SIP YE SAHİP MODÜL AİLELERİNİN GENELLEMELERİ ÜZERİNE

Özgür TAŞDEMİR

Doktora Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Ekim 2015

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Özgür Taşdemir'in **"SIP ye Sahip Modül Ailelerinin Genellemeleri Üzerine"** başlıklı Matematik Anabilim Dalındaki Doktora tezi 02.10.2015 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

		Adı - Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	:	Yrd. Doç. Dr. Fatih Karabacak	....
Üye	:	Yrd. Doç. Dr. Figen Takıl Mutlu	....
Üye	:	Doç. Dr. Abidin Kılıç	....
Üye	:	Doç. Dr. M. Tamer Koşan	....
Üye	:	Doç. Dr. Enver Önder Uslu	....

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

SIP YE SAHİP MODÜL AİLELERİNİN GENELLEMELERİ ÜZERİNE

Özgür TAŞDEMİR

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Fatih KARABACAK

2015, 82 sayfa

Bir R halkası üzerinde tanımlı bir M modülünün her diktoplanan çiftinin arakesiti yine bir diktoplanan ise M modülüne SIP modül (ya da SIP ye sahiptir) denir. SIP modüller Wilson tarafından 1986 yılında tanımlanmıştır. Daha sonra, bu modül ailesi ve bu modül ailesinin genellemeleri üzerine bir çok yazar araştırma yapmıştır. Bu çalışmada, SIP modüllerin bir genellemesi olan i-SIP modül ailesi tanımlanmış ve bu ailenin bazı özellikleri araştırılmıştır. Bir R halkası üzerinde tanımlı bir M modülünün her diktoplanan çiftinin arakesiti bir diktoplanana izomorf ise M modülü i-SIP dir (ya da i-SIP ye sahiptir) denir. i-SIP özelliğinin, diktoplananlara ve diktoplamlara taşınmadığı gösterilmiştir. Bu özelliğin diktoplananlara ve diktoplamlara hangi koşullarda taşındığına ilişkin bazı sonuçlar verilmiştir. Halkalar ve modüller üzerinde bu özelliğin karakterizasyonları araştırılmıştır. SIP modüller ile elde edilmiş bir çok kullanışlı önerme, i-SIP modüllere genelleştirilmiştir.

CS modüllerin bir genellemesi olan FI-extending modüllerin diktoplananlarının yine bir FI-extending modül olup olmayacağı açık bir sorudur. Birkenmeier, Müller ve Rızvi'nin 2002 yılında yapmış oldukları çalışmada açık soru olarak bırakılan "Hangi koşullar altında bir FI-extending modülün bir diktoplananı bir FI-extending modül olur?" sorusuna bir cevap verilmiştir: i-SIP ye sahip bir FI-extending modülün her diktoplananının da bir FI-extending modül olduğu kanıtlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: i-SIP, SIP, SSP, C_{11}-modül, FI-extending modül

ABSTRACT

PhD Dissertation

ON GENERALIZATIONS OF MODULES WHICH HAVE THE SIP

Özgür TAŞDEMİR

Anadolu University

Graduate School of Sciences

Mathematics Program

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Fatih KARABACAK

2015, 82 pages

An R-module M has the *summand intersection property* (briefly SIP) if the intersection of any two direct summands is again a direct summand. Definition of SIP was given by Wilson in 1986 and this definition together with its generalizations are later studied by many autors. In this study, a generalization of SIP modules is investigated. It is defined that a module M is called i-SIP (or has i-SIP), if the intersection of every pair of direct summands of M is isomorphic to a direct summand of M. It is shown that the class of i-SIP modules is closed neither under the direct sums nor under the direct summands. It is stated some results that demonstrate under what conditions this property is inherited by direct summands and direct sums. The characterization of this property over rings and modules is investigated. Moreover, lots of useful propositions obtained in SIP modules are generalized to i-SIP modules.

It is not known whether a direct summand of an FI-extending module which is a generalization of CS-modules is also FI-extending. It is given an answer to the Birkenmeier, Müller and Rızvi's question (2002) that under what conditions a direct summand of an FI-extending module is an FI-extending?: And it is proved that every direct summand of an FI-extending module with i-SIP is also FI-extending.

Keywords: i-SIP, SIP, SSP, C_{11}-module, FI-extending module

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamda bilgi ve deneyimleriye her konuda bana yardımcı olan ve sabırla yol gösteren değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Fatih KARABACAK'a,

Çalışmalarım esnasında benden bilgisini, yardımını ve desteğini esirgemeyen saygı değer hocam Yrd. Doç. Dr. Figen TAKIL MUTLU'ya,

Hayatım boyunca maddi ve manevi destekleriyle hep yanımda olan sevgili aileme ve özellikle Eskişehir'de her anlamda bana destek olan sevgili ablam Saniye TAŞDEMİR'e,

Çalışmalarım sırasında manevi desteği, sevgisi ve sonsuz sabrı ile daima yanımda olan sevgili eşim Fatma Dila TAŞDEMİR'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Özgür TAŞDEMİR

Ekim 2015

İÇİNDEKİLER

ÖZET i

ABSTRACT ii

TEŞEKKÜR iii

İÇİNDEKİLER iv

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ v

1. GİRİŞ 1

2. ÖN BİLGİLER 3

2.1. Ayrıştırılamaz (Indecomposable) Modüller 3

2.2. Büyük (Essential) Alt Modüller 3

2.3. Komplement Alt Modüller 4

2.4. Yarı Basit (Semisimple) Modüller ve Socle 6

2.5. Düzgün (Uniform) Modüller ve Düzgün Boyut 9

2.6. Noetherian ve Artinian Modüller 10

2.7. Singular ve Nonsingular Modüller 11

2.8. Modül Dizileri 12

2.9. Serbest (Free), Projektif ve İnjektif Modüller 12

3. CS MODÜLLER VE BAZI GENELLEMELERİ 19

3.1. CS Modüller ve (Yarı) Sürekli Modüller 19

3.2. (C_{11})-Modüller 29

3.3. (C_{12})-Modüller 40

3.4. FI-extending Modüller 44

4. SIP MODÜLLER 49

5. i-SIP MODÜLLER 66

6. TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER 79

KAYNAKLAR 80

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$=$	:	Eşit
$\neq$	:	Eşit değil
$\in$	:	Eleman
$\notin$	:	Elemanı değil
$\subseteq$	:	Alt küme
$\nsubseteq$	:	Alt küme değil
$\subset$	:	Öz alt küme
$\exists$	:	En az bir
$\forall$	:	Her
$\cap$	:	Kesişim
$\Rightarrow$	:	İse
$\Leftrightarrow$	:	Ancak ve ancak
$\cong$	:	İzomorf
$\leq$	:	Alt modül
$\nleq$	:	Alt modül değil
$\leq_e$	:	Essential alt modül
$\nleq_e$	:	Essential alt modül değil
$\leq_d$	:	Dik toplanan alt modül
$\nleq_d$	:	Dik toplanan alt modül değil
$\leq_c$	:	Komplement alt modül
$\nleq_c$	:	Komplement alt modül değil
$\triangleleft$	:	Fully invariant alt modül
$\trianglelefteq$	:	İdeal
$r(A)$	:	A nın sağ sıfırlayıcıları kümesi
$\tilde{r}(A)$	:	A nın bir sol tam preradicali
$\mathbb{Z}$	:	Tam sayılar halkası
$\mathbb{Q}$	:	Rasyonel sayılar halkası
$R[x]$	:	R üzerinde tanımlı polinom halkası
$R[[x]]$	:	R üzerinde tanımlı formal kuvvet serisi
$udimM$	:	M modülünün uniform boyutu

$R - MOD$	:	Sol R-modüllerin kategorisi
$\sigma[M]$	:	M tarafından alt üretilen R-MOD un altkategorisi
$\prod\limits_{i\in\Lambda} M_i$	:	M_i lerin dik çarpımı
$\bigoplus\limits_{i\in\Lambda} M_i$	:	M_i lerin dik toplamı
$Soc(M)$	:	M nin socle'u
$E(M)$	:	M nin injektif zarfı
$kerf$	:	f nin çekirdeği
Imf	:	f nin görüntüsü
$f\|_A$	:	f nin A modülüne kısıtlanmışı
$Hom_R(M, N)$	:	M den N ye R-homomorfizmaların kümesi
$End_R(M)$	:	M nin R-homomorfizmalar halkası
ACC	:	Artan Zincir Koşulu
DCC	:	Azalan Zincir Koşulu
$Z(M)$	:	Singular alt modül
$Z_2(M)$	:	2. singular alt modül
$\chi(S^2)$	:	Kürenin euler karakteristiği
$Mat_2(R)$	:	R üzerin mxm boyutlu matris halkası
R^m	:	Bir m tamsayısı için R_R nin m adet kopyasının diktoplamı
$\blacksquare$	:	Kanıtın sonu

1 GİRİŞ

Bu çalışma boyunca, tüm halkalar birimli ve birleşmelidir ve R, bir halkayı gösterecektir. Aksi belirtilmedikçe tüm modüller birimsel sağ R-modüllerdir.

Kaplansky [1], bir temel ideal bölgesi (PID) üzerinde tanımlı bir F serbest modülünün herhangi iki diktoplananının arakesitinin yine F nin bir diktoplananı olduğunu kanıtlamıştır. Fuchs [2], bu önermeden hareketle aşağıdaki problemi ortaya atmıştır.

Problem 9: Abelian gruplarda, herhangi iki diktoplananın arakesiti yine bir diktoplanan olma durumu nasıl karakterize edilir?

Bu problemi ilk ele alan Wilson, 1986 yılında şu tanımı yapmıştır: Bir R halkası üzerinde tanımlı bir M modülünün herhangi iki diktoplananının kesişimi yine bir diktoplanan ise M modülü SIP ye sahiptir denir. Modüllerin SIP özelliği Modül ve Halka Teorisinde önemli bir role sahiptir. Wilson'dan sonra, bu modül ailesi ve bu modül ailesinin genellemeleri üzerine bir çok yazar araştırma yapmıştır. Bu çalışmada, SIP modüllerin bir genellemesi de olan i-SIP modül ailesi tanımlanmıştır. Bir R halkası üzerinde tanımlı bir M modülünün herhangi iki diktoplananının kesişimi bir diktoplanana izomorf ise M modülü i-SIP modül (ya da i-SIP ye sahiptir) diye adlandırılmıştır.

Bölüm 2'de, bilinmesinde fayda gördüğümüz ve çalışmamız boyunca da kullanacağımız bazı temel tanım ve sonuçlar verilmiştir.

Bölüm 3'te, CS modüller, (yarı) sürekli modüller ve CS modüllerin bazı genellemelerinden bahsedilmiş ve bazı temel özelliklerine değinilmiştir.

Bölüm 4'te, SIP modüller tanıtılmış ve SIP modüllerin halkalar ve modüller üzerindeki karakterizasyonları verilmiştir.

Bölüm 5'te, SIP modüllerin bir genellemesi tanımlanmıştır. Bu yeni modül ailesi i-SIP modüller olarak adlandırılmıştır. i-SIP modül tanımına denk olarak iki karakterizasyon kanıtlanmıştır. SIP olmayan i-SIP olan modüllere örnekler verilmiştir. Hangi durumlarda i-SIP ve SIP özelliklerinin denk olduğuna ilişkin önermeler kanıtlanmıştır. i-SIP özelliğinin, diktoplananlara ve diktoplamlara taşınmadığı gösterilmiştir. Bu özelliğin diktoplananlara ve diktoplamlara hangi koşullarda taşındığına ilişkin bazı sonuçlar verilmiştir. Yarıbasit halkalar ve V-*halkalar* i-SIP modüller yardımıyla karakterize edilmiştir. Bir yarı-sürekli modülde M modülünün i-SIP modül olması ile onun injektif zarfının i-SIP modül olmasının denk olduğu kanıtlanmıştır. "Bir Noetherian halka üzerindeki injektif modülün torsion-free olması için gerek ve yeter şart herhangi bir Λ indeks kümesi için $\bigoplus_{\Lambda} M$ modülünün i-SIP olmasıdır" teoremi kanıtlanmıştır. Daha birçok SIP modüller ile elde edilmiş kullanışlı önerme, i-SIP modüllere genelleştirilmiştir. Bunlardan en önemlisi, i-SIP özelliğine sahip bir FI-extending modülün diktoplananlarının da bir FI-extending modül olduğunun kanıtlanmış olmasıdır.

2 ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, bilinmesinde fayda gördüğümüz ve çalışmamızda kullanılan temel tanımlar, önermeler ve teoremler verilecektir. Önermeler ve teoremler ispatsız olarak verilecek olup ayrıntılı bilgi için [3-9] önerilir.

2.1 Ayrıştırılamaz (Indecomposable) Modüller

Tanım 2.1.1. *M bir R-modül ve $A \leq M$ olsun. Eğer $\exists\ B \leq M$ için $A \cap B = 0$ ve $M = A + B$ ise M ye A ile B nin dik toplamı denir ve $M = A \oplus B$ ile gösterilir. A ve B alt modüllerine de M nin dik toplananları denir. $A, B \leq_d M$ şeklinde gösterilir.*

Tanım 2.1.2. *Herhangi bir M R-modülünün sıfırdan ve kendisinden başka dik toplananı yoksa M_R ye ayrıştırılamaz modül denir.*

Örneğin; $M_R = \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ modülünün sıfırdan ve kendisinden başka bir dik toplananı yoktur. Dolayısıyla bir ayrıştırılamaz modüldür.

Tanım 2.1.3. *M bir R-modül ve $A, B \leq M$ olsun. A ve B alt modüllerinin toplamı*

$$A + B = \{\ a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

olarak ifade edilir.

Modüler Kuralı: M bir R-modül, $A \leq M$ ve $C \leq B \leq M$ olsun. Bu durumda

$$B \cap (A + C) = C + (A \cap B)$$

dir.

2.2 Büyük (Essential) Alt Modüller

Tanım 2.2.1. *M bir R-modül ve $N \leq M$ olsun. Her $0 \neq K \leq M$ için $N \cap K \neq 0$ ise N ye M de büyük (essential) alt modül denir. M ye N nin essential genişlemesi denir ve $N \leq_e M$ şeklinde gösterilir.*

Örnek olarak; $M_R = \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ için sıfırdan farklı her alt modül M_R de essential olarak kapsanır.

Önerme 2.2.2. *M bir R-modül olsun. Aşağıdakidaki özellikler doğrudur.*

(i) $N \leq_e M \Longleftrightarrow 0 \neq m \in M$ *için* $N \cap mR \neq 0$

(ii) $K \leq N \leq M$ *için* $K \leq_e M$ *dir* $\Longleftrightarrow K \leq_e N$ *ve* $N \leq_e M$ *dir.*

(iii) $N \leq_e M$ *ve* $K \leq M \Longrightarrow N \cap K \leq_e K$ *dır.*

(iv) $N_i \leq_e K_i \ (1 \leq i \leq t) \Longrightarrow (N_1 \cap ... \cap N_t) \leq_e (K_1 \cap ... \cap K_t)$ *dir.*

(v) Boş kümeden farklı bir Λ *indis kümesi için*

$$N_\lambda \leq_e M_\lambda (\lambda \in \Lambda) \Longleftrightarrow \bigoplus_{\Lambda} N_\lambda \leq_e \bigoplus_{\Lambda} M_\lambda$$

dır.

(vi) $f : M \to N$ *bir homomorfizma ve* $B \leq_e N$ *ise* $f^{-1}(B) \leq_e M$ *dir.*

(vii) $f : M \to N$ *bir izomorfizma ve* $A \leq_e M$ *ise* $f(A) \leq_e N$ *dir.*

2.3 Komplement Alt Modüller

Tanım 2.3.1. *M bir R-modül ve* $K \leq M$ *olsun. K nın öz essential genişlemesi yoksa (yani* $K \leq_e N \leq M \Longrightarrow K = N$*) K ya M de kapalı (closed) alt modül denir.*

Tanım 2.3.2. *M bir R-modül ve* $A \leq M$ *olsun.* $A \cap B = 0$ *özelliğine göre maksimal olan bir B alt modülüne A nın M deki bir komplementi denir ve* $B \leq_c M$ *ile gösterilir.*

Önerme 2.3.3. $A, B \leq M$ *olmak üzere* $A \cap B = 0$ *olsun. Bu durumda A nın bir C komplementi vardır öyle ki* $B \leq C$ *dir. Dolayısıyla C nin de A yı içeren bir* A' *komplementi vardır (bakınız, [3]).*

Önerme 2.3.3'den bir M modülünde her alt modülün M de bir komplementi vardır. Ayrıca $0, M \leq_c M$ olduğu açıktır.

Örnek 2.3.4. *F bir cisim olmak üzere* $M_R = (F \oplus F)_F$ *olsun.*
$B = (0,1)F = \{(0,a) \mid a \in F\} \leq M_R$ *alalım.* $C = (1,x)F$, $(x \in F)$ *olmak üzere, C, B alt modülünün* M_R *deki bir komplementidir.*

Önerme 2.3.5. *Herhangi bir M modülünün her diktoplananı M nin bir komplement alt modülüdür.*

Örnek 2.3.6. *Önerme 2.3.5'ün tersi herzaman doğru değildir. Örneğin; F bir cisim ve V de F üzerinde 2 boyutlu bir vektör uzayı olsun. $V = v_1F \oplus v_2F$ alalım. Bu durumda*

$$R = \{\left[\begin{smallmatrix} f & v \\ 0 & f \end{smallmatrix}\right] \mid f \in F, v \in V\}$$

matris işlemleri ile birimli, değişmeli ve ayrıştırılamaz bir halkadır.

$$I = \{\left[\begin{smallmatrix} 0 & v_1f \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] \mid f \in F\} \leq R_R$$

alalım.

$$J = \{\left[\begin{smallmatrix} 0 & v_2f \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] \mid f \in F\} \leq R_R$$

olmak üzere I, J nin komplementidir. Yani $I \leq_c R_R$ dir. Ancak $I \nleq_d R_R$ dir.

Teorem 2.3.7. *M bir R-modül, $A, B \leq M$ ve $A \cap B = 0$ olsun. B nin M de A nın komplementi olması için gerek ve yeter koşul*

$$\frac{A+B}{B} \leq_e \frac{M}{B}$$

olmasıdır.

Önerme 2.3.8. *M bir R-modül ve $A \leq M$ olsun. Bu durumda;*

$B \leq M$, A nın bir komplementi ise $A \oplus B \leq_e M$ dir.

Yardımcı Teorem 2.3.9. *$N \leq M$ ve $K \leq_d M$ olsun. Bu durumda, K nın N nin komplementi olması için gerek ve yeter koşul $K \cap N = 0$ ve $K \oplus N \leq_e M$ olmasıdır.*

Önerme 2.3.10. *M bir R-modül ve $N \leq M$ olsun. Bu durumda bir $K \leq M$ vardır öyle ki $N \leq_e K \leq_c M$ dir. Burada, K ya N nin M deki kapanışı (closure) denir.*

Tanım 2.3.11. *M bir R-modül olsun. Eğer M modülünün her altmodülü tek bir kapanışa sahip ise M modülüne UC-modül denir. Denk olarak, M modülünün herhangi iki komplementinin kesişimi yine bir komplement ise M modülüne UC-modül denir.*

Önerme 2.3.12. *M bir R-modül ve $K \leq M$ olsun.*

$$K \leq_c M \Longleftrightarrow K \leq_e L \leq M \text{ ise } K = L \text{ dir.}$$

Teorem 2.3.13. *M bir R-modül olsun. B, A nın M de komplementi, $A^{'}$ de $A \leq A^{'}$ olmak üzere B nin M de komplementi ise*

$$A \leq_e A^{'}$$

ve $A^{'}$, M nin A yı essential alt modül olarak içeren alt modüller kümesinde maksimal elemandır (yani $A \leq_e K$ ve $A^{'} \leq K \leq M \Longrightarrow A^{'} = K$ dır).

Önerme 2.3.14. *M bir R-modül ve $K \leq_c N$ ve $N \leq_c M$ iken $K \leq_c M$ dir.*

2.4 Yarı Basit (Semisimple) Modüller ve Socle

Tanım 2.4.1. *0 ve kendisinden başka alt modülü olmayan bir modüle basit (simple) modül denir.*

Tanım 2.4.2. *Herhangi bir A modülü için A nın tüm sıfır olmayan basit alt modüllerinin toplamına A nın socle'ı denir ve $Soc(A)$ ile gösterilir.*

Örnek olarak; $Soc(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) = 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ dir.

Tanım 2.4.3. *$(T_\alpha)_{\alpha \in A}$, M nin basit alt modüllerinin bir indeks kümesi olsun. Eğer M, bu kümenin dik toplamı ise, $M = \oplus_A T_\alpha$, M nin bir yarıbasit ayrışımıdır. Bir M modülü yarıbasit ayrışıma sahip olması durumunda, M modülüne yarıbasit modül denir.*

Açıkça, her basit modül yarıbasittir. $\mathbb{Z}$-modül $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$ basit değildir ancak yarıbasittir.

Tanım 2.4.4. *Herhangi bir M modülü için $Soc(M) = M$ oluyorsa M modülüne yarıbasit denir. Yani; M, onun basit alt modüllerinin toplamıdır.*

Bu tanıma göre 0 bir yarıbasit modüldür ve $Soc(2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) = 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ olduğundan $(2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ $\mathbb{Z}$-modülü bir yarıbasit modüldür.

Teorem 2.4.5. *Bir A_R modülünün yarıbasit olması için gerek ve yeter koşul A nın her alt modülünün bir dik toplanan olmasıdır.*

Önerme 2.4.6. *M_R bir modül olsun.* $Soc(M) = \bigcap \{\ N \mid N \leq_e M\}$ *dir.*

Önerme 2.4.7. *M ve N sağ R-modüller olsun. $f : M \longrightarrow N$ bir R-modül homomorfizması ise $f(Soc(M)) \subseteq Soc(N)$ dir.*

Önerme 2.4.8. *M bir R-modül ve $M = \bigoplus\limits_{i \in I} M_i$ ise $Soc(M) = \bigoplus\limits_{i \in I} Soc(M_i)$ dir.*

Önerme 2.4.9. *M bir R-modül ve $N \leq M$ olsun. Bu durumda*

$$Soc(N) = N \cap Soc(M)$$

dir. Özel olarak; $Soc(Soc(M)) = Soc(M)$ dir.

Sonuç 2.4.10. *M ve N sağ R-modüller olsun. $\varphi : M \longrightarrow N$ bir R-modül homomorfizması ve $Im(\varphi) \leq_e N$ ise $\varphi(Soc(M)) = Soc(N)$ dir.*

Tanım 2.4.11. *N bir R-modül olsun. Eğer her $\psi : N \to \prod\limits_{\Lambda} U_\lambda$ (R-MOD da) monomofizması için*

$$\psi : N \xrightarrow{\psi} \prod_{\Lambda} U_\lambda \xrightarrow{\pi_E} \prod_{E} U_\lambda$$

monic olacak şekilde bir $E \subset \Lambda$ var ise N R-modülü sonlu cogenerated modüldür denir.

Teorem 2.4.12. *Bir R-modül N için aşağıdakiler denktir:*

(a) N sonlu cogenerated dır.

(b) $\bigcap\limits_{\Lambda} V_\lambda = 0$ olacak şekilde N nin altmodüllerinin her $\{V_\lambda\}_\Lambda$ ailesi için $\bigcap\limits_{E} V_\lambda = 0$ olacak şekilde bir $E \subset \Lambda$ vardır.

(c) N nin her altmodülü sonlu cogenerated dır.

Önerme 2.4.13. *Bir M R-modülünün sonlu cogenerated olması için gerek ve yeter şart $Soc(M)$ nin sonlu cogenerated olması ve $Soc(M) \leq_e M$ olmasıdır.*

Önerme 2.4.14. *Sonlu cogenerated modüllerin her essential genişlemesi yine bir sonlu cogenerated modüldür.*

Önerme 2.4.15. *Her sonlu cogenerated modül ayrıştırılamaz modüllerin bir (sonlu) diktoplamıdır.*

Önerme 2.4.16. *Sonlu cogenerated modüllerin bir sonlu dikoplamı yine sonlu cogenerated modüldür.*

Tanım 2.4.17. *Eğer her basit modül ($\sigma[M]$ ya da R-MOD daki) M-injektif ise M R-modülüne co-semisimple denir.*

Her yarıbasit modül co-semisimple modüldür.

Tanım 2.4.18. *Eğer R sol R-modülü co-semisimple ise R halkası sol co-semisimple yada bir sol V-halka diye adlandırılır.*

Teorem 2.4.19. *Bir R modül M için aşağıdakiler denktir:*

(a) M co-semisimple dır.

(b) $\sigma[M]$ deki her sonlu cogenerated modül M-injektiftir.

(c) $\sigma[M]$ deki her modül co-semisimple dır.

(d) $\sigma[M]$ deki her sonlu cogenerated modül yarıbasittir.

(e) $\sigma[M]$ deki M nin her bölüm modülü yarıbasittir.

Tanım 2.4.20. *R bir halka olsun. Eğer*

(i) X sonlu cogenerated ve

(ii) L sonlu cogenerated olmak üzere Mod-R deki her $0 \to X \to L \to N \to 0$ tam dizisinde, N de sonlu cogenerated ise bir X R-modülüne sonlu copresented denir.

Teorem 2.4.21. *Bir $X \in \sigma[M]$ modülü $\sigma[M]$ de sonlu copresented olması için gerek ve yeter şart X in M-injektif zarfı olan $E(X)$ ve $E(X)/X$ modüllerinin sonlu copresented olmasıdır.*

Özel olarak, sonlu cogenerated injektif modüller, $\sigma[M]$ de sonlu copresented modüldür ve bundan dolayı her sonlu cogenerated modül bir sonlu copresented modülün bir altmodülüdür.

Önerme 2.4.22. *$\sigma[M]$ de modüllerin sonlu bir diktoplamının sonlu copresented olması için gerek ve yeter şart her diktoplananın sonlu copresented olmasıdır.*

Teorem 2.4.23. *Bir R modül M için aşağıdakiler denktir.*

(a) M co-semisimple dır.

(b) $\sigma[M]$ deki her sonlu copresented modül yarıbasittir.

(c) $\sigma[M]$ deki her modül copresented modül M-injektiftir.

2.5 Düzgün (Uniform) Modüller ve Düzgün Boyut

Tanım 2.5.1. *M sıfırdan farklı bir R-modül olsun. M nin sıfırdan farklı her alt modülü bir essential alt modül ise M ye düzgün (uniform) modül denir.*

Örneğin; $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ ve $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ birer düzgün modüldür.

Önerme 2.5.2. *Bir modül düzgün ise ayrıştırılamazdır.*

Önerme 2.5.3. *U, M nin düzgün alt modülü olsun.*

$$U \leq_c M \text{ dir.} \Leftrightarrow U, M \text{ nin maksimal düzgün alt modülüdür.}$$

Tanım 2.5.4. *Bir M modülü sıfırdan farklı alt modüllerin sonsuz bir dik toplamını kapsamıyorsa M ye sonlu uniform (Goldie) boyutlu denir.*

Örneğin; $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ modül sonlu Goldie boyutludur.

Yardımcı Teorem 2.5.5. *$0 \neq A_R$ sonlu Goldie boyutlu bir modül olsun. Bu durumda A_R, bir düzgün alt modül kapsar.*

Teorem 2.5.6. *M_R bir modül ve $i = 1, 2, ..., n$ için $U_i \leq M$ düzgün alt modüller olmak üzere $U_1 \oplus U_2 \oplus U_3 \oplus ... \oplus U_n \leq_e M$ olsun. Bu durumda*

(1) M nin sıfırdan farklı alt modüllerinin herhangi bir dik toplamı en fazla n tane dik toplam kapsar.

(2) $V_i \leq M$ düzgün alt modüller olmak üzere, $V_1 \oplus V_2 \oplus ... \oplus V_k \leq_e M$ ise $n = k$ dır.

Tanım 2.5.7. *Bir önceki teoremdeki n doğal sayısı modüller için bir değişmezdir (invariant). Bu n sayısına M nin Goldie boyutu (Goldie rankı) denilir ve $udimM$ ile gösterilir.*

Özel olarak; bir M modülünün sonlu Goldie boyutu 0 dır. $\Leftrightarrow M = 0$

Sonlu Goldie boyutu 1 olan bütün modüller düzgündür.

