NORMLU BÖLÜM CEBİRLERİ ÜZERİNDE PROJEKTİF UZAYLAR

GÜLAY OĞUZ

Yüksek Lisans Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Ağustos–2014

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Gülay Oğuz'un **"Normlu Bölüm Cebirleri Üzerinde Projektif Uzaylar"** başlıklı **Matematik** Anabilim Dalındaki, Yüksek Lisans tezi 14/08/2014 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

		Adı - Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	:	Prof. Dr. Nedim DEĞİRMENCİ	....
Üye	:	Prof. Dr. Mahmut KOÇAK	....
Üye	:	Doç. Dr. Nülifer ÖZDEMİR	....

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

NORMLU BÖLÜM CEBİRLERİ ÜZERİNDE PROJEKTİF UZAYLAR

GÜLAY OĞUZ

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman : Prof. Dr. Nedim DEĞİRMENCİ

2014, 114 Sayfa

Bu çalışmada ilk olarak $\mathbb{RP}^{n-1}$ reel projektif uzayı $\mathbb{R}^n - \{0\}$ kümesinin bir bölüm uzayı olarak tanımlanmıştır. Bu uzayın ikinci bir tanımı S^{n-1} küresinin bir bölüm uzayı olarak $\mathcal{P}$ bölüm dönüşümü ile verilmiştir. Bu uzayın $(n-1)$ boyutlu diferansiyellenebilir bir manifold olduğu gösterilip, $n = 2$ durumunda $\mathbb{RP}^1 \cong S^1$ olduğu ispatlanmıştır. $\mathbb{RP}^2$ uzayı için ise birkaç farklı bakış açısı sunulmuştur. İkinci olarak da $\mathbb{C}^n - \{0\}$ ın bir bölüm uzayı olarak tanımlanan $\mathbb{CP}^{n-1}$ kompleks projektif uzayı incelenip ikinci bir tanımı S^{2n-1} küresinin bir bölüm uzayı olarak $\mathcal{P}$ bölüm dönüşümü ile verilmiştir. Bu uzayın $(2n-2)$ boyutlu diferansiyellenebilir bir manifold yapısına sahip olduğu gösterilip, $n = 2$ durumunda $\mathbb{CP}^1 \cong S^2$ olduğu ispatlanmıştır. Daha sonraki bölümde ise $\mathbb{H}^n - \{0\}$ ın bir bölüm uzayı olarak tanımlanan $\mathbb{HP}^{n-1}$ kuaterniyonik projektif uzayı incelenip ikinci bir tanımı S^{4n-1} küresinin bir bölüm uzayı olarak $\mathcal{P}$ bölüm dönüşümü ile verilmiştir. Bu uzayın $(4n-4)$ boyutlu diferansiyellenebilir bir manifold yapısına sahip olduğu gösterilip, $n = 2$ durumunda $\mathbb{HP}^1 \cong S^4$ olduğu ispatlanmıştır. Son olarak $\mathbb{OP}^1$ ve $\mathbb{OP}^2$ oktonyonik projektif uzayları önceki projektif uzaylardakinden farklı bir denklik bağıntısı ile tanımlanmıştır. Bu uzayların sırasıyla 8 ve 16 boyutlu diferansiyellenebilir manifoldlar oldukları gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Denklik sınıfları, Bölüm uzayı, Projektif uzay, Manifold, Kart dönüşümleri, Örtüşme fonksiyonları, Kuaterniyon, Oktonyon

ABSTRACT

Master of Science Thesis

PROJECTİVE SPACES
ON NORMED DİVİSİON ALGEBRAS

GÜLAY OĞUZ

Anadolu University
Graduate School of Sciences
Mathematics Program
Supervisor : Prof. Dr. Nedim DEĞİRMENCİ
2014, 114 pages

In this work firstly the real projective space $\mathbb{RP}^{n-1}$ is defined as a quotient space of $\mathbb{R}^n - \{0\}$. This space also defined as a quotient space of the sphere S^{n-1} via the map $\mathcal{P}$. It is shown that this space is $(n-1)$ dimensional differentiable manifold and it is proven that $\mathbb{RP}^1 \cong S^1$ in case of $n = 2$. Some other interpretations are given for $\mathbb{RP}^2$. Secondly the complex projective space $\mathbb{CP}^{n-1}$ is defined as a quotient space of $\mathbb{C}^n - \{0\}$. This space also considered as a quotient space of the sphere S^{2n-1} via the map $\mathcal{P}$. It is shown that $\mathbb{CP}^{n-1}$ is $(2n-2)$ dimensional differentiable manifold and it is proven that $\mathbb{CP}^1 \cong S^2$ in case of $n = 2$. Then the quaternionic projective space $\mathbb{HP}^{n-1}$ is defined as a quotient space of $\mathbb{H}^n - \{0\}$. The quaternionic projective space also defined as the quotient space of S^{4n-1} via the map $\mathcal{P}$. It is shown that $\mathbb{HP}^{n-1}$ is $(4n-4)$ dimensional differentiable manifold and it is proven that $\mathbb{HP}^1 \cong S^4$ in case of $n = 2$. Lastly the octonionic projective spaces $\mathbb{OP}^1$ and $\mathbb{OP}^2$ are defined by equivalence relations which are completely different from the previously defined . It is proven that these spaces are differentiable manifolds of dimension 8 and 16 respectively .

Keywords: Equivalence Classes, Quotient Space, Projective Space, Manifold, Chart Mappings, Overlap Functions, Quaternion, Octonion

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında beni her zaman destekleyen aileme ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Prof.Dr. Nedim DEĞİRMENCİ'ye en içten teşekkürlerimi sunarım.

Gülay OĞUZ
Ağustos 2014

İÇİNDEKİLER

ÇİZELGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	:	Reel Sayılar
$\mathbb{C}$	:	Kompleks Sayılar
$\mathbb{H}$	:	Kuaterniyonlar
$\mathbb{O}$	:	Oktonyonlar
$\cong$	:	Homeomorf
$\mathbb{RP}^{n-1}$	:	$(n-1)$ boyutlu reel projektif uzay
$\mathbb{CP}^{n-1}$	:	$(n-1)$ boyutlu kompleks projektif uzay
$\mathbb{HP}^{n-1}$	:	$(n-1)$ boyutlu kuaterniyonik projektif uzay
$\mathcal{Q}$	:	Bölüm dönüşümü
S^n	:	n-küre
$\mathcal{P}$	:	İzdüşüm dönüşümü
$[\xi]$	:	ξ nin denklik sınıfı
$X/_\sim$	:	X in denklik sınıflarının kümesi

1 GİRİŞ

$\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerindeki normlu bölüm cebirlerinin $\mathbb{R}$ nin kendisi, $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cebri, $\mathbb{H}$ quaterniyonlar cebri ve $\mathbb{O}$ oktonyonlardan ibaret olduğu bilinmektedir ([3]). Bu cebirler hem matematiğin cebir, geometri ve topoloji gibi dallarında hem de teorik fizikte önemli rol oynarlar ([5], [12]). Önemli bir topolojik uzaylar ailesi olan Projektif uzaylar bu cebirler üzerine teşkil edilir. Projektif uzayların topolojik yapıları irdelenirken ilgili cebirlerin sahip olduğu özelliklerden yararlanılır. Matematikte soyut olarak tanımlanan pek çok yapı için en uygun model projektif uzaylarla örneklendirilir. Bu tez çalışmasında projektif uzaylar uygun denklik bağıntıları yardımıyla bölüm uzayları olarak tanımlanmıştır ([6], [10]). Ayrıca her bir projektif uzay ikinci sayılabilirlik, Hausdoffluk ve lokal öklidyenlik gibi manifold özelliklerine de sahiptir. Bu tez çalışması içinde değinilmeyen Hopf Demetleri de projektif uzaylar yardımıyla tanımlanırlar ([9]).

2 BAZI TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Normlu Bölüm Cebirleri

Tanım 2.1.1. *V, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer V üzerinde*

$$\begin{aligned} * : V \times V &\rightarrow V \\ (v, w) &\rightarrow v * w \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $*$ işlemi $\forall\ v_1, v_2, w_1, w_2, v, w \in V$ ve $a \in \mathbb{F}$ için

$$(v_1 + v_2) * w = (v_1 * w) + (v_2 * w)$$

$$v_1 * (w_1 + w_2) = (v_1 * w_1) + (v_1 * w_2)$$

$$(av) * w = a(v * w)$$
$$v * (aw) = a(v * w)$$

*şartlarını sağlıyorsa V ye $\mathbb{F}$ cismi üzerinde **cebir** denir.*

Tanım 2.1.2. *Bir cebirde sıfırdan farklı her elemanının tersi mevcut ise bu cebire **bölüm cebri** denir.*

Tanım 2.1.3. *V, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer V üzerinde*

$$|| \cdot || : V \rightarrow \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlanan $|| \cdot ||$ işlemi $\forall\ x, y \in V$ ve $\alpha \in \mathbb{F}$ için

1. $||x|| \geq 0$
2. $||x|| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
3. $||\alpha x|| = |\alpha|||x||$
4. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

*şartlarını sağlıyorsa bu fonksiyona V üzerinde **norm** ve üzerinde normun tanımlandığı V vektör uzayına da **normlu uzay** denir.*

Tanım 2.1.4. *V bir cebir olmak üzere $\forall\ x, y \in V$ için $||xy|| = ||x||\,||y||$ şartı sağlanıyorsa bu cebire **normlu cebir** denir.*

Tanım 2.1.5. *$\{a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ şeklinde tanımlanan kümeye **kuarterniyonlar** denir ve $\mathbb{H}$ ile gösterilir.*

Bu kümenin vektör uzayı yapısı $\mathbb{R}^4$ öklid uzayı ile özdeştir. Kuaterniyonların taban elemanları üzerinde çarpma işlemi aşağıdaki tablo ile verilir.

$\cdot$	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Tanım 2.1.6. $\{a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k + a_4 e + a_5 I + a_6 J + a_7 K : a_\alpha \in \mathbb{R}\,,\ \alpha = 0, 1, \ldots, 7\}$ *şeklinde tanımlanan kümeye* ***oktonyonlar*** *denir ve* $\mathbb{O}$ *ile gösterilir.*

Bu kümenin vektör uzayı yapısı $\mathbb{R}^8$ öklid uzayı ile özdeştir. Oktonyonların taban elemanları üzerinde çarpma işleminin tablosu ise

$\bullet$	1	i	j	k	e	I	J	K
1	1	i	j	k	e	I	J	K
i	i	-1	k	$-j$	I	$-e$	K	$-J$
j	j	$-k$	-1	i	$-J$	K	e	$-I$
k	k	j	$-i$	-1	K	J	$-I$	$-e$
e	e	$-I$	J	$-K$	-1	i	$-j$	k
I	I	e	$-K$	$-J$	$-i$	-1	k	j
J	J	$-K$	$-e$	I	J	$-k$	-1	i
K	K	J	I	e	$-k$	$-j$	$-i$	-1

şeklinde verilir.

Örnek 2.1.7. $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ *ve* $\mathbb{O}$ *normlu bölüm cebirleridir.*

Teorem 2.1.8. *Tüm normlu bölüm cebirleri* $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ *ve* $\mathbb{O}$ *dan ibarettir([3]).*

2.2 Manifoldlar

Tanım 2.2.1. *Bir X topolojik uzayının her noktasını içeren bir açık alt kümesi ile öklid uzayının bir açık alt kümesi arasında bir homeomorfizm mevcut ise bu uzaya* ***yerel öklidyendir*** *denir.*

Tanım 2.2.2. *Hausdorff, yerel öklidyen ve 2. sayılabilir bir uzaya* ***topolojik manifold*** *denir .*

Tanım 2.2.3. *X bir topolojik uzay ve $p \in X$ olsun. p noktasını içeren X in bir açık alt kümesi U olmak üzere*

$$\varphi : U \longrightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$$

bir homeomorfizm dönüşümü ise (U, φ) çiftine ***kart*** *denir. $i = 1, \ldots, n$ için $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$ kartlardan oluşan $\mathcal{A}$ ailesi X in bir örtüsünü oluşturuyorsa bu aileye* ***atlas*** *adı verilir. Bu uzayın herhangi iki kartı (U_i, φ_i) ve (U_j, φ_j) olsun. Bu kartların* ***örtüşme fonksiyonları***

$$\varphi_i \circ {\varphi_j}^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$$

$$\varphi_j \circ {\varphi_i}^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

*şeklinde tanımlıdır. $U_i \cap U_j = \emptyset$ veya $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ iken örtüşme fonksiyonları sürekli ve her mertebeden türevlenebilir ise bu kartlara C^∞***- uyumlu*** *denir. Herhangi iki kartı C^∞- uyumlu olan atlasa* ***diferansiyellenebilir atlas*** *adı verilir. Diferansiyellenebilir bir atlas yapısına sahip manifold* ***diferansiyellenebilirdir*** *denir .*

Tanım 2.2.4. *S^n $n-$Küresinin* ***steografik izdüşüm dönüşümleri*** *bu küreyi yerel olarak bir öklidyen uzaya homeomorf yapan önemli dönüşümlerdir.*

Bu önemli iki dönüşüm şu şekilde tanımlanır:

$$S^n = \{(x^1, ..., x^n, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x^1)^2 + ... + (x^n)^2 + (x^{n+1})^2 = 1\}$$

olmak üzere ilk dönüşüm için $N = (0, \ldots, 0, 1) \in S^n$ ve $U_S = S^n - \{N\}$ olsun. Bu şekilde seçilen U_S kümesi S^n de açıktır. Çünkü ; S^n de $\mathbb{R}^{n+1}$ den indirgenen topoloji ile her tek nokta kümesi kapalı olup tümleyeni açıktır. S^n den $\mathbb{R}^n$ ye N noktasından steografik izdüşüm dönüşümü;

$$\begin{array}{rcl} \varphi_S : U_S & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (x^1, ..., x^n, x^{n+1}) & \mapsto & \left(\frac{x^1}{1-x^{n+1}}, \ldots, \frac{x^n}{1-x^{n+1}}\right) \end{array}$$

olup bu dönüşüm süreklidir. Çünkü;

$$\begin{array}{rcl} f_i : \mathbb{R}^{n+1} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x^1, ..., x^n, x^{n+1}) & \mapsto & f_i(x^1, ..., x^n, x^{n+1}) = \frac{x^i}{1-x^{n+1}} \end{array}$$

şeklinde tanımlanan f_i öklid koordinat fonksiyonları sürekli olduğundan φ_S dönüşümü süreklidir. Bu dönüşümün tersi $y = (y^1, ..., y^n)$ olmak üzere

$$\begin{array}{rcl} \varphi_S^{-1} : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & U_S \\ (y^1, ..., y^n) & \mapsto & \varphi_S^{-1}(y^1, ..., y^n) = \left(\frac{2y^1}{1+||y||^2}, \ldots, \frac{2y^n}{1+||y||^2}, \frac{||y||^2-1}{1+||y||^2}\right) \end{array}$$

şeklinde tanımlı olup süreklidir. Çünkü; $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ için

$$\begin{array}{rcl} f_i : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (y^1, ..., y^n) & \mapsto & f_i(y^1, ..., y^n) = \frac{2y^i}{1+||y||^2} \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rcl} f_{n+1} : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (y^1, ..., y^n) & \mapsto & f_{n+1}(y^1, ..., y^n) = \frac{||y||^2-1}{1+||y||^2} \end{array}$$

şeklinde tanımlanan her bir öklid koordinat fonksiyonu sürekli olduğundan φ_S^{-1} dönüşümü de süreklidir.

$$\begin{array}{rcl} \varphi_S \circ \varphi_S^{-1} : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (y^1, ..., y^n) & \mapsto & (\varphi_S \circ \varphi_S^{-1})(y^1, ..., y^n) = (y^1, ..., y^n) \end{array}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm için $\varphi_S \circ \varphi_S^{-1} = \mathbb{I}_{\mathbb{R}^n}$ dir. Benzer şekilde

$$\begin{array}{rcl} \varphi_S^{-1} \circ \varphi_S : U_S & \longrightarrow & U_S \\ (x^1, ..., x^n, , x^{n+1}) & \mapsto & (\varphi_S^{-1} \circ \varphi_S)(x^1, ..., x^n, x^{n+1}) = (x^1, ..., x^n, x^{n+1}) \end{array}$$

için $\varphi_S^{-1} \circ \varphi_S = \mathbb{I}_{U_S}$ dir. O halde; φ_S dönüşümü bire-bir ve örten bir dönüşümdür. Dahası; φ_S dönüşümü sürekli ve tersi de mevcut olup sürekli olduğundan bir homeomorfizmdir. (φ_S, U_S) çifti ise S^n için bir kart olup ***steografik izdüşüm kartı*** olarak adlandırılır.

İkinci dönüşüm için $S = (0, \ldots, 0, -1) \in S^n$ ve $U_N = S^n - \{S\}$ olsun. Bu şekilde alınan U_N kümesi S^n de açıktır. Çünkü; S^n de $\mathbb{R}^{n+1}$ den indirgenen topoloji ile her tek nokta kümesi kapalı olup tümleyeni açıktır. S^n den $\mathbb{R}^n$ ye S noktasından steografik izdüşüm dönüşümü;

$$\begin{array}{rcl} \varphi_N : U_N & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (x^1, ..., x^n, x^{n+1}) & \mapsto & \left(\frac{x^1}{1+x^{n+1}}, \ldots, \frac{x^n}{1+x^{n+1}}\right) \end{array}$$

olup bu dönüşüm süreklidir. Çünkü;

$$\begin{array}{rcl} f_i : \mathbb{R}^{n+1} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x^1, ..., x^n, x^{n+1}) & \mapsto & f_i(x^1, ..., x^n, x^{n+1}) = \frac{x^i}{1+x^{n+1}} \end{array}$$

şeklinde tanımlanan f_i öklid koordinat fonksiyonları sürekli olduğundan φ_N dönüşümü süreklidir. Bu dönüşümün tersi $y = (y^1, ..., y^n)$ olmak üzere

$$\begin{array}{rcl} \varphi_N^{-1} : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & U_N \\ (y^1, ..., y^n) & \mapsto & \varphi_N^{-1}(y^1, ..., y^n) = \left(\frac{2y^1}{1+||y||^2}, \ldots, \frac{2y^n}{1+||y||^2}, \frac{1-||y||^2}{1+||y||^2}\right) \end{array}$$

şeklinde tanımlı olup süreklidir. Çünkü; $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ için

$$\begin{array}{rcl} f_i : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (y^1, ..., y^n) & \mapsto & f_i(y^1, ..., y^n) = \frac{2y^i}{1+||y||^2} \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rcl} f_{n+1} : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (y^1, ..., y^n) & \mapsto & f_{n+1}(y^1, ..., y^n) = \frac{1-||y||^2}{1+||y||^2} \end{array}$$

şeklinde tanımlanan her bir öklid koordinat fonksiyonu sürekli olduğundan φ_N^{-1} dönüşümü de süreklidir.

$$\begin{array}{rcl} \varphi_N \circ \varphi_N^{-1} : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (y^1, ..., y^n) & \mapsto & (\varphi_N \circ \varphi_N^{-1})(y^1, ..., y^n) = (y^1, ..., y^n) \end{array}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm için $\varphi_N \circ \varphi_N^{-1} = \mathbb{I}_{\mathbb{R}^n}$ dir. Benzer şekilde

$$
\begin{aligned}
\varphi_N^{-1} \circ \varphi_N : U_N &\longrightarrow U_N \\
(x^1, ..., x^n, , x^{n+1}) &\mapsto (\varphi_N^{-1} \circ \varphi_N)(x^1, ..., x^n, x^{n+1}) = (x^1, ..., x^n, x^{n+1})
\end{aligned}
$$

için $\varphi_N^{-1} \circ \varphi_N = \mathbb{I}_{U_N}$ dir. O halde; φ_N dönüşümü bire-bir ve örten bir dönüşümdür. Dahası; φ_N dönüşümü sürekli ve tersi de mevcut olup sürekli olduğundan bir homeomorfizmdir. (φ_N, U_N) çifti de S^n için bir kart olup ***steografik izdüşüm kartı*** olarak adlandırılır.

(φ_S, U_S) ve (φ_N, U_N), S^n üzerinde birer $n-$boyutlu kart olduğundan bu kartların örtüşme fonksiyonları;

$$
\begin{aligned}
\varphi_S \circ \varphi_N^{-1} : \varphi_N(U_N \cap U_S) &\longrightarrow \varphi_S(U_N \cap U_S) \\
y &\mapsto \varphi_S \circ \varphi_N^{-1}(y)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\varphi_S \circ \varphi_N^{-1})(y) &= \varphi_S({\varphi_N}^{-1}(y)) \\
&= \varphi_S(\varphi_N^{-1}(y^1, ..., y^n)) \\
&= \varphi_S\left(\tfrac{2y^1}{1+||y||^2}, \ldots, \tfrac{2y^n}{1+||y||^2}, \tfrac{||y||^2-1}{1+||y||^2}\right) \\
&= \left(\tfrac{\frac{2y^1}{1+||y||^2}}{1+\frac{||y||^2-1}{1+||y||^2}}, \ldots, \tfrac{\frac{2y^n}{1+||y||^2}}{1+\frac{||y||^2-1}{1+||y||^2}}\right) \\
&= \left(\tfrac{y^1}{||y||^2}, \ldots, \tfrac{y^n}{||y||^2}\right) \\
&= \tfrac{1}{||y||^2}(y^1, \ldots, y^1) \\
&= \tfrac{y}{||y||^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi_N \circ {\varphi_S}^{-1} : \varphi_S(U_N \cap U_S) &\longrightarrow \varphi_N(U_N \cap U_S) \\
y &\mapsto \varphi_N \circ \varphi_S^{-1}(y)
\end{aligned}
$$

$$
(\varphi_N \circ \varphi_S^{-1})(y) = \varphi_N({\varphi_S}^{-1}(y))
$$

$$
\begin{aligned}
&= \varphi_N(\varphi_S^{-1}(y^1, ..., y^n)) \\
&= \varphi_N\left(\tfrac{2y^1}{1+||y||^2}, \ldots, \tfrac{2y^n}{1+||y||^2}, \tfrac{1-||y||^2}{1+||y||^2}\right) \\
&= \left(\tfrac{\frac{2y^1}{1+||y||^2}}{1-\frac{1-||y||^2}{1+||y||^2}}, \ldots, \tfrac{\frac{2y^n}{1+||y||^2}}{1-\frac{1-||y||^2}{1+||y||^2}}\right) \\
&= \left(\tfrac{y^1}{||y||^2}, \ldots, \tfrac{y^n}{||y||^2}\right) \\
&= \tfrac{1}{||y||^2}(y^1, \ldots, y^1) \\
&= \tfrac{y}{||y||^2}
\end{aligned}
$$

elde edilir ki

$$\varphi_S \circ \varphi_N^{-1}(y) = \frac{y}{||y||^2} = \varphi_N \circ \varphi_S^{-1}(y)$$

şeklinde olup

$$\varphi_S(U_N \cap U_S) = \varphi_S(U_N \cap U_S) = \mathbb{R}^n - \{0\}$$

dır. Bu örtüşme fonksiyonları sürekli ve her mertebeden kısmi türevleri var olduğundan (φ_S, U_S) ve (φ_N, U_N) kartları C^∞**- *uyumlu***dur. Aynı zamanda; $U_S \cup U_N = S^n$ olduğundan $\{(\varphi_N, U_N), (\varphi_N, U_N)\}$ ailesi S^n küresi için bir atlas yapısı oluşturur.

Lemma 2.2.5. ***(Yapıştırma Lemması)*** *X ve Y iki topolojik uzay olsun. A_1 ve A_2, X içinde $X = A_1 \cup A_2$ olacak şekilde iki açık(veya kapalı) küme olsun. Ayrıca; $f_1 : A_1 \longrightarrow Y$ ve $f_2 : A_2 \longrightarrow Y$ iki sürekli fonksiyon öyle ki $f_1 |_{A_1 \cap A_2} = f_2 |_{A_1 \cap A_2}$ şartı sağlansın. Bu durumda;*

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in A_1 \\ f_2(x), & x \in A_2 \end{cases}$$

olarak tanımlı $f : X \longrightarrow Y$ dönüşümü süreklidir.

2.3 Bölüm Uzayları

X bir topolojik uzay, Y boştan farklı bir küme ve $\mathcal{Q} : X \longrightarrow Y$ örten bir dönüşüm olsun. Y'nin bütün U alt kümelerinin ailesi $\mathcal{Q}^{-1}(U)$, X'de açık olacak şekilde seçilsin. Buradan;

$$\mathcal{Q}^{-1}(\emptyset) = \emptyset \text{ ve } \mathcal{Q}^{-1}(Y) = X$$

olup $\varnothing$ ve Y'nin ikisi de bu kümededir. Ayrıca;
$\mathcal{I}$ indis kümesi olmak üzere

$$\mathcal{Q}^{-1}(\bigcup_{\alpha\in\mathcal{I}} U_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{I}} \mathcal{Q}^{-1}U_\alpha$$

ve

$$\mathcal{Q}^{-1}(U_1 \bigcap U_2 \bigcap \ldots \bigcap U_k) = \mathcal{Q}^{-1}(U_1) \bigcap \mathcal{Q}^{-1}(U_2) \bigcap \ldots \bigcap \mathcal{Q}^{-1}(U_k)$$

olup bu aile keyfi birleşimler ve sonlu kesişimler altında kapalıdır. Yani;

$$\tau_{\mathcal{Q}} = \{U \subseteq Y : \mathcal{Q}^{-1}(U), \, X \text{ içinde açık}\}$$

Y üzerinde bir topolojidir öyle ki $\mathcal{Q} : X \longrightarrow Y$ örten dönüşümü ile belirlenen Y üzerindeki ***bölüm topolojisi*** olarak adlandırılır. Buradan;

$$\mathcal{Q}^{-1}(Y - U) = X - \mathcal{Q}^{-1}(U)$$

olduğundan Y nin bir alt kümesi bu topolojide kapalıdır ancak ve ancak $\mathcal{Q}$ altındaki ters görüntüsü X içinde kapalıdır. Dahası; ***bölüm dönüşümü*** olarak adlandırılan $\mathcal{Q} : X \longrightarrow Y$ dönüşümü, Y $\tau_{\mathcal{Q}}$ topolojisine sahip ise süreklidir.

Lemma 2.3.1. *X bir topolojik uzay, $\mathcal{Q} : X \longrightarrow Y$ örten dönüşüm ve Y, $\mathcal{Q}$ ile belirlenen bölüm topolojisine sahip olsun. Herhangi bir Z topolojik uzayı için $g : Y \longrightarrow Z$ dönüşümü süreklidir $\Longleftrightarrow$ $g \circ \mathcal{Q} : X \longrightarrow Z$ dönüşümü süreklidir.*

İspat. **($\Longrightarrow$)** $g : Y \longrightarrow Z$ sürekli bir dönüşüm olsun. $\mathcal{Q} : X \longrightarrow Y$ bölüm dönüşümü sürekli olup sürekli iki dönüşümün bileşkesi de sürekli olduğundan $g \circ \mathcal{Q} : X \longrightarrow Z$ bileşke dönüşümü süreklidir.
($\Longleftarrow$) Kabul edelim ki $g \circ \mathcal{Q} : X \longrightarrow Z$ dönüşümü sürekli olsun. $g : Y \longrightarrow Z$ dönüşümünün sürekli olduğunu göstereceğiz. V, Z de keyfi bir açık küme olsun. $g \circ \mathcal{Q}$ sürekli olduğundan

$$(g \circ \mathcal{Q})^{-1}(V) = \mathcal{Q}^{-1}(g^{-1}(V))$$

X içinde açıktır. $\tau_{\mathcal{Q}}$ bölüm topolojisinin tanımından $g^{-1}(V)$, Y de açıktır. O halde; $g : Y \longrightarrow Z$ dönüşümü süreklidir.
Diyagram ile gösterecek olursak

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mathcal{Q}"] \arrow[dr, "g\circ\mathcal{Q}"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

$$\text{g süreklidir} \iff g \circ \mathcal{Q} \text{ süreklidir.}$$

Y, $\mathcal{Q} : X \longrightarrow Y$ örten dönüşümü ile belirlenen bölüm topolojisine sahip ise Y, X in $\mathcal{Q}$ ile belirlenen bir ***bölüm uzayı*** olarak adlandırılır. Böylece bir bölüm uzayından kalkan bir dönüşüm süreklidir ancak ve ancak bölüm dönüşümü ile bileşkesi süreklidir.

$\mathcal{Q} : X \longrightarrow Y$ bir bölüm dönüşümü ise herhangi bir $y \in Y$ için

$$\mathcal{Q}^{-1}(y) = \{x \in X : \mathcal{Q}(x) = y\}$$

kümesi y üzerinde ***$\mathcal{Q}$-nun lifi*** olarak adlandırılır.

Lemma 2.3.2. *$\mathcal{Q}$:$X \longrightarrow Y$ bir bölüm dönüşümü, Z bir topolojik uzay ve $f : X \longrightarrow Z$ sürekli bir dönüşüm öyle ki $\forall y \in Y$ için $f|_{\mathcal{Q}^{-1}(y)}$ sabit bir dönüşüm olsun. $f' \circ \mathcal{Q} = f$ olacak şekilde bir tek $f' : Y \longrightarrow Z$ sürekli dönüşümü vardır.*

İspat.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mathcal{Q}"] \arrow[dr, "f"'] & Y \arrow[d, "f'"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

$\forall y \in Y$ için $f'(y)$, $\forall x \in \mathcal{Q}^{-1}(y)$ için $f'(y) = f(x)$ olacak şekilde tanımlansın. f dönüşümü $\mathcal{Q}$ nun lifleri üzerinde sabit olduğundan f' iyi tanımlıdır. Dahası; $\forall x \in X$ için

$$(f' \circ \mathcal{Q})(x) = f'(\mathcal{Q}(x)) = f(x)$$

olduğundan $f' \circ \mathcal{Q} = f$ dir. $f' \circ \mathcal{Q} = f$ ve f sürekli olduğundan *Lemma 2.3.1* den f' süreklidir. Son olarak f' nün tek olduğunu ispatlamak için $\bar{f} \circ \mathcal{Q} = f$ şartını sağlayan ayrıca bir $\bar{f} : Y \longrightarrow Z$ dönüşümü var olsun. Bu durumda $\forall x \in X$ için $f'(\mathcal{Q}(x)) = \bar{f}(\mathcal{Q}(x))$ dir. $\mathcal{Q}$ örten olduğundan $\forall y \in Y$ için $\bar{f}(y) = f'(y)$ dir. O halde; f' tektir. ■

Bölüm uzayları genellikle şu yolla verilir:

X bir topolojik uzay olsun. Bu uzay üzerinde bir $'\sim'$ denklik bağıntısı tanımlansın. $\forall x \in X$ için x i içeren denklik sınıfı $[x]$ ile ve böyle bütün denklik sınıflarının kümesi $X/_\sim$ ile gösterilsin. Böylece;

$$[x] = \{y \in X : y \sim x\}$$

$$X/_\sim = \{[x] : x \in X\}$$

olup kanonik izdüşüm dönüşümü

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} : X &\rightarrow X/_\sim \\ x &\mapsto [x] \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. $X/_\sim$ üzerindeki $\mathcal{Q}$ ile belirlenen bölüm topolojisi her denklik sınıfının bir tek nokta ile temsil edildiği bir bölüm uzayı verir.

3 REEL PROJEKTİF UZAYLAR ($\mathbb{RP}^{n-1}$)

$n \geq 2$ bir tamsayı olsun. $\mathbb{R}^n$ de $(0,\ldots,0)$ elemanı 0 ile gösterilsin. $\mathbb{R}^n$ de $\mathbb{R}^n - \{0\}$ topolojik alt uzayı üzerinde bir bağıntı aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\zeta \sim \xi \Longleftrightarrow \text{Sıfırdan farklı bir } a \in \mathbb{R} \text{ vardır öyleki } \zeta = \xi a \text{ dır}$$

Bu şekilde tanımlanan $'\sim'$ bağıntısı $\mathbb{R}^n - \{0\}$ üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Çünkü;

Yansıma : $\xi \sim \xi \Longleftrightarrow$ Sıfırdan farklı $1 \in \mathbb{R}$ vardır öyle ki $\xi = \xi \cdot 1$ dir

Simetri : $\zeta \sim \xi \Longleftrightarrow$ Sıfırdan farklı $a \in \mathbb{R}$ vardır öyle ki $\zeta = \xi a$ dir

$\Longleftrightarrow$ Sıfırdan farklı bir $a^{-1} \in \mathbb{R}$ vardır öyle ki $\xi = \zeta a^{-1}$ dır

$\Longleftrightarrow \xi \sim \zeta$

Geçişme : $\eta \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ olmak üzere

$\zeta \sim \eta \Longleftrightarrow$ Sıfırdan farklı bir $a \in \mathbb{R}$ vardır öyle ki $\zeta = \eta a$

$\eta \sim \xi \Longleftrightarrow$ Sıfırdan farklı bir $b \in \mathbb{R}$ vardır öyle ki $\eta = \xi b$

olsun. O halde;

$\zeta \sim \xi \Longleftrightarrow$ Sıfırdan farklı bir $ab \in \mathbb{R}$ vardır öyle ki $\zeta = \xi(ab)$

elde edilir.

Sonuç olarak; $'\sim'$ bağıntısı yansıma, simetri ve geçişme özelliklerini sağladığından $\mathbb{R}^n - \{0\}$ üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Bu bağıntı $\mathbb{R}^n - \{0\}$ kümesini denklik sınıflarına ayırır. $\xi \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ olmak üzere ξ nin denklik sınıfı

$$\begin{aligned}
[\xi] = [(\xi^1,\ldots,\xi^n)] &= \{\zeta \in \mathbb{R}^n - \{0\} : \zeta \sim \xi\} \\
&= \{\zeta \in \mathbb{R}^n - \{0\} : \zeta = \xi a \ , \ \ a \in \mathbb{R} - \{0\}\} \\
&= \{\xi a : a \in \mathbb{R} - \{0\}\} \\
&= \{(\xi^1 a,\ldots,\xi^n a) : a \in \mathbb{R} - \{0\}\}
\end{aligned}$$

olup denklik sınıfları orjinin çıkarılması ile $\mathbb{R}^n$ de orjinden geçen doğrulardır. $\mathbb{R}^n - \{0\}/_\sim$ bölüm uzayı $\mathbb{RP}^{n-1}$ ile gösterilsin. Yani;
$\mathbb{RP}^{n-1} = \{[\xi] : \xi \in \mathbb{R}^n - \{0\}\}$ kümesi

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q} : \mathbb{R}^n - \{0\} &\to \mathbb{RP}^{n-1} \\
\xi &\mapsto \mathcal{Q}(\xi) = [\xi]
\end{aligned}$$

izdüşümü ile belirlenen bölüm topolojisine sahiptir. Bu şekilde tanımlanan $\mathbb{RP}^{n-1}$ uzayı ***(n-1) boyutlu reel projektif uzay*** olarak adlandırılır.

Reel projektif uzayları incelemenin diğer bir yolu vardır ki bu bazı özellikleri incelemek için oldukça kolaylıklar sağlar.

$S^{n-1} = \{\xi \in \mathbb{R}^n \ : <\xi, \xi>= 1\}$ $(n-1)$ boyutlu birim küresi ele alınsın. $\mathcal{Q}$ dönüşümünün S^{n-1} küresine kısıtlanması $\mathcal{P}$ olsun.

$$\mathcal{P} : S^{n-1} \ \rightarrow \ \mathbb{RP}^{n-1}$$

dönüşümü süreklidir. Çünkü; $\mathcal{Q}$ bölüm dönüşümü sürekli olduğundan kısıtlanması da sürekli olur. Ayrıca; $\mathcal{P}$ örten bir dönüşümdür. $\mathcal{P}$ nin örtenliğini görmek için $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n) \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ olsun. Buradan;

$$<,>: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ \longrightarrow \ \mathbb{R}$$

bilineer formu

$$\begin{aligned} <\xi, \zeta> &= <(\xi^1, \ldots, \xi^n), (\zeta^1, \ldots, \zeta^n)> \\ &= \xi^1\zeta^1 + \ldots + \xi^n\zeta^n \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı olup

$$\begin{aligned} <\xi, \xi> &= <(\xi^1, \ldots, \xi^n), (\xi^1, \ldots, \xi^n)> \\ &= \xi^1\xi^1 + \ldots + \xi^n\xi^n \\ &= (\xi^1)^2 + \ldots + (\xi^n)^2 \end{aligned}$$

pozitif bir reel sayıdır. ξ nin normalizeri

$$\zeta = \xi(<\xi, \xi>)^{-\frac{1}{2}}$$

şeklinde tanımlanır.

$$\begin{aligned} <\zeta, \zeta> &= <(\xi(<\xi, \xi>)^{-\frac{1}{2}}, \xi(<\xi, \xi>)^{-\frac{1}{2}}> \\ &= <\xi, \xi> (<\xi, \xi>)^{-\frac{1}{2}}(<\xi, \xi>)^{-\frac{1}{2}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

olup $\zeta \in S^{n-1}$ dir. Dahası;

$$(<\xi, \xi>)^{-\frac{1}{2}} = a$$

olarak alınırsa $\zeta = \xi a$ olup $\zeta \sim \xi$ dir. O halde; $[\zeta] = [\xi]$ olur ki $\mathcal{Q}(\zeta) = \mathcal{Q}(\xi)$ dir ve $\zeta \in S^{n-1}$ olduğundan $\mathcal{P}(\zeta) = \mathcal{Q}(\xi) = [\xi]$ elde edilir.

Sonuç olarak; $\forall\ [\xi] \in \mathbb{RP}^{n-1}$ için bir $\zeta \in S^{n-1}$ vardır öyle ki $\mathcal{P}(\zeta) = [\xi]$ olup $\mathcal{P}$ dönüşümü örtendir.

$$\begin{aligned} \eta : \mathbb{R}^n - \{0\} &\rightarrow S^{n-1} \\ \xi &\mapsto \eta(\xi) = \xi(<\xi, \xi>)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $\mathbb{R}^n - \{0\}$ ın elemanlarını normalleştiren η dönüşümü ile sürekli dönüşümlerin diyagramı aşağıdaki gibi verilsin.

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "\mathcal{P}"'] & \mathbb{R}^n - \{0\} \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\mathcal{Q}"] & S^{n-1} \arrow[dl, "\mathcal{P}"] \\ & \mathbb{RP}^{n-1} & \end{tikzcd}$$

$\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n) \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ olmak üzere $\forall\ 1 \leq i \leq n$ için

$$\begin{aligned} f_i : \mathbb{R}^n - \{0\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \xi &\mapsto f_i(\xi) = \frac{\xi^i}{(<\xi,\xi>)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı f_i koordinat fonksiyonları sürekli olduğundan η dönüşümü süreklidir. Ayrıca $\mathcal{P}(\zeta) = \mathcal{Q}(\xi)$ ve $\zeta = \eta(\xi)$ olduğundan $\mathcal{P}(\eta(\xi)) = \mathcal{Q}(\xi)$ olup $(\mathcal{P} \circ \eta)(\xi) = \mathcal{Q}(\xi)$ sonucu elde edilir ki $\mathcal{P} \circ \eta = \mathcal{Q}$ bulunur. Yani; diyagramın sağ tarafı değişmelidir. i gömme dönüşümü olmak üzere $\mathcal{Q} \circ i = \mathcal{P}$ olup diyagramın sol tarafı değişmelidir. O halde;

$\mathbb{RP}^{n-1}$ in bir U alt kümesi açıktır $\Longleftrightarrow \mathcal{P}^{-1}(U)$, S^{n-1} içinde açıktır.

Lemma 3.0.3.

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : S^{n-1} &\rightarrow \mathbb{RP}^{n-1} \\ \zeta &\mapsto \mathcal{P}(\zeta) = [\xi] \end{aligned}$$

dönüşümünün $\mathbb{RP}^{n-1}$ üzerinde tanımladığı topoloji

$$\tau_{\mathcal{P}} = \{V \subseteq \mathbb{RP}^{n-1} : \mathcal{P}^{-1}(V), \quad S^{n-1} \textit{ içinde açık}\}$$

olmak üzere $\tau_{\mathcal{Q}} = \tau_{\mathcal{P}}$ *dir.*

İspat. $\tau_{\mathcal{Q}} = \tau_{\mathcal{P}}$ eşitliği için $\tau_{\mathcal{Q}} \subset \tau_{\mathcal{P}}$ ve $\tau_{\mathcal{P}} \subset \tau_{\mathcal{Q}}$ olduğunu göstermek yeterlidir. İlk olarak $\tau_{\mathcal{Q}} \subset \tau_{\mathcal{P}}$ olduğunu gösterelim.

