SÜREKLİ KESİRLER VE UYGULAMALARI

Osman BOZ

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Şubat - 2014

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

JÜRİ ve ENSTİTÜ ONAYI

Osman BOZ'un " **Sürekli Kesirler ve Uygulamaları**" başlıklı Matematik Anabilim Dalındaki Yüksek Lisans tezi 14/02/2014 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	Adı-Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	**: Yrd.Doç.Dr. Yunus ÖZDEMİR**	**..........**
Üye	**: Doç. Dr. Sevil ŞENTÜRK**	**..........**
Üye	**: Prof. Dr. Bünyamin DEMİR**	**..........**

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Sürekli Kesirler ve Uygulamaları

Osman BOZ

Anadolu Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd.Doç.Dr. Yunus ÖZDEMİR

2014, 60 sayfa

Sürekli kesirler, özellikle sayıların ifade edilmesi, Diophantus denklemlerinin çözümleri gibi bir çok problemde önemli bir araç olarak binlerce yıldır kullanılmaktadır. Ama özellikle 18.yüzyıldan sonra bir çok alanda kullanılan önemli bir araç haline gelmiştir. Günümüzde, yaklaşıklık teorisinde çok önemli bir yere sahip olan sürekli kesirler, özellikle tamsayıların Öklid algoritması ile bağlantılı olan önemli bir çok özelliğe sahiptir. Bu çalışmada (basit) sürekli kesir kavramı ve özellikleri ayrıntılı bir biçimde incelendikten sonra, bazı uygulamaları üzerinde durulmuştur.

Birinci bölümde sürekli kesirlerle ilgili temel bazı tanım ve bilgilere yer verildikten sonra, rasyonel ve irrasyonel sayıların sürekli kesir gösterimi üzerinde durulmuştur.

İkinci bölümde basit sürekli kesirlerin yakınsamalarının genel özellikleri verilmiştir. Verilen bir reel sayı ile, sürekli kesir gösteriminin sonlu, sonsuz veya periyodik olması arasındaki ilişki ortaya konmuştur.

Son bölümde ise, sürekli kesirlerin birkaç farklı uygulamasının yanında, lineer Diophantus denklemleri ve Diophantus denklemlerinden olan Pell denklemlerinin çözümlerinin sürekli kesir kavramı yardımıyla bulunması üzerinde durulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Sürekli kesir, lineer Diophantus denklemi, Pell denklemi

ABSTRACT

Master of Science Thesis

Continued Fractions and Its Applications

Osman BOZ

Anadolu University

Graduate School of Sciences

Mathematics Program

Supervisor: Assist.Prof.Dr. Yunus ÖZDEMİR

2014, 60 pages

Continued fractions are important tools in mathematics to express numbers and solutions of Diophantine equations for thousands of years. But, especially since 18th century, continued fractions have become an important notion in various areas.Nowaday the notion of continued fraction which is very important facility in approximation theory has many remarkable properties related to the Euclidean algorithm for integers. In this thesis, the notion of (simple) continued fraction and its properties are studied in detail. Besides, different examples using continued fraction are given.

The first section provides an introduction to the notion of continued fraction. Some definitions are given and the representation of real numbers by continued fractions(rational and irrational numbers respectively) are clarified.

In the second section, basic properties of simple continued fractions are pointed out. The relationship between finite, infinite, periodic continued fractions and real numbers are presented.

In the last section, in addition to some applications of continued fractions, the solutions of linear Diophantine equations with continued fractions are elaborated. Besides, as a special variation of Diophantine equations, the solutions of Pell Equations with continued fractions are included.

Keywords: Continued fraction, linear Diophantine equation, Pell equation

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın her aşamasında ve günün her saatinde bana yardımcı olan danışmanım Yrd.Doç.Dr. Yunus ÖZDEMİR'e, aynı süreçte manevi desteği için eşim Ayşe ÜRKEL BOZ'a teşekkür ediyorum. Bu çalışmayı, son aşamalarına geldiğimiz dönemlerde, motivasyonumu artıran ve bitirmeye zorlayan doğumuna 1 ay kalmış olan oğlum Sarp'a ithaf ediyorum.

Osman BOZ

ŞUBAT 2014

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar
$\mathbb{Z}$	:	Tamsayılar
$\mathbb{Z}^+$	:	Pozitif tamsayılar
$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$	:	Sonlu sürekli kesir
$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$	:	Sonsuz sürekli kesir
$\frac{p_k}{q_k}$	:	Sürekli kesirin baştan k. yakınsaması
$\frac{p_k^{'}}{q_k^{'}}$	:	Sürekli kesirin sondan k. yakınsaması
φ	:	Altın oran

1. SÜREKLİ KESİRLER

Bu çalışmada, sürekli kesir kavramı ele alınıp, birkaç önemli uygulamasına yer verilmiştir. Bu bölümde sürekli kesirlerle ilgili temel bazı bilgiler verildikten sonra, reel sayıların, sırasıyla rasyonel sayıların ve irrasyonel sayıların sürekli kesir gösterimi üzerinde durulacaktır. İkinci bölümde ise, sürekli kesirlerin yakınsamalarının özellikleri ortaya konup, bazı temel teoremler üzerinde durulacaktır. Son bölümde ise sürekli kesirlerin birkaç farklı uygulamasının dışında, temel olarak lineer Diophantus denklemleri ve Diophantus denklemlerinden Pell denklemlerinin sürekli kesir kavramı yardımıyla nasıl çözümlendiği üzerinde durulacaktır.

Literatürde, sürekli kesirler ve uygulamaları ile ilgili birçok farklı kaynak mevcuttur. Bu kaynaklardan [4], [7], [9] ve [10] bu konu ile ilgili, bu çalışmada da sıkça başvurulan temel kaynaklardandır.

1.1. Temel Tanımlar ve Gösterimler

Tanım 1.1 *$a_0, a_1, a_2, \ldots$ ve $b_0, b_1, b_2, \ldots$ reel veya kompleks sayı, ya da fonksiyon değişkeni olmak üzere*

$$a_0 + \cfrac{b_0}{a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{a_3 + \cfrac{b_3}{a_4 + \cfrac{b_4}{\vdots}}}}}$$

*formunda yazılan kesirlere **sürekli kesir** denir.*

Tanım 1.2 *Tanım 1.1'deki gösterimiyle verilen bir sürekli kesirde $i = 0, 1, 2, \ldots$ için a_0 bir tam sayı, $b_i = 1$ ve $i \geq 1$ için a_i doğal sayı oluyorsa, bu türden sürekli kesirlere **basit sürekli kesir** denir. Yani bir basit sürekli kesir*

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{\vdots}}}}}$$

formundadır ve bu yazılış $[a_0; a_1, a_2, ...]$ *şeklinde de gösterilir.*

Tanım 1.3 *Verilen herhangi bir basit sürekli kesir sonlu sayıda terim içeriyorsa, örneğin* $n+1$ *tane terim içeriyorsa*

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ldots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}$$

veya

$$[a_0; a_1, a_2, ..., a_n]$$

şeklindedir. Bu türden basit sürekli kesirlere ***sonlu basit sürekli kesir*** *denir. Eğer sonsuz terim içeriyorsa*

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\vdots}}}}$$

veya

$$[a_0; a_1, a_2, ...]$$

şeklinde ifade edilir. Bu türden basit sürekli kesirlere de ***sonsuz basit sürekli kesir*** *denir.*

Bu çalışmada, sadece basit sonlu veya sonsuz sürekli kesirlerle ilgilenilecektir.

Örnek 1.1 *Örneğin,*

$$[1; 3, 5, 7, 1, 3]$$

sürekli kesri bir sonlu basit sürekli kesirdir. Bu sürekli kesir

$$1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}}}}$$

şeklinde de ifade edilebilir.

Örnek 1.2 *Daha sonra karşımıza çok özel bir sayının sürekli kesir açılımı olarak çıkacak olan*

$$[1; 2, 2, 2, 2, 2, ...]$$

sürekli kesri bir sonsuz basit sürekli kesirdir. Bu sürekli kesir

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \vdots}}}}}$$

şeklinde de ifade edilebilir.

Tanım 1.4 *Verilen bir sonsuz basit sürekli kesir belli bir terimden sonra, kendini tekrar eden bloklardan oluşuyorsa bu sürekli kesire* ***periyodik sürekli kesir*** *denir. Tekrar eden blok sayısına sürekli kesirin periyodu denir.*

Örnek 1.3 *Örneğin,*

$$[2;3,\boldsymbol{4,7,1,2},4,7,1,2,\boldsymbol{4,7,1,2},4,7,1,2,...] = [2;3,\overline{4,7,1,2}]$$

sürekli kesri periyodu 4 olan bir periyodik sürekli kesirdir. Bu sürekli kesir

$$2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\vdots}}}}}}}}}}$$

şeklinde de ifade edilebilir.

$[a_0; a_1, a_2, ..., a_n]$ sonlu sürekli kesri verilmiş olsun. $0 \leq k \leq n$ için ilk $k+1$ terimin oluşturduğu $[a_0; a_1, a_2, ..., a_k]$ sürekli kesiri bir toplama karşılık gelir ve bu toplam $[a_0; a_1, a_2, ..., a_n]$ sonlu sürekli kesrinin gösterdiği değere yakın bir değerdir ve k. yakınsaması olarak tanımlanır. Bu yakınsama ve bu yakınsamadan geriye kalan terimlerin oluşturduğu sonlu sürekli kesri

$$\begin{aligned} s_k &= [a_0; a_1, a_2, ..., a_k] = \frac{p_k}{q_k} && (0 \leq k \leq n) \\ r_k &= [a_k; a_{k+1}, a_{k+2}, ..., a_n] = \frac{p'_{n-k}}{q'_{n-k}} && (0 \leq k \leq n) \end{aligned}$$

biçiminde göstereceğiz. Aynı gösterim $[a_0; a_1, a_2, ..., a_n, ...]$ sonsuz sürekli kesri için de benzer şekilde kullanılmaktadır:

$$\begin{aligned} s_k &:= [a_0; a_1, a_2, ..., a_k] && (k \geq 0) \\ r_k &:= [a_k; a_{k+1}, a_{k+2}, ...] && (k \geq 0) \end{aligned}$$

1.2. Rasyonel Sayıların Sürekli Kesirlerle Gösterilmesi

Herhangi bir rasyonel sayı verildiğinde bu sayının sürekli kesir yazılışı sonlu olmalıdır. Bu durum, bir sonraki bölümde kanıtlanacaktır. Öncelikle, herhangi bir rasyonel sayı verildiğinde bu sayının sürekli kesir yazılışı olarak nasıl ifade edildiği örneklerde gösterilecektir.

Örnek 1.4 $\frac{72}{35}$ *rasyonel sayısının sürekli kesir ifadesini yazalım.* $\frac{72}{35}$ *sayısı* 2 *ile* 3 *arasında bir sayıdır ve*

$$\frac{72}{35} = 2 + \frac{2}{35}$$

şeklindedir. Bu şekilde yazıp devam edersek,

$$\begin{aligned} \frac{72}{35} &= 2 + \frac{2}{35} \\ &= 2 + \cfrac{1}{\cfrac{35}{2}} \\ &= 2 + \cfrac{1}{17 + \cfrac{1}{2}} \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Yani

$$\frac{72}{35} = [2; 17, 2]$$

şeklindedir.

Örnek 1.5 $\frac{128}{77}$ *rasyonel sayısının sürekli kesir ifadesini yazalım. Benzer şekilde,*

$$\frac{128}{77} = 1 + \frac{51}{77}$$

olduğundan

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

$$
\begin{aligned}
\frac{128}{77} &= 1+\frac{51}{77} \\
&= 1+\cfrac{1}{\cfrac{77}{51}} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{26}{51}} \\
&= 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{51}{26}}} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{25}{26}}} \\
&= 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{26}{25}}}} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{25}}}}
\end{aligned}
$$

olduğundan

$$\frac{128}{77} = [1; 1, 1, 1, 25]$$

olarak elde edilmiş olur.

Bir rasyonel sayının sürekli kesir ifadesinde ortaya çıkan değerler, Öklid Algoritması uygulaması sonucu çıkan değerler ile aynıdır. $\frac{128}{77}$ rasyonel sayısına Öklid Algoritmasını uygularsak, aşağıdaki gibi elde edilir.

$$
\begin{aligned}
128 &= 77 \cdot \mathbf{1} + 51 \\
77 &= 51 \cdot \mathbf{1} + 26 \\
51 &= 26 \cdot \mathbf{1} + 25 \\
26 &= 25 \cdot \mathbf{1} + 1 \\
25 &= 1 \cdot \mathbf{25} + 0
\end{aligned}
$$

Örnek 1.6 $\dfrac{86}{15}$ *rasyonel sayısına Öklid Algoritmasını uygularsak*

$$\begin{aligned} 86 &= 15 \cdot \mathbf{5} + 11 \\ 15 &= 11 \cdot \mathbf{1} + 4 \\ 11 &= 4 \cdot \mathbf{2} + 3 \\ 4 &= 3 \cdot \mathbf{1} + 1 \\ 3 &= 1 \cdot \mathbf{3} + 0 \end{aligned}$$

ve sonuç olarak

$$\frac{86}{15} = [5; 1, 2, 1, 3]$$

sürekli kesir ifadesi bulunmuş olur.

Verilen bir sürekli kesir sonlu ise, bu kesrin bir rasyonel sayı verdiği aşikardır. Tersine bir rasyonel sayının da sürekli kesir ifadesi sonludur. Kanıtına birazdan değinilecektir. Şimdi sonlu sürekli kesirlerle ilgili 2 temel özelliği inceleyelim.

