligned} R : \{p\} \cup A &\longrightarrow A \\ p &\longmapsto q' \end{aligned}$$

retraksiyonu genişletmeyen bir retraksiyon olur.



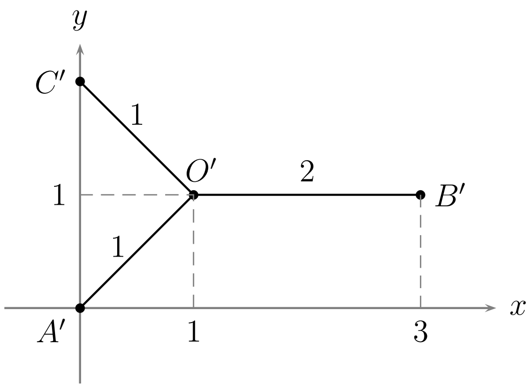
Şekil 5.14: $q \notin A$ olan tek sektör durumu

$\square$



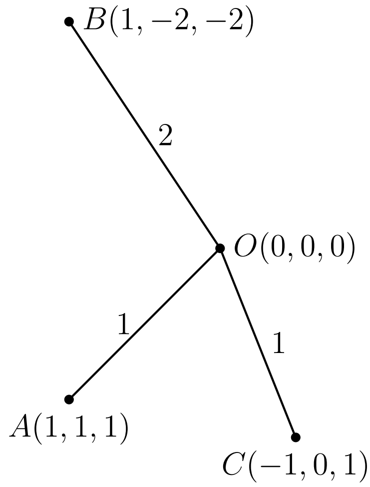
Şekil 5.15: $q \notin A$ olan tek sektör durumu

Şimdi $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ için ispatladığımız Teorem 5.8'in $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$'da da doğru olabileceği düşünülebilir. Ancak doğru değil. $\mathbb{R}^3$'te $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, -2, -2)$ ve $C = (-1, 0, 1)$ noktalarını düşünelim. $(\mathbb{R}^3, d_\infty)$'dan indirgenen metrikle $\{A, B, C\}$ kümesinin sıkı germesinin ne olacağını bulmaya çalışalım. Bu kümeyi $A \mapsto A' = (0, 0)$, $B \mapsto B' = (3, 1)$ ve $C \mapsto C' = (0, 2)$ şeklinde $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$'a izometrik olarak gömebiliriz. O zaman Şekil 5.16'daki küme (üç bacaklı şekil)