$U \in \tau_{\mathcal{Q}}$ açık kümesi verilsin. $U \in \tau_{\mathcal{P}}$ olduğunu göstermeliyiz. $U \in \tau_{\mathcal{Q}}$ olduğundan $\mathcal{Q}^{-1}(U)$, $\mathbb{R}^n - \{0\}$ içinde açıktır. Diğer yandan;

$$\begin{tikzcd}
S^{n-1} \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "\mathcal{P}"'] & \mathbb{R}^n - \{0\} \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\mathcal{Q}"] & S^{n-1} \arrow[dl, "\mathcal{P}"] \\
& \mathbb{RP}^{n-1} &
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olduğundan $\mathcal{Q} \circ i = \mathcal{P}$ ve $\mathcal{P} \circ \eta = \mathcal{Q}$ dir. $\mathcal{Q} \circ i = \mathcal{P}$ olduğundan

$$\mathcal{P}^{-1}(U) = (\mathcal{Q} \circ i)^{-1}(U) = (i^{-1} \circ \mathcal{Q}^{-1})(U) = i^{-1}(\mathcal{Q}^{-1}(U))$$

olup $\mathcal{P}^{-1}(U) = i^{-1}(\mathcal{Q}^{-1}(U))$ elde edilir. $U \in \tau_{\mathcal{Q}}$ olduğundan $\mathcal{Q}^{-1}(U)$ kümesi $\mathbb{R}^n - \{0\}$ da açık ve i gömme dönüşümü sürekli olduğundan $i^{-1}(\mathcal{Q}^{-1}(U))$, S^{n-1} de açıktır. Yani; $\mathcal{P}^{-1}(U)$, S^{n-1} de açıktır. O halde; $U \in \tau_{\mathcal{P}}$ dir. Böylece $\tau_{\mathcal{P}} \subset \tau_{\mathcal{Q}}$ elde edilir. Şimdi ise $\tau_{\mathcal{P}} \subset \tau_{\mathcal{Q}}$ olduğunu gösterelim.

$V \in \tau_{\mathcal{P}}$ açık kümesi verilsin. $V \in \tau_{\mathcal{Q}}$ olduğunu göstermeliyiz. $V \in \tau_{\mathcal{P}}$ olduğundan $\mathcal{P}^{-1}(V)$, S^{n-1} içinde açıktır. Diyagramın sağ tarafı değişmeli olduğundan $\mathcal{P} \circ \eta = \mathcal{Q}$ olup

$$\mathcal{Q}^{-1}(V) = (\mathcal{O} \circ \eta)^{-1}(V) = (\eta^{-1} \circ \mathcal{P}^{-1})(V) = \eta^{-1}(\mathcal{P}^{-1}(V))$$

şeklinde yazılabilir. $V \in \tau_{\mathcal{P}}$ olduğundan $\mathcal{P}^{-1}(V)$, S^{n-1} de açıktır ve η dönüşümü sürekli olduğundan $\eta^{-1}(\mathcal{P}^{-1}(V))$, $\mathbb{R}^n - \{0\}$ da açıktır. O halde; $\mathcal{Q}^{-1}(V)$, $\mathbb{R}^n - \{0\}$ içinde açık olup $V \in \tau_{\mathcal{Q}}$ dur. Böylece; $\tau_{\mathcal{P}} \subset \tau_{\mathcal{Q}}$ elde edilir.

Sonuç olarak; $\tau_{\mathcal{Q}} \subset \tau_{\mathcal{P}}$ ve $\tau_{\mathcal{P}} \subset \tau_{\mathcal{Q}}$ olduğundan $\tau_{\mathcal{Q}} = \tau_{\mathcal{P}}$ dir. O halde; $\mathbb{RP}^{n-1}$ uzayı $\mathcal{P} : S^{n-1} \to \mathbb{RP}^{n-1}$ ile tanımlanan bölüm topolojisine sahiptir. Yani; $\mathbb{RP}^{n-1}$ bölüm uzayı S^{n-1} in bir bölüm uzayı olarak da düşünülebilir. ■

S^{n-1} in bir bölüm uzayı olarak $\mathbb{RP}^{n-1}$ in bu ikinci tanımı $\mathbb{RP}^{n-1}$ in bazı özelliklerinin incelenmesinde kolaylıklar sağlar.

$[\xi] \in \mathbb{RP}^{n-1}$ üzerindeki $\mathcal{P}^{-1}([\xi])$ lifi $\{\xi a : a \in \mathbb{R} - \{0\}\}$ kümesinin S^{n-1} ile arakesitidir. Yani, $\mathcal{Q}$ bölüm dönüşümünün lifleri $[\xi] \in \mathbb{RP}^{n-1}$ için

$$\mathcal{Q}^{-1}([\xi]) = \{\xi a : a \in \mathbb{R} - \{0\}\}$$

olup $\mathcal{P}$ nin lifleri $\zeta \in S^{n-1}$ için $[\xi] = [\zeta]$ olduğundan

$$\mathcal{P}^{-1}([\zeta])\} = \mathcal{P}^{-1}([\xi]) = \mathcal{Q}^{-1}([\xi]) \cap S^{n-1}$$

olarak yazılabilir. $\zeta \in S^{n-1}$ için $< \zeta, \zeta >= 1$ olduğundan

$$< \zeta a, \zeta a >= a < \zeta, \zeta > a = a \cdot 1 \cdot a = a^2$$

olur. Buradan, $\zeta \in S^{n-1}$ için

$$\zeta a \in S^{n-1} \Longleftrightarrow a^2 = 1$$

elde edilir. Bu durumda; $\forall\ \zeta \in S^{n-1}$ için

$$\mathcal{P}^{-1}([\zeta]) = \{\zeta a : a \in \mathbb{R} \text{ ve } a^2 = 1\}$$

dir. Böylece; $\zeta \in S^{n-1}$ ile $\mathbb{R}$ nin tüm birim elemanları çarpılarak ζ yı içeren bir lif bulunur. Herhangi bir $x = (x^1, \ldots, x^n) \in S^{n-1}$ için

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{-1}([x]) &= \{xa : a \in \mathbb{R} \ \ ve \ \ a^2 = 1\} \\ &= \{xa : a \in \mathbb{R} \text{ ve } a = \mp 1\} \\ &= \{x, -x\} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\{x, -x\}$ nokta çifti S^{n-1} üzerinde ***antipodal noktaların bir çifti*** olarak adlandırılır.

Böylece; $\mathbb{RP}^{n-1}$ reel projektif uzayı S^{n-1} küresinin antipodal noktaları denk kabul edilerek oluşturulan bölüm uzayı olarak düşünülebilir.

Lemma 3.0.4. $\mathcal{P} : S^{n-1} \to \mathbb{RP}^{n-1}$ *bölüm dönüşümü açıktır.*

İspat. $U \subset S^{n-1}$ açık olsun. $\mathcal{P}$ bölüm dönüşümünün açık olduğunu göstermek için $\mathcal{P}(U)$ nun $\mathbb{RP}^{n-1}$ de açık olduğunu göstermek yeterlidir. $\mathcal{P}(U) = V$ olsun.

$$\mathcal{P}^{-1}(\mathcal{P}(U)) = \mathcal{P}^{-1}(V) = U \cup -U$$

dir.

$$\begin{aligned} h : S^{n-1} &\to S^{n-1} \\ x &\mapsto h(x) = -x \end{aligned}$$

dönüşümü homeomorfizm dönüşümü olup U, S^{n-1} de açık ise $h(U) = -U$ da S^{n-1} de açıktır. İki açık kümenin birleşimi yine açık olduğundan $U \cup -U$ S^{n-1} de açıktır. O halde; $\mathcal{P}^{-1}(\mathcal{P}(U))$, S^{n-1} de açık olup $\mathcal{P}$ bölüm dönüşümü sürekli olduğundan $\mathcal{P}(U)$, $\mathbb{RP}^{n-1}$ de açıktır. Böylece; $\mathcal{P}$ bölüm dönüşümü açıktır denir. ■

Lemma 3.0.5. $\mathbb{RP}^{n-1}$ *reel projektif uzayı Hausdoff'dur.*

İspat. $[p]$, $[q] \in \mathbb{RP}^{n-1}$ ve $[p] \neq [q]$ olsun. p, $q \in S^{n-1}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} (p^1, \ldots, p^n) &\neq (q^1, \ldots, q^n) \\ (p^1, \ldots, p^n) &\neq -(q^1, \ldots, q^n) \end{aligned}$$

olup S^{n-1} Hausdorff olduğundan öyle V_p ve V_q açık kümeleri mevcuttur ki $p \in V_p$, $q \in V_q$ olmak üzere

$$V_p \cap V_q = \emptyset \quad \text{ve} \quad (-V_p) \cap (-V_q) = \emptyset$$

dir. Bu açıkları

$$(-V_p) \cap V_q = \emptyset \quad \text{ve} \quad (V_p) \cap (-V_q) = \emptyset$$

olacak şekilde yeterince küçük seçebiliriz. Buradan; $\mathcal{P}$ bölüm dönüşümü açık olduğundan $[p] \in \mathcal{P}(V_p)$ ve $[q] \in \mathcal{P}(V_q)$, $\mathbb{RP}^{n-1}$ de açık kümeler olup

$$\mathcal{P}(V_p) \cap \mathcal{P}(V_q) = \emptyset$$

dir. Çünkü;

$$\mathcal{P}^{-1}(\mathcal{P}(V_p) \cap \mathcal{P}(V_q)) = \mathcal{P}^{-1}(\mathcal{P}(V_p)) \cap \mathcal{P}^{-1}(\mathcal{P}(V_q)) = (V_p \cup (-V_p)) \cap (V_q \cup (-V_q)) = \emptyset$$

olur ki

$$\mathcal{P}(V_p) \cap \mathcal{P}(V_q) = \emptyset$$

elde edilir.

Sonuç olarak; $[p], [q] \in \mathbb{RP}^{n-1}$ ve $[p] \neq [q]$ için $\mathcal{P}(V_p) \cap \mathcal{P}(V_q) = \emptyset$ olacak şekilde $[p] \in V_p$, $[q] \in V_q$ ayrık açık komşulukları mevcut olduğundan $\mathbb{RP}^{n-1}$ reel projektif uzayı Hausdorff'dur. ■

Lemma 3.0.6. $\mathbb{RP}^{n-1}$ *reel projektif uzayı yerel öklidyendir*

İspat. $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n) \in S^{n-1}$ olsun. Bu durumda en az bir $k = 1, \ldots, n$ için $\xi^k \neq 0$ dır. Buradan;

$$\xi^k \neq 0 \Longleftrightarrow a^2 = 1 \text{ olan } \forall a \in \mathbb{R} \text{ için } \xi^k a \neq 0$$

olup her bir $k = 1, \ldots, n$ için

$$U_k = \{[\xi] \in \mathbb{RP}^{n-1} : \xi^k \neq 0\}$$

olsun. Bu durumda ;

$$\mathcal{P}^{-1}(U_k)) = \{\xi \in S^{n-1} : \xi^k \neq 0\} \cup \{-\xi \in S^{n-1} : \xi^k \neq 0\}$$

olur ki bu küme S^{n-1} de açıktır. $k = 1, \ldots, n$ için φ_k dönüşümü

$$\begin{aligned} \varphi_k : U_k &\rightarrow \mathbb{R}^{n-1} \\ [\xi] &\mapsto \varphi_k([\xi]) = \varphi_k([\xi^1], \ldots, [\xi^n]) \\ &\qquad\qquad = (\xi^1(\xi^k)^{-1}, \ldots, \hat{1}, \ldots, \xi^n(\xi^k)^{-1}) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Burada $\hat{1}$ ifadesi k. girdideki 1 in yok sayıldığı anlamındadır. Bu şekilde tanımlanan φ_k dönüşümü bir homeomorfizm dönüşümüdür. Şimdi bunu gösterelim.

İyi tanımlılık : $[\zeta] = [\xi]$ olsun. $\xi^k \neq 0$ ise $\zeta^k \neq 0$ dır. Ayrıca $\zeta = \xi a$ olduğundan $\zeta^k = \xi^k a$ dır. Dolayısıyla $\zeta^{k^{-1}} = a^{-1}\xi^{k^{-1}}$ olup her bir $i = 1, \ldots, n$ için

$$\zeta^i \zeta^{k^{-1}} = (\xi^i a) a^{-1} \xi^{k^{-1}} = \xi^i \xi^{k^{-1}}$$

elde edilir. Buradan;

$$\zeta^i \zeta^{k^{-1}} = \xi^i \xi^{k^{-1}}$$

olduğundan $\varphi_k([\zeta]) = \varphi_k([\xi])$ olur ki φ_k *iyi tanımlıdır* denir.

Örtenlik : Bir $k = 1, \ldots, n$ seçilip sabitlensin.

$$y = (y^1, \ldots, y^{k-1}, y^k, \ldots, y^{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$$

olmak üzere k. girdiye 1 yazılırsa

$$\xi_0 = (y^1, \ldots, y^{k-1}, 1, y^k, \ldots, y^{n-1}) \in \mathbb{R} - \{0\}$$

olacak şekilde ξ_0 elemanı vardır. η dönüşümü hatırlanacak olunursa

$$\begin{array}{rcl} \eta : \mathbb{R}^n - \{0\} & \to & S^{n-1} \\ \xi & \mapsto & \eta(\xi) = \xi(<\xi,\xi>)^{-\frac{1}{2}} \end{array}$$

olup aşağıdaki diyagram çizilebilir.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n - \{0\} \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "\mathcal{Q}"'] & S^{n-1} \arrow[d, "\mathcal{P}"] \\ & \mathbb{RP}^{n-1} \end{tikzcd}$$

$$\eta(\xi_0) = \eta(y^1, \ldots, y^{k-1}, 1, y^k, \ldots, y^{n-1}) = \xi_0(<\xi_0,\xi_0>)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{y_1}{(<\xi_0,\xi_0>)^{\frac{1}{2}}}, \ldots, \frac{1}{(<\xi_0,\xi_0>)^{\frac{1}{2}}}, \ldots, \frac{y_{n-1}}{(<\xi_0,\xi_0>)^{\frac{1}{2}}} \right)$$

olup $\eta(\xi_0)$ ın k. girdisini $(\eta(\xi_0))^k$ ile gösterirsek

$$(\eta(\xi_0))^k = \frac{1}{(<\xi_0,\xi_0>)^{\frac{1}{2}}}$$

olup sıfırdan farklıdır. O halde; $[\eta(\xi_0)] \in U_k$ dır. Ayrıca;

$$((\eta(\xi_0))^k)^{-1} = \left(\frac{1}{(<\xi_0,\xi_0>)^{\frac{1}{2}}} \right)^{-1} = (<\xi_0,\xi_0>)^{\frac{1}{2}}$$

olup

$$\varphi_k([\eta(\xi_0)]) = \varphi_k(\eta(y^1, \ldots, 1, \ldots, y^{n-1}))$$

$$= \left(\frac{y_1}{(<\xi_0,\xi_0>)^{\frac{1}{2}}}((\eta(\xi_0))^k)^{-1}, \ldots, \frac{1}{(<\xi_0,\xi_0>)^{\frac{1}{2}}}((\eta(\xi_0))^k)^{-1}, \ldots, \frac{y_{n-1}}{(<\xi_0,\xi_0>)^{\frac{1}{2}}}((\eta(\xi_0))^k)^{-1} \right)$$

$$= \left(\frac{y_1}{(<\xi_0,\xi_0>)^{\frac{1}{2}}}(<\xi_0,\xi_0>)^{\frac{1}{2}}, \ldots, \frac{1}{(<\xi_0,\xi_0>)^{\frac{1}{2}}}(<\xi_0,\xi_0>)^{\frac{1}{2}}, \ldots, \frac{y_{n-1}}{(<\xi_0,\xi_0>)^{\frac{1}{2}}}(<\xi_0,\xi_0>)^{\frac{1}{2}} \right)$$

$$= (y^1, \ldots, \hat{1}, \ldots, y^{n-1})$$

$$= (y^1, \ldots, y^{n-1})$$

elde edilir.

Sonuç olarak; $\forall\ y=(y^1,\dots,y^{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1}$ için $\varphi_k([\eta(\xi_0)])=(y^1,\dots,y^{n-1})$ olacak şekilde $[\eta(\xi_0)]\in U_k$ var olduğundan φ_k dönüşümü *örtendir.*

Birebirlik : $[\zeta]$, $[\xi]\in U_k$ olmak üzere $\varphi_k([\zeta])=\varphi_k([\xi])$ olsun. $[\zeta]=[\xi]$ olduğu gösterilirse φ_k dönüşümü bire-birdir denir. $\varphi_k([\zeta])=\varphi_k([\xi])$ ise

$$\begin{aligned}\varphi_k([\zeta^1,\dots,\zeta^k,\dots,\zeta^n]) &= \varphi_k([\xi^1,\dots,\xi^k,\dots,\xi^n])\\ (\zeta^1(\zeta^k)^{-1},\dots,\hat{1},\dots,\zeta^n(\zeta^k)^{-1}) &= (\xi^1(\xi^k)^{-1},\dots,\hat{1},\dots,\xi^n(\xi^k)^{-1})\end{aligned}$$

yazılır. Bu eşitlikten

$$\begin{aligned}\zeta^1(\zeta^k)^{-1} &= \xi^1(\xi^k)^{-1}\\ \vdots\quad &\quad \vdots\\ \zeta^n(\zeta^k)^{-1} &= \xi^n(\xi^k)^{-1}\end{aligned}$$

olup buradan

$$\begin{aligned}\zeta^1 &= \xi^1(\xi^k)^{-1}\zeta^k\\ \vdots\ &\quad \vdots\\ \zeta^n &= \xi^n(\xi^k)^{-1}\zeta^k\end{aligned}$$

bulunur. Böylece;

$$(\zeta^1,\dots,\zeta^k,\dots,\zeta^n)=(\xi^1,\dots,\xi^k,\dots,\xi^n)(\xi^k)^{-1}\zeta^k$$

elde edilir ki $||\zeta||=||\xi||=1$ olduğundan $|(\xi^k)^{-1}\zeta^k|=1$ olur. Bu ise

$$\begin{aligned}(\zeta^1,\dots,\zeta^k,\dots,\zeta^n) &= (\xi^1,\dots,\xi^k,\dots,\xi^n)\\ (\zeta^1,\dots,\zeta^k,\dots,\zeta^n) &= -(\xi^1,\dots,\xi^k,\dots,\xi^n)\end{aligned}$$

olduğunu gösterir. O halde; $\zeta\sim\xi$ olup $[\zeta]=[\xi]$ dir. Böylece φ_k dönüşümü *bire-birdir.*

Süreklilik : φ_k dönüşümünün sürekli olduğunu göstermek için *Lemma* 2.3.1 ile $\varphi_k\circ\mathcal{P}:\mathcal{P}^{-1}(U_k)\longrightarrow\mathbb{RP}^{n-1}$ dönüşümünün sürekliliğinden faydalanılacaktır.

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r, "\mathcal{P}"] \arrow[dr, "\varphi_k"'] & U_k \arrow[d, "\varphi_k\circ\mathcal{P}"] \\ & \mathbb{R}^{n-1} \end{tikzcd}$$

U_k üzerindeki alt uzay topolojisi $\mathcal{P} : \mathcal{P}^{-1}(U_k) \longrightarrow U_k$ dönüşümü ile belirlenen bölüm topolojisi ile denktir.

$$\varphi_k \circ \mathcal{P} : S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$$

$$\begin{aligned}(\varphi_k \circ \mathcal{P})(\xi^1, \ldots, \xi^k, \ldots, \xi^n) &= (\xi^1, \ldots, \xi^k, \ldots, \xi^n)(\varphi_k(\mathcal{P}(\xi^1, \ldots, \xi^k, \ldots, \xi^n) \\ &= \varphi_k[\xi^1, \ldots, \xi^k, \ldots, \xi^n] \\ &= (\xi^1(\xi^k)^{-1}, \ldots, \hat{1}, \ldots, \xi^n(\xi^k)^{-1})\end{aligned}$$

olup bu dönüşüm bir öklidyen uzaydan diğerine sürekli bir dönüşüm olduğundan $\varphi_k \circ \mathcal{P}$ süreklidir. Diğer yandan; *Lemma* 2.3.1 den

$$\varphi_k \quad \text{süreklidir} \Longleftrightarrow \varphi_k \circ \mathcal{P} \quad \text{süreklidir}$$

olduğundan φ_k dönüşümünün sürekli olduğu söylenir. φ_k dönüşümü bire-bir ve örten olduğundan tersi mevcuttur.

$$\varphi_k^{-1} : \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow U_k \subset \mathbb{RP}^{n-1}$$

olup $(y^1, \ldots, y^{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ olmak üzere $\xi_0 = (y^1, \ldots, 1, \ldots, y^{n-1}) \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ olacak şekilde ξ_0 elemanı vardır. 1 elemanı k. girdidedir. Buradan;

$$\varphi_k^{-1}(y^1, \ldots, y^{n-1}) = \left[\frac{y^1}{||\xi_0||}, \ldots, \frac{1}{||\xi_0||}, \ldots, \frac{y^{n-1}}{||\xi_0||}\right]$$

olup sürekli üç dönüşüm

$$\mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n - \{0\} \xrightarrow{\eta} S^{n-1} \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathbb{RP}^{n-1}$$

şeklinde tanımlanabilir. φ_k^{-1} bu üç sürekli dönüşümün bileşkesi olduğundan sürekli bir dönüşümdür.

Sonuç olarak; φ_k dönüşümü bire-bir, örten, sürekli ve tersi de sürekli olduğundan bir homeomorfizmdir. Böylece; $\mathbb{RP}^{n-1}$ in her noktasının bir U_k açık komşuluğu ile $\mathbb{R}^{n-1}$ öklid uzayı arasında bir φ_k homeomorfizmi var olduğundan $\mathbb{RP}^{n-1}$ reel projektif uzayı $(n-1)$ boyutlu *yerel öklidyen* bir uzaydır. ■

Lemma 3.0.7. $\mathbb{RP}^{n-1}$ *reel projektif uzayı 2. sayılabilir uzaydır.*

İspat. $k = 1, \ldots, n$ için $\xi^k \neq 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \varphi_k : U_k &\rightarrow \mathbb{R}^{n-1} \\ [\xi] &\mapsto \varphi_k([\xi]) = \varphi_k([\xi^1], \ldots, [\xi^n]) \\ &\qquad\qquad = (\xi^1(\xi^k)^{-1}, \ldots, \hat{1}, \ldots, \xi^n(\xi^k)^{-1}) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan φ_k dönüşümleri homeomorfizm dönüşümleri olup $U_k \cong \mathbb{R}^{n-1}$ dir. $\mathbb{R}^{n-1}$ öklid uzayı 2. sayılabilir uzaydır. 2. sayılabilir uzay olma topolojik bir özellik yani homeomorfizm altında korunan bir özellik olduğundan $k = 1, \ldots, n$ için U_k lar da 2. sayılabilir uzaydır. U_k lar 2. sayılabilir uzay olduğundan sayılabilir bir $\mathcal{B}_k$ tabanına sahiptirler. Buradan;

$$\bigcup_{i=1}^{n} U_k = \mathbb{RP}^{n-1}$$

olup

$$\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{B}_k$$

koleksiyonu $\mathbb{RP}^{n-1}$ için bir tabandır. Gerçekten; $U \subset \mathbb{RP}^{n-1}$ açık olsun.

$U = U \cap \mathbb{RP}^{n-1} = U \cap \bigcup_{i=1}^{n} U_k = (U \cap U_1) \cup \cdots \cup (U \cap U_n)$

olup U alt kümesi $\mathcal{B}$ daki elemanların keyfi birleşimi şeklinde yazılabilir. Böylece; $\mathcal{B}$ koleksiyonu $\mathbb{RP}^{n-1}$ için bir taban olup sayılabilir sayıdaki sonlu kümenin birleşimi olduğundan sayılabilirdir. $\mathbb{RP}^{n-1}$ uzayı sayılabilir bir $\mathcal{B}$ tabanına sahip olduğundan 2. sayılabilir uzaydır. ■

Sonuç 3.0.8. *Bir topolojik manifold Hausdorff, yerel öklidyen ve* 2. *sayılabilir bir topolojik uzaydır. O halde;* $\mathbb{RP}^{n-1}$ *reel projektif uzayı da Hausdorff, yerel öklidyen ve* 2. *sayılabilir uzay olduğundan topolojik manifolddur.*

3.1 $\mathbb{RP}^{n-1}$ Uzayının Kart Dönüşümleri ve Örtüşme Fonksiyonları

$\mathbb{RP}^{n-1}$ uzayı topolojik bir manifold olup bu uzay için kart dönüşümleri ve örtüşme fonksiyonlarını yazabiliriz. $k = 1, \ldots, n$ olmak üzere

$$U_k = \{[\xi] \in \mathbb{RP}^{n-1} : \xi^k \neq 0\}$$

açığı ve

$$\begin{aligned} \varphi_k : U_k &\rightarrow \mathbb{R}^{n-1} \\ [\xi] &\mapsto \varphi_k([\xi]) = \varphi_k([\xi^1, \dots, \xi^n]) \\ &\qquad = (\xi^1(\xi^k)^{-1}, \dots, \hat{1}, \dots, \xi^n(\xi^k)^{-1}) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan homeomorfizm dönüşümü ile (U_k, φ_k) çifti bir kart olur. $\mathbb{RP}^{n-1}$ üzerinde herhangi iki kart (U_1, φ_1) ve (U_2, φ_2) olsun. $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ veya $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ iken

$$\varphi_1 \circ {\varphi_2}^{-1} : \varphi_2(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \varphi_1(U_1 \cap U_2)$$

$$\varphi_2 \circ {\varphi_1}^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

örtüşme fonksiyonları sürekli ve her mertebeden türevlenebilir ise bu kartlara C^∞**- *uyumlu*** denir. $k = 1, \dots, n$ kartları için örtüşme fonksiyonları şu şekilde elde edilir. $1, \dots, n$ arasından $i < j$ olacak şekilde i ve j seçilip sabitlensin. Bu durumda;

$$\varphi_i \circ {\varphi_j}^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$$

$$(\varphi_i \circ {\varphi_j}^{-1})(\xi^1, \dots, \xi^i, \dots, \xi^j, \dots, \xi^{n-1}) = \varphi_i({\varphi_j}^{-1}(\xi^1, \dots, \xi^i, \dots, \xi^j, \dots, \xi^{n-1}))$$

$$= \varphi_i\,[\xi^1, \dots, \xi^i, \dots, 1, \xi^j, \dots, \xi^{n-1}]$$

$$= \varphi_i \left[\tfrac{\xi^1}{\sqrt{1+||\xi_0||^2}}, \dots, \tfrac{\xi^i}{\sqrt{1+||\xi_0||^2}}, \dots, \tfrac{1}{\sqrt{1+||x||^2}}, \tfrac{\xi^j}{\sqrt{1+||\xi_0||^2}}, \dots, \tfrac{\xi^{n-1}}{\sqrt{1+||x||^2}} \right]$$

$$= (\tfrac{\xi^1}{\xi^i}, \dots, \hat{1}, \dots, \tfrac{1}{\xi^i}, \tfrac{\xi^j}{\xi^i}, \dots, \tfrac{\xi^{n-1}}{\xi^i})$$

$$= (\tfrac{\xi^1}{\xi^i}, \dots, \tfrac{1}{\xi^i}, \tfrac{\xi^j}{\xi^i}, \dots, \tfrac{\xi^{n-1}}{\xi^i})$$

ile

$$\varphi_j \circ {\varphi_i}^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

$$(\varphi_j \circ {\varphi_i}^{-1})(\xi^1, \dots, \xi^i, \dots, \xi^j, \dots, \xi^{n-1}) = \varphi_j({\varphi_i}^{-1}(\xi^1, \dots, \xi^i, \dots, \xi^j, \dots, \xi^{n-1}))$$

$$= \varphi_j\,[\xi^1, \dots, 1, \dots, \xi^j, \dots, \xi^{n-1}]$$

$$= \varphi_j \left[\tfrac{\xi^1}{\sqrt{1+||\xi_0||^2}}, \dots, \tfrac{1}{\sqrt{1+||\xi_0||^2}}, \dots, \tfrac{\xi^j}{\sqrt{1+||\xi_0||^2}}, \dots, \tfrac{\xi^{n-1}}{\sqrt{1+||\xi_0||^2}} \right]$$

$$= (\tfrac{\xi^1}{\xi^{j-1}}, \dots, \tfrac{1}{\xi^{j-1}}, \dots, \hat{1}, \tfrac{\xi^j}{\xi^{j-1}}, \dots, \tfrac{\xi^{n-1}}{\xi^{j-1}})$$

$$= (\tfrac{\xi^1}{\xi^{j-1}}, \dots, \tfrac{1}{\xi^{j-1}}, \dots, \tfrac{\xi^j}{\xi^{j-1}}, \dots, \tfrac{\xi^{n-1}}{\xi^{j-1}})$$

şeklinde tanımlı $(\varphi_i \circ {\varphi_j}^{-1})$ ve $(\varphi_j \circ {\varphi_i}^{-1})$ örtüşme dönüşümleri sürekli ve her mertebeden kısmi türevleri mevcut olduğundan (U_i, φ_i) ve (U_j, φ_j) kartları C^∞-uyumludur. $\mathbb{RP}^{n-1}$ üzerinde diferansiyellenebilir bir atlas, herhangi ikisinin C^∞- uyumlu olduğu ve $\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha = \mathbb{RP}^{n-1}$ olacak şekildeki kartların $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ ailesi olduğundan $\mathcal{A} = \{(U_k, \varphi_k)\}_{k=1,\dots,n}$ ailesi $\mathbb{RP}^{n-1}$ için $(n-1)$ boyutlu diferansiyellenebilir bir atlastır.

$n = 2$ durumunda örtüşme fonksiyonları özel bir öneme sahiptir. $n = 2$ için $\mathbb{RP}^1$ üzerinde (U_1, φ_1) ve (U_2, φ_2) kartları mevcut olup kart dönüşümleri;

$$U_1 = \{\left[\xi^1, \xi^2\right] \in \mathbb{RP}^1 : \xi^1 \neq 0\}$$

$$U_2 = \{\left[\xi^1, \xi^2\right] \in \mathbb{RP}^1 : \xi^2 \neq 0\}$$

olmak üzere;

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1 : U_1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ [\xi^1, \xi^2] & \mapsto & \varphi_1([\xi^1, \xi^2]) = (\hat{1}, \xi^2(\xi^1)^{-1}) = \xi^2(\xi^1)^{-1} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1^{-1} : \mathbb{R} & \longrightarrow & U_1 \\ y & \mapsto & \varphi_1^{-1}(y) = [1, y] = \left[\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\right] \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rcl} \varphi_2 : U_2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ [\xi^1, \xi^2] & \mapsto & \varphi_1([\xi^1, \xi^2]) = (\xi^1(\xi^2)^{-1}, \hat{1}) = \xi^1(\xi^2)^{-1} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_2^{-1} : \mathbb{R} & \longrightarrow & U_2 \\ y & \mapsto & \varphi_2^{-1}(y) = [y, 1] = \left[\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\right] \end{array}$$

şeklinde tanımlı olup örtüşme fonksiyonları

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1 \circ {\varphi_2}^{-1} : \varphi_2(U_1 \cap U_2) & \longrightarrow & \varphi_1(U_1 \cap U_2) \\ y & \mapsto & (\varphi_1 \circ {\varphi_2}^{-1})(y) = \varphi_1({\varphi_2}^{-1}(y)) \end{array}$$

$$\begin{aligned} (\varphi_1 \circ {\varphi_2}^{-1})(y) &= \varphi_1({\varphi_2}^{-1}(y)) \\ &= \varphi_1([y, 1]) \end{aligned}$$

$$= (yy^{-1}, y^{-1})$$
$$= (\hat{1}, y^{-1})$$
$$= y^{-1}$$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_2 \circ {\varphi_1}^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) & \longrightarrow & \varphi_2(U_1 \cap U_2) \\ y & \mapsto & (\varphi_2 \circ {\varphi_1}^{-1})(y) \end{array}$$

$$\begin{aligned} (\varphi_2 \circ {\varphi_1}^{-1})(y) &= \varphi_2({\varphi_1}^{-1}(y)) \\ &= \varphi_2([1, y]) \\ &= (y^{-1}, yy^{-1}) \\ &= (y^{-1}, \hat{1}) \\ &= y^{-1} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Bu durumda;

$$\varphi_1(U_1 \cap U_2) = \varphi_2(U_1 \cap U_2) = \mathbb{R} - \{0\}$$

ve $y \in \mathbb{R} - \{0\}$ için

$$(\varphi_1 \circ {\varphi_2}^{-1})(y) = y^{-1} = (\varphi_2 \circ {\varphi_1}^{-1})(y)$$

olarak bulunur.

$n = 3$ durumunda $\mathbb{RP}^2$ üzerinde (U_1, φ_1) , (U_2, φ_2) ve (U_3, φ_3) kartları mevcut olup kart dönüşümleri

$$U_1 = \{ \left[\xi^1, \xi^2, \xi^3\right] \in \mathbb{RP}^1 : \xi^1 \neq 0\}$$

$$U_2 = \{ \left[\xi^1, \xi^2, \xi^3\right] \in \mathbb{RP}^1 : \xi^2 \neq 0\}$$

$$U_3 = \{ \left[\xi^1, \xi^2, \xi^3\right] \in \mathbb{RP}^2 : \xi^3 \neq 0\}$$

olmak üzere

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1 : U_1 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ [\xi^1, \xi^2, \xi^3] & \mapsto & \varphi_1([\xi^1, \xi^2, \xi^3]) = (\hat{1}, \xi^2(\xi^1)^{-1}, \xi^3(\xi^1)^{-1}) = (\xi^2(\xi^1)^{-1}, \xi^3(\xi^1)^{-1}) \end{array}$$

$$
\begin{array}{rcl}
\varphi_1^{-1} : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & U_1 \\
(y_1, y_2) & \mapsto & \varphi_1^{-1}(y_1, y_2) = [1, y_1, y_2] = \left[\frac{1}{\sqrt{1+y_1^2+y_2^2}}, \frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^2+y_2^2}}, \frac{y_2}{\sqrt{1+y_1^2+y_2^2}}\right]
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\varphi_2 : U_2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\
[\xi^1, \xi^2, \xi^3] & \mapsto & \varphi_2([\xi^1, \xi^2, \xi^3]) = (\xi^1(\xi^2)^{-1}, \hat{1}, \xi^3(\xi^2)^{-1}) = (\xi^1(\xi^2)^{-1}, \xi^3(\xi^2)^{-1})
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\varphi_2^{-1} : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & U_2 \\
(y_1, y_2) & \mapsto & \varphi_2^{-1}(y_1, y_2) = [y_1, 1, y_2] = \left[\frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^2+y_2^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+y_1^2+y_2^2}}, \frac{y_2}{\sqrt{1+y_1^2+y_2^2}}\right]
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\varphi_3 : U_3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\
[\xi^1, \xi^2, \xi^3] & \mapsto & \varphi_3([\xi^1, \xi^2, \xi^3]) = (\xi^1(\xi^3)^{-1}, \xi^2(\xi^3)^{-1}, \hat{1}) = (\xi^1(\xi^3)^{-1}, \xi^2(\xi^3)^{-1})
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\varphi_3^{-1} : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & U_3 \\
(y_1, y_2) & \mapsto & \varphi_3^{-1}(y_1, y_2) = [y_1, y_2, 1] = \left[\frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^2+y_2^2}}, \frac{y_2}{\sqrt{1+y_1^2+y_2^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+y_1^2+y_2^2}}\right]
\end{array}
$$

şeklinde tanımlı olup örtüşme fonksiyonları

$$
\begin{array}{rcl}
\varphi_1 \circ {\varphi_2}^{-1} : \varphi_2(U_1 \cap U_2) & \longrightarrow & \varphi_1(U_1 \cap U_2) \\
(y_1, y_2) & \mapsto & (\varphi_1 \circ {\varphi_2}^{-1})(y_1, y_2)
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
(\varphi_1 \circ {\varphi_2}^{-1})(y_1, y_2) &= \varphi_1({\varphi_2}^{-1}(y_1, y_2)) \\
&= \varphi_1([y_1, 1, y_2]) \\
&= (y_1 y_1^{-1}, y_1^{-1}, y_2 y_1^{-1}) \\
&= (\hat{1}, y_1^{-1}, y_2 y_1^{-1}) \\
&= (y_1^{-1}, y_2 y_1^{-1})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\varphi_2 \circ {\varphi_1}^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) & \longrightarrow & \varphi_2(U_1 \cap U_2) \\
(y_1, y_2) & \mapsto & (\varphi_2 \circ {\varphi_1}^{-1})(y_1, y_2)
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
(\varphi_2 \circ {\varphi_1}^{-1})(y_1, y_2) &= \varphi_2({\varphi_1}^{-1}(y_1, y_2)) \\
&= \varphi_2([1, y_1, y_2]) \\
&= (y_1^{-1}, y_1 y_1^{-1}, y_2 y_1^{-1}) \\
&= (y_1^{-1}, \hat{1}, y_2 y_1^{-1})
\end{aligned}
$$

$$= (y_1^{-1}, y_2 y_1^{-1})$$

$$\begin{aligned}
\varphi_1 \circ {\varphi_3}^{-1} : \varphi_3(U_1 \cap U_3) &\longrightarrow \varphi_1(U_1 \cap U_3) \\
(y_1, y_2) &\mapsto (\varphi_1 \circ {\varphi_3}^{-1})(y_1, y_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\varphi_1 \circ {\varphi_3}^{-1})(y_1, y_2) &= \varphi_1({\varphi_3}^{-1}(y_1, y_2)) \\
&= \varphi_1([y_1, y_2, 1]) \\
&= (y_1 y_1^{-1}, y_2 y_1^{-1}, y_1^{-1}) \\
&= (\hat{1}, y_2 y_1^{-1}, y_1^{-1}) \\
&= (y_2 y_1^{-1}, y_1^{-1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_3 \circ {\varphi_1}^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_3) &\longrightarrow \varphi_3(U_1 \cap U_3) \\
(y_1, y_2) &\mapsto (\varphi_3 \circ {\varphi_1}^{-1})(y_1, y_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\varphi_3 \circ {\varphi_1}^{-1})(y_1, y_2) &= \varphi_3({\varphi_1}^{-1}(y_1, y_2)) \\
&= \varphi_3([1, y_1, y_2]) \\
&= (y_2^{-1}, y_1 y_2^{-1}, y_2 y_2^{-1}) \\
&= (y_2^{-1}, y_1 y_2^{-1}, \hat{1}) \\
&= (y_2^{-1}, y_1 y_2^{-1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_2 \circ {\varphi_3}^{-1} : \varphi_3(U_1 \cap U_3) &\longrightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_3) \\
(y_1, y_2) &\mapsto (\varphi_2 \circ {\varphi_3}^{-1})(y_1, y_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\varphi_2 \circ {\varphi_3}^{-1})(y_1, y_2) &= \varphi_2({\varphi_3}^{-1}(y_1, y_2)) \\
&= \varphi_2([y_1, y_2, 1]) \\
&= (y_1 y_2^{-1}, y_2 y_2^{-1}, y_2^{-1}) \\
&= (y_1 y_2^{-1}, \hat{1}, y_2^{-1}) \\
&= (y_1 y_2^{-1}, y_2^{-1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_3 \circ {\varphi_2}^{-1} : \varphi_2(U_2 \cap U_3) &\longrightarrow \varphi_3(U_2 \cap U_3) \\
(y_1, y_2) &\mapsto (\varphi_3 \circ {\varphi_2}^{-1})(y_1, y_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\varphi_3 \circ {\varphi_2}^{-1})(y_1, y_2) &= \varphi_3({\varphi_2}^{-1}(y_1, y_2)) \\
&= \varphi_3([y_1, 1, y_2]) \\
&= (y_1 y_2^{-1}, y_2^{-1}, y_2 y_2^{-1})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (y_1 y_2^{-1}, y_2^{-1}, \hat{1}) \\
&= (y_1 y_2^{-1}, y_2^{-1})
\end{aligned}
$$

olarak bulunur.

$n = 4$ durumunda $\mathbb{RP}^3$ üzerinde (U_1, φ_1), (U_2, φ_2), (U_3, φ_3) ve (U_4, φ_4) olmak üzere dört kart mevcut olup kart dönüşümleri ile örtüşme fonksiyonları $\mathbb{RP}^1$ ve $\mathbb{RP}^2$ için kullanılan yol izlenerek benzer şekilde bulunabilir.

3.2 $\mathbb{RP}^1$ Projektif Uzayına Farklı Bir Bakış

$\mathbb{RP}^1$ $1-$boyutlu reel projektif uzayı $\mathbb{R}^2$ de orjin boyunca uzanan(orjin çıkarılmış) doğruların kümesi olup aynı zamanda S^1 çemberinin antipodal noktaları denk kabul edilerek oluşturulan bölüm uzayıdır. Ayrıca; bu uzay S^1 çemberine homeomorf olup Yapıştırma Lemmasını kullanarak $\mathbb{RP}^1 \cong S^1$ olduğunu göstereceğiz.

Bölüm 2.2 de S^n küresinin steografik izdüşüm dönüşümleri ve bu dönüşümlerin örtüşme fonksiyonlarını verdik. Şimdi ise özel olarak **n=1** durumunda S^1 küresinin steografik izdüşüm dönüşümleri ve bu dönüşümlerin terslerini yazalım.