Teorem 1.1 *Sonlu basit sürekli kesir olarak ifade edilen* $\dfrac{p}{q}$ *rasyonel sayısı*

$$\frac{p}{q} = [a_0; a_1, \ldots, a_n] = [a_0; a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n - 1, 1]$$

şeklinde son terimi genişletilerek yazılabilir [4].

Kanıt. İspat için iki durum inceleyceğiz $a_n = 1$ ve $a_n > 1$

$$\frac{p}{q} = [a_0; a_1, \ldots, a_n]$$

olsun. $a_n = 1$ olduğunu kullanırsak,

$$
\begin{aligned}
\frac{p}{q} &= a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{\ldots+\cfrac{1}{a_{n-1}+\cfrac{1}{a_n}}}}\\
&= a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{\ldots+\cfrac{1}{a_{n-1}+\cfrac{1}{1}}}}\\
&= a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{\ldots+\cfrac{1}{a_{n-1}+1}}}
\end{aligned}
$$

olur. Bu durumda

$$\frac{p}{q}=[a_0;a_1,\ldots,a_{n-1}+1]$$

elde edilir. $a_n>1$ ise

$$\frac{1}{a_n}=\cfrac{1}{a_n-1+\cfrac{1}{1}}$$

olur. Bu durumda

$$\frac{p}{q}=[a_0;a_1,\ldots,a_{n-1},a_n-1,1]$$

elde edilmiş olur. ■

Yani bir rasyonel sayı verildiğinde onun 2 türlü sürekli kesir açılımı olabilir. Eğer son terim 1 ise tektir, değilse, son terimi 1 olacak şekilde tek türlü yazılabilir.

Teorem 1.2 $p>q$ *olmak üzere* $p,q\in\mathbb{N}$ *için*

$$\frac{p}{q}=[a_0;a_1,\ldots,a_n]\Leftrightarrow\frac{q}{p}=[0;a_0,a_1,\ldots,a_n]$$

olur [4].

Kanıt. Eğer $p > q > 0$ ise $\dfrac{p}{q} > 1$ olur ve $a_0 > 0$ olmak zorundadır.

$$\frac{p}{q} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ldots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

ise

$$\begin{aligned} \frac{q}{p} &= \frac{1}{\frac{p}{q}} \\ &= 0 + \cfrac{1}{a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ldots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}} \end{aligned}$$

ve buradan

$$\frac{q}{p} = [0; a_0, a_1, \ldots, a_n]$$

olur. Diğer taraftan $q < p$ ise $0 < \dfrac{q}{p} < 1$ olur

$$\begin{aligned} \frac{q}{p} &= [0; a_0, a_1, \ldots, a_n] \\ &= 0 + \cfrac{1}{a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ldots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}} \end{aligned}$$

verildiğinde, benzer şekilde

$$
\begin{aligned}
\frac{p}{q} = \frac{1}{\frac{q}{p}} \quad &= \frac{1}{\cfrac{1}{a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}} \\
&= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}} \\
&= [a_0; a_1, \dots, a_n]
\end{aligned}
$$

elde edilmiş olur. ■

1.3. İrrasyonel Sayıların Sürekli Kesirlerle Gösterilmesi

İrrasyonel sayıların sürekli kesir yazılışlarını bulmak rasyonellere göre nispeten zor olmakla beraber, irrasyonel sayılara karşılık gelen sürekli kesirler sonsuz sürekli kesirlerdir. Bunun kanıtı da bir sonraki bölümde verilecektir.

Şimdi irrasyonel sayıların sürekli kesir yazılışlarına bir kaç örnek verelim.

Örnek 1.7 *Altın oran olarak da bilinen* $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *sayısı, aynı zamanda*

$$\varphi^2 = 1 + \varphi$$

denkleminin bir köküdür ve

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

eşitliğini sağlamaktadır. Bu eşitlik kullanılarak φ *yerine* $1 + \frac{1}{\varphi}$ *ifadesi yazılır ve bu şekilde devam ettirilirse*

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\varphi}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\varphi}}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\vdots}}}}$$

$$= [1; 1, 1, 1, \ldots]$$

şeklinde elde edilir.

Yani $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *irrasyonel sayısının sürekli kesir gösterimi aşağıdaki gibidir.*

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1; 1, 1, 1, \ldots]$$

Şimdi de, $\sqrt{n}$ biçimindeki irrasyonel sayıların sürekli kesirlerinin nasıl bulunabileceğine ilişkin bir kaç örnek verelim:

Örnek 1.8 $\sqrt{2}$ *sayısının sürekli kesir açılımını yazmaya çalışalım.*

$$\sqrt{2} \approx 1,4142$$

olduğundan en az bir $0 < \frac{1}{x} < 1$ *için*

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x}$$

şeklinde yazılabilir ve bu denklemde x *değerini yalnız bırakırsak*

$$x = \sqrt{2} + 1$$

elde edilir. Bu denklemde $\sqrt{2}$ *yerine* $1+\dfrac{1}{x}$ *yazarsak*

$$x = 1 + \frac{1}{x} + 1 = 2 + \frac{1}{x}$$

elde edilir. Çıkan bu eşitlik sonucu x *yerine sürekli değeri yazılırsa*

$$x = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\vdots}}}$$

elde edilir. $\sqrt{2} = 1 + \dfrac{1}{x}$ *olduğundan*

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\vdots}}}} = [1; 2, 2, 2, \ldots]$$

Örnek 1.9 $\sqrt{7}$ *sayısının sürekli kesir açılımını yazmaya çalışalım.* $2 < \sqrt{7} < 3$ *olduğundan*

$$\sqrt{7} = 2 + \frac{1}{x}$$

şeklinde yazılabilir, yine bu yazılıştan x *değeri yalnız bırakılırsa*

$$x = \frac{\sqrt{7}+2}{3}$$

olur. $1 < \dfrac{\sqrt{7}+2}{3} < 2$ *elde edilir ve buradan*

$$\frac{\sqrt{7}+2}{3} = 1 + \alpha$$

şeklinde yazılır. Bu yazılışta α *yalnız bırakılırsa*

$$\alpha = \frac{\sqrt{7}-1}{3}$$

elde edilir.

$$x = 1 + \alpha = 1 + \frac{\sqrt{7}-1}{3} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{3}{\sqrt{7}-1}} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{1+\sqrt{7}}{2}}$$

olur. Burada $1 < \dfrac{1+\sqrt{7}}{2} < 2$ *olduğundan,*

$$1+\beta = \frac{1+\sqrt{7}}{2}$$

diyecek olursak

$$\beta = \frac{\sqrt{7}-1}{2}$$

elde edilir. Buradan

$$x = 1 + \frac{1}{1+\beta} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{\sqrt{7}-1}{2}} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{2}{\sqrt{7}-1}}}$$

ve benzer şekilde $1 < \dfrac{2}{\sqrt{7}-1} < 2$ *olduğundan*

$$1+\gamma = \frac{2}{\sqrt{7}-1} = \frac{\sqrt{7}+1}{3}$$

diyecek olursak

$$\gamma = \frac{\sqrt{7}-1}{3}$$

olur. Bu noktada tekrar yerine yazdığımızda

$$\begin{aligned} x &= 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\gamma}} \\ &= 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{\sqrt{7}-2}{3}}} \\ &= 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{3}{\sqrt{7}-2}}}} \end{aligned}$$

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

elde edilir. $\dfrac{3}{\sqrt{7}-2} = \sqrt{7}+2$ *olduğundan*

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\sqrt{7}+2}}}$$

ve $\sqrt{7} = 2 + x$ *olduğundan*

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4+x}}}$$

elde edilir.

$\sqrt{7} = 2 + \dfrac{1}{x}$ *olduğundan*

$$\begin{aligned}\sqrt{7} &= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\vdots}}}}} \\ &= [2; 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, \ldots]\end{aligned}$$

elde edilmiş olur.

Görüldüğü üzere $\sqrt{7}$ sayısının sürekli kesir ifadesi hem sonsuz hem de periyodiktir, bir önceki örnekte olduğu gibi.

Bir irrasyonel sayının basit sürekli kesir açılımının veya yakınsamalarının bulunması oldukça zor olabilir. Bu noktada, bazı irrasyonel sayıların sürekli kesir açılımıyla ilgili önemli bir özelliğe işaret edelim.

(D tam kare olmamak üzere) $\sqrt{D}$ şeklindeki bir sayının sürekli kesir açılımı

$$[a_0; \overline{a_1, a_2, a_3, ..., a_3, a_2, a_1, 2a_0}]$$

formundadır [7]. Son örneğimizde de

$$\sqrt{7} = [2; 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, \ldots] = [2; \overline{1, 1, 1, 4}]$$

şeklindedir. Bu konu ile ilgili detaylı bilgi için [4], [7] ve [10] numaralı kaynaklardan yararlanılabilir.

2. YAKINSAMALAR VE TEMEL TEOREMLER

Bu bölümde, öncelikle yakınsamalarla ilgili temel özellikler verilecektir. Rasyonel ve irrasyonel sayılara karşılık getirilen sürekli kesirlerin sırasıyla sonlu ve sonsuz sürekli kesir olduğu gösterilecektir. Ayrıca periyodik sürekli kesir kavramı üzerinde durulup, kuadratik irrasyonel sayılara karşılık gelen sürekli kesirin periyodik sürekli kesir olduğu gösterilecektir.

Şimdi, yakınsamalar ile ilgili bazı önemli teoremleri inceleyerek başlayalım.

2.1. Yakınsaklık Teoremleri ve Temel Teoremler

$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ ve $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ sonlu ve sonsuz basit sürekli kesirlerinin k. yakınsamasını $\dfrac{p_k}{q_k}$ ile gösterdiğimizi hatırlatarak başlayalım.

Teorem 2.1 *Herhangi bir sürekli kesir verildiğinde $k \geqslant 2$ için k. yakınsama $\dfrac{p_k}{q_k}$ ise*

$$\begin{aligned} p_k &= a_k \cdot p_{k-1} + p_{k-2} \\ q_k &= a_k \cdot q_{k-1} + q_{k-2} \end{aligned}$$

eşitlikleri geçerlidir [4].

Kanıt. $k = 2$ için

$$\begin{aligned} p_2 &= a_2 \cdot p_1 + p_0 \\ q_2 &= a_2 \cdot q_1 + q_0 \end{aligned}$$

olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \frac{p_0}{q_0} &= a_0 \\ \frac{p_1}{q_1} &= a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_1 \cdot a_0 + 1}{a_1} \end{aligned}$$

olduğu için

$$p_1 = a_1 \cdot a_0 + 1 \tag{2.1.1}$$

$$p_0 = a_0 \tag{2.1.2}$$

$$q_1 = a_1 \cdot 1 + 0 \tag{2.1.3}$$

$$q_0 = 1 \tag{2.1.4}$$

sonucu elde edilir. Ayrıca $p_0 = a_0$ ve $q_0 = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} p_1 &= a_1 \cdot p_0 + 1 \\ q_1 &= a_1 \cdot q_0 + 0 \end{aligned}$$

şeklinde de yazılabilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} \frac{p_2}{q_2} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} &= a_0 + \cfrac{1}{\cfrac{a_1 \cdot a_2 + 1}{a_2}} \\ &= a_0 + \frac{a_2}{a_1 \cdot a_2 + 1} \\ &= \frac{a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 + a_0 + a_2}{a_1 \cdot a_2 + 1} \\ &= \frac{a_2 \cdot (a_0 \cdot a_1 + 1) + a_0}{a_1 \cdot a_2 + 1} \end{aligned}$$

elde edilir.

$$p_2 = a_2 \cdot (a_0 \cdot a_1 + 1) + a_0$$

ifadesinde (2.1.1) ve (2.1.2) yerine yazılırsa

$$p_2 = a_1 \cdot p_1 + p_0$$

olduğu görülür. q_2 içinde aynı şey yapılırsa

$$q_2 = a_1 \cdot a_2 + 1$$

ifadesinde (2.1.3) ve (2.1.4) yerine yazılırsa

$$q_2 = a_2 \cdot q_1 + q_0$$

olduğu görülür. n. adım için teoremin doğruluğu kabul edilirse

$$\begin{aligned} p_n &= a_n \cdot p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n &= a_n \cdot q_{n-1} + q_{n-2} \end{aligned}$$

olur. Daha önceki tanımlamalarımızı hatırlarsak,

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] \text{ ve } \frac{p'_{n-1}}{q'_{n-1}} = [a_1; a_2, \ldots, a_n]$$

olduğundan

$$\frac{p_n}{q_n} = a_0 + \frac{1}{\frac{p'_{n-1}}{q'_{n-1}}} = a_o + \frac{q'_{n-1}}{p'_{n-1}} = \frac{a_0 \cdot p'_{n-1} + q'_{n-1}}{p'_{n-1}}$$

gösterimlerini kullanırsak,

$$p_n = a_0 \cdot p'_{n-1} + q'_{n-1} \tag{2.1.5}$$

$$q_n = p'_{n-1} \tag{2.1.6}$$

elde edilir. Ayrıca hipotezden dolayı

$$p'_{n-1} = a_n \cdot p'_{n-2} + p'_{n-3} \tag{2.1.7}$$

$$q'_{n-1} = a_n \cdot q'_{n-2} + q'_{n-3} \tag{2.1.8}$$

olmalıdır. Bu noktada (2.1.7) ve (2.1.8) numaralı ifadelerde verilen p'_{n-1} ve q'_{n-1} eşitlikleri (2.1.5) ve (2.1.6)'da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} p_n &= a_0 \cdot (a_n \cdot p'_{n-2} + p'_{n-3}) + a_n \cdot q'_{n-2} + q'_{n-3} \\ &= a_n(a_0 \cdot p'_{n-2} + q'_{n-2}) + (a_0 \cdot p'_{n-3} + q'_{n-3}) \\ &= a_n \cdot p_{n-1} + p_{n-2} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} q_n = p'_{n-1} &= a_n \cdot p'_{n-2} + p'_{n-3} \\ &= a_n \cdot q_{n-1} + q_{n-2} \end{aligned}$$

elde edilmiş olur. ■

Teorem 2.2 $\forall k \geq 0$ *için*

$$q_k \cdot p_{k-1} - p_k \cdot q_{k-1} = (-1)^k$$

eşitliği geçerlidir [4].