Şekil 5.16: $\{A', B', C'\}$ kümesinin sıkı germesi

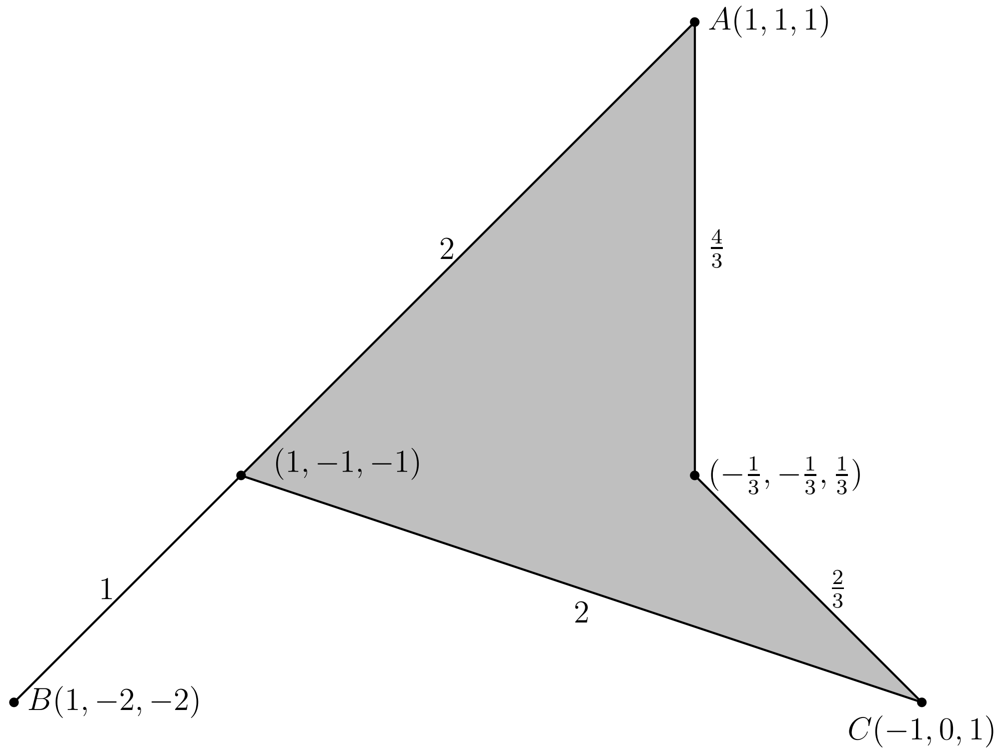
$\{A', B', C'\}$ kümesinin sıkı germesidir. Çünkü bu küme kapalıdır, kesin içseldir ve bu özellikleriyle minimaldir (dikkat edilirse bu kümenin $\{A', B', C'\}$'yi içeren hiçbir öz alt kümesi kesin içsel değildir). Şimdi bu kümenin izometrik bir kopyasını $\mathbb{R}^3$ içinde bulmaya çalışalım. Bunun için yukarıdaki şekildeki O' noktasına tekabül eden bir nokta bulmaya çalışalım. Yani öyle bir O noktası bulalım ki $d_\infty(A, O) = 1$, $d_\infty(B, O) = 2$ ve $d_\infty(C, O) = 1$ olsun. Dikkat edilirse $(\mathbb{R}^3, d_\infty)$ içinde bu eşitlikleri sağlayan tek nokta orjindir. Dolayısıyla orjinden A, B ve C noktalarına birer jeodezik çizmek suretiyle oluşturulan Şekil 5.17'deki gibi bir küme aradığımız sıkı germedir. Buraya kadar bir sorun yok gibi görünüyor.



Şekil 5.17: $\{A, B, C\}$ kümesinin sıkı germesi

Çünkü bu küme $\mathbb{R}^3$ içinde minimal, kapalı ve kesin içsel bir alt kümedir. Ancak şuna dikkat edilmelidir ki A, B ve C noktalarından geçen $x - 2y + 2z = 1$ düzlemi orjini içermez. Bu düzlem $(\mathbb{R}^3, d_\infty)$ içinde kapalı ve kesin içsel bir alt uzay olduğundan $\{A, B, C\}$ kümesini kapsayan ve $x - 2y + 2z = 1$ düzlemi içinde kalan minimal, kapalı ve kesin içsel bir küme $\{A, B, C\}$'nin sıkı germesine izometrik olamayacaktır. Çünkü sıkı germe orjini içermek zorunda. Peki $\{A, B, C\}$ kümesini kapsayan ve $x - 2y + 2z = 1$ düzlemi içinde kalan minimal, kapalı ve kesin içsel küme nedir? Cevabı Şekil 5.18'de.

Tüm bu söylenenlerden şu sonuç çıkmaktadır: $(\mathbb{R}^3, d_\infty)$ içinde, verilen bir alt kümeyi kapsayan kapalı, kesin içsel ve bu özellikleriyle minimal olan iki küme



Şekil 5.18: $\{A, B, C\}$ kümesini kapsayan ve $x - 2y + 2z = 1$ düzlemi içinde kalan minimal, kapalı ve kesin içsel küme

izometrik olmak zorunda değildir. Şimdi şu soruyu akla gelebilir: $(\mathbb{R}^3, d_\infty)$ içinde, verilen bir alt kümenin sıkı germesi elbette kapalı ve kesin içseldir, ama (elimizdeki örnekte olduğu gibi) bu özellikleriyle minimal olmak zorunda mıdır? Yanıt olumsuz. $x - 2y + 2z = 1$ düzlemi $\mathbb{R}^3$ içinde kapalıdır ve kesin içseldir. Dolayısıyla kendisini içeren minimal, kapalı ve kesin içsel bir alt kümedir. Ancak bu düzlemin sıkı germesi kendisine eşit olamaz. Çünkü birazdan göreceğimiz üzere hiperkonveks değildir.

