DİNAMİK SİSTEMLERİN KARARLILIK ÖZELLİKLERİNİN YENİ YÖNTEMLERLE İNCELENMESİ

Şerife YILMAZ

Doktora Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Nisan–2014

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Şerife Yılmaz'ın **"Dinamik Sistemlerin Kararlılık Özelliklerinin Yeni Yöntemlerle İncelenmesi"** başlıklı **Matematik** Anabilim Dalındaki Doktora tezi 11/04/2014 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	Adı - Soyadı	**İmza**
Üye (Tez Danışmanı)	**Prof.Dr. VAKIF CAFER**	.....
Üye	**Prof.Dr. ELÇİN YUSUFOĞLU**	.....
Üye	**Doç.Dr. METİN KUL**	.....
Üye	**Doç.Dr. TANER BÜYÜKKÖROĞLU**	.....
Üye	**Doç.Dr. HANDAN AKYAR**	.....

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

ÖZET

Doktora Tezi

"DİNAMİK SİSTEMLERİN KARARLILIK ÖZELLİKLERİNİN YENİ YÖNTEMLERLE İNCELENMESİ"

ŞERİFE YILMAZ

Anadolu Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. VAKIF CAFER

2014, 131 - Sayfa

Bu tezde, doğrusal sistemlerin teorisinde önemli problemler olan ortak kuadratik Lyapunov fonksiyonunun (OKLF) varlığı ve vektör parametresine bağlı belirsiz sistemde kararlı elemanın varlığı ve bulunması problemleri ele alınmıştır. OKLF probleminde bir konveks optimizasyon yöntemi olan kesen düzlemler yöntemi (Kelley'nin yöntemi), modifiye edilmiş gradiyent yöntemi, yeni ağırlıklı ortak kuadratik fonksiyonlar yöntemi ele alınmıştır. Bu yöntemler çok sayıda örnek üzerinde denenmiş ve daha önce bilinen yöntemlere göre daha hızlı olduğu görülmüştür. Bir matris politopunda kararlı elemanın varlığı problemi doğrusal sistemlerin kararlılaştırılmasında çok önemlidir. Tez çalışmasında bu problem yeni bir konveks olmayan optimizasyon problemine getirilmiştir. Polyak'ın bu problem için verdiği algoritma tüm uzayda değişen parametreler yerine kutuda değişen parametreler durumuna dönüştürülmüştür. Bendixson teoreminin uygulaması ile bir yeterli koşul elde edilmiştir. 3×3 boyutlu aralık aile için bölme - eleme yardımı ile bir rastgele seçim algoritması verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hurwitz kararlılık, anahtarlamalı sistemler, matris politopu, ortak Lyapunov fonksiyonu, gradiyent yöntemi, Kelley yöntemi

ABSTRACT

PhD Thesis

“INVESTIGATION OF THE STABILITY PROPERTIES OF DYNAMICAL SYSTEMS BY NEW METHODS”

Şerife YILMAZ

Anadolu University

Graduate School of Sciences

Mathematics Program

Supervisor: Prof. Dr. Vakıf CAFER

2014, 131 - Pages

In this thesis, two important problems of the theory of linear systems, the problem of existence of common quadratic Lyapunov functions (CQLF) and the problem of existence of a stable member in uncertain systems that depends on the parameter vector are considered. In a CQLF problem the cutting plane method (Kelley’s method) which is a convex optimization method, modified gradient method, weighted common quadratic function method are considered. These methods are examineted over the numerous examples and it is seen that these methods are faster than known methods. In a matrix polytope a problem of the existence of a stable member is very important in stabilization problems of linear systems. In this thesis, this problem is reduced to a new nonconvex optimization problem. Polyak’s algorithm where uncertainty parameters vary in whole space is converted to an algorithm where the parameters vary in a box. A sufficient condition with application of Bendixson theorem is obtained. A random selection algorithm is given for an 3×3 dimensional interval family with the combination of division-elimination procedure.

Keywords: Hurwitz stability, switched systems, matrix polytope, common Lyapunov function, gradient method, Kelley’s method

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında her türlü desteğini benden esirgemeyen değerli danışman hocam Prof. Dr. Vakıf CAFER'e en içten teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca ilgi ve desteğinden dolayı değerli hocam Doç Dr. Taner Büyükköroğlu'na ve Tez İzleme Komitesi üyesi Doç. Dr. Metin Kul'a tez çalışması sürecinde verdiği destekten dolayı teşekkür ederim. Her zaman olduğu gibi doktora eğitimim süresince de benden desteklerini eksik etmeyen aileme yardımları ve anlayışları için teşekkürü bir borç bilirim.