Kanıt. Teorem 2.1'de verilen ifadelerde

$$\begin{aligned} p_k &= a_k \cdot p_{k-1} + p_{k-2} \\ q_k &= a_k \cdot q_{k-1} + q_{k-2} \end{aligned}$$

eşitlikleri sırasıyla q_{k-1} ve p_{k-1} ile çarpılırsa

$$p_k \cdot q_{k-1} = a_k \cdot p_{k-1} \cdot q_{k-1} + p_{k-2} \cdot q_{k-1} \tag{2.1.9}$$

$$q_k \cdot p_{k-1} = a_k \cdot q_{k-1} \cdot p_{k-1} + q_{k-2} \cdot p_{k-1} \tag{2.1.10}$$

eşitlikleri elde edilir. (2.1.10)'dan (2.1.9) çıkarılırsa

$$q_k \cdot p_{k-1} - p_k \cdot q_{k-1} = -(q_{k-1} \cdot p_{k-2} - p_{k-1} \cdot q_{k-2}) \tag{2.1.11}$$

elde edilir. Bu ifadeye göre her adım bir önceki adımın zıt işaretlisi olmak zorundadır. Ayrıca Teorem 2.1'nin sonucu olarak $q_0 = 1$, $p_{-1} = 1$ ve $q_{-1} = 0$ olduğu bilinmektedir. Şimdi tümevarım kullanırsak;
$k = 0$ için

$$q_0 \cdot p_{-1} - p_0 \cdot q_{-1} = 1 \cdot 1 - p_0 \cdot 0 = 1 = (-1)^0$$

olur. $k = k$ için

$$q_k \cdot p_{k-1} - p_k \cdot q_{k-1} = (-1)^k$$

olduğunu kabul edersek, $k = (k+1)$. adımda, yine Teorem 2.1 ve (2.1.11) eşitliğinden

$$\begin{aligned} q_{k+1} \cdot p_k - p_{k+1} \cdot q_k &= p_k(a_{k+1} \cdot q_k + q_{k-1}) - q_k(a_{k+1} \cdot p_k + p_{k-1}) \\ &= a_{k+1} \cdot p_k \cdot q_k + p_k \cdot q_{k-1} - a_{k+1} \cdot p_k \cdot q_k - q_k \cdot p_{k-1} \\ &= p_k \cdot q_{k-1} - q_k \cdot p_{k-1} = -(-1)^k = (-1)^{k+1} \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Bu teoremin bir sonucu olarak

$$\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{(-1)^k}{q_k \cdot q_{k-1}}$$

elde edilir. Yani her $k > 0$ için

$$s_k - s_{k-1} = \frac{(-1)^{k+1}}{q_k \cdot q_{k-1}}$$

eşitliği geçerlidir [4].

Teorem 2.3 *$\forall k \geq 2$ için*

$$q_k \cdot p_{k-2} - p_k \cdot q_{k-2} = (-1)^{k-1} \cdot a_k$$

eşitliği geçerlidir [4].

Kanıt. Teorem 2.1'den bildiğimiz

$$\begin{aligned} p_k &= a_k \cdot p_{k-1} + p_{k-2} \\ q_k &= a_k \cdot q_{k-1} + q_{k-2} \end{aligned}$$

eşitlikleri sırasıyla q_{k-2} ve p_{k-2} ile çarpılırsa

$$p_k \cdot q_{k-2} = a_k \cdot p_{k-1} \cdot q_{k-2} + p_{k-2} \cdot q_{k-2} \tag{2.1.12}$$

$$q_k \cdot p_{k-2} = a_k \cdot q_{k-1} \cdot p_{k-2} + q_{k-2} \cdot p_{k-2} \tag{2.1.13}$$

eşitlikleri elde edilir. (2.1.13) numaralı denklemden (2.1.12) numaralı denklem çıkarılırsa, Teorem 2.2'den

$$\begin{aligned} q_k \cdot p_{k-2} - p_k \cdot q_{k-2} &= a_k \cdot (q_{k-1} \cdot p_{k-2} - p_{k-1} \cdot q_{k-2}) \\ &= a_k \cdot (-1)^{k-1} \end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak

$$\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{(-1)^{k-1} \cdot a_k}{q_k \cdot q_{k-2}}$$

elde edilmiş olur. ■

Yani her $k > 1$ için

$$s_k - s_{k-2} = \frac{a_k(-1)^k}{q_k \cdot q_{k-2}}$$

eşitliği geçerlidir.

Teorem 2.4 *$1 \leq k \leq n$ olmak üzere*

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] = \frac{p_{k-1} \cdot r_k + p_{k-2}}{q_{k-1} \cdot r_k + q_{k-2}}$$

şeklindedir [4].

Kanıt.

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, r_k]$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca Teorem 2.1 kullanılırsa

$$\begin{aligned} p_k &= a_k \cdot p_{k-1} + p_{k-2} \\ q_k &= a_k \cdot q_{k-1} + q_{k-2} \end{aligned}$$

ifadesinde a_k yerine r_k yazarsak

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] = \frac{r_k \cdot p_{k-1} + p_{k-2}}{r_k \cdot q_{k-1} + q_{k-2}} = \frac{p_{k-1} \cdot r_k + p_{k-2}}{q_{k-1} \cdot r_k + q_{k-2}}$$

elde edilir. Aynı teoremden $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ sonsuz sürekli kesri için de, $k \geq 1$ için

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots] = \frac{p_{k-1} \cdot r_k + p_{k-2}}{q_{k-1} \cdot r_k + q_{k-2}}$$

şeklinde elde edilmiş olur. ∎

Teorem 2.5 $\forall k \geq 1$ *için*

$$[a_k; a_{k-1}, \ldots, a_2, a_1] = \frac{q_k}{q_{k-1}}$$

eşitliği geçerlidir [4].

Kanıt. $k = 1$ için $a_1 = \dfrac{q_1}{q_0}$ şeklindedir.

$k = k - 1$ için doğruluğunu kabul edersek

$$\frac{q_{k-1}}{q_{k-2}} = [a_{k-1}; a_{k-2}, \ldots, a_1] \tag{2.1.14}$$

olur. Teorem 2.1'in ifadesinde yer alan $q_k = a_k \cdot q_{k-1} + q_{k-2}$ eşitliğinin her iki tarafını q_{k-1} ile bölersek, (2.1.14) eşitliğini de kullanırsak

$$\begin{aligned} \frac{q_k}{q_{k-1}} &= a_k + \frac{q_{k-2}}{q_{k-1}} \\ &= a_k + \cfrac{1}{\cfrac{q_{k-1}}{q_{k-2}}} = [a_k, \frac{q_{k-1}}{q_{k-2}}] \\ &= [a_k; a_{k-1}, a_{k-2}, \ldots, a_1] \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. ■

Bu teoremin başka ve önemli bir sonucu da yakınsamaların sıralanışı ile ilgilidir. Verilen bir sürekli kesirde çift dereceli yakınsamalar alttan tek dereceli yakınsamalar ise üstten sürekli kesrin değerine yakınsamaktadır. Yani

$$\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} \cdots < \frac{p_{2k_1}}{q_{2k_1}} < \cdots < \frac{p_{2k_2-1}}{q_{2k_2-1}} < \cdots < \frac{p_5}{q_5} < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1}$$

ve

$$S_0 < S_2 < S_4 < \cdots < S_{2k_1} < \cdots < S_{2k_2-1} < \cdots < S_5 < S_3 < S_1$$

şeklindedir. Yani aşağıdaki teoremi elde etmiş oluruz.

Teorem 2.6 *Her sonsuz basit sürekli kesirin, herhangi tek yakınsamadan büyük ve herhangi çift yakınsamadan küçük bir limiti vardır [4].*

Teorem 2.7 *Verilen sonsuz basit sürekli kesirin yakınsaması için gerek ve yeter şart,*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

serisinin ıraksak olmasıdır. [4].

Teorem 2.8 *Basit sürekli kesire ait yakınsamalar sadeleştirilemezdir [4].*

Kanıt. Sürekli kesirimize ait verilen $\frac{p_k}{q_k}$ yakınsaması sadeleştirilebilir olsun. Bu durumda $p_k, q_k \in \mathbb{Z}^+$ sayılarına ait bir ortak çarpan olan $\alpha \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\begin{aligned} p_k &= \alpha \cdot a \\ q_k &= \alpha \cdot b \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Teorem 2.2'de verilen eşitlikler yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} q_k \cdot p_{k-1} - p_k \cdot q_{k-1} &= (-1)^k \\ \alpha(b \cdot p_{k-1} - a \cdot q_{k-1}) &= (-1)^k \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bir taraf α çarpanı içerirken, diğer kısım içermemektedir. O halde yakınsamalar sadeleştirilemezdir. ■

Teorem 2.9 *Her α reel sayısı için tek bir sürekli kesir yazılışı vardır. Aynı α reel sayısının rasyonel sayı olması için gerek ve yeter şart sürekli kesir yazılışının sonlu olması,irrasyonel sayı olması için gerek yeter şart sürekli kesir yazılışının sonsuz olmasıdır. [4].*

(Burada sonlu sürekli kesirlerin son terimlerinin 1'den farklı olduğu kabul ediliyor. Daha önce her sonlu sürekli kesirin son terimi 1'den farklı olacak şekilde tek türlü yazılabildiği gösterlmişti.)

Kanıt. Teoremin ilk bölümü için, varsayalım ki α reel sayısı için iki farklı sürekli kesir (sonlu ya da sonsuz olabilir) yazılışı aşağıdaki gibi olsun.

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots] = [a_0^{'}; a_1^{'}, a_2^{'}, \ldots]$$

Açıktır ki $a_0 = a_0^{'} = [|\alpha|]$ şeklindedir. ($[|\alpha|]$, α'dan küçük eşit en büyük tamsayı değerdir.)

$0 \leq i \leq n$ için $a_i = a_i^{'}$ olduğunu varsayarsak, benzer şekilde

$$\begin{aligned} p_i &= p_i^{'} \\ q_i &= q_i^{'} \end{aligned}$$

olur.

$0 \leq i \leq n$ için, Teorem 2.4'den

$$\alpha = \frac{r_{n+1} \cdot p_n + p_{n-1}}{r_{n+1} \cdot q_n + q_{n-1}} = \frac{r_{n+1}^{'} \cdot p_n^{'} + p_{n-1}^{'}}{r_{n+1}^{'} \cdot q_n^{'} + q_{n-1}^{'}} = \frac{r_{n+1}^{'} \cdot p_n + p_{n-1}}{r_{n+1}^{'} \cdot q_n + q_{n-1}}$$

olur ki bu durumda

$$r_{n+1} = r_{n+1}^{'}$$

elde edilir. Buradan

$$a_{n+1} = [|r_{n+1}|] \text{ ve } a_{n+1}^{'} = [|r_{n+1}^{'}|]$$

elde edilir ki bu da

$$a_{n+1} = a_{n+1}^{'}$$

demektir. Farklı olduğunu varsaydığımız iki sürekli kesirin kısmi parçalarının eşit olduğu sonucu çıkar ki bu durumda bu iki sürekli kesrin aslında aynı sürekli kesir olduğunu söylemiş oluruz.

Şimdi teoremin ikinci bölümü olan rasyonellere sonlu, irrasyonellere ise sonsuz sürekli kesir karşılık geldiği gösterilecektir. a_0 sayısı, $a_0 < \alpha$ olacak şekildeki en büyük tamsayı seçilsin. α tamsayı değilse

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{r_1} \quad (r_1 > 1)$$

olur ve

$$\frac{1}{r_1} = \alpha - a_0$$

yazılabilir. Bu işlem r_n tamsayı olmadığı sürece devam eder. Aynı şekilde a_n sayısı $a_n < r_n$ olacak şekilde en büyük tamsayı seçilsin.

$$r_n = a_n + \frac{1}{r_{n+1}} = a_n + \cfrac{1}{a_{n+1} + \cfrac{1}{a_{n+2} + \cfrac{1}{\vdots}}}$$

eşitliğinden $r_n > 1$ dir. Şu halde

$$\alpha = [a_0; r_1]$$

şeklinde yazılabilir. Varsayalım ki

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, r_n] \tag{2.1.15}$$

ve

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n, r_{n+1}]$$

olsun. $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$ tamsayı değilken (2.1.15) her zaman doğrudur.
Eğer α rasyonel sayı ise bu yöntemle bütün r_i'ler rasyonel sayı olacaktır. Bu durumda bu işlemin sonlu adımda biteceğini göstermeliyiz. r_i rasyonel olduğundan $r_n = \dfrac{a}{b}$ şeklinde yazılabilir. Bu durumda

$$r_n - a_n = \frac{a}{b} - a_n = \frac{a - b \cdot a_n}{b} = \frac{\theta}{b}$$

olur ve $r_n - a_n < 1$ iken $\theta < b$ dir.
$r_n = a_n + \frac{1}{r_{n+1}}$ eşitliğinden $r_{n+1} = \frac{b}{\theta}$ elde edilir. r_{n+1}, r_n'den daha küçük paydalıdır ve $\theta < b$ olduğu için

$$r_n = a_n + \frac{\theta}{b} < 1$$

noktasında işlem durur.