$\{A, B, C\}$ kümesini ve onun orjinle olan ilişkisini biraz daha yakından inceleyelim. $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ içnde şu önermeyi ispatlamıştık: Kesin içsel bir küme, verilen bir noktanın tüm sektörleriyle kesişiyorsa verilen nokta kümeye ait olmak zorundadır. $(\mathbb{R}^3, d_\infty)$ içndeki $x-2y+2z = 1$ düzlemi kesin içseldir ve orjinin her sektörüyle kesişir ($A \in S_1^+(O)$, $A \in S_2^+(O)$, $A \in S_3^+(O)$, $B \in S_2^-(O)$, $B \in S_3^-(O)$ ve $C \in S_1^-(O)$). Ancak orjin bu düzleme ait değil. Demekki bu önerme de $\mathbb{R}^n$'ye genelleştirilemez.

$\{A, B, C\}$ kümesininin sıkı germesinin orjini içermek zorunda olduğunu görmüştük. Bu şu anlama da geliyor X, $\mathbb{R}^3$ içinde orjinden farklı bir noktaysa $d_\infty(A, X) \leq d_\infty(A, O)$, $d_\infty(B, X) \leq d_\infty(B, O)$, $d_\infty(C, X) \leq d_\infty(C, O)$ eşitsizliklerinin üçü birden sağlanamaz. O halde A, B ve C den geçen

$$x - 2y + 2z = 1$$

düzlemi içindeki hiçbir nokta için de bu üç eşitsizlik sağlanmaz. Öyleyse bu düzlemi L ile göstercek olursak $L \cup \{O\} \hookrightarrow L$ genişletmeyen bir retraksiyon bulabilmemiz mümkün değildir. O halde bu düzlem injektif değil, dolayısıyla hiperkonveks değil. $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ içinde kapalı ve kesin içsel bir kümenin hiperkonveks olduğunu görmüştük. Demekki $(\mathbb{R}^3, d_\infty)$ için bu da doğru değil. Zaten doğru olsaydı esas teoremi de buraya aktarabilirdik.

KAYNAKLAR

[1] I. Althöfer, On Optimal Realizations of Finite Metric Spaces by Graphs, Discrete Comput. Geom. 3, 103-122, 1988.

[2] N. Aronszajn, P. Panitchpakdi, Extension of uniformly continuous transformations and hyperconvex metric spaces, Pacific J. Math. 6 (1956), 405–439.

[3] M.R. Bridson, A. Haefliger, *Metric Spaces of Non-Positive Curvature.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[4] D. Burago, Y. Burago, S. Ivanov, A Course in Metric Geometry, Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, USA, 2001.

[5] A. Dress, Trees, tight extensions of metric spaces, and the cohomological dimension of certain groups: A note on combinatorial properties of metric spaces, Advances in Mathematics 53 (1984), 321–402.

[6] D. Eppstein, Optimally fast incremental Manhattan plane embedding and planar tight span construction, Journal of Computational Geometry 2(1) (2011), 144–182.

[7] R. Espinola, M.A. Khamsi (Eds. W.A. Kirk and B. Sims), Introduction to Hyperconvex Spaces, Handbook of Metric Fixed Point Theory, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.

[8] J. R. Isbell, Six theorems about injective metric spaces, Comment. Math. Helvetici 39 (1964), 65–76.

[9] M.A. Khamsi, W.A. Kirk, An Introduction to Metric Spaces and Fixed Point Theory, John Wiley, New York, 2001.

[10] J. Koolen, A. Lesser, V. Moulton, Optimal realizations of generic five-point metrics, European J. of Combin., 30, 1164-1171, 2009.

[11] A. Papadopoulos, Metric Spaces, Convexity and Nonpositive Curvature, Irma Lectures in Mathematics and Theoretical Physics, European Mathematical Society, Germany, 2005.

[12] B. Sturmfels, J. Yu, Classification of six-point metrics, Electron. J. of Combin., 11, 2004, R44.