Önerme 2.5.8. *A bir R-modül olsun.*

(1) Eğer B, bir A modülünün bir kapalı alt modülü ise
$udimA = udimB + udimA/B$

(2) $udim(A_1 \oplus \ldots \oplus A_n) = udimA_1 \oplus \ldots \oplus udimA_n$

(3) $B \leq A$ *ve* B *sonlu Goldie boyutlu olsun.* $udimA = udimB \Leftrightarrow B \leq_e A$

2.6 Noetherian ve Artinian Modüller

Tanım 2.6.1. *Bir M-modülün alt modülleri üzerinde artan zincir koşulunun (ACC) sağlanması için gerek ve yeter koşul, alt modüllerin her*

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq ...$$

zinciri için $A_{n+i} = A_n$ $(i = 1, 2, 3, ...)$ *olacak biçimde en az bir* $n \in \mathbb{N}$ *olmasıdır.*

Tanım 2.6.2. *Bir M-modülün alt modülleri üzerinde azalan zincir koşulunun (DCC) sağlanması için gerek ve yeter koşul, alt modüllerin her*

$$B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq ...$$

zinciri için $B_{n+i} = B_n$ $(i = 1, 2, 3, ...)$ *olacak biçimde en az bir* $n \in \mathbb{N}$ *olmasıdır.*

Tanım 2.6.3. *Herhangi bir M modülünün alt modüllerinin boştan farklı her alt kümesinin kapsama sıralamasına göre bir maksimal elemanı varsa ya da denk olarak tüm alt modüllerinin kümesi artan zincir koşulunu (ACC) sağlarsa M modülüne Noetherian denir. Bir R halkası, sağ R-modül olarak Noether ise sağ Noether halka denir. Örneğin, $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ modülü Noetherdir.*

Tanım 2.6.4. *Herhangi bir M modülünün alt modüllerinin boştan farklı her alt kümesinin kapsama sıralamasına göre bir minimal elemanı varsa ya da denk olarak tüm alt modüllerinin kümesi azalan zincir koşulunu (DCC) sağlarsa M modülüne Artinian denir. Bir R halkası, sağ R-modül olarak Artin ise sağ Artin halka denir.*

Teorem 2.6.5. *B bir A_R modülünün alt modülü olsun. A modülünün Noetherian (Artinian) olması için gerek ve yeter koşul B ve A/B nin Noetherian (Artinian) olmasıdır.*

Teorem 2.6.6. *(Hilbert Taban Teoremi) R bir sağ Noether halka olsun. Bu durumda $R[x_1, ..., x_n]$ polinomlar halkası da sağ Noether'dir.*

2.7 Singular ve Nonsingular Modüller

Tanım 2.7.1. *M bir R-modül olsun.*

$$Z(M) = \{\ m \in M \mid mE = 0, \forall\ E \leq_e R_R\} = \{\ m \in M \mid r(m) \leq_e R\}$$

kümesine (alt modülüne) M nin singular (tekil) alt modülü denir. Eğer $Z(M) = M$ ise M ye singular, $Z(M) = 0$ ise M ye nonsingular modül denir.

Örneğin; U bir düzgün modül olmak üzere,

$$Z(\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}) = Z(\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}) = Z(U_R) = 0$$

olur.

Önerme 2.7.2. *M ve A R-modüller olsun.*

(i) *M nonsinguler'dir.(Yani $Z(M) = 0$) $\Longleftrightarrow$ tüm singular A_R modülleri için $Hom(A_R, M_R) = 0$*

(ii) *$A \leq_e M \Longrightarrow M/A$ singuler'dir. ($Z(M/A) = M/A$)*

(iii) *M singular ve $A \leq M$ olsun. M/A singuler'dir. $\Longleftrightarrow A \leq_e M$ dir.*

Tanım 2.7.3. *M bir R-modül olsun. $M/Z(M)$ nin singuler alt modülü olan*

$$Z(M/Z(M)) = \frac{Z_2(M)}{Z(M)}$$

bölüm modülündeki $Z_2(M)$'ye 2. singular (Goldie Torsion) alt modül denir.

Önerme 2.7.4. *Bir M modülü için,*

(i) $Z(M) \leq_e Z_2(M) \leq_c M$

(ii) $Z_2(\bigoplus_I M_i) = \bigoplus_I Z_2(M_i) \quad ve \quad Z(\bigoplus_I M_i) = \bigoplus_I Z(M_i)$

(iii) $Z(M/Z_2(M)) = 0$ *dir.*

2.8 Modül Dizileri

Tanım 2.8.1. *R bir halka olsun.*

$$\dots \xrightarrow{\alpha_{i-2}} A_{i-1} \xrightarrow{\alpha_{i-1}} A_i \xrightarrow{\alpha_i} A_{i+1} \xrightarrow{\alpha_{i+1}} \dots$$

$A_i \xrightarrow{\alpha_i} A_{i+1}$ *sağ R-modüllerinin sonlu yada sonsuz bir dizisi olsun.*

(a) Her $A_{i-1} \xrightarrow{\alpha_{i-1}} A_i \xrightarrow{\alpha_i} A_{i+1}$ *alt dizisi için* $Im\alpha_{i-1} \leq Ker\alpha_i$ *sağlanıyorsa bu diziye kompleks dizi denir.*

(b) Her $A_{i-1} \xrightarrow{\alpha_{i-1}} A_i \xrightarrow{\alpha_i} A_{i+1}$ *alt dizisi için* $Im\alpha_{i-1} = Ker\alpha_i$ *sağlanıyorsa bu diziye (yada komplekse) tam dizi denir.*

(c) Her $A_{i-1} \xrightarrow{\alpha_{i-1}} A_i \xrightarrow{\alpha_i} A_{i+1}$ *alt dizisi için* $Im\alpha_{i-1} = Ker\alpha_i$, A_i *nin bir diktoplananı ise bu tam diziye split tam dizi denir.*

Tanım 2.8.2. $0 \longrightarrow A \longrightarrow M \longrightarrow B \longrightarrow 0$ *şeklindeki tam diziye kısa tam dizi adı verilir.*

2.9 Serbest (Free), Projektif ve İnjektif Modüller

Teorem 2.9.1. $F = F_R$ *ve* $X = \{ x_i \mid i \in I\}$ *de* F *nin bir alt kümesi olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:*

(i) Her $0 \neq a \in F$ *elemanı sadece sonlu sayıda* $r_i \in R$ *sıfırdan farklı olmak üzere, tek türlü olarak* $a = \sum_{i \in I} x_i r_i$ *şeklinde yazılır.*

(ii) Her $i \in I$ *için* $f_i(r) = x_i r$ *şeklinde tanımlanan* $f_i : R \longrightarrow x_i R$ *fonksiyonu bir izomorfizma olup* $F = \bigoplus_{i \in I} x_i R \cong \bigoplus_{i \in I} R_i$, $R_i = R$ *dir.*

Tanım 2.9.2. *Teorem 2.9.1'deki koşullardan birini sağlayan* F_R *modülüne serbest modül denir ve* $X = \{ x_i \mid i \in I\}$ *kümesine de* F *nin Tabanı denir.*

Örneğin, $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ bir serbest modüldür ancak $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ bir serbest modül değildir.

Tanım 2.9.3. *R bir halka ve P bir R-modül olsun. Her* $\beta : M \longrightarrow N$ *epimorfizması ve* $\alpha : P \longrightarrow N$ *homomorfizması için* $\beta \circ \gamma = \alpha$ *olacak biçimde* *bir $\gamma : P \longrightarrow M$ homomorfizması varsa P ye Projektif modül denir. Yani,*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dl, dotted, "\gamma"'] \\ M \arrow[r, "\beta"'] & N \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli (yani $\beta \circ \gamma = \alpha$) olacak şekilde bir γ homomorfizması varsa P ye Projektif modül denir.

Tanım 2.9.4. *A bir R-modül $X \leq A$ olsun. Herhangi $\varphi : N \longrightarrow A/X$ homomorfizması, $\omega : N \longrightarrow A$ homomorfizmasına genişliyorsa N ye $A-$projektif modül denir ve her A modülü $A-$projektif ise A ya quasi projektif modül denir.*

Teorem 2.9.5. *$\{\ P_k \mid k \in I\}$ bir modüller ailesi olsun.*

$$P = \bigoplus_{k \in I} P_k \text{ Projektif modüldür} \Longleftrightarrow P_k(k \in I) \text{ Projektiftir.}$$

Teorem 2.9.6. *Her F Serbest Modülü Projektiftir.*

Sonuç 2.9.7. *Her A_R modülü için P_R Projektif olmak üzere bir $f : P \longrightarrow A$ epimorfizması vardır.*

Örneğin; $Hom(\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}) = 0$ olduğundan $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ projektif modül değildir.

Önerme 2.9.8. *Bir P sağ R-modülü için aşağıdakiler denktir:*

1) *P projektiftir;*

2) *Her $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ kısa tam dizisi splittir(Yani $B \cong A \oplus P$ dir);*

3) *P, bir Serbest sağ R-modülün bir dik toplananına izomorftur.*

Teorem 2.9.9. *Bir R halkası için aşağıdakiler denktir.*

(a) *R bir sağ kalıtsal (hereditary) halkadır.*

(b) *Bir projektif R-modülün her alt modülü projektiftir.*

(c) *Bir serbest R-modülün her alt modülü projektiftir.*

Tanım 2.9.10. *R bir halka ve I bir R-modül olsun. Her $\alpha : K \longrightarrow L$ monomorfizması ve $\beta : K \longrightarrow I$ homomorfizması için $\gamma \circ \alpha = \beta$ olacak biçimde bir $\gamma : L \longrightarrow I$ homomorfizması varsa I ya İnjektif modül denir. Diğer bir deyişle,*

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & L \arrow[dl, dotted, "\gamma"] \\ I & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli (yani $\gamma \circ \alpha = \beta$) olacak şekilde bir γ homomorfizması varsa I ya İnjektif modül denir.

Tanım 2.9.11. *A bir R-modül $X \leq A$ olsun. Herhangi $\varphi : X \longrightarrow N$ homomorfizması, $\gamma : A \longrightarrow N$ homomorfizmasına genişliyorsa N ye $A-$injektif modül denir.*

Teorem 2.9.12. *(Baer Kriteri) I bir R-modül olsun. I modülünün injektif olması için gerek ve yeter koşul her U (sağ) ideali için her $k : U \longrightarrow I_R$ modül homomorfizmasının bir $m : R \longrightarrow I_R$ modül homomorfizmasına genişletilebilmesidir (yani $m_{|U} = k$ olmasıdır).*

Teorem 2.9.13. *Bir R halkası için aşağıdakiler denktir:*

(a) R yarıbasittir.

(b) Her R-modül yarıbasittir.

(c) Her R-modül injektiftir.

(d) R nin her sol ideali injektiftir.

Teorem 2.9.14. *R bir Noether halka ve $\{I_i \mid i \in \Lambda\}$ keyfi injektif R-modüllerin bir ailesi olsun. Bu durumda $\bigoplus_{i\in\Lambda} I_i$ injektiftir.*

Teorem 2.9.15. *Aşağıdakiler denktir:*

(a) R bir Noetherian halkadır.

(b) Her injektif R-modül, ayrıştırılamaz (injektif) R-modüllerin bir diktoplamıdır.

Teorem 2.9.16. *$\{I_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ bir R-modüller ailesi olsun.*

$$I = \prod_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda \text{ injektif modüldür} \Longleftrightarrow \text{ Her } \lambda \in \Lambda \text{ için } I_\lambda \text{ injektif modüldür.}$$

Teorem 2.9.17. *Bir injektif modülün her kapalı altmodülü injektiftir.*

Teorem 2.9.18. *Her modülden bir injektif modülün içine bir monomorfizma vardır.*

Teorem 2.9.19. *Her injektif modül bölünebilirdir (yani, her $x \in M$ ve her $n \in \mathbb{Z}$ için $x = na$ olacak biçimde bir $a \in M$ vardır).*

Teorem 2.9.20. *Bir M $\mathbb{Z}$-modülünün injektif olması için gerek ve yeter şart M nin bölünebilir olmasıdır.*

Teorem 2.9.21. *Her modül bir injektif modülde alt modül olarak kapsanır.*

Teorem 2.9.22. *A bir R-modül olsun. Bu durumda A modülünün injektif olması için gerek ve yeter koşul A nın A yı kapsayan her R-modülün bir dik toplananı olmasıdır.*

Önerme 2.9.23. *Bir $0 \neq M_R$ modülünün injektif olması için gerek ve yeter koşul M nin hiç bir essential genişlemesinin olmamasıdır (yani $M \leq_e N$ ise $M = N$ dir).*

Önerme 2.9.24. *A bir R-modül ve E, A yı essential olarak kapsayan bir modül ve N de A yı kapsayan bir injektif modül olsun. Bu durumda $i : A \to N$ içerme monomorfizması olmak üzere, bir $g : E \to N$ monomorfizması vardır ki $g_{|A} = i$ dir.*

Önerme 2.9.25. *A bir R-modül ve N de A yı kapsayan bir injektif modül olsun. Bu durumda N nin bir E alt modülü vardır ki E, A nın maksimal essential genişlemesidir.*

Önerme 2.9.26. *A bir R-modül ve $A \leq E$ olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir;*

(a) E, A yı kapsayan essential injektif modüldür.

(b) E, A yı kapsayan maksimal essential modüldür.

(c) E, A yı kapsayan minimal injektif modüldür.

Tanım 2.9.27. *A bir R-modül olsun. Aşağıdaki Teoremdeki koşullardan birini sağlayan bir E R-modülüne A modülünün injektif zarfı (injective hull) denir ve $E(A) = E$ ile gösterilir.*

Teorem 2.9.28. *A bir R-modül olsun. Bu durumda bir E R-modülü vardır ki aşağıdaki koşullar sağlanır;*

(a) E, A yı kapsayan essential injektif modüldür.

(b) E, A yı kapsayan maksimal essential modüldür.

(c) E, A yı kapsayan minimal injektif modüldür.

Ayrica E_1 ve E_2, A yı essential olarak kapsayan iki injektif modül ise bir $\theta : E_1 \to E_2$ izomorfizması vardır ki aşağıdaki diyagramı değişmeli yapar.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"'] & E_1 \arrow[dl, dotted, "\theta"] \\ E_2 & \end{tikzcd}$$

Tanım 2.9.29. *M ve X R-modüller ve $N \leq M$ olsun. Her $\phi : N \to X$ homomorfizması bir $\psi : M \longrightarrow X$ homomorfizmasına genişlerse X modülüne M-injektif modül denir.*

Teorem 2.9.30. *M bir R-modül ve $K \leq M$ olsun.*

$$\textit{Bir } X \textit{ modülü } M-\textit{injektiftir} \Longleftrightarrow \textit{Aşağıdaki üç koşul sağlanır;}$$

1. *X modülü $K-$injektiftir.*

2. *X modülü $\frac{M}{K}-$injektiftir.*

3. *Herhangi bir $\phi : K \longrightarrow X$ homomorfizması $\varphi : M \longrightarrow X$ homomorfizmasına genişler.*

Önerme 2.9.31. *R bir halka, $M = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ $(M_\lambda \leq M)$ ve X R-modül olsun.*

$$X \textit{ modülü } M-\textit{injektiftir} \Longleftrightarrow X \textit{ modülü } M_\lambda - \textit{injektiftir } (\lambda \in \Lambda).$$

Önerme 2.9.32. *R bir halka, $M = \prod_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha$ ve A R-modül olsun.*

$$\prod_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha \; A - \textit{injektiftir} \Longleftrightarrow \textit{Her } \alpha \in \Lambda \textit{ için } M_\alpha \; A - \textit{injektiftir.}$$

Teorem 2.9.33. *R bir halka ve M bir R-modül olsun. Bir X R-modülünün M-injektif olması için gerek ve yeter koşul her $\varphi \in Hom(E(M), E(X))$ için $\varphi(M) \leq X$ olmasıdır.*

Tanım 2.9.34. *Bir M modülü M-injektif ise M ye quasi-injektif modül denir.*

Açıktır ki, M modülü injektif ise quasi-injektiftir. Ancak tersi doğru değildir.

Örnek 2.9.35. *$M_R = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})_{\mathbb{Z}}$ modülü quasi-injektif olmasına karşın injektif değildir.*

Kanıt. $\bar{1} = 4.\bar{b}$ olacak biçimde bir $\bar{b} \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ olmadığından $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})_{\mathbb{Z}}$ modülü divisible değildir. Dolayısıyla injektif değildir.

Şimdi $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})_{\mathbb{Z}}$ modülünün quasi-injektif olduğunu görmek için; $N \leq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ olmak üzere her $f : N \longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ homomorfizması için $h : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $h_{|N} = f$ olacak biçimde bir h homomorfizmasının varlığını göstermeliyiz.
$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})_{\mathbb{Z}}$ nin alt modülleri: 0, kendisi ve $2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ dir.

$$Hom(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) = \left\{ I_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}, f_2, f_3, 0 \mid f_2(\bar{1}) = \bar{2}, f_3(\bar{1}) = \bar{3} \right\}$$

dir. Bu homomorfizmalardan monomorfizma olanlar f_3 ve birim dönüşüm $I_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}$ dır.

1.Durum: $f : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ herhangi bir homomorfizma ise

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \arrow[r, "I"] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \arrow[dl, dotted, "h"] \\ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$

olup $h = f$ homomorfizması diyagramı değişmeli yapar.

2.Durum: Aşağıdaki diyagramı göz önüne alalım:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "I"'] & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \arrow[dl, dotted, "h"] \\ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$

$h(\bar{1}) = \bar{3}$ koşulunu sağlayan h homomorfizması diyagramı değişmeli yapar.

3.Durum: Aşağıdaki diyagramı göz önüne alalım:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "f_2"'] & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \arrow[dl, dotted, "h"] \\ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$

$h(\bar{1}) = \bar{2}$ koşulunu sağlayan h homomorfizması diyagramı değişmeli yapar.

4.Durum: Aşağıdaki diyagramı göz önüne alalım:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "f_3"'] & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \arrow[dl, dotted, "h"] \\ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$

$h = I_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}$ homomorfizması diyagramı değişmeli yapar.

5.Durum: Aşağıdaki diyagramı göz önüne alalım:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "0"'] & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \arrow[dl, dotted, "h"] \\ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$

$h = 0$ homomorfizması diyagramı değişmeli yapar.

4.Durum: $Hom(2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) = \{i(\text{içerme dönüşümü})\}$ dür.

$$\begin{tikzcd} 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"'] & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \arrow[dl, dotted, "h"] \\ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$

$h = I_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}$ homomorfizması diyagramı değişmeli yapar.

Sonuç olarak $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})_{\mathbb{Z}}$ quasi-injektif modüldür. ■

Sonuç 2.9.36. *Bir M modülünün quasi-injektif olması için gerek ve yeter koşul her $f \in End(E(M))$ için $f(M) \subseteq M$ olmasıdır.*

Tanım 2.9.37. *$\{M_i \mid i \in I\}$ herhangi R-modüller ailesi olsun. Eğer her farklı $i, j \in I$ için M_i M_j-injektif ise $\{M_i \mid i \in I\}$ ailesine göreceli (relatively) injektif denir.*

Önerme 2.9.38. *$M = \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha$ bir R-modül olsun. Aşağıdakiler denktir;*

(i) M modülü quasi-injektiftir.

(ii) Her $\alpha \in \Lambda$ için M_α alt modülü quasi-injektif ve $M(\Lambda - \alpha)$ alt modülü $M_\alpha-$injektiftir.

3 CS MODÜLLER VE BAZI GENELLEMELERİ

Bu bölümde, CS modüller ile CS modüller yardımıyla tanımlanan (yarı) sürekli modüller tanıtılacak ve bu tür modüller için yapısal özellikler verilecektir. Daha ayrıntılı bilgi için [7-11] önerilir. Ayrıca, bu bölümün alt bölümlerinde CS modüllerin bazı önemli genellemelerine değinilecektir.

3.1 CS Modüller ve (Yarı) Sürekli Modüller

Tanım 3.1.1. *M bir R-modül olsun.*

(C_1) : *M nin her alt modülü M nin bir diktoplananı içinde essential olarak kapsanır.*

(C_2) : *M nin her A alt modülü için A, M nin bir diktoplananına izomorfik iken A da M nin bir diktoplananıdır.*

(C_3) : *M nin $M_1 \cap M_2 = 0$ olacak biçimdeki her M_1 ve M_2 diktoplanan alt modülleri için $M_1 \oplus M_2$ de M nin bir diktoplananıdır.*

Tanım 3.1.2. *Bir M R-modülüne;*
(C_1) özelliğini sağlıyorsa CS (ya da extending) modül,
(C_1) ve (C_2) özelliklerini sağlıyorsa sürekli modül,
(C_1) ve (C_3) özelliklerini sağlıyorsa yarı sürekli modül adı verilir.

Yardımcı Teorem 3.1.3. *Bir M modülü (C_2) özelliğini sağlıyor ise (C_3) özelliğini de sağlar.*

Kanıt. $M = K \oplus L$ ve $\pi : K \oplus L \longrightarrow L$ izdüşüm dönüşümü epimorfizma olsun. Buradan $N \leq M$ için

$$K \oplus L = K \oplus \pi(N)$$

dir. $\pi|_N$ dönüşümü monomorfizma olduğunda (C_2) özelliğinden $\pi(N) \leq_d M$ dir. Öyleyse, $\pi(N) \leq L$ ve $K \oplus \pi(N) \leq_d M$ dir. ■

Yardımcı Teorem 3.1.3'ten bir sürekli modülün yarı sürekli olduğu açıktır. Ancak tersi doğru değildir. Örneğin; $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ modül yarı sürekli olmasına karşın sürekli değildir.

Önerme 3.1.4. *Herhangi bir (quasi-) injektif M modülü (C_1) özelliğini sağlar.*

Kanıt. $N \leq M$, $E_1 = E(N)$ olmak üzere $E(M) = E_1 \oplus E_2$ olsun. M (quasi-) injektif modül olduğundan

$$M = M \cap E(M) = M \cap (E_1 \oplus E_2) = (M \cap E_1) \oplus (M \cap E_2)$$

dir. $N \leq_e E_1$ ve $N \leq M$ olduğundan $N \leq M \cap E_1 \leq E_1$ dir. O halde, Önerme 2.2.2 (ii)'den $N \leq_e M \cap E_1$ dir. ■

CS modüller injektif modüllerin bir genellemesidir. Şimdi, Önerme 3.1.4'ün tersinin doğru olmadığına ilişkin örnek verilecektir.

Örnek 3.1.5. *$\mathbb{Z}$ bir düzgün modül olduğundan CS modüldür. Ancak quasi-injektif (dolayısıyla da injektif) değildir. Çünkü $E(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$ olup, $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$, $f(m) = \frac{1}{2}m$ $(m \in \mathbb{Q})$ modül homomorfizması için $f(\mathbb{Z}) \nsubseteq \mathbb{Z}$ olduğundan Sonuç* 2.9.36*'dan $\mathbb{Z}$ quasi-injektif değildir.*

Burada $E(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$ olduğunu gösterelim: $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ modülü için $E(\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}) = \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ dir. Gerçekten; $\mathbb{Z}$ nin bir $0 \neq I$ idealinden $\mathbb{Q}$ ya keyfi bir $f : I \to \mathbb{Q}$ homomorfizması alalım. I, $\mathbb{Z}$ nin bir ideali olduğundan $n > 0$ ve $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $I = n\mathbb{Z}$ dir. $\mathbb{Q}$ nun her $\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$ elemanı ve her $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ için

$$\frac{a}{b} = n.\frac{c}{d}$$

olacak şekilde bir $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ bulunabildiğinden

$$f(n) = n\frac{p}{q}$$

olacak biçimde bir $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ vardır. Her $m \in \mathbb{Z}$ için

$$g(m) = m\frac{p}{q}$$

olmak üzere $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ fonksiyonunu tanımlayalım. g bir homomorfizmadır. Her $nk \in n\mathbb{Z} = I$ için

$$g(nk) = nk\frac{p}{q} = kn\frac{p}{q} = kf(n) = f(nk)$$

olduğundan $g_{|I} = f$ dir. Yani $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ injektiftir.

Önerme 3.1.6. *M bir R-modül olsun. M nin CS modül olması için gerek ve yeter koşul M nin her kapalı alt modülünün M nin diktoplananı olmasıdır.*

Kanıt. $(\Rightarrow)$: $L \leq M$ kapalı bir alt modül ve M modülü (C_1) özelliğini sağlasın. Hipotezden $L \leq_e K \leq_d M$ olacak biçimde bir $K \leq M$ vardır. L, kapalı bir alt modül olduğundan essential genişlemesi yoktur, yani $L = K \leq_d M$ dir.
$(\Leftarrow)$: $A \leq M$ alalım. Önerme 2.3.10'dan $A \leq_e B \leq_c M$ olacak şekilde bir $B \leq M$ vardır. Hipotezden $B \leq_d M$ dir. Böylece M modülü (C_1) özelliğini sağlar. ■

Yardımcı Teorem 3.1.7. *M bir R-modül ve $A \leq M$ olsun. Eğer, A, M nin bir diktoplananında kapalı ise M de de kapalıdır.*

Kanıt. $A \leq_c B \leq_d M$ olsun. Bir modülde her diktoplanan bir komplement alt modül olduğundan $A \leq_c B \leq_c M$ Önerme 2.3.14'den $A \leq_c M$ dir. ■

Önerme 3.1.8. *M_R bir ayrıştırılamaz modül olsun. M modülünün CS olması için gerek ve yeter koşul M modülünün düzgün olmasıdır.*

Kanıt. $(\Rightarrow)$: M ayrıştırılamaz CS modül olsun. $0 \neq K \leq M$ için $K \leq_e L \leq_d M$ olacak şekilde $L \leq_d M$ vardır. M ayrıştırılamaz olduğundan $L = 0$ veya $L = M$ dir. $L \neq 0$ olduğundan $L = M$ olup $K \leq_e M$ dir. Yani M düzgündür.
$(\Leftarrow)$: M düzgün olsun. $N \leq_c M$ ise $N = 0$ veya $N = M$ dir. Öyleyse $N \leq_d M$ dir. Dolayısıyla M, CS tir. ■

Önerme 3.1.9. *Bir M modülünün CS olması için gerek ve yeter koşul $N \cap L = 0$ koşulunu sağlayan her N ve L alt modülleri için $L \leq K$ ve $N \cap K = 0$ olacak şekilde bir $K \leq_d M$ var olmasıdır. Üstelik, bu durumda $N \oplus K \leq_e M$ dir.*

Kanıt. $(\Rightarrow)$: M modülü CS, N ve L de M nin $N \cap L = 0$ koşulunu sağlayan alt modülleri olsunlar. Bu durumda N nin $L \leq K$ olacak biçimde bir komplementi vardır. Hipotezden $K \leq_d M$ olur.
$(\Leftarrow)$: $L \leq_c M$ olsun. Bu durumda bir $N \leq M$ vardır öyle ki L, N nin komplementidir. Hipotezden bir $K \leq_d M$ vardır öyle ki $L \leq K$ ve $N \cap K = 0$ dır. Böylece $L = K$ elde edilir. Son kısım Önerme 2.3.8'den görülür. ■

Önerme 3.1.10. *M, (C_i) $(i = 1, 2, 3)$ özelliklerini sağlayan bir modül ve $N \leq_d M$ olsun. Bu durumda N de (C_i) $(i = 1, 2, 3)$ koşulunu sağlar.*

Kanıt. M, CS olsun. $N \leq_d M$ ve $K \leq_c N$ alalım. Önerme 2.3.14'den $K \leq_c M$ dir. M, CS olduğundan $K \leq_d M$ dir. Dolayısıyla $M = K \oplus L$ olacak şekilde $L \leq M$ vardır. Buradan

$$N = N \cap M = N \cap (K \oplus L) = K \oplus (N \cap L)$$

olup $K \leq_d N$ dir. Yani N, CS modüldür.

M, (C_2) özelliğini sağlasın. $N \leq_d M$ ve $K \leq N$ alalım. K, N nin bir diktoplananına izomorfik olsun. Öyleyse K, M nin bir diktoplananına izomorfiktir. M, (C_2) olduğundan $K \leq_d M$ dir. Dolayısıyla $K \leq_d N$ dir. N, (C_2) özelliğine sahiptir.

M, (C_3) özelliğini sağlasın. $N \leq_d M$, K_1 ve K_2 de N nin $K_1 \cap K_2 = 0$ olacak biçimde iki dik toplananı olsun. O halde $M = K_1 \oplus K_2 \oplus L$ olacak biçimde bir $L \leq M$ vardır.

$$N = N \cap M = N \cap (K_1 \oplus K_2 \oplus L) = K_1 \oplus (N \cap (K_2 \oplus L)) = K_1 \oplus K_2 \oplus (N \cap L)$$

olduğundan N, (C_3) özelliğini sağlar. ■

Önerme 3.1.10'dan (yarı) sürekli bir M modülünün her diktoplananı (yarı) süreklidir.