$N = \{(0,1)\}$ ve $U_S = S^1 - \{N\}$ olmak üzere

$$
\begin{array}{rcl}
\varphi_S : U_S & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
(x^1, x^2) & \mapsto & \varphi_S(x^1, x^2) = \left(\frac{x^1}{1-x^2}\right)
\end{array}
$$

olup bu dönüşümün tersi

$$
\begin{array}{rcl}
\varphi_S^{-1} : \mathbb{R} & \longrightarrow & U_S \\
y & \mapsto & \varphi_S^{-1}(y) = \left(\frac{2y}{1+||y||^2}, \frac{||y||^2-1}{1+||y||^2}\right)
\end{array}
$$

şeklindedir. Benzer olarak; $S = \{(0,-1)\}$ ve $U_N = S^1 - \{S\}$ olmak üzere

$$
\begin{array}{rcl}
\varphi_N : U_N & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
(x^1, x^2) & \mapsto & \varphi_N(x^1, x^2) = \frac{x^1}{1+x^2}
\end{array}
$$

olup bu dönüşümün tersi

$$
\begin{array}{rcl}
\varphi_N^{-1} : \mathbb{R} & \longrightarrow & U_N \\
y & \mapsto & \varphi_N^{-1}(y) = \left(\frac{2y}{1+||y||^2}, \frac{1-||y||^2}{1+||y||^2}\right)
\end{array}
$$

şeklindedir. Örtüşme fonksiyonları ise

$$\begin{aligned}\varphi_S \circ \varphi_N^{-1} : \mathbb{R}-\{0\} &\longrightarrow \mathbb{R}-\{0\}\\ y &\mapsto (\varphi_S \circ \varphi_N^{-1})(y) = \tfrac{y}{||y||^2} = \tfrac{1}{y}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_N \circ {\varphi_S}^{-1} : \mathbb{R}-\{0\} &\longrightarrow \mathbb{R}-\{0\}\\ y &\mapsto \varphi_N \circ \varphi_S^{-1}(y) = \varphi_N({\varphi_S}^{-1}(y))\end{aligned}$$

şeklinde olup

$$(\varphi_S \circ \varphi_N^{-1})(y) = \frac{1}{y} = (\varphi_N \circ \varphi_S^{-1})(y)$$

olarak bulunur.

(U_1, φ_1) ve (U_2, φ_2), $\mathbb{RP}^1$ üzerinde tanımlanmış kartlar olsun. Bu kartların örtüşme fonksiyonları

$$(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1})(y) = \frac{1}{y} = (\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(y) \quad , \quad y \in \mathbb{R}-\{0\}$$

olarak elde edilmişti.

Böylece; $\mathbb{RP}^1$ reel projektif uzayının örtüşme fonksiyonları ile S^1 in örtüşme fonksiyonları benzerdir. Önemli bir araç olan *Yapıştırma Lemması* kullanılarak $\mathbb{RP}^1$ in örtüşme fonksiyonları ile S^1 in örtüşme fonksiyonları arasındaki benzerliğin tesadüf olmadığı gösterilecektir.

$$\begin{aligned}\varphi_N^{-1} \circ \varphi_1 : U_1 &\longrightarrow U_N\\ \varphi_S^{-1} \circ \varphi_2 : U_2 &\longrightarrow U_S\end{aligned}$$

homeomorfizmleri göz önüne alınsın. Bu dönüşümler $U_1 \cap U_2$ üzerinde aynı değeri alırlar. Gerçekten; $[\xi] \in U_1 \cap U_2$ ise

$$\varphi_2([\xi]) \in \varphi_2(U_1 \cap U_2) = \mathbb{R}-\{0\}$$

olup $\mathbb{R}-\{0\}$ üzerinde $\varphi_1 \circ {\varphi_2}^{-1} = \varphi_N \circ {\varphi_S}^{-1}$ olduğundan $y = \varphi_2([\xi]) \in \mathbb{R}-\{0\}$ için

$$\begin{aligned}(\varphi_1 \circ {\varphi_2}^{-1})(\varphi_2([\xi])) &= (\varphi_N \circ {\varphi_S}^{-1})(\varphi_2([\xi]))\\ \varphi_1([\xi]) &= \varphi_N \circ (({\varphi_S}^{-1} \circ \varphi_2)([\xi]))\\ ({\varphi_N}^{-1} \circ \varphi_1)([\xi]) &= {\varphi_N}^{-1} \circ \varphi_N \circ (({\varphi_S}^{-1} \circ \varphi_2)([\xi]))\\ ({\varphi_N}^{-1} \circ \varphi_1)([\xi]) &= ({\varphi_S}^{-1} \circ \varphi_2)([\xi])\end{aligned}$$

elde edilir ki bu eşitlik her $[\xi] \in U_1 \cap U_2$ için sağlandığından

$$({\varphi_N}^{-1} \circ \varphi_1)|_{U_1 \cap U_2} = ({\varphi_S}^{-1} \circ \varphi_2)|_{U_1 \cap U_2}$$

olarak bulunur. Bu durumda; Yapıştırma Lemmasından,

$$f([\xi]) = \begin{cases} ({\varphi_N}^{-1} \circ \varphi_1)([\xi]) & , \ [\xi] \in U_1 \\ ({\varphi_S}^{-1} \circ \varphi_2)([\xi]) & , \ [\xi] \in U_2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $f : \mathbb{RP}^1 \longrightarrow S^1$ dönüşümü süreklidir. Bu dönüşümünün bileşenleri homeomorfizmler ve $U_S \cup U_N = S^1$ olduğundan f bire-bir ve örtendir denir. O halde; f dönüşümü bire-bir ve örten olduğundan tersi mevcuttur. f dönüşümünün tersini bulmak için bu dönüşümün bileşenlerinin tersi olan

$$\begin{aligned} \varphi_N^{-1} \circ {\varphi_1}^{-1} = \varphi_1^{-1} \circ {\varphi_N}^{-1} &: U_N \longrightarrow U_1 \\ \varphi_S^{-1} \circ {\varphi_2}^{-1} = \varphi_2^{-1} \circ {\varphi_S}^{-1} &: U_S \longrightarrow U_2 \end{aligned}$$

homeomorfizm dönüşümleri ele alınsın. Bu dönüşümler $U_N \cap U_S$ üzerinde aynı değeri alırlar. Yani; $x \in U_N \cap U_S$ olmak üzere

$$\varphi_S(x) \in \varphi_S(U_N \cap U_S) = \mathbb{R} - \{0\}$$

olup $\mathbb{R} - \{0\}$ üzerinde $\varphi_N \circ {\varphi_S}^{-1} = \varphi_1 \circ {\varphi_2}^{-1}$ olduğundan $y = \varphi_S(x) \in \mathbb{R} - \{0\}$ için

$$\begin{aligned} (\varphi_N \circ {\varphi_S}^{-1})(\varphi_2(x) &= (\varphi_1 \circ {\varphi_2}^{-1})(\varphi_2(x) \\ \varphi_N(x) &= \varphi_1 \circ (({\varphi_2}^{-1} \circ \varphi_S)(x)) \\ ({\varphi_1}^{-1} \circ \varphi_N)(x) &= {\varphi_1}^{-1} \circ \varphi_1 \circ (({\varphi_2}^{-1} \circ \varphi_S)(x)) \\ ({\varphi_1}^{-1} \circ \varphi_N)(x) &= ({\varphi_2}^{-1} \circ \varphi_S)(x) \end{aligned}$$

elde edilir ki bu eşitlik her $x \in U_N \cap U_S$ için sağlandığından

$$({\varphi_1}^{-1} \circ \varphi_N)|_{U_N \cap U_S} = ({\varphi_2}^{-1} \circ \varphi_S)|_{U_N \cap U_S}$$

olarak bulunur. Bu durumda; Yapıştırma Lemmasından,

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} ({\varphi_1}^{-1} \circ \varphi_N)(x) & , \ x \in U_N \\ ({\varphi_2}^{-1} \circ \varphi_S)(x) & , \ x \in U_S \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $f^{-1} : S^1 \longrightarrow \mathbb{RP}^1$ dönüşümü süreklidir.

Sonuç olarak; $f : \mathbb{RP}^1 \longrightarrow S^1$ dönüşümü sürekli, bire-bir, örten ve tersi de sürekli olduğundan bir homeomorfizm olup $\mathbb{RP}^1 \cong S^1$ olarak gösterilir. $\mathbb{RP}^1 \cong S^1$ olduğunu ikinci bir yol kullanarak da gösterebiliriz. Şöyle ki

Boyu 1 olan bir z kompleks sayısını ele alalım. Bir f dönüşümü

$$\begin{aligned} f : S^1 &\longrightarrow S^1 \\ z &\mapsto f(z) = z^2 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Bu şekilde tanımlanan f dönüşümü sürekli ve örtendir. Ama birebirlik şartını sağlamaz. Çünkü;

$$f(z) = f(w) \Longleftrightarrow w = \mp z$$

olup $\mathcal{P}$ tarafından belirlenen bölüm uzayı seçildiğinde f dönüşümü birebirlik şartını da sağlar.Gerçekten de bu dönüşüm f' ile gösterilirse

$$\begin{aligned} f' : \mathbb{RP}^1 &\longrightarrow S^1 \\ [z] &\mapsto f'(z) = z^2 \end{aligned}$$

olup f' birebirlik şartını sağlar. Çünkü; $f'([z]) = f'([w])$ olsun. f' dönüşümünün tanımından $z^2 = w^2$ olur. Buradan $z = \mp w$ olup $[z] = [w]$ dir. Ayrıca; $\forall\ w \in S^1$ için $z = \mp\sqrt{w}$ seçilirse $f'([z]) = w$ olacak şekilde $[z] \in \mathbb{RP}^1$ var olduğundan f' örtendir. Bu dönüşümler için aşağıdaki diyagramı gözönüne alalım.

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, "\mathcal{P}"] \arrow[dr, "f=f'\circ\mathcal{P}"'] & \mathbb{RP}^1 \arrow[d, "f'"] \\ & S^1 \end{tikzcd}$$

Bu diyagramda $f = f' \circ \mathcal{P}$ olup $\mathcal{P}$ bölüm dönüşümü olmak üzere *Lemma 2.3.1* deki

$$f' \circ \mathcal{P} \text{ süreklidir} \Longleftrightarrow f' \text{ süreklidir.}$$

ifadesinden f' dönüşümü süreklidir. f' dönüşümü bire-bir ve örten olduğundan tersi mevcuttur.

$$\begin{aligned} f' : \mathbb{RP}^1 &\longrightarrow S^1 \\ [z] &\mapsto f'(z) = z^2 \end{aligned}$$

dönüşümü için $\mathbb{RP}^1$ kompakt ve S^1 Hausdorff olup kompakt bir uzaydan Hausdorff bir uzaya sürekli bir dönüşüm kapalı olduğundan tersi de süreklidir. O halde; f' dönüşümü sürekli, bire-bir, örten ve tersi de sürekli olduğundan bir homeomorfizmdir.

3.3 $\mathbb{RP}^2$ Projektif Uzayına Farklı Bir Bakış

$\mathbb{RP}^2$ 2-boyutlu reel projektif uzayını tanımlamak için birkaç yol var olup aşağıda bunlardan bazılarına yer verilmiştir.

İlk olarak $\mathbb{RP}^2$, $\mathbb{R}^3 - \{0\}/_\sim$ olup $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ için

$$(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \sim (a\xi^1, a\xi^2, a\xi^3)$$

olmak üzere orjin boyunca uzanan (orjin çıkarılmış) doğruların kümesidir. Bu küme doğal olarak bir yüzeydir. Bu kümede aynı doğru üzerinde herhangi iki noktanın denklik sınıfı aynıdır.

$\mathbb{RP}^2 = S^2/_\sim$ olarak alınırsa S^2 küresinin antipodal noktaları denk kabul edilerek oluşturulan bölüm uzayı olur.

$S^2/_\sim$ bölüm uzayı ekvator üzerinde antipodal noktaları özdeş olan bir üst yarım küreye homeomorftur. Bu üst yarı küre de sınırdaki antipodal noktaları özdeş olan bir birim diske homeomorftur. Bu disk ise karşı köşeleri özdeş ve ters yönlü olan bir dikdörtgene homeomorftur. Bu dikdörtgen ise bir mobiüs şeridinin sınır çemberine birim diskin gönderilmesi ile oluşan uzaya homeomorftur. Böylece; $\mathbb{RP}^2$ bir birim diskin sınır çemberinin bir mobiüs şeridinin sınırına gönderilmesinin sonucunda oluşan bir uzaydır.

3.4 Reel Hopf Dönüşümleri

$S^0 = \{-1, 1\}$ olmak üzere

$$\begin{tikzcd} S^0 \arrow[r, hook, "i"] & S^{n-1} \arrow[d, "\mathcal{P}"] \\ & \mathbb{RP}^{n-1} \end{tikzcd}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm ***Reel Hopf Dönüşümü*** olarak adlandırılır. Özel olarak $n = 2$ için $\mathbb{RP}^1 \cong S^1$ olduğundan

$$\begin{tikzcd} S^0 \arrow[r, hook, "i"] & S^1 \arrow[d, "\mathcal{P}"] \\ & S^1 \end{tikzcd}$$

olarak bulunur. Burada

$$\begin{aligned} h : S^1 &\longrightarrow S^1 \\ z &\mapsto h(z) = z^2 \end{aligned}$$

Hopf dönüşümünü $\{-1, 1\}$ lifi ile ele alacak olursak S^1 çemberi, yine S^1 çemberi üzerinde parametrize edilen $\{-1, 1\}$ noktalarının bir ailesi olarak düşünülebilir.

3.5 $\mathbb{RP}^{n-1}$ Projektif Uzayının Bazı Topolojik Özellikleri

1) $\mathbb{RP}^{n-1}$ *reel projektif uzayı kompakttır.*

$\mathbb{RP}^{n-1}$ reel projektif uzayı için $\mathcal{P} : S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{RP}^{n-1}$ bölüm dönüşümünü ele alalım. S^{n-1} küresi kompakt ve $\mathcal{P}$ bölüm dönüşümü örten ve sürekli olduğundan $\mathbb{RP}^{n-1}$ projektif uzayı da kompakttır.

2) $\mathbb{RP}^{n-1}$ *reel projektif uzayı yol bağlantılıdır.*

$\mathbb{RP}^{n-1}$ reel projektif uzayı için

$$\mathcal{P} : S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{RP}^{n-1}$$

bölüm dönüşümü dikkate alınsın. $\mathcal{P}$ bölüm dönüşümü sürekli ve örten bir dönüşüm olup S^{n-1} küresi yol bağlantılı olduğundan $\mathbb{RP}^{n-1}$ reel projektif uzayı da yol bağlantılı olur.

3) $\mathbb{RP}^{n-1}$ *reel projektif uzayı bağlantılıdır.*

Yol bağlantılı her uzay bağlantılı ve $\mathbb{RP}^{n-1}$ reel projektif uzayı da yol bağlantılı olduğundan bağlantılı uzaydır.

4 KOMPLEKS PROJEKTİF UZAYLAR ($\mathbb{CP}^{n-1}$)

$n \geq 2$ bir tamsayı olsun. $\mathbb{C}^n$ de $(0,\ldots,0)$ elemanı 0 ile gösterilsin. $\mathbb{C}^n$ nin $\mathbb{C}^n - \{0\}$ topolojik alt uzayı üzerinde bir bağıntı aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\zeta \sim \xi \Longleftrightarrow \text{Sıfırdan farklı bir } a \in \mathbb{C} \text{ vardır öyle ki } \zeta = \xi a \text{ dır}$$

Bu şekilde tanımlanan $' \sim '$ bağıntısı $\mathbb{C}^n - \{0\}$ üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Çünkü;

Yansıma : $\xi \sim \xi \Longleftrightarrow$ Sıfırdan farklı $1 \in \mathbb{C}$ vardır öyle ki $\xi = \xi \cdot 1$ dir

Simetri : $\zeta \sim \xi \Longleftrightarrow$ Sıfırdan farklı $a \in \mathbb{C}$ vardır öyle ki $\zeta = \xi a$ dir

$\Longleftrightarrow$ Sıfırdan farklı bir $a^{-1} \in \mathbb{C}$ vardır öyle ki $\xi = \zeta a^{-1}$ dır

$\Longleftrightarrow \xi \sim \zeta$

Geçişme : $\eta \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ olmak üzere

$\zeta \sim \eta \Longleftrightarrow$ Sıfırdan farklı bir $a \in \mathbb{C}$ vardır öyle ki $\zeta = \eta a$

$\eta \sim \xi \Longleftrightarrow$ Sıfırdan farklı bir $b \in \mathbb{C}$ vardır öyle ki $\eta = \xi b$

olsun. O halde;

$\zeta \sim \xi \Longleftrightarrow$ Sıfırdan farklı bir $ab \in \mathbb{C}$ vardır öyle ki $\zeta = \xi(ab)$

elde edilir.

Sonuç olarak; $' \sim '$ bağıntısı yansıma, simetri ve geçişme özelliklerini sağladığından $\mathbb{C}^n - \{0\}$ üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Bu bağıntı $\mathbb{C}^n - \{0\}$ kümesini denklik sınıflarına ayırır. $\xi \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ olmak üzere ξ nin denklik sınıfı

$$\begin{aligned}
[\xi] = [\xi^1,\ldots,\xi^n] &= \{\zeta \in \mathbb{C}^n - \{0\} : \zeta \sim \xi\} \\
&= \{\zeta \in \mathbb{C}^n - \{0\} : \zeta = \xi a \ , \ a \in \mathbb{C} - \{0\}\} \\
&= \{\xi a : a \in \mathbb{C} - \{0\}\} \\
&= \{(\xi^1 a,\ldots,\xi^n a) : a \in \mathbb{C} - \{0\}\}
\end{aligned}$$

olup denklik sınıfları orjinin çıkarılması ile $\mathbb{C}^n$ de orjinden geçen kompleks doğrulardır. $\mathbb{C}^n - \{0\}/_\sim$ bölüm uzayı $\mathbb{CP}^{n-1}$ ile gösterilsin. Yani;
$\mathbb{CP}^{n-1} = \{[\xi] : \xi \in \mathbb{C}^n - \{0\}\}$ kümesi

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q} : \mathbb{C}^n - \{0\} &\rightarrow \mathbb{CP}^{n-1} \\
\xi &\mapsto \mathbb{Q}(\xi) = [\xi]
\end{aligned}$$

izdüşümü ile belirlenen bölüm topolojisine sahiptir. Bu şekilde tanımlanan $\mathbb{CP}^{n-1}$ uzayı ***(n-1) boyutlu kompleks projektif uzay*** olarak adlandırılır.

Kompleks projektif uzayları incelemenin diğer bir yolu vardır ki bu bazı özelliklerin incelenmesini kolaylaştırır.

$S^{2n-1} = \{\xi \in \mathbb{C}^n \; : \; <\xi, \xi> = 1\}$ $(2n-1)$ boyutlu birim küresi ele alınsın. $\mathcal{Q}$ dönüşümünün S^{2n-1} küresine kısıtlanması $\mathcal{P}$ olsun.

$$\mathcal{P} : S^{2n-1} \longrightarrow \mathbb{CP}^{n-1}$$

dönüşümü süreklidir. Çünkü; $\mathcal{Q}$ bölüm dönüşümü sürekli olduğundan kısıtlanması da sürekli olur. Ayrıca; $\mathcal{P}$ örten bir dönüşümdür.$\mathcal{P}$ nin örtenliğini görmek için $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n) \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ olsun. Buradan;

$$<,>: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$$

bilineer formu

$$\begin{aligned} <\xi, \zeta> &= <(\xi^1, \ldots, \xi^n), (\zeta^1, \ldots, \zeta^n)> \\ &= \overline{\xi^1}\zeta^1 + \ldots + \overline{\xi^n}\zeta^n \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı olup

$$\begin{aligned} <\xi, \xi> &= <(\xi^1, \ldots, \xi^n), (\xi^1, \ldots, \xi^n)> \\ &= \overline{\xi^1}\xi^1 + \ldots + \overline{\xi^n}\xi^n \\ &= |\xi^1|^2 + \ldots + |\xi^n|^2 \end{aligned}$$

pozitif bir reel sayıdır. ξ nin normalizeri

$$\zeta = \xi(<\xi, \xi>)^{-\frac{1}{2}}$$

şeklinde tanımlanır.

$$\begin{aligned} <\zeta, \zeta> &= <(\xi(<\xi, \xi>)^{-\frac{1}{2}}, \xi(<\xi, \xi>)^{-\frac{1}{2}}> \\ &= (<\xi, \xi>)^{-\frac{1}{2}} <\xi, \xi> (<\xi, \xi>)^{-\frac{1}{2}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

olup $\zeta \in S^{2n-1}$ dir. Dahası;

$$(<\xi, \xi>)^{-\frac{1}{2}} = a$$

olarak alınırsa $\zeta = \xi a$ olup $\zeta \sim \xi$ dir. O halde; $[\zeta] = [\xi]$ olur ki $\mathcal{Q}(\zeta) = \mathcal{Q}(\xi)$ dir ve $\zeta \in S^{n-1}$ olduğundan $\mathcal{P}(\zeta) = \mathcal{Q}(\xi) = [\xi]$ elde edilir.

Sonuç olarak; $\forall\ [\xi] \in \mathbb{CP}^{n-1}$ için bir $\zeta \in S^{2n-1}$ vardır öyle ki $\mathcal{P}(\zeta) = [\xi]$ olup $\mathcal{P}$ dönüşümü örtendir.

$$\begin{aligned} \eta : \mathbb{C}^n - \{0\} &\to S^{2n-1} \\ \xi &\mapsto \eta(\xi) = \xi(<\xi, \xi>)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $\mathbb{C}^n - \{0\}$ ın elemanlarını normalleştiren η dönüşümü ile sürekli dönüşümlerin diyagramı aşağıdaki gibi verilsin.

$$\begin{tikzcd}
S^{2n-1} \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "\mathcal{P}"'] & \mathbb{C}^n - \{0\} \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\mathcal{Q}"] & S^{2n-1} \arrow[dl, "\mathcal{P}"] \\
& \mathbb{CP}^{n-1} &
\end{tikzcd}$$

$\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n) \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ olmak üzere $\forall\ 1 \leq i \leq n$ için

$$\begin{aligned} f_i : \mathbb{C}^n - \{0\} &\to \mathbb{C} \\ \xi &\mapsto f_i(\xi) = \frac{\xi^i}{(<\xi,\xi>)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı f_i fonksiyonları öklid koordinatlar yardımıyla yazılırsa sürekli olup η dönüşümü süreklidir. Ayrıca; $\mathcal{P}(\zeta) = \mathcal{Q}(\xi)$ ve $\zeta = \eta(\xi)$ olduğundan $\mathcal{P}(\eta(\xi)) = \mathcal{Q}(\xi)$ olup $(\mathcal{P} \circ \eta)(\xi) = \mathcal{Q}(\xi)$ sonucu elde edilir ki $\mathcal{P} \circ \eta = \mathcal{Q}$ bulunur. Yani diyagramın sağ tarafı değişmelidir. i gömme dönüşümü olmak üzere $\mathcal{Q} \circ i = \mathcal{P}$ olup diyagramın sol tarafı değişmelidir. O halde;

$\mathbb{CP}^{n-1}$ in bir U alt kümesi açıktır $\Longleftrightarrow \mathcal{P}^{-1}(U)$, S^{2n-1} içinde açıktır.

Lemma 4.0.1.
$$\begin{aligned} \mathcal{P} : S^{2n-1} &\to \mathbb{CP}^{n-1} \\ \zeta &\mapsto \mathcal{P}(\zeta) = [\xi] \end{aligned}$$

dönüşümünün $\mathbb{CP}^{n-1}$ üzerinde tanımladığı topoloji

$$\tau_{\mathcal{P}} = \{V \subseteq \mathbb{CP}^{n-1} : \mathcal{P}^{-1}(V),\ S^{2n-1} \textit{ içinde açık}\}$$

olmak üzere $\tau_{\mathcal{Q}} = \tau_{\mathcal{P}}$ *dir.*

İspat. $\tau_{\mathcal{Q}} = \tau_{\mathcal{P}}$ eşitliği için $\tau_{\mathcal{Q}} \subset \tau_{\mathcal{P}}$ ve $\tau_{\mathcal{P}} \subset \tau_{\mathcal{Q}}$ olduğunu göstermek yeterlidir. İlk olarak $\tau_{\mathcal{Q}} \subset \tau_{\mathcal{P}}$ olduğunu gösterelim.

$U \in \tau_{\mathcal{Q}}$ açık kümesi verilsin. $U \in \tau_{\mathcal{P}}$ olduğunu göstermeliyiz. $U \in \tau_{\mathcal{Q}}$ olduğundan $\mathcal{Q}^{-1}(U)$, $\mathbb{C}^n - \{0\}$ içinde açıktır. Diğer yandan;

$$\begin{tikzcd}
S^{2n-1} \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "\mathcal{P}"'] & \mathbb{C}^n - \{0\} \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\mathcal{Q}"] & S^{n-1} \arrow[dl, "\mathcal{P}"] \\
& \mathbb{CP}^{n-1} &
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olduğundan $\mathcal{Q} \circ i = \mathcal{P}$ ve $\mathcal{P} \circ \eta = \mathcal{Q}$ dir. $\mathcal{Q} \circ i = \mathcal{P}$ olduğundan

$$\mathcal{P}^{-1}(U) = (\mathcal{Q} \circ i)^{-1}(U) = (i^{-1} \circ \mathcal{Q}^{-1})(U) = i^{-1}(\mathcal{Q}^{-1}(U))$$

olup $\mathcal{P}^{-1}(U) = i^{-1}(\mathcal{Q}^{-1}(U))$ elde edilir. $U \in \tau_{\mathcal{Q}}$ olduğundan $\mathcal{Q}^{-1}(U)$ kümesi $\mathbb{C}^n - \{0\}$ da açık ve i gömme dönüşümü sürekli olduğundan $i^{-1}(\mathcal{Q}^{-1}(U))$, S^{2n-1} de açıktır. Yani; $\mathcal{P}^{-1}(U)$, S^{2n-1} de açıktır. O halde; $U \in \tau_{\mathcal{P}}$ dir. Böylece; $\tau_{\mathcal{P}} \subset \tau_{\mathcal{Q}}$ elde edilir. Şimdi ise $\tau_{\mathcal{P}} \subset \tau_{\mathcal{Q}}$ olduğunu gösterelim.

$V \in \tau_{\mathcal{P}}$ açık kümesi verilsin. $V \in \tau_{\mathcal{Q}}$ olduğunu göstermeliyiz. $V \in \tau_{\mathcal{P}}$ olduğundan $\mathcal{P}^{-1}(V)$, S^{2n-1} içinde açıktır. Diyagramın sağ tarafı değişmeli olduğundan $\mathcal{P} \circ \eta = \mathcal{Q}$ olup

$$\mathcal{Q}^{-1}(V) = (\mathcal{O} \circ \eta)^{-1}(V) = (\eta^{-1} \circ \mathcal{P}^{-1})(V) = \eta^{-1}(\mathcal{P}^{-1}(V))$$

şeklinde yazılabilir. $V \in \tau_{\mathcal{P}}$ olduğundan $\mathcal{P}^{-1}(V)$, S^{2n-1} de açıktır ve η dönüşümü sürekli olduğundan $\eta^{-1}(\mathcal{P}^{-1}(V))$, $\mathbb{C}^n - \{0\}$ da açıktır. O halde; $\mathcal{Q}^{-1}(V)$, $\mathbb{C}^n - \{0\}$ içinde açık olup $V \in \tau_{\mathcal{Q}}$ dur. Böylece; $\tau_{\mathcal{P}} \subset \tau_{\mathcal{Q}}$ elde edilir.

Sonuç olarak; $\tau_{\mathcal{Q}} \subset \tau_{\mathcal{P}}$ ve $\tau_{\mathcal{P}} \subset \tau_{\mathcal{Q}}$ olduğundan $\tau_{\mathcal{Q}} = \tau_{\mathcal{P}}$ dir. O halde; $\mathbb{CP}^{n-1}$ uzayı $\mathcal{P} : S^{2n-1} \to \mathbb{CP}^{n-1}$ ile tanımlanan bölüm topolojisine sahiptir. Yani; $\mathbb{CP}^{n-1}$ bölüm uzayı S^{2n-1} in bir bölüm uzayı olarak da düşünülebilir. ■

S^{2n-1} in bir bölüm uzayı olarak $\mathbb{CP}^{n-1}$ in bu ikinci tanımı $\mathbb{CP}^{n-1}$ in bazı özelliklerinin incelenmesi için daha kullanışlı olacaktır.

$[\xi] \in \mathbb{CP}^{n-1}$ üzerindeki $\mathcal{P}^{-1}([\xi])$ lifi $\{\xi a : a \in \mathbb{C} - \{0\}\}$ kümesinin S^{2n-1} ile arakesitidir. Yani; $\mathcal{Q}$ bölüm dönüşümünün lifleri $[\xi] \in \mathbb{CP}^{n-1}$ için

$$\mathcal{Q}^{-1}([\xi]) = \{\xi a : a \in \mathbb{C} - \{0\}\}$$

olup $\mathcal{P}$ nin lifleri $\zeta \in S^{2n-1}$ için $[\xi] = [\zeta]$ olduğundan

$$\mathcal{P}^{-1}([\zeta])\} = \mathcal{P}^{-1}([\xi]) = \mathcal{Q}^{-1}([\xi]) \cap S^{2n-1}$$

olarak yazılabilir. $\zeta \in S^{2n-1}$ için $<\zeta, \zeta>= 1$ olduğundan

$$<\zeta a, \zeta a>= \bar{a} <\zeta, \zeta> a = \bar{a} \cdot 1 \cdot a = ||a||^2$$

olur. Buradan, $\zeta \in S^{2n-1}$ için

$$\zeta a \in S^{2n-1} \Longleftrightarrow ||a||^2 = 1 \Longleftrightarrow a \in S^1$$

elde edilir. Bu durumda; $\forall\ \zeta \in S^{2n-1}$ için

$$\zeta a \in S^{2n-1} \Longleftrightarrow a \in S^1$$

elde edilir. Böylece; $\forall\ \zeta \in S^{2n-1}$ için

$$\mathcal{P}^{-1}([\zeta]) = \{\zeta a : a \in S^1\}$$

dir. Buradan; herhangi bir $\xi_0 = (z_0^1, \ldots, z_0^n) \in S^{2n-1}$ için

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{-1}([\xi_0]) &= \{\xi_0 a : a \in S^1\} \\ &= \{(z_0^1 a, \ldots, z_0^n a) : a \in S^1\} \end{aligned}$$

olup ξ_0 sabitlenirse S^{2n-1} in bu alt uzayı S^1 çemberine homeomorftur. Yani; $\mathcal{P}^{-1}([\xi_0]) \cong S^1$ dir. Bunu aşağıdaki gibi ispatlayabiliriz.

$\xi_0 \in S^{2n-1}$ olduğundan en az bir $j \in \{1, \ldots, n\}$ için $z_0^j \neq 0$ dır. $z_0^j = \alpha + \beta i$ ve $z^1 = x^1 + y^1 i$, …, $z^n = x^n + y^n i$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C}^n &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (z^1, \ldots, z^n) &\mapsto f(z^1, \ldots, z^n) = (z_0^j)^{-1} \cdot z^j \end{aligned}$$

dönüşümünü göz önüne alalım.

$$
\begin{aligned}
f(z^1,\ldots,z^n)=(z_0^j)^{-1}\cdot z^j &= \tfrac{\overline{z_0^j}}{|z_0^j|^2}\cdot z^j \\
&= \tfrac{\alpha-\beta i}{\alpha^2+\beta^2}\cdot x^j+y^j i \\
&= \tfrac{\alpha x^j+\beta y^j+(\alpha y^j-\beta x^j)i}{\alpha^2+\beta^2} \\
&= \tfrac{\alpha x^j+\beta y^j}{\alpha^2+\beta^2}+\tfrac{(\alpha y^j-\beta x^j)}{\alpha^2+\beta^2}\cdot i
\end{aligned}
$$

olup açık olarak

$$f(z^1,\ldots,z^n)=\frac{\alpha x^j+\beta y^j}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{(\alpha y^j-\beta x^j)}{\alpha^2+\beta^2}\cdot i$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca; f fonksiyonu süreklidir. $\mathbb{C}^n$ ile $\mathbb{R}^{2n}$ ve $\mathbb{C}$ ile $\mathbb{R}^2$ denk tutularak bu fonksiyonun sürekliliği şu şekilde gösterilebilir.

$$h_1:\mathbb{C}^n\longrightarrow\mathbb{R}^{2n}\quad,\quad h_2:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{C}$$

doğal homeomorfizmler olmak üzere

$$
\begin{tikzcd}
(x^1+y^1i,\ldots,x^j+y^ji,\ldots,x^n+y^ni) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h_1"'] & \frac{\alpha x^j+\beta y^j}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{(\alpha y^j-\beta x^j)}{\alpha^2+\beta^2}\cdot i \\
(x^1,y^1,\ldots,x^j,y^j,\ldots,x^n,y^n) \arrow[r, "k"'] & (x^j,y^j) \arrow[u, "h_2"']
\end{tikzcd}
$$

şeklinde tanımlanan h_1, h_2 ve k dönüşümleri sürekli olduğundan $h_2\circ k\circ h_1=f$ süreklidir. Bu durumda; bu dönüşümün $\mathcal{P}^{-1}([\xi_0])$ a kısıtlanmışı da sürekli olup $(z_0^1a,\ldots,z_0^na)$ noktasını a ya resmeder. Gerçekten;

$$
\begin{aligned}
f|_{\mathcal{P}^{-1}([\xi_0])}:\mathcal{P}^{-1}([\xi_0]) &\longrightarrow \mathbb{C} \\
\xi_0 a &\mapsto f|_{\mathcal{P}^{-1}([\xi_0])}(\xi_0 a)=(z_0^j)^{-1}\cdot(z_0^j a)=a
\end{aligned}
$$

olur ki $a\in S^1$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
f|_{\mathcal{P}^{-1}([\xi_0])}:\mathcal{P}^{-1}([\xi_0]) &\longrightarrow S^1 \\
\xi_0 a &\mapsto a
\end{aligned}
$$

olarak tanımlıdır. Bu dönüşüm bire-birdir. Gerçekten;

$$f|_{\mathcal{P}^{-1}([\xi_0])}(\xi_0 a) = f|_{\mathcal{P}^{-1}([\xi_0])}(\xi_0 b)$$

olsun. Buradan $a = b$ olup $\xi_0 a = \xi_0 b$ elde edilir. Ayrıca; bu dönüşüm örtendir. Çünkü; $\forall\ a \in S^1$ için $f|_{\mathcal{P}^{-1}([\xi_0])}(\xi_0 a) = a$ olacak şekilde $\xi_0 a \in \mathcal{P}^{-1}([\xi_0]$ vardır. Bu dönüşüm bire-bir ve örten olduğundan tersi mevcuttur. Bu dönüşümün tersi $a \in S^1$ için

$$a \longmapsto (z_0^1 a, \ldots, z_0^n a)$$

olup süreklidir. Çünkü; $a = s + ti \in \mathbb{C}$ olarak yazılırsa

$$(s,t) \longmapsto (x_0^1 s - y_0^1 t, x_0^1 t + y_0^1 s, \ldots, x_0^n s - y_0^n t, x_0^n t + y_0^n s)$$

dönüşümü $\mathcal{P}([\xi_0] \longmapsto S^1$ dönüşümünün tersi olup $\mathbb{R}^2$ den $\mathbb{R}^{2n}$ ye sürekli bir dönüşüm tanımlar. Böylece;

$$(z_0^1 a, \ldots, z_0^n a) \longmapsto a$$

dönüşümü $\mathcal{P}^{-1}([\xi_0]$ kümesini S^1 çemberinin tamamına resmeden bir homeomorfizm olup $\mathcal{P}^{-1}([\xi_0] \cong S^1$ dir. Bu durumda; $\mathbb{CP}^{n-1}$ projektif uzayı S^{2n-1} küresinin S^1 çemberlerinin ayrık bir birleşimi olarak ayrıştığı ve her bir S^1 in bir nokta olarak düşünüldüğü bir uzay olarak alınabilir.

Lemma 4.0.2. *$\mathcal{P} : S^{2n-1} \to \mathbb{CP}^{n-1}$ bölüm dönüşümü açıktır.*

İspat. $U \subset S^{2n-1}$ açık olsun. $\mathcal{P}$ bölüm dönüşümünün açık olduğunu göstermek için $\mathcal{P}(U)$ nun $\mathbb{CP}^{n-1}$ de açık olduğunu göstermeliyiz. $\mathcal{P}$ bölüm dönüşümü olduğundan $\mathcal{P}(U)$ nun açık olması için $\mathcal{P}^{-1}(\mathcal{P}(U))$ nun S^{2n-1} de açık olması yeterlidir.

$$\mathcal{P}^{-1}(\mathcal{P}(U)) = \bigcup_{a \in S^1} Ua$$

olup Ua lar açıktır. Çünkü;

$$\begin{aligned} \rho_a : S^{2n-1} &\longrightarrow S^{2n-1} \\ \xi &\mapsto \xi a \end{aligned}$$

şeklinde bir dönüşüm tanımlayalım. Bu dönüşüm sürekli olup

$$\begin{aligned} \rho_{a^{-1}} : S^{2n-1} &\longrightarrow S^{2n-1} \\ \xi &\mapsto \xi a^{-1} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı dönüşüm

$$(\rho_a \circ \rho_{a^{-1}})(\xi) = \rho_a(\xi a^{-1}) = (\xi a^{-1})a = \xi$$
$$(\rho_{a^{-1}} \circ \rho_a)(\xi) = \rho_{a^{-1}}(\xi a) = (\xi a)a^{-1} = \xi$$

olduğundan ρ_a dönüşümünün tersidir ve sürekli bir dönüşümdür. Ayrıca; ρ_a dönüşümü bire-bir ve örtendir. O halde; ρ_a dönüşümü bir homeomorfizm olup U, S^{2n-1} de açık ise $a \in S^1$ için Ua da S^{2n-1} de açıktır. Açık kümelerin keyfi birleşimi açık olduğundan $\bigcup_{a\in S^1} Ua$ açıktır. Böylece; $\mathcal{P}^{-1}(\mathcal{P}(U))$, S^{2n-1} de açık olup $\mathcal{P}$ bölüm dönüşümü olduğundan $\mathcal{P}(U)$, $\mathbb{CP}^{n-1}$ de açıktır. O halde; $\mathcal{P}$ bölüm dönüşümü açıktır. ■

Lemma 4.0.3. $\mathbb{CP}^{n-1}$ *kompleks projektif uzayı Hausdorff'dur.*

İspat. $\xi_0 \in S^{2n-1}$ seçilip sabitlensin.

$$\begin{aligned} \rho : \mathbb{CP}^{n-1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ [\zeta] &\mapsto \rho([\zeta]) = 1 - |\langle \zeta, \xi_0 \rangle|^2 \end{aligned}$$

şeklinde bir dönüşüm tanımlansın. Burada; $\mathbb{CP}^{n-1}$ uzayı S^{2n-1} in bir bölüm uzayı olarak ele alındığından $\zeta \in S^{2n-1}$ dir. Ayrıca; ρ dönüşümü iyi tanımlıdır. Çünkü; $\zeta', \zeta \in S^{15}$ için $[\zeta'] = [\zeta]$ olsun. Bu durumda $a \in S^1$ olan $a \in \mathbb{C}$ için $\zeta' = \zeta a$ dır. Buradan;

$$\begin{aligned} |<\zeta', \xi_0>|^2 = |<\zeta a, \xi_0>|^2 &= |\bar{a} <\zeta, \xi_0>|^2 \\ &= |\bar{a}|^2 |<\zeta, \xi_0>|^2 \\ &= |<\zeta, \xi_0>|^2 \end{aligned}$$

elde edilir. O halde;

$$|<\zeta', \xi_0>|^2 = |<\zeta, \xi_0>|^2$$
$$1 - |<\zeta', \xi_0>|^2 = 1 - |<\zeta, \xi_0>|^2$$
$$\rho([\zeta']) = \rho([\zeta])$$

olup ρ dönüşümü iyi tanımlıdır. Ayrıca;

$$\rho([\xi_0]) = 1 - | < \xi_0, \xi_0 > |^2 = 1 - 1 = 0$$

dır. Bu durumda iddia:

$$[\zeta] \neq [\xi_0] \text{ iken } \rho([\zeta]) \neq 0 \text{ dır.}$$

Bunu göstermek için aksine $\rho([\zeta]) = 0$ olsun. Buradan $| < \zeta, \xi_0 > |^2 = 1$ olup

$$< \xi_0 - \zeta < \zeta, \xi_0 >, \xi_0 - \zeta < \zeta, \xi_0 >>= 0$$

eşitliği vardır. Çünkü;

$< \xi_0 - \zeta < \zeta, \xi_0 >, \xi_0 - \zeta < \zeta, \xi_0 >>=< \xi_0, \xi_0 - \zeta < \zeta, \xi_0 >>$

$- < \zeta < \zeta, \xi_0 >, \xi_0 - \zeta < \zeta, \xi_0 >>$

$=< \xi_0, \xi_0 > - < \xi_0, \zeta >< \zeta, \xi_0 > - \overline{< \zeta, \xi_0 >} < \zeta, \xi_0 >$

$+ \overline{< \zeta, \xi_0 >} < \zeta, \zeta >< \zeta, \xi_0 >$

$= 1 - 1$

$= 0$

elde edilir ki

$$|\xi_0 - \zeta < \zeta, \xi_0 >^2 = 0$$

olup $\xi_0 = \zeta < \zeta, \xi_0 >$ bulunur. $< \zeta, \xi_0 >= a$ olarak alınırsa $\xi_0 = \zeta a$ olup $[\xi_0] = [\zeta]$ bulunur. Bu ise $[\xi_0] \neq [\zeta]$ olması ile çelişir. Bu çelişkiye $\rho([\zeta]) = 0$ varsayımı ile ulaşıldığından $\rho([\zeta]) \neq 0$ dır. Böylece; $[\xi_0] \neq [\zeta]$ olması $\rho([\xi_0]) \neq \rho([\zeta])$ olmasını gerektirir. Ayrıca; ρ dönüşümü sürekli bir dönüşümdür. Gerçekten; S^{2n-1} küresinden $\mathbb{R}$ ye, $\mathcal{P}$ bölüm dönüşümü olmak üzere

$$\begin{array}{rcl} \rho \circ \mathcal{P} : S^{2n-1} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ [\zeta] & \mapsto & (\rho \circ \mathcal{P})([\zeta]) = 1 - | \langle \zeta, \xi_0 \rangle |^2 \end{array}$$

şeklinde tanımlı dönüşüm sürekli olup *Lemma 2.3.1* deki bölüm dönüşümünden kalkan bir ρ dönüşümü için

$$\rho \text{ süreklidir} \Longleftrightarrow \rho \circ \mathcal{P} \text{ süreklidir.}$$

ifadesinden ρ dönüşümü süreklidir.