$\theta = 0$ ise $r_n = a_n > 1$ olur ve r_n tamsayı olduğunda işlem durur.

Eğer α irrasyonel sayıysa r_i'ler irrasyonel olacak ve işlem sonlanmayacaktır. Şimdi

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$$

olsun ve $q_n > 0$ ve p_n ve q_n aralarında asal olsun. Aynı zamanda

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, r_n]$$

olur ((2.1.15) eşitliğinden dolayı yazılabilir). Ayrıca Teorem 2.4'den

$$\alpha = \frac{r_n \cdot p_{n-1} + p_{n-2}}{r_n \cdot q_{n-1} + q_{n-2}}$$

ve $n \geq 2$ için

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{a_n \cdot p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n \cdot q_{n-1} + q_{n-2}}$$

olduğundan

$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(p_{n-1} \cdot q_{n-2} - q_{n-1} \cdot p_{n-2}) \cdot (r_n - a_n)}{(r_n \cdot q_{n-1} + q_{n-2}) \cdot (a_n \cdot q_{n-1} + q_{n-2})}$$

ve buradan da

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{(r_n \cdot q_{n-1} + q_{n-2}) \cdot (a_n \cdot q_{n-1} + q_{n-2})} < \frac{1}{{q_n}^2}$$

elde edilir. Dolayısıyla, n sonsuza giderken $\frac{p_n}{q_n}$ ifadesi α sayısına yakınsar. Bu durumda $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$, biçimindedir, yani α sonsuz sürekli kesir olur. ■

2.2. Periyodik Sürekli Kesirler ve Kuadratik İrrasyonel Sayılar

Daha önce de tanımladığımız gibi, bir periyodik sürekli kesir $n > 0$ uzunluğundaki başlangıç bloğunun ardından sürekli tekrar eden m uzunluğundaki bloklardan oluşur. m burada en kısa tekrar periyodu olup başlangıç bloğunun sonu tekrar bloğundan oluşmaz. Bu şekildeki bir periyodik sürekli kesir

$$[a_0; a_1, \ldots, a_{n-1}, \overline{a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+m-1}}]$$

şeklinde gösterilir. Bir sürekli kesrin tamamiyle periyodik olması ise aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.1 $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ *sonsuz sürekli kesri verildiğinde* $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ *için* $a_k = a_{k+n}$ *olacak şekilde bir* n *tamsayısı varsa, başka bir ifadeyle sonsuz sürekli kesir ilk terimden başlayarak kendini tekrar eden bloklardan oluşuyorsa, bu türden sürekli kesirlere tamamiyle periyodik sonsuz sürekli kesir denir ve*

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots] = [\overline{a_0; a_1, \ldots, a_{n-1}}]$$

şeklinde gösterilir.

Örnek 2.1 *Daha önce hesapladığımız*

$$\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \ldots] = [1; \overline{2}]$$

ve

$$\begin{aligned} \sqrt{7} &= [2; 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, \ldots] \\ &= [2; \overline{1, 1, 1, 4}] \end{aligned}$$

sürekli kesirleri birer periyodik sürekli kesirdir.

$$[\overline{1; 2, 1, 3}] = [1; 2, 1, 3, 1, 2, 1, 3, ...]$$

sürekli kesri de tamamiyle periyodiktir.

Tanım 2.2 $a \neq 0$ *olmak üzere* $ax^2 + bx + c = 0$ *tamsayı katsayılı ve diskriminantı tamkare olmayan bir denklem olsun. Bu denklemin köklerine* ***kuadratik irrasyonel sayı*** *denir.*

Aşağıdaki teorem, irrasyonel sayıların sürekli kesir açılımlarıyla ilgili önemli bir teoremdir.

Teorem 2.10 *Verilen bir sürekli kesir periyodik ise bu sürekli kesirin gösterdiği sayı kuadratik irrasyonel sayıdır ve verilen bir sayı kuadratik irrasyonel sayı ise bu sayıya karşılık gelen sürekli kesir periyodiktir. [4].*

Kanıt. Teoremin ilk bölümünün ispatı için bir α reel sayısı alalım ve bu α sayısına karşılık gelen sürekli kesir periyodu m olan aşağıdaki sürekli kesir olsun.

$$[a_0; a_1, \ldots, a_{n-1}, \overline{a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+m-1}}]$$

periyot m olduğundan

$$r_n = r_{n+m} = r_{n+2m} = \cdots$$

olmak üzere Teorem 2.4'den dolayı

$$\alpha = \frac{p_{n-1} \cdot r_n + p_{n-2}}{q_{n-1} \cdot r_n + q_{n-2}} \qquad (2.2.16)$$

$$\alpha = \frac{p_{n+m-1} \cdot r_n + p_{n+m-2}}{q_{n+m-1} \cdot r_n + q_{n+m-2}} \qquad (2.2.17)$$

olur. (2.2.16) ve (2.2.17) numaralı eşitliklerde r_n yalnız bırakılırsa

$$r_n = -\frac{q_{n-2} \cdot \alpha - p_{n-2}}{q_{n-1} \cdot \alpha - p_{n-1}}$$

ve

$$r_n = -\frac{q_{n+m-2} \cdot \alpha - p_{n+m-2}}{q_{n+m-1} \cdot \alpha - p_{n+m-1}}$$

elde edilir. Bazı cebirsel işlemlerin sonunda

$$\begin{aligned} &(q_{n-2} \cdot q_{n+m-1} - q_{n-1} \cdot q_{n+m-2}) \cdot \alpha^2 \\ +(-q_{n-2} \cdot p_{n+m-1} - p_{n-2} \cdot q_{n+m-1} + p_{n-1} \cdot q_{n+m-2} + q_{n-1} \cdot p_{n+m-2}) \cdot \alpha& \\ +(p_{n-2} \cdot p_{n+m-1} - p_{n-1} \cdot p_{n+m-2}) &= 0 \end{aligned}$$

denklemi elde edilir. Bu denklem kuadratik denklemdir, eğer olmasaydı

$$q_{n-2} \cdot q_{n+m-1} = q_{n-1} \cdot q_{n+m-2}$$

olurdu ki bu durumda q_{n+m-1} sayısı $q_{n-1} \cdot q_{n+m-2}$ sayısını bölerdi. q_{n+m-1} ve q_{n+m-2} sayılarının asal olması durumunda q_{n+m-1} sayısı q_{n-1} sayısını bölmek zorunda kalacaktır. Bu durumda $q_{n+m-1} > q_{n-1}$ olur ki bu da bir çelişkidir.

O halde yukarıdaki denklem bir kuadratik denklem ve α sayısı kuadratik irrasyonel olmak zorundadır.

Teoremin ikinci kısmının ispatına geçelim.

α bir kuadratik irrasyonel sayı olduğundan $A_0 > 0$ ve B_0, C_0 tamsayı olmak üzere

$$A_0 \cdot \alpha^2 + B_0 \cdot \alpha + C_0 = 0 \tag{2.2.18}$$

şeklindeki bir denklemin köküdür. Herhangi bir r_{k+1} için Teorem 2.4'den

$$\alpha = \frac{p_k \cdot r_{k+1} + p_{k-1}}{q_k \cdot r_{k+1} + q_{k-1}}$$

eşitliğinin yazılabildiğini biliyoruz. α değeri (2.2.18) numaralı denklemde yerine yazılarak, $(q_k \cdot r_{k+1} + q_{k-1})^2$ ile çarpılırsa

$$A_0 \cdot (p_k \cdot r_{k+1} + p_{k-1})^2 + B_0 (p_k \cdot r_{k+1} + p_{k-1}) \cdot (q_k \cdot r_{k+1} + q_{k-1}) + C_0 \cdot (q_k \cdot r_{k+1} + q_{k-1})^2 = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denklem r_{k+1} terimine göre düzenlendiğinde

$$\begin{aligned}
A_{k+1} &= A_0 \cdot p_k^2 + B_0 \cdot p_k \cdot q_k + C_0 \cdot q_k^2 \\
B_{k+1} &= 2 \cdot A_0 \cdot p_k \cdot p_{k-1} + B_0 \cdot (p_k \cdot q_{k-1} + p_{k-1} \cdot q_k) + 2 \cdot C_0 \cdot q_k \cdot q_{k-1} \\
C_{k+1} &= A_0 \cdot p_{k-1}^2 + B_0 \cdot p_{k-1} \cdot q_{k-1} + C_0 \cdot q_{k-1}^2
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$A_{k+1} \cdot r_{k+1}^2 + B_{k+1} \cdot r_{k+1} + C_{k+1} = 0 \tag{2.2.19}$$

denklemi elde edilir.

Dikkat edilirse burada $A_k = C_{k+1}$ eşitliği geçerlidir. Eğer $A_{k+1} = 0$ ise (2.2.19) denklemi kuadratik olamaz ve r_{k+1} bir rasyonel sayı olur. Buna bağlı olarak α sayısı da rasyonel olur. Bu başlangıç varsayımımızla çelişir ki bu durumda $A_{k+1} \neq 0$ olmalıdır ve $\forall k \geq 0$ için (2.2.19) denkleminin diskriminantı

$$B_{k+1}^2 - 4 \cdot A_{k+1} \cdot C_{k+1} = (B_0^2 - 4 \cdot A_0 \cdot C_0) \cdot (p_k \cdot q_{k-1} - p_{k-1} \cdot q_k)^2$$

şeklinde olur. Diğer taraftan

$$|q_k \cdot \alpha - p_k| < \frac{1}{q_{k+1}} < \frac{1}{q_k}$$

olduğundan $|\varepsilon| < 1$ için

$$p_k = q_k \cdot \alpha + \varepsilon \cdot q_k$$

yazılabilir. Yukarıda verilen p_k ifadesi A_{k+1}'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
A_{k+1} &= A_0 \cdot \left(q_k \cdot \alpha + \frac{\varepsilon}{q_k}\right)^2 + B_0 \cdot \left(q_k \cdot \alpha + \frac{\varepsilon}{q_k}\right) \cdot q_k + C_0 \cdot q_k^2 \\
&= (A_0 \cdot \alpha^2 + B_0\alpha + C_0) \cdot q_k^2 + \varepsilon \cdot (2A_0 \cdot \alpha + B_0) + A_0 \cdot \left(\frac{\varepsilon}{q_k}\right)^2 \\
&= \varepsilon \cdot (2A_0 \cdot \alpha + B_0) + A_0 \cdot \left(\frac{\varepsilon}{q_k}\right)^2
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ε değeri için

$$|A_{k+1}| < |2A_0 \cdot \alpha| + |A_0| + |B_0|$$

şeklinde olduğundan, $|A_{k+1}|$ sınırlıdır ve buna bağlı olarak da $A_k = C_{k+1}$ olduğundan $|C_{k+1}|$ de sınırlıdır. Benzer şekilde (2.2.19) denkleminin diskriminantı sabit bir değerdir ve bu durumda diskriminanttaki A_{k+1} ve C_k değerleri sınırlıysa B_{k+1} de sınırlı olmak zorundadır.

Bu sınırlı tamsayı katsayılarla oluşturulacak

$$A_{k+1} \cdot r_{k+1}^2 + B_{k+1} \cdot r_{k+1} + C_{k+1} = 0$$

formunda sonlu sayıda denklem vardır. k sonsuza giderken katsayılar sınırlı olduğundan belli bir noktadan sonra denklemin katsayıları tekrarlanmaya başlayacaktır. Bu durumda bir m tamsayısı için

$$r_{k+1} = r_{k+m+1}$$

olacaktır. Bu da α'ye karşılık gelen sürekli kesirin periyodik olması anlamına gelir. ■

Örnek 2.2 *Daha önce hesaplamış olduğumuz*

$$\sqrt{7} = [2; \overline{1, 1, 1, 4}]$$

sürekli kesri periyodiktir. Çünkü $\sqrt{7}$ *bir kuadratik irrasyonel sayıdır. Yine kuadratik bir irrasyonel sayı olan* $\sqrt{89}$ *sayısının sürekli kesir açılımı da*

$$\sqrt{89} = [9; \overline{2, 3, 3, 2, 18}]$$

şeklindedir. Kuadratik bir irrasyonel sayı olmayan π sayısının sürekli kesir ifadesi ise periyodik değildir.

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, 2, ...]$$

şeklinde devam etmektedir.

Şimdi de, kuadratik irrasyonel sayılar dolayısıyla periyodik sürekli kesirler ile ilgili olan, bir sonraki bölümde ihtiyaç duyulacak olan birkaç tanım ve teoremi ifade edelim.