Doktora çalışmalarım boyunca bana verdiği maddi desteklerinden dolayı TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığı'na özel olarak teşekkür ederim.

Şerife YILMAZ
Nisan 2014

İÇİNDEKİLER

ÖZET i

ABSTRACT ii

TEŞEKKÜR iii

İÇİNDEKİLER iv

ÇİZELGELER DİZİNİ vi

1. GİRİŞ 1

1.1. Anahtarlamalı Sistemlerin Önemi 1

1.2. Lineer Sistemlerin Çeşitli Kararlılık Tanımları 2

1.3. Anahtarlamalı Sistemler İçin Kararlılık Tanımları 2

2. ORTAK P PROBLEMİ 4

2.1. Problemin ifadesi 4

2.2. Ortak P için konveks optimizasyon problemi 6

2.3. Kelley'nin kesen düzlemler yöntemi 8

2.4. Gradiyent yöntemi 16

2.5. Ağırlıklı ortak P yöntemi 28

2.6. Gradiyent yönteminin ağırlık katılarak uygulanması 39

2.7. Liberzon-Tempo'nun verdiği ortak $P > 0$ algoritması 46

2.8. Liberzon-Tempo'nun verdiği ortak P algoritmasının ağırlık katılarak uygulanması 47

2.9. Gradiyenti matris olarak alıp, ağırlık katarak hesaplama 52

3. AİLEDE KARARLI ELEMANIN VARLIĞI PROBLEMİ 61

3.1. Problemin ifadesi 61

3.2. Uygun optimizasyon problemi 61

3.3. $P = B^T B$ durumunda gradiyent yönteminin uygulanması 77

3.4. Polinom ve matris ailesinde kararlı eleman için Polyak algoritması 84

3.4.1. Gürbüzlük Sınırı 84

3.4.6. Polinomlar Ailesinde Kararlı Elemanın Varlığı Problemi . 88
3.5. (q_i^-, q_i^+) aralığını $(-\infty, \infty)$ aralığına Genişletme 92
3.6. Bendixson Teoreminin uygulanması 95
3.6.1. Ailede kararlı elemanın varlığı için yeter koşul 95
3.7. Bir Metzler ailesinde kararlı elemanın varlığı 103
3.8. Herhangi afin ailede diyagonal kararlı elemanın varlığı 110
3.9. Özdeğerlerin kısmi türevleri alınarak gradiyent yönteminin uygulanması 111
3.10. Parametre sayısı 2 iken kararlı elemanın bulunması 115
3.11. Parametre sayısı birden fazla iken kararlı elemanın rastgele seçimi 116
3.12. Köşegen elemanları sabit olan 3×3 boyutlu aralık aile için bölme-eleme algoritması 118
3.13. Köşegen elemanları sabit olmayan 3×3 boyutlu aralık aile için rastgele seçim 123