CS modüllerin dik toplamının her zaman CS olması gerekmez. Buna ilişkin örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek 3.1.11. *([12]) p asal bir tamsayı olmak üzere $M_1 = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus 0$,*
$M_2 = 0 \oplus \mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z}$ ve $M_{\mathbb{Z}} = M_1 \oplus M_2$ olsun. Bu durumda,

(i) $K \leq_c M_{\mathbb{Z}} \Leftrightarrow K = 0,\ M_1,\ M_2,\ M$ ya da $b \in \mathbb{Z}$ için, $b \notin p^3\mathbb{Z}$ olmak üzere $K = (1 + p\mathbb{Z}, b + p^3\mathbb{Z})$ dür.

(ii) $M_{\mathbb{Z}}$, CS modül değildir.

Kanıt. (*i*) $0,\ M_1,\ M_2,\ M \leq_d M$ olduğundan bunlar M nin komplementleridir. Şimdi $b \notin p^3\mathbb{Z}$ için $K = (1 + p\mathbb{Z}, b + p^3\mathbb{Z}) \leq_c M$ olduğunu gösterelim: K devirli bir alt modül ve

$$\begin{aligned} p^3K &= p^3\mathbb{Z}(1+p\mathbb{Z}, b+p^3\mathbb{Z}) \\ &= \mathbb{Z}(p^3+p\mathbb{Z}, p^3b+p^3\mathbb{Z}) \;=\; \mathbb{Z}(0+p\mathbb{Z}, 0+p^3\mathbb{Z}) \;=\; 0 \end{aligned}$$

olup

$$p^3M = p^3(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z}) = 0$$

dır. $M_{\mathbb{Z}}$ nin Goldie boyutu 2 olduğundan K nın Goldie boyutu 0, 1 veya 2 dir. K nın Goldie boyutu, 0 ve 2 olamayacağından 1 olmalıdır. Yani K düzgün alt modüldür. $L \leq M$ için $K \leq_e L$ olsun. M sonlu üretilmiş olduğundan L düzgündür ve böylece devirlidir (bakınız, [2]). O halde $L = (c+p\mathbb{Z}, d+p^3\mathbb{Z})\mathbb{Z}$ olan $c, d \in \mathbb{Z}$ vardır. $K \leq_e L$ olduğundan,

$$(1+p\mathbb{Z}, b+p^3\mathbb{Z}) = n(c+p\mathbb{Z}, d+p^3\mathbb{Z})$$

olacak biçimde $n \in \mathbb{Z}$ vardır. O halde $1 \equiv nc\ (modp)$ ve $b \equiv nd\ (modp^3)$ dür. $p \nmid n$ dir. Eğer $p \mid n$ olsaydı $1 \equiv 0 (modp)$ çelişkisine varılırdı. Öyleyse $1 = nc + sp$ olacak biçimde $s \in \mathbb{Z}$ vardır. Böylece, $(1-nc)^3 = s^3p^3$ olup $1 - nt = s^3p^3$ olacak biçimde $t \in \mathbb{Z}$ vardır. Buradan

$$\begin{aligned} t(1+p\mathbb{Z}, b+p^3\mathbb{Z}) \;=\; nt(c+p\mathbb{Z}, d+p^3\mathbb{Z}) &= (1-s^3p^3)(c+p\mathbb{Z}, d+p^3\mathbb{Z}) \\ &= (c+p\mathbb{Z}, d+p^3\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

olur. Yani $K = L$ bulunur. Sonuç olarak, K nın hiçbir essential genişlemesi olmadığından $K \leq_c M$ dir.

Şimdi $0 \neq N,\ M_1,\ M_2,\ M \leq_c M$ olsun. O halde Önerme 2.5.3'den N, M de maksimal düzgün alt modüldür. Böylece, $(a+p\mathbb{Z}, b+p^3\mathbb{Z}) \in N$ olacak biçimde $a \notin p\mathbb{Z}$ ve $b \notin p^3\mathbb{Z}$ vardır. Genelliği bozmadan $a = 1$ alabiliriz. Böylece $(1+p\mathbb{Z}, b+p^3\mathbb{Z})\mathbb{Z} \subseteq N$ ve $(1+p\mathbb{Z}, b+p^3\mathbb{Z})\mathbb{Z} \leq_e N$ dir. $(1+p\mathbb{Z}, b+p^3\mathbb{Z})\mathbb{Z} \leq_c M$ olduğundan $N = (1+p\mathbb{Z}, b+p^3\mathbb{Z})\mathbb{Z}$ olur. Böylece istenilen sonuç elde edilir.

(ii) Şimdi $N = (1+p\mathbb{Z}, p+p^3\mathbb{Z})\mathbb{Z} \leq M$ alalım. (i)'den $N \leq_c M$ dir ve N nin mertebesi p^2 dir. Eğer $N \leq_d M$ olsaydı $M = N \oplus N'$ olacak biçimde p^2 mertebeli $N' \leq M$ olurdu ki bu da $p^2M = p^2(N \oplus N') = 0$ ile çelişirdi. O halde N, M nin dik toplananı değildir. Dolayısıyla M, CS değildir. ■

Aşağıda hangi koşullar altında CS modüllerin (sonlu) dik toplamının bir CS modül olduğunu gösteren önermeler verilecektir.

Yardımcı Teorem 3.1.12. *M, her maksimal düzgün alt modülü bir dik toplanan olan bir modül olsun. $K \leq_c M$ ve K, sonlu Goldie boyutlu ise $K \leq_d M$ dir.*

Kanıt. U, K nın bir maksimal düzgün alt modülü olsun. Önerme 2.5.3'ten U, M nin bir maksimal düzgün alt modülüdür. O halde hipotezden, $M = U \oplus V$ olacak şekilde $V \leq M$ vardır. Buradan;

$$K = K \cap M = K \cap (U \oplus V) = U \oplus (K \cap V)$$

dir. Bu durumda $U \leq_d K$ dır. $K \cap V \leq_c K \leq_c M$ için Önerme 2.3.14'ten $K \cap V \leq_c M$ dir ve $K \cap V$ nin Goldie boyutu K nın Goldie boyutundan küçüktür. K nın Goldie boyutu üzerinden tümevarımla $K \cap V$, M nin ve böylece V nin bir diktoplananıdır. Öyleyse K, M nin dik toplananıdır. ∎

Sonuç 3.1.13. *M sonlu Goldie boyutlu bir modül olsun.*
M nin her maksimal düzgün alt modülü bir dik toplanan ise M, CS modüldür.

Kanıt. Yardımcı Teorem 3.1.12'den açıktır. ∎

Yardımcı Teorem 3.1.14. *A ve B CS modüller olmak üzere $M = A \oplus B$ olsun. Bu durumda, M nin CS modül olması için gerek ve yeter koşul M nin $K \cap A = 0$ veya $K \cap B = 0$ özelliğindeki K komplement alt modülünün M nin bir dik toplananı olmasıdır.*

Kanıt. $(\Rightarrow)$: Açıktır.
$(\Leftarrow)$: M nin $K \cap A = 0$ veya $K \cap B = 0$ özelliğindeki K komplement alt modülü M nin bir diktoplananı ve $L \leq_c M$ olsun. Şimdi $L \cap B \leq_e H$ olacak şekilde $H \leq_c L$ vardır. Önerme 2.3.14'den $H \leq_c M$ dir ve $H \cap A = 0$ dır. Öyleyse $H \leq_d M$ dir. Buradan $M = H \oplus H'$ olacak şekilde $H' \leq M$ vardır. Böylece, $L = L \cap M = L \cap (H \oplus H') = H \oplus (L \cap H')$. Böylece
Önerme 2.3.14'den $L \cap H' \leq_c M$ dir ve $(L \cap H') \cap B = 0$ dır. Hipotezden $L \cap H' \leq_d M$ dir ve böylece $L \cap H' \leq_d H'$ olur. Buradan $L \leq_d M$ dir. Yani M, CS tir. ∎

Teorem 3.1.15. *Bir M modülü için aşağıdakiler denktir;*

(a) M yarı sürekli bir modüldür.

(b) X ve Y, M nin birbirlerinin komplementleri olan iki alt modülü ise $M = X \oplus Y$ dir.

(c) Her $f^2 = f \in End_R(E(M))$ için $f(M) \leq M$ dir.

(d) $E(M) = \bigoplus_{i \in I} E_i$ ise $M = \bigoplus_{i \in I} (M \cap E_i)$ dir.

Kanıt. $(a) \Rightarrow (b)$ M bir yarı sürekli modül ve X ve Y de M nin birbirlerinin komplementleri olan iki alt modülü olsun. Önerme 3.1.6'dan X ve Y, M nin diktoplananlarıdır. M, (C_3) özelliğini sağladığından $X \oplus Y \leq_d M$ dir. Ayrıca, Önerme 2.3.8'den $X \oplus Y \leq_e M$ olduğundan $M = X \oplus Y$ dir.

$(b) \Rightarrow (c)$ $A_1 = M \cap f(E(M))$ ve $A_2 = M \cap (1-f)(E(M))$ olsun. $A_1 \subseteq B_1$ olmak üzere B_1, A_2 nin bir komplementi ve $A_2 \subseteq B_2$ olmak üzere B_2 de B_1 in bir komplementi olsun. Bu durumda B_1 de B_2 nin bir komplementidir. Gerçekten, $B_2 \cap U = 0$ olacak biçimde bir $B_1 \leq U \leq M$ olsun. Şimdi $x \in (B_1 \oplus B_2) \cap (A_2 \cap U)$ alalım. $x = b_1 + b_2$ olacak biçimde bir $b_1 \in B_1$ ve $b_2 \in B_2$ vardır. Buradan

$$b_2 = x - b_1 \in B_2 \cap [(A_2 \cap U) + B_1] = B_2 \cap [(A_2 + B_1) \cap U] = 0$$

dır. Böylece,

$$x = b_1 \in (A_2 \cap U) \cap B_1 = 0$$

bulunur. O halde,

$$(B_1 \oplus B_2) \cap (A_2 \cap U) = 0$$

dır. Önerme 2.3.8'den $B_1 \oplus B_2 \leq_e M$ olduğundan $A_2 \cap U = 0$ dır. B_1, A_2 ile arakesiti sıfır olan maksimal alt modül olduğundan $U = B_1$ olmalıdır. Buradan B_1 in B_2 nin bir komplementi olduğu görülür. Şimdi $\pi : B_1 \oplus B_2 \to B_1$ projeksiyon dönüşümü olmak üzere iddiamız $M \cap (f - \pi)(M) = 0$ olduğudur. $(f - \pi)(x) = y$ olacak biçimde x, $y \in M$ alalım. Bu durumda,

$$f(x) = y + \pi(x) \in M \text{ ve } f(x) \in M \cap f(E(M)) = A_1$$

dir. Böylece $(1-f)(x) \in M$ ve bundan dolayı $(1-f)(x) \in A_2$ dir. O halde

$$\pi(x - f(x)) \in \pi(A_2) = 0 \text{ yani } \pi(x) = \pi(f(x)) = f(x)$$

dir. $f(x)y + \pi(x)$ olduğundan $y = 0$ dır ve bundan dolayı $M \cap (f - \pi)(M) = 0$ dır. $M \leq_e E(M)$ olduğundan $(f - \pi)(M) = 0$ dır. Sonuç olarak,

$$f(M) = \pi(M) \leq M$$

dir.

$(c) \Rightarrow (d)$ $\bigoplus_{i \in I}(M \cap E_i) \leq M$ olduğu açıktır. $m \in M$ alalım. Sonlu bir $J \subseteq I$ için $m \in \bigoplus_{i \in J} E_i$ dir. Bu durumda, $E(M) = \bigoplus_{i \in J} E_i \oplus E'$, $E' \leq E(M)$ yazılabilir. Bu durumda, $E_i = f_i(E(M))$ olacak biçimde ortogonal $f_i^2 = f_i \in End_R(E(M))$, $(i \in J)$ vardır. $f_i(M) \leq M$ olduğundan

$$m = \Big(\bigoplus_{i \in J} f_i\Big)(m) = \bigoplus_{i \in J} f_i(m) \in \bigoplus_{i \in J}(M \cap E_i)$$

dir.

$(d) \Rightarrow (a)$ $A \leq M$ olsun. $E(M) = E(A) \oplus E'$, $E' \leq E(M)$ şeklinde yazalım. Bu durumda,

$$M = M \cap E(M) = M \cap (E(A) \oplus E') = (M \cap E(A)) \oplus (M \cap E')$$

olur ve $A \leq_e M \cap E(A)$ dır. Buradan, M nin her alt modülü M nin bir diktoplananı içinde essetial olarak kapsandığından M, (C_1) özelliğini sağlar. Şimdi M_1 ve M_2, $M_1 \cap M_2 = 0$ olacak şekildeki iki diktoplanan olsun. $E_i = E(M_i)$, $(i = 1, 2)$ olmak üzere

$$E(M) = E_1 \oplus E_2 \oplus E', \;\; E' \leq E(M)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan,

$$M = (M \cap E_1) \oplus (M \cap E_2) \oplus (M \cap E')$$

dür. $M_i \leq_d M$ olduğundan $M = M_i \oplus K_i$ olacak şekilde $K_i \leq M$ $(i = 1, 2)$ vardır. Ayrıca $M_i \leq_e M \cap E_i$ $(i = 1, 2)$ olduğundan

$$M \cap E_i = (M \cap E_i) \cap M = (M \cap E_i) \cap (M_i \cap K_i) = M_i \oplus (M \cap E_i \cap K_i)$$

dir. Buradan, $M_i \leq_d M \cap E_i$ olduğundan $M_i = M \cap E_i$ $(i = 1, 2)$ dir. Böylece, M, (C_3) özelliğini sağladığından yarı süreklidir. ∎

Önerme 3.1.16. *([7, Sonuç 2.32]) Yarı sürekli modüllerde, izomorfik altmodüller izomorfik kapanışlara sahiptir.*

Yardımcı Teorem 3.1.17. *M_1, M_2 R-modüller ve $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. M_1, M_2-injektiftir. $\Longleftrightarrow$ $\forall\ N \leq M$ ve $N \cap M_1 = 0$ için $M = M_1 \oplus M^{'}$ ve $N \leq M^{'}$ olacak biçimde $M^{'} \leq M$ vardır.*

Kanıt. $(\Rightarrow)$: M_1, M_2-injektif olsun. $i = 1, 2$ için $\pi_i : M \longrightarrow M_i$ kanonik izdüşüm olsun. $N \leq M$ alalım öyleki $N \cap M_1 = 0$ olsun. Şimdi

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & M_2 \\ & M_1 & \end{tikzcd}$$

diyagramını düşünelim. Buradan $\alpha = \pi_2|_N$ ve $\beta = \pi_1|_N$ dir. Hipotezden en az bir $\theta : M_2 \longrightarrow M_1$ vardır öyle ki $\theta\alpha = \beta$ dır.

$$M^{'} = \{\ \theta(m) + m \mid m \in M_2\}$$

kümesini tanımlayalım. O halde $M^{'} \leq M$ dir. $m \in M$ için $m = m_1 + m_2$ olacak şekilde $m_1 \in M_1$, $m_2 \in M_2$ vardır. O halde,

$$m = m_1 + m_2 = (m_1 - \theta(m_2)) + (m_2 + \theta(m_2)) \in M_1 + M^{'}$$

dür. Öyleyse $M = M_1 + M^{'}$ dür. Diğer yandan, $x \in M_1 \cap M^{'}$ olsun. Öyleyse $x \in M_1$ ve $x = \theta(n) + n$ olacak şekilde $n \in M_2$ vardır. Buradan, $x - \theta(n) = n \in M_1 \cap M_2 = 0$ dır. Yani $n = 0$ dır. Böylece, $x = \theta(0) + 0 = 0 + 0 = 0$ dır. Yani $M = M_1 \oplus M^{'}$ dür. Ayrıca $N \leq M^{'}$ dür.
$(\Leftarrow)$: $N \cap M_1 = 0$ olan her $N \leq M$ için $M = M_1 \oplus M^{'}$ ve $N \leq M^{'}$ olacak şekilde $M^{'} \leq M$ olsun. $L \leq M_2$ ve $\phi : L \longrightarrow M_1$ bir R homomorfizma olsun. $H = \{\ x - \phi(x) \mid x \in L\}$ denirse $H \leq M$ ve $H \cap M_1 = 0$ olur. O halde hipotezden $M = M_1 \oplus H^{'}$ ve $H \leq H^{'}$ olacak şekilde $H^{'} \leq M$ vardır. Şimdi $\pi : M \longrightarrow M_1$ kanonik izdüşüm olsun. Öyleyse $Ker\pi = H^{'}$ dür. O halde $\pi|_{M_2} = M_2 \longrightarrow M_1$ dir ve $x \in L$ için,

$$\pi(x) = \pi(\phi(x) + (x - \phi(x))) = \phi(x)$$

dir. Böylece M_1, M_2-injektiftir. ■

Teorem 3.1.18. *M_i ler $(1 \leq i \leq n)$ göreceli injektif modüller ve M, M_i lerin sonlu diktoplamı olsun. Bu durumda, M modülünün CS olması için gerek ve yeter şart her bir $1 \leq i \leq n$ için M_i lerin CS olmasıdır.*

Kanıt. $(\Rightarrow)$: Açıktır.
$(\Leftarrow)$: Her bir $1 \leq i \leq n$ için M_i ler CS olsun. O halde n üzerinden tümevarımla $n = 2$ için M nin CS olduğunu ispatlamamız yeterlidir. $K \cap M_1 = 0$ olan $K \leq_c M$ alalım. Yardımcı Teorem 3.1.17'den $K \leq M^{'}$ ve $M = M_1 \oplus M^{'}$ olacak şekilde $M^{'} \leq M$ vardır. O halde $M^{'} \cong M_2$ ve böylece $M^{'}$ bir CS modül olur. (CS izomorfizmada korunur.) $K \leq_c M^{'}$ olduğu açıktır. Buradan $K \leq_d M^{'}$ ve dolayısıyla $K \leq_d M$ dir. Benzer şekilde $H \cap M_2 = 0$ olan herhangi bir $H \leq_c M$ için $H \leq_d M$ dir. Yardımcı Teorem 3.1.14'den M, CS modüldür. ∎

Teorem 3.1.19. *Bir M modülünün CS olması için gerek ve yeter koşul $M^{'}$ ve $Z_2(M)$, CS modüller ve $Z_2(M)$, $M^{'}$-injektif olacak biçimde $M^{'} \leq M$ için $M = Z_2(M) \oplus M^{'}$ olmasıdır.*

Kanıt. $(\Rightarrow)$: $M^{'}$ ve $Z_2(M)$, CS modüller ve $Z_2(M)$, $M^{'}$-injektif olsun. $M = Z_2(M) \oplus M^{'}$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $M^{'} \cong M/Z_2(M)$ ise $Z(M^{'}) = Z(M/Z_2(M)) = 0$ olduğundan $M^{'}$ nonsingulerdir. Burdan $Hom(Z_2(M), M^{'}) = 0$ bulunur. Böylece $M^{'}$, $Z_2(M)$-injektiftir. Teorem 3.1.18'den M, CS modüldür.
$(\Leftarrow)$: M, CS olsun. Önerme 2.7.4'ten $M/Z_2(M)$ nonsinguler ve $Z_2(M) \leq_c M$ dir. Böylece $Z_2(M) \leq_d M$ dir. Buradan bir $M^{'} \leq M$ için $M = Z_2(M) \oplus M^{'}$ dür. Yardımcı Teorem 3.1.10'dan $M^{'}$ ve $Z_2(M)$ CS tir. Şimdi $N \leq M^{'}$ için $\phi : N \to Z_2(M)$ bir homomorfizma olsun. $L = \{\ x - \phi(x) \mid x \in N\}$ diyelim. O halde $L \leq M$ ve $L \cong N$ dir. $M = M_1 \oplus M_2$ ve $L \leq_e M_1$ olacak biçimde M_1, $M_2 \leq M$ vardır. $L \cong N$ olduğunda $Z_2(N) = Z_2(L)$ ve $Z_2(N) \leq Z_2(M) = 0$ olduğundan $Z_2(L) = 0$ olur ki buradan $L \leq_e M_1$ olduğundan $Z_2(M_1) = 0$ olur. $Z_2(M) = Z_2(M_1) \oplus Z_2(M_2) = Z_2(M_2) \subseteq M_2$ olur. $M = Z_2(M) \oplus M^{'}$ olduğundan $M_2 = Z_2(M) \oplus (M_2 \cap M^{'})$ bulunur. Bundan dolayı da $M = M_1 \oplus Z_2(M) \oplus (M_2 \cap M^{'})$ olur. $\pi : M \to Z_2(M)$ kanonik projeksiyon olsun. $Ker\pi = M_1 \oplus (M_2 \cap M^{'})$ olup $\pi|_{M^{'}} = \theta$ ile gösterelim. O halde $\theta : M^{'} \to Z_2(M)$ homomorfizmadır. Üstelik herhangi bir $x \in L$ için $x = \phi(x) + x - \phi(x)$ olduğundan $\phi(x) = \theta(x)$ dir. Yani; $\theta|_N = \phi$ olur. $Z_2(M)$, $M^{'}$-injektiftir. ∎

Sonuç 3.1.20. *M_1 injektif modül ve M_2 de nonsinguler CS modül olsun. Bu durumda $M = M_1 \oplus M_2$ bir CS modüldür.*

Kanıt. Teorem 3.1.19'un genelliğini bozmadan M_1 inde nonsinguler olduğunu kabul edebiliriz. Şimdi $K \leq_c M$ olsun. Eğer $K \cap M_1 = 0$ ise Yardımcı Teorem 3.1.17'den $K \leq A$ ve $M = M_1 \oplus A$ olacak biçimde $A \leq M$ vardır. $A \cong M_2$ olduğundan A, CS tir ve $K \leq_d A$ olur. O halde $K \leq_d M$ dir. Eğer $K \cap M_1 \neq 0$ ise $K \cap M_1 \leq_e L \leq_d M_1$ olacak biçimde $L \leq M_1$ vardır. M nonsinguler olduğundan $K + (K \cap M_1) \leq_e K + L$ ve böylece $K = K + L$ dir. Yani $L \leq K$ olur. O halde öyle bir $L' \leq M_1$ için $M_1 = L \oplus L'$ ve $M = L \oplus L' \oplus M_2$ dir. Modüler kuralından, $K = L \oplus [K \cap (L' \oplus M_2)]$ olur. $K' = K \cap (L' + M_2)$ olsun. O halde $K' \leq_c L' \oplus M_2$ ve $K' \cap L' = 0$ dır. Böylece ispatın ilk kısmından $K' \leq_d L' \oplus M_2$ ve böylece $K \leq_d M$ dir. Yani, M, CS tir. ■

3.2 (C_{11})-Modüller

Bu bölümde, CS modüllerin bir genellemesi olan (C_{11})-modül ailesinden bahsedilecektir. Daha ayrıntılı bilgi için [12-15] önerilir.

Tanım 3.2.1. *M bir R-modül olsun. Eğer M nin her alt modülü, M nin bir dik toplananı olan bir komplemente sahipse M ye (C_{11})-modül (veya (C_{11}) koşulunu sağlar) denir.*

Önerme 3.2.2. *Bir M_R modülü için aşağıdaki koşullar denktir:*

(1) M modülü (C_{11}) koşulunu sağlar.

(2) M deki herhangi bir L komplement alt modülü için, $K \leq_d M$ olacak biçimde L nin bir K komplementi vardır.

(3) Herhangi bir $N \leq M$ için bir $K \leq_d M$ vardır öyle ki $N \cap K = 0$ ve $N \oplus K \leq_e M$ dir.

(4) Herhangi bir $L \leq_c M$ için bir $K \leq_d M$ vardır öyle ki $L \cap K = 0$ ve $L \oplus K \leq_e M$ dir.

Kanıt. (1) $\Rightarrow$ (2) , (3) $\Rightarrow$ (4) Açıktır.
(1) $\Leftrightarrow$ (3), (2) $\Leftrightarrow$ (4) Yardımcı Teorem 2.3.9'dan açıktır.

(4) $\Rightarrow$ (1) $A \leq M$ olsun. Bu durumda $A \leq_e B \leq_c M$ olacak biçimde bir $B \leq M$ vardır. Hipotezden, bir $K \leq_d M$ vardır öyle ki $B \cap K = 0$ ve $B \oplus K \leq_e M$ dir. Böylece Yardımcı Teorem 2.3.9'dan K, M de B nin bir komplementidir. Ayrıca $A \cap K \leq_e B \cap K = 0$ olduğundan $A \cap K = 0$ dır. Varsayalım $K < K^{'} \leq M$ olsun. Bu durumda $K^{'} \cap B \neq 0$ dır ve böylece $K^{'} \cap B \cap A \neq 0$ dır. Yani $K^{'} \cap A \neq 0$ dır. Sonuç olarak K, M de A nın komplementidir. ■

Önerme 3.2.3. *M_R modülü CS modül ise (C_{11})-modüldür.*

Kanıt. $A, B \leq M$ ve $A \cap B = 0$ olsun. Bu durumda A nin $B \leq C$ olacak biçimde bir C komplementi vardır. M, CS modül olduğundan $C \leq_d M$ dir. O halde M, (C_{11})-modüldür. ■

Özel olarak düzgün modüller, yarıbasit modüller ve injektif modüller (C_{11}) özelliğini sağlar. Öte yandan (C_{11}) özelliğini sağlayan herhangi bir ayrıştırılamaz modül düzgündür.

Teorem 3.2.4. *(C_{11})-modüllerin herhangi bir dik toplamı da (C_{11})-modüldür.*

Kanıt. Λ bir index kümesi olmak üzere, $\lambda \in \Lambda$ için M_λ lar C_{11}-modüller ve $M = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ olsun. $N \leq M$ olsun. Bu durumda $N \cap M_\lambda \leq M_\lambda$ dır. M_λ (C_{11})-modül olduğundan Önerme 3.2.2'den bir $K_\lambda \leq_d M_\lambda$ vardır öyle ki

$$(N \cap M_\lambda) \cap K_\lambda = 0 \text{ ve } (N \cap M_\lambda) \oplus K_\lambda \leq_e M_\lambda$$

dır. Buradan

$$N \cap (M_\lambda \cap K_\lambda) = N \cap K_\lambda = 0$$

ve

$$(N \cap M_\lambda) \oplus K_\lambda = (N \oplus K_\lambda) \cap M_\lambda \leq_e M_\lambda$$

dır. Şimdi $\Lambda^{'}$ "en az bir $K^{'} \leq_d M^{'} = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda^{'}} M_\lambda$ vardır öyle ki $N \cap K^{'} = 0$ ve $(N \oplus K^{'}) \cap M^{'} \leq_e M^{'}$ dür" özelliğini sağlayan λ ları içeren Λ nın boştan farklı bir alt kümesi olsun. Farzedelim ki $\Lambda^{'} \neq \Lambda$ olsun. O halde bir $\mu \in \Lambda$ vardır öyle ki $\mu \notin \Lambda^{'}$ dür.

$$L = (N \oplus K^{'}) \cap M_\mu \leq M_\mu$$

olduğundan bir $K_\mu \leq_d M_\mu$ vardır öyle ki $K_\mu \cap L = 0$ ve $K_\mu \oplus L \leq_e M_\mu$ dür. Şimdi

$$\Lambda'' = \Lambda' \cup \{\mu\} \text{ ve } M'' = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda''} M_\lambda = M' \oplus M_\mu$$

olsun. Açıktır ki $K' \cap K_\mu = 0$ dır. $K'' = K' \oplus K_\mu$ olsun. Böylece $K' \leq_d M'$ ve $K_\mu \leq_d M_\mu$ olduğundan $K'' \leq_d M''$ dür. Üstelik

$$K_\mu \cap N \leq K_\mu \cap L = K_\mu \cap (N \oplus K') \cap M_\mu = K_\mu \cap (N \oplus K') = 0$$

olup $K_\mu \cap N = 0$ dır. Diğer taraftan $K' \cap N = 0$ olduğundan

$$N \cap (K_\mu \oplus K') = N \cap K'' = 0$$

dır.