Sonuç olarak ; ρ dönüşümü iyi tanımlı, sürekli ve $[\xi_0] \neq [\zeta]$ iken $\rho([\xi_0]) \neq \rho([\zeta])$ olup bu bilgileri kullanarak $\mathbb{CP}^{n-1}$ uzayının Hausdorff olduğunu gösterebiliriz.

$\mathbb{R}$ Hausdorff olduğundan farklı herhangi iki noktanın ayrık açık komşulukları mevcuttur. O halde; $\rho([\xi_0])$ noktasını içeren I_{ξ_0} ve $\rho([\zeta])$ yı içeren I_ζ açık aralıkları vardır öyle ki $I_{\xi_0} \cap I_\zeta = \emptyset$ dir. ρ dönüşümü sürekli olduğundan $U_{\xi_0} = \rho^{-1}(I_{\xi_0})$ ve $U_\zeta = \rho^{-1}(I_\zeta)$ kümeleri $\mathbb{CP}^{n-1}$ de açık olup bu kümeler ayrıktır. Aynı zamanda $[\xi_0] \in U_{\xi_0}$ ve $[\zeta] \in U_\zeta$ dır. Böylece; $\mathbb{CP}^{n-1}$ uzayında farklı herhangi iki noktanın ayrık açık komşulukları mevcut olduğundan bu uzay Hausdorff'dur. ■

Lemma 4.0.4. $\mathbb{CP}^{n-1}$ *kompleks projektif uzayı yerel öklidyendir*

İspat. $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n) \in S^{2n-1}$ olsun. Bu durumda en az bir $k = 1, \ldots, n$ için $\xi^k \neq 0$ dır. Buradan;

$$\xi^k \neq 0 \Longleftrightarrow ||a||^2 = 1 \text{ olan } \forall a \in \mathbb{C} \text{ için } \xi^k a \neq 0$$

olup her bir $k = 1, \ldots, n$ için

$$U_k = \{[\xi] \in \mathbb{CP}^{n-1} : \xi^k \neq 0\}$$

olsun. Bu durumda;

$$\mathcal{P}^{-1}(U_k) = \{\xi a \in S^{2n-1} : \xi^k \neq 0 \,,\ a \in S^1\} \subset S^{2n-1}$$

olur ki bu küme S^{2n-1} de açıktır. $k = 1, \ldots, n$ için φ_k dönüşümü

$$\begin{aligned} \varphi_k : U_k &\to \mathbb{C}^{n-1} \\ [\xi] &\mapsto \varphi_k([\xi]) = \varphi_k([\xi^1], \ldots, [\xi^n]) \\ &\qquad\qquad = (\xi^1(\xi^k)^{-1}, \ldots, \hat{1}, \ldots, \xi^n(\xi^k)^{-1}) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Burada $\hat{1}$ ifadesi k. girdideki 1 in yok sayıldığı anlamındadır. Bu şekilde tanımlanan φ_k dönüşümü bir homeomorfizm dönüşümüdür. Şimdi bunu gösterelim.

İyi tanımlılık : $[\zeta] = [\xi]$ olsun. $\xi^k \neq 0$ ise $\zeta^k \neq 0$ dır. Ayrıca; $\zeta = \xi a$ olduğundan $\zeta^k = \xi^k a$ dır. Dolayısıyla $(\zeta^k)^{-1} = a^{-1}(\xi^k)^{-1}$ olur ki her bir $i = 1, \ldots, n$ için

$$\zeta^i(\zeta^k)^{-1} = (\xi^i a)a^{-1}(\xi^k)^{-1} = \xi^i(\xi^k)^{-1}$$

elde edilir. Buradan;

$$\zeta^i(\zeta^k)^{-1} = \xi^i(\xi^k)^{-1}$$

olduğundan $\varphi_k([\zeta]) = \varphi_k([\xi])$ olup φ_k *iyi tanımlıdır* denir.

Örtenlik : Bir $k = 1, \ldots, n$ seçilip sabitlensin.

$$z = (z_1, \ldots, z_{k-1}, z_k, \ldots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$$

olmak üzere k. girdiye 1 yazılırsa

$$\xi_0 = (z_1, \ldots, z_{k-1}, 1, z_k, \ldots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^n - \{0\}$$

olacak şekilde ξ_0 elemanı vardır. η dönüşümü hatırlanacak olunursa;

$$\begin{aligned} \eta : \mathbb{C}^n - \{0\} &\rightarrow S^{2n-1} \\ \xi &\mapsto \eta(\xi) = \xi(<\xi, \xi>)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

olup aşağıdaki diyagram çizilebilir.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^n - \{0\} \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "\mathcal{Q}"'] & S^{2n-1} \arrow[d, "\mathcal{P}"] \\ & \mathbb{CP}^{n-1} \end{tikzcd}$$

$$\eta(\xi_0) = \eta(z_1, \ldots, z_{k-1}, 1, z_k, \ldots, z_{n-1}) = \xi_0(<\xi_0, \xi_0>)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{z_1}{(<\xi_0,\xi_0>)^{\frac{1}{2}}}, \ldots, \frac{1}{(<\xi_0,\xi_0>)^{\frac{1}{2}}}, \ldots, \frac{z_{n-1}}{(<\xi_0,\xi_0>)^{\frac{1}{2}}} \right)$$

olup $\eta(\xi_0)$ ın k. girdisini $(\eta(\xi_0))^k$ ile gösterirsek

$$(\eta(\xi_0))^k = \frac{1}{(<\xi_0, \xi_0>)^{\frac{1}{2}}}$$

olup sıfırdan farklıdır. O halde; $[\eta(\xi_0)] \in U_k$ dır. Ayrıca;

$$((\eta(\xi_0))^k)^{-1} = \left(\frac{1}{(<\xi_0, \xi_0>)^{\frac{1}{2}}} \right)^{-1} = (<\xi_0, \xi_0>)^{\frac{1}{2}}$$

olup

$\varphi_k([\eta(\xi_0)]) = \varphi_k(\eta(z_1,\dots,1,\dots,z_{n-1}))$

$= \left(\frac{z_1}{(<\xi_0,\xi_0>)^{\frac{1}{2}}}((\eta(\xi_0))^k)^{-1},\dots,\frac{1}{(<\xi_0,\xi_0>)^{\frac{1}{2}}}((\eta(\xi_0))^k)^{-1},\dots,\frac{z_{n-1}}{(<\xi_0,\xi_0>)^{\frac{1}{2}}}((\eta(\xi_0))^k)^{-1}\right)$

$= \left(\frac{z_1}{(<\xi_0,\xi_0>)^{\frac{1}{2}}}(<\xi_0,\xi_0>)^{\frac{1}{2}},\dots,\frac{1}{(<\xi_0,\xi_0>)^{\frac{1}{2}}}(<\xi_0,\xi_0>)^{\frac{1}{2}},\dots,\frac{z_{n-1}}{(<\xi_0,\xi_0>)^{\frac{1}{2}}}(<\xi_0,\xi_0>)^{\frac{1}{2}}\right)$

$= (z_1,\dots,\hat{1},\dots,z_n)$

$= (z_1,\dots,z_n)$ elde edilir.

Sonuç olarak; $\forall\ z = (z_1,\dots,z_{k-1},z_k,\dots,z_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$ için $\varphi_k([\eta(\xi_0)]) = z$ olacak şekilde $[\eta(\xi_0)] \in U_k$ var olduğundan φ_k dönüşümü *örtendir.*

Birebirlik : $[\zeta], [\xi] \in U_k$ olmak üzere $\varphi_k([\zeta]) = \varphi_k([\xi])$ olsun. $[\zeta] = [\xi]$ olduğu gösterilirse φ_k dönüşümü bire-birdir denir. $\varphi_k([\zeta]) = \varphi_k([\xi])$ ise

$$\begin{aligned} \varphi_k([\zeta^1,\dots,\zeta^k,\dots,\zeta^n]) &= \varphi_k([\xi^1,\dots,\xi^k,\dots,\xi^n]) \\ (\zeta^1(\zeta^k)^{-1},\dots,\hat{1},\dots,\zeta^n(\zeta^k)^{-1}) &= (\xi^1(\xi^k)^{-1},\dots,\hat{1},\dots,\xi^n(\xi^k)^{-1}) \end{aligned}$$

yazılır. Bu eşitlikten

$$\begin{aligned} \zeta^1(\zeta^k)^{-1} &= \xi^1(\xi^k)^{-1} \\ \vdots \quad &\quad \vdots \\ \zeta^n(\zeta^k)^{-1} &= \xi^n(\xi^k)^{-1} \end{aligned}$$

olup buradan;

$$\begin{aligned} \zeta^1 &= \xi^1(\xi^k)^{-1}\zeta^k \\ \vdots \quad &\quad \vdots \\ \zeta^n &= \xi^n(\xi^k)^{-1}\zeta^k \end{aligned}$$

bulunur. Böylece;

$$(\zeta^1,\dots,\zeta^k,\dots,\zeta^n) = (\xi^1,\dots,\xi^k,\dots,\xi^n)(\xi^k)^{-1}\zeta^k$$

elde edilir ki $||\zeta|| = ||\xi|| = 1$ olduğundan $|(\xi^k)^{-1}\zeta^k| = 1$ olup $(\xi^k)^{-1}\zeta^k \in S^1$ dir. O halde; $\zeta \sim \xi$ olup $[\zeta] = [\xi]$ dir. Böylece φ_k dönüşümü *bire-birdir.*

Süreklilik : φ_k dönüşümünün sürekli olduğunu göstermek için *Lemma* 2.3.1

ile $\varphi_k \circ \mathcal{P} : \mathcal{P}^{-1}(U_k) \longrightarrow \mathbb{CP}^{n-1}$ dönüşümünün sürekliliğinden faydalanacağız.

$$\begin{tikzcd} S^{2n-1} \arrow[r, "\mathcal{P}"] \arrow[dr, "\varphi_k\circ\mathcal{P}"'] & U_k \arrow[d, "\varphi_k"] \\ & \mathbb{C}^{n-1} \end{tikzcd}$$

U_k üzerindeki alt uzay topolojisi $\mathcal{P} : \mathcal{P}^{-1}(U_k) \longrightarrow U_k$ dönüşümü ile belirlenen bölüm topolojisi ile denktir.

$$\varphi_k \circ \mathcal{P} : S^{2n-1} \longrightarrow \mathbb{C}^{n-1}$$

$$\begin{aligned}(\varphi_k \circ \mathcal{P})(\xi^1, \ldots, \xi^k, \ldots, \xi^n) &= (\xi^1, \ldots, \xi^k, \ldots, \xi^n)(\varphi_k(\mathcal{P}(\xi^1, \ldots, \xi^k, \ldots, \xi^n)\\ &= \varphi_k[\xi^1, \ldots, \xi^k, \ldots, \xi^n]\\ &= (\xi^1(\xi^k)^{-1}, \ldots, \hat{1}, \ldots, \xi^n(\xi^k)^{-1})\end{aligned}$$

olup bu dönüşüm bir öklidyen uzaydan diğerine sürekli bir dönüşüm olduğundan $\varphi_k \circ \mathcal{P}$ süreklidir. Diğer yandan; *Lemma* 2.3.1 deki

$$\varphi_k \quad \text{süreklidir} \Longleftrightarrow \varphi_k \circ \mathcal{P} \quad \text{süreklidir}$$

ifadesinden φ_k dönüşümünün sürekli olduğu söylenir. φ_k dönüşümü bire-bir ve örten olduğundan tersi mevcuttur.

$$\varphi_k^{-1} : \mathbb{C}^{n-1} \longrightarrow U_k \subset \mathbb{CP}^{n-1}$$

olup $(z_1, \ldots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$ olmak üzere $\xi_0 = (z_1, \ldots, 1, \ldots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ olacak şekilde ξ_0 elemanı vardır. 1 elemanı k. girdidedir. Buradan;

$$\varphi_k^{-1}(z_1, \ldots, z_{n-1}) = \left[\frac{z_1}{||\xi_0||}, \ldots, \frac{1}{||\xi_0||}, \ldots, \frac{z_{n-1}}{||\xi_0||}\right]$$

olup sürekli üç dönüşüm

$$\mathbb{C}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{C}^n - \{0\} \xrightarrow{\eta} S^{2n-1} \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathbb{CP}^{n-1}$$

şeklinde tanımlanabilir. φ_k^{-1} bu üç sürekli dönüşümün bileşkesi olduğundan sürekli bir dönüşümdür.

Sonuç olarak; φ_k dönüşümü bire-bir, örten, sürekli ve tersi de sürekli olduğundan bir homeomorfizmdir. Böylece; $\mathbb{CP}^{n-1}$ in her noktasının bir U_k açık komşuluğu ile $\mathbb{C}^{n-1}(\mathbb{C}^{n-1} \cong \mathbb{R}^{2n-2})$ uzayı arasında bir φ_k homeomorfizmi var olduğundan $\mathbb{CP}^{n-1}$ kompleks projektif uzayı $(2n-2)$ boyutlu *yerel öklidyen* bir uzaydır. ■

Lemma 4.0.5. $\mathbb{CP}^{n-1}$ *kompleks projektif uzayı* 2. *sayılabilir uzaydır.*

İspat. $k = 1, \ldots, n$ için $\xi^k \neq 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \varphi_k : U_k &\rightarrow \mathbb{C}^{n-1} \\ [\xi] &\mapsto \varphi_k([\xi]) = \varphi_k([\xi^1], \ldots, [\xi^n]) \\ &\qquad = (\xi^1(\xi^k)^{-1}, \ldots, \hat{1}, \ldots, \xi^n(\xi^k)^{-1}) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan φ_k dönüşümleri homeomorfizm dönüşümleri olduğundan $U_k \cong \mathbb{C}^{n-1}$ olarak gösterilebilir. $\mathbb{C}^{n-1} \cong \mathbb{R}^{2n-2}$ ve $\mathbb{R}^{2n-2}$ öklid uzayı 2. sayılabilir uzay olup 2. sayılabilir uzay olma topolojik bir özellik yani homeomorfizm altında korunan bir özellik olduğundan $\mathbb{C}^{n-1}$ de 2. sayılabilir uzaydır. Benzer olarak; $k = 1, \ldots, n$ için U_k lar da 2. sayılabilir uzaydır. U_k lar 2. sayılabilir uzay olduğundan sayılabilir bir $\mathcal{B}_k$ tabanına sahiptirler. Böylece;

$$\bigcup_{i=1}^{n} U_k = \mathbb{CP}^{n-1}$$

olup

$$\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{B}_k$$

koleksiyonu $\mathbb{CP}^{n-1}$ için bir tabandır. Gerçekten; $U \subset \mathbb{CP}^{n-1}$ açık olsun.

$$U = U \cap \mathbb{CP}^{n-1} = U \cap \textstyle\bigcup_{i=1}^{n} U_k = (U \cap U_1) \cup \cdots \cup (U \cap U_n)$$

olup U alt kümesi $\mathcal{B}$ daki elemanların keyfi birleşimi şeklinde yazılabilir. Böylece; $\mathcal{B}$ koleksiyonu $\mathbb{CP}^{n-1}$ için bir taban olup sayılabilir sayıdaki sonlu kümenin birleşimi olduğundan sayılabilirdir. $\mathbb{CP}^{n-1}$ uzayı sayılabilir bir $\mathcal{B}$ tabanına sahip olduğundan 2. sayılabilir uzaydır. ■

Sonuç 4.0.6. $\mathbb{CP}^{n-1}$ *kompleks projektif uzayı Hausdorff, yerel öklidyen ve* 2. *sayılabilir uzay olduğundan topolojik bir manifolddur.*

4.1 $\mathbb{CP}^{n-1}$ Uzayının Kart Dönüşümleri ve Örtüşme Fonksiyonları

$\mathbb{CP}^{n-1}$ uzayı topolojik bir manifold olup bu uzay için kart dönüşümleri ve örtüşme fonksiyonları yazılabilir. $k = 1, \ldots, n$ olmak üzere

$$U_k = \{[\xi] \in \mathbb{CP}^{n-1} : \xi^k \neq 0\}$$

açığı ve

$$\begin{aligned} \varphi_k : U_k &\rightarrow \mathbb{C}^{n-1} \\ [\xi] &\mapsto \varphi_k([\xi]) = \varphi_k([\xi^1], \ldots, [\xi^n]) \\ &\qquad = (\xi^1(\xi^k)^{-1}, \ldots, \hat{1}, \ldots, \xi^n(\xi^k)^{-1}) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan homeomorfizm dönüşümü ile (U_k, φ_k) çifti bir kart olur. $\mathbb{CP}^{n-1}$ üzerinde herhangi iki kart (U_1, φ_1) ve (U_2, φ_2) olsun. $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ veya $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ iken

$$\varphi_1 \circ {\varphi_2}^{-1} : \varphi_2(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \varphi_1(U_1 \cap U_2)$$

$$\varphi_2 \circ {\varphi_1}^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

örtüşme fonksiyonları sürekli ve her mertebeden türevlenebilir ise bu kartlara C^∞**- *uyumlu*** denir. $k = 1, \ldots, n$ kartları için örtüşme fonksiyonları aşağıdaki gibi bulunabilir. $1, \ldots, n$ arasından $i < j$ olacak şekilde i ve j seçilip sabitlensin. Bu durumda;

$$\varphi_i \circ {\varphi_j}^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$$

$$\begin{aligned} (\varphi_i \circ {\varphi_j}^{-1})(\xi^1, \ldots, \xi^i, \ldots, \xi^j, \ldots, \xi^{n-1}) &= \varphi_i({\varphi_j}^{-1}(\xi^1, \ldots, \xi^i, \ldots, \xi^j, \ldots, \xi^{n-1})) \\ &= \varphi_i\,[\xi^1, \ldots, \xi^i, \ldots, 1, \xi^j, \ldots, \xi^{n-1}] \\ &= \varphi_i \left[\tfrac{\xi^1}{\sqrt{1+||\xi_0||^2}}, \ldots, \tfrac{\xi^i}{\sqrt{1+||\xi_0||^2}}, \ldots, \tfrac{1}{\sqrt{1+||\xi_0||^2}}, \ldots, \tfrac{\xi^{n-1}}{\sqrt{1+||\xi_0||^2}} \right] \\ &= (\tfrac{\xi^1}{\xi^i}, \ldots, \hat{1}, \ldots, \tfrac{1}{\xi^i}, \ldots, \tfrac{\xi^{n-1}}{\xi^i}) \\ &= (\tfrac{\xi^1}{\xi^i}, \ldots, \tfrac{1}{\xi^i}, \ldots, \tfrac{\xi^{n-1}}{\xi^i}) \end{aligned}$$

ile

$$\varphi_j \circ {\varphi_i}^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

$$\begin{aligned}(\varphi_j \circ \varphi_i{}^{-1})(\xi^1,\ldots,\xi^i,\ldots,\xi^j,\ldots,\xi^{n-1}) &= \varphi_j(\varphi_i{}^{-1}(\xi^1,\ldots,\xi^i,\ldots,\xi^j,\ldots,\xi^{n-1}))\\ &= \varphi_j\,[\xi^1,\ldots,1,\xi^i,\ldots,\xi^j,\ldots,\xi^{n-1}]\\ &= \varphi_j\left[\tfrac{\xi^1}{\sqrt{1+\|\xi_0\|^2}},\ldots,\tfrac{1}{\sqrt{1+\|\xi_0\|^2}},\ldots,\tfrac{\xi^j}{\sqrt{1+\|\xi_0\|^2}},\ldots,\tfrac{\xi^{n-1}}{\sqrt{1+\|\xi_0\|^2}}\right]\\ &= (\tfrac{\xi^1}{\xi^{j-1}},\ldots,\tfrac{1}{\xi^{j-1}},\ldots,\hat{1},\ldots,\tfrac{\xi^{n-1}}{\xi^{j-1}})\\ &= (\tfrac{\xi^1}{\xi^{j-1}},\ldots,\tfrac{1}{\xi^{j-1}},\ldots,\tfrac{\xi^{n-1}}{\xi^{j-1}})\end{aligned}$$

şeklinde tanımlı $(\varphi_i \circ \varphi_j{}^{-1})$ ve $(\varphi_j \circ \varphi_i{}^{-1})$ örtüşme dönüşümleri sürekli ve her mertebeden kısmi türevleri mevcut olduğundan (U_i,φ_i) ve (U_j,φ_j) kartları C^∞- uyumludur. $\mathbb{CP}^{n-1}$ üzerinde ***diferansiyellenebilir bir atlas***, herhangi ikisinin C^∞- uyumlu olduğu ve $\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha = \mathbb{CP}^{n-1}$ olacak şekildeki kartların $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ ailesi olduğundan $\mathcal{A} = \{(U_k,\varphi_k)\}_{k=1,\ldots,n}$ ailesi $\mathbb{CP}^{n-1}$ için $(2n-2)$ boyutlu diferansiyellenebilir bir atlastır.

$n = 2$ durumunda örtüşme fonksiyonları özel bir öneme sahiptir. $n = 2$ için $\mathbb{CP}^1$ üzerinde (U_1,φ_1) ve (U_2,φ_2) kartları mevcut olup kart dönüşümleri

$$U_1 = \{\left[\xi^1,\xi^2\right] \in \mathbb{CP}^1 : \xi^1 \neq 0\}$$

$$U_2 = \{\left[\xi^1,\xi^2\right] \in \mathbb{CP}^1 : \xi^2 \neq 0\}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}\varphi_1 : U_1 &\longrightarrow \mathbb{C}\\ [\xi^1,\xi^2] &\mapsto \varphi_1([\xi^1,\xi^2]) = (\hat{1},\xi^2(\xi^1)^{-1}) = \xi^2(\xi^1)^{-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_1^{-1} : \mathbb{C} &\longrightarrow U_1\\ z &\mapsto \varphi_1^{-1}(z) = [1,z] = \left[\tfrac{1}{\sqrt{1+z^2}},\tfrac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right]\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\varphi_2 : U_2 &\longrightarrow \mathbb{C}\\ [\xi^1,\xi^2] &\mapsto \varphi_1([\xi^1,\xi^2]) = (\xi^1(\xi^2)^{-1},\hat{1}) = \xi^1(\xi^2)^{-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_2^{-1} : \mathbb{C} &\longrightarrow U_2\\ z &\mapsto \varphi_2^{-1}(z) = [z,1] = \left[\tfrac{z}{\sqrt{1+z^2}},\tfrac{1}{\sqrt{1+z^2}}\right]\end{aligned}$$

şeklinde tanımlı olup örtüşme fonksiyonları

$$\begin{aligned} \varphi_1 \circ {\varphi_2}^{-1} : \varphi_2(U_1 \cap U_2) &\longrightarrow \varphi_1(U_1 \cap U_2) \\ z &\mapsto (\varphi_1 \circ {\varphi_2}^{-1})(z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\varphi_1 \circ {\varphi_2}^{-1})(z) &= \varphi_1({\varphi_2}^{-1}(z)) \\ &= \varphi_1([z, 1]) \\ &= (zz^{-1}, z^{-1}) \\ &= (\hat{1}, z^{-1}) \\ &= z^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2 \circ {\varphi_1}^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) &\longrightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2) \\ z &\mapsto (\varphi_2 \circ {\varphi_1}^{-1})(z) = \varphi_2({\varphi_1}^{-1}(z)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\varphi_2 \circ {\varphi_1}^{-1})(z) &= \varphi_2({\varphi_1}^{-1}(z)) \\ &= \varphi_2([1, z]) \\ &= (z^{-1}, zz^{-1}) \\ &= (z^{-1}, \hat{1}) \\ &= z^{-1} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Bu durumda;

$$(\varphi_1 \circ {\varphi_2}^{-1})(z) = z^{-1} = (\varphi_2 \circ {\varphi_1}^{-1})(z) \quad , \quad z \in \mathbb{C} - \{0\}$$

olup

$$\varphi_1(U_1 \cap U_2) = \varphi_2(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C} - \{0\}$$

olarak bulunur.

$n = 3$ durumunda $\mathbb{CP}^2$ üzerinde (U_1, φ_1), (U_2, φ_2) ve (U_3, φ_3) kartları mevcut olup kart dönüşümleri

$$U_1 = \{\left[\xi^1, \xi^2, \xi^3\right] \in \mathbb{CP}^2 : \xi^1 \neq 0\}$$

$$U_2 = \{\left[\xi^1, \xi^2, \xi^3\right] \in \mathbb{CP}^2 : \xi^2 \neq 0\}$$

$$U_3 = \{\left[\xi^1, \xi^2, \xi^3\right] \in \mathbb{CP}^2 : \xi^3 \neq 0\}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}\varphi_1 : U_1 &\longrightarrow \mathbb{C}^2\\ [\xi^1,\xi^2,\xi^3] &\mapsto \varphi_1([\xi^1,\xi^2,\xi^3]) = (\hat{1},\xi^2(\xi^1)^{-1},\xi^3(\xi^1)^{-1}) = (\xi^2(\xi^1)^{-1},\xi^3(\xi^1)^{-1})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_1^{-1} : \mathbb{C}^2 &\longrightarrow U_1\\ (z_1,z_2) &\mapsto \varphi_1^{-1}(z_1,z_2) = [1,z_1,z_2] = \left[\frac{1}{\sqrt{1+z_1^2+z_2^2}},\frac{z_1}{\sqrt{1+z_1^2+z_2^2}},\frac{z_2}{\sqrt{1+z_1^2+z_2^2}}\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_2 : U_2 &\longrightarrow \mathbb{C}^2\\ [\xi^1,\xi^2,\xi^3] &\mapsto \varphi_2([\xi^1,\xi^2,\xi^3]) = (\xi^1(\xi^2)^{-1},\hat{1},\xi^3(\xi^2)^{-1}) = (\xi^1(\xi^2)^{-1},\xi^3(\xi^2)^{-1})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_2^{-1} : \mathbb{C}^2 &\longrightarrow U_2\\ (z_1,z_2) &\mapsto \varphi_2^{-1}(z_1,z_2) = [z_1,1,z_2] = \left[\frac{z_1}{\sqrt{1+z_1^2+z_2^2}},\frac{1}{\sqrt{1+z_1^2+z_2^2}},\frac{z_2}{\sqrt{1+z_1^2+z_2^2}}\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_3 : U_3 &\longrightarrow \mathbb{C}^2\\ [\xi^1,\xi^2,\xi^3] &\mapsto \varphi_3([\xi^1,\xi^2,\xi^3]) = (\xi^1(\xi^3)^{-1},\xi^2(\xi^3)^{-1},\hat{1}) = (\xi^1(\xi^3)^{-1},\xi^2(\xi^3)^{-1})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_3^{-1} : \mathbb{C}^2 &\longrightarrow U_3\\ (z_1,z_2) &\mapsto \varphi_3^{-1}(z_1,z_2) = [z_1,z_2,1] = \left[\frac{z_1}{\sqrt{1+z_1^2+z_2^2}},\frac{z_2}{\sqrt{1+z_1^2+z_2^2}},\frac{1}{\sqrt{1+z_1^2+z_2^2}}\right]\end{aligned}$$

şeklinde tanımlı olup örtüşme fonksiyonları

$$\begin{aligned}\varphi_1\circ{\varphi_2}^{-1} : \varphi_2(U_1\cap U_2) &\longrightarrow \varphi_1(U_1\cap U_2)\\ (z_1,z_2) &\mapsto (\varphi_1\circ{\varphi_2}^{-1})(z_1,z_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\varphi_1\circ{\varphi_2}^{-1})(z_1,z_2) &= \varphi_1({\varphi_2}^{-1}(z_1,z_2))\\ &= \varphi_1([z_1,1,z_2])\\ &= (z_1z_1^{-1},z_1^{-1},z_2z_1^{-1})\\ &= (\hat{1},z_1^{-1},z_2z_1^{-1})\\ &= (z_1^{-1},z_2z_1^{-1})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_2\circ{\varphi_1}^{-1} : \varphi_1(U_1\cap U_2) &\longrightarrow \varphi_2(U_1\cap U_2)\\ (z_1,z_2) &\mapsto (\varphi_2\circ{\varphi_1}^{-1})(z_1,z_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\varphi_2 \circ {\varphi_1}^{-1})(z_1, z_2) &= \varphi_2({\varphi_1}^{-1}(z_1, z_2)) \\
&= \varphi_2([1, z_1, z_2]) \\
&= (z_1^{-1}, z_1 z_1^{-1}, z_2 z_1^{-1}) \\
&= (z_1^{-1}, \hat{1}, z_2 z_1^{-1}) \\
&= (z_1^{-1}, z_2 z_1^{-1})
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl}
\varphi_1 \circ {\varphi_3}^{-1} : \varphi_3(U_1 \cap U_3) & \longrightarrow & \varphi_1(U_1 \cap U_3) \\
(z_1, z_2) & \mapsto & (\varphi_1 \circ {\varphi_3}^{-1})(z_1, z_2)
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
(\varphi_1 \circ {\varphi_3}^{-1})(z_1, z_2) &= \varphi_1({\varphi_3}^{-1}(z_1, z_2)) \\
&= \varphi_1([z_1, z_2, 1]) \\
&= (z_1 z_1^{-1}, z_2 z_1^{-1}, z_1^{-1}) \\
&= (\hat{1}, z_2 z_1^{-1}, z_1^{-1}) \\
&= (z_2 z_1^{-1}, z_1^{-1})
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl}
\varphi_3 \circ {\varphi_1}^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_3) & \longrightarrow & \varphi_3(U_1 \cap U_3) \\
(z_1, z_2) & \mapsto & (\varphi_3 \circ {\varphi_1}^{-1})(z_1, z_2) = \varphi_3({\varphi_1}^{-1}(z_1, z_2))
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
(\varphi_3 \circ {\varphi_1}^{-1})(z_1, z_2) &= \varphi_3({\varphi_1}^{-1}(z_1, z_2)) \\
&= \varphi_3([1, z_1, z_2]) \\
&= (z_2^{-1}, z_1 z_2^{-1}, z_2 z_2^{-1}) \\
&= (z_2^{-1}, z_1 z_2^{-1}, \hat{1}) \\
&= (z_2^{-1}, z_1 z_2^{-1})
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl}
\varphi_2 \circ {\varphi_3}^{-1} : \varphi_3(U_1 \cap U_3) & \longrightarrow & \varphi_2(U_1 \cap U_3) \\
(z_1, z_2) & \mapsto & (\varphi_2 \circ {\varphi_3}^{-1})(z_1, z_2)
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
(\varphi_2 \circ {\varphi_3}^{-1})(z_1, z_2) &= \varphi_2({\varphi_3}^{-1}(z_1, z_2)) \\
&= \varphi_2([z_1, z_2, 1]) \\
&= (z_1 z_2^{-1}, z_2 z_2^{-1}, z_2^{-1}) \\
&= (z_1 z_2^{-1}, \hat{1}, z_2^{-1}) \\
&= (z_1 z_2^{-1}, z_2^{-1})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\varphi_3 \circ {\varphi_2}^{-1} : \varphi_2(U_2 \cap U_3) &\longrightarrow \varphi_3(U_2 \cap U_3) \\
(z_1, z_2) &\mapsto (\varphi_3 \circ {\varphi_2}^{-1})(z_1, z_2) = \varphi_3({\varphi_2}^{-1}(z_1, z_2))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\varphi_3 \circ {\varphi_2}^{-1})(z_1, z_2) &= \varphi_3({\varphi_2}^{-1}(z_1, z_2)) \\
&= \varphi_3([z_1, 1, z_2]) \\
&= (z_1 z_2^{-1}, z_2^{-1}, z_2 z_2^{-1}) \\
&= (z_1 z_2^{-1}, z_2^{-1}, \hat{1}) \\
&= (z_1 z_2^{-1}, z_2^{-1})
\end{aligned}
$$

olarak bulunur.

$n = 4$ durumunda $\mathbb{CP}^3$ üzerinde (U_1, φ_1), (U_2, φ_2), (U_3, φ_3) ve (U_4, φ_4) olmak üzere dört kart mevcut olup kart dönüşümleri ile örtüşme fonksiyonları $\mathbb{CP}^1$ ve $\mathbb{CP}^2$ deki yol izlenerek benzer şekilde bulunabilir.

4.2 $\mathbb{CP}^1$ Projektif Uzayına Farklı Bir Bakış

$\mathbb{CP}^1$ $1-$boyutlu kompleks projektif uzayı $\mathbb{C}^2$ de orjin boyunca uzanan(orjin çıkarılmış) kompleks doğruların kümesi olup aynı zamanda S^3 küresinin S^1 çemberlerinin ayrık bir birleşimi olarak ayrıştığı ve her bir S^1 in bir nokta olarak düşünüldüğü bir bölüm uzayı olarak alınabilir. Ayrıca; bu uzay S^2 küresine homeomorf olup şimdi $\mathbb{CP}^1 \cong S^2$ olduğunu gösterelim.

Bölüm 2.2 de S^n küresinin steografik izdüşüm dönüşümleri ve bu dönüşümlerin örtüşme fonksiyonlarını verdik. Şimdi ise özel olarak $n = 2$ için S^2 nin steografik izdüşüm dönüşümleri ve bu dönüşümlerin örtüşme fonksiyonlarını yazalım.

$$S^2 = \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 : (x^1)^2 + ((x^2)^2 + (x^3)^2 = 1\}$$

$N = \{(0, 0, 1)\} \in S^2$ ve $U_S = S^2 - \{N\}$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
\varphi_S : U_S &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\
(x^1, x^2, x^3) &\mapsto \varphi_S(x^1, x^2, x^3) = \left(\tfrac{x^1}{1-x^3}, \tfrac{x^2}{1-x^3}\right)
\end{aligned}
$$

olup bu dönüşümün tersi

$$
\begin{aligned}
\varphi_S^{-1} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow U_S \\
y = (y^1, y^2) &\mapsto \varphi_S^{-1}((y^1, y^2)) = \left(\tfrac{2y^1}{1+||y||^2}, \tfrac{2y^1}{1+||y||^2}, \tfrac{||y||^2-1}{1+||y||^2}\right)
\end{aligned}
$$

şeklindedir. Benzer olarak; $S = \{(0,0,-1)\} \in S^2$ ve $U_N = S^2 - \{S\}$ olmak üzere

$$\begin{array}{rcl} \varphi_N : U_N & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x^1, x^2, x^3) & \mapsto & \varphi_N(x^1, x^2, x^3) = (\frac{x^1}{1+x^3}, \frac{x^2}{1+x^3}) \end{array}$$

olup bu dönüşümün tersi

$$\begin{array}{rcl} \varphi_N^{-1} : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & U_N \\ y = (y^1, y^2) & \mapsto & \varphi_N^{-1}(y^1, y^2) = \left(\frac{2y^1}{1+||y||^2}, \frac{2y^2}{1+||y||^2}, \frac{1-||y||^2}{1+||y||^2} \right) \end{array}$$

şeklindedir. Bu dönüşümler homeomorfizm dönüşümleri olup (U_N, φ_N) ve (U_S, φ_S), S^2 küresi için steografik izdüşüm kartlarıdır. Bu kartların örtüşme fonksiyonları ise

$$\begin{array}{rcl} \varphi_S \circ \varphi_N^{-1} : \mathbb{R}^2 - \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 - \{0\} \\ y & \mapsto & (\varphi_S \circ \varphi_N^{-1})(y) = \frac{y}{||y||^2} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_N \circ {\varphi_S}^{-1} : \mathbb{R}^2 - \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 - \{0\} \\ y & \mapsto & \varphi_N \circ \varphi_S^{-1}(y) = \frac{y}{||y||^2} \end{array}$$

şeklinde olup

$$(\varphi_S \circ \varphi_N^{-1})(y) = \frac{y}{||y||^2} = (\varphi_N \circ \varphi_S^{-1})(y)$$

olarak bulunur. Burada $\mathbb{R}^2$ yerine $\mathbb{C}$ ve y yerine z alınırsa örtüşme fonksiyonları

$$\begin{array}{rcl} \varphi_S \circ \varphi_N^{-1} : \mathbb{C} - \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{C} - \{0\} \\ z & \mapsto & (\varphi_S \circ \varphi_N^{-1})(z) = \frac{1}{\bar{z}} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_N \circ {\varphi_S}^{-1} : \mathbb{C} - \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{C} - \{0\} \\ z & \mapsto & \varphi_N \circ \varphi_S^{-1}(z) = \frac{1}{\bar{z}} \end{array}$$

olup

$$(\varphi_S \circ \varphi_N^{-1})(z) = \frac{1}{\bar{z}} = (\varphi_N \circ \varphi_S^{-1})(z)$$

olarak bulunur.

Burada dikkat edilirse $\mathbb{CP}^1$ in kartları ile S^2 nin steografik izdüşüm kartlarının örtüşme fonksiyonları benzerdir. Tek fark S^2 nin örtüşme fonksiyonlarında eşlenik bulunmasıdır. Bu farkı $\mathbb{CP}^1$ in bir kartında küçük bir değişiklik yaparak ortadan kaldırabiliriz.

$$\begin{array}{rcl} \overline{\varphi_1} : U_1 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ [\xi] & \mapsto & \overline{\varphi_1}([\xi]) = \overline{\varphi_1([\xi])} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} (\overline{\varphi_1})^{-1} : \mathbb{C} & \longrightarrow & U_1 \\ z & \mapsto & (\overline{\varphi_1})^{-1}(z) = \overline{\varphi_1^{-1}(z)} \end{array}$$

şeklinde tanımlanan $\overline{\varphi_1}$ dönüşümü homeomorfizm dönüşümü ve $(U_1, \overline{\varphi_1})$ çifti $\mathbb{CP}^1$ için bir kart olup $\{(U_1, \overline{\varphi_1}), (U_2, \varphi_2)\}$ ailesi de $\mathbb{CP}^1$ için atlas yapısı oluşturur. Bu kartların örtüşme fonksiyonları ise

$$\begin{array}{rcl} \overline{\varphi_1} \circ {\varphi_2}^{-1} : \mathbb{C} - \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{C} - \{0\} \\ z & \mapsto & (\overline{\varphi_1} \circ {\varphi_2}^{-1})(z) = \bar{z}^{-1} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_2 \circ {\varphi_1}^{-1} : \mathbb{C} - \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{C} - \{0\} \\ z & \mapsto & (\varphi_2 \circ (\overline{\varphi_1})^{-1})(z) = \bar{z}^{-1} \end{array}$$

olarak bulunur. Bu dönüşümler ve Yapıştırma Lemması yardımıyla $\mathbb{CP}^1 \cong S^2$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{array}{rcl} \varphi_N^{-1} \circ \overline{\varphi_1} : U_1 & \longrightarrow & U_N \\ \varphi_S^{-1} \circ \varphi_2 : U_2 & \longrightarrow & U_S \end{array}$$

homeomorfizm dönüşümleri göz önüne alalım. Bu dönüşümler $U_1 \cap U_2$ üzerinde aynı değeri alırlar. Gerçekten; $[\xi] \in U_1 \cap U_2$ ise

$$\varphi_2([\xi]) \in \varphi_2(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C} - \{0\}$$

olup $\mathbb{C} - \{0\}$ üzerinde $\overline{\varphi_1} \circ {\varphi_2}^{-1} = \varphi_N \circ {\varphi_S}^{-1}$ olduğundan $z = \varphi_2([\xi]) \in \mathbb{C} - \{0\}$ için

$$\begin{array}{rcl} (\overline{\varphi_1} \circ {\varphi_2}^{-1})(\varphi_2([\xi])) & = & (\varphi_N \circ {\varphi_S}^{-1})(\varphi_2([\xi])) \\ \overline{\varphi_1}([\xi]) & = & \varphi_N \circ (({\varphi_S}^{-1} \circ \varphi_2)([\xi])) \\ ({\varphi_N}^{-1} \circ \overline{\varphi_1})([\xi]) & = & {\varphi_N}^{-1} \circ \varphi_N \circ (({\varphi_S}^{-1} \circ \varphi_2)([\xi])) \\ ({\varphi_N}^{-1} \circ \overline{\varphi_1})([\xi]) & = & ({\varphi_S}^{-1} \circ \varphi_2)([\xi]) \end{array}$$

elde edilir ki bu eşitlik her $[\xi] \in U_1 \cap U_2$ için sağlandığından

$$({\varphi_N}^{-1} \circ \overline{\varphi_1})|_{U_1 \cap U_2} = ({\varphi_S}^{-1} \circ \varphi_2)|_{U_1 \cap U_2}$$

olarak bulunur. Bu durumda; Yapıştırma Lemmasından,

$$f([\xi]) = \begin{cases} ({\varphi_N}^{-1} \circ \overline{\varphi_1})([\xi]) & , \ [\xi] \in U_1 \\ ({\varphi_S}^{-1} \circ \varphi_2)([\xi]) & , \ [\xi] \in U_2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $f : \mathbb{CP}^1 \longrightarrow S^2$ dönüşümü süreklidir. Bu dönüşümün bileşenleri homeomorfizm ve $U_S \cup U_N = S^2$ olduğundan f dönüşümü bire-bir ve örtendir denir. f dönüşümü bire-bir ve örten olduğundan tersi mevcuttur. f dönüşümü-nün tersini bulmak için bu dönüşümün bileşenlerinin tersi olan

$$\begin{aligned} (\varphi_N^{-1} \circ \overline{\varphi_1})^{-1} = (\overline{\varphi_1})^{-1} \circ \varphi_N : U_N &\longrightarrow U_1 \\ (\varphi_S^{-1} \circ \varphi_2)^{-1} = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_S : U_S &\longrightarrow U_2 \end{aligned}$$

homeomorfizm dönüşümlerini ele alalım. Bu dönüşümler $U_N \cap U_S$ üzerinde aynı değeri alırlar. Yani; $x \in U_N \cap U_S$ olmak üzere

$$\varphi_S(x) \in \varphi_S(U_N \cap U_S) = \mathbb{C} - \{0\}$$

olup $\mathbb{C} - \{0\}$ üzerinde $\varphi_N \circ {\varphi_S}^{-1} = \overline{\varphi_1} \circ {\varphi_2}^{-1}$ olduğundan $z = \varphi_S(x) \in \mathbb{C} - \{0\}$ için

$$\begin{aligned} (\varphi_N \circ {\varphi_S}^{-1})(\varphi_2(x) &= (\overline{\varphi_1} \circ {\varphi_2}^{-1})(\varphi_2(x) \\ \varphi_N(x) &= \overline{\varphi_1} \circ (({\varphi_2}^{-1} \circ \varphi_S)(x)) \\ ((\overline{\varphi_1})^{-1} \circ \varphi_N)(x) &= (\overline{\varphi_1})^{-1} \circ \varphi_1 \circ (({\varphi_2}^{-1} \circ \varphi_S)(x)) \\ ((\overline{\varphi_1})^{-1} \circ \varphi_N)(x) &= ({\varphi_2}^{-1} \circ \varphi_S)(x) \end{aligned}$$

elde edilir ki bu eşitlik her $x \in U_N \cap U_S$ için sağlandığından

$$((\overline{\varphi_1})^{-1} \circ \varphi_N)|_{U_N \cap U_S} = ({\varphi_2}^{-1} \circ \varphi_S)|_{U_N \cap U_S}$$

olarak bulunur. Bu durumda; Yapıştırma Lemmasından,

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} ((\overline{\varphi_1})^{-1} \circ \varphi_N)(x) & , \ x \in U_N \\ ({\varphi_2}^{-1} \circ \varphi_S)(x) & , \ x \in U_S \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $f^{-1} : S^2 \longrightarrow \mathbb{CP}^1$ dönüşümü süreklidir.