Teorem 2.11 *Herhangi bir kuadratik irrasyonel sayı, a ve $b \neq 0$ tamsayılar, D tam kare olmayan bir doğal sayı ve $b|(D - a^2)$ olmak üzere, $\dfrac{a + \sqrt{D}}{b}$ formunda ifade edilebilir [10].*

Tanım 2.3 $\dfrac{a + \sqrt{D}}{b}$ *kuadratik irrasyonel sayısına eğer* $\dfrac{a + \sqrt{D}}{b} > 1$ *ve* $-1 < \dfrac{a - \sqrt{D}}{b} < 0$ *ise* ***indirgenmiş kuadratik irrasyonel sayı*** *denir.*

Teorem 2.12 *Bir kuadratik irrasyonel sayının basit sürekli kesir açılımının periyodik olması için gerek ve yeter şart bu sayının indirgenmiş olmasıdır [10].*

Teorem 2.13 *α irrasyonel sayısı verilsin. (Teorem 2.11 nedeniyle, öyle D tam kare olmayan doğal sayısı, P_0, $Q_0 \neq 0$ sayıları $Q_0|(D - P_0^2)$ olacak şekilde vardır ki $\alpha = \frac{P_0 + \sqrt{D}}{Q_0}$ şeklinde ifade edilebilir.) Bu durumda, her $k = 0, 1, 2, 3, ...$ için*

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{P_k + \sqrt{D}}{Q_k} \\ a_k &= [|\alpha_k|] \\ P_{k+1} &= a_k Q_k - P_k \\ Q_{k+1} &= \frac{D - {P^2}_{k+1}}{Q_k} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanırsa

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, ...]$$

şeklinde yazılır [10].

Aslında bu teorem yardımıyla, $\dfrac{a+\sqrt{b}}{c}$ formunda olan bir kuadratik irrasyonel sayının sürekli kesir açılımı, ilgili a_i değerleri hesaplanarak bulunabilir (bkz. [10]).

3. SÜREKLİ KESİRLERİN BAZI UYGULAMALARI

Bu bölümde, sürekli kesirlerin kullanıldığı bazı problemlere yer verilmiştir. İlk olarak lineer Diophantus denklemleri, sonra da lineer olmayan Diophantus denklemlerinden Pell denkleminin çözümlerinin sürekli kesir kavramı yardımıyla nasıl bulunabildiği basitçe özetlenmiştir. Ayrıca bölüm sonunda, farklı sürekli kesirlerin kullanıldığı birkaç basit probleme değinilmiştir.

Önce, bir denklemin yaklaşık kökünü bulmak için sürekli kesirleri nasıl kullanabileceğimize, tek değişkenli basit bir örnek verelim.

$3^x + 4^x = 5$ denklemini düşünelim. Bu denklemin çözümünde sürekli kesirlerin nasıl bir rol oynayabileceğini gösterelim. $3^x + 4^x = 5$ denklemini

$$10^{x \log 3} + 10^{x \log 4} = 5$$

biçiminde ifade etmiş olalım. Şimdi, $\log 3$ ve $\log 4$ sayılarını yaklaşık olarak

$$\log 3 \approx \frac{52}{109} \quad \text{ve} \quad \log 4 \approx \frac{3}{5}$$

şeklinde alalım. Bu durumda $3^x + 4^x = 5$ denklemininin yaklaşık bir kökünü bulmak için

$$10^{\frac{52}{109}x} + 10^{\frac{3}{5}x} = 5$$

ya da $t := 10^{\frac{x}{545}}$ olmak üzere

$$t^{260} + t^{327} = 5$$

denkleminin bir kökünü bulmalıyız. Son denklemin reel kökü yaklaşık olarak $t = 1,003108384$, buradan da ilk denklemimizin çözümü

$$10^{\frac{x}{545}} = 1,003108384$$

eşitliğinden yaklaşık olarak $0,7345838466$ olarak bulunur. $\log 3$ ve $\log 4$ sayılarının sürekli kesir açılımlarını ve yeterince hassas yakınsamalarını kullanarak, köke çok daha az hata ile ulaşabilinir. ($3^x + 4^x = 5$ denkleminin kökü yaklaşık $0,7330193966$ şeklindedir. Yani yüzde 1'lik bir hata ile kökü bulunmuş oldu.)

Şimdi Diophantus denklemleri ile devam edelim. Önce lineer olan lineer Diophantus denklemlerinin sonra da lineer olmayan Diophantus denklemlerinden çok özel bir sınıfın, Pell denklemlerinin, sürekli kesirler yardımıyla (yukarıdaki örnekte olduğu gibi yaklaşık olarak değil de) tüm çözümlerinin nasıl elde edildiği görülecektir.

3.1. Lineer Diophantus Denklemi

Diophantus denklemleri genel olarak f, n değişkenli ve katsayıları tam sayı olan bir polinom olmak üzere, $f(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ şeklindeki denklemlerdir. D tam kare olamayan bir tam sayı olmak üzere $x^2 - Dy^2 = 1$ şeklindeki Diophantus denklemlerine özel bir isim verilmektedir: Pell denklemleri (Diophantus denklemleri ile ilgili detaylı bilgi için bkz. [3]).

Bu bölümde lineer Diophantus denklemlerinin çözümlerinde sürekli kesirlerin kullanımına kısaca değinilecektir.

$$ax - by = c$$

denkleminin tamsayı çözümlerini düşünelim. Sürekli kesirler yardımıyla, bu denklemin çözümlerine ulaşmak genelde mümkün olmaktadır. Bununla ilgili önce aşağıdaki teoremi inceleyelim:

Teorem 3.1 *a ve b aralarında asal tam sayıları ve c tam sayısı verilsin. Bu durumda*

$$ax - by = c$$

denkleminin sonsuz tam sayı çözümü vardır [7].

Eğer (x_0, y_0), $ax - by = 1$ denkleminin bir çözümü ise, diğer tüm çözümler de $t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$(c\, x_0 + b\, t, c\, y_0 + a\, t)$$

şeklindedir. Sürekli kesirler, bu denklemin bir çözümünü bulurken şu şekilde kullanılmaktadır: $\frac{a}{b}$ kesrinin sürekli kesir açılımı

$$\frac{a}{b} = [a_0; a_1, a_2, ..., a_n]$$

şeklinde olsun.

n tek doğal sayı ise, yani sürekli kesir ifadesinde çift sayıda terim varsa, $(n-1)$. yakınsamasını $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ ile gösterecek olursak, (q_{n-1}, p_{n-1}) çifti aradığımız (x_0, y_0) çözümü olur.

n çift doğal sayı ise, yani sürekli kesir ifadesinde tek sayıda terim varsa, $a_n > 1$ olması durumunda

$$\frac{a}{b} = [a_0; a_1, a_2, ..., a_n - 1, 1]$$

veya $a_n = 1$ olması duruunda

$$\frac{a}{b} = [a_0; a_1, a_2, ..., a_{n-1} + 1]$$

şeklinde tekrar yazılabilir. Yine sürekli kesir ifadesinin uzunluğu çift oldu: Bir m doğal saysı için

$$\frac{a}{b} = [a_0; a_1, a_2, ..., a_m]$$

diyelim. O halde $(m-1)$. yakınsamasını yine $\frac{p_{m-1}}{q_{m-1}}$ ile gösterecek olursak, (q_{m-1}, p_{m-1}) çifti aradığımız (x_0, y_0) çözümü olur. Buradan genel çözümler de elde edilmiş olur. Şimdi Teorem 3.1'in kanıtını verelim:

Kanıt. Önce $ax - by = 1$ formundaki denklemi inceleyelim. Denklemin bu formu için, teoremin ispatı, aslında Teorem 2.2'nin bir sonucu olarak kolayca elde edilir.

$$\frac{a}{b} = [a_0; a_1, a_2, ..., a_n]$$

olsun. Bu durumda n. yakınsama $\frac{p_n}{q_n} = \frac{a}{b}$ ve $(n-1)$. yakınsama $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ şeklinde olacaktır. Teorem 2.2'den

$$q_n \cdot p_{n-1} - p_n \cdot q_{n-1} = (-1)^n$$

yani

$$b \cdot p_{n-1} - a \cdot q_{n-1} = (-1)^n$$

olduğundan, n'nin tek olması durumunda

$$b \cdot p_{n-1} - a \cdot q_{n-1} = -1$$

yani

$$a \cdot q_{n-1} - b \cdot p_{n-1} = 1$$

eşitliği elde edilmiş olur. O halde (q_{n-1}, p_{n-1}) çifti bir çözüm çifti olur. n'nin çift olması durumunda da, yukarıda verilen argüman ve yine Teorem 2.2'den sonuca ulaşılır.

Şimdi de, genel çözümlerin $t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$(c\,x_0 + b\,t, c\,y_0 + a\,t) = (x_0 + b\,t, y_0 + a\,t)$$

şeklinde olduğunu görelim. (x_0, y_0) bir çözüm çifti ve (x, y) herhangi bir çözüm ise eğer,

$$ax - by = 1$$

ve

$$ax_0 - by_0 = 1$$

eşitlikleri sağlanır. Bu eşitlikler taraf tarafa çıkarılırsa

$$a(x - x_0) - b(y - y_0) = 0$$

yani

$$a(x - x_0) = b(y - y_0)$$

eşitliği elde edilir. $(a, b) = 1$ olduğundan ve b sol taraftaki $a(x - x_0)$ ifadesini tam böldüğünden, b sayısı $x - x_0$ sayısını tam bölmek durumundadır. O halde $t \in \mathbb{Z}$ için

$$x - x_0 = t\,b$$

olmak zorundadır. Buradan

$$y - y_0 = t\,a$$

eşitliği de elde edilir. Yani $t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere bütün çözümler

$$x = x_0 + b\,t, \;\; y = y_0 + a\,t$$

şeklindedir.

Eğer denklem $ax - by = 1$ değil de $ax - by = c$ formunda ise, $ax - by = 1$ iken

$$a\,cx - b\,cy = c$$

olduğundan, (x_0, y_0), $ax - by = 1$ denkleminin bir çözümü ise (cx_0, cy_0) ikilisi de $ax - by = c$ denkleminin bir çözümü olmuş olur. $ax - by = 1$ denklemi için elde edilen çözümde bu veriler yerine yazıldığında, istenilen elde edilmiş olur. ∎

Örnek 3.1

$$72x - 35y = 10$$

denklemini düşünelim. Öncelikle $(72, 35) = 1$ *olduğu açıktır. Daha önce*

$$\frac{72}{35} = [2; 17, 2]$$

olduğunu görmüştük. Bu ifadeyi

$$\frac{72}{35} = [2; 17, 1, 1]$$

şeklinde tekrar yazalım. Sürekli kesrin uzunluğu çift oldu. O halde ilk 3 terimden oluşan yakınsama

$$2 + \cfrac{1}{17 + \cfrac{1}{1}} = \frac{37}{18}$$

olduğundan, $(18, 37)$ *çifti bir çözümdür. Gerçekten de*

$$72 \cdot 18 - 35 \cdot 37 = 1$$

olarak bulunur. O halde bu denklemin bütün çözümleri $t \in \mathbb{Z}$ *olmak üzere*

$$(180 + 35t, 370 + 72t)$$

şeklindedir. Örneğin $t = 2$ *için* $(250, 514)$ *çiftinin de bir çözüm olduğu hemen görülebilir.*

Örnek 3.2

$$86x - 15y = 5$$

denklemini düşünelim. $(86, 15) = 1$ *olduğu açıktır. Yine daha önce*

$$\frac{86}{15} = [5; 1, 2, 1, 3]$$

olduğunu görmüştük.

$$\frac{86}{15} = [5; 1, 2, 1, 2, 1]$$

şeklinde tekrar yazalım. Sürekli kesrin uzunluğu yine çift oldu. O halde ilk 5 terimden oluşan yakınsama

$$5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}} = \frac{63}{11}$$

olduğundan, $(11, 63)$ *bir çözümdür. Gerçekten de*

$$86 \cdot 11 - 15 \cdot 63 = 1$$

olarak bulunur. O halde bu denklemin bütün çözümleri $t \in \mathbb{Z}$ *olmak üzere*

$$(55 + 15t, 315 + 86t)$$

şeklindedir. Örneğin $t = 1$ *için* $(70, 401)$ *çiftinin yine bir çözüm olduğu hemen görülebilir.*

Yine $(a, b) = 1$ olmak üzere

$$ax + by = c$$

formundaki denklemlerin çözümleri için de benzer biçimde yine sürekli kesirler kullanılarak tüm çözümler genel olarak bulunabilmektedir (bkz. [7], [2]).

Bir sonraki bölümde, çok önemli Diophantus denklemlerinden olan Pell denklemlerinin çözümünde sürekli kesirlerin nasıl kullanıldığı ifade edilecektir.

3.2. Pell Denklemi

D tam kare olamayan bir tam sayı olmak üzere

$$x^2 - D\,y^2 = 1$$

şeklindeki Diophantus denklemine özel bir isim verilmektedir: Pell denklemleri. Bu denklemler, en önemli Diophantus denklemlerinden sayılmaktadır. Bu türden denklemlerin çözümleri oldukça zor olabilmektedir.

Örneğin "Archimedes'in cattle problemi" olarak bilinen problem bir Pell denklemidir ve en küçük pozitif çözüm çiftindeki sayıların 206545 basamaklı olduğu 19.yüzyılda Krummbiegel ve Amthor tarafından gösterilmiştir ([11]). İndirgenmiş hali

$$x^2 - 4729494\, y^2 = 1$$

olan denklemin en küçük çözüm çifti ise 41 ve 45 basamaklı (x, y) ikilisinden oluşmaktadır [7]. Bu türden denklemlerin çözümlerinin bulunmasının, D'nin küçük olması durumunda bile hiç de kolay olmadığına farklı birkaç örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek 3.3

$$x^2 - 3y^2 = 1$$

denklemini ele alalım. Bu cebirsel ifadeden x çekilirse

$$x = \sqrt{1 + 3y^2} \quad ve \quad x = -\sqrt{1 + 3y^2}$$

elde edilir. Bu denklemdeki katsayılar nispeten küçük olduğundan pozitif tamsayı çözüm çiftleri deneyerek rahatlıkla bulunabilir. Hatta bu örnek için çözüm çifti $y = 1$ için $x = 2$ olacağından $(2, 1)$ olarak hemen bulunabilir. Ancak denklemde katsayılar değiştikçe örneğin,

$$x^2 - 13y^2 = 1$$

denklemini incelediğimizde ve x'e göre çözümleme yapıldığında

$$x = \sqrt{1 + 13y^2} \quad ve \quad x = -\sqrt{1 + 13y^2}$$

elde edilir ki bu çözümlemeden çözüm çiftlerini tahmin etmek oldukça zorlaşır. Bir çok denemenin sonunda en küçük pozitif tamsayı çözüm çiftinin $(649, 180)$ olduğu sonucuna ulaşılsada bu çözümü deneyerek elde etmek zorlaşmıştır. Farklı katsayılar için çözüm çifti bulmak çok daha zorlaşabilir.

$$x^2 - 61y^2 = 1$$

denklemi göz önüne alınırsa, bu zorluk hemen farkedilecektir.