Şimdi $N \oplus K''$ alt modülünü göz önüne alalım.

$$(N \oplus K') \cap M' \leq (N \oplus K'') \cap M'$$

olduğundan $(N \oplus K'') \cap M' \leq_e M'$ dür. Üstelik,

$$(N \oplus K'') \cap M_\mu = (N \oplus K' \oplus K_\mu) \cap M_\mu = [(N \oplus K') \cap M_\mu] \oplus K_\mu = L \oplus K_\mu \leq_e M_\mu$$

dür. Buradan

$$(N \oplus K'') \cap M'' \leq_e M''$$

elde edilir. Bu uygulamayı tekrarlayarak,

$$N \cap K = 0 \text{ ve } N \oplus K \leq_e M$$

olacak biçimde bir $K \leq_d M$ bulunur. Böylece M (C_{11})-modüldür. ∎

Sonuç 3.2.5. *CS modüllerin herhangi bir dik toplamı (C_{11}) koşulunu sağlar.*

Kanıt. Teorem 3.2.4'ten hemen görülür. ∎

Sonuç 3.2.6. *Düzgün modüllerin herhangi bir dik toplamı (C_{11}) koşulunu sağlar.*

Kanıt. Sonuç 3.2.5'ten hemen görülür. ∎

Örnek 3.2.7. *p bir asal tamsayı olmak üzere $M_{\mathbb{Z}} = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z})$ modülü (C_{11}) koşulunu sağlar. Fakat CS değildir.*

Kanıt. Sonuç 3.2.5'ten (C_{11}) koşulunu sağlar. CS olmadığı Örnek 3.1.11'de gösterilmişti. ∎

(C_{11})-modüllerin herhangi bir dik toplananı her zaman bir (C_{11})-modül olması gerekmez. Bu özelliğe ilişkin örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek 3.2.8. *([16], Örnek 17.36)*
$\mathbb{R}$ bir reel cisim ve S polinom halkası $\mathbb{R}[x, y, z]$ olmak üzere;
$s = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ iken $R = S/Ss$ halkası, bir Krull dimension 2 nin değişmeli Noetherian domaindir. Dahası free R-modül $M = R \oplus R \oplus R$, (C_{11}) koşulunu sağlar ama M, (C_{11}) koşulunu sağlamayan bir K diktoplananı içerir.

Kanıt. $\mathbb{R}$ Noetherian olduğundan Teorem 2.6.6'dan $S = \mathbb{R}[x, y, x]$ de Noetherian'dır. Teorem 2.6.5'den $R = S/Ss$ halkası da Noetherian'dır. Bunun yanında $x^2+y^2+z^2-1$ polinomu indirgenemez (irreducible) olduğundan $Ss =< x^2 + y^2 + z^2 - 1 >$ asal idealdir. $S = \mathbb{R}[x, y, z]$ birimli ve değişmeli bir halka olduğundan dolayı $R = S/Ss$ bir tamlık bölgesidir. O halde R, her idealini essential olarak kapsar. Bundan dolayı R düzgün olup Sonuç 3.2.6'dan M, (C_{11})-modüldür.

$$\begin{aligned} \phi : M = R \oplus R \oplus R &\longrightarrow R \\ e_1 = (1 + Ss, 0 + Ss, 0 + Ss) &\mapsto x + Ss \\ e_2 = (0 + Ss, 1 + Ss, 0 + Ss) &\mapsto y + Ss \\ e_3 = (0 + Ss, 0 + Ss, 1 + Ss) &\mapsto z + Ss \end{aligned}$$

dönüşümünü tanımlansın. Bu durumda $(a + Ss, b + Ss, c + Ss) \in R \oplus R \oplus R$ için $\phi(a + Ss, b + Ss, c + Ss) = ax + by + cz + Ss$ dir. Açıktır ki ϕ bir homomorfizmadır. $Ker\phi = K$ diyelim. Ayrıca $R = xR + yR + zR$ olduğundan ϕ örtendir. Dolayısıyla

$$0 \longrightarrow K = Ker\phi \xrightarrow{i} R \oplus R \oplus R \xrightarrow{\Phi} R$$

tam dizisi splittir. O halde en az bir $K' \leq M$ vardır öyle ki $M = K \oplus K'$ ve $K' \cong R$ dir. Buradan K nın boyutu 2 olup, K düzgün değildir.

Dikkat edersek, K, 2-küre S^2 nin tanjant demetinin regüler sectionunun R-modülüdür. Euler karakteristik $\chi(S^2) = 2 \neq 0$ olduğundan [17, Sonuç VI.13.3]'den onun tanjant demetinin bir regüler sectionuna sahip olamaz. Bu yüzden K bir ayrıştırılamaz modüldür. K, (C_{11}) koşulunu sağlamaz. ■

Bu kısmın devamında (C_{11})-modüllerin dik toplananlarının hangi koşullar altında bir (C_{11})-modül olduğu açıklanacaktır.

Tanım 3.2.9. *(P), modüllerin herhangi bir özelliği olsun. M nin her dik toplananı (P) özelliğini sağlıyorsa M modülü (P^+) özelliğini sağlar denir.*

Teorem 3.2.10. *Bir M modülünün (C_{11}) koşulunu sağlaması için gerek ve yeter koşul M nin herhangi bir (nonsinguler) K altmodülü için $M = Z_2(M) \oplus K$ olmak üzere $Z_2(M)$ ve K nın (C_{11}) koşulununu sağlamasıdır.*

Kanıt. $(\Longleftarrow)$: Teorem 3.2.4'ün sonucundan hemen görülür.
$(\Longrightarrow)$: M, (C_{11}) koşulunu sağlasın. İlk olarak $Z_2(M)$ nin M nin bir dik toplananı olduğunu kanıtlayacağız. $L = Z_2(M)$ olsun. $Z_2(M) \leq M$ olduğundan ve M, (C_{11}) koşulunu sağladığından Teorem 3.2.2'den

$$M = K \oplus K^{'},\ L \cap K = 0 \ ve\ L \oplus K \leq_e M$$

olacak şekilde M nin K ve $K^{'}$ alt modülleri vardır. Şimdi

$$L = Z_2(M) = Z_2(K \oplus K^{'}) = Z_2(K) \oplus Z_2(K^{'}).$$

$L \cap K = 0$ yani

$$Z_2(M) \cap K = 0 \Longrightarrow Z_2(K \oplus K^{'}) \cap K = 0 \Longrightarrow (Z_2(K) \oplus Z_2(K^{'})) \cap K = 0$$

ama $Z_2(K) \leq K$ olduğunu biliyoruz öyleyse açıktır ki $Z_2(K) = 0$ dır. Bu yüzden $L = Z_2(K^{'}) \subseteq K^{'}$. $L \oplus K \leq_e M$ olduğundan $L \leq_e K^{'}$ ve bundan dolayı Önerme 2.7.2'den $K^{'}/L$ singulerdir. Yani Önerme 2.7.2'den,

$$Z(K^{'}/Z_2(K^{'})) = K^{'}/Z_2(K^{'}) = 0.$$

Buradan $L = Z_2(K^{'}) = K^{'}$ ve $L \leq_d M$ dir. $M = L \oplus K$ olduğunu kanıtladık. Şimdi L nin (C_{11}) koşulunu sağladığını kanıtlayacağız. N, L nin herhangi bir alt modülü olsun. Buradan $N \oplus K \leq M$ dır. M, (C_{11}) koşulunu sağladığından Teorem 3.2.2'den $M = P \oplus P^{'}$, $(N \oplus K) \cap P = 0$ ve $N \oplus K \oplus P \leq_e M$ olacak şekilde M nin P ve $P^{'}$ alt modülleri vardır. Dikkat edersek $P \cap K = 0$ ve bundan dolayı P, $M/K \cong L$ içinde gömülüdür. Bu yüzden

$$P = P \cap L = P \cap Z_2(M) = P \cap (Z_2(P \oplus P^{'})) = P \cap (Z_2(P) \oplus Z_2(P^{'})) =$$
$$Z_2(P) \oplus (P \cap Z_2(P^{'})) = Z_2(P).$$

Yani $P = Z_2(P)$ ve $P \leq L$. Bunu takiben $P \leq_d L$ (gerçekten $L = P \oplus (L \cap P'))$ ve $N \oplus P \leq_e L$ dir. Önerme 3.2.2'den L, (C_{11}) koşulunu sağlar.

Son olarak K nın (C_{11}) koşulunu sağladığını kanıtlayalım. $\pi : M \longrightarrow K$ bir kanonik izdüşüm dönüşümü olsun. H, K nın herhangi bir alt modülü olsun. Buradan

$$L \cap H = 0 \text{ ve } M = Q \oplus Q',\ (L \oplus H) \cap Q = 0 \text{ ve } L \oplus H \oplus Q \leq_e M$$

olacak şekilde M nin Q ve Q' altmodülleri vardır. Dikkat edersek

$$L = Z_2(M) = Z_2(Q \oplus Q') = Z_2(Q) \oplus Z_2(Q') = Z_2(Q')$$

dür. Çünkü $Q \cap L = 0$ olduğundan $Z_2(Q) = 0$ dır. Bu yüzden $L \leq Q'$ ve $Q' = L \oplus (Q' \cap K)$. Şimdi

$$M = Q \oplus Q' = Q \oplus L \oplus (Q' \cap K)$$

dır. Bundan dolayı $Q \oplus L \leq_d M$ dir. Kolayca görülür ki $L \oplus Q = L \oplus \pi(Q)$. Bu yüzden K nın $\pi(Q)$ altmodülü M nin bir diktoplananıdır ve dolayısıyla K nın bir diktoplananıdır. Ancak $H \oplus \pi(Q) \oplus L \leq_e M$. Bu yüzden $H \oplus \pi(Q) \leq_e K$. Teorem 3.2.2'ten K, (C_{11}) koşulunu sağlar. ■

Yardımcı Teorem 3.2.11. *M, (C_{11}) koşulunu sağlayan bir modül olsun. M_1, M nin essential socle'a sahip bir alt modülü ve M_2, M nin sıfır socle'a sahip bir alt modülü olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2$.*

Kanıt. $Soc(M) = S$ ile gösterelim. $Soc(M) \leq M$ olduğundan ve M, (C_{11}) koşulunu sağladığından Önerme 3.2.2'den

$$M = K \oplus K',\ S \cap K = 0 \text{ ve } S \oplus K \leq_e M$$

olacak şekilde M nin K ve K' altmodülleri vardır. Önerme 2.4.8'den

$$S = Soc(M) = (Soc(K)) \oplus (Soc(K'))$$

dür. $S \cap K = 0$ olduğundan açık olarak $Soc(K) = 0$ dır. Bu yüzden $S \leq K'$. $S \leq K'$ ve $M = K \oplus K'$ olduğundan $S \oplus K \leq_e M$ buda gösterir ki $S \leq_e K'$ dür ve sonuç kanıtlanmış olur. ■

Bir nonsinguler M modülünün herhangi bir N altmodülü için $N \leq_e c(N)$ olacak şekilde M de bir tek $c(N)$ komplementi vardır. Yani;
$c(N) = \{\ m \in M \mid$ R nin herhangi essential sağ ideali E için $mE \leq N\}$ dir.

Teorem 3.2.12. *Bir nonsinguler M modülünün (C_{11}) koşulunu sağlaması için gerek ve yeter koşul M_1, (C_{11}) koşulunu sağlayan, essential socle'a sahip bir modül ve M_2, (C_{11}) koşulunu sağlayan, sıfır socle'a sahip bir modül olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2$ olmasıdır.*

Kanıt. $(\Leftarrow)$: Teorem 3.2.4'ten açıktır.
$(\Rightarrow)$: M, (C_{11}) olsun. Yardımcı Teorem 3.2.11'den M_1 essential socle'a sahip ve M_2 sıfır socle'a sahip bir modül olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2$ dir. $Soc(M)$ yi S ile gösterelim. Açıkça $M_1 = c(S)$ dir. M_1 in C_{11}olduğunu göstereceğiz. Herhangi bir $N \leq M_1$ alalım. Önerme 3.2.2'den $(N \oplus M_2) \cap P = 0$ ve $N \oplus M_2 \oplus P \leq_e M$ olacak şekilde $P \leq_d M$ vardır. P, M_1 içinde gömülüdür ve bundan dolayı P essential socle $S \cap P$ ye sahiptir (Önerme 2.4.9). Bu yüzden $P = c(S \cap P) \leq c(S) = M_1$. Bundan dolayı $P \leq_d M_1$ dir ve $N \oplus P \leq_e M_1$. Önerme 3.2.2'den M_1, (C_{11}) koşulunu sağlar.

Şimdi M_2 yi düşünelim. $\pi : M \to M_2$ kanonik izdüşüm dönüşümü olsun. Herhangi bir $H \leq M_2$ alalım. Önerme 3.2.2'den $M = Q \oplus Q^{'}$, $(M_1 \oplus H) \cap Q = 0$ ve $M_1 \oplus H \oplus Q \leq_e M$ olacak şekilde M nin Q ve $Q^{'}$ alt modülleri vardır. Şimdi Önerme 2.4.8'den $S \cap Q = 0$ olduğundan $S \subseteq Q^{'}$ dür. $M_1 = c(S) \subseteq Q^{'}$. Bunu takiben M_1, $Q^{'}$ nün bir diktoplananıdır ve bundan dolayı $M_1 \oplus Q \leq_d M$ dir. Buda gösteriyor ki $M_1 \oplus \pi(Q) \leq_d M$, $\pi(Q) \leq_d M_2$ ve $H \oplus \pi(Q) \leq_e M_2$ dir. Önerme 3.2.2'den M_2 in (C_{11}) koşulunu sağlar. ■

Yardımcı Teorem 3.2.13. *N herhangi bir M modülünün bir dik toplananı olsun ve K, $N \cap K = 0$ olacak şekilde M nin bir injektif alt modülü olsun. $N \oplus K \leq_d M$ dir.*

Kanıt. $M = N \oplus N^{'}$ olacak şekilde M nin $N^{'}$ alt modülü vardır.
$\pi : M \longrightarrow N^{'}$ bir kanonik izdüşüm dönüşümü olsun. $N \cap K = 0$ olduğundan $K \leq N^{'}$ dür. Öyleyse $K \cong \pi(K)$. Bu yüzden $\pi(K)$ injektiftir ve buradan $\pi(K) \leq_d N^{'}$. Ama $N \oplus K = N \oplus \pi(K)$ ve bundan dolayı $N \oplus K \leq_d M$. ■

Önerme 3.2.14. *M, (C_{11}) koşulunu sağlayan bir modül olsun. M/N bir injektif modül olacak şekilde M nin bir N diktoplananı olsun. N, (C_{11}) koşulunu sağlar.*

Kanıt. L, N nin herhangi bir alt modülü olsun. $M = N \oplus N'$ olacak şekilde M nin N' injektif alt modülü vardır. $L \oplus N'$ alt modülünü düşünelim. $L \oplus N' \leq M$ ve M (C_{11}) koşulunu sağladığından Teorem 3.2.2'den

$$(L \oplus N') \cap K = 0 \text{ ve } L \oplus N' \oplus K \leq_e M$$

olacak şekilde bir $K \leq_d M$ vardır. Yardımcı Teorem 3.2.13'den $N' \oplus K \leq_d M$ dir.$\pi : M \longrightarrow N$ kanonik izdüşüm dönüşümü olmak üzere $N' \oplus K = N' \oplus \pi(K)$ dır. $\pi(K) \leq_d N$ olur. Ancak,

$$L \oplus N' \oplus \pi(K) \leq_e M.$$

Bunu takiben $L \oplus \pi(K) \leq_e N$ dir. Önerme 3.2.2'den N, (C_{11}) koşulunu sağlar. ■

Yardımcı Teorem 3.2.15. *M, U ve V düzgün modüllerinin bir dik toplamı olsun. Bu takdirde M, (C_{11}^+) özelliğini sağlar.*

Kanıt. K, M nin sıfırdan farklı bir diktoplananı olsun. Eğer $K = M$ ise Sonuç 3.2.6'dan K, (C_{11}) koşulunu sağlar. Eğer $K \neq M$ ise K düzgün ve bundan dolayı K, (C_{11}) koşulunu sağlar. Bu yüzden M, (C_{11}^+) özelliğini sağlar. ■

Teorem 3.2.16. *M, (C_{11}) ve (C_3) özelliklerini sağlayan bir modül olsun. M, (C_{11}^+) özelliğini sağlar.*

Kanıt. M, (C_{11}) ve (C_3) özelliklerini sağlasın. N, M nin bir diktoplananı olsun. $M = N \oplus N'$ olacak şekilde M nin N' alt modülü vardır. $\pi : M \longrightarrow N$ kanonik izdüşüm dönüşümü olsun. K, N nin herhangi bir alt modülü olsun. $K \leq N \leq M$ olduğundan $K \leq M$ dir. M, (C_{11}) koşulunu sağladığından, $(K \oplus N') \cap L = 0$ ve $K \oplus N' \oplus L \leq_e M$ olacak şekilde M nin bir L diktoplananı vardır. M, (C_3) ü sağladığından $N' \oplus L$, M nin bir diktoplanananıdır. Dikkat edersek $N' \oplus L = N' \oplus \pi(L)$ ve bundan dolayı $\pi(L)$, N nin bir diktoplananıdır. Dahası $K \oplus N' \oplus L = K \oplus N' \oplus \pi(L) \leq_e M$ dır. Öyleyse $K \oplus \pi(L) \leq_e N$ dir. N, (C_{11}) koşulunu sağlar. Bu yüzden M, (C_{11}^+) özelliğini sağlar. ■

Önerme 3.2.17. *Sağ R-modül R bir (C_{11})-modül olacak şekilde R bir halka ve bir (C_{11})-modülün her diktoplananı bir (C_{11})-modül olsun. Bu durumda, her ayrıştırılamaz projektif sağ R-modül düzgündür.*

Kanıt. P bir ayrıştırılamaz projektif R-modül olsun. Buradan bir P' altmodülü için $F = P \oplus P'$ olacak şekilde bir serbest R-modül F vardır. Teorem 3.2.4'ten F bir (C_{11})-modüldür ve hipotezden P de (C_{11})-modüldür. Bu yüzden P düzgündür. ∎

Sıradaki bir kaç sonuç bir R halkası üzerindeki sağ modüllerin kategorisinde bir sol tam preradical (a left exact preradical) $\tilde{r}$ ile ilgilidir. Tanım ve temel özellikler için [18]'e göz atılabilir. Özel olarak, bir R halkasındaki bir sol tam preradical $\tilde{r}$ nin aşağıdaki özelliklerine ihtiyaç duyulacaktır:

(i) Her sağ M R-modülü için $\tilde{r}(M)$, M nin bir altmodülüdür;

(ii) Her M_1, M_2 sağ R-modülleri için $\tilde{r}(M_1 \oplus M_2) = \tilde{r}(M_1) \oplus \tilde{r}(M_2)$ dir;

(iii) Bir M sağ R-modülünün her N altmodülü için $\tilde{r}(N) = N \cap \tilde{r}(M)$ dir;

(iv) M, M' herhangi iki sağ R-modüller olmak üzere her $\varphi : M \to M'$ homomorfizması için $\varphi(\tilde{r}(M)) \subseteq \tilde{r}(M')$ dür.

Yardımcı Teorem 3.2.18. *R bir halka, $\tilde{r}$, sağ R-modüllerin kategorisinde bir sol tam preradical ve M sağ R-modülü bir (C_{11})-modül olsun. Buradan, $\tilde{r}(M_1) \leq_e M_1$ ve $\tilde{r}(M_2) = 0$ olacak şekilde $M = M_1 \oplus M_2$ dir.*

Kanıt. Önerme 3.2.2'den $M = M_1 \oplus M_2$, $\tilde{r}(M) \cap M_2 = 0$ ve $\tilde{r}(M) \oplus M_2 \leq_e M$ olacak şekilde M nin M_1 ve M_2 altmodülleri vardır. $\tilde{r}$ sol tam preradical olduğundan $\tilde{r}(M_2) = M_2 \cap \tilde{r}(M) = 0$ olur. $\pi : M \longrightarrow M_1$ kanonik projeksiyon dönüşümü olsun. Buradan $\pi(\tilde{r}(M)) \subseteq \tilde{r}(M_1)$ dir. Herhangi $0 \neq m \in M_1$ için

$$0 \neq mt \in \tilde{r}(M) \oplus M_2$$

olacak şekilde $t \in R$ vardır. Bundan dolayı $0 \neq mt = \pi(mt) \in \pi(\tilde{r}(M)) \subseteq \tilde{r}(M_1)$ dir. Dolayısıyla $\tilde{r}(M_1)$ in, M_1 in bir essential altmodülü olduğu görülür. ∎

Yardımcı Teorem 3.2.19. *N, M de bir tek kapanış (unique closure) K ya sahip olmak üzere N, M nin bir altmodülü olsun. Buradan K, M nin N yi içeren tüm K altmodüllerinin toplamıdır.*

Kanıt. N, L nin bir essential altmodülü olmak üzere H, M nin L altmodüllerinin bir toplamı olsun. N, kendi kapanışı olan K da essential olduğundan, $K \subseteq H$ dır. Tersine, N, L nin bir essential altmodülü olmak üzere L, M nin herhangi bir altmodülü olsun. L', M de L nin bir kapanışı olsun. L', M de N nin bir kapanışıdır ve bu yüzden $L' = K$ olur. Bu durumda $L \subseteq K$ dır. Dolayısıyla $H \subseteq K$ ve buradan $H = K$ olur. ■

Teorem 3.2.20. *R bir halka, r, sağ R-modüllerin kategorisinde bir sol tam preradical ve $\tilde{r}(M)$, M de bir tek kapanışa sahip olmak üzere M bir sağ R-modül olsun. Buradan M modülünün (C_{11}) olması için gerek ve yeter şart $M = M_1 \oplus M_2$, $\tilde{r}(M_1) \leq_e M_1$ ve $\tilde{r}(M_2) = 0$ olacak şekilde M_1 ve M_2, (C_{11})-modüllerinin bir diktoplamı olmasıdır.*

Kanıt. Yeterlilik Teorem 3.2.4'ten elde edilir. Tersine, M modülünün (C_{11}) olduğunu varsayalım. Yardımcı Teorem 3.2.18'den $\tilde{r}(M_1) \leq_e M_1$ ve $\tilde{r}(M_2) = 0$ olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2$ olur. Dikkat edilirse $\tilde{r}(M) = \tilde{r}(M_1) \oplus \tilde{r}(M_2) = \tilde{r}(M_1)$ olur. Bu yüzden M_1, M de $\tilde{r}(M)$ nin bir (tek) kapanışıdır. $\pi_i : M \to M_i$ $(i = 1, 2)$ kanonik projeksiyon dönüşümü olsun.

N, M_1 in herhangi bir altmodülü olsun. Önerme 3.2.2'den, $M = K \oplus K'$, $(N \oplus M_2) \cap K = 0$ ve $N \oplus M_2 \oplus K \leq_e M$ olacak şekilde M nin K ve K' altmodülleri vardır. $K \cap M_2 = 0$ olduğundan $K \cong \pi_1(K)$ dır. Dikkat edilirse, $\tilde{r}$ bir sol tam preradical olduğundan, $\tilde{r}(\pi_1(K)) = \pi_1(K) \cap \tilde{r}(M_1) \leq_e \pi_1(K)$ dir. Bundan dolayı $\tilde{r}(K) \leq_e K$ dır ve ek olarak, $\tilde{r}(M) = \tilde{r}(K) \oplus \tilde{r}(K') \leq_e K \oplus \tilde{r}(K')$ olur. Yardımcı Teorem 3.2.19'dan $K \oplus \tilde{r}(K') \subseteq M_1$ ve özel olarak $K \subseteq M_1$ dir. Şimdi $M_1 = K \oplus (M_1 \cap K')$ ve $N \oplus K = (N \oplus M_2 \oplus K) \cap M_1$, M_1 de essentialdır. Önerme 3.2.2'den M_1 bir (C_{11})-modüldür.

Şimdi H, M_2 nin herhangi bir altmodülü olsun. Önerme 3.2.2'den $M = L \oplus L'$, $(H \oplus M_1) \cap L = 0$ ve $H \oplus M_1 \oplus L \leq_e M$ olacak şekilde M nin L ve L' altmodülleri vardır. Dikkat edilirse $\tilde{r}(M) \subseteq M_1$ olduğundan $\tilde{r}(L) = L \cap \tilde{r}(M) \subseteq L \cap M_1 = 0$ olur ve bundan dolayı $\tilde{r}(M) = \tilde{r}(L) \oplus \tilde{r}(L') = \tilde{r}(L') \subseteq L'$ olur. L'', L' nde $\tilde{r}(M)$

nin bir kapanışı olsun. L', M nin bir diktoplananı olduğundan L'', M de $\tilde{r}(M)$ nin kapanışıdır (bkz., [9, s.6]), ve bundan dolayı, $M_1 = L'' \subseteq L'$ olur. Şimdi

$$L' = M_1 \oplus (L' \cap M_2)$$

ve

$$M = L \oplus L' = L \oplus M_1 \oplus (L' \cap M_2) = \pi_2(L) \oplus M_1 \oplus (L' \cap M_2).$$

olur. Buradan $\pi_2(L)$ nin M_2 nin bir diktoplananı olduğu görülür ve

$$\pi_2(L) \oplus H = (\pi_2(L) \oplus M_1 \oplus H) \cap M_2 = (L \oplus M_1 \oplus H) \cap M_2$$

bu M_2 de essentialdır. Önerme 3.2.2'den M_2 bir (C_{11})-modüldür. ■

Yardımcı Teorem 3.2.21. *$M = M_1 \oplus M_2$ olsun. M_1 in (C_{11})-modül olması için gerek ve yeter şart M nin herhangi N bir altmodülü için, $M_2 \subseteq K$, $K \cap N = 0$ ve $K \oplus N \leq_e M$ olacak şekilde M nin bir K diktoplananı olmasıdır.*

Kanıt. Varsayalım M_1 bir (C_{11})-modül ve N, M_1 in herhangi bir altmodülü olsun. Önerme 3.2.2'den $N \cap L = 0$ ve $N \oplus L \leq_e M_1$ olacak şekilde M_1 in bir L diktoplananı vardır. Buradan $(L \oplus M_2) \cap N = 0$ ve $(L \oplus M_2) \oplus N \leq_e M$ dir. Tersine, M_1 belirtilen özelliği sağlasın ve H, M_1 in bir altmodülü olsun. Hipotezden, $M_2 \subseteq K$, $K \cap H = 0$ ve $K \oplus H \leq_e M$ olacak şekilde M nin bir K diktoplananı vardır. Şimdi, $K = K \cap (M_1 \oplus M_2) = (K \cap M_1) \oplus M_2$ olur. Bu yüzden $K \cap M_1$, M nin bir diktoplananıdır ve bundan dolayı hemde M_1 in bir diktoplananıdır. Buradan

$$H \cap (K \cap M_1) = 0 \text{ ve } H \oplus (K \cap M_1) = M_1 \cap (H \oplus K) \leq_e M_1$$

dir. Önerme 3.2.2'den M_1 bir (C_{11})-modüldür. ■

Teorem 3.2.22. *$K \cap M_2 = 0$ ile M nin bir K diktoplananı için $K \oplus M_2$, M nin bir diktoplananı olacak şekilde $M = M_1 \oplus M_2$ bir (C_{11})-modüldür. M_1, (C_{11})-modüldür.*

Kanıt. N, M_1 in herhangi bir alt modülü olsun. Hipotezden ve Önerme 3.2.2'den $(N \oplus M_2) \cap K = 0$ ve $N \oplus M_2 \oplus K \leq_e M$, olacak şekilde M nin bir K diktoplananı vardır. Dahası $M_2 \oplus K$, M nin bir diktoplananıdır. Yardımcı Teorem 3.2.21'den sonuç elde edilir. ■

Sonuç 3.2.23. *M bir (C_{11})-modül ve M/K, K-injektif olacak şekilde M nin bir K diktoplananı olsun. K, (C_{11}) koşulunu sağlar.*

Kanıt. $M = K \oplus K'$ olacak şekilde M nin bir K' alt modülü vardır, hipotezden K', K-injektiftir. $L \cap K' = 0$ olacak şekilde M nin bir L diktoplananı vardır. Yardımcı Teorem 3.1.17'den $H \cap K' = 0$, $M = H \oplus K'$ ve $L \subseteq H$ olacak şekilde M nin bir H alt modülü vardır. Şimdi L, H nin bir diktoplananıdır ve bundan dolayı $L \oplus K'$, $M = H \oplus K'$ nün bir diktoplananıdır. Teorem 3.2.22'den K, (C_{11}) koşulunu sağlar. ■

Sonuç 3.2.24. *$M = M_1 \oplus M_2$, bir M_1 alt modülü ve bir M_2 injektif alt modülünün bir diktoplamı olsun. Bu takdirde;*

$$M,\ (C_{11}) \text{ koşulunu sağlar.} \iff M_1,\ (C_{11}) \text{ koşulunu sağlar.}$$

Kanıt. $(\Rightarrow)$: Eğer M, (C_{11}) koşulunu sağlıyor ise Sonuç 3.2.23'ten M_1, (C_{11}) koşulunu sağlar.
$(\Leftarrow)$: M_1, (C_{11}) koşulunu sağlıyor ise Teorem 3.2.4 ve Sonuç 3.2.6'dan M, (C_{11}) koşulunu sağlar. ■

3.3 (C_{12})-Modüller

Bu bölümde CS modüllerin başka bir genellemesi olan (C_{12})-modül ailesinden bahsedilecektir. Daha ayrıntılı bilgi için [12] ve [19] önerilir.