Sonuç olarak; $f : \mathbb{CP}^1 \longrightarrow S^2$ dönüşümü sürekli, bire-bir, örten ve tersi de sürekli olduğundan bir homeomorfizm olup $\mathbb{CP}^1 \cong S^2$ olarak gösterilir.

4.3 Kompleks Hopf Dönüşümleri

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, hook, "i"] & S^{2n-1} \arrow[d, "\mathcal{P}"] \\ & \mathbb{CP}^{n-1} \end{tikzcd}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm ***Kompleks Hopf Dönüşümü*** olarak adlandırılır. Özel olarak $n = 2$ için $\mathbb{CP}^1 \cong S^2$ olduğundan

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, hook, "i"] & S^3 \arrow[d, "\mathcal{P}"] \\ & S^2 \end{tikzcd}$$

olarak bulunur. Burada

$$\begin{array}{rcl} h : S^3 & \longrightarrow & S^2 \\ (x, y) & \mapsto & h(x, y) = (2y\bar{x}, ||x||^2 - ||y||^2) \end{array}$$

Hopf dönüşümünü S^1 lifi ile ele alacak olursak S^3 küresi, S^2 küresi üzerinde parametrize edilen S^1 çemberlerinin bir ailesi olarak düşünülebilir.

4.4 $\mathbb{CP}^{n-1}$ Projektif Uzayının Bazı Topolojik Özellikleri

1) $\mathbb{CP}^{n-1}$ *kompleks projektif uzayı kompakttır.*

$\mathbb{CP}^{n-1}$ kompleks projektif uzayı için $\mathcal{P} : S^{2n-1} \longrightarrow \mathbb{CP}^{n-1}$ bölüm dönüşümünü ele alalım. S^{2n-1} küresi kompakt ve $\mathcal{P}$ bölüm dönüşümü örten ve sürekli olduğundan $\mathbb{CP}^{n-1}$ projektif uzayı da kompakttır.

2) $\mathbb{CP}^{n-1}$ *kompleks projektif uzayı yol bağlantılıdır.*

$\mathbb{CP}^{n-1}$ kompleks projektif uzayı için

$$\mathcal{P} : S^{2n-1} \longrightarrow \mathbb{CP}^{n-1}$$

bölüm dönüşümü dikkate alınsın. $\mathcal{P}$ bölüm dönüşümü sürekli ve örten bir dönüşüm olup S^{2n-1} küresi yol bağlantılı olduğundan $\mathbb{CP}^{n-1}$ kompleks projektif uzayı da yol bağlantılı olur.

3) $\mathbb{CP}^{n-1}$ *kompleks projektif uzayı bağlantılıdır.*

Yol bağlantılı her uzay bağlantılı ve $\mathbb{CP}^{n-1}$ kompleks projektif uzayı da yol bağlantılı olduğundan bağlantılı uzaydır.

5 KUATERNİYONİK PROJEKTİF UZAYLAR ($\mathbb{HP}^{n-1}$)

$n \geq 2$ bir tamsayı olsun. $\mathbb{H}^n$ de $(0, \ldots, 0)$ elemanı 0 ile gösterilsin. $\mathbb{H}^n$ nin $\mathbb{H}^n - \{0\}$ topolojik alt uzayı üzerinde bir bağıntı aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\zeta \sim \xi \iff \text{Sıfırdan farklı bir } a \in \mathbb{H} \text{ vardır öyle ki } \zeta = \xi a \text{ dır}$$

Bu şekilde tanımlanan $' \sim'$ bağıntısı $\mathbb{H}^n - \{0\}$ üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Çünkü;

Yansıma : $\xi \sim \xi \iff$ Sıfırdan farklı $1 \in \mathbb{H}$ vardır öyle ki $\xi = \xi \cdot 1$ dir

Simetri : $\zeta \sim \xi \iff$ Sıfırdan farklı $a \in \mathbb{H}$ vardır öyle ki $\zeta = \xi a$ dir

$\iff$ Sıfırdan farklı bir $a^{-1} \in \mathbb{H}$ vardır öyle ki $\xi = \zeta a^{-1}$ dır

$\iff \xi \sim \zeta$

Geçişme : $\eta \in \mathbb{H}^n - \{0\}$ olmak üzere

$\zeta \sim \eta \iff$ Sıfırdan farklı bir $a \in \mathbb{H}$ vardır öyle ki $\zeta = \eta a$

$\eta \sim \xi \iff$ Sıfırdan farklı bir $b \in \mathbb{H}$ vardır öyle ki $\eta = \xi b$

olsun. O halde;

$\zeta \sim \xi \iff$ Sıfırdan farklı bir $ba \in \mathbb{H}$ vardır öyle ki $\zeta = \xi(ba)$

elde edilir.

Sonuç olarak; $' \sim'$ bağıntısı yansıma, simetri ve geçişme özelliklerini sağladığından $\mathbb{H}^n - \{0\}$ üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Bu bağıntı $\mathbb{H}^n - \{0\}$ kümesini denklik sınıflarına ayırır. $\xi \in \mathbb{H}^n - \{0\}$ olmak üzere ξ nin denklik sınıfı

$$\begin{aligned}
[\xi] = [\xi^1, \ldots, \xi^n] &= \{\zeta \in \mathbb{H}^n - \{0\} : \zeta \sim \xi\} \\
&= \{\zeta \in \mathbb{H}^n - \{0\} : \zeta = \xi a \ , \ a \in \mathbb{H} - \{0\}\} \\
&= \{\xi a : a \in \mathbb{H} - \{0\}\} \\
&= \{(\xi^1 a, \ldots, \xi^n a) : a \in \mathbb{H} - \{0\}\}
\end{aligned}$$

olup denklik sınıfları orjinin çıkarılması ile $\mathbb{H}^n$ de orjinden geçen kuaterniyonik doğrulardır. $\mathbb{H}^n - \{0\}/_{\sim}$ bölüm uzayı $\mathbb{HP}^{n-1}$ ile gösterilsin. Yani;
$\mathbb{HP}^{n-1} = \{[\xi] : \xi \in \mathbb{H}^n - \{0\}\}$ kümesi

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q} : \mathbb{H}^n - \{0\} &\rightarrow \mathbb{HP}^{n-1} \\
\xi &\mapsto \mathcal{Q}(\xi) = [\xi]
\end{aligned}$$

izdüşümü ile belirlenen bölüm topolojisine sahiptir. Bu şekilde tanımlanan $\mathbb{HP}^{n-1}$ uzayı ***(n-1) boyutlu kuaterniyonik projektif uzay*** olarak adlandırılır.

Kuaterniyonik projektif uzayları incelemenin diğer bir yolu vardır ki bu bazı özelliklerin incelenmesini kolaylaştırır.

$S^{4n-1} = \{\xi \in \mathbb{H}^n \ : < \xi, \xi >= 1\}$ $(4n-1)$ boyutlu birim küresi ele alınsın. $\mathcal{Q}$ dönüşümünün S^{4n-1} küresine kısıtlanması $\mathcal{P}$ olsun.

$$\mathcal{P} : S^{4n-1} \longrightarrow \mathbb{HP}^{n-1}$$

dönüşümü süreklidir. Çünkü; $\mathcal{Q}$ bölüm dönüşümü sürekli olduğundan kısıtlanması da sürekli olur. Ayrıca; $\mathcal{P}$ örten bir dönüşümdür. $\mathcal{P}$ nin örtenliğini görmek için $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n), \zeta = (\zeta^1, \ldots, \zeta^n) \in \mathbb{H}^n - \{0\}$ olsun. Buradan;

$$<,>: \mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{H}$$

bilineer formu

$$\begin{aligned} < \xi, \zeta > &= < (\xi^1, \ldots, \xi^n), (\zeta^1, \ldots, \zeta^n) > \\ &= \overline{\xi^1}\zeta^1 + \ldots + \overline{\xi^n}\zeta^n \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı olup

$$\begin{aligned} < \xi, \xi > &= < (\xi^1, \ldots, \xi^n), (\xi^1, \ldots, \xi^n) > \\ &= \overline{\xi^1}\xi^1 + \ldots + \overline{\xi^n}\xi^n \\ &= |\xi^1|^2 + \ldots + |\xi^n|^2 \end{aligned}$$

pozitif bir reel sayıdır. ξ nin normalizeri

$$\zeta = \xi(< \xi, \xi >)^{-\frac{1}{2}}$$

şeklinde tanımlanır.

$$\begin{aligned} < \zeta, \zeta > &= < (\xi(< \xi, \xi >)^{-\frac{1}{2}}, \xi(< \xi, \xi >)^{-\frac{1}{2}} > \\ &= (< \xi, \xi >)^{-\frac{1}{2}} < \xi, \xi > (< \xi, \xi >)^{-\frac{1}{2}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

olup $\zeta \in S^{4n-1}$ dir. Dahası;

$$(<\xi,\xi>)^{-\frac{1}{2}} = a$$

olarak alınırsa $\zeta = \xi a$ olup $\zeta \sim \xi$ dir. O halde $[\zeta] = [\xi]$ olur ki $\mathcal{Q}(\zeta) = \mathcal{Q}(\xi)$ dir ve $\zeta \in S^{4n-1}$ olduğundan $\mathcal{P}(\zeta) = \mathcal{Q}(\xi) = [\xi]$ elde edilir.

Sonuç olarak; $\forall\ [\xi] \in \mathbb{HP}^{n-1}$ için bir $\zeta \in S^{4n-1}$ vardır öyle ki $\mathcal{P}(\zeta) = [\xi]$ olup $\mathcal{P}$ dönüşümü örtendir.

$$\begin{aligned} \eta : \mathbb{H}^n - \{0\} &\rightarrow S^{4n-1} \\ \xi &\mapsto \eta(\xi) = \xi(<\xi,\xi>)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $\mathbb{H}^n - \{0\}$ ın elemanlarını normalleştiren η dönüşümü ile sürekli dönüşümlerin diyagramı aşağıdaki gibi verilsin.

$$\begin{tikzcd} S^{4n-1} \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "\mathcal{P}"'] & \mathbb{H}^n - \{0\} \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\mathcal{Q}"] & S^{4n-1} \arrow[dl, "\mathcal{P}"] \\ & \mathbb{HP}^{n-1} & \end{tikzcd}$$

$\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n) \in \mathbb{H}^n - \{0\}$ olmak üzere $\forall\ 1 \leq i \leq n$ için

$$\begin{aligned} f_i : \mathbb{H}^n - \{0\} &\rightarrow \mathbb{H} \\ \xi &\mapsto f_i(\xi) = \frac{\xi^i}{(<\xi,\xi>)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı f_i fonksiyonları öklid koordinatlar yardımıyla yazılırsa sürekli olup η dönüşümü süreklidir. Ayrıca $\mathcal{P}(\zeta) = \mathcal{Q}(\xi)$ ve $\zeta = \eta(\xi)$ olduğundan $\mathcal{P}(\eta(\xi)) = \mathcal{Q}(\xi)$ olup $(\mathcal{P} \circ \eta)(\xi) = \mathcal{Q}(\xi)$ sonucu elde edilir ki $\mathcal{P} \circ \eta = \mathcal{Q}$ bulunur. Yani; diyagramın sağ tarafı değişmelidir. i gömme dönüşümü olmak üzere $\mathcal{Q} \circ i = \mathcal{P}$ olup diyagramın sol tarafı değişmelidir. O halde;

$\mathbb{HP}^{n-1}$ in bir U alt kümesi açıktır $\Longleftrightarrow \mathcal{P}^{-1}(U)$, S^{4n-1} içinde açıktır.

Lemma 5.0.1.

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : S^{4n-1} &\rightarrow \mathbb{HP}^{n-1} \\ \zeta &\mapsto \mathcal{P}(\zeta) = [\xi] \end{aligned}$$

dönüşümünün $\mathbb{HP}^{n-1}$ *üzerinde tanımladığı topoloji*

$$\tau_{\mathcal{P}} = \{V \subseteq \mathbb{HP}^{n-1} : \mathcal{P}^{-1}(V) \quad S^{4n-1} \ \textit{içinde açık}\}$$

olmak üzere $\tau_{\mathcal{Q}} = \tau_{\mathcal{P}}$ *dir.*

İspat. $\tau_{\mathcal{Q}} = \tau_{\mathcal{P}}$ eşitliği için $\tau_{\mathcal{Q}} \subset \tau_{\mathcal{P}}$ ve $\tau_{\mathcal{P}} \subset \tau_{\mathcal{Q}}$ olduğunu göstermek yeterlidir. İlk olarak $\tau_{\mathcal{Q}} \subset \tau_{\mathcal{P}}$ olduğunu gösterelim.

$U \in \tau_{\mathcal{Q}}$ açık kümesi verilsin. $U \in \tau_{\mathcal{P}}$ olduğunu göstermeliyiz. $U \in \tau_{\mathcal{Q}}$ olduğundan $\mathcal{Q}^{-1}(U)$, $\mathbb{H}^n - \{0\}$ içinde açıktır. Diğer yandan;

$$\begin{tikzcd}
S^{4n-1} \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "\mathcal{P}"'] & \mathbb{H}^n - \{0\} \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\mathcal{Q}"] & S^{4n-1} \arrow[dl, "\mathcal{P}"] \\
& \mathbb{HP}^{n-1} &
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olduğundan $\mathcal{Q} \circ i = \mathcal{P}$ ve $\mathcal{P} \circ \eta = \mathcal{Q}$ dir. $\mathcal{Q} \circ i = \mathcal{P}$ olduğundan

$$\mathcal{P}^{-1}(U) = (\mathcal{Q} \circ i)^{-1}(U) = (i^{-1} \circ \mathcal{Q}^{-1})(U) = i^{-1}(\mathcal{Q}^{-1}(U))$$

olup $\mathcal{P}^{-1}(U) = i^{-1}(\mathcal{Q}^{-1}(U))$ elde edilir. $U \in \tau_{\mathcal{Q}}$ olduğundan $\mathcal{Q}^{-1}(U)$ kümesi $\mathbb{H}^n - \{0\}$ da açık ve i gömme dönüşümü sürekli olduğundan $i^{-1}(\mathcal{Q}^{-1}(U))$, S^{4n-1} de açıktır. Yani; $\mathcal{P}^{-1}(U)$, S^{4n-1} de açıktır. O halde; $U \in \tau_{\mathcal{P}}$ dir. Böylece; $\tau_{\mathcal{P}} \subset \tau_{\mathcal{Q}}$ elde edilir. Şimdi ise $\tau_{\mathcal{P}} \subset \tau_{\mathcal{Q}}$ olduğunu gösterelim.

$V \in \tau_{\mathcal{P}}$ açık kümesi verilsin. $V \in \tau_{\mathcal{Q}}$ olduğunu göstermeliyiz. $V \in \tau_{\mathcal{P}}$ olduğundan $\mathcal{P}^{-1}(V)$, S^{4n-1} içinde açıktır. Diyagramın sağ tarafı değişmeli olduğundan $\mathcal{P} \circ \eta = \mathcal{Q}$ olup

$$\mathcal{Q}^{-1}(V) = (\mathcal{O} \circ \eta)^{-1}(V) = (\eta^{-1} \circ \mathcal{P}^{-1})(V) = \eta^{-1}(\mathcal{P}^{-1}(V))$$

şeklinde yazılabilir. $V \in \tau_{\mathcal{P}}$ olduğundan $\mathcal{P}^{-1}(V)$, S^{4n-1} de açıktır ve η dönüşümü sürekli olduğundan $\eta^{-1}(\mathcal{P}^{-1}(V))$, $\mathbb{H}^n - \{0\}$ da açıktır. O halde; $\mathcal{Q}^{-1}(V)$, $\mathbb{H}^n - \{0\}$ içinde açık olup $V \in \tau_{\mathcal{Q}}$ dur. Böylece; $\tau_{\mathcal{P}} \subset \tau_{\mathcal{Q}}$ elde edilir.

Sonuç olarak; $\tau_{\mathcal{Q}} \subset \tau_{\mathcal{P}}$ ve $\tau_{\mathcal{P}} \subset \tau_{\mathcal{Q}}$ olduğundan $\tau_{\mathcal{Q}} = \tau_{\mathcal{P}}$ dir. O halde; $\mathbb{HP}^{n-1}$ uzayı $\mathcal{P} : S^{4n-1} \to \mathbb{HP}^{n-1}$ ile tanımlanan bölüm topolojisine sahiptir. Yani; $\mathbb{HP}^{n-1}$ bölüm uzayı S^{4n-1} in bir bölüm uzayı olarak da düşünülebilir. ■

S^{4n-1} in bir bölüm uzayı olarak $\mathbb{HP}^{n-1}$ in bu ikinci tanımı $\mathbb{HP}^{n-1}$ in bazı özelliklerinin incelenmesinde kolaylıklar sağlar.

$[\xi] \in \mathbb{HP}^{n-1}$ üzerindeki $\mathcal{P}^{-1}([\xi])$ lifi $\{\xi a : a \in \mathbb{H} - \{0\}\}$ kümesinin S^{4n-1} ile arakesitidir.Yani; $\mathcal{Q}$ bölüm dönüşümünün lifleri $[\xi] \in \mathbb{HP}^{n-1}$ için

$$\mathcal{Q}^{-1}([\xi]) = \{\xi a : a \in \mathbb{H} - \{0\}\}$$

olup , $\mathcal{P}$ nin lifleri $\zeta \in S^{4n-1}$ için $[\xi] = [\zeta]$ olduğundan

$$\mathcal{P}^{-1}([\zeta]) = \mathcal{P}^{-1}([\xi]) = \mathcal{Q}^{-1}([\xi]) \cap S^{4n-1}$$

olarak yazılabilir. $\zeta \in S^{4n-1}$ için $< \zeta, \zeta >= 1$ olduğundan

$$< \zeta a, \zeta a >= \bar{a} < \zeta, \zeta > a = \bar{a} \cdot 1 \cdot a = ||a||^2$$

olup $\zeta \in S^{4n-1}$ için

$$\zeta a \in S^{4n-1} \Longleftrightarrow ||a||^2 = 1 \Longleftrightarrow a \in S^3$$

elde edilir. Bu durumda; $\forall\ \zeta \in S^{4n-1}$ için

$$\zeta a \in S^{4n-1} \Longleftrightarrow a \in S^3$$

elde edilir. Böylece; $\forall\ \zeta \in S^{4n-1}$ için

$$\mathcal{P}^{-1}([\zeta]) = \{\zeta a : a \in S^3\}$$

dir. Ayrıca; herhangi bir $\xi_0 = (h_0^1, \ldots, h_0^n) \in S^{4n-1}$ için

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{-1}([\xi_0]) &= \{\xi_0 a : a \in S^3\} \\ &= \{(h_0^1 a, \ldots, h_0^n a) : a \in S^3\} \end{aligned}$$

olup ξ_0 sabitlenirse S^{4n-1} in bu alt uzayı S^3 küresine homeomorftur. Yani; $\mathcal{P}^{-1}([\xi_0]) \cong S^3$ dir. Şimdi bu homeomorfizmi gösterelim.

$\xi_0 \in S^{4n-1}$ olduğundan en az bir $t \in \{1, \ldots, n\}$ için $h_0^t \neq 0$ dır.
$h_0^t = \alpha + \beta i + \delta j + \gamma k$ ve $h^1 = x^1 + y^1 i + u^1 j + v^1 k$, ..., $h^n = x^n + y^n i + u^n j + v^n k$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f : \mathbb{H}^n &\longrightarrow \mathbb{H} \\ (h^1, \ldots, h^n) &\mapsto f(h^1, \ldots, h^n) = (h_0^t)^{-1} \cdot h^t \end{aligned}$$

dönüşümünü gözönüne alalım.

$$f(h^1,\ldots,h^n)=(h_0^t)^{-1}\cdot h^t=\frac{\overline{h_0^t}}{||h_0^t||^2}\cdot h^t=\frac{\alpha-\beta i-\delta j-\gamma k}{\alpha^2+\beta^2+\delta^2+\gamma^2}\cdot(x^t+y^ti+u^tj+v^tk)$$

olup açık olarak

$$f(h^1,\ldots,h^n)=\frac{\alpha x^t+\beta y^t+\delta u^t+\gamma v^t}{\alpha^2+\beta^2+\delta^2+\gamma^2}+\frac{(\alpha y^t-\beta x^t-\delta v^t+\gamma u^t)}{\alpha^2+\beta^2+\delta^2+\gamma^2}\cdot i$$

$$+\frac{\alpha u^t+\beta v^t-\delta x^t-\gamma y^t}{\alpha^2+\beta^2+\delta^2+\gamma^2}\cdot j+\frac{(\alpha v^t-\beta u^t+\delta y^t-\gamma x^t)}{\alpha^2+\beta^2+\delta^2+\gamma^2}\cdot k$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca; f fonksiyonu süreklidir. $\mathbb{H}^n$ ile $\mathbb{R}^{4n}$ ve $\mathbb{H}$ ile $\mathbb{R}^4$ denk tutularak bu fonksiyonun sürekliliği kolaylıkla gösterilebilir. Bu durumda; bu dönüşümün $\mathcal{P}^{-1}([\xi_0])$ a kısıtlanmışı da sürekli olup $(h_0^1a,\ldots,h_0^na)$ noktasını a ya resmeder. Gerçekten;

$$\begin{array}{rcl} f|_{\mathcal{P}^{-1}([\xi_0])}:\mathcal{P}^{-1}([\xi_0]) & \longrightarrow & \mathbb{H} \\ \xi_0 a & \mapsto & f|_{\mathcal{P}^{-1}([\xi_0])}(\xi_0 a)=(h_0^j)^{-1}\cdot(h_0^ja)=a \end{array}$$

olur ki $a\in S^3$ olduğundan

$$\begin{array}{rcl} f|_{\mathcal{P}^{-1}([\xi_0])}:\mathcal{P}^{-1}([\xi_0]) & \longrightarrow & S^3 \\ \xi_0 a & \mapsto & a \end{array}$$

olarak tanımlanır. Bu dönüşüm bire-birdir. Birebirlik için

$$f|_{\mathcal{P}^{-1}([\xi_0])}(\xi_0 a)=f|_{\mathcal{P}^{-1}([\xi_0])}(\xi_0 b)$$

olsun. Buradan $a=b$ olup $\xi_0 a=\xi_0 b$ elde edilir. Ayrıca; bu dönüşüm örtendir. Çünkü; $\forall a\in S^3$ için $f|_{\mathcal{P}^{-1}([\xi_0])}(\xi_0 a)=a$ olacak şekilde $\xi_0 a\in\mathcal{P}^{-1}([\xi_0]$ vardır. Bu dönüşüm bire-bir ve örten olduğundan tersi mevcuttur. Bu dönüşümün tersi $a\in S^3$ için

$$a\longmapsto(h_0^1a,\ldots,h_0^na)$$

olup süreklidir. Çünkü; $a=s+ti+s'j+t'k\in\mathbb{H}$ olarak yazılırsa

$$(s,t,s',t')\longmapsto(x_0^1s-y_0^1t-u_0^1s'-v_0^1t'\ ,\ x_0^1t+y_0^1s+u_0^1t'-v_0^1s'\ ,\ x_0^1s'+u_0^1s+v_0^1t-y_0^1t',$$

$x_0^1t' + v_0^1s + y_0^1s' - u_0^1t$, ... , $x_0^ns - y_0^nt - u_0^ns' - v_0^nt'$, $x_0^nt + y_0^ns + u_0^nt' - v_0^ns'$,

$x_0^ns' + u_0^ns + v_0^nt - y_0^nt'$, $x_0^nt' + v_0^ns + y_0^ns' - u_0^nt)$

dönüşümü $\mathcal{P}([\xi_0] \longmapsto S^1$ dönüşümünün tersi olup $\mathbb{R}^4$ den $\mathbb{R}^{4n}$ ye sürekli bir dönüşüm tanımlar. Böylece

$$(h_0^1a, \ldots, h_0^na) \longmapsto a$$

dönüşümü $\mathcal{P}^{-1}([\xi_0]$ kümesini S^3 küresinin tamamına resmeden bir homeomorfizm olup $\mathcal{P}^{-1}([\xi_0] \cong S^3$ dir. Bu durumda; $\mathbb{HP}^{n-1}$ projektif uzayı S^{4n-1} küresinin S^3 kürelerinin ayrık bir birleşimi olarak ayrıştığı ve her bir S^3 ün bir nokta olarak düşünüldüğü bir uzay olarak alınabilir.

Lemma 5.0.2. $\mathcal{P} : S^{4n-1} \to \mathbb{HP}^{n-1}$ *bölüm dönüşümü açıktır.*

İspat. $U \subset S^{4n-1}$ açık olsun. $\mathcal{P}$ bölüm dönüşümünün açık olduğunu göstermek için $\mathcal{P}(U)$ nun $\mathbb{HP}^{n-1}$ de açık olduğunu göstermeliyiz. $\mathcal{P}$ bölüm dönüşümü olduğundan $\mathcal{P}(U)$ nun açık olması için $\mathcal{P}^{-1}(\mathcal{P}(U))$ nun S^{4n-1} de açık olması yeterlidir.

$$\mathcal{P}^{-1}(\mathcal{P}(U)) = \bigcup_{a \in S^3} Ua$$

olup Ua lar açıktır. Çünkü;

$$\begin{aligned} \rho_a : S^{4n-1} &\longrightarrow S^{4n-1} \\ \xi &\mapsto \xi a \end{aligned}$$

şeklinde bir dönüşüm tanımlayalım. Bu dönüşüm sürekli olup

$$\begin{aligned} \rho_{a^{-1}} : S^{4n-1} &\longrightarrow S^{4n-1} \\ \xi &\mapsto \xi a^{-1} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı dönüşüm

$$(\rho_a \circ \rho_{a^{-1}})(\xi) = \rho_a(\xi a^{-1}) = (\xi a^{-1})a = \xi$$
$$(\rho_{a^{-1}} \circ \rho_a)(\xi) = \rho_{a^{-1}}(\xi a) = (\xi a)a^{-1} = \xi$$

olduğundan ρ_a dönüşümünün tersi olup süreklidir ve ρ_a dönüşümü bire-bir ve örtendir. Bu durumda; ρ_a dönüşümü bir homeomorfizm olup U, S^{4n-1} de açık ise $a \in S^3$ için Ua da S^{4n-1} de açıktır. Açık kümelerin keyfi birleşimi açık olduğundan $\bigcup_{a\in S^3} Ua$ açıktır. Böylece; $\mathcal{P}^{-1}(\mathcal{P}(U))$, S^{4n-1} de açık olup $\mathcal{P}$ bölüm dönüşümü olduğundan $\mathcal{P}(U)$, $\mathbb{HP}^{n-1}$ de açıktır. O halde; $\mathcal{P}$ bölüm dönüşümü açıktır. ■

Lemma 5.0.3. $\mathbb{HP}^{n-1}$ *kuaterniyonik projektif uzayı Hausdorff'dur.*

İspat. $\xi_0 \in S^{4n-1}$ seçilip sabitlensin.

$$\begin{array}{rcl} \rho : \mathbb{HP}^{n-1} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ [\zeta] & \mapsto & \rho([\zeta]) = 1 - |\langle \zeta, \xi_0 \rangle|^2 \end{array}$$

şeklinde bir dönüşüm tanımlansın. Burada; $\mathbb{HP}^{n-1}$ uzayı S^{4n-1} in bir bölüm uzayı olarak ele alındığından $\zeta \in S^{4n-1}$ dir. Ayrıca; ρ dönüşümü iyi tanımlıdır. Çünkü; ζ', $\zeta \in S^{4n-1}$ için $[\zeta'] = [\zeta]$ olsun. Bu durumda; $a \in S^3$ olan $a \in \mathbb{H}$ için $\zeta' = \zeta a$ dır. Buradan;

$$\begin{aligned} |<\zeta', \xi_0>|^2 = |<\zeta a, \xi_0>|^2 &= |\bar{a} <\zeta, \xi_0>|^2 \\ &= |\bar{a}|^2 |<\zeta, \xi_0>|^2 \\ &= |<\zeta, \xi_0>|^2 \end{aligned}$$

elde edilir. O halde;

$$\begin{aligned} |<\zeta', \xi_0>|^2 &= |<\zeta, \xi_0>|^2 \\ 1 - |<\zeta', \xi_0>|^2 &= 1 - |<\zeta, \xi_0>|^2 \\ \rho([\zeta']) &= \rho([\zeta]) \end{aligned}$$

olup ρ dönüşümü iyi tanımlıdır. Ayrıca;

$$\rho([\xi_0]) = 1 - |<\xi_0, \xi_0>|^2 = 1 - 1 = 0$$

dır. Bu durumda iddia:

$$[\zeta] \neq [\xi_0] \text{ iken } \rho([\zeta]) \neq 0 \text{ dır.}$$

Bunu göstermek için aksine $\rho([\zeta]) = 0$ olsun. Buradan $|<\zeta, \xi_0>|^2 = 1$ olup

$$<\xi_0 - \zeta <\zeta, \xi_0>, \xi_0 - \zeta <\zeta, \xi_0>> = 0$$

eşitliği vardır. Çünkü;

$<\xi_0 - \zeta <\zeta, \xi_0>, \xi_0 - \zeta <\zeta, \xi_0>> = <\xi_0, \xi_0 - \zeta <\zeta, \xi_0>>$

$-<\zeta<\zeta,\xi_0>,\xi_0-\zeta<\zeta,\xi_0>>$

$=<\xi_0,\xi_0>-<\xi_0,\zeta><\zeta,\xi_0>-\overline{<\zeta,\xi_0>}<\zeta,\xi_0>$

$+\overline{<\zeta,\xi_0>}<\zeta,\zeta><\zeta,\xi_0>$

$=1-1$

$=0$

elde edilir ki

$$|\xi_0-\zeta<\zeta,\xi_0>^2=0$$

olup $\xi_0=\zeta<\zeta,\xi_0>$ bulunur. $<\zeta,\xi_0>=a$ olarak alınırsa $\xi_0=\zeta a$ olup $[\xi_0]=[\zeta]$ bulunur. Bu ise $[\xi_0]\neq[\zeta]$ olması ile çelişir. Bu çelişkiye $\rho([\zeta])=0$ varsayımı ile ulaşıldığından $\rho([\zeta])\neq 0$ dır. Böylece; $[\xi_0]\neq[\zeta]$ olması $\rho([\xi_0])\neq\rho([\zeta])$ olmasını gerektirir. Ayrıca; ρ sürekli bir dönüşümdür. Gerçekten; S^{4n-1} küresinden $\mathbb{R}$ ye, $\mathcal{P}$ bölüm dönüşümü olmak üzere

$$\begin{array}{rcl} \rho\circ\mathcal{P}:S^{4n-1} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ [\zeta] & \mapsto & (\rho\circ\mathcal{P})([\zeta])=1-|\langle\zeta,\xi_0\rangle|^2 \end{array}$$

şeklinde tanımlı dönüşüm sürekli olup *Lemma 2.3.1* deki bölüm dönüşümünden kalkan bir ρ dönüşümü için

$$\rho \text{ süreklidir} \iff \rho\circ\mathcal{P} \text{ süreklidir.}$$

ifadesinden ρ dönüşümü süreklidir.

Sonuç olarak; ρ dönüşümü iyi tanımlı, sürekli ve $[\xi_0]\neq[\zeta]$ iken $\rho([\xi_0])\neq\rho([\zeta])$ olup bu bilgileri kullanarak $\mathbb{HP}^{n-1}$ uzayının Hausdorff olduğunu gösterebiliriz.

$\mathbb{R}$ Hausdorff olduğundan farklı herhangi iki noktanın ayrık açık komşulukları mevcuttur. O halde; $\rho([\xi_0])$ noktasını içeren I_{ξ_0} ve $\rho([\zeta])$ yı içeren I_ζ açık aralıkları vardır öyle ki $I_{\xi_0}\cap I_\zeta=\emptyset$ dir. ρ dönüşümü sürekli olduğundan $U_{\xi_0}=\rho^{-1}(I_{\xi_0})$ ve $U_\zeta=\rho^{-1}(I_\zeta)$ kümeleri $\mathbb{HP}^{n-1}$ de açık olup bu kümeler ayrıktır. Aynı zamanda; $[\xi_0]\in U_{\xi_0}$ ve $[\zeta]\in U_\zeta$ dır. Böylece; $\mathbb{HP}^{n-1}$ uzayında farklı herhangi iki noktanın ayrık açık komşulukları mevcut olduğundan bu uzay Hausdorff'dur. ■

Lemma 5.0.4. $\mathbb{HP}^{n-1}$ *kuaterniyonik projektif uzayı yerel öklidyendir.*

İspat. $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n) \in S^{4n-1}$ olsun. Bu durumda en az bir $k = 1, \ldots, n$ için $\xi^k \neq 0$ dır. Buradan;

$$\xi^k \neq 0 \Longleftrightarrow ||a||^2 = 1 \text{ olan } \forall a \in \mathbb{H} \text{ için } \xi^k a \neq 0$$

olup bir her bir $k = 1, \ldots, n$ için

$$U_k = \{[\xi] \in \mathbb{HP}^{n-1} : \xi^k \neq 0\}$$

olsun. Bu durumda;

$$\mathcal{P}^{-1}(U_k)) = \{\xi a \in S^{4n-1} : \xi^k \neq 0\ ,\ a \in S^3\} \subset S^{4n-1}$$

olur ki bu küme S^{4n-1} de açıktır. $k = 1, \ldots, n$ için φ_k dönüşümü

$$\begin{aligned} \varphi_k : U_k \quad &\rightarrow \quad \mathbb{H}^{n-1} \\ [\xi] \quad &\mapsto \quad \varphi_k([\xi]) = \varphi_k([\xi^1], \ldots, [\xi^n]) \\ &\qquad\qquad = (\xi^1(\xi^k)^{-1}, \ldots, \hat{1}, \ldots, \xi^n(\xi^k)^{-1}) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Burada $\hat{1}$ ifadesi k. girdideki 1 in yok sayıldığı anlamındadır. Bu şekilde tanımlanan φ_k dönüşümü bir homeomorfizm dönüşümüdür. Şimdi bunu gösterelim.

İyi tanımlılık : $[\zeta] = [\xi]$ olsun. $\xi^k \neq 0$ ise $\zeta^k \neq 0$ dır. Ayrıca; $\zeta = \xi a$ olduğundan $\zeta^k = \xi^k a$ dır. Dolayısıyla $(\zeta^k)^{-1} = a^{-1}(\xi^k)^{-1}$ olur ki her bir $i = 1, \ldots, n$ için

$$\zeta^i(\zeta^k)^{-1} = (\xi^i a)a^{-1}(\xi^k)^{-1} = \xi^i(\xi^k)^{-1}$$

elde edilir. Buradan;

$$\zeta^i(\zeta^k)^{-1} = \xi^i(\xi^k)^{-1}$$

olduğundan $\varphi_k([\zeta]) = \varphi_k([\xi])$ olup φ_k *iyi tanımlıdır* denir.

Örtenlik : Bir $k = 1, \ldots, n$ seçilip sabitlensin.

$$h = (h_1, \ldots, k_{k-1}, h_k, \ldots, h_{n-1}) \in \mathbb{H}^{n-1}$$

olmak üzere k. girdiye 1 yazılırsa

$$\xi_0 = (h_1, \ldots, h_{k-1}, 1, h_k, \ldots, h_{n-1}) \in \mathbb{H}^n - \{0\}$$

olacak şekilde ξ_0 elemanı vardır. η dönüşümü hatırlanacak olunursa

$$\begin{aligned} \eta : \mathbb{H}^n - \{0\} &\rightarrow S^{4n-1} \\ \xi &\mapsto \eta(\xi) = \xi(<\xi, \xi>)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

olup aşağıdaki diyagram çizilebilir.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{H}^n - \{0\} \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "\mathcal{Q}"'] & S^{4n-1} \arrow[d, "\mathcal{P}"] \\ & \mathbb{HP}^{n-1} \end{tikzcd}$$

$$\eta(\xi_0) = \eta(h_1, \ldots, h_{k-1}, 1, h_k, \ldots, h_{n-1}) = \xi_0(<\xi_0, \xi_0>)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{h_1}{(<\xi_0,\xi_0>)^{\frac{1}{2}}}, \ldots, \frac{1}{(<\xi_0,\xi_0>)^{\frac{1}{2}}}, \ldots, \frac{h_{n-1}}{(<\xi_0,\xi_0>)^{\frac{1}{2}}} \right)$$

olup $\eta(\xi_0)$ ın k. girdisini $(\eta(\xi_0))^k$ ile gösterirsek

$$(\eta(\xi_0))^k = \frac{1}{(<\xi_0, \xi_0>)^{\frac{1}{2}}}$$

olup sıfırdan farklıdır. O halde; $[\eta(\xi_0)] \in U_k$ dır. Ayrıca;

$$((\eta(\xi_0))^k)^{-1} = \left(\frac{1}{(<\xi_0, \xi_0>)^{\frac{1}{2}}} \right)^{-1} = (<\xi_0, \xi_0>)^{\frac{1}{2}}$$

olup

$\varphi_k([\eta(\xi_0)]) = \varphi_k(\eta(h_1, \ldots, 1, \ldots, h_{n-1}))$

$= \left(\frac{h_1}{(<\xi_0,\xi_0>)^{\frac{1}{2}}}((\eta(\xi_0))^k)^{-1}, \ldots, \frac{1}{(<\xi_0,\xi_0>)^{\frac{1}{2}}}((\eta(\xi_0))^k)^{-1}, \ldots, \frac{h_{n-1}}{(<\xi_0,\xi_0>)^{\frac{1}{2}}}((\eta(\xi_0))^k)^{-1} \right)$

$= \left(\frac{h_1}{(<\xi_0,\xi_0>)^{\frac{1}{2}}}(<\xi_0, \xi_0>)^{\frac{1}{2}}, \ldots, \frac{1}{(<\xi_0,\xi_0>)^{\frac{1}{2}}}(<\xi_0, \xi_0>)^{\frac{1}{2}}, \ldots, \frac{h_{n-1}}{(<\xi_0,\xi_0>)^{\frac{1}{2}}}(<\xi_0, \xi_0>)^{\frac{1}{2}} \right)$

$= (h_1, \ldots, \hat{1}, \ldots, h_{n-1})$

$= (h_1, \ldots, h_{n-1})$ elde edilir.