Denklemin en küçük pozitif çözümü bulunduktan sonra, aşağıda ifade edilen Teorem 3.2 yardımıyla bütün pozitif çözümlerin, dolayısıyla tüm çözümlerin bulunması mümkündür.

Teorem 3.2 *D tam kare olmayan pozitif tamsayı iken*

$$x^2 - Dy^2 = 1$$

denkleminin en küçük pozitif çözümü (x_1, y_1) *olsun. Bu durumda bu denklemin diğer tüm pozitif çözümleri, n doğal sayısı için,* $x_1+y_1\sqrt{D}$ *şeklinde tanımlanan sayının tüm n doğal sayı kuvvetleri ile elde edilen*

$$x_n + y_n\sqrt{D} := (x_1 + y_1\sqrt{D})^n$$

şeklindeki (x_n, y_n) *çiftleridir [10].*

Bu durumda denklemin en küçük pozitif çözümü bulunursa, sürekli kesir kavramı kullanılmadan, diğer bütün çözümler bulunmuş olur. Ama en küçük pozitif çözümü bulmak o kadar kolay olmayabilir. Bu noktada biraz sonra gösterileceği üzere $\sqrt{D}$'nin sürekli kesir ifadesi kolaylık sağlamaktadır.

Pell denklemlerinin tüm tamsayı çözümlerini bulmak için de basit sürekli kesirlerin yakınsamalarından faydalanılabileceğini daha önce ifade etmiştik. Aşağıda bu yöntemle çözülen iki örnek verilmiştir. Bu örneklerde özellikle periyodik sürekli kesrin periyoduna dikkat ediniz.

Örnek 3.4

$$x^2 - 19y^2 = 1$$

denklemini ele alalım. Bu denklemde $D = 19$ *için* $\sqrt{19}$ *sayısının sürekli kesir açılımını incelersek*

$$\sqrt{19} = 4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{\vdots}}}}}}}$$

yani

$$\sqrt{19} = [4; \overline{2, 1, 3, 1, 2, 8}]$$

şeklinde periyodik sürekli bir kesirdir ve periyodu 6*'dır. Bu periyottan hareketle ilk* 6 *terim yakınsaması olan* $\dfrac{p_5}{q_5}$

$$\frac{p_5}{q_5} = 4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}} = \frac{170}{39}$$

olarak elde edilir. $(p_5, q_5) = (170, 39)$ *çifti* $x^2 - 19y^2 = 1$ *denklemi için bir çift pozitif çözümdür. Gerçekten de yerine yazarsak*

$$170^2 - 19.39^2 = 28900 - 28899 = 1$$

olduğu görülür.

Şimdi de, ilk 6 terimden sonra, ilk 12 terim yakınsaması olan $\dfrac{p_{11}}{q_{11}}$ *terimine bakalım:*

$$\frac{p_{11}}{q_{11}} = \frac{57799}{13260}$$

şeklindedir ve denklemde $x = p_{11}$ *ve* $y = q_{11}$ *yerine yazılırsa*

$$57799^2 - 19 \cdot 13260^2 = 3340724401 - 3340724400 = 1$$

olduğu görülür. Aslında k *pozitif tamsayı ve sürekli kesrimizin periyodu* 6 *olmak üzere bu denklemin pozitif çözüm çiftleri*

$$\begin{aligned} x &= p_{6k-1} \\ y &= q_{6k-1} \end{aligned}$$

şeklindeki tüm yakınsamalardan oluşur. Ancak bu kural, biraz sonra söyleneceği üzere, periyodun çift olduğu durumlarda geçerlidir. Periyodun tek olduğu durum bir sonraki örnekte incelenecektir.

Bu denklemin tüm pozitif çözümlerini bulmak için başka bir yaklaşımda, daha önce bahsettiğimiz gibi, Teorem 3.2 yardımıyla en küçük pozitif çözümün tüm doğal sayı kuvvetlerini bulmaktır. Denklemi sağlayan ilk ve en küçük çift olan (p_5, q_5) *çözümü yardımıyla*

$$p_5 + q_5\sqrt{D} = 170 + 39\sqrt{19}$$

şeklinde tanımlanan sayının doğal sayı kuvvetleri alınarak aşağıdaki gibi elde edilen (x_n, y_n) *çiftleri bu denklemin kökleridir:*

$$x_n + y_n\sqrt{19} := (170 + 39\sqrt{19})^n$$

Örnek 3.5

$$x^2 - 89y^2 = 1$$

denklemini ele alalım. Bu denklemde $D = 89$ *için* $\sqrt{89}$ *sayısının sürekli kesir açılımını incelersek*

$$\sqrt{89} = [9; \overline{2, 3, 3, 2, 18}]$$

olarak bulunur. Bu örnekte sürekli kesrimizin periyodu tektir. $\sqrt{89}$ *sürekli kesir açılımının yakınsamalarını incelersek bu yakınsamalar Teorem 2.1 yardımıyla*

$$\begin{aligned} p_k &= a_k\, p_{k-1} + p_{k-2} \\ q_k &= a_k\, q_{k-1} + q_{k-2} \end{aligned}$$

eşitlikleri kullanılarak

$$\frac{p_0}{q_0} = \frac{9}{1} \quad \frac{p_1}{q_1} = \frac{19}{2} \quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{66}{77} \quad \frac{p_3}{q_3} = \frac{217}{23}$$

$$\frac{p_4}{q_4} = \frac{500}{53} \quad \frac{p_5}{q_5} = \frac{9217}{977} \quad \frac{p_6}{q_6} = \frac{18934}{2007} \quad \frac{p_7}{q_7} = \frac{66019}{6998}$$

$$\frac{p_8}{q_8} = \frac{216991}{23001} \quad \frac{p_9}{q_9} = \frac{500001}{53000} \quad \frac{p_{10}}{q_{10}} = \frac{9217009}{977001}$$

olarak bulunur. Yukarıda verilen yakınsamlarda sadece (p_9, q_9) *çifti denklemimiz için pozitif kök çiftidir. İlerleyen yakınsamalara bakıldığında* (p_{19}, q_{19}), (p_{29}, q_{29}), (p_{39}, q_{39}) *şeklindeki çiftlerin de kök çiftleri olduğu görülür.*

Aslında k pozitif bir tamsayı ve sürekli kesirimizin periyodu 5 *olmak üzere*

$$\begin{aligned} x_k &= p_{2\times5\times k-1} = p_{10k-1} \\ y_k &= q_{2\times5\times k-1} = q_{10k-1} \end{aligned}$$

şeklinde verilen tüm (x_k, y_k) *çiftleri denklemimiz için pozitif kök çiftleridir.*

Daha da genellersek $x^2 - Dy^2 = 1$ *formundaki Pell denklemleri için* $\sqrt{D}$ *sayısının sürekli kesir açılımının periyodu tek ise, bu periyoda* N *diyelim, k pozitif tamsayısı için*

$$\begin{aligned} x_k &= p_{2Nk-1} \\ y_k &= q_{2Nk-1} \end{aligned}$$

şeklindeki her (x_k, y_k) *çifti denklemimiz için pozitif kök çifti oluşturur.*

Bir önceki örneğe benzer şekilde bu denklemin en küçük pozitif çözümü $(500001, 53000)$ *çiftidir. Yine* $500001 + 53000\sqrt{89}$ *sayısının doğal sayı kuvvetlerini alarak*

$$x_n + y_n\sqrt{89} := (500001 + 53000\sqrt{89})^n$$

şeklindeki (x_n, y_n) *çiftleri denklemimiz için pozitif birer çözüm oluşturur. Örneğin*

$$(500001 + 53000\sqrt{89})^2 = 500002000001 + 53000106000\sqrt{89}$$

olduğundan $(500002000001, 53000106000)$ *çifti* $x^2 - 89y^2 = 1$ *denkleminin bir köküdür:*

$$\begin{aligned} 500002000001^2 - 89 \cdot 53000106000^2 &= \\ 250002000005000004000001 - 250002000005000004000000 &= 1 \end{aligned}$$

Bu noktada, incelediğimiz örnekler doğrultusunda, artık genel duruma geçebiliriz. Bunun için önce birkaç teorem incelenecektir.

Yardımcı Teorem 3.3 *a bir irrasyonel sayı olsun. r ve $s > 0$ tamsayı olmak üzere*

$$\left|a - \frac{r}{s}\right| < \frac{1}{2s^2}$$

olsun. Bu durumda $\frac{r}{s}$, a'nın sürekli kesir açılımının yakınsamasıdır [10].

Teorem 3.4 *$n > 0$, D tam kare olmayan bir pozitif tamsayı ne $|n| < \sqrt{D}$ olmak üzere,*

$$x^2 - Dy^2 = n$$

denkleminin bir pozitif çözümü (x, y) çifti ise $\frac{x}{y}$ kesri $\sqrt{D}$'nin sürekli kesir açılımının bir yakınsamasıdır [10].

Kanıt. Önce $n > 0$ durumuna bakalım. (x, y) çifti denklemimizin kökü olduğundan

$$x^2 - Dy^2 = n$$

olmalıdır. Buradan

$$(x + y\sqrt{D})(x - y\sqrt{D}) = n$$

elde edilir. Bu eşitlikten $x - y\sqrt{D} > 0$ yani $x > y\sqrt{D}$, buradan da

$$\frac{x}{y} - \sqrt{D} > 0$$

elde edilir. $x^2 - Dy^2 = n$, $x > y\sqrt{D}$ ve $0 < |n| = n < \sqrt{D}$ olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} - \sqrt{D} &= \frac{x - y\sqrt{D}}{y} \\ &= \frac{(x - y\sqrt{D})(x + y\sqrt{D})}{y(x + y\sqrt{D})} \\ &= \frac{x^2 - y^2 D}{y(x + y\sqrt{D})} \\ &< \frac{n}{y(2y\sqrt{D})} \\ &< \frac{1}{2y^2} \end{aligned}$$

elde edilir.

Yardımcı Teorem 3.3, $\frac{x}{y}$ kesrinin $\sqrt{D}$'nin bir yakınsaması olduğunu söyler.

$n < 0$ olması durumunda, $x^2 - Dy^2 = n$ denkleminin her iki tarafını sıfırdan farklı D sayısına bölersek

$$y^2 - \frac{1}{D}x^2 = -\frac{n}{D}$$

denklemi elde edilir. $-\frac{n}{D} > 0$ olacağından, yukarıdaki argüman bizi sonuca götürecektir. ■

Bu teoremin bir sonucu olarak, $x^2 - Dy^2 = 1$ ise (yani (x, y) Pell denkleminin bir pozitif çözümü ise) $\frac{x}{y}$ kesri $\sqrt{D}$'nin sürekli kesir açılımının bir yakınsamasıdır.

Teorem 3.5 *D tamkare olmayan pozitif tamsayı ve $\alpha_0 = \sqrt{D}$ olmak üzere, her $k = 0, 1, 2, ...$ için*

$$\alpha_k = \frac{P_k + \sqrt{D}}{Q_k}, \quad a_k = [|\alpha_k|], \quad P_{k+1} = a_k Q_k - P_k, \quad Q_{k+1} = \frac{D - P^2{}_{k+1}}{Q_k}$$

şeklinde tanımlansın. $\frac{p_k}{q_k}$'lar $\sqrt{D}$'nin yakınsamaları ise bu durumda

$$p^2{}_k - Dq^2{}_k = (-1)^{k-1} Q_{k+1}$$

eşitliği geçerlidir [10].