Tanım 3.3.1. *M bir R-modül olsun. Eğer M nin her N alt modülü için, bir $K \leq_d M$ ve $f(N) \leq_e K$ olacak biçimde bir $f : N \to K$ monomorfizması varsa M modülüne (C_{12})-modül ya da (C_{12}) koşulunu sağlar denir.*

Yardımcı Teorem 3.3.2. *Bir M modülünün (C_{12}) koşulunu sağlaması için gerek ve yeter şart her $N \leq_c M$ için bir $f : N \to K$ monomorfizması ve bir $K \leq_d M$ vardır öyleki $f(N) \leq_e K$ dır.*

Kanıt. $(\Rightarrow)$: M bir (C_{12})-modül olsun. İstenilen şart tanımdan sağlanır.
$(\Leftarrow)$: $L \leq M$ olsun. Önerme 2.3.10'dan $L \leq_e N \leq_c M$ olacak şekilde bir $N \leq M$ vardır. Hipotezden, bir $f : N \to K$ monomorfizması ve bir $K \leq_d M$ vardır öyleki $f(N) \leq_e K$ dır. $f(L) \leq_e f(N) \leq_e K$ olduğundan $f(L) \leq_K$ dır. Böylece, M modülü (C_{12}) koşulunu sağlar. ■

Önerme 3.3.3. *M_R modülü (C_{11})-modül ise (C_{12})-modüldür.*

Kanıt. $N \leq M$ olsun. Bu durumda $K, K^{'} \leq M$ alt modülleri vardır öyle ki $M = K \oplus K^{'}$, $N \cap K^{'} = 0$ ve $N \oplus K^{'} \leq_e M$ dir. $\pi : M \rightarrow K$ projeksiyon dönüşümü ve $\alpha = \pi_{|N}$ olsun. $\alpha : N \rightarrow K$ bir monomorfizmadır. $0 \neq k \in K$ olsun. Bu durumda bir $r \in R$ vardır öyle ki bazı $x \in N, k^{'} \in K^{'}$ için $x + k^{'} = kr \neq 0$ dır. $kr = \pi(kr) = \pi(x + k^{'}) = \pi(x) + \pi(k^{'}) = \pi(x) = \alpha(x)$ dir. Böylece $kR \cap \alpha(N) \neq 0$ dır. Sonuç olarak her $0 \neq k \in K$ için $kR \cap \alpha(N) \neq 0$ olduğundan Önerme 2.2.2'den $\alpha(N) \leq_e K$ dır. ■

Önerme 3.3.4. *M herhangi bir modül olsun. Bu durumda M, C_{12} koşulunu sağlayan bir modülün bir dik toplananına izomorftur.*

Kanıt. Herhangi bir X modülü için $E(X)$, X in injektif zarfını göstersin. $M^{'} = E(E(M) \oplus E(M) \oplus E(M) \oplus ...)$ olsun. $M^{'}$, injektif modüldür. $M^{''} = M \oplus M^{'}$ olsun. Buradan $M \cong M \oplus 0 \leq_d M^{''}$ dür. Şimdi $M^{''}$ nün C_{12}-modül olduğunu gösterelim: İlk olarak $E(M^{''}) = E(M \oplus M^{'}) = E(E(M) \oplus E(M) \oplus E(M) \oplus ...) \cong M^{'}$ dür ve böylece bir $\beta : M^{''} \longrightarrow M^{'}$ monomorfizması vardır. $N \leq M^{''}$ olsun. Bu durumda $\beta(N) \leq M^{'}$ dür. O halde $\beta(N) \leq_e K \leq_c M^{'}$ olacak biçimde bir $K \leq M^{'}$ vardır. $M^{'}$ injektif olduğundan CS tir. Dolayısıyla $K \leq_d M^{'}$ dür. Böylece $M^{''}$, C_{12} koşulunu sağlar. ■

Şimdi, (C_{12}) koşulunu sağlayıp, (C_{11}) koşulunu sağlamayan bir $\mathbb{Z}$-modül örneği verelim. Bunun için ilk olarak aşağıdaki Yardımcı Teoremi verelim:

Yardımcı Teorem 3.3.5. *$\prod_1^{\infty} \mathbb{Z}$ Specker grubu (C_{12}) koşulunu sağlamaz.*

Sonuç 3.3.6. *(C_{12}) koşulunu sağlayan bir $\mathbb{Z}$-modülü vardır öyle ki M nin bazı K dik toplananları (C_{12}) koşulunu sağlamaz.*

Sonuç 3.3.7. *(C_{12}) koşulunu sağlayıp, (C_{11}) koşulunu sağlamayan bir M $\mathbb{Z}$-modülü vardır.*

Kanıt. Önerme 3.3.4'teki ispat tekniğini kullanarak, eğer $M = \prod_1^{\infty} \mathbb{Z}$ Specker Grubu ise, bir $M^{'}$ injektif $\mathbb{Z}$-modülü vardır öyle ki $M^{''} = M \oplus M^{'}$, (C_{12}) koşulunu sağlar. Diğer yandan, Yardımcı Teorem 3.3.5'ten M, (C_{12}) koşulunu sağlamaz. O halde Önerme 3.3.3'ten M, C_{11} koşulunu sağlamaz. Şimdi, $M^{''}$

modülünün C_{11} koşulunu sağlamadığını gösterelim. Farzedelim ki M'', C_{11}-modül olsun. $M''/M \cong M' \leq_d M''$ ve M' injektif olduğundan M''/M injektiftir. O halde Önerme 3.2.23'ten M, C_{11}-modüldür. Fakat bu M nin C_{12} koşulunu sağlamaması ile çelişir. Sonuç olarak, M'', (C_{11}) koşulunu sağlamaz. ■

Yardımcı Teorem 3.3.8. *R bir Noether halka ve M sıfırdan farklı ayrıştırılamaz sağ R-modül olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:*

(i) M, düzgündür.

(ii) M, C_{11}-modüldür.

(iii) M, C_{12}-modüldür.

Kanıt. $(i) \Rightarrow (ii)$ M düzgün olsun. $\forall N \leq M$ için $N \leq_e M$ olduğundan M, CS modüldür. Dolayısıyla Önerme 3.2.3'den M, C_{11}-modüldür.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Önerme 3.3.3'ten görülür.
$(iii) \Rightarrow (i)$ $0 \neq m \in M$ olsun. $r(m) = \{\, s \in R \mid ms = 0\}$ kümesini göz önüne alalım. $r(m)$, R nin bir sağ idealidir ve $R/r(m) \cong mR$ dir. Böylece Teorem 2.6.5'den $R/r(m)$ Noether, dolayısıyla mR Noether'dir. Böylece Yardımcı Teorem 2.5.5'ten M nin bir U düzgün alt modülü vardır. Kabulümüzden, bir $K \leq_d M$ ve $\varphi(U) \leq_e K$ olacak biçimde bir $\varphi : U \to K$ monomorfizması vardır. M ayrıştırılamaz olduğundan $K = M$ dir. Ayrıca $U \cong \varphi(U)$ olduğundan $\varphi(U)$ düzgündür. Böylece $\varphi(U) \leq_e M$ olduğundan M düzgün modüldür. ■

Sıradaki teorem, (C_{12}) koşulunun dik toplamlar altında kapalı olduğunu göstermektedir.

Teorem 3.3.9. *(C_{12})-modüllerin herhangi bir dik toplamı da (C_{12})-modüldür.*

Kanıt. Λ bir indeks kümesi olmak üzere, $\lambda \in \Lambda$ için M_λ lar (C_{12})-modüller ve $M = \oplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ olsun. $N \leq M$ olsun. Bu durumda $N \cap M_\lambda \leq M_\lambda$ dır. M_λ C_{12}-modül olduğundan bir $K_\lambda \leq_d M_\lambda$ ve $\alpha(N \cap M_\lambda) \leq_e K_\lambda$ olacak biçimde bir $\alpha : N \cap M_\lambda \to K_\lambda$ monomofizması vardır. Şimdi Λ'
"bir $K' \leq_d M' = \oplus_{\lambda \in \Lambda'} M_\lambda$ ve $\alpha'(N \cap M') \leq_e K'$ olacak biçimde bir $\alpha' : N \cap M' \to K'$ monomorfizması vardır" özelliğini sağlayan λ ları içeren Λ nın boştan farklı bir alt kümesi olsun. Farzedelim ki $\Lambda' \neq \Lambda$ olsun. O halde bir

$\mu \in \Lambda$ vardır öyle ki $\mu \notin \Lambda^{'}$ dür. $N \cap M_{\mu} \leq M_{\mu}$ olduğundan bir $K_{\mu} \leq_d M_{\mu}$ ve $\alpha^{''}(N \cap M_{\mu}) \leq_e K_{\mu}$ olacak biçimde bir $\alpha^{''} : N \cap M_{\mu} \to K_{\mu}$ monomorfizması vardır. Şimdi $\Lambda^{''} = \Lambda^{'} \cup \{\mu\}$ ve $M^{''} = \oplus_{\lambda \in \Lambda^{''}} M_{\lambda} = M^{'} \oplus M_{\mu}$ olsun. Açıktır ki $K^{'} \cap K_{\mu} = 0$ dır. $K^{''} = K^{'} \oplus K_{\mu}$ olsun. Böylece $K^{''} \leq_d M^{''}$ dür.

$N \cap M^{''} = N \cap (M^{'} \oplus M_{\mu})$ alt modülünü göz önüne alalım.

$$\beta : N \cap M^{''} \to K^{'} \oplus K_{\mu} \text{ by } \beta(n) = \beta(m_1 + m_2) = \alpha^{'}(m_1) + \alpha^{''}(m_2)$$

$(n \in N \cap M^{''},\ m_1 \in N \cap M^{'},\ m_2 \in N \cap M_{\mu})$ tanımlayalım. β nın bir monomorfizma olduğu açıktır. Üstelik $\beta(N \cap M^{''}) = \alpha^{'}(N \cap M^{'}) \oplus \alpha^{''}(N \cap M_{\mu}) \leq_e K^{'} \oplus K_{\mu}$ dür. Bu uygulamayı tekrarlayarak bir $K \leq_d M$ ve $\gamma(N) \leq_e K$ olacak biçimde bir $\gamma : N \to K$ monomorfizması bulunur. Böylece M, (C_{12})-modüldür. ■

Sonuç 3.3.10. *(C_{11})-modüllerin (sırasıyla CS ve düzgün modüllerin) herhangi bir dik toplamı (C_{12})-modüldür.*

Kanıt. Teorem 3.3.9'dan görülür. ■

(C_{12})-modüllerin diktoplamları yine bir (C_{12})-modül olmasına karşın, (C_{12}) koşulunu sağlayan herhangi bir modülün dik toplananları (C_{12}) koşulunu sağlamak zorunda değildir. Daha ayrıntılı bilgi için [13] ve [20]'ye bakabilabilir.

Örnek 3.3.11. *$\mathbb{R}$ reel sayılar cismi ve S, $\mathbb{R}[x, y, z]$ polinom halkası olsun. Bu durumda $s = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ olmak üzere $R = S/Ss$ halkası değişmeli Noether domaindir. $M_R = (R \oplus R \oplus R)_R$ modülü (C_{12}) koşulunu sağlar fakat, (C_{12}) koşulunu sağlamayan bir K dik toplananı kapsar.*

Kanıt. $\mathbb{R}$ Noether olduğundan Hilbert Taban Teoremi'nden (Teorem 2.6.6) $S = \mathbb{R}[x, y, z]$ de Noetherdir. Teorem 2.6.5'ten $R = S/Ss$ halkası da Noetherdir. Ayrıca $x^2 + y^2 + z^2 - 1$ polinomu irreducible olduğundan $Ss =< x^2 + y^2 + z^2 - 1 >$ asal idealdir. $S = \mathbb{R}[x, y, z]$ birimli ve değişmeli bir halka olduğundan dolayı $R = S/Ss$ bir tamlık bölgesidir. O halde R, her idealini essential olarak kapsar. Bundan dolayı R düzgün olup Sonuç 3.3.10'dan M, (C_{12})-modüldür. Şimdi

$$\begin{aligned} \phi : M = R \oplus R \oplus R &\longrightarrow R \\ e_1 = (1 + Ss, 0 + Ss, 0 + Ss) &\mapsto x + Ss \\ e_2 = (0 + Ss, 1 + Ss, 0 + Ss) &\mapsto y + Ss \\ e_3 = (0 + Ss, 0 + Ss, 1 + Ss) &\mapsto z + Ss \end{aligned}$$

dönüşümünü tanımlayalım. Bu durumda $(a+Ss, b+Ss, c+Ss) \in R \oplus R \oplus R$ için

$$\phi(a+Ss, b+Ss, c+Ss) = ax + by + cz + Ss$$

dir. Açıktır ki ϕ bir homomorfizmadır. $Ker\phi = K$ diyelim. Ayrıca $R = xR + yR + zR$ olduğundan ϕ örtendir. Dolayısıyla

$$0 \longrightarrow K = Ker\phi \xrightarrow{i} R \oplus R \oplus R \xrightarrow{\phi} R$$

tam dizisi splittir. O halde en az bir $K' \leq M$ vardır öyle ki $M = K \oplus K'$ ve $K' \cong R$ dir. Buradan K nın rankı 2 olup, K düzgün değildir. Bredon'un [17, VI.13.3] sonucundan K, 2-küre S^2 nin tanjant bundle'ının regüler sectionunun R-modülüdür ve bu modül ayrıştırılamazdır. O halde Yardımcı Teorem 3.3.8'den K, (C_{12})-modül değildir. ■

3.4 FI-extending Modüller

Bu bölümde CS modüllerin başka bir genellemesi olan FI-extending modül ailesinden bahsedilecektir. Daha ayrıntılı bilgi için [21-23] önerilir.

Tanım 3.4.1. *M bir modül ve $N \leq M$ olsun. Eğer her $\varphi \in End(M_R)$ için $\varphi(N) \subseteq N$ oluyorsa N ye M nin fully invariant alt modülü denir ve $N \trianglelefteq M$ ile gösterilir.*

Örneğin, $Soc(M)$, M modülünün yarıbasit fully invariant alt modülüdür.

Yardımcı Teorem 3.4.2. *M bir modül olsun.*

(i) M nin fully invariant alt modüllerinin herhangi bir toplamı veya kesişimi yine bir fully invariant alt modüldür.

(ii) $Y \trianglelefteq M$ ve $X \trianglelefteq Y$ olmak üzere $X \leq Y \leq M$ ise $X \trianglelefteq M$ dir.

(iii) $M = \oplus_{i \in I} X_i$ ve $S \trianglelefteq M$ ise, π_i, M nin i'inci projeksiyon homomorfizması olmak üzere $S = \oplus_{i \in I} \pi_i(S) = \oplus_{i \in I}(X_i \cap S)$ dir.

Tanım 3.4.3. *M bir modül olsun. Eğer M deki her fully invariant alt modül bir dik toplanan da essential olarak kapsanıyorsa M ye FI-extending modül denir.*

Yardımcı Teorem 3.4.4. *Bir M modülü için aşağıdakiler denktir;*

(a) M bir FI-extending modüldür;

(b) M nin herhangi bir fully invariant A alt modülü için, $A \cap K = 0$ ve $A \oplus K \leq_e M$ olacak şekilde M nin bir K diktoplananı vardır;

(c) M nin herhangi bir fully invariant A alt modülü için, A, M nin bir dik toplananı olan bir komplemente sahiptir;

(d) M nin herhangi bir fully invariant alt modülünün bir essential kapanışı L için, L, M nin bir dik toplananı olan bir komplemente sahiptir;

(e) M nin herhangi bir fully invariant alt modülünün bir essential kapanışı L için, $L \cap K = 0$ ve $L \oplus K \leq_e M$ olacak şekilde M nin bir K diktoplananı vardır;

Kanıt. $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (e)$ açıktır.
$(e) \Rightarrow (a)$ N, M nin bir fully invariant alt modülü ve L, N nin bir essential kapanışı olsun. $N \leq_e L$ dir. (e) den $L \cap K = 0$ ve $L \oplus K \leq_e M$ olacak şekilde M nin bir K diktoplananı vardır ve $M = K \oplus K_1$ olacak şekilde bir $K_1 \leq M$ vardır. Buradan, $N \oplus K \leq_e K \oplus K_1 = M$ olur. N fully invariant alt modül olduğundan, Yardımcı Teorem 3.4.2(iii)'den $N = (N \cap K) \oplus (N \cap K_1)$ olur. Buradan $N \cap K = 0$ olduğudan $N \subseteq K_1$ dir. Bu yüzden, $N \leq_e K_1$ dir. ■

Tanım 3.4.5. *R bir domain (yani, sıfır bölensiz halka) olsun. Her $0 \neq x, y \in R$ için $xR \cap yR \neq 0$ ise R ye sağ Ore domain denir. Değişmeli her domain bir Ore domaindir.*

Yardımcı Teorem 3.4.6.

(i) D_D bir domain ise D_D, FI-extending modüldür.

(ii) D_D herhangi bir domain olsun. Bu durumda

$$D_D,\ C_{11} \text{ koşulunu sağlar } \Leftrightarrow D_D \text{ sağ Ore domaindir.}$$

Kanıt. (i) $0 \neq F \triangleleft D_D$ alalım. D_D bir domain olduğundan ayrıştırılamazdır. Bir $d \in D$ için $F \cap dD = 0$ olsun. Şimdi $g(x) = dx$ olarak tanımlanan $g : D \longrightarrow D$

modül homomorfizmasını göz önüne alalım. $F \leq D$ fully invariant alt modül olduğundan $g(F) \subseteq F$ dir. O halde $df \in F \cap dD = 0$ olur. D domain olduğundan $d = 0$ elde edilir. Bu da $F \leq_e D$ olduğunu gösterir. Yani D_D, FI-extending modüldür.

(ii) $(\Rightarrow)$: D_D, C_{11} modül olsun. $N \leq D_D$ alalım. Bu durumda bir $U \leq_d D$ vardır öyle ki $U \cap N = 0$ ve $U \oplus N \leq_e D$ dir. D_D ayrıştırılamaz olduğundan $U = 0$ elde edilir. Buradan $N \leq_e D$ olup, D nin düzgün olduğu görülür. Böylece D_D sağ Ore domaindir.

$(\Leftarrow)$: Tersine, D_D sağ Ore domain olsun. O halde D nin her sağ ideali essentialdir. Böylece D_D düzgündür. Dolayısıyla CS tir. Yardımcı Teorem 3.2.3'den D_D, C_{11}-modüldür. ■

Yardımcı Teorem 3.4.6'dan, C_{11} koşulunu sağlayan bir modülün FI-extending olduğu görülür. Ancak bunun tersi doğru değildir. Örneğin; yukarıdaki Yardımcı Teoremden, sağ Ore olmayan herhangi bir domain, kendi üzerinde bir modül olarak, C_{11} koşulunu sağlamamasına rağmen FI-extending modüldür.

Önerme 3.4.7. *M bir modül ve $X \trianglelefteq M$ olsun. Eğer M, FI-extending ise X de FI-extending modüldür.*

Kanıt. Kabul edelim ki M, FI-extending modül ve $S \trianglelefteq X$ olsun. Yardımcı Teorem 3.4.2 (ii)'den $S \trianglelefteq M$ dir. Böylece bir $D \leq_d M$ vardır öyle ki $S \leq_e D$ dir. $\pi : M \longrightarrow D$ projeksiyon endomorfizması olsun. Bu durumda

$$S = \pi(S) \leq \pi(X) \cap D = \pi(X) \cap \pi(M) = \pi(X)$$

dir. $S \leq \pi(X) \leq D$ ve $S \leq_e D$ olduğundan $S \leq_e \pi(X)$dir. Ayrıca $\pi(X) \leq_d X$ dir. ■

Bir CS modülün her diktoplananı CS-modül olup herhangi iki CS modülün diktoplamları CS modül olması gerekmediğini biliyoruz. C_{11}-modüllerde ise diktoplananları C_{11}-modül olması gerekmezken iki C_{11}-modülün diktoplamları C_{11}-modüldür. FI-extending modüllerde de, FI-extending modüllerin herhangi diktoplamı yine bir FI-extending modül olduğu aşağıdaki teoremde kanıtlanmıştır. Ancak bu özelliğin diktoplananlarına taşınıp taşınmadığı hala açık bir sorudur.

Teorem 3.4.8. *$M = \oplus_{i \in I} X_i$ olsun. Eğer her bir X_i FI-extending modül ise M de FI-extending modüldür.*

Kanıt. Farzedelim ki her bir X_i modülü FI-extending ve $S \lhd M$ olsun. $\pi_i(S) \neq 0$ olan her bir i için $\pi_i(S) \lhd X_i$ olduğundan bir $D_i \leq_d X_i$ vardır öyle ki $\pi_i(S) \leq_e D_i$ dir. Yardımcı Teorem 3.4.2 (iii)'yi kullanırsak,

$$S = \bigoplus_{i \in I} \pi_i(S) \leq_e \bigoplus_{i \in I} D_i$$

olduğunu elde ederiz. $\bigoplus_{i \in I} D_i \leq_d M$ olduğundan M modülü FI-extending olur. ■

Sonuç 3.4.9. *M modülü, extending (ya da düzgün) modüllerin bir dik toplamı ise FI-extending modüldür.*

Sonuç 3.4.10. *M bir $\mathbb{Z}$-modül (yani bir Abelian grup) olsun. Eğer M, aşağıdaki koşullardan herhangi birini sağlarsa, FI-extending $\mathbb{Z}$-modül olur.*

(i) M sonlu üretilmiştir.

(ii) M sınırlı derecedendir (yani, bazı pozitif n tamsayıları için $nM = 0$ dır).

(iii) M bölünebilirdir (yani, her bir $a \in M$ ve $n \in \mathbb{Z}$ için $a = nb$ olacak biçimde bir $b \in M$ vardır).

Kanıt. (i) Her sonlu üretilmiş Abelian grup, düzgün $\mathbb{Z}$-modüllerin bir dik toplamıdır. Dolayısıyla Sonuç 3.4.9'dan M, FI-extending modüldür.
(ii) ([24], p.262)'den M, devirli torsion grupların bir dik toplamıdır. Böylece M, yine düzgün $\mathbb{Z}$-modüllerin bir dik toplamıdır.
(iii) M bölünebilir olduğundan extending $\mathbb{Z}$-modüldür. ■

Aşağıdaki örnek FI-extending olmayan bir M $\mathbb{Z}$-modülüne ilişkindir.

Örnek 3.4.11. *$P = \{\ p \in \mathbb{Z} \mid p$ asal tamsayı$\}$ olmak üzere $M = \prod_{p \in P} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ olsun. M nin torsion alt grubu τM, açıkça M de fully invariant bir alt modüldür. τM, M nin bir dik toplananı değil ve M nin hiçbir dik toplananında essential olarak kapsanmaz ([24], p.244). Böylece M, FI-extending değildir.*
Bu örnek ayrıca FI-extending modüllerin dik çarpımlarının FI-extending modül olması gerekmediğini de gösterir.

Önerme 3.4.12. *M bir modül olsun. Bu durumda M nin FI-extending olması için gerek ve yeter şart her bir $S \trianglelefteq M$ için bir $e = e^2 \in End_R(E(M))$ vardır öyle ki $S \leq_e e(E(M))$ ve $e(M) \subseteq M$ olmasıdır.*

Kanıt. $(\Rightarrow)$: Kabul edelim ki M FI-extending olsun. Bu durumda bir $X \leq_d M$ vardır öyle ki $S \leq_e X$, ve $M = X \oplus Y$ olacak biçimde bir $Y \leq M$ vardır. Böylece $E(X)$ ve $E(Y)$ injektif zarfları vardır öyle ki

$$E(M) = E(X) \oplus E(Y)$$

dir. $e : E(M) \longrightarrow E(X)$ projeksiyon endomorfizması olsun. Bu durumda $e(M) \leq M$ ve $S \leq_e e(E(M))$ dir.
$(\Leftarrow)$: Tersine, $S \trianglelefteq M$ olsun. Bu durumda

$$e(M) \cap S \leq M \cap S = S \leq e(M) \cap e(E(M)) = e(M)$$

ve

$$e(M) \cap S \leq_e e(M) \cap e(E(M)) = e(M)$$

olduğundan

$$S \leq_e M \cap e(E(M)) = e(M)$$

dir. Ayrıca $e(M) \leq_d M$ olduğundan M FI-extending modüldür. ■

Önerme 3.4.13. *M modülü FI-extending ve I, $E(M)$ nin fully invariant dik toplananı olmak üzere $S = M \cap I$ olsun. Bu durumda S, M nin bir fully invariant dik toplananıdır.*

Kanıt. $f \in End_R(M)$ olsun. Bu durumda bir $\bar{f} \in End_R(E(M))$ vardır öyle ki $\bar{f}_{|M} = f$ dir. $s \in S$ olsun. Buradan $f(s) \in M$ ve

$$\bar{f}(s) \in \bar{f}(M \cap I) \subseteq \bar{f}(M) \cap \bar{f}(I) \subseteq E(M) \cap I = I$$

olduğundan $f(s) = \bar{f}(s) \in I$ dır. Böylece $f(s) \in S$ dir. Dolayısıyla $S \trianglelefteq M$ dir. M modülü FI-extending olduğundan bir $X \leq_d M$ vardır öyle ki $S \leq_e X$ dir. Ayrıca $M \leq_e E(M)$ olduğundan

$$S = M \cap I \leq_e E(M) \cap I = I$$

olup $E(S) = I$ ve $E(X) \cong I$ dır. I fully invariant olduğundan $E(X) = I$ dır. Böylece $X \subseteq M \cap E(X) = M \cap I = S$ olur. O halde $S = X$ dir. ■

4 SIP MODÜLLER

Bu bölümde, SIP modüllerden bahsedilecektir. Daha ayrıntılı bilgi için [25-30] önerilir.

Tanım 4.1. *M bir R-modül olsun. M nin her diktoplanan çiftinin arakesiti (toplamı) bir diktoplan ise M modülüne SIP (SSP) modül denir. Eğer bir R_R modülü bir SIP modül ise R halkasına bir sağ SIP halka denir. Yani; R deki her e,c idempotent çifti için $eR \cap cR = gR$ olacak şekilde $g^2 = g \in R$ vardır.*

Örneğin; düzgün, ayrıştırılamaz ve yarıbasit modüller SIP modüldür.

Tanım 4.2. *M bir R-modül olsun. M nin herhangi sayıdaki diktoplananlarının arakesiti bir diktoplan ise M modülüne $SSIP$ modül denir.*

Teorem 4.3. *Bir M R-modülünün SIP olması için gerek ve yeter şart M nin her S ve T diktoplanan çifti ve $\pi : M \to S$ projeksiyon dönüşümü için, Ker ($\pi|_T$) nin M nin bir diktoplananı olmasıdır.*

Kanıt. Varsayalım M modülü SIP ve $\pi : M \longrightarrow S$ projeksiyon dönüşümü olsun. $S' = ker\pi$ için $M = S \oplus S'$ dür. Bu yüzden $Ker\pi|_T = T \cap S'$ bir diktoplanandır. Tersine, M sağdaki özelliği sağlasın. M nin S ve T diktoplananları için S nin kopmlementi olan bir S' seçelim ve ρ, S' ye giden bir projeksiyon olsun. Bu durumda, $S \cap T = Ker\rho|_T$, M nin bir diktoplanandır. ■

Teorem 4.4. *Bir M R-modülünün SIP (SSP) olması için gerek ve yeter şart her $M = A \oplus B$ parçalanışı ve her f:$A \to B$ R-homomorfizması için, Ker f (Im f) nin bir diktoplanan olmasıdır.*

Kanıt. Varsayalım, M modülü SIP olsun. $M = A \oplus B$ ve f, A dan B ye bir R-homomorfizma ve $T = \{\ a + f(a) \mid a \in A\}$ olsun. $M = T \oplus B$ olduğunu göstermek için, bir $x \in M$ alalım. Buradan $x = a + b$ olacak şekilde $a \in A$ ve $b \in B$ dir. Şimdi, $x = a + f(a) - f(a) + b$. Ama $a + f(a) \in T$ ve $-f(a) + b \in B$. Bu yüzden $M = T \oplus B$ dir. Şimdi $x \in T \cap B$ alalım. $a \in A$ olmak üzere $x = a + f(a)$ yazabiliriz. Bundan dolayı $a = x - f(a) \in A \cap B = 0$ olur. Öyleyse $f(a) = 0$ buradan $x = 0$ elde edilir. M, SIP olduğundan $T \cap A$, M nin bir diktoplanıdır. $T \cap A = Kerf$ olduğu açıktır. Bu yüzden, $Kerf$, M nin bir diktoplanıdır.