Sonuç olarak; $\forall\, h = (h_1, \ldots, h_{k-1}, h_k, \ldots, h_{n-1}) \in \mathbb{H}^{n-1}$ için $\varphi_k([\eta(\xi_0)]) = h$ olacak şekilde $[\eta(\xi_0)] \in U_k$ var olduğundan φ_k dönüşümü *örtendir.*

Birebirlik : $[\zeta]$, $[\xi] \in U_k$ olmak üzere $\varphi_k([\zeta]) = \varphi_k([\xi])$ olsun. $[\zeta] = [\xi]$ olduğu gösterilirse φ_k dönüşümü bire-birdir denir. $\varphi_k([\zeta]) = \varphi_k([\xi])$ ise

$$\begin{aligned} \varphi_k([\zeta^1, \ldots, \zeta^k, \ldots, \zeta^n]) &= \varphi_k([\xi^1, \ldots, \xi^k, \ldots, \xi^n]) \\ (\zeta^1(\zeta^k)^{-1}, \ldots, \hat{1}, \ldots, \zeta^n(\zeta^k)^{-1}) &= (\xi^1(\xi^k)^{-1}, \ldots, \hat{1}, \ldots, \xi^n(\xi^k)^{-1}) \end{aligned}$$

yazılır. Bu eşitlikten

$$\begin{aligned} \zeta^1(\zeta^k)^{-1} &= \xi^1(\xi^k)^{-1} \\ \vdots\quad &\quad \vdots \\ \zeta^n(\zeta^k)^{-1} &= \xi^n(\xi^k)^{-1} \end{aligned}$$

olup buradan

$$\begin{aligned} \zeta^1 &= \xi^1(\xi^k)^{-1}\zeta^k \\ \vdots\quad &\quad \vdots \\ \zeta^n &= \xi^n(\xi^k)^{-1}\zeta^k \end{aligned}$$

bulunur. Böylece;

$$(\zeta^1, \ldots, \zeta^k, \ldots, \zeta^n) = (\xi^1, \ldots, \xi^k, \ldots, \xi^n)(\xi^k)^{-1}\zeta^k$$

elde edilir ki $||\zeta|| = ||\xi|| = 1$ olduğundan $||(\xi^k)^{-1}\zeta^k|| = 1$ olup $(\xi^k)^{-1}\zeta^k \in S^3$ dür. O halde; $\zeta \sim \xi$ olup $[\zeta] = [\xi]$ dir. Böylece; φ_k dönüşümü *birebir-dir.*

Süreklilik : φ_k dönüşümünün sürekli olduğunu göstermek için *Lemma* 2.3.1 ile $\varphi_k \circ \mathcal{P} : \mathcal{P}^{-1}(U_k) \longrightarrow \mathbb{HP}^{n-1}$ dönüşümünün sürekliliğinden faydalanacağız.

$$\begin{tikzcd} S^{4n-1} \arrow[r, "\mathcal{P}"] \arrow[dr, "\varphi_k \circ \mathcal{P}"'] & U_k \arrow[d, "\varphi_k"] \\ & \mathbb{H}^{n-1} \end{tikzcd}$$

U_k üzerindeki alt uzay topolojisi $\mathcal{P} : \mathcal{P}^{-1}(U_k) \longrightarrow U_k$ dönüşümü ile belirlenen bölüm topolojisi ile denktir.

$$\varphi_k \circ \mathcal{P} : S^{4n-1} \longrightarrow \mathbb{H}^{n-1}$$

$$\begin{aligned}(\varphi_k \circ \mathcal{P})(\xi^1, \ldots, \xi^k, \ldots, \xi^n) &= (\xi^1, \ldots, \xi^k, \ldots, \xi^n)(\varphi_k(\mathcal{P}(\xi^1, \ldots, \xi^k, \ldots, \xi^n) \\ &= \varphi_k[\xi^1, \ldots, \xi^k, \ldots, \xi^n] \\ &= (\xi^1(\xi^k)^{-1}, \ldots, \hat{1}, \ldots, \xi^n(\xi^k)^{-1})\end{aligned}$$

olup bu dönüşüm bir öklidyen uzaydan diğerine sürekli bir dönüşüm olarak yazılabileceğinden $\varphi_k \circ \mathcal{P}$ süreklidir. Diğer yandan; *Lemma* 2.3.1 deki

$$\varphi_k \quad \text{süreklidir} \Longleftrightarrow \varphi_k \circ \mathcal{P} \quad \text{süreklidir}$$

ifadesinden φ_k dönüşümünün sürekli olduğu söylenir. φ_k dönüşümü bire-bir ve örten olduğundan tersi mevcuttur.

$$\varphi_k^{-1} : \mathbb{H}^{n-1} \longrightarrow U_k \subset \mathbb{HP}^{n-1}$$

olup $(h_1, \ldots, h_{k-1}, \ldots, h_{k+1}, \ldots, h_{n-1}) \in \mathbb{H}^{n-1}$ olmak üzere $\xi_0 = (h_1, \ldots, h_{k-1}, 1, h_{k+1}, \ldots, h_{n-1}) \in \mathbb{H}^n - \{0\}$ olacak şekilde ξ_0 elemanı vardır. 1 elemanı k. girdidedir. Buradan;

$$\varphi_k^{-1}(h_1, \ldots, h_{n-1}) = \left[\tfrac{h_1}{||\xi_0||}, \ldots, \tfrac{1}{||\xi_0||}, \ldots, \tfrac{h_{n-1}}{||\xi_0||}\right]$$

olup sürekli üç dönüşüm

$$\mathbb{H}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{H}^n - \{0\} \xrightarrow{\eta} S^{4n-1} \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathbb{HP}^{n-1}$$

şeklinde tanımlanabilir. φ_k^{-1} bu üç sürekli dönüşümün bileşkesi olduğundan sürekli bir dönüşümdür.

Sonuç olarak; φ_k dönüşümü bire-bir, örten, sürekli ve tersi de sürekli olduğundan bir homeomorfizmdir. Böylece; $\mathbb{HP}^{n-1}$ in her noktasının bir U_k açık komşuluğu ile $\mathbb{H}^{n-1}(\mathbb{H}^{n-1} \cong \mathbb{R}^{4n-4})$ uzayı arasında bir φ_k homeomorfizmi var olduğundan $\mathbb{HP}^{n-1}$ kuaterniyonik projektif uzayı $(4n-4)$ boyutlu *yerel öklidyen* bir uzaydır. ■

Lemma 5.0.5. $\mathbb{HP}^{n-1}$ *kuaterniyonik projektif uzayı* 2. *sayılabilir uzaydır.*

İspat. $k = 1, \ldots, n$ için $\xi^k \neq 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\varphi_k : U_k &\to \mathbb{H}^{n-1} \\ [\xi] &\mapsto \varphi_k([\xi]) = \varphi_k([\xi^1], \ldots, [\xi^n])\end{aligned}$$

$$= (\xi^1(\xi^k)^{-1}, \ldots, \hat{1}, \ldots, \xi^n(\xi^k)^{-1})$$

şeklinde tanımlanan φ_k dönüşümleri homeomorfizm dönüşümleri olduğundan $U_k \cong \mathbb{H}^{n-1}$ olarak gösterilebilir. $\mathbb{H}^{n-1} \cong \mathbb{R}^{4n-4}$ ve $\mathbb{R}^{4n-4}$ öklid uzayı 2. sayılabilir uzay olup 2. sayılabilir uzay olma topolojik bir özellik yani homeomorfizm altında korunan bir özellik olduğundan $\mathbb{H}^{n-1}$ de 2. sayılabilir uzaydır. Benzer olarak; $k = 1, \ldots, n$ için U_k lar da 2. sayılabilir uzaydır. U_k lar 2. sayılabilir uzay olduğundan sayılabilir bir $\mathcal{B}_k$ tabanına sahiptirler. Bu durumda;

$$\bigcup_{i=1}^{n} U_k = \mathbb{HP}^{n-1}$$

olup

$$\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{B}_k$$

koleksiyonu $\mathbb{HP}^{n-1}$ için bir tabandır. Gerçekten; $U \subset \mathbb{HP}^{n-1}$ açık olsun.

$$U = U \cap \mathbb{HP}^{n-1} = U \cap \bigcup_{i=1}^{n} U_k = (U \cap U_1) \cup \cdots \cup (U \cap U_n)$$

olup U alt kümesi $\mathcal{B}$ daki elemanların keyfi birleşimi şeklinde yazılabilir. Böylece; $\mathcal{B}$ koleksiyonu $\mathbb{HP}^{n-1}$ için bir taban olup sayılabilir sayıdaki sonlu kümenin birleşimi olduğundan sayılabilirdir. $\mathbb{HP}^{n-1}$ uzayı sayılabilir bir $\mathcal{B}$ tabanına sahip olduğundan 2. sayılabilir uzaydır. ■

Sonuç 5.0.6. $\mathbb{HP}^{n-1}$ *kuaterniyonik projektif uzayı Hausdorff, yerel öklidyen ve 2. sayılabilir uzay olduğundan topolojik bir manifolddur.*

5.1 $\mathbb{HP}^{n-1}$ Uzayının Kart Dönüşümleri ve Örtüşme Fonksiyonları

$\mathbb{HP}^{n-1}$ uzayı topolojik bir manifold olup bu uzay için kart dönüşümleri ve örtüşme fonksiyonlarını yazabiliriz. $k = 1, \ldots, n$ olmak üzere

$$U_k = \{[\xi] \in \mathbb{HP}^{n-1} : \xi^k \neq 0\}$$

açığı ve

$$\begin{aligned} \varphi_k : U_k &\to \mathbb{H}^{n-1} \\ [\xi] &\mapsto \varphi_k([\xi]) = \varphi_k([\xi^1], \ldots, [\xi^n]) \end{aligned}$$

$$= (\xi^1(\xi^k)^{-1}, \ldots, \hat{1}, \ldots, \xi^n(\xi^k)^{-1})$$

şeklinde tanımlanan homeomorfizm dönüşümü ile (U_k, φ_k) çifti bir kart olur. $\mathbb{HP}^{n-1}$ üzerinde herhangi iki kart (U_1, φ_1) ve (U_2, φ_2) olsun. $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ veya $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ iken

$$\varphi_1 \circ {\varphi_2}^{-1} : \varphi_2(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \varphi_1(U_1 \cap U_2)$$

$$\varphi_2 \circ {\varphi_1}^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

örtüşme fonksiyonları sürekli ve her mertebeden türevlenebilir ise bu kartlara C^∞**- *uyumlu*** denir. $k = 1, \ldots, n$ kartları için örtüşme fonksiyonları aşağıdaki gibi bulunabilir. $1, \ldots, n$ arasından $i < j$ olacak şekilde i ve j seçilip sabitlensin. Bu durumda;

$$\varphi_i \circ {\varphi_j}^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$$

$$(\varphi_i \circ {\varphi_j}^{-1})(\xi^1, \ldots, \xi^i, \ldots, \xi^j, \ldots, \xi^{n-1}) = \varphi_i({\varphi_j}^{-1}(\xi^1, \ldots, \xi^i, \ldots, \xi^j, \ldots, \xi^{n-1}))$$

$$= \varphi_i \left[\xi^1, \ldots, \xi^i, \ldots, 1, \xi^j, \ldots, \xi^{n-1}\right]$$

$$= \varphi_i \left[\frac{\xi^1}{\sqrt{1+||\xi_0||^2}}, \ldots, \frac{\xi^i}{\sqrt{1+||\xi_0||^2}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{1+||\xi_0||^2}}, \frac{\xi^j}{\sqrt{1+||\xi_0||^2}}, \ldots, \frac{\xi^{n-1}}{\sqrt{1+||\xi_0||^2}}\right]$$

$$= (\tfrac{\xi^1}{\xi^i}, \ldots, \hat{1}, \ldots, \tfrac{1}{\xi^i}, \tfrac{\xi^j}{\xi^i}, \ldots, \tfrac{\xi^{n-1}}{\xi^i})$$

$$= (\tfrac{\xi^1}{\xi^i}, \ldots, \tfrac{1}{\xi^i}, \tfrac{\xi^j}{\xi^i}, \ldots, \tfrac{\xi^{n-1}}{\xi^i})$$

ile

$$\varphi_j \circ {\varphi_i}^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

$$(\varphi_j \circ {\varphi_i}^{-1})(\xi^1, \ldots, \xi^i, \ldots, \xi^j, \ldots, \xi^{n-1}) = \varphi_j({\varphi_i}^{-1}(\xi^1, \ldots, \xi^i, \ldots, \xi^j, \ldots, \xi^{n-1}))$$

$$= \varphi_j \left[\xi^1, \ldots, 1, \ldots, \xi^j, \ldots, \xi^{n-1}\right]$$

$$= \varphi_j \left[\frac{\xi^1}{\sqrt{1+||\xi_0||^2}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{1+||\xi_0||^2}}, \ldots, \frac{\xi^j}{\sqrt{1+||\xi_0||^2}}, \ldots, \frac{\xi^{n-1}}{\sqrt{1+||\xi_0||^2}}\right]$$

$$= (\tfrac{\xi^1}{\xi^{j-1}}, \ldots, \tfrac{1}{\xi^{j-1}}, \ldots, \hat{1}, \ldots, \tfrac{\xi^{n-1}}{\xi^{j-1}})$$

$$= (\tfrac{\xi^1}{\xi^{j-1}}, \ldots, \tfrac{1}{\xi^{j-1}}, \ldots, \tfrac{\xi^{n-1}}{\xi^{j-1}})$$

şeklinde tanımlı $(\varphi_i \circ {\varphi_j}^{-1})$ ve $(\varphi_j \circ {\varphi_i}^{-1})$ örtüşme dönüşümleri öklid koordinatlarda yazıldığında sürekli ve her mertebeden kısmi türevleri mevcut olduğundan (U_i, φ_i) ve (U_j, φ_j) kartları C^∞- uyumludur. $\mathbb{HP}^{n-1}$ üzerinde ***diferansiyellenebilir bir atlas***, herhangi ikisinin C^∞- uyumlu olduğu ve $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha = \mathbb{CP}^{n-1}$ olacak şekildeki kartların $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ ailesi olduğundan $\mathcal{A} = \{(U_k, \varphi_k)\}_{k=1,\ldots,n}$ ailesi $\mathbb{HP}^{n-1}$ için $(4n-4)$ boyutlu diferansiyellenebilir bir atlastır.

$n = 2$ durumunda örtüşme fonksiyonları özel bir öneme sahiptir. $n = 2$ için $\mathbb{HP}^1$ üzerinde (U_1, φ_1) ve (U_2, φ_2) kartları mevcut olup bunların kart dönüşümleri

$$U_1 = \{\left[\xi^1, \xi^2\right] \in \mathbb{HP}^1 : \xi^1 \neq 0\}$$

$$U_2 = \{\left[\xi^1, \xi^2\right] \in \mathbb{HP}^1 : \xi^2 \neq 0\}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \varphi_1 : U_1 &\longrightarrow \mathbb{H} \\ [\xi^1, \xi^2] &\mapsto \varphi_1([\xi^1, \xi^2]) = (\hat{1}, \xi^2(\xi^1)^{-1}) = \xi^2(\xi^1)^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_1^{-1} : \mathbb{H} &\longrightarrow U_1 \\ h &\mapsto \varphi_1^{-1}(h) = [1, h] = \left[\tfrac{1}{\sqrt{1+h^2}}, \tfrac{h}{\sqrt{1+h^2}}\right] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \varphi_2 : U_2 &\longrightarrow \mathbb{H} \\ [\xi^1, \xi^2] &\mapsto \varphi_1([\xi^1, \xi^2]) = (\xi^1(\xi^2)^{-1}, \hat{1}) = \xi^1(\xi^2)^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2^{-1} : \mathbb{H} &\longrightarrow U_2 \\ z &\mapsto \varphi_2^{-1}(h) = [h, 1] = \left[\tfrac{h}{\sqrt{1+h^2}}, \tfrac{1}{\sqrt{1+h^2}}\right] \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı olup örtüşme fonksiyonları

$$\begin{aligned} \varphi_1 \circ {\varphi_2}^{-1} : \varphi_2(U_1 \cap U_2) &\longrightarrow \varphi_1(U_1 \cap U_2) \\ h &\mapsto (\varphi_1 \circ {\varphi_2}^{-1})(h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\varphi_1 \circ {\varphi_2}^{-1})(h) &= \varphi_1({\varphi_2}^{-1}(h)) \\ &= \varphi_1([h, 1]) \\ &= (hh^{-1}, h^{-1}) \\ &= (\hat{1}, h^{-1}) \end{aligned}$$

$$= h^{-1}$$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_2 \circ {\varphi_1}^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) & \longrightarrow & \varphi_2(U_1 \cap U_2) \\ h & \mapsto & (\varphi_2 \circ {\varphi_1}^{-1})(h) \end{array}$$

$$\begin{aligned} (\varphi_2 \circ {\varphi_1}^{-1})(h) &= \varphi_2({\varphi_1}^{-1}(h)) \\ &= \varphi_2([1, h]) \\ &= (h^{-1}, hh^{-1}) \\ &= (h^{-1}, \hat{1}) \\ &= h^{-1} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Bu durumda;

$$(\varphi_1 \circ {\varphi_2}^{-1})(h) = h^{-1} = (\varphi_2 \circ {\varphi_1}^{-1})(h) \quad , \quad h \in \mathbb{H} - \{0\}$$

olup

$$\varphi_1(U_1 \cap U_2) = \varphi_2(U_1 \cap U_2) = \mathbb{H} - \{0\}$$

olarak bulunur.

$n = 3$ durumunda $\mathbb{HP}^2$ üzerinde (U_1, φ_1), (U_2, φ_2) ve (U_3, φ_3) kartları mevcut olup bunların kart dönüşümleri

$$U_1 = \{\left[\xi^1, \xi^2, \xi^3\right] \in \mathbb{HP}^1 : \xi^1 \neq 0\}$$

$$U_2 = \{\left[\xi^1, \xi^2, \xi^3\right] \in \mathbb{HP}^1 : \xi^2 \neq 0\}$$

$$U_3 = \{\left[\xi^1, \xi^2, \xi^3\right] \in \mathbb{HP}^2 : \xi^3 \neq 0\}$$

olmak üzere

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1 : U_1 & \longrightarrow & \mathbb{H}^2 \\ [\xi^1, \xi^2, \xi^3] & \mapsto & \varphi_1([\xi^1, \xi^2, \xi^3]) = (\hat{1}, \xi^2(\xi^1)^{-1}, \xi^3(\xi^1)^{-1}) = (\xi^2(\xi^1)^{-1}, \xi^3(\xi^1)^{-1}) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1^{-1} : \mathbb{H}^2 & \longrightarrow & U_1 \\ (h_1, h_2) & \mapsto & \varphi_1^{-1}(h_1, h_2) = [1, h_1, h_2] = \left[\frac{1}{\sqrt{1+h_1^2+h_2^2}}, \frac{h_1}{\sqrt{1+h_1^2+h_2^2}}, \frac{h_2}{\sqrt{1+h_1^2+h_2^2}}\right] \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_2 : U_2 & \longrightarrow & \mathbb{H}^2 \\ [\xi^1, \xi^2, \xi^3] & \mapsto & \varphi_2([\xi^1, \xi^2, \xi^3]) = (\xi^1(\xi^2)^{-1}, \hat{1}, \xi^3(\xi^2)^{-1}) = (\xi^1(\xi^2)^{-1}, \xi^3(\xi^2)^{-1}) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_2^{-1} : \mathbb{H}^2 & \longrightarrow & U_2 \\ (h_1, h_2) & \mapsto & \varphi_2^{-1}(h_1, h_2) = [h_1, 1, h_2] = \left[\frac{h_1}{\sqrt{1+h_1^2+h_2^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+h_1^2+h_2^2}}, \frac{h_2}{\sqrt{1+h_1^2+h_2^2}}\right] \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_3 : U_3 & \longrightarrow & \mathbb{H}^2 \\ [\xi^1, \xi^2, \xi^3] & \mapsto & \varphi_3([\xi^1, \xi^2, \xi^3]) = (\xi^1(\xi^3)^{-1}, \xi^2(\xi^3)^{-1}, \hat{1}) = (\xi^1(\xi^3)^{-1}, \xi^2(\xi^3)^{-1}) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_3^{-1} : \mathbb{H}^2 & \longrightarrow & U_3 \\ (h_1, h_2) & \mapsto & \varphi_3^{-1}(h_1, h_2) = [h_1, h_2, 1] = \left[\frac{h_1}{\sqrt{1+h_1^2+h_2^2}}, \frac{h_2}{\sqrt{1+h_1^2+h_2^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+h_1^2+h_2^2}}\right] \end{array}$$

şeklinde tanımlı olup örtüşme fonksiyonları

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1 \circ {\varphi_2}^{-1} : \varphi_2(U_1 \cap U_2) & \longrightarrow & \varphi_1(U_1 \cap U_2) \\ (h_1, h_2) & \mapsto & (\varphi_1 \circ {\varphi_2}^{-1})(h_1, h_2) \end{array}$$

$$\begin{aligned} (\varphi_1 \circ {\varphi_2}^{-1})(h_1, h_2) &= \varphi_1({\varphi_2}^{-1}(h_1, h_2)) \\ &= \varphi_1([h_1, 1, h_2]) \\ &= (h_1 h_1^{-1}, h_1^{-1}, h_2 h_1^{-1}) \\ &= (\hat{1}, h_1^{-1}, h_2 h_1^{-1}) \\ &= (h_1^{-1}, h_2 h_1^{-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_2 \circ {\varphi_1}^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) & \longrightarrow & \varphi_2(U_1 \cap U_2) \\ (h_1, h_2) & \mapsto & (\varphi_2 \circ {\varphi_1}^{-1})(h_1, h_2) \end{array}$$

$$\begin{aligned} (\varphi_2 \circ {\varphi_1}^{-1})(h_1, h_2) &= \varphi_2({\varphi_1}^{-1}(h_1, h_2)) \\ &= \varphi_2([1, h_1, h_2]) \\ &= (h_1^{-1}, h_1 h_1^{-1}, h_2 h_1^{-1}) \\ &= (h_1^{-1}, \hat{1}, h_2 h_1^{-1}) \\ &= (h_1^{-1}, h_2 h_1^{-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1 \circ {\varphi_3}^{-1} : \varphi_3(U_1 \cap U_3) & \longrightarrow & \varphi_1(U_1 \cap U_3) \\ (h_1, h_2) & \mapsto & (\varphi_1 \circ {\varphi_3}^{-1})(h_1, h_2) \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
(\varphi_1 \circ \varphi_3{}^{-1})(h_1, h_2) &= \varphi_1(\varphi_3{}^{-1}(h_1, h_2)) \\
&= \varphi_1([h_1, h_2, 1]) \\
&= (h_1 h_1^{-1}, h_2 h_1^{-1}, h_1^{-1}) \\
&= (\hat{1}, h_2 h_1^{-1}, h_1^{-1}) \\
&= (h_2 h_1^{-1}, h_1^{-1})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\varphi_3 \circ \varphi_1{}^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_3) & \longrightarrow & \varphi_3(U_1 \cap U_3) \\
(h_1, h_2) & \mapsto & (\varphi_3 \circ \varphi_1{}^{-1})(h_1, h_2)
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
(\varphi_3 \circ \varphi_1{}^{-1})(h_1, h_2) &= \varphi_3(\varphi_1{}^{-1}(h_1, h_2)) \\
&= \varphi_3([1, h_1, h_2]) \\
&= (h_2^{-1}, h_1 h_2^{-1}, h_2 h_2^{-1}) \\
&= (h_2^{-1}, h_1 h_2^{-1}, \hat{1}) \\
&= (h_2^{-1}, h_1 h_2^{-1})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\varphi_2 \circ \varphi_3{}^{-1} : \varphi_3(U_1 \cap U_3) & \longrightarrow & \varphi_2(U_1 \cap U_3) \\
(h_1, h_2) & \mapsto & (\varphi_2 \circ \varphi_3{}^{-1})(h_1, h_2)
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
(\varphi_2 \circ \varphi_3{}^{-1})(h_1, h_2) &= \varphi_2(\varphi_3{}^{-1}(h_1, h_2)) \\
&= \varphi_2([h_1, h_2, 1]) \\
&= (h_1 h_2^{-1}, h_2 h_2^{-1}, h_2^{-1}) \\
&= (h_1 h_2^{-1}, \hat{1}, h_2^{-1}) \\
&= (h_1 h_2^{-1}, h_2^{-1})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\varphi_3 \circ \varphi_2{}^{-1} : \varphi_2(U_2 \cap U_3) & \longrightarrow & \varphi_3(U_2 \cap U_3) \\
(h_1, h_2) & \mapsto & (\varphi_3 \circ \varphi_2{}^{-1})(h_1, h_2)
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
(\varphi_3 \circ \varphi_2{}^{-1})(h_1, h_2) &= \varphi_3(\varphi_2{}^{-1}(h_1, h_2)) \\
&= \varphi_3([h_1, 1, h_2]) \\
&= (h_1 h_2^{-1}, h_2^{-1}, h_2 h_2^{-1}) \\
&= (h_1 h_2^{-1}, h_2^{-1}, \hat{1}) \\
&= (h_1 h_2^{-1}, h_2^{-1})
\end{aligned}
$$

olarak bulunur.

$n = 4$ durumunda $\mathbb{HP}^3$ üzerinde (U_1, φ_1), (U_2, φ_2), (U_3, φ_3) ve (U_4, φ_4) olmak üzere dört kart mevcut olup kart dönüşümleri ile örtüşme fonksiyonları $\mathbb{HP}^1$ ve $\mathbb{HP}^2$ deki yol izlenerek benzer şekilde bulunabilir.

5.2 $\mathbb{HP}^1$ Projektif Uzayına Farklı Bir Bakış

$\mathbb{HP}^1$ $1-$boyutlu kuaterniyonik projektif uzayı $\mathbb{H}^2$ de orjin boyunca uzanan (orjin çıkarılmış) kuaterniyonik doğruların kümesi olup aynı zamanda S^7 küresinin S^3 çemberlerinin ayrık bir birleşimi olarak ayrıştığı ve her bir S^3 ün bir nokta olarak düşünüldüğü bir bölüm uzayı olarak alınabilir. Ayrıca; bu uzay S^4 küresine homeomorf olup şimdi $\mathbb{HP}^1 \cong S^4$ olduğunu göstereceğiz.

S^n n-küresi için steografik izdüşüm dönüşümleri ve bu dönüşümlerin örtüşme fonksiyonları *Bölüm* 2.2 de yer alıp şimdi ise özel olarak $n = 4$ için S^4 küresinin steografik izdüşüm dönüşümleri ve bu dönüşümlerin terslerini verelim.

$$S^4 = \{(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5) \in \mathbb{R}^5 : (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 + (x^5)^2 = 1\}$$

$N = \{(0, 0, 0, 0, 1)\} \in S^4$ ve $U_S = S^4 - \{N\}$ olmak üzere

$$\begin{array}{rcl} \varphi_S : U_S & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x^1, x^2, x^3, x^4, x^5) & \mapsto & \varphi_S(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5) = \left(\frac{x^1}{1-x^5}, \frac{x^2}{1-x^5}, \frac{x^3}{1-x^5}, \frac{x^4}{1-x^5}\right) \end{array}$$

olup bu dönüşümün tersi

$$\begin{array}{rcl} \varphi_S^{-1} : \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & U_S \\ y = (y^1, y^2, y^3, y^4) & \mapsto & \varphi_S^{-1}((y^1, y^2, y^3, y^4)) = \left(\frac{2y^1}{1+||y||^2}, \frac{2y^2}{1+||y||^2}, \frac{2y^3}{1+||y||^2}, \frac{2y^4}{1+||y||^2}, \frac{||y||^2-1}{1+||y||^2}\right) \end{array}$$

şeklindedir. Benzer olarak; $S = \{(0, 0, 0, 0, -1)\} \in S^4$ ve $U_N = S^4 - \{S\}$ olmak üzere

$$\begin{array}{rcl} \varphi_N : U_N & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x^1, x^2, x^3, x^4, x^5) & \mapsto & \varphi_N(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5) = \left(\frac{x^1}{1+x^5}, \frac{x^2}{1+x^5}, \frac{x^3}{1+x^5}, \frac{x^4}{1+x^5}\right) \end{array}$$

olup bu dönüşümün tersi

$$\begin{array}{rcl} \varphi_N^{-1} : \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & U_N \\ y = (y^1, y^2, y^3, y^4) & \mapsto & \varphi_N^{-1}(y^1, y^2, y^3, y^4) = \left(\frac{2y^1}{1+||y||^2}, \frac{2y^2}{1+||y||^2}, \frac{2y^3}{1+||y||^2}, \frac{2y^4}{1+||y||^2}, \frac{1-||y||^2}{1+||y||^2}\right) \end{array}$$

şeklindedir. Bu dönüşümler homeomorfizm dönüşümleri olup (U_N, φ_N) ve (U_S, φ_S), S^4 için steografik izdüşüm kartlarıdır. Bu kartların örtüşme fonksiyonları ise

$$\begin{array}{rcl} \varphi_S \circ \varphi_N^{-1} : \mathbb{R}^4 - \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 - \{0\} \\ y & \mapsto & (\varphi_S \circ \varphi_N^{-1})(y) = \frac{1}{y} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_N \circ \varphi_S{}^{-1} : \mathbb{R}^4 - \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 - \{0\} \\ y & \mapsto & \varphi_N \circ \varphi_S^{-1}(y) = \frac{1}{y} \end{array}$$

şeklinde olup

$$(\varphi_S \circ \varphi_N^{-1})(y) = \frac{1}{y} = (\varphi_N \circ \varphi_S^{-1})(y)$$

olarak bulunur. Burada $\mathbb{R}^4$ yerine $\mathbb{H}$ ve y yerine h alınırsa örtüşme fonksiyonları

$$\begin{array}{rcl} \varphi_S \circ \varphi_N^{-1} : \mathbb{H} - \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{H} - \{0\} \\ h & \mapsto & (\varphi_S \circ \varphi_N^{-1})(h) = (\bar{h})^{-1} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_N \circ \varphi_S{}^{-1} : \mathbb{H} - \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{H} - \{0\} \\ h & \mapsto & \varphi_N \circ \varphi_S^{-1}(h) = (\bar{h})^{-1} \end{array}$$

olup

$$(\varphi_S \circ \varphi_N^{-1})(h) = (\bar{h})^{-1} = (\varphi_N \circ \varphi_S^{-1})(h)$$

olarak bulunur.

Burada dikkat edilirse $\mathbb{HP}^1$ in kartlarının örtüşme fonksiyonları ile S^4 nin steografik izdüşüm kartlarının örtüşme fonksiyonları benzerdir. Tek fark S^4 nin örtüşme fonksiyonlarında eşlenik bulunmasıdır. Bu farkı $\mathbb{HP}^1$ in bir kartında küçük bir değişiklik yaparak ortadan kaldırabiliriz.

$$\begin{array}{rcl} \overline{\varphi_1} : U_1 & \longrightarrow & \mathbb{H} \\ [\xi] & \mapsto & \overline{\varphi_1}([\xi]) = \overline{\varphi_1([\xi])} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} (\overline{\varphi_1})^{-1} : \mathbb{H} & \longrightarrow & U_1 \\ h & \mapsto & (\overline{\varphi_1})^{-1}(h) = \overline{\varphi_1^{-1}(h)} \end{array}$$

şeklinde tanımlanan $\overline{\varphi_1}$ dönüşümü homeomorfizm dönüşümü ve $(U_1, \overline{\varphi_1})$ çifti $\mathbb{HP}^1$ için bir kart olup $\{(U_1, \overline{\varphi_1}), (U_2, \varphi_2)\}$ ailesi de $\mathbb{HP}^1$ için atlas yapısı oluşturur. Bu kartların örtüşme fonksiyonları ise

$$\begin{array}{rcl} \overline{\varphi_1} \circ {\varphi_2}^{-1} : \mathbb{H} - \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{H} - \{0\} \\ h & \mapsto & (\overline{\varphi_1} \circ {\varphi_2}^{-1})(h) = (\bar{h})^{-1} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_2 \circ {\varphi_1}^{-1} : \mathbb{H} - \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{H} - \{0\} \\ h & \mapsto & (\varphi_2 \circ (\overline{\varphi_1})^{-1})(h) = (\bar{h})^{-1} \end{array}$$

olarak bulunur. Bu dönüşümler ve Yapıştırma Lemması yardımıyla $\mathbb{HP}^1 \cong S^4$ olduğunu göstereceğiz.

$$\begin{array}{rcl} \varphi_N^{-1} \circ \overline{\varphi_1} : U_1 & \longrightarrow & U_N \\ \varphi_S^{-1} \circ \varphi_2 : U_2 & \longrightarrow & U_S \end{array}$$

homeomorfizm dönüşümleri gözönüne alınsın. Bu dönüşümler $U_1 \cap U_2$ üzerinde aynı değeri alırlar. Gerçekten; $[\xi] \in U_1 \cap U_2$ ise

$$\varphi_2([\xi]) \in \varphi_2(U_1 \cap U_2) = \mathbb{H} - \{0\}$$

olup $\mathbb{H} - \{0\}$ üzerinde $\overline{\varphi_1} \circ {\varphi_2}^{-1} = \varphi_N \circ {\varphi_S}^{-1}$ olduğundan $\varphi_2([\xi]) \in \mathbb{H} - \{0\}$ için

$$\begin{array}{rcl} (\overline{\varphi_1} \circ {\varphi_2}^{-1})(\varphi_2([\xi])) & = & (\varphi_N \circ {\varphi_S}^{-1})(\varphi_2([\xi])) \\ \overline{\varphi_1}([\xi]) & = & \varphi_N \circ (({\varphi_S}^{-1} \circ \varphi_2)([\xi])) \\ ({\varphi_N}^{-1} \circ \overline{\varphi_1})([\xi]) & = & {\varphi_N}^{-1} \circ \varphi_N \circ (({\varphi_S}^{-1} \circ \varphi_2)([\xi])) \\ ({\varphi_N}^{-1} \circ \overline{\varphi_1})([\xi]) & = & ({\varphi_S}^{-1} \circ \varphi_2)([\xi]) \end{array}$$

elde edilir ki bu eşitlik her $[\xi] \in U_1 \cap U_2$ için sağlandığından

$$({\varphi_N}^{-1} \circ \overline{\varphi_1})|_{U_1 \cap U_2} = ({\varphi_S}^{-1} \circ \varphi_2)|_{U_1 \cap U_2}$$

olarak bulunur. Bu durumda; Yapıştırma Lemmasından,

$$f([\xi]) = \begin{cases} ({\varphi_N}^{-1} \circ \overline{\varphi_1})([\xi]), & [\xi] \in U_1 \\ ({\varphi_S}^{-1} \circ \varphi_2)([\xi]), & [\xi] \in U_2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $f : \mathbb{HP}^1 \longrightarrow S^4$ dönüşümü süreklidir. Bu dönüşümün bileşenleri homeomorfizm ve $U_S \cup U_N = S^4$ olduğundan f dönüşümü bire-bir ve örtendir denir. f dönüşümü bire-bir ve örten olduğundan tersi mevcuttur. f dönüşümünün tersini bulmak için bu dönüşümün bileşenlerinin tersi olan

$$\begin{aligned}
(\varphi_N^{-1} \circ \overline{\varphi_1})^{-1} = (\overline{\varphi_1})^{-1} \circ \varphi_N : U_N &\longrightarrow U_1 \\
(\varphi_S^{-1} \circ \varphi_2)^{-1} = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_S : U_S &\longrightarrow U_2
\end{aligned}$$

homeomorfizm dönüşümleri ele alınsın. Bu dönüşümler $U_N \cap U_S$ üzerinde aynı değeri alırlar. Yani; $x \in U_N \cap U_S$ olmak üzere

$$\varphi_S(x) \in \varphi_S(U_N \cap U_S) = \mathbb{H} - \{0\}$$

olup $\mathbb{H} - \{0\}$ üzerinde $\varphi_N \circ {\varphi_S}^{-1} = \overline{\varphi_1} \circ {\varphi_2}^{-1}$ olduğundan $\varphi_S(x) \in \mathbb{H} - \{0\}$ için

$$\begin{aligned}
(\varphi_N \circ {\varphi_S}^{-1})(\varphi_2(x) &= (\overline{\varphi_1} \circ {\varphi_2}^{-1})(\varphi_2(x) \\
\varphi_N(x) &= \overline{\varphi_1} \circ (({\varphi_2}^{-1} \circ \varphi_S)(x)) \\
((\overline{\varphi_1})^{-1} \circ \varphi_N)(x) &= (\overline{\varphi_1})^{-1} \circ \varphi_1 \circ (({\varphi_2}^{-1} \circ \varphi_S)(x)) \\
((\overline{\varphi_1})^{-1} \circ \varphi_N)(x) &= ({\varphi_2}^{-1} \circ \varphi_S)(x)
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu eşitlik her $x \in U_N \cap U_S$ için sağlandığından

$$((\overline{\varphi_1})^{-1} \circ \varphi_N)|_{U_N \cap U_S} = ({\varphi_2}^{-1} \circ \varphi_S)|_{U_N \cap U_S}$$

olarak bulunur. Bu durumda; Yapıştırma Lemmasından,

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} ((\overline{\varphi_1})^{-1} \circ \varphi_N)(x), & x \in U_N \\ ({\varphi_2}^{-1} \circ \varphi_S)(x), & x \in U_S \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $f^{-1} : S^4 \longrightarrow \mathbb{HP}^1$ dönüşümü süreklidir.

Sonuç olarak; $f : \mathbb{HP}^1 \longrightarrow S^4$ dönüşümü sürekli, bire-bir, örten ve tersi de sürekli olduğundan bir homeomorfizm olup $\mathbb{HP}^1 \cong S^4$ olarak bulunur.

5.3 Kuaterniyonik Hopf Dönüşümleri

$$\begin{tikzcd} S^3 \arrow[r, hook, "i"] & S^{4n-1} \arrow[d, "\mathcal{P}"] \\ & \mathbb{HP}^{n-1} \end{tikzcd}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm ***Kuaterniyonik Hopf Dönüşümü*** olarak adlandırılır. Özel olarak $n = 2$ için $\mathbb{HP}^1 \cong S^4$ olduğundan

$$\begin{tikzcd} S^3 \arrow[r, hook, "i"] & S^7 \arrow[d, "\mathcal{P}"] \\ & S^4 \end{tikzcd}$$

olarak bulunur. Burada

$$\begin{aligned} h : S^7 &\longrightarrow S^4 \\ (x, y) &\mapsto h(x, y) = (2y\bar{x}, ||x||^2 - ||y||^2) \end{aligned}$$

Hopf dönüşümünü S^3 lifi ile ele alacak olursak S^7 küresi, S^4 küresi üzerinde parametrize edilen S^3 kürelerinin bir ailesi olarak düşünülebilir.

5.4 $\mathbb{HP}^{n-1}$ Projektif Uzayının Bazı Topolojik Özellikleri

1) $\mathbb{HP}^{n-1}$ *kuaterniyonik projektif uzayı kompakttır.*

$\mathbb{HP}^{n-1}$ kuaterniyonik projektif uzayı için $\mathcal{P} : S^{4n-1} \longrightarrow \mathbb{HP}^{n-1}$ bölüm dönüşümünü ele alalım. S^{4n-1} küresi kompakt ve $\mathcal{P}$ bölüm dönüşümü örten ve süreklİ olduğundan $\mathbb{HP}^{n-1}$ projektif uzayı da kompakttır.

2) $\mathbb{HP}^{n-1}$ *kuaterniyonik projektif uzayı yol bağlantılıdır.*

$\mathbb{HP}^{n-1}$ kuaterniyonik projektif uzayı için

$$\mathcal{P} : S^{4n-1} \longrightarrow \mathbb{HP}^{n-1}$$

bölüm dönüşümü dikkate alınsın. $\mathcal{P}$ bölüm dönüşümü sürekli ve örten bir dönüşüm olup S^{4n-1} küresi yol bağlantılı olduğundan $\mathbb{HP}^{n-1}$ Kuaterniyonik projektif uzayı da yol bağlantılı olur.

3) $\mathbb{HP}^{n-1}$ *kuaterniyonik projektif uzayı bağlantılıdır.*

Yol bağlantılı her uzay bağlantılı ve $\mathbb{HP}^{n-1}$ kuaterniyonik projektif uzayı da yol bağlantılı olduğundan bağlantılı uzaydır.

6 OKTONYONİK PROJEKTİF UZAYLAR

Oktonyonik projektif uzayların da reel, kompleks ve kuaterniyonik projektif uzaylardakine benzer bir yol izlenerek oluşturulabileceği düşünülebilir. Fakat oktonyonların asosyatiflik özelliğine sahip olmaması bu durumu zorlaştırır. Oktonyonların iki elemanlı alt cebri asosyatiflik özelliğini sağladığından sadece $\mathbb{OP}^1$ ve $\mathbb{OP}^2$ oktonyonik projektif uzaylarını inşa etmek mümkündür. $n \geq 4$ için $\mathbb{OP}^{n-1}$ oktonyonik projektif uzayı mevcut değildir([8]).

6.1 $\mathbb{OP}^1$ Oktonyonik Projektif Uzayı

$\mathbb{O}^2$ de $(0,0)$ elemanı 0 ile gösterilsin. $\mathbb{O}^2$ nin $\mathbb{O}^2 - \{0\}$ topolojik alt uzayı üzerinde bir bağıntı aşağıdaki gibi tanımlansın. $\zeta, \xi \in \mathbb{O}^2 - \{0\}$ olmak üzere

$$\zeta \sim \xi \Longleftrightarrow \text{Sıfırdan farklı bir } a \in \mathbb{O} \text{ vardır öyle ki } \zeta = \xi a \text{ dır}$$

Bu şekilde tanımlanan $'\sim'$ bağıntısı $\mathbb{O}^2 - \{0\}$ üzerinde bir denklik bağıntısı değildir. Çünkü;

Yansıma : $\xi \sim \xi \Longleftrightarrow$ Sıfırdan farklı $1 \in \mathbb{O}$ vardır öyle ki $\xi = \xi \cdot 1$ dir

Simetri : $\zeta \sim \xi \Longleftrightarrow$ Sıfırdan farklı $a \in \mathbb{O}$ vardır öyle ki $\zeta = \xi a$ dir

$\Longleftrightarrow$ Sıfırdan farklı bir $a^{-1} \in \mathbb{O}$ vardır öyle ki $\xi = \zeta a^{-1}$ dir

$\Longleftrightarrow \xi \sim \zeta$

Geçişme : $\eta \in \mathbb{O}^2 - \{0\}$ olmak üzere

$\zeta \sim \eta \Longleftrightarrow$ Sıfırdan farklı bir $a \in \mathbb{O}$ vardır öyle ki $\zeta = \eta a$

$\eta \sim \xi \Longleftrightarrow$ Sıfırdan farklı bir $b \in \mathbb{O}$ vardır öyle ki $\eta = \xi b$

olsun. Buradan;

$\zeta = (\xi b)a$ olup oktonyonlar asosyatiflik özelliğini sağlamadığından $(\xi b)a \neq \xi(ba)$ olup her zaman bir $(ba) \in \mathbb{O}$ mevcut olmayıp $\zeta \nsim \xi$ dir.