Kanıt. $\alpha_{k+1} = [a_{k+1}; a_{k+2}, a_{k+3}, ...]$ olmak üzere

$$\sqrt{D} = \alpha_0 = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k, \alpha_{k+1}]$$

olsun (Teorem 2.13). Teorem 2.1'den

$$\sqrt{D} = \frac{p_k \alpha_{k+1} + p_{k-1}}{q_k \alpha_{k+1} + q_{k-1}}$$

şeklindedir. $\alpha_{k+1} = \dfrac{P_{k+1} + \sqrt{D}}{Q_{k+1}}$ yerine yazılırsa

$$\sqrt{D} = \frac{(P_{k+1} + \sqrt{D})p_k + Q_{k+1}p_{k-1}}{(P_{k+1} + \sqrt{D})q_k + Q_{k+1}q_{k-1}}$$

şeklinde elde edilir. Buradan da

$$Dq_k + (P_{k+1}q_k + Q_{k+1} + q_{k-1})\sqrt{D} = (P_{k+1}p_k + Q_{k+1} + p_{k-1}) + p_k\sqrt{D}$$

eşitliğinden (x, y, z, w rasyonel sayıları için $x + y\sqrt{D} = z + w\sqrt{D}$ eşitliği $x = z$ ve $y = w$ olmasını gerektirdiğinden, bkz. [10])

$$Dq_k = P_{k+1}p_k + Q_{k+1}p_{k-1}$$

ve

$$p_k = P_{k+1}q_k + Q_{k+1} + q_{k-1}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerden birincisi q_k ve ikincisi p_k ile çarpılıp ikinciden birinci çıkarılırsa Teorem 2.2'den dolayı

$$p^2{}_k - Dq^2{}_k = (p_k q_{k-1} - p_{k-1}q_k)Q_{k+1} = (-1)^{k-1}Q_{k+1}$$

istenilen eşitlik elde edilmiş olur. ■

Artık, sürekli kesirler yardımıyla Pell denkleminin ve hatta Pell denklemine yakın

$$x^2 - Dy^2 = -1$$

denkleminin çözümlerinin nasıl ifade edilebildiği ile ilgili aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.6 *D tam kare olmayan bir pozitif tamsayı ve $\sqrt{D}$ sayısının sürekli kesir açılımının periyodu n olsun. $\dfrac{p_k}{q_k}$, $\sqrt{D}$'nin yakınsamaları olmak üzere*

i. n çift ise $x^2 - Dy^2 = 1$ denkleminin tüm pozitif tamsayı çözüm çiftleri $j = 1, 2, 3, \ldots$ için

$$x = p_{jn-1} \quad , \quad y = q_{jn-1}$$

şeklindedir. $x^2 - Dy^2 = -1$ denkleminin çözümü yoktur.

ii. *n tek ise $x^2 - Dy^2 = 1$ denkleminin tüm pozitif tamsayı çözüm çiftleri $j = 1, 2, 3, \ldots$ için*

$$x = p_{2jn-1} \quad , \quad y = q_{2jn-1}$$

şeklindedir. $x^2 - Dy^2 = -1$ denkleminin tüm pozitif tamsayı çözüm çiftleri $j = 1, 2, 3, \ldots$ için

$$x = p_{(2j-1)n-1} \quad , \quad y = q_{(2j-1)n-1}$$

şeklindedir [10].

Kanıt. Teorem 3.4'den dolayı $x^2 - Dy^2 = 1$ ve $x^2 - Dy^2 = -1$ denklemlerinin pozitif çözüm çiftleri $\sqrt{D}$'nin yakınsamaları olan $\dfrac{p_k}{q_k}$'ların içindendir. Ayrıca Teorem 3.5'den

$${p^2}_k - D{q^2}_k = (-1)^{k-1} Q_{k+1}$$

olduğundan, Teorem 3.5'de tanımlanmış olan Q_{k+1} göz önüne alındığında, sürekli kesirin periyodu n ve $\sqrt{D} = \dfrac{P_0 + \sqrt{D}}{Q_0}$ olduğundan, her $j = 1, 2, 3, ...$ için

$$1 = Q_0 = Q_{jn}$$

elde edilir ($P_0 = 0, Q_0 = 1$). Bu durumda

$${p^2}_{jn-1} - D{q^2}_{jn-1} = (-1)^{jn} Q_{nj} = (-1)^{jn}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte n çift olduğunda jn çift kuvvet olacağından

$${p^2}_{jn-1} - D{q^2}_{jn-1} = 1$$

olduğundan (p_{jn-1}, q_{jn-1}), $x^2 - Dy^2 = 1$ denkleminin bir çözümü ve n tek olduğunda ise $2jn$ çift kuvvet olacağından

$${p^2}_{2jn-1} - D{q^2}_{2jn-1} = 1$$

(p_{2jn-1}, q_{2jn-1}), $x^2 - Dy^2 = 1$ denkleminin bir çözümü ve benzer biçimde $(p_{2(j-1)(n-1)}, q_{2(j-1)(n-1)})$ de yine n tek olduğunda $x^2 - Dy^2 = -1$ denkleminin bir çözümü olur.

Bu denklemlerin bunlardan başka çözümü olmadığını göstermek için, $Q_{k+1} = 1$ olması durumunda k'nın periyodun bir katı olduğunu ve her $j = 1, 2, 3...$ için $Q_j \neq -1$ olduğunu görmeliyiz. Eğer $Q_{k+1} = 1$ ise, tanımlanışından $\alpha_{k+1} = P_{k+1} + \sqrt{D}$ yazılabilir. $\alpha_{k+1} = [a_{k+1}; a_{k+2}, a_{k+3}, ...]$ şeklinde olduğundan, sürekli kesir açılımı tamamen periyodiktir. Teorem 2.12 yardımıyla

$$-1 < P_{k+1} - \sqrt{D} < 0$$

elde edlir ki bu da $P_{k+1} = [|\sqrt{D}|]$ olduğunu söyler. $\alpha_0 = \sqrt{D}$ olduğundan $\alpha_k = \alpha_0$ yani $n|k$ elde edilmiş olur. Öte yandan, $Q_j = -1$ olması her $j = 1, 2, 3, ...$ için $\alpha_j = -P_j - \sqrt{D}$ olması demektir. Ama α_j'nin sürekli kesir açılımı tamamen periyodik olduğundan, yine Teorem 2.12 yardımıyla

$$-1 < -P_j - (-\sqrt{D}) < 0$$

elde edilir ki buradan $P_j > \sqrt{D}$ yazabiliriz. $\alpha_j = -P_j - \sqrt{D} > 1$ olduğundan bu bir çelişkidir. O halde her $j = 1, 2, 3...$ için $Q_j \neq -1$ olmalıdır. ■

Yukarıdaki teorem yardımıyla verilen çözümlerin ilki, aynı zamanda Pell denkleminin en küçük pozitif çözümünü oluşturur. Bunun anlamı, D tam kare olmayan pozitif tamsayısı için $x^2 - Dy^2 = 1$ Pell denkleminde $\sqrt{D}$'nin sürekli kesir açılımının, periyodu çift örneğin 10 ise Pell denkleminin ilk ve en küçük çözüm çifti $\sqrt{D}$'nin (p_9, q_9) yakınsaması olurken, periyodu tek örneğin 9 ise Pell denkleminin ilk ve en küçük çözüm çifti $\sqrt{D}$'nin (p_{17}, q_{17}) yakınsaması olur.

Şimdi, bu durumlara birer örnek verilecektir.

Örnek 3.6

$$x^2 - 34y^2 = 1$$

denklemini inceleyelim. $\sqrt{34}$ *sayısının sürekli kesir açılımını ve bu açılımın yakınsamalarını incelememiz gerekir.* $\sqrt{34}$ *sayısı kuadratik irrasyonel sayı olduğundan sürekli kesir açılımı periyodiktir. Tam bu noktada, hatırlamak açısından,* $\sqrt{34}$*'ün sürekli kesir yazılışı, ilk bölümde yaptığımız gibi elde edilecektir (Daha önce de vurgulandığı gibi, aslında Teorem 2.13 yardımıyla bu türden sürekli kesir açılımları bulunabilmektedir).*

$5 < \sqrt{34} < 6$ *olduğundan öyle bir* $\alpha \in \mathbb{R}$ *vardır ki* $\sqrt{34} = 5 + \dfrac{1}{\alpha}$ *şeklinde yazılabilir. Buradan*

$$\alpha = \frac{\sqrt{34}+5}{9}$$

elde edilir. $1 < \alpha < 2$ *olduğundan öyle bir* $\beta \in \mathbb{R}$ *vardır ki* $\alpha = 1 + \dfrac{1}{\beta}$ *şeklinde yazılabilir. Buradan da*

$$\beta = \frac{\sqrt{34}+4}{2}$$

elde edilir. $4 < \beta < 5$ *olduğundan* $\gamma \in \mathbb{R}$ *var ve* $\beta = 4 + \dfrac{1}{\gamma}$ *şeklinde yazılabilir. Buradan*

$$\gamma = \frac{\sqrt{34}+4}{9}$$

elde edilir. $1 < \gamma < 2$ *olduğundan öyle bir* $\delta \in \mathbb{R}$ *vardır ki* $\gamma = 1 + \dfrac{1}{\delta}$ *şeklinde yazılabilir. Buradan da*

$$\delta = \sqrt{34}+5$$

elde edilir. Bu noktada

$$\begin{aligned}
\sqrt{34} &= 5 + \frac{1}{\alpha}\\
\alpha &= 1 + \frac{1}{\beta}\\
\beta &= 4 + \frac{1}{\gamma}\\
\gamma &= 1 + \frac{1}{\delta}\\
\delta &= \sqrt{34}+5
\end{aligned}$$

eşitlikleri yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
\sqrt{34} &= 5+\frac{1}{\alpha}\\
&= 5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\beta}}\\
&= 5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\gamma}}}\\
&= 5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\delta}}}}\\
\sqrt{34} &= 5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\sqrt{34}}}}}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu eşitlikte $\sqrt{34}$ *tekrar tekrar yerine yazılırsa*

$$\sqrt{34} = [5; \overline{1, 4, 1, 10}]$$

periyodik sürekli kesir yazılış ortaya çıkar. Bu sürekli kesrin periyodu çift ve 4 olduğundan Pell denklemimizin en küçük pozitif çözümü (p_3, q_3) *ve sonraki çözüm çiftleri de* $k = 1, 2, 3, \ldots$ *için*

$(p_7, q_7), (p_{11}, q_{11}), \ldots, (p_{4k-1}, q_{4k-1}), \ldots$

şeklinde olmalıdır. Şimdi sürekli kesrimizin yakınsamalarını hesaplayalım:

$$\frac{p_0}{q_0} = \frac{5}{1} \quad \frac{p_1}{q_1} = \frac{6}{1} \quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{29}{5} \quad \frac{p_3}{q_3} = \frac{35}{6}$$

(p_3, q_3) *çifti Pell denkleminde yerine konulursa*

$$35^2 - 34 \cdot 6^2 = 1225 - 1224 = 1$$

olduğundan, bu çiftin denklem için kök olduğu görülür.

$$\frac{p_4}{q_4} = \frac{379}{65} \quad \frac{p_5}{q_5} = \frac{414}{71} \quad \frac{p_6}{q_6} = \frac{2035}{349} \quad \frac{p_7}{q_7} = \frac{2449}{420}$$

(p_7, q_7) *çifti Pell denkleminde yerine konulursa*

$$2449^2 - 34 \cdot 420^2 = 5997601 - 5997600 = 1$$

olduğundan, bu çiftin de denklemimizin bir kökü olduğu görülür.

Periyodun tek olduğu bir örnekle devam edelim.

Örnek 3.7

$$x^2 - 41y^2 = 1$$

denklemini inceleyelim. Bu denklemim çözüm çiftleri için yine $\sqrt{41}$ *sayısının sürekli kesir açılımı ve ona ait yakınsamaları incelemeliyiz.* $\sqrt{41}$ *sayısının periyodik olan sürekli kesir açılımı*

$$\sqrt{41} = [6; \overline{2, 2, 12}]$$

şeklinde bulunur. Sürekli kesrimizin periyodu 3 *olduğundan, teoremimize göre en küçük pozitif çözümü* (p_5, q_5) *olmalı ve diğer çözümler ise*

$$(p_{11}, q_{11}), (p_{17}, q_{17}), \ldots, (p_{2\cdot 3\cdot k-1}, q_{2\cdot 3\cdot k-1}), \ldots$$

şeklinde olmalıdır. İlgili yakınsamalardan ilk birkaç tanesini hesaplarsak:

$$\begin{array}{rcl} \frac{p_0}{q_0} & = & \frac{6}{1} \quad \frac{p_1}{q_1} = \frac{13}{2} \quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{32}{5} \\ \frac{p_3}{q_3} & = & \frac{397}{62} \frac{p_4}{q_4} = \frac{826}{129} \quad \frac{p_5}{q_5} = \frac{2049}{320} \end{array}$$

olarak bulunur.

(p_5, q_5) *yakınsamasını Pell denklemimizde yerine yazarsak*

$$2049^2 - 41 \cdot 320^2 = 4198401 - 4198400 = 1$$

olduğundan, gerçekten denklemin bir kökü olduğunu görmüş oluruz.

$x^2 - Dy^2 = 1$ denkleminin sürekli kesir yardımıyla çözümlerinin yanısıra bu denklemin daha genel hali $N \in \mathbb{Z}$ için $x^2 - Dy^2 = N$ denkleminin sürekli kesir yardımıyla çözümleri ile ilgili [5] numaralı kaynağa bakılabilir.

[1], [6] ve [8], sürekli kesirler ve Pell denklemleri ile ilgili yakın zamanda yapılmış çalşmalardandır.

3.3. Farklı Uygulamalar

Sürekli kesirlerin, bir çok farklı uygulamasından bahsedilebilir. Son olarak, sürekli kesirlerin gelişimine de katkıda bulunan birkaç uygulamasından bahsedelim.

3.3.1. Takvim Oluşturma

Takvim, zamanı dilimlere ayırarak organize eden sistemdir. Takvim sistematiği, zamanı gün, hafta, ay ve yıl gibi ölçeklendirilerek oluşturulur. Takvim oluşturmada belirleyici olan dünyanın güneş etrafındaki dönüş periyodu ya da ayın dünya etrafındaki dönüş periyodu gibi astronomik olaylar olabileceği gibi doğa olaylarından hasat zamanı, nehir sularının yükselmesi ya da çekilmesi gibi olaylar da olabilir.