Tersini kanıtlamak için, $M = A \oplus B$ modülünün sağdaki özelliği sağladığını varsayalım. $M = N \oplus N_1$, $M = K \oplus K_1$ ve $\pi_{N_1} : M \longrightarrow N_1$ ve $\pi_K : M \longrightarrow K$ doğal epimorfizmalar olsun. $h = (\pi_{N_1} o \pi_K)|_N$ dönüşümünü tanımlayalım. Dikkat edilirse, $h : N \longrightarrow N_1$ dir. M SIP olduğundan, $Kerh$, M nin bir diktoplananıdır. Kolayca görülür ki, $Kerh = (N \cap K) \oplus (N \cap K_1)$ dir. $N \cap K$, $Kerh$ nin bir diktoplanı ve $Kerh$, M nin bir diktoplananı olduğundan, $N \cap K$, M nin bir diktoplanıdır. Dolayısıyla, M, SIP modüldür.

SSP için kanıt benzer şekilde yapılır. ■

Önerme 4.5. *Bir M_R modülü SIP ise M nin her diktoplananı SIP dir.*

Kanıt. M modülü SIP ve X, M nin bir diktoplananı olsun. K ve L, X in diktoplananları olsun. K ve L, M in de diktoplananlarıdır. Bu yüzden M nin bir F diktoplananı vardır öyle ki $M = (K \cap L) \oplus F$ dir. Buradan,

$$X = X \cap M = X \cap ((K \cap L) \oplus F) = (K \cap L) \oplus (X \cap F)$$

Yani, $K \cap L$, X in de bir diktoplananıdır. Bu yüzden, X, SIP modüldür. ■

İki SIP modülün diktoplamı her zaman bir SIP modül olmayabilir. Buna ilişkin örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek 4.6. *$\mathbb{Z}_4$ ve $\mathbb{Z}_2$ $\mathbb{Z}$-modülleri ayrıştırılamaz olduğundan SIP modüllerdir. $f(\overline{x}) = \overline{x}$ olacak şekilde $f : \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_2$ bir homomorfizma olsun. $Ker\ f = \{\overline{0}, \overline{2}\}$, $\mathbb{Z}_4$ ün bir diktoplananı değildir. Bu yüzden, Teorem 4.4'ten $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2$ bir SIP modül değildir.*

Önerme 4.7. *$M = M_1 \oplus M_2$, R-modül olsun. Eğer $r(M_1) + r(M_2) = R$ ise M nin her N altmodülü, $N_1 \leq M_1$ ve $N_2 \leq M_2$ olmak üzere $N = N_1 \oplus N_2$ şeklinde yazılabilir.*

Kanıt. N, M nin bir altmodülü olsun. $N_1 = Nr(M_2)$ ve $N_2 = Nr(M_1)$. $N_1 \leq M_1$ ve $N_2 \leq M_2$ dir. Bu yüzden, $N_1 \cap N_2 = 0$ dır. $N \leq N_1 \oplus N_2$ olduğunu göstermek yeterlidir. $n \in N$ olsun. $a + b = 1$ olacak şekilde $a \in r(M_1)$ ve $b \in r(M_2)$ vardır. Bu yüzden, $n = n.1 = n.(a + b) = n.a + n.b$ dir. Ancak, $n.a \in N_1$ ve $n.b \in N_2$ dir. Bundan dolayı, $N_1 \leq M_1$ ve $N_2 \leq M_2$ olmak üzere $N = N_1 \oplus N_2$ dir. ■

Teorem 4.8. *M ve N; $r(M) + r(N) = R$ olacak şekilde SIP ye sahip iki R-modül olsun. Buradan $M \oplus N$, SIP dir.*

Kanıt. A ve B, $M \oplus N$ nin iki diktoplananı olsun. Önerme 4.7'den, $A = M_1 \oplus N_1$ ve $B = M_2 \oplus N_2$, burada M_1 ve M_2, M nin altmodülleri, N_1 ve N_2, N nin altmodülleridir. Kolaylıkla görülür ki M_1 ve M_2, M nin diktoplananlarıdır, N_1 ve N_2, N nin diktoplananlarıdır. Eğer M ve N, SIP ise $M_1 \cap M_2$, M nin bir diktoplananıdır ve $N_1 \cap N_2$, N nin bir diktoplananıdır. Bu yüzden, $(M_1 \cap M_2) \oplus (N_1 \cap N_2)$, $M \oplus N$ nin bir diktoplananıdır. Şimdi,

$$(M_1 \cap M_2) \oplus (N_1 \cap N_2) = (M_1 \oplus N_1) \cap (M_2 \oplus N_2) = A \cap B$$

olduğundan $A \cap B$, $M \oplus N$ nin bir diktoplananıdır. Dolayısıyla, $M \oplus N$, SIP dir. ■

Önerme 4.9. *$M = \bigoplus_{i \in I} M_i$, M_i fully invariant alt modüllerin bir diktoplamı olsun. Buradan, her bir M_i nin SIP olması için gerek ve yeter şart M nin SIP olmasıdır.*

Kanıt. S, M nin herhangi bir diktoplananı olsun. M_i ler M nin fully invariant alt modülü olduğundan, Yardımcı Teorem 3.4.2 (iii)'den, $S = \bigoplus(S \cap M_i)$ dir. Şimdi S ve T, M nin diktoplananları olsun. Bu yüzden $S \cap T = \bigoplus[(S \cap M_i) \cap (T \cap M_i)]$. Her bir M_i, SIP olduğundan, $S \cap T$, M nin bir diktoplananıdır. Tersi, Önerme 4.5'den açıktır. ■

İki SIP modülün diktoplamı her zaman bir SIP modül olamayabileceğine ilişkin örnek az önce verilmişti. Bu bölümde, $M \oplus N$ nin SIP olması durumu için bir gerek koşullar verilecektir.

Önerme 4.10. *M bir ayrıştırılamaz R-modül ve N bir R-modül olsun. Eğer $M \oplus N$ bir SIP modül ise M den N ye sıfırdan farklı her R-homomorfizma bir monomorfizmadır.*

Kanıt. $Hom(M, N) \neq 0$ ve f, M den N ye sıfırdan farklı bir R-homomorfizma olsun. $M \oplus N$, SIP olduğundan $Kerf$, M nin bir diktoplananıdır. Ancak M ayrıştırılamaz olduğundan $Ker\ f = 0$ olur. Bu yüzden, f bir monomorfizmadır. ■

Hatırlanırsa, eğer bir M R-modülünün sıfırdan farklı her endomorfizması bir monomorfizma ise M modülüne Quasi-Dedekind denir.

Sonuç 4.11. *$Hom(M,N) \neq 0$ olacak şekilde M bir ayrıştırılamaz R-modül ve N bir R-modül olsun. Eğer $M \oplus N$ bir SIP modül ise M Quasi-Dedekind tir. Özel olarak, $M \oplus M$ bir SIP modül ise M Quasi-Dedekind tir.*

Kanıt. Önerme 4.10'dan, $f : M \longrightarrow N$ bir monomorfizma vardır. Varsayalım M, Quasi-Dedekind R-modül olmasın. Buradan, $Ker\ g \neq 0$ olacak şekilde M nin sıfırdan farklı bir g endomorfizması vardır. f bir monomorfizma olduğundan $Ker\ fog = Ker\ g \neq 0$ olur. Bu ise bir çelişkidir. Bu yüzden M bir Quasi-Dedekind R-modüldür. ■

Bir sonraki sonuca başlamadan önce, eğer $Hom(M,R) \neq 0$ ise M R-modülüne dualizable dendiğini hatırlatalım.

Sonuç 4.12. *M bir dualizable ayrıştırılamaz R-modül ve $M \oplus R$ bir SIP modül ise M, R nin bir idealine izomorftur.*

Kanıt. $Hom(M,R) \neq 0$ olduğundan, Önerme 4.10'dan M, R nin bir idealine izomorftur. ■

Önerme 4.13, Yardımcı Teorem 4.24'ün bir genellemesidir ve SIP ye sahip injektif modüller için bize bir tanımlama verir.

Önerme 4.13. *M bir injektif modül ve $Hom(M,N) \neq 0$ olacak şekilde M ve N ayrıştırılamaz R-modüller olsun. Eğer $M \oplus N$ bir SIP modül ise M, N ye izomorftur ve M bir Quasi-Dedekind R-modüldür.*

Kanıt. Önerme 4.10'dan, M, N nin bir alt modülüne izomorftur ve M bir Quasi-Dedekind R-modüldür. M injektif olduğundan, N nin bir N_1 injektif alt modülü vardır. N_1 in injektifliğinden, N_1, N nin bir diktoplananıdır. N ayrıştırılamaz olduğundan $N_1 = N$. Bu yüzden M, N ye izomorftur. ■

M bir R-modül olsun. Her $K \leq M$ ve her $f \in Hom(K,M)$ için $Kerf \leq_c K$ ise M modülüne bir *polyform* modül denir.

Yardımcı Teorem 4.14. *M bir extending polyform modül ise M bir SIP modüldür.*

Kanıt. M bir extending polyform modül ve $M = A \oplus B$ olsun. $f \in Hom(A, B)$ alalım. M polyform olduğundan $Kerf$, K nın kapalı bir alt modülüdür. M extending olduğundan $Kerf$ bir diktoplanandır. Bu yüzden M bir SIP modüldür. ∎

Hatırlarsak; M bir R-modül olsun. Eğer sıfırdan farklı her $x, y \in M$ için $r(x) = r(y)$ oluyorsa M ye *asal* R-modül denir.

Önerme 4.15. *M_R bir injektif ve bir asal modül ise M bir SIP modüldür.*

Kanıt. $M = A \oplus A_1$ ve $M = B \oplus B_1$ olsun. M injektif R-modül olduğundan Teorem 2.9.16'dan A ve B de injektif R-modüllerdir. I, R nin bir ideali ve sıfırdan farklı $f : I \to A \cap B$ bir R-homomorfizma olsun. $i_1 : A \cap B \to A$ ve $i_2 : A \cap B \to B$ birer içerim homomorfizması olsun. $i_1 o f : I \to A$ ve $i_2 o f : I \to B$ homomorfizmalarını düşünelim. $BaerKriteri$'nden, her $w \in I$ için $i_1 o f(w) = aw$ ve $i_2 o f(w) = bw$ olacak şekilde $a \in A$ ve $b \in B$ vardır. i_1 ve i_2 monomorfizma olduğundan, $i_1 o f(w) = f(w)$ ve $i_2 o f(w) = f(w)$ olur ki bu yüzden, $aw = bw$ olur. Buradan, $(a - b)w = 0$ dır. $a \neq b$ olduğunu varsayalım. Buradan $a \neq 0$ ya da $b \neq 0$ dır. $a \neq 0$ olsun. $w \in r(a - b)$ ve M asal olduğundan, $w \in r(a)$ ve bu yüzden $f = 0$ olur. Bu ise bir çelişkidir. Bu yüzden, $a = b \in A \cap B$ ve bundan dolayı, $A \cap B$ injektiftir. Teorem 2.9.22'den $A \cap B$ bir diktoplanandır. Sonuç olarak, M, bir SIP modüldür. ∎

Örnek 4.16. *$M = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_6$ $\mathbb{Z}$-modülünü düşünelim. M yarıbasit olduğundan SIP ye sahiptir. Ancak divisible olmadığından injektif de değildir. M nin $\bar{2}$ ve $\bar{3}$ elemanlarını alalım. $r(\bar{2}) = 3\mathbb{Z}$ ve $r(\bar{3}) = 2\mathbb{Z}$ olur. Dolayısıyla, M asal değildir.*

Tanım 4.17. *Bir M modülünün tüm altmodülleri (diktoplananları) fully invariant ise M modülüle duo (weak-duo) modül denir.*

Yardımcı Teorem 4.18. *([31]) Bir $M = M_1 \oplus M_2$ modülü M_1 ve M_2 altmodüllerinin bir diktoplamı olsun. Buradan, M_1 in M nin bir fully invariant altmodülü olması için gerek ve yeter şart $Hom(M_1, M_2) = 0$ olmasıdır.*

Kanıt. M_1, M modülünün bir fully invariant altmodülü ve $f : M_1 \to M_2$ herhangi bir homomorfizma olsun. $p_1 : M \to M_1$ kanonik projeksiyon ve $i_2 : M_2 \to M$ içerim dönüşümü olsun. Buradan $\varphi = i_2 f p_1$, M nin bir endomorfizmasıdır. Hipotezden $\varphi(M_1) \subseteq M_1$ olur. Bu yüzden $f(M_1) \subseteq M_1 \cap M_2 = 0$ dır. $f = 0$ olarak bulunur. Tersine, $Hom(M_1, M_2) = 0$ olduğunu varsayalım. $p_2 : M \to M_2$ kanonik projeksiyon ve $i_1 : M_1 \to M$ içerim dönüşümü olsun. M nin herhangi bir g endomorfizması için $p_2 g i_1 \in Hom(M_1, M_2) = 0$ olduğundan $g(M_1) \subseteq p_1 g(M_1) + p_2 g i_1(M_1) = p_1 g(M_1) \subseteq M_1$ olur. Bu yüzden, M_1, M modülünün bir fully invariant altmodülüdür. ■

Teorem 4.19. *([32]) M bir (weak-)duo modül olsun. Burada M hem SIP hemde bir SSP modüldür.*

Kanıt. M bir (weak-)duo modül ve $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. Yardımcı Teorem 4.18'den $Hom(M_1, M_2) = 0$ olur. $Ker\ 0 = M_1$ bir diktoplanandır ve Teorem 4.4'ten M bir SIP modüldür. $Im\ 0 = 0$ bir diktoplanan olduğundan, Teorem 4.4'ten M bir SSP modüldür. ■

Örnek 4.20. *$\mathbb{Z}$-modül $\mathbb{Q}$ ayrıştırılamaz olduğundan bir SIP modüldür. Ancak duo modül değildir. Gerçekten, $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$, $f(m) = \frac{1}{2}m$ ($m \in \mathbb{Q}$) modül homomorfizması için $f(\mathbb{Z}) \nsubseteq \mathbb{Z}$ olduğundan $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ nun fully invariant altmodülü değildir.*

Yardımcı Teorem 4.21. *M bir extending modül olsun. Aşağıdakiler denktir.*

(a) M, UC-modüldür.

(b) M, SIP dir.

(c) M, $SSIP$ dir.

Kanıt. $(a) \Rightarrow (b)$ M bir UC-modül olsun. N ve K, M nin diktoplananları olsun. $N \cap K$, M nin bir kapalı alt modülüdür. Hipotezden, $N \cap K \leq_d M$ dir.
$(b) \Rightarrow (a)$ Varsayalım, M bir SIP modül ve $N \leq M$ olsun. Önerme 2.3.10'dan $N \leq_e K \leq_c M$ ve $N \leq_e L \leq_c M$ olacak şekilde M nin K ve L alt modülleri vardır.$K = L$ olduğunu göstermeliyiz. Hipotezden $K \leq_d M$ ve $L \leq_d M$ dir. (b) den $(K \cap L) \oplus T = M$ olacak şekilde bir $T \leq M$ vardır. Buradan, $K =$

$(K \cap L) \oplus (K \cap T)$ dir. $N \leq_e K$ ve $N \cap (K \cap T) = 0$, $K \cap T = 0$ dir. Buradan, $K = K \cap L$ dir. Benzer şekilde, $L = K \cap L$ dir. Bu yüzden, $K = K \cap L = L$.
$(c) \Rightarrow (b)$ açıktır.
$(a) \Rightarrow (c)$ Varsayalım, M bir UC-modül ve K_i $(i \in I)$, M nin diktoplananları olsun. Buradan, her bir $i \in I$ için her K_i kapalıdır. [33, Lemma 8(9)] dan $\cap_{i\in I} K_i$, M de kapalıdır. Hipotezden, $\cap_{i\in I} K_i$ bir diktoplanandır. ■

Önerme 4.22. *M bir yarı-sürekli modül olsun. Aşağıdakiler denktir:*

(a) M, $SSIP$ dir.

(b) M, SIP dir.

(c) $E(M)$, SIP dir.

(d) $E(M)$, $SSIP$ dir.

Kanıt. $(a) \Leftrightarrow (b)$ ve $(c) \Leftrightarrow (d)$ Lemma 4.21'den açıktır.
$(c) \Rightarrow (b)$ Varsayalım $E(M)$, SIP olsun. A ve B, M nin bir diktoplananı olsun. Buradan, $M = A \oplus A_1$ ve $M = B \oplus B_1$ olacak şekilde A_1 ve B_1 altmodülleri vardır. Buradan $E(M)$ nin L ve L_1 alt modülleri var öyleki $E(M) = E(A) \oplus L$ ve $E(M) = E(A) \oplus L_1$ dir. $E(M)$, SIP olduğundan, bir $K \leq E(M)$ için $E(M) = [E(A) \cap E(B)] \oplus K$ dır. Teorem 3.1.15'ten $M = [(E(A) \cap E(B)) \cap M] \oplus (K \cap M)$ olur. $A \leq_e E(A)$ ve $B \leq_e E(B)$ olduğundan $A \leq_e E(A) \cap M$ ve $B \leq_e E(B) \cap M$, $E(A) \cap M = A \oplus (E(A) \cap M) \cap A_1$ ve $E(B) \cap M = B \oplus (E(B) \cap M) \cap B_1$ olduğudan $A = E(A) \cap M$ ve $B = E(B) \cap M$ dir. Bundan dolayı, $A \cap B = E(A) \cap E(B) \cap M$, M nin bir diktoplananıdır.
$(b) \Rightarrow (c)$ M bir SIP modül ve A, B $E(M)$ nin dik toplananları ve $E(M) = A \oplus A'$, $E(M) = B \oplus B'$ olacak şekilde $A' \leq E(M)$ ve $B' \leq E(M)$ var olsun. Teorem 3.1.15'ten $A \cap M$ ve $B \cap M$, M nin dik toplananlarıdır. Varsayımdan, $A \cap B \cap M \leq_d M$ dir. $(A \cap B \cap M) \oplus L = M$ olacak şekilde $L \leq M$ vardır. $A \cap M \leq_e A$ ve $B \cap M \leq_e B$ olduğundan $A \cap B \cap M \leq_e A \cap B$ dir. Bundan dolayı, $E(M) = E(A \cap B \cap M) \oplus E(L) = E(A \cap B) \oplus E(L)$ olur. Bu yüzden, $A = E(A \cap B) \oplus (E(L) \cap A)$ ve $B = E(A \cap B) \oplus (E(L) \cap B)$ dir. Buradan, $E(A \cap B) \leq A \cap B \leq E(A \cap B)$ olur. Bu yüzden, $E(A \cap B) = A \cap B$, M nin bir diktoplananıdır. ■

Önerme 4.23. *Bir R halkası için aşağıdakiler denktir:*

(a) R yarıbasittir.

(b) Tüm R-modüller $SSIP$ dir.

(c) Tüm R-modüller SIP dir.

(d) Tüm injektif R-modüller SIP dir.

Kanıt. $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d)$ açıktır.
$(d) \Rightarrow (a)$ Tüm injektif R-modüller SIP olsun. R halkasının yarıbasit olduğunu tüm modüllerin injektif olduğunu göstererek kanıtlayacağız. Herhangi bir M modülü için bir injektif modül E_1 ve bir $\sigma_1 : M \to E_1$ monomorfizması vardır. Benzer şekilde, herhangi bir injektif modül E_2 için bir $\sigma_2 : E_1/\sigma_1 \to E_2$ monomorfizması vardır. $E_1 \oplus E_2$, SIP olduğundan $M \cong Ker\ \sigma_2$, E_1 in bir diktoplananıdır ve bundan dolayı M injektiftir. Dolayısıyla, R yarıbasittir. ■

Bir önceki önerme, R halkası yarıbasit değilse, injektif olan fakat SIP olmayan modüllerin var olabileceğini söylemektedir.

Yardımcı Teorem 4.24. *R bir değişmeli Noetherian halka olsun. E_1 ve E_2 ayrıştırılamaz injektif modüller olsun. Eğer $E_1 \oplus E_2$, SIP ise aşağıdakilerden biri sağlanır.*

(a) $Hom(E_1, E_2) = 0$

(b) $E_1 \cong E_2$ ve sıfırdan farklı her $x \in E_1$ için $ann(x) = A$ olacak şekile bir asal ideal $A \leq R$ vardır.

Kanıt. $0 \neq \sigma \in Hom(E_1, E_2)$ alalım. $Ker\ \sigma$, E_1 in tamamı olmayan E_1 in bir diktoplananıdır. E_1 ayrıştırılamaz olduğundan $Ker\ \sigma = 0$ dır. Şimdi $im\ \sigma$, E_2 nin sıfırdan farklı bir injektif alt modülü olsun. Bu durumda E_2 nin bir dik toplananıdır. E_2 ayrıştırılamaz olduğundan σ örtendir ve $E_1 \cong E_2$ dir.

Geriye sadece sıfırlayıcılar koşulunu kanıtlamak kalır. Varsayalım x ve y, E_1 in sıfırdan farklı elemanları olsun ve $a \notin ann(y)$ olacak şekilde $a \in ann(x)$ vardır. $\tau : E_1 \to E_2$, $\tau(m) = \sigma(am)$ homomorfizması tanımlansın. Kolayca görülür ki $x \in Ker\ \tau$, bu yüzden τ bir monomorfizma değildir. Hemde $y \notin Ker$

τ, bu yüzden $\tau \neq 0$. $Ker\ \tau$ bir dik toplanan değildir, bu ise Teorem 4.4 ile çelişkilidir. Bu yüzden sıfırdan farklı her x, $y \in E_1$ için $ann(x) = ann(y)$ olur. [34, Teorem 6]'dan kolayca görülür ki $ann(x)$ asaldır. ■

Önerme 4.25. *([25, Önerme 4]) R bir değişmeli, Noetherian halka olsun. Bir injektif R-modül E nin SIP olması için gerek ve yeter şart E nin $SSIP$ olmasıdır.*

Önerme 4.26. *D bir Noetherian domain olsun. Bir injektif D-modül E için aşağıdakiler denktir.*

(a) E, $SSIP$ dir.

(b) E, SIP dir.

(c) (i) E modülü torsion-free ya da

(ii) E modülü torsion ve E modülünün herhangi iki farklı ayrıştırılamaz I ve J dik toplananları için $Hom(I, J) = 0$ dır.

Kanıt. $(a) \Leftrightarrow (b)$ Önerme 4.25'te kanıtlandı.
$(b) \Rightarrow (c)$ yi göstermek için ilk olarak E mixed olmadığını gösterelim. D nin herhangi bir A ideali için $Hom(\mathbb{Q}, E(D/A)) \neq 0$ dır. Çünkü $D \to D/A \to E(D/A)$ dönüşümü $\mathbb{Q}$ ya genişletilebilir. Bu yüzden, SIP ye sahip hiç bir modül bir diktoplanan olarak $\mathbb{Q} \oplus E(D/A)$ ya sahip değildir. E torsion ya da torsion-free dir. Varsayalım, E, ayrıştırılamaz I ve J diktoplananları ile torsion olsun. Lemma 4.24'ten eğer $Hom(I, J) \neq 0$ ise $I \cong J$ dir ya da her x, $y \in I$ için $ann(x) = ann(y)$ dir. I da ayrık sıfırlayıcıları olan elemanların var olduğunu göstereceğiz. $0 \neq x \in I$ ve $0 \neq a \in ann(x)$ alalım. I bölünebilir olduğundan $ay = x$ olacak şekilde $y \in I$ vardır. Açıktır ki, $ann(x) \neq ann(y)$ dir ve bu yüzden $I \oplus J$, SIP ye sahip olamaz. Bu çelişki bize $Hom(I, J) = 0$ olduğunu gösterir.
$(c) \Rightarrow (a)$ için varsayalım (c) deki koşul sağlansın. Eğer E torsion-free ise bu bir $\mathbb{Q}$-vektör uzayıdır ve açıktır ki $SSIP$ ye sahiptir. E modülü (c) de ifade edildiği gibi olsun. (ii) den E, $E = \bigoplus E_i$ fully invariant ayrıştırılamaz modüllerin bir diktoplamı şekilde parçalanabilir. Ayrıştırılamaz modüller $SSIP$ ye sahip olduğundan Önerme 4.9'dan E, $SSIP$ ye sahiptir. ■

Teorem 4.27. *R bir Noetherian domain ve M bir injektif R-modül olsun. Aşağıdakiler denktir.*

(a) $M \oplus M$ bir SIP modüldür.

(b) M torsion free dir.

(c) Herhangi bir Λ indeks kümesi için $\bigoplus_{\Lambda} M$ SIP dir.

Kanıt. $(a) \Rightarrow (b)$ M modülü $M \oplus M$ nin bir diktoplananı olduğundan Önerme 4.5'ten M modülü de SIP olur. Teorem 4.26'dan M torsion ya da torsion free dir. M nin torsion olduğunu varsayalım. $M \oplus M$ de torsion dur. R Noetherian domain olduğundan [3, Teorem 25.6] dan M_α lar M nin ayrıştırılamaz altmodülleri olmak üzere $M = \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha$ dır. Şimdi $\beta \in \Lambda$ olsun. Bundan dolayı

$$M \oplus M = M_\beta \oplus M_\beta \oplus \big(\bigoplus_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha\big) \oplus \big(\bigoplus_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha\big),\ \alpha \neq \beta \text{ olmak üzere}$$

$M_\beta \oplus M_\beta$ injektif ve SIP dir. Buradan, Sonuç 4.13'ten M_β Quasi-Dedekind dir ve bundan dolayı M_β asaldır fakat bu bir çelişkidir. Bunu doğrulamak için, M_β nın asal olduğunu varsayalım. M torsion olduğundan M_β torsion dur. Ancak M_β integral domain üzerinde injektiftir, bu yüzden bölünebilirdir (divisible). Şimdi $0 \neq x \in M_\beta$ ve $0 \neq r \in r(x)$ alalım. M_β bölünebilir olduğundan herhangi $m \in M_\beta$ için $x = yr$ dir. Bu yüzden M_β asal değildir.
$(b) \Rightarrow (a)$ M torsion free olduğundan $M \oplus M$ torsion free dir. Buradan, $M \oplus M$ torsion free ve injektiftir, Önerme 4.15'ten SIP olur.
$(b) \Rightarrow (c)$ M torsion free olduğundan herhangi Λ indeks kümesi için $\bigoplus_{\Lambda} M$ torsion free dir. $\bigoplus_{\Lambda} M$ injektif olduğudan Önerme 4.15'ten $\bigoplus_{\Lambda} M$ modülü SIP olur.
$(c) \Rightarrow (a)$ açıktır. ■

Tanım 4.28. *M bir R-modül A ve B, M nin diktoplananları olsun. $A+B = M$ iken $A \cap B$, M nin bir diktoplananı oluyorsa M modülüne (D_3) özelliğini sağlar denir.*

Teorem 4.29. *M bir R-modül olsun. M nin herhangi A ve B gibi iki diktoplananı için $A + B$, (D_3) ise M modülü SIP dir.*

Kanıt. Varsayalım, M nin A, B gibi iki diktoplananı için $A+B$, (D_3) olsun. $N = A+B$ olsun. A ve B aynı zamanda N nin de bir diktoplananıdır. Varsayımdan, (D_3) tür. Buradan, $A \cap B$, N nin bir diktoplananıdır. $N = (A \cap B) \oplus L$ olacak şekilde bir $L \leq N$ olsun. Buradan, $A = (A \cap B) \oplus (A \cap L)$ dir. A, M nin bir diktoplananı olduğundan, $A \cap B$, M nin bir diktoplananıdır. ■

Teorem 4.30. *M bir projektif R-modül olsun. M modülü SIP ise M nin herhangi iki A ve B diktoplananşları için $A+B$ bir projektif R-modüldür.*

Kanıt. Varsayalım, M, SIP ye sahip bir projektif R-modül ve A, B, M nin diktoplananları olsun. $M = (A \cap B) \oplus K$ olacak şekilde bir $K \leq M$ vardır. Buradan, $A = (A \cap B) \oplus (A \cap K)$, $B = (A \cap B) \oplus (B \cap K)$ ve $A + B = (A \cap B) \oplus (A \cap K) \oplus (B \cap K)$ dir. Hipotezden, $(A \cap B)$, $(A \cap K)$ ve $(B \cap K)$, M nin diktoplananlarıdır ve projektiftirler. Dolayısıyla, projektif modüllerin bir diktoplamı olan M de projektif bir modüldür. ■

Sonuç 4.31. *M bir projektif R-modül olsun. M modülünün SIP ye sahip olması için gerek ve yeter şart M nin herhangi iki A ve B diktoplananları için $A+B$ bir projektif R-modül olmasıdır.*

Kanıt. Teorem 4.29 ve Teorem 4.30'dan sonuç görülür. ■

Teorem 4.32. *Bir R halkası için aşağıdakiler denktir.*

(a) R bir sağ kalıtsal halkadır.