Bu durumda; $\mathbb{O}^2 - \{0\}$ üzerinde tanımlanan $'\sim'$ bağıntısı yansıma ve simetri özelliğini sağlayıp geçişme özelliğini sağlamadığından bir denklik bağıntısı değildir. Bu problemi çözmek için $\mathbb{O}^2 - \{0\}$ ın

$$V_1 = \mathbb{O} \times \{1\} = \{(x,1) : x \in \mathbb{O}\}$$

$$V_2 = \{1\} \times \mathbb{O} = \{(1,y) : y \in \mathbb{O}\}$$

alt kümelerini ele alalım. Bu kümelerin birleşimi

$$V = V_1 \cup V_2$$

olsun. Bu küme üzerinde bir $'\sim'$ bağıntısı

$$x \neq 0 \text{ ise } [x,1] = [x^{-1},1]$$

$$y \neq 0 \text{ ise } [1,y] = [1,y^{-1}]$$

özdeşlikleri ile tanımlansın. Bu şekilde tanımlanan $'\sim'$ bağıntısı V üzerinde bir denklik bağıntısı olup simetri ve geçişme özelliğinin sağlandığını göstermek yeterlidir.

Simetri: $[x,1] = [1,y]$ olsun. Bu durumda; $y = x^{-1}$ olup $[1,y] = [1,x^{-1}] = [x,1]$ dir. Benzer olarak;

$[1,y] = [x,1]$ olsun. Bu durumda; $x = y^{-1}$ olup $[x,1] = [y^{-1},1] = [1,y]$ dir.

O halde; V üzerinde tanımlanan bu $'\sim'$ bağıntısı simetriktir.

Geçişme: $[x_1,1] = [1,y]$ ve $[1,y] = [x_2,1]$ olsun. Bu durumda; $y = {x_1}^{-1}$ ve $[1,{x_1}^{-1}] = [x_2,1]$ olup $[x_1,1] = [x_2,1]$ dir.

$[1,y_1] = [x,1]$ ve $[x,1] = [1,y_2]$ olsun. Bu durumda; $x = {y_1}^{-1}$ ve $[{y_1}^{-1},1] = [1,y_2]$ olup $[1,y_1] = [1,y_2]$ dir.

Böylece; V üzerinde tanımlanan bu $'\sim'$ bağıntısı geçişme özelliğini de sağlar.

O halde; $'\sim'$ bir denklik bağıntısı olup bu bağıntı ile V denklik sınıflarına ayrılır. Denklik sınıfları ise

$x \neq 0$ için $[x,1] = \{(x,1),(x^{-1},1)\}$

$y \neq 0$ için $[1,y] = \{(1,y),(1,y^{-1})\}$

$[0,1] = \{(0,1)\}$

$[1,0] = \{(1,0)\}$

olarak tanımlanır.

$'\sim'$ denklik bağıntısı ile oluşturulan V nin denklik sınıflarının kümesi $\mathbb{OP}^1$ ile gösterilsin. Ayrıca; $\mathbb{OP}^1 = \{[\xi] : \xi \in V\}$ kümesi

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} : V &\rightarrow V/_{\sim} \\ \xi &\mapsto \mathbb{Q}(\xi) = [\xi] \end{aligned}$$

dönüşümü ile belirlenen bölüm topolojisine sahiptir. Bu şekilde tanımlanan $\mathbb{OP}^1$ uzayı ***1-boyutlu oktonyonik projektif uzay*** olarak adlandırılır. Ayrıca bu uzayı farklı bir yol ile de inceleyebiliriz.

$S^{15} = \{\ \xi \in \mathbb{O}^2\ :< \xi, \xi >= 1\}$ 15-boyutlu birim küresini ele alalım.

$(1, 2) \in V$ ve $(1, 2) \notin S^{15}$ olduğundan $V \nsubseteq S^{15}$ dir.

$(\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{j}{\sqrt{2}}) \in S^{15}$ ve $(\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{j}{\sqrt{2}}) \notin V$ olduğundan $S^{15} \nsubseteq V$ dir. Fakat; S^{15} in elemanlarını V deki elemanlar ile şu şekilde denkleştirebiliriz.

$(x, y) \in S^{15}$ olsun. O halde; x ve y den en az biri sıfırdan farklıdır. Kabul edelim ki $x \neq 0$ olsun.

$$(x, y) = (1 \cdot x, yx^{-1}x) = (1, yx^{-1})x$$

olup $[x, y] = [1, yx^{-1}]$ dir. Yada; $y \neq 0$ olsun.

$$(x, y) = (xy^{-1}y, 1 \cdot y) = (xy^{-1}, 1)y$$

olup $[x, y] = [xy^{-1}, 1]$ dir.

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : S^{15} &\longrightarrow \mathbb{OP}^1 \\ (x, y) &\mapsto \mathcal{P}(x, y) = [x, y] \end{aligned}$$

şeklinde $\mathcal{P}$ dönüşümü tanımlayalım. Bu şekilde tanımlanan $\mathcal{P}$ bir bölüm dönüşümü olup $\mathbb{OP}^1$ uzayı S^{15} in bir bölüm uzayı olarak da düşünülebilir.

S^{15} in bir bölüm uzayı olarak $\mathbb{OP}^1$ in bu ikinci tanımı $\mathbb{OP}^1$ in bazı özelliklerinin incelenmesi için daha kullanışlı olacaktır.

$[\xi] \in \mathbb{OP}^1$ üzerindeki $\mathcal{P}^{-1}([\xi])$ lifi $\{\xi a\ :\ a \in \mathbb{O} - \{0\}\}$ kümesinin S^{15} ile arakesitidir. Yani; $\xi \in S^{15}$ olmak üzere $< \zeta, \zeta >= 1$ olduğundan

$$< \xi a, \xi a >= \bar{a} < \xi, \xi > a = \bar{a} \cdot 1 \cdot a = ||a||^2$$

olur. Buradan $\xi \in S^{15}$ için

$$\xi a \in S^{15} \Longleftrightarrow ||a||^2 = 1 \Longleftrightarrow a \in S^7$$

elde edilir. Bu durumda; $\forall\ \xi \in S^{15}$ için

$$\xi a \in S^{15} \Longleftrightarrow a \in S^7$$

bulunur. Böylece; $\forall\ \xi \in S^{15}$ için

$$\mathcal{P}^{-1}([\xi]) = \{\xi a : a \in S^7\}$$

dir. Bu durumda; herhangi bir $\xi_0 = (o_0^1, o_0^2) \in S^{15}$ için

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{-1}([\xi_0]) &= \{\xi_0 a : a \in S^7\} \\ &= \{(o_0^1 a, o_0^2 a) : a \in S^7\} \end{aligned}$$

olup ξ_0 sabitlenirse S^{15} in bu alt uzayı S^7 küresine homeomorftur. Yani; $\mathcal{P}^{-1}([\xi_0]) \cong S^7$ dir. Şimdi bu homeomorfizmi gösterelim. $\xi_0 \in S^{15}$ olduğundan en az bir $t = 1$ veya $t = 2$ için ${o_0}^t \neq 0$ dır.

${o_0}^t = \alpha + \beta i + \delta j + \gamma k + \alpha' e + \beta' I + \delta' J + \gamma' K$

$o^1 = x^1 + y^1 i + u^1 j + v^1 k + X^1 e + Y^1 I + U^1 J + V^1 K$

$o^2 = x^2 + y^2 i + u^2 j + v^2 k + X^2 e + Y^2 I + U^2 J + V^2 K$

olmak üzere

$$\begin{aligned} f : \mathbb{O}^2 &\longrightarrow \mathbb{O} \\ (o^1, o^2) &\mapsto f(o^1, o^2) = (o_0^t)^{-1} \cdot o^t \end{aligned}$$

dönüşümünü gözönüne alalım.

$f(o^1, o^2) = (o_0^t)^{-1} \cdot o^t = \frac{\overline{o_0^t}}{||o_0^t||^2} \cdot o^t$

$= \frac{\alpha - \beta i - \delta j - \gamma k - \alpha' e - \beta' I - \delta' J - \gamma' K}{\alpha^2 + \beta^2 + \delta^2 + \gamma^2 + (\alpha')^2 + (\beta')^2 + (\delta')^2 + (\gamma')^2} \cdot (x^t + y^t i + u^t j + v^t k + X^t e + Y^t I + U^t J + V^t K)$

olup $\mathbb{O}^2$ ile $\mathbb{R}^{16}$ ve $\mathbb{O}$ ile $\mathbb{R}^8$ denk tutularak bu fonksiyonun sürekliliği kolaylıkla gösterilebilir. Bu dönüşüm $\mathcal{P}^{-1}([\xi_0])$ kümesine kısıtlanırsa kısıtlanmışı da sürekli olup $(o_0^1 a, o_0^2 a)$ noktasını a ya resmeder. Gerçekten;

$$\begin{aligned} f|_{\mathcal{P}^{-1}([\xi_0])} : \mathcal{P}^{-1}([\xi_0]) &\longrightarrow \mathbb{O} \\ \xi_0 a &\mapsto f|_{\mathcal{P}^{-1}([\xi_0])}(\xi_0 a) = (o_0^t)^{-1} \cdot (o_0^t a) = a \end{aligned}$$

olur ki $a \in S^7$ olduğundan

$$\begin{aligned} f|_{\mathcal{P}^{-1}([\xi_0])} : \mathcal{P}^{-1}([\xi_0]) &\longrightarrow S^7 \\ \xi_0 a &\mapsto a \end{aligned}$$

olarak tanımlıdır. Bu dönüşüm bire-birdir. Birebirlik için

$$f|_{\mathcal{P}^{-1}([\xi_0])}(\xi_0 a) = f|_{\mathcal{P}^{-1}([\xi_0])}(\xi_0 b)$$

olsun. Buradan $a = b$ olup $\xi_0 a = \xi_0 b$ elde edilir.Ayrıca; bu dönüşüm örtendir. Çünkü; $a \in S^7$ için $f|_{\mathcal{P}^{-1}([\xi_0])}(\xi_0 a) = a$ olacak şekilde $\xi_0 a \in \mathcal{P}^{-1}([\xi_0]$ vardır. Bu dönüşüm bire-bir ve örten olduğundan tersi mevcuttur. Bu dönüşümün tersi $a \in S^7$ için

$$a \longmapsto (o_0^1 a, o_0^2 a)$$

olup $\mathbb{R}^8$ den $\mathbb{R}^{16}$ ya sürekli bir dönüşüm tanımlar. Böylece;

$$(o_0^1 a, o_0^2 a) \longmapsto a$$

dönüşümü $\mathcal{P}^{-1}([\xi_0])$ kümesini S^7 küresinin tamamına resmeden bir homeomorfizm olup $\mathcal{P}^{-1}([\xi_0]) \cong S^7$ dir. Bu durumda; $\mathbb{OP}^1$ projektif uzayı S^{15} küresinin S^7 kürelerinin ayrık bir birleşimi olarak ayrıştığı ve her bir S^7 nin bir nokta olarak düşünüldüğü bir uzay olarak alınabilir.

Lemma 6.1.1. $\mathcal{P} : S^{15} \to \mathbb{OP}^1$ *bölüm dönüşümü açıktır.*

İspat. $U \subset S^{15}$ açık olsun. $\mathcal{P}$ bölüm dönüşümünün açık olduğunu göstermek için $\mathcal{P}(U)$ nun $\mathbb{OP}^1$ de açık olduğunu göstermeliyiz. $\mathcal{P}$ bölüm dönüşümü olduğundan $\mathcal{P}(U)$ nun açık olması için $\mathcal{P}^{-1}(\mathcal{P}(U))$ nun S^{15} de açık olması yeterlidir.

$$\mathcal{P}^{-1}(\mathcal{P}(U)) = \bigcup_{a \in S^7} Ua$$

olup Ua lar açıktır. Çünkü;

$$\begin{array}{rcl} \rho_a : S^{15} & \longrightarrow & S^{15} \\ \xi & \mapsto & \xi a \end{array}$$

şeklinde bir dönüşüm tanımlayalım. Bu dönüşüm sürekli olup

$$\begin{array}{rcl} \rho_{a^{-1}} : S^{15} & \longrightarrow & S^{15} \\ \xi & \mapsto & \xi a^{-1} \end{array}$$

şeklinde tanımlı dönüşüm

$$(\rho_a \circ \rho_{a^{-1}})(\xi) = \rho_a(\xi a^{-1}) = (\xi a^{-1})a = \xi$$
$$(\rho_{a^{-1}} \circ \rho_a)(\xi) = \rho_{a^{-1}}(\xi a) = (\xi a)a^{-1} = \xi$$

olduğundan ρ_a dönüşümünün tersidir. O halde; ρ_a dönüşümü birebir ve örtendir. Ayrıca; $\rho_{a^{-1}}$ dönüşümü de süreklidir . Böylece; ρ_a dönüşümü bir homeomorfizm olup U, S^{15} de açık ise $a \in S^7$ için Ua da S^{15} de açıktır. Açık kümelerin keyfi birleşimi açık olduğundan $\bigcup_{a\in S^7} Ua$ açıktır. Böylece; $\mathcal{P}^{-1}(\mathcal{P}(U))$, S^{15} de açık olup $\mathcal{P}$ bölüm dönüşümü olduğundan $\mathcal{P}(U)$, $\mathbb{OP}^1$ de açıktır. O halde; $\mathcal{P}$ bölüm dönüşümü açıktır. ■

Lemma 6.1.2. $\mathbb{OP}^1$ *projektif uzayı Hausdorff'dur.*

İspat. $\xi_0 \in S^{15}$ seçilip sabitlensin.

$$\begin{aligned} \rho : \mathbb{OP}^1 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ [\zeta] &\mapsto \rho([\zeta]) = 1 - |\langle \zeta, \xi_0 \rangle|^2 \end{aligned}$$

şeklinde bir dönüşüm tanımlansın. Burada $\mathbb{OP}^1$ uzayı S^{15} in bir bölüm uzayı olarak ele alındığından $\zeta \in S^{15}$ dir. Ayrıca; ρ dönüşümü iyi tanımlıdır. Çünkü; ζ', $\zeta \in S^{15}$ için $[\zeta'] = [\zeta]$ olsun. Bu durumda; $a \in S^7$ olan $a \in \mathbb{O}$ için $\zeta' = \zeta a$ dır. Buradan;

$$\begin{aligned} | < \zeta', \xi_0 > |^2 = | < \zeta a, \xi_0 > |^2 &= |\bar{a} < \zeta, \xi_0 > |^2 \\ &= |\bar{a}|^2 | < \zeta, \xi_0 > |^2 \\ &= | < \zeta, \xi_0 > |^2 \end{aligned}$$

elde edilir. O halde;

$$| < \zeta', \xi_0 > |^2 = | < \zeta, \xi_0 > |^2$$

$$1 - | < \zeta', \xi_0 > |^2 = 1 - | < \zeta, \xi_0 > |^2$$

$$\rho([\zeta']) = \rho([\zeta])$$

olup ρ dönüşümü iyi tanımlıdır. Ayrıca;

$$\rho([\xi_0]) = 1 - | < \xi_0, \xi_0 > |^2 = 1 - 1 = 0$$

dır. Bu durumda iddia:

$$[\zeta] \neq [\xi_0] \text{ iken } \rho([\zeta]) \neq 0 \text{ dır.}$$

Bunu göstermek için aksine $\rho([\zeta]) = 0$ olsun. Buradan $| < \zeta, \xi_0 > |^2 = 1$ olup

$$< \xi_0 - \zeta < \zeta, \xi_0 >, \xi_0 - \zeta < \zeta, \xi_0 >> = 0$$

eşitliği vardır. Çünkü;

$< \xi_0 - \zeta < \zeta, \xi_0 >, \xi_0 - \zeta < \zeta, \xi_0 >> = < \xi_0, \xi_0 - \zeta < \zeta, \xi_0 >>$

$- < \zeta < \zeta, \xi_0 >, \xi_0 - \zeta < \zeta, \xi_0 >>$

$= < \xi_0, \xi_0 > - < \xi_0, \zeta >< \zeta, \xi_0 > - \overline{< \zeta, \xi_0 >} < \zeta, \xi_0 >$

$+ \overline{< \zeta, \xi_0 >} < \zeta, \zeta >< \zeta, \xi_0 >$

$= 1 - 1$

$= 0$

elde edilir ki

$$||\xi_0 - \zeta < \zeta, \xi_0 > ||^2 = 0$$

olup $\xi_0 = \zeta < \zeta, \xi_0 >$ bulunur. $< \zeta, \xi_0 >= a$ olarak alınırsa $\xi_0 = \zeta a$ olup $[\xi_0] = [\zeta]$ bulunur. Bu ise $[\xi_0] \neq [\zeta]$ olması ile çelişir. Bu çelişkiye $\rho([\zeta]) = 0$ varsayımı ile ulaşıldığından $\rho([\zeta]) \neq 0$ dır. Böylece; $[\xi_0] \neq [\zeta]$ olması $\rho([\xi_0]) \neq \rho([\zeta])$ olmasını gerektirir. ρ dönüşümü ayrıca sürekli bir dönüşümdür. Gerçekten; S^{15} küresinden $\mathbb{R}$ ye, $\mathcal{P}$ bölüm dönüşümü olmak üzere

$$\begin{array}{rcl} \rho \circ \mathcal{P} : S^{15} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ [\zeta] & \mapsto & (\rho \circ \mathcal{P})([\zeta]) = 1 - | \langle \zeta, \xi_0 \rangle |^2 \end{array}$$

şeklinde tanımlı dönüşüm sürekli olup *Lemma 2.3.1* deki bölüm dönüşümünden kalkan bir ρ dönüşümü için

$$\rho \text{ süreklidir} \Longleftrightarrow \rho \circ \mathcal{P} \text{ süreklidir.}$$

ifadesinden ρ dönüşümü süreklidir.

Sonuç olarak; ρ dönüşümü iyi tanımlı, sürekli ve $[\xi_0] \neq [\zeta]$ iken $\rho([\xi_0]) \neq \rho([\zeta])$ olup bu bilgileri kullanarak $\mathbb{OP}^1$ uzayının Hausdorff olduğunu gösterebiliriz.

$\mathbb{R}$ Hausdorff olduğundan farklı herhangi iki noktanın ayrık açık komşulukları mevcuttur. O halde; $\rho([\xi_0])$ noktasını içeren I_{ξ_0} ve $\rho([\zeta])$ yı içeren I_ζ açık aralıkları vardır öyle ki $I_{\xi_0} \cap I_\zeta = \emptyset$ dir. ρ dönüşümü sürekli olduğundan $U_{\xi_0} = \rho^{-1}(I_{\xi_0})$ ve $U_\zeta = \rho^{-1}(I_\zeta)$ kümeleri $\mathbb{OP}^1$ de açık olup bu kümeler ayrıktır. Aynı zamanda $[\xi_0] \in U_{\xi_0}$ ve $[\zeta] \in U_\zeta$ dır. Böylece; $\mathbb{OP}^1$ uzayında farklı herhangi iki noktanın ayrık açık komşulukları mevcut olduğundan bu uzay Hausdorff'dur. ■

Lemma 6.1.3. $\mathbb{OP}^1$ *projektif uzayı yerel öklidyendir.*

İspat. $\mathbb{OP}^1$ uzayını V kümesinin bir bölüm uzayı olarak ele alalım.

$$V_1 = \mathbb{O} \times \{1\}$$

$$V_2 = \{1\} \times \mathbb{O}$$

olmak üzere

$$U_1 = V_1/_\sim = \{[x, 1] : x \in \mathbb{O}\} \subset \mathbb{OP}^1$$

$$U_2 = V_2/_\sim = \{[1, y] : y \in \mathbb{O}\} \subset \mathbb{OP}^1$$

şeklinde U_1 ve U_2 alt kümelerini tanımlayalım. Bu şekilde tanımlanan U_1 ve U_2 alt kümeleri $\mathbb{OP}^1$ de açıktır. Çünkü;

$$\mathcal{Q}^{-1}(U_1) = \{(x, 1), (1, x^{-1}) \ : \ x \in \mathbb{O}\}$$

$$\mathcal{Q}^{-1}(U_2) = \{(1, y), (y^{-1}, 1) \ : \ y \in \mathbb{O}\}$$

alt kümeleri V de açıktır.

$$\begin{aligned} \varphi_1 : U_1 &\longrightarrow \mathbb{O} \\ [x, 1] &\mapsto \varphi_1([x, 1]) = x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2 : U_2 &\longrightarrow \mathbb{O} \\ [1, y] &\mapsto \varphi_1([1, y]) = y \end{aligned}$$

şeklinde φ_1 ve φ_2 dönüşümleri tanımlayalım. Bu dönüşümler homeomorfizm dönüşümleridir. İlk olarak φ_1 dönüşümünün bir homeomorfizm olduğunu gösterelim.

Örtenlik : $\forall\ x \in \mathbb{O}$ için $[x, 1] = x$ olacak şekilde $[x, 1] \in U_1$ var olduğundan φ_1 dönüşümü örtendir.

Birebirlik : $\varphi_1([x_1, 1]) = \varphi_1([x_2, 1]$ olsun. φ_1 in tanımından $x_1 = x_2$ olup $[x_1, 1] = [x_2, 1]$ elde edilir ki φ_1 bire-birdir denir.

Süreklilik : φ_1 dönüşümünün sürekli olduğunu göstermek için *Lemma 2.3.1* ve $\varphi_1 \circ \mathcal{Q} : V_1 \longrightarrow \mathbb{C}$ dönüşümünün sürekliliğinden faydalanacağız.
$[x, 1] \in U_1$

$$\begin{aligned} \varphi_1 \circ \mathcal{Q} : V_1 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, 1) &\mapsto x \end{aligned}$$

olup bu dönüşüm bir öklidyen uzaydan diğerine sürekli bir dönüşüm olarak yazılabileceğinden $\varphi_1 \circ \mathcal{Q}$ süreklidir. Diğer yandan; *Lemma 2.3.1* deki

$$\varphi_1 \circ \mathcal{Q} \text{ süreklidir} \Longleftrightarrow \varphi_1 \text{ süreklidir}$$

ifadesinden φ_1 dönüşümünün sürekli olduğu söylenir.
φ_1 dönüşümü bire-bir ve örten olduğundan tersi mevcuttur.

$$\begin{aligned} {\varphi_1}^{-1} : \mathbb{C} &\longrightarrow U_1 \\ x &\mapsto [x, 1] \end{aligned}$$

olup ${\varphi_1}^{-1}$ süreklidir. Çünkü;

$$\mathbb{C} \longrightarrow V_1 \xrightarrow{\mathcal{Q}} \mathbb{CP}^1$$

sürekli dönüşümlerini gözönüne alalım. Bu iki sürekli dönüşümün bileşkesi φ_1^{-1} olup φ_1^{-1} süreklidir.

Sonuç olarak; φ_1 dönüşümü bire-bir, örten, sürekli ve tersi de sürekli olduğundan bir homeomorfizmdir.

Son olarak φ_2 dönüşümünün bir homeomorfizm olduğunu gösterelim.

Örtenlik : Her $y \in \mathbb{C}$ için [1,y]=y olacak şekilde $[1, y] \in U_2$ var olduğundan φ_2 dönüşümü örtendir.

Birebirlik : $\varphi_2([1, y_1]) = \varphi_2([1, y_2])$ olsun. φ_2 in tanımından $y_1 = y_2$ olup $[1, y_1] = [1, y_2]$ elde edilir ki φ_2 bire-birdir denir.

Süreklilik : φ_2 dönüşümünün sürekli olduğunu göstermek için *Lemma 2.3.1* ve $\varphi_2 \circ \mathcal{Q} : V_2 \longrightarrow \mathbb{C}$ dönüşümünün sürekliliğinden faydalanacağız.

$$\begin{aligned} \varphi_2 \circ \mathcal{Q} : V_2 &\longrightarrow \mathbb{O} \\ (1, y) &\mapsto y \end{aligned}$$

olup bu dönüşüm bir öklidyen uzaydan diğerine sürekli bir dönüşüm olarak yazılabileceğinden $\varphi_2 \circ \mathcal{Q}$ süreklidir. Diğer yandan; *Lemma 2.3.1* deki

$$\varphi_2 \circ \mathcal{Q} \text{ süreklidir} \Longleftrightarrow \varphi_2 \text{ süreklidir}$$

ifadesinden φ_2 dönüşümünün sürekli olduğu söylenir.

φ_2 dönüşümü bire-bir ve örten olduğundan tersi mevcuttur.

$$\begin{aligned} {\varphi_2}^{-1} : \mathbb{O} &\longrightarrow U_2 \\ y &\mapsto [1, y] \end{aligned}$$

olup ${\varphi_2}^{-1}$ süreklidir. Çünkü;

$$\mathbb{O} \longrightarrow V_2 \xrightarrow{\mathcal{Q}} \mathbb{OP}^1$$

sürekli dönüşümlerini gözönüne alalım. Bu iki sürekli dönüşümün bileşkesi φ_2^{-1} olup φ_2^{-1} süreklidir.

Sonuç olarak; φ_2 dönüşümü bire-bir, örten, sürekli ve tersi de sürekli olduğundan bir homeomorfizmdir.

Böylece; $\mathbb{OP}^1$ uzayının her noktasının bir $U_k(k = 1$ veya $k = 2)$ açık komşuluğu ile $\mathbb{O}(\mathbb{O} \cong \mathbb{R}^8)$ uzayı arasında bir $\varphi_k(k = 1$ veya $k = 2)$ homeomorfizmi var olduğundan $\mathbb{OP}^1$ oktonyonik projektif uzayı $8-$boyutlu yerel öklidyen bir uzaydır. ■

Lemma 6.1.4. $\mathbb{OP}^1$ *projektif uzayı* 2. *sayılabilir uzaydır.*

İspat.

$$\begin{aligned} \varphi_1 : U_1 &\longrightarrow \mathbb{O} \\ [x, 1] &\mapsto \varphi_1([x, 1]) = x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2 : U_2 &\longrightarrow \mathbb{O} \\ [1, y] &\mapsto \varphi_2([1, y]) = y \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan φ_1 ve φ_2 dönüşümleri homeomorfizm dönüşümleri olduğundan $U_1 \cong \mathbb{O}$ ve $U_2 \cong \mathbb{O}$ olarak yazılabilir. $\mathbb{O} \cong \mathbb{R}^8$ olduğundan $U_1 \cong \mathbb{R}^8$ ve $U_2 \cong \mathbb{R}^8$ dir. $\mathbb{R}^8$ öklid uzayı 2. sayılabilir uzay ve 2. sayılabilirlik topolojik bir özellik olduğundan U_1 ve U_2 kümeleri de 2. sayılabilirdir. O halde; U_1 in sayılabilir bir $\mathcal{B}_1$ ve U_2 nin sayılabilir bir $\mathcal{B}_2$ tabanı mevcuttur. $U_1 \cup U_2 = \mathbb{OP}^1$ olup

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$$

koleksiyonu da $\mathbb{OP}^1$ için bir tabandır. Gerçekten; $U \subset \mathbb{OP}^1$ açık olsun.

$$U = U \cap \mathbb{OP}^1 = U \cap (U_1 \cup U_2) = (U \cap U_1) \cup (U \cap U_2)$$

olup U alt kümesi $\mathcal{B}_1$ veya $\mathcal{B}_2$ deki elemanların keyfi birleşimi şeklinde yazılabilir. Böylece; $\mathcal{B}$ koleksiyonu $\mathbb{OP}^1$ için bir taban olup sayılabilir sayıdaki iki kümenin birleşimi olduğundan sayılabilirdir. $\mathbb{OP}^1$ uzayı sayılabilir bir $\mathcal{B}$ tabanına sahip olduğundan 2. sayılabilir uzaydır. ■

Sonuç 6.1.5. $\mathbb{OP}^1$ *oktonyonik projektif uzayı Hausdorff, yerel öklidyen ve* 2. *sayılabilir bir uzay olduğundan topolojik manifold yapısına sahiptir.*

6.2 $\mathbb{OP}^1$ Uzayının Kart Dönüşümleri ve Örtüşme Fonksiyonları

$\mathbb{OP}^1$ topolojik manifoldu için

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1 : U_1 & \longrightarrow & \mathbb{O} \\ {[x,1]} & \mapsto & \varphi_1([x,1]) = x \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_2 : U_2 & \longrightarrow & \mathbb{O} \\ {[1,y]} & \mapsto & \varphi_1([1,y]) = y \end{array}$$

dönüşümlerini gözönüne alalım. Bu iki dönüşüm homeomorfizm olduğundan (U_1, φ_1) ve (U_2, φ_2) çifti $\mathbb{OP}^1$ için birer kart olurlar. Bu kartların örtüşme fonksiyonları

$$\begin{aligned} \varphi_1 \circ {\varphi_2}^{-1} : \varphi_2(U_1 \cap U_2) &\longrightarrow \varphi_1(U_1 \cap U_2) \\ y &\mapsto (\varphi_1 \circ {\varphi_2}^{-1})(y) = \varphi_1({\varphi_2}^{-1}(y)) = \varphi_1([1, y]) = y^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2 \circ {\varphi_1}^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) &\longrightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2) \\ y &\mapsto (\varphi_2 \circ {\varphi_1}^{-1})(y) = \varphi_2({\varphi_1}^{-1}(y)) = \varphi_2([y, 1]) = y^{-1} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Bu durumda;

$$(\varphi_1 \circ {\varphi_2}^{-1})(y) = y^{-1} = (\varphi_2 \circ {\varphi_1}^{-1})(y) \quad , \quad y \in \mathbb{O} - \{0\}$$

olup

$$\varphi_1(U_1 \cap U_2) = \varphi_2(U_1 \cap U_2) = \mathbb{O} - \{0\}$$

olarak bulunur.

$\varphi_1 \circ {\varphi_2}^{-1}$ ve $\varphi_2 \circ {\varphi_1}^{-1}$ örtüşme fonksiyonları öklid koordinatlarda yazıldığında sürekli ve her mertebeden kısmi türevleri mevcut olduğundan (U_1, φ_1) ve (U_2, φ_2) kartları $C^\infty-$ ***uyumlu***dur. $\mathbb{OP}^1$ üzerinde $U_1 \cup U_2 = \mathbb{OP}^1$ olan $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$ kartlarının ailesi $8-$boyutlu diferansiyellenebilir bir atlas yapısı oluşturur.

6.3 $\mathbb{OP}^1$ Projektif Uzayına Farklı Bir Bakış

$\mathbb{OP}^1$ projektif uzayının kartlarının örtüşme fonksiyonları ile S^8 küresinin steografik izdüşüm kartlarının örtüşme fonksiyonları arasında bir benzerlik vardır. Bu benzerliği kullanarak $\mathbb{OP}^1 \cong S^8$ olduğunu göstereceğiz.

S^n $n-$küresi için steografik izdüşüm dönüşümleri ve bu dönüşümlerin örtüşme fonksiyonları *Bölüm 2.2* de yer alıp şimdi ise özel olarak $n = 8$ için S^8 küresinin steografik izdüşüm dönüşümleri ve bu dönüşümlerin örtüşme fonksiyonlarını verelim.

$$S^8 = \{x = (x^1, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7, x^8, x^9) \in \mathbb{R}^9 : ||x||^2 = 1\}$$

$N = \{(0, 0, \ldots, 0, 1)\} \in S^8$ ve $U_S = S^8 - \{N\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \varphi_S : U_S &\longrightarrow \mathbb{R}^8 \\ (x^1, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7, x^8, x^9) &\mapsto \left(\tfrac{x^1}{1-x^9}, \tfrac{x^2}{1-x^9}, \tfrac{x^3}{1-x^9}, \tfrac{x^4}{1-x^9}, \tfrac{x^5}{1-x^9}, \tfrac{x^6}{1-x^9}, \tfrac{x^7}{1-x^9}, \tfrac{x^8}{1-x^9}\right) \end{aligned}$$

şeklindedir. Benzer olarak; $S = \{(0,0,\ldots,0,-1)\} \in S^8$ ve $U_N = S^8 - \{S\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \varphi_N : U_N &\longrightarrow \mathbb{R}^8 \\ (x^1,x^2,x^3,x^4,x^5,x^6,x^7,x^8,x^9) &\mapsto \left(\tfrac{x^1}{1+x^9},\tfrac{x^2}{1+x^9},\tfrac{x^3}{1+x^9},\tfrac{x^4}{1+x^9},\tfrac{x^5}{1+x^9},\tfrac{x^6}{1+x^9},\tfrac{x^7}{1+x^9},\tfrac{x^8}{1+x^9}\right) \end{aligned}$$

şeklindedir. Bu dönüşümler homeomorfizm dönüşümleri olup (U_N,φ_N) ve (U_S,φ_S) S^8 için steografik izdüşüm kartlarıdır. Bu kartların örtüşme fonksiyonları ise

$$\begin{aligned} \varphi_S\circ\varphi_N^{-1} : \mathbb{R}^8-\{0\} &\longrightarrow \mathbb{R}^8-\{0\} \\ y &\mapsto (\varphi_S\circ\varphi_N^{-1})(y) = \tfrac{y}{||y||^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_N\circ{\varphi_S}^{-1} : \mathbb{R}^8-\{0\} &\longrightarrow \mathbb{R}^8-\{0\} \\ y &\mapsto \varphi_N\circ\varphi_S^{-1}(y) = \tfrac{y}{||y||^2} \end{aligned}$$

şeklinde olup

$$(\varphi_S\circ\varphi_N^{-1})(y) = \frac{y}{||y||^2} = (\varphi_N\circ\varphi_S^{-1})(y)$$

olarak bulunur. Burada $\mathbb{R}^8$ yerine $\mathbb{O}$ alınırsa örtüşme fonksiyonları

$$\begin{aligned} \varphi_S\circ\varphi_N^{-1} : \mathbb{O}-\{0\} &\longrightarrow \mathbb{O}-\{0\} \\ y &\mapsto (\varphi_S\circ\varphi_N^{-1})(y) = (\bar{y})^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_N\circ{\varphi_S}^{-1} : \mathbb{O}-\{0\} &\longrightarrow \mathbb{O}-\{0\} \\ y &\mapsto \varphi_N\circ\varphi_S^{-1}(y) = (\bar{y})^{-1} \end{aligned}$$

olup

$$(\varphi_S\circ\varphi_N^{-1})(y) = (\bar{y})^{-1} = (\varphi_N\circ\varphi_S^{-1})(y)$$

olarak bulunur.

Burada dikkat edilirse $\mathbb{OP}^1$ in kartları ile S^8 in steografik izdüşüm kartlarının örtüşme fonksiyonları benzerdir. Tek fark S^8 in örtüşme fonksiyonlarında eşlenik bulunmasıdır. Bu farkı $\mathbb{OP}^1$ in bir kartında küçük bir değişiklik yaparak ortadan kaldırabiliriz.

$$\begin{aligned} \overline{\varphi_1} : U_1 &\longrightarrow \mathbb{O} \\ [x,1] &\mapsto \overline{\varphi_1}([x,1]) = \overline{\varphi_1([x,1])} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\overline{\varphi_1})^{-1} : \mathbb{O} &\longrightarrow U_1 \\ x &\mapsto (\overline{\varphi_1})^{-1}(x) = \overline{\varphi_1^{-1}(x)} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $\overline{\varphi_1}$ dönüşümü homeomorfizm dönüşümü ve $(U_1, \overline{\varphi_1})$ çifti $\mathbb{OP}^1$ için bir kart olup $\{(U_1, \overline{\varphi_1}), (U_2, \varphi_2)\}$ ailesi de $\mathbb{OP}^1$ için atlas yapısı oluşturur. Bu kartların örtüşme fonksiyonları ise

$$\begin{aligned} \overline{\varphi_1} \circ {\varphi_2}^{-1} : \mathbb{O} - \{0\} &\longrightarrow \mathbb{O} - \{0\} \\ y &\mapsto (\overline{\varphi_1} \circ {\varphi_2}^{-1})(y) = (\bar{y})^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2 \circ {\varphi_1}^{-1} : \mathbb{O} - \{0\} &\longrightarrow \mathbb{O} - \{0\} \\ y &\mapsto (\varphi_2 \circ (\overline{\varphi_1})^{-1})(y) = (\bar{y})^{-1} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu dönüşümler ve Yapıştırma Lemması yardımıyla $\mathbb{OP}^1 \cong S^8$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \varphi_N^{-1} \circ \overline{\varphi_1} : U_1 &\longrightarrow U_N \\ \varphi_S^{-1} \circ \varphi_2 : U_2 &\longrightarrow U_S \end{aligned}$$

homeomorfizm dönüşümlerini gözönüne alalım. Bu dönüşümler $U_1 \cap U_2$ üzerinde aynı değeri alırlar. Gerçekten; $[\xi] \in U_1 \cap U_2$ ise

$$\varphi_2([\xi]) \in \varphi_2(U_1 \cap U_2) = \mathbb{O} - \{0\}$$

olup $\mathbb{O} - \{0\}$ üzerinde $\overline{\varphi_1} \circ {\varphi_2}^{-1} = \varphi_N \circ {\varphi_S}^{-1}$ olduğundan $\varphi_2([\xi]) \in \mathbb{O} - \{0\}$ için

$$\begin{aligned} (\overline{\varphi_1} \circ {\varphi_2}^{-1})(\varphi_2([\xi])) &= (\varphi_N \circ {\varphi_S}^{-1})(\varphi_2([\xi])) \\ \overline{\varphi_1}([\xi]) &= \varphi_N \circ (({\varphi_S}^{-1} \circ \varphi_2)([\xi])) \\ ({\varphi_N}^{-1} \circ \overline{\varphi_1})([\xi]) &= {\varphi_N}^{-1} \circ \varphi_N \circ (({\varphi_S}^{-1} \circ \varphi_2)([\xi])) \\ ({\varphi_N}^{-1} \circ \overline{\varphi_1})([\xi]) &= ({\varphi_S}^{-1} \circ \varphi_2)([\xi]) \end{aligned}$$

elde edilir ki bu eşitlik her $[\xi] \in U_1 \cap U_2$ için sağlandığından

$$({\varphi_N}^{-1} \circ \overline{\varphi_1})|_{U_1 \cap U_2} = ({\varphi_S}^{-1} \circ \varphi_2)|_{U_1 \cap U_2}$$

olarak bulunur. Bu durumda; Yapıştırma Lemmasından,

$$f([\xi]) = \begin{cases} ({\varphi_N}^{-1} \circ \overline{\varphi_1})([\xi]), & [\xi] \in U_1 \\ ({\varphi_S}^{-1} \circ \varphi_2)([\xi]), & [\xi] \in U_2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $f : \mathbb{OP}^1 \longrightarrow S^8$ dönüşümü süreklidir. Bu dönüşümün bileşenleri homeomorfizm ve $U_S \cup U_N = S^8$ olduğundan f dönüşümü bire-bir ve örtendir denir. f dönüşümü bire-bir ve örten olduğundan tersi mevcuttur. f dönüşümünün tersini bulmak için bu dönüşümün bileşenlerinin tersi olan

$$\begin{aligned} (\varphi_N^{-1} \circ \overline{\varphi_1})^{-1} = (\overline{\varphi_1})^{-1} \circ \varphi_N : U_N &\longrightarrow U_1 \\ (\varphi_S^{-1} \circ \varphi_2)^{-1} = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_S : U_S &\longrightarrow U_2 \end{aligned}$$

homeomorfizm dönüşümlerini ele alalım. Bu dönüşümler $U_N \cap U_S$ üzerinde aynı değeri alırlar. Yani; $x \in U_N \cap U_S$ olmak üzere

$$\varphi_S(x) \in \varphi_S(U_N \cap U_S) = \mathbb{O} - \{0\}$$

olup $\mathbb{O} - \{0\}$ üzerinde $\varphi_N \circ {\varphi_S}^{-1} = \overline{\varphi_1} \circ {\varphi_2}^{-1}$ olduğundan $\varphi_S(x) \in \mathbb{O} - \{0\}$ için

$$\begin{aligned} (\varphi_N \circ {\varphi_S}^{-1})(\varphi_2(x) &= (\overline{\varphi_1} \circ {\varphi_2}^{-1})(\varphi_2(x) \\ \varphi_N(x) &= \overline{\varphi_1} \circ (({\varphi_2}^{-1} \circ \varphi_S)(x)) \\ ((\overline{\varphi_1})^{-1} \circ \varphi_N)(x) &= (\overline{\varphi_1})^{-1} \circ \varphi_1 \circ (({\varphi_2}^{-1} \circ \varphi_S)(x)) \\ ((\overline{\varphi_1})^{-1} \circ \varphi_N)(x) &= ({\varphi_2}^{-1} \circ \varphi_S)(x) \end{aligned}$$

elde edilir ki bu eşitlik her $x \in U_N \cap U_S$ için sağlandığından

$$((\overline{\varphi_1})^{-1} \circ \varphi_N)|_{U_N \cap U_S} = ({\varphi_2}^{-1} \circ \varphi_S)|_{U_N \cap U_S}$$

olarak bulunur. Bu durumda; Yapıştırma Lemmasından,

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} ((\overline{\varphi_1})^{-1} \circ \varphi_N)(x), & x \in U_N \\ ({\varphi_2}^{-1} \circ \varphi_S)(x), & x \in U_S \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $f^{-1} : S^8 \longrightarrow \mathbb{OP}^1$ dönüşümü süreklidir.