Babildeki ilk takvim iki dolunay arası zamana göre yapılmış, dolunayın periyodu 29,5 gün olduğundan bu takvimde 1 yıl 354 gün olarak ay yılı hesabıyla kullanılmıştır. Ancak mevsimsel değişiklikler dünyanın güneş etrafındaki periyodu ile örtüştüğünden ve bu periyotta 365,24199 gün olduğundan ay takvimi 11,24199 günlük hata payı ile kullanılmış. Bunun sonucu zamanla ayların mevsimler içinde kaymasına neden olmuştur. Dünyanın güneş etrafında dönüş periyoduna bağlı ilk takvim eski çağ Mısırlılar tarafından yapılmıştır. Bu takvim 365 günlük bir takvimdir. Ancak bu takvim güneş etrafında dönüş periyodundan ziyade, ona bağlı olan farklı bir döngüden dolayı oluşturuldu. Geceleri gökyüzünün en parlak yıldızı olan Sirius, her yıl Nil'in taştığı zamanlarda, gün doğumundan hemen önce parlamaktaydı. Mısırlılar takvimlerini bu olayla ilgili yapılandırdılar. Bu yaklaşım dolaylı olarak bir güneş takvimi oluşturdu. Bu takvimde her yıl 0,24199 hata payıyla kullanıldı.

Bu takvim Jül Sezar döneminde M.Ö. 46 yılında yerini Jülyen takvimine bıraktı. Jülyen takvimi bir yılı $365\frac{1}{4}$ (365 gün 6 saat) olarak kabul eder. Bu durumda her 4 yılda bir gün artık yıl oluşturmakta artık yıl 366 gün olarak kabul edilmekteydi. Bu hassasiyetteki bir takvim bile 1582 yılına gelindiğinde (1600 yıl sonra) 10 artık gün eklenmesi zorunluluğu doğurunca Papa XIII Gregory yeni bir takvim hesabı kullanarak günümüzde kullanılan Gregoryen takvime geçilmiştir. Gregoryen takvim 1 yılı $365\frac{97}{400}$ gün olarak kabul eder. Jülyen takviminde olduğu gibi her 4 yılda bir artık yıl oluşur ancak bu hassasiyette artık yıl Jülyen hesabından farklı olacağından, sonu 00 ile biten yıllar içinden sadece 400'ün katı olan yıllar artık yıl kabul edilmektedir. Örneğin 2000 yılı artık yıl iken 1900 yılı artık yıl değildir. Artık yıllarda şubat ayı 29 gün olmaktadır. Hata payı 10,8 saniyeye inmiş olan bu takvim günümüzdede kullanılan takvimdir.

Bu noktada takvimlerde oluşan hata paylarını hesaplamak için sürekli kesirleri kullabiliriz. Bir yılı 365 gün 5 saat 48 dakika 55 saniye kabul edersek bu değerde yaklaşık bir değerdir. Ancak 10000 yıldan uzun sürelerde hata payı oluşturur. Bu süreyi güne çevirisek:

$$1yıl = 365 + \frac{5}{24} + \frac{48}{60} \cdot \frac{1}{24} + \frac{55}{60} \cdot \frac{1}{60} \cdot \frac{1}{24} \text{ gün } = 365 + \frac{20935}{86400}\text{gün}$$

Bu noktada $\frac{20935}{86400}$ kesrini sürekli kesire çevirelim. Bu kesrin daha sade hali $\frac{4187}{17280}$ olur. Bu kesri sürekli kesire dönüştürürsek,

$$\begin{aligned}
\frac{4187}{17280} &= \cfrac{1}{4 + \cfrac{532}{4187}} = \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{463}{532}}} \\
&= \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{69}{493}}}} = \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{49}{69}}}}}
\end{aligned}$$

$$= \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{20}{49}}}}}}$$

$$= \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{9}}}}}}}}$$

$$= \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + 1\cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}}}}}}}}}$$

elde edilir.

Bu sürekli kesrin yakınsamaları da şu şekilde bir dizidir:

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{7}{29}, \frac{8}{33}, \frac{55}{227}, \frac{63}{260}, \frac{181}{747}, \ldots$$

$\frac{1}{4}$ yakınsamasına göre her 4 yıl, 1 ekstra gün gerektirir. Bu da her 4 yılda bir o yıla 1 gün eklenerek oluşturulan Julian takvimini verir. Açıktır ki $\frac{8}{33}$ yakınsaması da aynı şekilde her 33 yılda 8 ekstra gün gerektirir. Bu yakınsama Gregoryen takviminin kabul ettiği değere çok yakındır. 33 yılda 8 artık gün demek 400 yılda yaklaşık 97 gün demektir. 400 yıllık periyot içinde her 4'ün katı yıldan sadece 100, 200 ve 300. yıllar artık yıl kabul edilmezken 400 artık yıl olarak kabul edilir ki bu da Gregoryen takviminin sistematiğidir. Yani 1700, 1800, 1900 sıradan yıllar sayılırken 1600, 2000 yılları artık yıllardır.

$$\frac{97}{400} - \frac{4187}{17280} \approx 0,0001974$$

farkından Gregoryan takvimine göre her 10000 yılda 2 günlük hata payı elde edilir. Böylece takvim en az hata payıyla düzenlenmiş olur. Sürekli kesir açılımındaki yakınsamalarda bize artık yıl ve hata payı ile ilgili direk fikir vermektedir.

3.3.2. Huygens'in Gözlemevi

Hollandalı fizikçi ve astronom Christian Huygens 1682 yılında Güneş etrafındaki bilinen 6 gezegenin hareketlerini incelemek için mekanik gözlemevini tasarladı. Her bir gezegeni, ortak bir kola bağlı küçük dişlinin hareketiyle hareket edebilen büyük dişli çarklar olarak tasarladı. Burada küçük dişli olarak Dünya'yı, diğer dişli çarklar olarak da diğer gezegenleri aldı.

Huygens gezegenlerin yörüngelerinin periyotlarının, dünyanın güneş etrafındaki bir tam dönüşüne yani $365\frac{35}{144}$ güne oranlayarak şu değerleri hesaplamıştır:

$$\begin{array}{lcl} \text{Mercury} & \rightarrow & \frac{25335}{105190} \\ \text{Venus} & \rightarrow & \frac{64725}{105190} \\ \text{Mars} & \rightarrow & \frac{197836}{105190} \\ \text{Jupiter} & \rightarrow & \frac{1247057}{105190} \\ \text{Saturn} & \rightarrow & \frac{3095277}{105190} \end{array}$$

Bu hesaplamalardan sonra Huygens, bu değerlerin sürekli kesir açılımlarını yapıp, bu açılımların yakınsamalarına bakarak pratik bir gözlemevi için uygun dişli sayısını (çarklardaki dişli sayısını) seçmeye çalışmıştır.

Gezegen	**Periyot**	**Yakınsama**	**Diş Sayısı Oranı**
Mercury	$\frac{25335}{105190}$	$\frac{p_5}{q_5} = \frac{33}{137}$	33 : 137
Venus	$\frac{64725}{105190}$	$\frac{p_5}{q_5} = \frac{8}{13}$	32 : 52
Mars	$\frac{197836}{105190}$	$\frac{p_5}{q_5} = \frac{79}{42}$	158 : 84
Jupiter	$\frac{1247057}{105190}$	$\frac{p_3}{q_3} = \frac{83}{7}$	166 : 137
Saturn	$\frac{3095277}{105190}$	$\frac{p_1}{q_1} = \frac{59}{2}$	118 : 4

Huygens dişlilerin diş sayısını düzenlemede pratik olması açısından sürekli kesirle elde edilen yakınsamaları baz almıştır. Örneğin Satürn için

$$\frac{3095277}{105190} = 29 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4}}}}}}}}}}$$

sürekli kesri elde edilir. Burada kullanılan yakınsama

$$\frac{p_1}{q_1} = 29 + \frac{1}{2} = \frac{59}{2}$$

şeklindedir. Daha sonra daha dikkatli hesaplar yaparak hata hesabı üzerine de çalışmış ve Satürn için birçok defa farklı oranlar kullanmayı denemiştir. Daha hassas hesap yaparak Satürn için

$$\frac{77708431}{2640858}$$

kesrini kullanarak, 3. yakınsama olan $\frac{206}{7}$ yakınsamasını kullanmıştır [9].

3.3.3. Kuadratik Denklemin Bir Kökü

Sürekli kesirler yardımıyla tamsayı katsayılı kuadratik denklemlerin bir çözümüne ulaşmak mümkündür. Ama burada, şu ana kadar kullandığımız basit sürekli kesirlerin yerine, genel sürekli kesirlerin karşımıza çıktığına dikkat edelim.

$$x^2 + bx + c = 0$$

denklemini, ($x \neq 0$ için)

$$\begin{aligned} x^2 + bx &= -c \\ x + b &= -\frac{c}{x} \\ x &= -b - \frac{c}{x} \end{aligned}$$

şeklinde ifade edelim. Son eşitlikte x yerine eşiti olan $-b-\dfrac{c}{x}$ tekrar (ve tekrar) yazılırsa aşağıdaki sürekli kesir elde edilir:

$$x = -b - \cfrac{c}{-b - \cfrac{c}{-b - \cfrac{c}{-b - \cfrac{c}{-b - \vdots}}}}$$

Bu sürekli kesirde, yeterince büyük yakınsamalar, x değerine yeterince yakın olmuş olur.

Örnek 3.8 *$x^2-5x+6=0$ denklemini alalım.*

$$\begin{aligned} x^2-5x &= -6 \\ x-5 &= -\frac{6}{x} \\ x &= 5-\frac{6}{x} \end{aligned}$$

Şimdi, x yerine eşiti olan $5-\dfrac{6}{x}$ değerini (tekrar-tekrar) yazalım:

$$x = 5-\cfrac{6}{5-\cfrac{6}{5-\cfrac{6}{5-\cfrac{6}{5-\vdots}}}}$$

Aynı zamanda $x=5-\dfrac{6}{x}$ ifadesinde sağ taraftaki x yerine bir değer verilip, çıkan değer tekrar aynı denklemde yerine yazılarak bu işlem tekrarlanırsa, denklemin mutlak değerce büyük olan köküne yakınsadığı görülür.

$x=5$ değeriyle başlayalım.

$$x=5-\frac{6}{5}=\frac{19}{5}=3,8$$

$x=\dfrac{19}{5}$ *için*

$$x=5-\frac{6}{\frac{19}{5}}=\frac{65}{19}\approx 3,4210526315789473684210526315789$$

$x=\dfrac{65}{19}$ *için*

$$x=5-\frac{6}{\frac{65}{19}}=\frac{211}{65}\approx 3,2461538461538461538461538461538$$

$x=\dfrac{211}{65}$ *için*

$$x=5-\frac{6}{\frac{211}{65}}=\frac{665}{211}\approx 3,1516587677725118483412322274882$$

$x = \dfrac{665}{211}$ *için*

$$x = 5 - \frac{6}{\dfrac{665}{211}} = \frac{2059}{665} \approx 3,0962406015037593984962406015038$$

$x = \dfrac{2059}{665}$ *için*

$$x = 5 - \frac{6}{\dfrac{2059}{665}} = \frac{6305}{2059} \approx 3,0621661000485672656629431762992$$

$x = 5$ için hesaplanan ilk altı adım değerleri yukarıdaki gibi olur. Bu şekilde devam edilirse denklemin kökü olan 3 sayısına yaklaşılır.

$x = 1$ *için aynı işlemler yapılırsa.*

$$x = 5 - \frac{6}{1} = -1$$

$x = -1$ *için*

$$x = 5 - \frac{6}{-1} = 11$$

$x = 11$ *için*

$$x = 5 - \frac{6}{11} = \frac{49}{11} \approx 4,454545454545454545454545454545$$

$x = \dfrac{49}{11}$ *için*

$$x = 5 - \frac{6}{\dfrac{49}{11}} = \frac{179}{49} \approx 3,6530612244897959183673469387755$$

$x = \dfrac{179}{49}$ *için*

$$x = 5 - \frac{6}{\dfrac{179}{49}} = \frac{601}{179} \approx 3,357541899441340782122905027933$$

$x = \frac{601}{179}$ *için*

$$x = 5 - \frac{6}{\frac{601}{179}} = \frac{1931}{601} \approx 3,21297836938435940099833610648 92$$

$x = 1$ için hesaplanan ilk altı adım değerleri yukarıdaki gibi olur. Bu şekilde devam edilirse denklemin kökü olan 3 sayısına yaklaşıldığı benzer şekilde görülmüş olur.

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

KAYNAKLAR

[1] Cheng, Y. T. , “Continued Fractions”, Master Thysis, Cornell University, New York, 2007.

[2] Gelfond, A.O., “The Solution of Equations in Integers”, P. Noordhoff Ltd., Groningen, 1960

[3] Heath, T. L., “Diophantus of Alexandria: A Study in the History of Greek Algebra”, Martino Publishing, 2009.

[4] Khinchin, A. Y., “Continued Fractions”, The University of Chicago Press, Chicago, 1964.

[5] Mollin, R.A., “Simple Continued Fraction Solutions For Diophantine Equations”, “Expositiones Mathematicae”, Volume 19, Issue 1, Pages 55-73 (2001).

[6] Mutlu, Z., “Cebirsel Sayilar Teorisinde Bazi Algoritmalar”, Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 2005.

[7] Olds, C.D., “Continued Fractions”, Random House, New York, 1963.

[8] Pekasil, M., “Sürekli Kesirler ve Pell Denklemleri”, Yüksek Lisans Tezi, Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Sakarya, 2006.

[9] Rocket, A.M., SZUSZ, P., “Continued Fractions”, World Scientific, 1992.

[10] Rosen, K.H., “Elementary Number Theory and its Applications”, Addison-Wesley Publishing Company, 1984.

[11] Stillwell, J., “Mathematics and Its History”, 3rd edition, Springer, 2010.