(b) Her projektif R-modül SIP dir.

Kanıt. $(a) \Rightarrow (b)$ Varsayalım R bir sağ kalıtsal halka ve M herhangi bir projektif R-modül olsun. Teorem 2.9.9'dan, M nin her alt modülü projektiftir. Bu yüzden, Sonuç 4.31'den M, SIP dir.
$(b) \Rightarrow (a)$ M herhangi bir projektif R-modül ve N, M nin bir alt modülü olsun. Bir serbest modül F ve $\sigma : F \to N$ epimorfizma seçelim. $i : N \to M$ bir içerim dönüşümü olsun. $io\sigma : F \to N$ bileşkesini düşünelim. Hipotezden $F \oplus M$ bir SIP modüldür. Teorem 4.4'ten $Ker\ (io\sigma)$ bir diktopalanandır. i bir monomorfizma olduğundan, $Ker\ (io\sigma) = Ker\ \sigma$ dır. Buradan, N, M nin bir diktoplananına izomorftur. Dolayısıyla, N projektiftir. ■

Teorem 4.33. *Bir R halkası için aşağıdakiler denktir.*

(a) R bir sağ kalıtsal halkadır.

(b) Her serbest R-modül SIP dir.

Kanıt. $(a) \Rightarrow (b)$ Teorem 4.32'den görülür.
$(b) \Rightarrow (a)$ I, R nin bir ideali olsun. Bir serbest modül F ve $\sigma : F \to I$ epimorfizma seçelim. $i : I \to R$ bir içerim dönüşümü olsun. $io\sigma : F \to R$ bileşkesini düşünelim. Hipotezden $F \oplus R$ serbesttir ve dolayısıyla bir SIP modüldür. Teorem 4.4 den $Ker\ (io\sigma)$ bir diktopalanandır. i bir monomorfizma olduğundan, $Ker\ (io\sigma) = Ker\sigma$ dır. Buradan, $Ker\ \sigma$, F nin bir diktoplananıdır. Dolayısıyla, I projektiftir. ■

Teorem 4.34. *Bir R halkası için aşağıdakiler denktir:*

(a) R bir sağ V-halka dır.

(b) Her sonlu cogenerated R-modül SIP dir.

(c) Her sonlu copresented R-modül SIP dir.

(d) Her sonlu cogenerated R-modül SSP dir.

(e) Her sonlu copresented R-modül SSP dir.

Kanıt. $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c)$ Teorem 2.4.19'dan açıktır.
$(c) \Rightarrow (a)$ M bir sonlu copresented R-modül olsun. Teorem 2.4.21'den, $E(M)$ ve $E(M)/M$ sonlu cogenerated olur. Teorem 2.4.14'ten $E(M)/M$ sonlu cogenerated olduğundan, $E(E(M)/M)$ sonlu cogenerated olur. Teorem 2.4.21'den herhangi sonlu cogenerated injektif modül sonlu copresented olduğudan, (c) den ve Önerme 2.4.16'dan, $E(M) \oplus E(E(M)/M)$, SIP olduğu görülür. Bu gösterir ki, $f : E(M) \to E(M)/M$ kanonik epimorfizma ve $i : E(M)/M \to E(E(M)/M)$ içerim homomorfizması olmak üzere $Ker\ (iof) = Ker\ f = M$, $E(M)$ nin bir dik toplananıdır. Teorem 2.9.16'dan M bir injektif modüldür. Teorem 2.4.23'ten R bir sağ V-*halka* olur.
$(a) \Rightarrow (d) \Rightarrow (e)$ açıktır.
$(e) \Rightarrow (a)$ M bir sonlu copresented R-modül olsun. $E(M)$ ve $E(M)/M$ sonlu

copresented olur. Önerme 2.4.22'den $M \oplus E(M)$ sonlu copresented olur. $i : M \to E(M)$ içerim dönüşümünü düşünelim. (e) den $Im\ i = M$, $E(M)$ nin bir diktoplananıdır. Bundan dolayı, M, injektiftir. Teorem 2.4.23'ten R bir sağ V-*halka* olur. ■

Önerme 4.35. *Eğer bir R halkası "SIP modüllerin herhangi bir dik toplamı yine bir SIP modüldür" koşulunu sağlıyorsa R bir sağ V-halka dır.*

Kanıt. M bir sonlu cogenerated R-modül olsun. Buradan M, Önerme 2.4.15'ten ayrıştırılamaz R-modüllerin bir dik toplamıdır. Ayrıştırılamaz modüller SIP olduğundan ve varsayımdan M, SIP ye sahiptir. Bu durumda, Teorem 4.34'ten, R bir sağ V-*halka* olur. ■

Teorem 4.36. *([15, Teorem 2.1.(2)]) N bir sağ R-modül olsun. N, (C_{11}) özelliğine sahip ve E, N nin bir altmodülü olsun. Eğer N nin bir diktoplananı ile E nin arakesiti, E nin bir diktoplananı ise E, (C_{11}) özelliğine sahiptir.*
Özel olarak; Eğer N, SIP ye sahip ise N nin her diktoplananı (C_{11}) özelliğine sahiptir.

Kanıt. $A \leq E$ olsun. N, (C_{11}) olduğundan $N_2 \cap A = 0$, N_2, N de A nın bir komplementi ve $N_2 \oplus A \leq_e N$ olacak şekilde $N = N_1 \oplus N_2$ parçalanışı vardır. Bu yüzden

$$(N_2 \cap E) \cap A = E \cap (N_2 \cap A) = 0$$

dır. Buradan,

$$(N_2 \cap E) \oplus A = E \cap (N_2 \oplus A) \leq_e E \cap N = E$$

dir. Hipotezden $N_2 \cap E \leq_d E$, Yardımcı Teorem 2.3.9'dan $E \cap N_2$, E de A nın bir komplementidir. Bu yüzden E, (C_{11}) özelliğine sahiptir. ■

Teorem 4.37. *SIP özelliğine sahip bir FI-extending modülün her diktoplananı yine bir FI-extending modüldür.*

Kanıt. M modülü SIP özelliğine sahip bir FI-extending modül olsun. M_1, M nin herhangi bir diktoplananı olsun. $M = M_1 \oplus M_2$ olacak şekilde bir $M_2 \leq M$ vardır. M_1 in herhangi bir N_1 fully invariant altmodülü için $N_1 \oplus N_2$, M de fully invariant olacak şekilde M_2 nin bir N_2 fully invariant altmodülü olacağını iddia edelim:

$$N_2 = \sum_{\varphi \in Hom(M_1, M_2)} \varphi(N_1)$$

olsun. Herhangi bir $f \in End(M_2)$ alalım.

$$f(N_2) = f\Big(\sum_{\varphi \in Hom(M_1,M_2)} \varphi(N_1)\Big) = \sum_{\varphi \in Hom(M_1,M_2)} f\varphi(N_1), \quad f\varphi \in Hom(M_1 \oplus M_2)$$

Buradan $f(N_2) \subseteq N_2$ olduğu görülür. Bu yüzden N_2, M_2 nin bir fully invariant altmodülür. Herhangi bir $g \in End(M)$ alalım. Buradan

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}, \quad g_{ij} : M_j \to M_i, \quad i, j = 1, 2$$

Dikkat edilirse, $i = 1, 2$ için $N_i \lhd N_i$ olduğundan $g_{ii}(N_i) \subseteq N_i$ dir. N_2 nin tanımı gereği $g_{21}(N_1) \subseteq N_2$ olur. $\varphi \in Hom(M_1, M_2)$ ve $g_{12}\varphi \in End(M_1)$ için

$$g_{12}(N_2) = \big(\sum \varphi(N_1)\big) = \sum g_{12}\varphi(N_1) \subseteq N_1$$

olur. Bu yüzden

$$g(N_1 \oplus N_2) = g_{11}(N_1) + g_{12}(N_2) + g_{21}(N_1) + g_{22}(N_2) \subseteq N_1 \oplus N_2$$

dir. Bundan dolayı $N_1 \oplus N_2 \lhd M$ olur. M modülü FI-extending olduğundan $N_1 \oplus N_2 \leq_e M$ olacak şekilde M nin bir N diktoplananı vardır. Hemde $N_1 \oplus N_2 \leq_e (M_1 \cap N) \oplus (M_2 \cap N)$ dir. Önerme 2.2.2(v)'ten $N_1 \leq_e (M_1 \cap N)$ dir. M modülü SIP olduğundan $(M_1 \cap N) \leq_d M$ dir. Aynı zamanda $(M_1 \cap N) \leq_d M_1$ dir. Sonuç olarak M_1 bir FI-extending modül olur. ■

Teorem 4.38. *M bir (C_2)-modül ve $S = End(M)$ olsun. $M \oplus M$ nin SIP olması için gerek ve yeter şart S nin bir regular halka olmasıdır.*

Kanıt. M bir (C_2)-modül olsun.
$(\Rightarrow)$: Varsayalım, $M \oplus M$ bir SIP modül ve $f \in S$ olsun. Buradan, f, $M \oplus M$ nin bir diktoplananından, $M \oplus M$ nin bir diktoplananına bir homomorfizmadır. Varsayımdan ve Önerme 4.4'ten $Ker\ f$, M nin bir diktoplananıdır. Buradan $Im\ f$, M nin bir diktoplananına izomorftur. (C_2) özelliğinden $Im\ f$, M nin bir diktoplananıdır. [8, 37.7]'den S regular halkadır.

($\Leftarrow$) : Varsayalım $S = End(M)$ bir regular halka olsun. [8, 37.9(c)]'den, S regular halkası üzerinde 2x2 lik bir matris halkası üzere $End(M \oplus M)$ de bir regular halkadır. Bu yüzden, her $f \in End(M \oplus M)$ için $Kerf$, $M \oplus M$ nin bir diktoplananıdır. Önerme 4.4'ten $M \oplus M$, SIP olur. Hatta, $M \oplus M$ nin bir diktoplananı olan M de SIP modüldür. ∎

Bu bölümün devamında SIP özelliğine sahip matris halkaları incelenecektir. Ayrıntılı bilgi için [35, 36] önerilir.

Yardımcı Teorem 4.39. *$R = \prod_I R_i$ halkaların bir çarpımı olsun. Buradan R halkası SSP (soldan SIP) özelliğine sahip olması için gerek ve yeter şart her bir R_i halkasının SSP (soldan SIP) özelliğine sahip olmasıdır.*

Yardımcı Teorem 4.40. *K bir M_R modülünün alt modülü olsun. K nın M_R nin bir diktoplananı olması için gerek ve yeter şart Ke nin Me_S nin bir diktoplananı olmasıdır.*

Kanıt. K, M_R nin bir diktoplananı olsun. Buradan $M = K \oplus N$ olacak şekilde M_R nin bir N altmodülü vardır. Bu yüzden $Me = Ke + Ne$ dir. Ancak $Ke \cap Ne =\leq K \cap N = 0$ dır. Dolayısıyla $Me = Ke \oplus Ne$ dir. Tersine, $L \leq (Me)_S$ olacak şekilde $Me = Ke \oplus L$ olduğunu varsayalım. Kolayca görülür ki $K \cap LR = 0$ dır ve

$$M = MeR = (Ke + L)R = KeR + LR = K + LR$$

Bu yüzden $M_R = K + LR$ ∎

Yardımcı Teorem 4.40 kullanılarak aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.41. *Yukarıdaki gösterimle, M bir sağ R-modül olsun. M sağ R-modülünün SIP (SSP) olması için gerek ve yeter şart Me sağ S modülünün SIP (SSP) olmasıdır.*

Sonuç 4.42. *Bir R halkasının sağ SIP (sağ SSP) olması için gerek ve yeter şart Re sağ eRe-modülünün SIP (SSP) olmasıdır. Bu durumda S sağ SIP (sağ SSP) dir.*

Kanıt. Kanıt Teorem 4.41'den hemen elde edilir. ∎

S, 1 birimine sahip bir haka olsun. n bir pozitif bir tamsayı ve $R = M_n(S)$ girdileri S nin elemanları olan nxn lik matrislerin bir halkası olsun. e_{11}, R de $(1,1)$ girdileri 1 ve diğer tüm girdileri 0 olan bir matristir. İyi bilinir ki e_{11} idempotenttir ve $S \cong e_{11}Re_{11}$ ve $R = Re_{11}R$ dir.

Bu yüzden, daha fazla kanıt vermeye gerek kalmadan Teorem 4.41 aşağıdaki sonucu verir.

Teorem 4.43. *Yukarıdaki gösterimle, $R = M_n(S)$ nin sağ SIP (sağ SSP) olması için gerek ve yeter şart S^n serbest sağ S-modülünün SIP (SSP) ye sahip olmasıdır.*

Sonuç 4.44. *Eğer S, SIP (SSP) ise $R = M_n(S)$ sağ SIP (SSP) dir.*

Kanıt. S, SIP ise Yardımcı Teorem 4.39'dan S^n SIP dir. Teorem 4.43'ten sonuç elde edilir. SSP durumu benzer şekildedir. ■

$\wp$ bir halka teorik özelliği olsun. $\wp$ özelliğine Morita invariant denmesi için gerek ve yeter şart takip eden özelliğin sağlanmasıdır: Bir R halkası $\wp$ özelliğini sağlıyorsa her $n \geq 2$ için $M_n(R)$ de sağlar ve $R = ReR$ olacak şekilde her $e^2 = e \in R$ için eRe de sağlar.

Sonuç 4.42 ve Sonuç 4.44'ten aşağıdaki sonuca ulaşılır.

Sonuç 4.45. *Sağ SIP (SSP) Morita invarianttır.*

Önerme 4.46. *Eğer bir R halkası Ore domain ise $(R \oplus R)_R$ bir SIP modüldür.*

Kanıt. D bir bölümlü halka ve R nin klasik sağ bölüm halkası olsun. $Mat_2(D)$ nin herhangi nontrivial idempotenin primitive ve $a - a^2 \neq 0$ ve $d \neq 0$ olmak üzere $a, d, f \in D$ iken aşağıdaki formlardan birine sahip olduğunu rutin hesaplamalarla gösterelim:

$$\begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ f & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & (1-a)d \\ d^{-1}a & d^{-1}(1-a)d \end{pmatrix}$$

Eğer c ve e, $Mat_2(D)$ nin nontrivial idempotentleri ise

$$\text{ya } cMat_2(D) \cap eMat_2(D) = 0 \text{ dır ya da } ce = e \text{ ve } ec = c \text{ dir.}$$

Bu yüzden $Mat_2(R)$ kendi üzerinde bir sağ modül olarak SIP dir. Teorem den $(R \oplus R)_R$ modülü SIP dir. ■

Teorem 4.47. *R bir Abelian halka olsun. Bu durumda*

(i) R halkasının SIP olması için gerek ve yeter şart $R[x]$ polinom halkasının SIP olmasıdır.

(ii) R halkasının SIP olması için gerek ve yeter şart $R[[x]]$ formal kuvvet serisinin SIP olmasıdır.

Kanıt. R Abelian olduğundan [37, Lemma 8]'den sonuç elde edilir. ■

5 *i*-SIP MODÜLLER

Son bölümde, SIP modüllerin bir genellemesi olan i-SIP modül ailesi tanımlanmış ve bu ailenin bazı özellikleri araştırılmıştır. i-SIP özelliğinin, diktoplananlara ve diktoplamlara taşınmadığı gösterilmiştir. Bu özelliğin diktoplananlara ve diktoplamlara hangi koşullarda taşındığına ilişkin bazı sonuçlar verilmiştir. Halkalar ve modüller üzerinde bu özelliğin karakterizasyonları araştırılmıştır. SIP modüller ile elde edilmiş bir çok kullanışlı önerme, i-SIP modüllere genelleştirilmiştir. Bu bölümde elde edilen bulgular makale olarak hazırlanıp indeksli bir dergiye yollanmıştır [38]. Halen hakem değerlendirmesinde bulunmaktadır.

Tanım 5.1. *M bir R-modül olsun. M nin her diktoplanan çiftinin arakesiti bir diktoplanana izomorf ise M modülüne i-SIP modül denir.*

Tanım 5.2. *Eğer bir R_R modülü bir i-SIP modül ise R halkasına bir sağ i-SIP halka denir. Yani; R deki her e,c idempotent çifti için $eR \cap cR \cong gR$ olacak şekilde $g^2 = g \in R$ vardır.*

Yukarıdaki tanımdan da görüleceği üzere i-SIP modüller SIP modüllerin bir genellemesidir. Dolayısıyla SIP ye sahip olan modüller, örneğin; yarıbasit, düzgün, ayrıştırılamaz ve duo modüller i-SIP özelliğine sahip modüllere örnek olarak verilebilir. Ayrıca, geçen bölümde kanıtladığımız iki önermeden, bir modül $injektif$ ve $asal$ ise SIP, dolayısıyla i-SIP modüldür. Bir modül CS ve $polyform$ modül ise SIP, dolayısıyla i-SIP modüldür.

Teorem 5.3. *Bir R-modül M, i-SIP olması için gerek ve yeter şart M nin her S ve T diktoplanan çifti ve $\pi : M \to S$ projeksiyon dönüşümü için, $\pi|_T$ homomorfizmasının çekirdeğinin M nin bir diktoplanananına izomorf olmasıdır.*

Kanıt. Varsayalım M, i-SIP ve $\pi : M \longrightarrow S$ projeksiyon dönüşümü olsun. $S' = ker\pi$ için $M = S \oplus S'$ dür. Bu yüzden $Ker\pi|_T = T \cap S'$ bir diktoplanana izormorftur. Tersine, M sağdaki özelliği sağlasın. M nin S ve T diktoplananları için S nin kopmlementi olan bir S' seçelim ve ρ, S' ye giden bir projeksiyon olsun. Bu durumda $S \cap T = Ker\rho|_T$, M nin bir diktoplananına izomorftur. ■

Teorem 5.4. *Bir M R-modülünün i-SIP olması için gerek ve yeter şart her $M = A \oplus B$ parçalanışı ve her f:$A \to B$ R-homomorfizmi için, $Ker\ f$, bir diktoplanana izomorftur.*

Kanıt. Varsayalım, M, i-SIP olsun. $M = A \oplus B$ ve f, A dan B ye bir R-homomorfizma ve $T = \{\ a + f(a) \mid a \in A\}$ olsun. $M = T \oplus B$ yi göstermek için, $x \in M$ alalım. Buradan $x = a + b$ olacak şekilde $a \in A$ ve $b \in B$ dir. Şimdi, $x = a + f(a) - f(a) + b$. Ama $a + f(a) \in T$ ve $-f(a) + b \in B$. Bu yüzden $M = T + B$. Şimdi $x \in T \cap B$ alalım. $a \in A$ olmak üzere $x = a + f(a)$ yazabiliriz. Bundan dolayı $a = x - f(a) \in A \cap B = 0$. Öyleyse $f(a) = 0$ buradan $x = 0$ elde edilir. M, i-SIP olduğundan $T \cap A$, M nin bir diktoplanına izomorftur. $T \cap A = Kerf$ olduğu açıktır. Bu yüzden, $Kerf$, M nin bir diktoplanına izomorftur.
Tersini kanıtlamak için, varsayalım $M = A \oplus B$ sağdaki özelliği sağlasın. $M = N \oplus N_1$, $M = K \oplus K_1$ ve $\pi_{N_1} : M \to N_1$ ve $\pi_K : M \to K$ doğal epimorfizma olsun. $h = (\pi_{N_1} o \pi_K)|_N$ dönüşümünü tanımlayalım. Dikkat edilirse, $h : N \to N_1$ dir. M i-SIP olduğundan, $Kerh \cong P$ olacak şekilde bir M nin bir P diktoplananı vardır. Kolayca görülür ki $Kerh = (N \cap K) \oplus (N \cap K_1)$ dir. $N \cap K$, $Kerh$ nin bir diktoplanı olduğundan ve $Kerh \cong P$ olduğundan, $N \cap K$, P nin bir diktoplananına izomorftur. Buradan, $N \cap K$, M nin bir diktoplanına izomorftur. Dolayısıyla, M, i-SIP modüldür. ■

Önerme 5.5. *Bir M modülü SIP ise i-SIP dir.*

Kanıt. SIP ve i-SIP tanımlarından kolaylıkla elde edilir. ■

Bir sonraki önermeyi vermeden önce hatırlarsak; bir M R-modülünün her birebir endomorfizması bir izomorfizma ise M modülüne co-$Hopfian$ denir. [3, Lemma 11.6] dan, Artinian modüller co-$Hopfian$ dır.

Önerme 5.6. *Bir M modülü co-$Hopfian$ ve (C_{12}) ise i-SIP dir.*

Kanıt. A ve B, M nin iki diktoplananı olsun. $A \cap B$, M nin bir alt modülü ve M, (C_{12}) olduğundan, $\alpha(A \cap B)$, K nın bir essential alt modülü olacak şekilde bir $\alpha : A \cap B \to K$ monomorfizması ve bir $K \leq_d M$ vardır. M, co-$Hopfian$ olduğundan α bir izomorfizmadır. Sonuç olarak, M, i-SIP dir. ■

Örnek 5.7. *Önerme* 5.5*'in tersi her zaman doğru değildir. Aşağıdaki örnekler* i-SIP *dir fakat* SIP *değildir.*

(1) $M = \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_{p^2}$ *$\mathbb{Z}$-modülünü düşünelim.* 0, M, $\langle(\bar{0},\bar{1})\rangle$, $\langle(\bar{1},\bar{1})\rangle$, $\langle(\bar{1},\bar{0})\rangle$ *and* $\langle(\bar{1},\bar{p})\rangle$, *$M$ nin diktoplananlarıdır. M nin diktoplanan çiftlerinden sadece bir tane çiftin arakesiti diktoplanan değildir.* $\langle(\bar{0},\bar{1})\rangle \cap \langle(\bar{1},\bar{1})\rangle = \langle(\bar{0},\bar{p})\rangle$, *$M$ nin bir diktoplananı değildir. Bu yüzden, $M_{\mathbb{Z}}$ bir SIP modül değildir. Ancak bu arakesit M nin $\langle(\bar{1},\bar{0})\rangle$ diktoplanına izomorftur. M, i-SIP dir.*

(2) $M = \mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus \mathbb{Z}_{p^\infty}$ *$\mathbb{Z}$-modülünü düşünelim. Şimdi,* $f : \mathbb{Z}_{p^\infty} \longrightarrow \mathbb{Z}_{p^\infty}$ *$\mathbb{Z}$-homomorfizması aşağıdaki gibi tanımlansın.*

$$f(a/p^k + \mathbb{Z}) = a/p^{k-1} + \mathbb{Z}\ ,\ a \in \mathbb{Z}\ ve\ k \in \mathbb{N}$$

$Ker\ f = 1/p + \mathbb{Z}$ olur. $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ ayrıştırılamaz olduğundan, $Kerf$, $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ un bir diktoplananı değildir. Theorem 4.4'ten, M, SIP değildir. $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ bir düzgün modül olduğundan, Sonuç 3.3.10'dan M, C_{12} özelliğin sağlar. $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ Artinian $\mathbb{Z}$-modül ve Artinian modüllerin herhangi sonlu diktoplamı Artinian olduğundan, M, co-$Hopfian$ dır. Bu yüzden, Önerme 5.6'dan M, i-SIP olur.

Önerme 5.6 ve Örnek 5.7'den M modülü *co-$Hopfian$* ve C_{12} iken i-SIP dir, ancak, SIP olmayabilir.

Sıradaki önerme, Önerme 5.5'in tersinin ne zaman doğru olduğuna ilişkindir.

Önerme 5.8. *M bir (C_2)-modül olsun. M nin SIP olması için gerek ve yeter şart M modülünün i-SIP olmasıdır.*

Kanıt. Yeterlilik, Önerme 5.5'ten elde edilir. Tersi, (C_2) özelliğinden açıktır. ■

Sıradaki önerme, Önerme 5.5'in tersinin ne zaman doğru olduğuna ilişkindir. Ayrıca, bir i-SIP modülün injektif zarfının modülün kendisiyle ne zaman denk olduğunu söylemektedir.

Önerme 5.9. *M bir yarı-sürekli modül olsun. Aşağıdakiler denktir:*

(a) M, SIP dir.

(b) $E(M)$, SIP dir.

(c) M, $SSIP$ dir.

(d) $E(M)$, $SSIP$ dir.

(e) M, i-SIP dir.

(f) $E(M)$, i-SIP dir.

(g) M, UC-modüldür.

(h) $E(M)$, UC-modüldür.

Kanıt. (a), (b), (c) ve (d) nin denkliği Önerme 4.22'de kanıtlanmıştır.
$(a) \Leftrightarrow (g)$ ve $(b) \Leftrightarrow (h)$ Yardımcı Teorem 4.21'in bir sonucudur.
$(a) \Rightarrow (e)$ ve $(b) \Rightarrow (f)$ Önerme 5.5'den elde edilir.
$(f) \Rightarrow (b)$ İnjektif modüller (C_2) olduğundan Önerme 5.8'den sonuç elde edilir.
$(e) \Rightarrow (b)$ M bir i-SIP modül, A ve B, $E(M)$ nin dik toplananları ve $E(M) = A \oplus A'$, $E(M) = B \oplus B'$ olduğunu varsayalım. Teorem 3.1.15'ten $A \cap M$ ve $B \cap M$ M nin dik toplananlarıdır. Varsayımdan $A \cap B \cap M$, M nin bir T dik toplananına izomorftur. Önerme 3.1.16'dan izomorfik alt modüller izomorfik kapanışlara sahip olduğu biliniyor. T nin kapanışı T dir ve $A \cap B \cap M$ nin kapanışı $N \cong T$ olacak şekilde N dir. $A \cap B \cap M \leq_e N$ olduğundan $E(A \cap B \cap M) = E(N)$ olur. M C_1 olduğundan N, M nin bir dik toplananıdır. Bundan dolayı, $M = N \oplus L$ olacak şekilde M nin bir L alt modülü vardır. Bu yüzden $E(M) = E(N) \oplus E(L) = E(A \cap B \cap M) \oplus E(L)$ olur. $A \cap M \leq_e A$ ve $B \cap M \leq_e B$ olduğundan $A \cap B \cap M \leq_e A \cap B$ elde edilir. Öyleyse $E(A \cap B) = E(A \cap B \cap M)$ olur. Bu durumda $E(M) = E(A \cap B) \oplus E(L)$ dir. $A = E(A \cap B) \oplus (E(L) \cap A)$ ve $B = E(A \cap B) \oplus (E(L) \cap B)$ olduğundan $E(A \cap B) \leq A \cap B \leq E(A \cap B)$ ve buradan $A \cap B = E(A \cap B)$, $E(M)$ nin bir diktoplananıdır. Dolayısıyla $E(M)$, SIP dir. ■

Teorem 5.10. *R bir sağ kalıtsal halka ise her projektif (ya da serbest) R-modül i-SIP dir.*

Kanıt. Teorem 4.32 ve Önerme 5.5'ten görülür. ■

Sonraki önerme, Önerme 4.23'ü *i-SIP* modüllere taşıyarak genelleştirir.

Önerme 5.11. *Bir R halkası için aşağıdakiler denktir:*

(a) R yarıbasittir.

(b) Tüm R-modüller $SSIP$ dir.

(c) Tüm R-modüller SIP dir.

(d) Tüm injektif R-modüller SIP dir.

(e) Tüm R-modüller i-SIP dir.

(f) Tüm injektif R-modüller i-SIP dir.

Kanıt. (a), (b), (c) ve (d) nin denkliği Önerme 4.23'te kanıtlanmıştı.
$(c) \Rightarrow (e) \Rightarrow (f)$ tanımlardan açıktır.
$(f) \Rightarrow (d)$ Tüm injektif R-modüller *i-SIP* olsun. Injektif modüller (C_2) özelliğine sahip olduğundan ve Önerme 5.8'den, tüm injektif R-modüller SIP dir. ■

Sıradaki önerme, Yardımcı Teorem 4.24'ü *i-SIP* modüllere taşır.