Sonuç olarak; $f : \mathbb{OP}^1 \longrightarrow S^8$ dönüşümü sürekli, bire-bir, örten ve tersi de sürekli olduğundan bir homeomorfizm olup $\mathbb{OP}^1 \cong S^8$ olarak gösterilir.

6.4 Oktonyonik Hopf Dönüşümü

$$\begin{tikzcd} S^7 \arrow[r, hook, "i"] & S^{15} \arrow[d, "\mathcal{P}"] \\ & S^8 \end{tikzcd}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm ***Oktonyonik Hopf Dönüşümü*** olarak adlandırılır. Burada

$$\begin{aligned} h : S^{15} &\longrightarrow S^8 \\ (x, y) &\mapsto h(x, y) = (2y\bar{x}, ||x||^2 - ||y||^2) \end{aligned}$$

Hopf dönüşümünü S^7 lifi ile ele alacak olursak S^{15} küresi, S^8 küresi üzerinde parametrize edilen S^7 kürelerinin bir ailesi olarak düşünülebilir.

6.5 $\mathbb{OP}^1$ Projektif Uzayının Bazı Topolojik Özellikleri

1) $\mathbb{OP}^1 \cong S^8$ ve S^8 küresi kompakt olup kompaktlık topolojik bir özellik olduğundan $\mathbb{OP}^1$ uzayı kompakttır.

2) $\mathbb{OP}^1 \cong S^8$ ve S^8 küresi yol bağlantılı olup yol bağlantılılık topolojik bir özellik olduğundan $\mathbb{OP}^1$ uzayı yol bağlantılıdır.

3) Yol bağlantılı her uzay bağlantılı olup $\mathbb{OP}^1$ projektif uzayı da yol bağlantılı olduğundan bağlantılıdır.

6.6 $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$ Oktonyonik Projektif Uzayı

$\mathbb{O}^3$ de $(0,0,0)$ elemanı 0 ile gösterilsin. $\mathbb{O}^3$ ün $\mathbb{O}^3-\{0\}$ topolojik alt uzayı üzerinde bir bağıntı aşağıdaki gibi tanımlansın. $\zeta,\ \xi\in\mathbb{O}^3-\{0\}$ olmak üzere

$$\zeta\sim\xi \Longleftrightarrow \text{Sıfırdan farklı bir } a\in\mathbb{O} \text{ vardır öyle ki } \zeta=\xi a \text{ dır}$$

Bu şekilde tanımlanan $'\sim'$ bağıntısı $\mathbb{O}^3-\{0\}$ üzerinde bir denklik bağıntısı değildir. Çünkü;

Yansıma : $\xi\sim\xi \Longleftrightarrow$ Sıfırdan farklı $1\in\mathbb{O}$ vardır öyle ki $\xi=\xi\cdot 1$ dir

Simetri : $\zeta\sim\xi \Longleftrightarrow$ Sıfırdan farklı $a\in\mathbb{O}$ vardır öyle ki $\zeta=\xi a$ dir

$\Longleftrightarrow$ Sıfırdan farklı bir $a^{-1}\in\mathbb{O}$ vardır öyle ki $\xi=\zeta a^{-1}$ dir

$\Longleftrightarrow \xi\sim\zeta$

Geçişme : $\eta\in\mathbb{O}^3-\{0\}$ olmak üzere

$\zeta\sim\eta \Longleftrightarrow$ Sıfırdan farklı bir $a\in\mathbb{O}$ vardır öyle ki $\zeta=\eta a$

$\eta\sim\xi \Longleftrightarrow$ Sıfırdan farklı bir $b\in\mathbb{O}$ vardır öyle ki $\eta=\xi b$

olsun. Buradan;

$\zeta=(\xi b)a$ olup oktonyonlar asosyatiflik özelliğini sağlamadığından $(\xi b)a\neq\xi(ba)$ olup her zaman bir $(ba)\in\mathbb{O}$ mevcut olmayıp $\zeta\nsim\xi$ dir.

Bu durumda; $\mathbb{O}^3-\{0\}$ üzerinde tanımlanan $'\sim'$ bağıntısı yansıma ve simetri özelliğini sağlayıp geçişme özelliğini sağlamadığından bir denklik bağıntısı değildir. Bu problemi çözmek için $\mathbb{O}^3-\{0\}$ ın

$$V_1=\{1\}\times\mathbb{O}\times\mathbb{O}=\{(1,y_1,z_1):y_1,z_1\in\mathbb{O}\}$$

$$V_2=\mathbb{O}\times\{1\}\times\mathbb{O}=\{(x_2,1,z_z):x_2,z_2\in\mathbb{O}\}$$

$$V_3=\mathbb{O}\times\mathbb{O}\times\{1\}=\{(x_3,y_3,1):x_3,y_3\in\mathbb{O}\}$$

alt kümelerini ele alalım. Bu kümelerin birleşimi

$$V=V_1\cup V_2\cup V_3$$

olsun. Bu küme üzerinde bir $'\sim'$ bağıntısı

$$[1,y_1,z_1]=[x_2,1,z_2]\Longleftrightarrow y_1\neq 0 \text{ ve } x_2=y_1^{-1},\ z_2=z_1y_1^{-1}$$
$$\text{veya } x_2\neq 0 \text{ ve } y_1=x_2^{-1},\ z_1=z_2x_2^{-1}$$

$$[1, y_1, z_1] = [x_3, y_3, 1] \Longleftrightarrow z_1 \neq 0 \text{ ve } x_3 = z_1^{-1}, y_3 = y_1 z_1^{-1}$$
$$\text{veya } x_3 \neq 0 \text{ ve } z_1 = x_3^{-1}, y_1 = y_3 x_3^{-1}$$

$$[x_2, 1, z_2] = [x_3, y_3, 1] \Longleftrightarrow z_2 \neq 0 \text{ ve } y_3 = z_2^{-1}, x_3 = x_2 z_2^{-1}$$
$$\text{veya } y_3 \neq 0 \text{ ve } z_2 = y_3^{-1}, x_2 = x_3 y_3^{-1}$$

özdeşlikleri ile tanımlansın. Bu şekilde tanımlanan $' \sim '$ bağıntısı V üzerinde bir denklik bağıntısı olup simetri ve geçişme özelliğinin sağlandığını göstermek yeterlidir.

Simetri : $y_1 \neq 0$ ise $[1, y_1, z_1] = [y_1^{-1}, 1, z_1 y_1^{-1}] = [1, y_1, (z_1 y_1^{-1}) y_1] = [1, y_1, z_1]$
$z_1 \neq 0$ ise $[1, y_1, z_1] = [z_1^{-1}, y_1 z_1^{-1}, 1] = [1, (y_1 z_1^{-1}) z_1, z_1] = [1, y_1, z_1]$
$x_2 \neq 0$ ise $[x_2, 1, z_2] = [1, x_2^{-1}, z_2 x_2^{-1}] = [x_2, 1, (z_2 x_2^{-1}) x_2] = [x_2, 1, z_2]$
$z_2 \neq 0$ ise $[x_2, 1, z_2] = [x_2 z_2^{-1}, z_2^{-1}, 1] = [(x_2 z_2^{-1}) z_2, 1, z_2] = [x_2, 1, z_2]$
$x_3 \neq 0$ ise $[x_3, y_3, 1] = [1, y_3 x_3^{-1}, x_3^{-1}] = [x_3, (y_3 x_3^{-1}) x_3, 1] = [x_3, y_3, 1]$
$y_3 \neq 0$ ise $[x_3, y_3, 1] = [x_3 y_3^{-1}, 1, y_3^{-1}] = [(x_3 y_3^{-1}) y_3, y_3, 1] = [x_3, y_3, 1]$
eşitlikleri sağlandığından V üzerindeki bu $' \sim '$ bağıntısı simetriktir.

Geçişme : $y_1, z_1 \neq 0$ ise $[1, y_1, z_1] = [y_1^{-1}, 1, z_1 y_1^{-1}] = [y_1^{-1}(y_1 z_1^{-1}), y_1 z_1^{-1}, 1]$
$$= [z_1^{-1}, y_1 z_1^{-1}, 1]$$
$y_1, z_1 \neq 0$ ise $[1, y_1, z_1] = [z_1^{-1}, y_1 z_1^{-1}, 1] = [z_1^{-1}(z_1 y_1^{-1}), 1, z_1 y_1^{-1}] = [y_1^{-1}, 1, z_1 y_1^{-1}]$
$x_2, z_2 \neq 0$ ise $[x_2, 1, z_2] = [1, x_2^{-1}, z_2 x_2^{-1}] = [x_2 z_2^{-1}, x_2^{-1}(x_2 z_2^{-1}), 1] = [x_2 z_2^{-1}, z_2^{-1}, 1]$
$x_2, z_2 \neq 0$ ise $[x_2, 1, z_2] = [x_2 z_2^{-1}, z_2^{-1}, 1] = [1, z_2^{-1}(z_2 x_2^{-1}), z_2 x_2^{-1}] = [1, x_2^{-1}, z_2 x_2^{-1}]$
$x_3, y_3 \neq 0$ ise $[x_3, y_3, 1] = [1, y_3 x_3^{-1}, x_3^{-1}] = [x_3 y_3^{-1}, 1, x_3^{-1}(x_3 y_3^{-1})] = [x_3 y_3^{-1}, 1, y_3^{-1}]$
$x_3, y_3 \neq 0$ ise $[x_3, y_3, 1] = [x_3 y_3^{-1}, 1, y_3^{-1}] = [1, y_3 x_3^{-1}, y_3^{-1}(y_3 x_3^{-1})] = [1, y_3 x_3^{-1}, x_3^{-1}]$

olup V üzerinde tanımlanan bu $' \sim '$ bağıntısı geçişme özelliğini de sağlar. O halde; $' \sim '$ bir denklik bağıntısı olup bu bağıntı ile V denklik sınıflarına ayrılır. Denklik sınıfları ise
$y_1, z_1 \neq 0$ için $[1, y_1, z_1] = \{(1, y_1, z_1), (y_1^{-1}, 1, z_1 y_1^{-1}), (z_1^{-1}, y_1 z_1^{-1}, 1)\}$
$x_2, z_2 \neq 0$ için $[x_2, 1, z_2] = \{(x_2, 1, z_2), (1, x_2^{-1}, z_2 x_2^{-1}), (x_2 z_2^{-1}, z_2^{-1}, 1)\}$
$x_3, y_3 \neq 0$ için $[x_3, y_3, 1] = \{(x_3, y_3, 1), (1, y_3 x_3^{-1}, x_3^{-1}), (x_3 y_3^{-1}, 1)\}$
$[1, 0, 0] = \{(1, 0, 0)\}$
$[0, 1, 0] = \{(0, 1, 0)\}$

$[0, 0, 1] = \{(0, 0, 1)\}$

olarak tanımlanır. $'\sim'$ denklik bağıntısı ile oluşturulan V nin denklik sınıflarının kümesi $\mathbb{OP}^2$ ile gösterilsin. Ayrıca; $\mathbb{OP}^2 = \{[\xi] : \xi \in V\}$ kümesi

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} : V &\rightarrow V/_{\sim} = \mathbb{OP}^2 \\ \xi &\mapsto \mathbb{Q}(\xi) = [\xi] \end{aligned}$$

dönüşümü ile belirlenen bölüm topolojisine sahiptir. Bu şekilde tanımlanan $\mathbb{OP}^2$ uzayı ***2-boyutlu oktonyonik projektif uzay*** olarak adlandırılır.

Bu uzayın da diğer projektif uzaylardakine benzer olarak S^{23} küresinin bir bölüm uzayı olarak ifade edilebileceği düşünülebilir. Fakat oktonyonlar asosyatiflik özelliğini sağlamadığından böyle bir bölüm uzayı tanımlayamayız. Yani;

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : S^{23} &\rightarrow \mathbb{OP}^2 \\ (\theta_1, \theta_2, \theta_3) &\mapsto \mathcal{P}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = [\theta_1, \theta_2, \theta_3] \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm bir bölüm dönüşümü değildir. Çünkü;
$\theta_1, \theta_2, \theta_3 \neq 0$ olmak üzere
$[\theta_1, \theta_2, \theta_3] = [1, \theta_2\theta_1^{-1}, \theta_3\theta_1^{-1}] = [\theta_1\theta_2^{-1}, 1, (\theta_3\theta_1^{-1})(\theta_1\theta_2^{-1})] \neq [\theta_1\theta_2^{-1}, 1, \theta_3\theta_2^{-1}]$ olup $\mathbb{OP}^2$ üzerinde tanımlanan $'\sim'$ bağıntısı geçişme özelliğini sağlamayıp bir denklik bağıntısı olmaz. O halde; $\mathbb{OP}^2$ üzerinde tanımlanan $'\sim'$ denklik bağıntısı ile $\mathcal{P} : S^{23} \rightarrow \mathbb{OP}^2$ ye bir bölüm dönüşümü tanımlanamaz.

Lemma 6.6.1. *$\mathbb{OP}^2$ projektif uzayı yerel öklidyendir.*

İspat. $\mathbb{OP}^2$ uzayında

$$V_1 = \{1\} \times \mathbb{O} \times \mathbb{O} = \{(1, y_1, z_1) : y_1, z_1 \in \mathbb{O}\}$$

$$V_2 = \mathbb{O} \times \{1\} \times \mathbb{O} = \{(x_2, 1, z_z) : x_2, z_2 \in \mathbb{O}\}$$

$$V_3 = \mathbb{O} \times \mathbb{O} \times \{1\} = \{(x_3, y_3, 1) : x_3, y_3 \in \mathbb{O}\}$$

olmak üzere

$$U_1 = V_1/_{\sim} = \{[1, y_1, z_1] \in \mathbb{OP}^2 : y_1, z_1 \in \mathbb{O}\}$$

$$U_2 = V_2/_{\sim} = \{[x_2, 1, z_z] \in \mathbb{OP}^2 : x_2, z_2 \in \mathbb{O}\}$$

$$U_3 = V_3/_{\sim} = \{[x_3, y_3, 1] \in \mathbb{OP}^2 : x_3, y_3 \in \mathbb{O}\}$$

şeklinde U_1, U_2 ve U_3 alt kümelerini tanımlayalım. Bu şekilde tanımlanan U_1, U_2 ve U_3 alt kümeleri $\mathbb{OP}^2$ de açıktır. Çünkü;

$$\mathcal{Q}^{-1}(U_1) = \{(1, y_1, z_1), (y_1^{-1}, 1, z_1 y_1^{-1}), (z_1^{-1}, y_1 z_1^{-1}, 1)\}$$

$$\mathcal{Q}^{-1}(U_2) = \{(x_2, 1, z_2), (1, x_2^{-1}, z_2 x_2^{-1}), (x_2 z_2^{-1}, z_2^{-1}, 1)\}$$

$$\mathcal{Q}^{-1}(U_3) = \{(x_3, y_3, 1), (1, y_3 x_3^{-1}, x_3^{-1}), (x_3 y_3^{-1}, 1, y_3^{-1})\}$$

alt kümeleri V de açıktır.

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1 : U_1 & \longrightarrow & \mathbb{O}^2 \\ [1, y_1, z_1] & \mapsto & \varphi_1([1, y_1, z_1]) = (y_1, z_1) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_2 : U_2 & \longrightarrow & \mathbb{O}^2 \\ [x_2, 1, z_2] & \mapsto & \varphi_1([x_2, 1, z_2]) = (x_2, z_2) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_3 : U_3 & \longrightarrow & \mathbb{O}^2 \\ [x_3, y_3, 1] & \mapsto & \varphi_1([x_3, y_3, 1]) = (x_3, y_3) \end{array}$$

şeklinde φ_1, φ_2 ve φ_3 dönüşümleri tanımlayalım. Bu dönüşümler homeomorfizm dönüşümleridir. ilk olarak φ_1 dönüşümünün bir homeomorfizm olduğunu gösterelim.

Örtenlik : Her $(a, b) \in \mathbb{O}^2$ için $\varphi_1([1, a, b]) = (a, b)$ olacak şekilde $[1, a, b] \in U_1$ var olduğundan φ_1 dönüşümü örtendir.

Birebirlik : $\varphi_1([1, y_1, z_1]) = \varphi_1([1, y_1', z_1']$ olsun. φ_1 in tanımından $(y_1, z_1) = (y_1', z_1')$ olup $y_1 = y_1'$ ve $z_1 = z_1'$ dir. Buradan; $[1, y_1, z_1] = [1, y_1', z_1']$ olup φ_1 dönüşümü bire-birdir.

Süreklilik : φ_1 dönüşümünün sürekli olduğunu göstermek için *Lemma 2.3.1* ve $\varphi_1 \circ \mathcal{Q} : V_1 \longrightarrow \mathbb{O}^2$ dönüşümünün sürekliliğinden faydalanacağız.

$[1, y_1, z_1] \in U_1$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1 \circ \mathcal{Q} : V_1 & \longrightarrow & \mathbb{O}^2 \\ (1, y_1, z_1) & \mapsto & (y_1, z_1) \end{array}$$

olup bu dönüşüm bir öklidyen uzaydan diğerine sürekli bir dönüşüm olarak yazılabileceğinden $\varphi_1 \circ \mathcal{Q}$ süreklidir. Diğer yandan; *Lemma 2.3.1* deki

$$\varphi_1 \circ \mathcal{Q} \text{ süreklidir} \Longleftrightarrow \varphi_1 \text{ süreklidir}$$

ifadesinden φ_1 dönüşümünün sürekli olduğu söylenir.
φ_1 dönüşümü bire-bir ve örten olduğundan tersi mevcuttur.

$$\begin{array}{rcl} {\varphi_1}^{-1} : \mathbb{O}^2 & \longrightarrow & U_1 \\ (a, b) & \mapsto & [1, a, b] \end{array}$$

olup ${\varphi_1}^{-1}$ süreklidir. Çünkü;

$$\mathbb{O}^2 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{\mathcal{Q}} \mathbb{OP}^2$$

sürekli dönüşümlerini gözönüne alalım. Bu iki sürekli dönüşümün bileşkesi φ_1^{-1} olup φ_1^{-1} süreklidir.

Sonuç olarak; φ_1 dönüşümü bire-bir, örten, sürekli ve tersi de sürekli olduğundan bir homeomorfizmdir.

İkinci olarak φ_2 dönüşümünün bir homeomorfizm olduğunu gösterelim.

Örtenlik : Her $(a, b) \in \mathbb{O}^2$ için $\varphi_([a, 1, b]) = (a, b)$ olacak şekilde $[a, 1, b] \in U_2$ var olduğundan φ_2 dönüşümü örtendir.

Birebirlik : $\varphi_2([x_2, 1, z_2]) = \varphi_2([{x_2}', 1, {z_2}'])$ olsun. φ_2 in tanımından $(x_2, z_2) = ({x_2}', {z_2}')$ olup $x_2 = {x_2}'$ ve $z_2 = {z_2}'$ dir. Buradan; $[x_2, 1, z_2] = [{x_2}', 1, {z_2}']$ olur ki φ_2 bire-birdir denir.

Süreklilik : φ_2 dönüşümünün sürekli olduğunu göstermek için *Lemma 2.3.1* ve $\varphi_2 \circ \mathcal{Q} : V_2 \longrightarrow \mathbb{O}^2$ dönüşümünün sürekliliğinden faydalanacağız.

$$\begin{array}{rcl} \varphi_2 \circ \mathcal{Q} : V_2 & \longrightarrow & \mathbb{O}^2 \\ (x_2, 1, z_2) & \mapsto & (x_2, z_2) \end{array}$$

olup bu dönüşüm bir öklidyen uzaydan diğerine sürekli bir dönüşüm olarak yazılabileceğinden $\varphi_2 \circ \mathcal{Q}$ süreklidir. Diğer yandan; *Lemma 2.3.1* deki

$$\varphi_2 \circ \mathcal{Q} \text{ süreklidir} \Longleftrightarrow \varphi_2 \text{ süreklidir}$$

ifadesinden φ_2 dönüşümünün sürekli olduğu söylenir.

φ_2 dönüşümü bire-bir ve örten olduğundan tersi mevcuttur.

$$\begin{aligned} {\varphi_2}^{-1} : \mathbb{O}^2 &\longrightarrow U_2 \\ (a,b) &\mapsto [a,1,b] \end{aligned}$$

olup ${\varphi_2}^{-1}$ süreklidir. Çünkü;

$$\mathbb{O}^2 \longrightarrow V_2 \xrightarrow{\mathcal{Q}} \mathbb{OP}^2$$

sürekli dönüşümlerini gözönüne alalım. Bu iki sürekli dönüşümün bileşkesi φ_2^{-1} olup φ_2^{-1} süreklidir.

Sonuç olarak; φ_2 dönüşümü bire-bir, örten, sürekli ve tersi de sürekli olduğundan bir homeomorfizmdir. Son olarak φ_3 dönüşümünün bir homeomorfizm olduğunu gösterelim.

Örtenlik : Her $(a,b) \in \mathbb{O}^2$ için $\varphi_3([a,b,1]) = (a,b)$ olacak şekilde $[a,b,1] \in U_3$ var olduğundan φ_3 dönüşümü örtendir.

Birebirlik : $\varphi_3([x_3,y_3,1]) = \varphi_3([{x_3}',{y_3}',1])$ olsun. φ_3 in tanımından $(x_3,y_3) = ({x_3}',{y_3}')$ olup $x_3 = {x_3}'$ ve $y_3 = {y_3}'$ dür. Buradan; $[x_3,y_3,1] = [{x_3}',{y_3}',1]$ olup φ_3 bire-birdir denir.

Süreklilik : φ_3 dönüşümünün sürekli olduğunu göstermek için *Lemma 2.3.1* ve $\varphi_3 \circ \mathcal{Q} : V_3 \longrightarrow \mathbb{O}^2$ dönüşümünün sürekliliğinden faydalanacağız.

$$\begin{aligned} \varphi_3 \circ \mathcal{Q} : V_3 &\longrightarrow \mathbb{O}^2 \\ (x_3,y_3,1) &\mapsto (x_3,y_3) \end{aligned}$$

olup bu dönüşüm bir öklidyen uzaydan diğerine sürekli bir dönüşüm olarak yazılabileceğinden $\varphi_3 \circ \mathcal{Q}$ süreklidir. Diğer yandan; *Lemma 2.3.1* deki

$$\varphi_3 \circ \mathcal{Q} \text{ süreklidir} \Longleftrightarrow \varphi_3 \text{ süreklidir}$$

ifadesinden φ_3 dönüşümünün sürekli olduğu söylenir.

φ_3 dönüşümü bire-bir ve örten olduğundan tersi mevcuttur.

$$\begin{array}{rcl} {\varphi_3}^{-1} : \mathbb{O}^2 & \longrightarrow & U_2 \\ (a, b) & \mapsto & [a, b, 1] \end{array}$$

olup ${\varphi_3}^{-1}$ süreklidir. Çünkü;

$$\mathbb{O}^2 \longrightarrow V_3 \xrightarrow{\mathcal{Q}} \mathbb{OP}^2$$

sürekli dönüşümlerini gözönüne alalım. Bu iki sürekli dönüşümün bileşkesi φ_3^{-1} olup φ_3^{-1} süreklidir. Sonuç olarak; φ_3 dönüşümü bire-bir, örten, sürekli ve tersi de sürekli olduğundan bir homeomorfizmdir.

Böylece; $\mathbb{OP}^2$ uzayının her noktasının bir U_k(k=1,2,3) açık komşuluğu ile $\mathbb{O}^2(\mathbb{O} \cong \mathbb{R}^{16})$ uzayı arasında bir $\varphi_k(k = 1, 2, 3)$ homeomorfizmi var olduğundan $\mathbb{OP}^2$ oktonyonik projektif uzayı 16−boyutlu yerel öklidyen bir uzaydır. ■

Lemma 6.6.2. $\mathbb{OP}^2$ *projektif uzayı* 2. *sayılabilir uzaydır.*

İspat.

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1 : U_1 & \longrightarrow & \mathbb{O}^2 \\ [1, y_1, z_1] & \mapsto & \varphi_1([1, y_1, z_1]) = (y_1, z_1) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_2 : U_2 & \longrightarrow & \mathbb{O}^2 \\ [x_2, 1, z_2] & \mapsto & \varphi_2([x_2, 1, z_2]) = (x_2, z_2) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_3 : U_3 & \longrightarrow & \mathbb{O}^2 \\ [x_3, y_3, 1] & \mapsto & \varphi_2([x_3, y_3, 1]) = (x_3, y_3) \end{array}$$

şeklinde tanımlanan φ_1, φ_2 ve φ_3 dönüşümleri homeomorfizm dönüşümleri olduğundan $U_1 \cong \mathbb{O}^2$, $U_2 \cong \mathbb{O}^2$ ve $U_3 \cong \mathbb{O}^2$ olarak yazılabilir. $\mathbb{O}^2 \cong \mathbb{R}^{16}$ olduğundan $U_1 \cong \mathbb{R}^{16}$, $U_2 \cong \mathbb{R}^{16}$ ve $U_3 \cong \mathbb{R}^{16}$ dır. $\mathbb{R}^{16}$ öklid uzayı 2. sayılabilir uzay ve 2. sayılabilirlik topolojik bir özellik olduğundan U_1, U_2 ve U_3 kümeleri de 2. sayılabilirdir. O halde; U_1 in sayılabilir bir $\mathcal{B}_1$, U_2 nin sayılabilir bir $\mathcal{B}_2$ ve U_3 ün sayılabilir bir $\mathcal{B}_3$ tabanı mevcuttur. $U_1 \cup U_2 \cup U_3 = \mathbb{OP}^2$ olup

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3$$

koleksiyonu da $\mathbb{OP}^2$ için bir tabandır. Gerçekten; $U \subset \mathbb{OP}^2$ açık olsun.

$$U = U \cap \mathbb{OP}^2 = U \cap (U_1 \cup U_2 \cup U_3) = (U \cap U_1) \cup (U \cap U_2) \cup (U \cap U_3)$$

olup U alt kümesi $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ veya $\mathcal{B}_3$ deki elemanların keyfi birleşimi şeklinde yazılabilir. Böylece; $\mathcal{B}$ koleksiyonu $\mathbb{OP}^2$ için bir taban olup sayılabilir sayıdaki üç kümenin birleşimi olduğundan sayılabilirdir. $\mathbb{OP}^2$ uzayı sayılabilir bir $\mathcal{B}$ tabanına sahip olduğundan 2. sayılabilir uzaydır. ■

Lemma 6.6.3. $\mathbb{OP}^2$ *projektif uzayı Hausdorff'dur.*

İspat. $\mathbb{OP}^2$ uzayının

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1 : U_1 & \longrightarrow & \mathbb{O}^2 \\ [1, y_1, z_1] & \mapsto & \varphi_1([1, y_1, z_1]) = (y_1, z_1) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_2 : U_2 & \longrightarrow & \mathbb{O}^2 \\ [x_2, 1, z_2] & \mapsto & \varphi_2([x_2, 1, z_2]) = (x_2, z_2) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_3 : U_3 & \longrightarrow & \mathbb{O}^2 \\ [x_3, y_3, 1] & \mapsto & \varphi_2([x_3, y_3, 1]) = (x_3, y_3) \end{array}$$

kart dönüşümlerini gözönüne alalım. U_1, U_2 ve U_3 açık alt kümeleri $\mathbb{R}^{16}$ öklid uzayına homeomorf olup $\mathbb{R}^{16}$ öklid uzayı 2. sayılabilir bir uzay ve 2. sayılabilirlik topolojik bir özellik olduğundan bu kümeler de 2. sayılabilirdir. $U_1 \cup U_2 \cup U_3 = \mathbb{OP}^2$ olup $\mathbb{OP}^2$ uzayının Hausdorff olduğunu göstermek için farklı herhangi iki noktanın birbirine göre durumunu incelemek yeterlidir.

Eğer seçilen farklı herhangi iki noktanın ikisi de U_1, U_2 veya U_3 kümelerinden birinde ise bu kümeler 2. sayılabilir olduğundan bu noktaların ayrık açık komşulukları mevcuttur.

Eğer seçilen herhangi farklı iki noktanın ikisi farklı U_1 , U_2 veya U_3 kümelerinde ve ikisi de aynı anda $[1,0,0]$, $[0,1,0]$, $[0,0,1]$ olmayacak şekilde seçilirse bu iki noktanın çok küçük açık komşulukları ayrık olacak şekilde bulunabilir. Bu durumda; $[1,0,0]$, $[0,1,0]$, $[0,0,1]$ noktalarının birbirlerine göre durumunu incelemek yeterlidir.

Kabul edelim ki ilk noktamız $[1,0,0]$ ve ikinci noktamız $[0,1,0]$ olsun. $[1,0,0]$ noktasının bir açık komşuluğu

$$U = \left\{ [1, y_1, z_1] \in \mathbb{OP}^2 \ : \ ||y_1|| < \frac{1}{10} \ , \ ||z_1|| < \frac{1}{10} \right\}$$

ve $[0,1,0]$ noktasının bir açık komşuluğu

$$U' = \left\{ [x_2, 1, z_2] \in \mathbb{OP}^2 \ : \ ||x_2|| < \frac{1}{10} \ , \ ||z_2|| < \frac{1}{10} \right\}$$

olarak seçilsin. Bu şekilde seçilen $\mathbb{OP}^2$ uzayının bu iki açık alt kümesi ayrıktır. Benzer olarak;

İlk noktamız $[1,0,0]$ ve ikinci noktamız $[0,0,1]$ olsun. $[1,0,0]$ noktasının bir açık komşuluğu

$$U = \left\{ [1, y_1, z_1] \in \mathbb{OP}^2 \ : \ ||y_1|| < \frac{1}{10} \ , \ ||z_1|| < \frac{1}{10} \right\}$$

ve $[0,0,1]$ noktasının bir açık komşuluğu

$$U' = \left\{ [x_3, y_3, 1] \in \mathbb{OP}^2 \ : \ ||x_3|| < \frac{1}{10} \ , \ ||y_3|| < \frac{1}{10} \right\}$$

olarak seçilsin. Bu şekilde seçilen $\mathbb{OP}^2$ uzayının bu iki açık alt kümesi ayrıktır. Benzer şekilde;

İlk noktamız $[0,1,0]$ ve ikinci noktamız $[0,0,1]$ olsun. $[0,1,0]$ noktasının bir açık komşuluğu

$$U = \left\{ [x_2, 1, z_2] \in \mathbb{OP}^2 \ : \ ||x_2|| < \frac{1}{10} \ , \ ||z_2|| < \frac{1}{10} \right\}$$

ve $[0,0,1]$ noktasının bir açık komşuluğu

$$U' = \left\{ [x_3, y_3, 1] \in \mathbb{OP}^2 \ : \ ||x_3|| < \frac{1}{10} \ , \ ||y_3|| < \frac{1}{10} \right\}$$

olarak seçilsin. Bu şekilde seçilen $\mathbb{OP}^2$ uzayının bu iki açık alt kümesi de ayrıktır.

Böylece; $\mathbb{OP}^2$ projektif uzayında alınan farklı herhangi iki noktanın ayrık açık komşulukları mevcut olup bu uzay Hausdorff'dur denir. ■

Sonuç 6.6.4. $\mathbb{OP}^2$ *oktonyonik projektif uzayı Hausdorff, yerel öklidyen ve* 2. *sayılabilir uzay olduğundan topolojik bir manifolddur.*

6.7 $\mathbb{OP}^2$ Uzayının Kart Dönüşümleri ve Örtüşme Fonksiyonları

$\mathbb{OP}^2$ uzayı için

$$\begin{aligned} \varphi_1 : U_1 &\longrightarrow \mathbb{O}^2 \\ [1, y_1, z_1] &\mapsto \varphi_1([1, y_1, z_1]) = (y_1, z_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {\varphi_1}^{-1} : \mathbb{O}^2 &\longrightarrow U_1 \\ (a, b) &\mapsto {\varphi_1}^{-1}(a, b) = ([1, a, b]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2 : U_2 &\longrightarrow \mathbb{O}^2 \\ [x_2, 1, z_2] &\mapsto \varphi_2([x_2, 1, z_2]) = (x_2, z_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {\varphi_2}^{-1} : \mathbb{O}^2 &\longrightarrow U_2 \\ (a, b) &\mapsto {\varphi_2}^{-1}(a, b) = ([a, 1, b]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_3 : U_3 &\longrightarrow \mathbb{O}^2 \\ [x_3, y_3, 1] &\mapsto \varphi_2([x_3, y_3, 1]) = (x_3, y_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {\varphi_3}^{-1} : \mathbb{O}^2 &\longrightarrow U_3 \\ (a, b) &\mapsto {\varphi_3}^{-1}(a, b) = ([a, b, 1]) \end{aligned}$$

dönüşümlerini gözönüne alalım. Bu üç dönüşüm homeomorfizm olduğundan (U_1, φ_1), (U_2, φ_2) ve (U_3, φ_3) çifti $\mathbb{OP}^2$ için birer kart olurlar. Bu kartların örtüşme fonksiyonları

$$\begin{aligned} {\varphi_1 \circ \varphi_2}^{-1} : \varphi_2(U_1 \cap U_2) &\longrightarrow \varphi_1(U_1 \cap U_2) \\ (a,b) &\mapsto (\varphi_1 \circ {\varphi_2}^{-1})((a,b)) = \varphi_1({\varphi_2}^{-1}((a,b))) \\ &\qquad = \varphi_1([a,1,b]) \\ &\qquad = (a^{-1}, ba^{-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {\varphi_2 \circ \varphi_1}^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) &\longrightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2) \\ (a,b) &\mapsto (\varphi_2 \circ {\varphi_1}^{-1})((a,b)) = \varphi_2({\varphi_1}^{-1}((a,b))) \\ &\qquad = \varphi_2([1,a,b]) \\ &\qquad = (a^{-1}, ba^{-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {\varphi_1 \circ \varphi_3}^{-1} : \varphi_2(U_1 \cap U_3) &\longrightarrow \varphi_1(U_1 \cap U_3) \\ (a,b) &\mapsto (\varphi_1 \circ {\varphi_3}^{-1})((a,b)) = \varphi_1({\varphi_3}^{-1}((a,b))) \\ &\qquad = \varphi_1([a,b,1]) \\ &\qquad = (ba^{-1}, a^{-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {\varphi_3 \circ \varphi_1}^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) &\longrightarrow \varphi_3(U_1 \cap U_2) \\ (a,b) &\mapsto (\varphi_3 \circ {\varphi_1}^{-1})((a,b)) = \varphi_3({\varphi_1}^{-1}((a,b))) \\ &\qquad = \varphi_3([1,a,b]) \\ &\qquad = (ba^{-1}, a^{-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {\varphi_2 \circ \varphi_3}^{-1} : \varphi_3(U_2 \cap U_3) &\longrightarrow \varphi_2(U_2 \cap U_3) \\ (a,b) &\mapsto (\varphi_2 \circ {\varphi_3}^{-1})((a,b)) = \varphi_2({\varphi_3}^{-1}((a,b))) \\ &\qquad = \varphi_2([a,b,1]) \\ &\qquad = (ab^{-1}, b^{-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {\varphi_3 \circ \varphi_2}^{-1} : \varphi_2(U_1 \cap U_2) &\longrightarrow \varphi_3(U_1 \cap U_2) \\ (a,b) &\mapsto (\varphi_3 \circ {\varphi_2}^{-1})((a,b)) = \varphi_3({\varphi_2}^{-1}((a,b))) \\ &\qquad = \varphi_3([a,1,b]) \\ &\qquad = (ab^{-1}, b^{-1}) \end{aligned}$$

şeklinde olup

$$(\varphi_1 \circ {\varphi_2}^{-1})((a,b)) = (a^{-1}, ba^{-1}) = (\varphi_2 \circ {\varphi_1}^{-1})((a,b)) \quad , \quad (a,b) \in \mathbb{O}^2$$

$$(\varphi_1 \circ {\varphi_3}^{-1})((a,b)) = (ba^{-1}, a^{-1}) = (\varphi_3 \circ {\varphi_1}^{-1})((a,b)) \quad , \quad (a,b) \in \mathbb{O}^2$$

$$(\varphi_2 \circ {\varphi_3}^{-1})((a,b)) = (ab^{-1}, b^{-1}) = (\varphi_3 \circ {\varphi_2}^{-1})((a,b)) \quad , \quad (a,b) \in \mathbb{O}^2$$

olarak elde edilir.

$\varphi_1 \circ {\varphi_2}^{-1}$, $\varphi_2 \circ {\varphi_1}^{-1}$, $\varphi_1 \circ {\varphi_3}^{-1}$, $\varphi_3 \circ {\varphi_1}^{-1}$, $\varphi_2 \circ {\varphi_3}^{-1}$ ve $\varphi_3 \circ {\varphi_2}^{-1}$ örtüşme fonksiyonları öklid koordinatlarda yazıldığında sürekli ve her mertebeden kısmi türevleri mevcut olduğundan (U_1, φ_1), (U_2, φ_2) ve (U_3, φ_3) kartları $C^\infty-$ ***uyumlu***dur. $\mathbb{OP}^2$ üzerinde $U_1 \cup U_2 \cup U_3 = \mathbb{OP}^2$ olan $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2), (U_3, \varphi_3)\}$ kartlarının ailesi $16-$boyutlu diferansiyellenebilir bir atlas yapısı oluşturur.

6.8 $\mathbb{OP}^2$ Projektif Uzayının Bazı Topolojik Özellikleri

1) $\mathbb{OP}^2$ projektif uzayı yol bağlantılıdır. Bu uzayın yol bağlantılı olduğunu göstermek için

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1 : U_1 & \longrightarrow & \mathbb{O}^2 \\ {[1, y_1, z_1]} & \mapsto & \varphi_1([1, y_1, z_1]) = (y_1, z_1) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_2 : U_2 & \longrightarrow & \mathbb{O}^2 \\ {[x_2, 1, z_2]} & \mapsto & \varphi_2([x_2, 1, z_2]) = (x_2, z_2) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_3 : U_3 & \longrightarrow & \mathbb{O}^2 \\ {[x_3, y_3, 1]} & \mapsto & \varphi_2([x_3, y_3, 1]) = (x_3, y_3) \end{array}$$

homeomorfizm dönüşümlerini gözönüne alalım. $U_1 \cong \mathbb{R}^{16}$, $U_2 \cong \mathbb{R}^{16}$ ve $U_3 \cong \mathbb{R}^{16}$ olup $\mathbb{R}^{16}$ öklid uzayı yol bağlantılı ve yol bağlantılılık topolojik bir özellik olduğundan U_1, U_2, U_3 açık kümeleri de yol bağlantılıdır. Ayrıca;

$$U_1 \cap U_2 = \{[1, x, y] : x \neq 0\} \neq \emptyset$$

olduğundan $U_1 \cup U_2$ kümesi yol bağlantılıdır. Dahası;

$$(U_1 \cup U_2) \cap U_3 = \{[x, y, 1] : x, y \neq 0\} \neq \emptyset$$

olup $U_1 \cup U_2 \cup U_3$ kümesi de yol bağlantılıdır.

$$U_1 \cup U_2 \cup U_3 = \mathbb{OP}^2$$

olduğundan $\mathbb{OP}^2$ uzayı da yol bağlantılıdır denir.

2) Yol bağlantılı her uzay bağlantılı olup $\mathbb{OP}^2$ projektif uzayı da yol bağlantılı olduğundan bağlantılıdır.

KAYNAKLAR

[1] Artmann, B.,”Pıctures of the Projective Plane”, Goettingen, Germany, 2007.

[2] Aslaksen, H.,”Restricted Homogeneous Coordinates For the Cayley Projective Plane”, Geom. Dedicata 40 (1991).

[3] Baez, J.C., ”The Octonions”, Riverside CA, 2001.

[4] Gluck, H., and Ziller, W., ”The Geometry of the Hopf Fıbratıon”, L’enseıgnement Mathématıque, Zürich, 1986.

[5] Gursey, F., ”On the Role of Division, Jordan and Related Algebras in Particle Physics ”, World Scientific Pub Co Inc, 1996.

[6] Held, R., Stavrov, I., and Vankoten, B., ”(Semı-)Rıemannıan Geometry of (Para-)Octonıonıc Projectıve Planes”, Mathematics Subject Classification, 2000.

[7] Jones, J., and Vincent, I., ”Cohomology and Poincaré Duality”, 2012.

[8] Karigiannis, S., ”Algebra and Geometry : Spheres and Projective Spaces”, 2010.

[9] Kramer, L.,”The topology of smooth projective planes”, Basel, 1994.

[10] Naber, G.L., ”Topology, Geometry, And Gauge Fields : Foundations”, Springer-Verlag, New York, A.B.D, 1997.

[11] Oancea, A., ”Real Compact Surfaces”, Resonance, 2001.

[12] Okubo, S., ”Introduction to Octonion and Other Non-Associative Algebras in Physics ”, Cambridge University, 1995.

[13] Sjamaar, R., ”Manifolds and Differential Forms”, New York, 2006.

[14] Stillwell, J., ”The Four Pillars of Geometry”, Springer, New York, 2005.