Önerme 5.12. *R bir değişmeli Noetherian halka olsun. E_1 ve E_2 ayrıştırılamaz injektif modüller olsun. Eğer $E_1 \oplus E_2$ i-SIP ise, aşağıdakilerden biri sağlanır.*

(a) $Hom(E_1, E_2) = 0$ dır.

(b) $E_1 \cong E_2$ ve sıfırdan farklı her $x \in E_1$ için $ann(x) = A$ olacak şekile bir asal ideal $A \leq R$ vardır.

Kanıt. $0 \neq \sigma \in Hom(E_1, E_2)$ alalım. $Ker\ \sigma$, E_1 in tamamı olmayan E_1 in bir diktoplananına izomorf olduğundan, $Ker\ \sigma \cong 0$ dır. Bu yüzden $Ker\ \sigma = 0$. Şimdi $im\ \sigma$, E_2 nin sıfırdan farklı bir injektif alt modülü olsun. Bu durumda E_2 nin bir dik toplananıdır. E_2 ayrıştırılamaz olduğundan σ örtendir ve $E_1 \cong E_2$ olur.

Geriye sadece sıfırlayıcılar koşulunu kanıtlamak kalıyor. Varsayalım x ve y E_1 in sıfırdan farklı elemanları olsun ve $a \notin ann(y)$ olacak şekilde $a \in ann(x)$ vardır. $\tau : E_1 \to E_2$, $\tau(m) = \sigma(am)$ homomorfizması tanımlansın. Kolayca görülür ki $x \in Ker\ \tau$, bu yüzden τ bir monomorfizma değildir. Hemde $y \notin Ker\ \tau$, bu yüzden $\tau \neq 0$. $E_1 \oplus E_2$ injektif olduğundan $E_1 \oplus E_2$, C_2-modüldür. Önerme 5.8'de, $E_1 \oplus E_2$, SIP dir. $Ker\ \tau$ bir dik toplanan değildir, bu ise Teorem 4.4 ile çelişkilidir. Bu yüzden sıfırdan farklı her x için $ann(x) = ann(y)$, $y \in E_1$. [34, Teorem 6]'dan kolayca görülür ki $ann(x)$ asaldır. ■

Sonraki önerme, Önerme 4.25'i i-SIP modüllere taşıyarak genelleştirir.

Önerme 5.13. *R bir değişmeli, Noetherian halka olsun. Aşağıdakiler denktir:*

(a) Bir injektif R-modül E, SIP dir.

(b) Bir injektif R-modül E, $SSIP$ dir.

(c) Bir injektif R-modül E, i-SIP dir.

Kanıt. (a) ve (b) nin denkliği Önerme 4.25'te kanıtlanmıştı.
$(a) \Rightarrow (c)$ Önerde 5.5'ten elde edilir.
$(c) \Rightarrow (a)$ Bir injektif R-modül E, i-SIP olsun. E injektif olduğundan (C_2)-modüldür. Buradan, Önerme 5.8'den, E, SIP dir. ■

Sonraki önerme, Önerme 4.26'yı i-SIP modüllere taşıyarak genelleştirir.

Önerme 5.14. *D bir Noetherian domain olsun. Bir injektif D-modül E için aşağıdakiler denktir:*

(a) E modülü $SSIP$ dir.

(b) E modülü SIP dir.

(c) E modülü i-SIP dir.

(d) (i) E modülü torsion-free ya da

(ii) E modülü torsion ve E modülünün herhangi iki farklı ayrıştırılamaz I ve J dik toplananları için $Hom(I, J) = 0$ dır.

Kanıt. (a), (b) ve (d) nin denkliği Önerme 4.26'da kanıtlanmıştı.
$(b) \Rightarrow (c)$ Önerme 5.5'ten açıktır.
$(c) \Rightarrow (b)$ Bir injektif D-modül E, i-SIP olsun. E injektif olduğundan (C_2)-modüldür. Önerme 5.8'den E, SIP dir. ■

Sonraki teorem, Teorem 4.27'yi i-SIP modüllere taşıyarak genelleştirir.

Teorem 5.15. *R bir Noetherian domain ve M bir injektif R-modül olsun. Aşağıdakiler denktir:*

(a) $M \oplus M$, SIP dir.

(b) M, torsion free dir.

(c) Herhangi bir Λ indeks kümesi için $\bigoplus_{\Lambda} M$ SIP dir.

(d) $M \oplus M$, i-SIP dir.

(e) Herhangi bir Λ indeks kümesi için $\bigoplus_{\Lambda} M$ i-SIP dir.

Kanıt. (a), (b) ve (c) nin denkliği Teorem 4.27'de kanıtlandı.
$(a) \Rightarrow (d)$ and $(c) \Rightarrow (e)$ Önerme 5.5'den açıktır.
$(d) \Rightarrow (a)$ M injektif olduğundan $M \oplus M$ injektiftir. Bir injektif modül (C_2) olduğundan ve Önerme 5.8'ten, $M \oplus M$ SIP dir.
$(e) \Rightarrow (c)$ M injektif olduğundan $\bigoplus_{\Lambda} M$ injektiftir. İnjektif modüller (C_2)-modül olduğundan, Önerme 5.8'den, $\bigoplus_{\Lambda} M$, SIP dir. ■

Aşağıda, i-SIP ye sahip iki modülün diktoplamlarının her zaman i-SIP olamayacağını gösteren bir örnek verilmiştir.

Örnek 5.16. *$\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}$-modülü düşünelim. Açıktır ki $\mathbb{Z}_4$ ayrıştırılamazdır ve bundan dolayı, i-SIP dir. $f : \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_4$, $f(\bar{x}) = 2\bar{x}$ şeklinde tanımlansın. Burdan, $Kerf = 2\ \mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_4$ ün bir diktoplanına izomorf değildir. Bu yüzden, Theorem 5.4'ten, $(\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4)_{\mathbb{Z}}$, i-SIP değildir.*

Önerme 5.17. *$M = \bigoplus_{i \in I} M_i$, M_i fully invariant alt modüllerinin bir diktoplamı olsun. Eğer her bir M_i, i-SIP ise M, i-SIP dir.*

Kanıt. S, M nin herhangi bir diktoplananı olsun. M_i ler M nin fully invariant alt modülü olduğundan, Yardımcı Teorem 3.4.2(iii)'den, $S = \bigoplus(S \cap M_i)$ dir. Şimdi S ve T, M nin diktoplananları olsun. Bu yüzden $S \cap T = \bigoplus[(S \cap M_i) \cap (T \cap M_i)]$ olur. Her bir M_i, *i-SIP* olduğundan, $S \cap T$, M nin bir diktoplananına izomorftur. ■

Teorem 5.18. *M ve N; $r(M) + r(N) = R$ olacak şekilde i-SIP ye sahip iki R-modül olsun. Buradan $M \oplus N$, i-SIP dir.*

Kanıt. A ve B, $M \oplus N$ nin iki diktoplananı olsun. Önerme 4.7'den, $A = M_1 \oplus N_1$ ve $B = M_2 \oplus N_2$, burada M_1 ve M_2, M nin altmodülleri, N_1 ve N_2, N nin altmodülleridir. Kolaylıkla görülür ki M_1 ve M_2, M nin diktoplananlarıdır, N_1 ve N_2, N nin diktoplananlarıdır. Eğer M ve N, *i-SIP* ise $M_1 \cap M_2$, M nin bir diktoplananına izomorftur ve $N_1 \cap N_2$, N nin bir diktoplananına izomorftur. Bu yüzden, $(M_1 \cap M_2) \oplus (N_1 \cap N_2)$, $M \oplus N$ nin bir diktoplananına izomorftur.

$$(M_1 \cap M_2) \oplus (N_1 \cap N_2) = (M_1 \oplus M_2) \cap (N_1 \oplus N_2) = A \cap B$$

olduğundan $A \cap B$, $M \oplus N$ nin bir diktoplananına izomorftur ve bundan dolayı, $M \oplus N$, *i-SIP* dir. ■

i-SIP ye sahip iki modülün dik toplamlarının her zaman *i-SIP* ye sahip olamayacağına ilişkin örnek verilmişti. Bu bölümde, $M \oplus N$ nin *i-SIP* modül olması ile ilgili gerek koşullar verilmiştir. Aşağıdaki önerme ile başlayalım.

Önerme 5.19. *M bir ayrıştırılamaz R-modül ve N bir R-modül olsun. Eğer $M \oplus N$ bir i-SIP modül ise M den N ye sıfırdan farklı her R-homomorfizma bir monomorfizmadır.*

Kanıt. $Hom(M, N) \neq 0$ ve f, M den N ye sıfırdan farklı bir R-homomorfizma olsun. $M \oplus N$, *i-SIP* olduğundan $Ker\ f$, M nin bir diktoplananına izomorftur. Ancak M ayrıştırılamaz olduğundan $Ker\ f \cong 0$ olur. Bu yüzden $Ker\ f = 0$ ve f bir monomorfizmadır. ■

Sonuç 5.20. *$Hom(M, N) \neq 0$ olacak şekilde M bir ayrıştırılamaz R-modül ve N bir R-modül olsun. Eğer $M \oplus N$ bir i-SIP modül ise M Quasi-Dedekind tir. Özel olarak, $M \oplus M$ bir i-SIP modül ise M Quasi-Dedekind tir.*

Kanıt. Önerme 5.19'dan, bir $f : M \longrightarrow N$ monomorfizması vardır. Varsayalım M, Quasi-Dedekind R-modül olmasın. Buradan, $Ker\ g \neq 0$ olacak şekilde M nin sıfırdan farklı bir g endomorfizması vardır. f bir monomorfizma olduğundan $Ker\ (fog) = Ker\ g \neq 0$ olur. Bu ise bir çelişkidir. Bu yüzden M bir Quasi-Dedekind R-modüldür. ■

Sonuç 5.21. *M bir dualizable ayrıştırılamaz R-modül ve $M \oplus R$ bir i-SIP modül olsun. Buradan, M, R nin bir idealine isomorftur.*

Kanıt. $Hom(M, R) \neq 0$ olduğundan, Önerme 5.19'dan M, R nin bir idealine izomorftur. ■

Önerme 5.22, Önerme 4.13'ün bir genellemesidir ve *i-SIP* ye sahip injektif modüller için bize bir açıklama verir.

Önerme 5.22. *M bir injektif modül ve $Hom(M, N) \neq 0$ olacak şekilde M ve N ayrıştırılamaz R-modüller olsun. Eğer $M \oplus N$ bir i-SIP modül ise M, N ye izomorftur ve M bir Quasi-Dedekind R-modüldür.*

Kanıt. Önerme 5.19'dan, M, N nin bir alt modülüne izomorftur ve M bir Quasi-Dedekind R-modüldür. M injektif olduğundan, N nin bir N_1 injektif alt modülü vardır. N_1 in injektifliğinden, N_1, N nin bir diktoplananıdır. N ayrıştırılamaz olduğundan $N_1 = N$. Bu yüzden M, N ye izomorftur. ■

Bir sonraki örnek, *i-SIP* ye sahip bir modülün diktoplananının her zaman *i-SIP* olmadığını gösteriyor.

Örnek 5.23. *$M = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}$-modülünü düşünelim. M modülünün tüm alt modülleri bir diktoplanana izomorf olduğundan, M, i-SIP modüldür. $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$ nin i-SIP olmadığı gösterilmişti.*

Bir M modülü (C_2) veya yarı-sürekli modül ise SIP ve *i-SIP* özelliklerinin denk olduğunu söylemiştik. Biliyoruz ki, eğer M, SIP ise M nin her diktoplanaınıda SIP dir. Dolayısıyla, M bir (C_2) veya bir yarı sürekli modül ise *i-SIP* modülün herhangi bir dik toplananı da *i-SIP* modül olduğu açıktır. Şimdi, (C_2) ve SIP modüllerin bir genellemesi olan yeni bir modül ailesi tanıtılacaktır:

Tanım 5.24. *Bir R-modül M nin dik toplananlarının herhangi çiftinin arakesiti M nin bir dik toplananına izomorf iken kendisi de M nin bir dik toplananı ise M modülüne (C_2^*) özelliğine sahiptir denir.*

Önerme 5.25. *Eğer M, (C_2^*) özelliğine sahip ise M nin her dik toplananı da (C_2^*) özelliğine sahiptir.*

Kanıt. Kanıt, tanımlardan ve basit özelliklerden kolaylıkla yapılabilir. ■

Önerme 5.26. *M, (C_2^*) olsun. Eğer M, i-SIP ise M nin her diktoplananı i-SIP dir.*

Kanıt. M, *i-SIP* ve X, M nin bir dik toplananı olsun. Varsayalım X in K ve L gibi iki dik toplananı olsun. Aynı zamanda K ve L, M nin de dik toplananlarıdır. M, *i-SIP* olduğundan, $K \cap L$, M nin bir dik toplananına izomorftur. M, (C_2^*) oluduğundan, $K \cap L$, M nin bir dik toplananıdır. Açıktır ki, $K \cap L$, X in bir dik toplananıdır. ■

Önerme 5.27. *M bir (C_2^*)-modül olsun. M nin SIP olması için gerek ve yeter şart M nin i-SIP olmasıdır.*

Kanıt. Varsayalım M, *i-SIP* olsun. K ve L, M nin dik toplananları olsun. M, *i-SIP* olduğundan, $K \cap L$ M nin bir dik toplananına izomorftur. Hipotezden, M, (C_2^*)-modül ve buradan $K \cap L$ M nin bir dik toplananıdır. Sonuç olarak, M, SIP dir. Tersi açıktır. ■

Teorem 5.28. *Eğer M, i-SIP ve $f : M \to N$ bir izomorfizma ise N, i-SIP modüldür.*

Kanıt. K ve L, N nin diktoplananları olsun. $f(A) = K$, $f(B) = L$ olacak şekilde M nin A ve B diktoplananları vardır. M, *i-SIP* olduğundan, $A \cap B$, M nin bir T dik toplananına izomorftur.

$$f(T) \cong f(A \cap B) = f(A) \cap f(B) = K \cap L$$

$K \cap L \cong f(T)$ ve $f(T)$, N nin dik toplananı olduğundan, N, *i-SIP* dir. ■

Sonraki teorem, Teorem 4.38'i i-SIP modüllere taşıyarak genelleştirir.

Teorem 5.29. *M bir modül ve $S = End(M)$ olsun.*
Eğer M bir (C_2)-modül ise $M \oplus M$ modülünün i-SIP olması için gerek ve yeter şart S nin bir regular halka olmasıdır.

Kanıt. Teorem 4.38 ve Önerme 5.8'den elde edilir. ■

Sonraki teorem, Teorem 4.34'ü i-SIP modüllere taşıyarak genelleştirir.

Teorem 5.30. *Bir R halkası için aşağıdakiler denktir:*

(a) R bir sağ V-halka dır.

(b) Her sonlu cogenerated R-modül SIP dir.

(c) Her sonlu copresented R-modül SIP dir.

(d) Her sonlu cogenerated R-modül SSP dir.

(e) Her sonlu copresented R-modül SSP dir.

(f) Her sonlu cogenerated R-modül i-SIP dir.

(g) Her sonlu copresented R-modül i-SIP dir.

Kanıt. (a), (b), (c), (d) ve (e) nin denkliği Teorem 4.34'te kanıtlanmıştı.
$(b) \Rightarrow (f)$, $(c) \Rightarrow (g)$ ve $(f) \Rightarrow (g)$ Önerme 5.5'ten ve tanımlardan açıktır.
$(g) \Rightarrow (a)$ M bir sonlu copresented R-modül olsun. Teorem 2.4.21'den, $E(M)$ ve $E(M)/M$ sonlu cogenerated olur. Teorem 2.4.14'ten $E(M)/M$ sonlu cogenerated olduğundan, $E(E(M)/M)$ sonlu cogenerated olur. Teorem 2.4.21'den herhangi sonlu cogenerated injektif modül sonlu copresented olduğudan, (g) den ve Önerme 2.4.16'dan, $E(M) \oplus E(E(M)/M)$, i-SIP olduğu görülür. Bu gösterir ki, $f : E(M) \to E(M)/M$ kanonik epimorfizma ve $i : E(M)/M \to E(E(M)/M)$ içerim homomorfizması olmak üzere $Ker\ (iof) = Ker\ f = M$, $E(M)$ nin bir dik toplananına izomorftur. $E(M)$ injektif olduğundan dik toplananı da injektiftir. M, $E(M)$ nin bir dik toplananına izmorf olduğundan M bir injektif modüldür. Teorem 2.4.23'ten R bir sağ V-*halka* olur. ■

Önerme 5.31. *Eğer bir R halkası "i-SIP modüllerin herhangi bir dik toplamı yine bir i-SIP modüldür" koşulunu sağlıyorsa R bir sağ V-halka dır.*

Kanıt. M bir sonlu cogenerated R-modül olsun. Buradan M, Önerme 2.4.15'ten ayrıştırılamaz R-modüllerin bir dik toplamıdır. Ayrıştırılamaz modüller *i-SIP* olduğundan ve varsayımdan M, *i-SIP* modüldür. Bu durumda, Teorem 5.30'dan, R bir sağ *V-halka* olur. ■

Sonraki örnek, sağ *i-SIP* özelliğinin Morita invariant olamayacağını gösteriyor.

Örnek 5.32. *$R^{(n)} = (R \oplus R)_R$ i-SIP olmadığı halde i-SIP ye sahip bir R halkası vardır. $\mathbb{Z}_4$, i-SIP olmasına rağmen, $(\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4)_{\mathbb{Z}_4}$, i-$SIP$ değildir. Bu örnek bize sağ i-SIP özelliğinin Morita invariant olamayacağını gösterir.*

Önerme 5.33. *Eğer R bir Ore domain ise $(R \oplus R)_R$, i-SIP dir.*

Kanıt. Önerme 4.46 ve Önerme 5.5'ten sonuç kolaylıkla görülür. ■

Teorem 5.34. *R bir Abelian halka olsun. Bu durumda*

(i) R halkasının i-SIP olması için gerek ve yeter şart $R[x]$ polinom halkasının i-SIP olmasıdır.

(ii) R halkasının i-SIP olması için gerek ve yeter şart $R[[x]]$ formal kuvvet serisinin i-SIP olmasıdır.

Kanıt. R Abelian olduğundan [37, Lemma 8]'den sonuç elde edilir. ■

FI-extending modüllerin diktoplananlarının FI-extending olup olmadığı hala açık bir sorudur [21]. Wang ve Chen tarafından Teorem 4.37'de, SIP ye sahip bir FI-extending modülün dik toplananlarının da FI-extending olduğu gösterilmişti. Sonraki Teoremde Wang ve Chen'in Teoremi, *i-SIP* modüllere genelleştirilmiştir.

Sonraki teoreme geçmeden, hatırlanacak olursa, M modülünün tüm φ otomorfizmaları için $\varphi(N) = N$ oluyorsa M nin N altmodülüne karakteristik altmodül denir. Her fully invariant altmodül karakterstiktir [1, s.57].

Teorem 5.35. *M bir FI-extending modül olsun. M, i-SIP ise M nin her diktoplananı FI-extending tir.*

Kanıt. M, i-SIP ye sahip bir FI-extending modül ve M_1, M nin bir diktoplananı olsun. $M = M_1 \oplus M_2$ olacak şekilde M nin bir M_2 alt modülü vardır. Teorem 4.37'nin kanıtından, M_1 in bir herhangi bir fully invariant N_1 alt modülü için, $N_1 \oplus N_2$, M de fully invariant olacak şekilde M_2 nin bir N_2 fully invariant alt modülü vardır. M, FI-extending modül olduğundan, $N_1 \oplus N_2$, N de essential olacak şekilde M nin bir N diktoplananı vardır. Hemde, $N_1 \oplus N_2 \leq_e (M_1 \cap N) \oplus (M_2 \cap N)$ dir. Buradan, $N_1 \leq_e M_1 \cap N$ elde edilir. M, i-SIP olduğudan, $\varphi : M_1 \cap N \to K$ bir izomorfizma olacak şekilde M nin bir K diktoplananı vardır. N_1 bir fully invariant alt modül olduğudan, bir karakteristik alt modüldür. Bu yüzden, $\varphi(N_1) = N_1$ dir. Önerme 2.2.2(vii)'den $\varphi(N_1) = N_1 \leq_e K$ dır. $N_1 \leq M_1$ and $N_1 \leq_e K$ olduğundan $K \cap M_2 = 0$ dır. Gerçekten, $x \in K \cap M_2$ alalım. Buradan $x \in K$ ve $x \in M_2$ dir. $M_1 \cap M_2 = 0$ olduğundan $x \notin M_1$ dir. $N_1 \leq_e K$ olduğundan $N_1 \cap xR \neq 0$ olur. Öyleyse bir $0 \neq y \in N_1 \cap xR$ vardır. Bu yüzden, $r_1 \in R$ olmak üzere $y = xr_1 \in N_1$ ve $y = xr_1 \in xR$ yazılabilir. $N_1 \leq M_1$ olduğundan $y = xr_1 \in M_1$ olur. Buradan $x \in M_2$ olduğundan $y = xr_1 \in M_2$ olmalıdır. $y = xr_1 \in M_1 \cap M_2 = 0$ olduğundan $y = xr_1 = 0$ olur bu ise bir çelişkidir. Yani $K \cap M_2 = 0$ dır. Dolayısıyla K, M_1 in bir alt modülüdür. Böylece $K \leq_d M_1$ olduğu görülür. Sonuç olarak, M_1 bir FI-extending modüldür. ■

6 TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER

Çalışmamızda, SIP modüllerin bir genellemesi olarak tanımladığımız i-SIP modül ailesinin karakteristik özellikleri araştırılmıştır. SIP modüllerde sağlanan kullanışlı bir çok önerme i-SIP modüllere genelleştirilmiştir. İnjektif modüller ile i-SIP modüller arasında nasıl bir ilişki olduğuna dair bir çok sonuç verilmesine karşın projektif modüller ile aralarındaki ilişki için sadece bir sonuç elde edilmiştir: Bir sağ kalıtsal halka üzerindeki her projektif modülün i-SIP olduğu gösterilmiştir. Ancak bu önermenin tersinin doğruluğu hala açık bir sorudur. Ayrıca, "$M = \bigoplus_{i \in I} M_i$, M_i fully invariant alt modüllerinin bir diktoplamı olsun. Eğer her bir M_i, i-SIP ise M, i-SIP dir" önermesinin tersi de açık bir soru olarak kalmıştır. Dahası, iç kısaltma özelliği (internal cancellation property) ya da kısaltma özelliği (cancellation property) ile i-SIP modüller arasında bir ilişkinin olup olmadığı araştırılmaya değerdir.

SIP modüller üzerine bir çok çalışma yapılmış ve daha sonra araştırmacılar SIP modüllerin duali olan SSP modülleri tanımlamışlar ve bu modül ailesini de ayrıntılı bir şekilde incelemişlerdir. SIP modüller gibi SSP modüllerde, Modül ve Halka Teorisinde önemli bir rol oynamaktadır. Benzer şekilde, i-SIP modüllerin duali olarak i-SSP modüller tanımlanabilir. i-SSP modüllerin, Modüller ve Halkalar üzerinde karakterizasyonlarının incelenmesinin de faydalı olacağı düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

1. Kaplansky, I., *Infinite Abelian Groups*, University of Michigan Press, Ann Arbor, 1954.

2. Fuchs, L., *Infinite Abelian Groups*, Academic Press, London, 1970.

3. Anderson, F.W. ve Fuller, K.R., *Rings and Categories of Modules*, Springer-Verlag, New York, 1974.

4. Goodearl, K.R., *Ring Theory*, Marker Dekker, 1976.

5. Sharpe, D.W. ve Vamos, P., *Injective Modules*, Cambridge University Press, 1972.

6. Dauns, J., *Modules and Rings*, Cambridge University Press, New York, 1994.

7. Mohamed, S.H. ve Müller, B.J., *Continuous and Discrete Modules*, London Math. Soc. Lecture Note Series, **147**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.

8. R. Wisbauer, *Foundations of Module and Ring Theory.* Gordon and Breach, Reading, 1991.

9. Dung, N.V., Huynh, D.V., Smith, P.F. ve Wisbauer, R., *Extending Modules*, Pitman RN Mathematics 313, Longman, Harlow, 1994.

10. Harmancı, A. ve Smith, P.F., "Finite direct sums of CS-modules", *Houston Journal Math.* **19**, 523-532, 1993.

11. Kamal, M.A. ve Muller, B.J., "Extending modules over commutative domains", *Osaka Journal Math.*, **25**, 531-538, 1988.

12. Smith, P.F. ve Tercan, A., "Generalizations of CS-modules", *Comm. Algebra*, **21**, 1809-1847, 1993.

13. Smith, P.F. ve Tercan, A., "Direct summands of modules which satisfy (C_{11})", *Algebra Colloq.*, **11(2)**, 231-237, 2004.

14. Tercan, A., "On the endomorphism ring of modules", *Hacettepe Bull. of Natural Science and Engineering*, **22**, 1-7, 1993.

15. Zhou, D., "On Non-M-Singular modules with (C_{11}^{+})", *Acta Math. Hungar* **97(3)**, 265-271, 2002.

16. Lam, T.Y., *Lectures on Modules and Rings*, Springer-Verlag, New York, 1999.

17. Bredon, G.E., *Topology and Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1993.

18. Stenström, B., *Rings of Quotients, Springer-Verlag*, New York, 1975.

19. Takıl, F., Tercan, A., "Modules Whose Submodules are Essentially Embedded in Direct Summands", *Comm. Algebra*, **37(2)**, 460-469, 2009.

20. Tercan, A., "Weak (C_{11})-modules and algebraic topology type examples", *Rocky Mount. J. Math.*, **34**, 783-792, 2004.

21. Birkenmeier, G.F., Müller, B.J., Rizvi, S.T., "Modules in which every fully invariant submodule is essential in a direct summand", *Comm. Algebra*, **30(3)**, 1395-1415, 2002.

22. Birkenmeier, G.F., Călugăreanu, G., Fuchs, L. ve Goeters, H.P., "The Fully-Invariant-Extending Property for Abelian Groups", *Comm. Algebra*, **29**, 673-685, 2001.

23. Wang, X., Chen, J., "On FI-extending rings and modules", *Northeast. Math. J.*, **24**, no. 1, 77-84, 2008.

24. Rotman, J.J., *Introduction to the Theory of Groups (3rd ed.)*, Wm. C. Brown, Dubuque, 1980.

25. Wilson, G.V., "Modules with the Summand Intersection Property", *Comm. Algebra*, **14**, 21-38, 1986.

26. Garcia, J.L., "Properties of direct summands of modules", *Comm. Algebra*, **17**, 73-92, 1989.

27. Hausen, J., "Modules with the summand intersection Property", *Comm. Algebra*, **17**, 135-148, 1989.

28. Arnold, D.M., Hausen, J., "A Characterization of Modules with the Summand Intersection Property", *Comm. Algebra*, **18**, 519-528, 1990.

29. Alkan, M., Harmanci, A., "On Summand Sum and Summand Intersection Property of Modules", *Turk. J. Math.*, **26**, 131-147, 2002.

30. Hamdouni, A., Harmanci, A., Ozcan, A.C., "Characterization of modules and rings by the summand intersection property and the summand sum property", *JP Jour. Algebra Number Theory and Appl.*, **5**, no. 3, 469-490, 2005.

31. Ozcan, A.C., Harmanci, A. ve Smith, P.F., "Duo modules", *Glasgow Math. J.*, **48**, 533-545, 2006.

32. Kosan, T., Agayev, N., Leghwel, A., Harmancı, A., "Duo modules and duo rings", *Far East J. Math. Sci. (FJMS)*, **20(3)**, 341-346, 2006.

33. Smith, P.F., "Modules for which every submodule has a unique closure", in: Ring Theory (Editors S.K. Jain and S.T. Rizvi), World Scientific, 302-313, 1993.

34. Kaplansky, I., *Commutative Rings*, Univ. of Chicago Press. Chicago, 1974.

35. Karabacak, F., Tercan A., "Matrix rings with summand intersection property", *Czechoslovak Mathematical Journal*, Vol. **53**, no.3, 621-626, 2003.

36. Birkenmeier, G.F., Karabacak, F., Tercan, A., "When is the SIP (SSP) property inherited by free modules", *Acta. Math. Hungar.*, **112**, no. 1-2, 103-106, 2006.

37. Kim, N.K., Lee, Y., "Armenderiz rings and reduced rings", *Journal of Algebra*, **223**, 477-488, 2000.

38. Karabacak, F., Tasdemir, O., "On a Generalization of Modules Which have the SIP", submitted.