4. SONUÇ **128**

ÇİZELGELER DİZİNİ

3.1. Örnek 3.6.8 için gradiyent yöntemi. 101

3.2. Örnek 3.6.10 için gradiyent yöntemi. 103

3.3. Örnek 3.12.3 için bölme-eleme prosedürü 121

3.4. Örnek 3.12.5 için bölme-eleme prosedürü 123

1 GİRİŞ

1.1 Anahtarlamalı Sistemlerin Önemi

Anahtarlamalı (switched) sistemler, kontrol teorisinden bilgisayar bilimlerine kadar birçok uygulama ve araştırma alanına sahip sistemlerdir. Anahtarlamalı sistemler genel bir ifadeyle bir grup alt sistem ve bu alt sistemlerin etkileşiminde kullanılan anahtarlama işaretleri (sinyalleri) kümesinden oluşmaktadır. Burada bahsedilen alt sistemleri farklı zaman dilimlerinde veya durum uzayının farklı bölgelerinde bulunan sistemler olarak tanımlayabiliriz. Anahtarlama işlemi ise bu farklı alt sistemlerin birbirleri arasındaki geçişleri sağlamaktadır. Anahtarlamalı sistemlerle ilgili bir fikir elde edebilmek için şöyle bir sistem ele alalım. Herhangi bir kapıyı bir sistem, kapının kapalı olması durumunu ve açık olması durumunu farklı zamanlarda bulunan iki alt sistem ve anahtarlama işaretimizi de fiziksel anahtar olarak düşünebiliriz. T zamanına kadar kapının kapalı olduğu varsayımını yapalım. T zamanında anahtarı kullanarak kapıyı açalım. T zamanından sonra sistem farklı bir alt sistem olan kapının açık olması durumunda kalacaktır. Görüldüğü gibi anahtar işareti farklı alt sistemlerde geçişi sağlamış ve farklı zaman dilimlerinde farklı sistemlerin çalıştırılabilmesine olanak sağlamıştır.

Birkaç örnek verecek olursak;

- Bir hareketli robot çevresel uyaranlara göre programlanır. Örneğin, "engellerden sakın", "köşeyi dön".
- Böceklerin dünyasında engellerin üstesinden gelmek için çeşitli yürüyüş biçimleri bilinir.
- Uçak endüstrisinde kazanç tarifeli kontroller daha çok popülerdir.
- İnsanın kas kontrol sistemi hızlı anahtarlama yapan sistemin kanonik bir örneğini sağlar. Vücudun kaslarının çoğu zıt çiftlerden meydana gelir ve bu kas çiftinin biri herhangi bir durumda aktif olarak kullanılabilir, vs.

1.2 Lineer Sistemlerin Çeşitli Kararlılık Tanımları

$\dot{x} = Ax$ sistemi verilsin. Burada $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$ A ise $n \times n$ boyutlu gerçel matristir. Bu sistemin $x(0)$ başlangıç koşullu $x(t)$ çözümü $x(t) = e^{At}x(0)$ dır. Burada e^{At} eksponansiyel matrisi ifade etmektedir.

Kararlılık: Her $\varepsilon > 0$ için öyle $\delta > 0$ vardır ki her $\| x(0) \| < \delta$ başlangıç koşulunu sağlayan her $x(t)$ çözümü için $\| x(t) \| < \varepsilon$ $(\forall t \geq 0)$'ı gerçekler.

Asimptotik Kararlılık:

1. $\dot{x} = Ax$ sistemi kararlı bir sistem olup, ek olarak

2. Öyle $\delta > 0$ vardır ki her $\| x(0) \| < \delta$ için $x(0)$ dan başlayan her $x(t)$ çözümü $t \to \infty$ iken sıfıra yaklaşıyor ise yani $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ ise $x = 0$ denge noktasına asimptotik kararlıdır denir.

Eksponansiyel Kararlılık: Öyle $\delta, \lambda, c > 0$ sayıları vardır ki her $\| x(0) \| < \delta$ için $\| x(t) \| \leq ce^{-\lambda t} \| x(0) \|$ $(\forall t \geq 0)$ eşitsizliği sağlanmaktadır.

λ_i ler A matrisinin özdeğerleri olmak üzere;

- $x = 0$ çözümü kararlıdır $\Leftrightarrow Re(\lambda_i) \leq 0 \quad (\forall i = 1, 2, \ldots, n)$ dır.

- $x = 0$ çözümü asimptotik kararlıdır $\Leftrightarrow Re(\lambda_i) < 0 \quad (\forall i = 1, 2, \ldots, n)$ dır.

$Re(\lambda_i) < 0 \quad (\forall i = 1, 2, \ldots, n)$'dır $\Leftrightarrow \forall Q > 0$ için tek $P > 0$ vardır öyle ki $A^T P + PA = -Q$ matris eşitliği gerçekleşir. Burada $P > 0$ gösterimi P matrisinin simetrik olup her $x \neq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ için $x^T Px > 0$ olmasını yani P'nin pozitif belirli olmasını ifade eder. "T" ise matrisin transpozudur.

O halde ;

Sistem asimptotik kararlıdır $\Leftrightarrow Re(\lambda_i) < 0 \quad (\forall i = 1, 2, \ldots, n)$'dır

$\Leftrightarrow$ Her $Q > 0$ için bir tek $P > 0$ vardır öyle ki $A^T P + PA = -Q$ eşitliği sağlanır.

1.3 Anahtarlamalı Sistemler İçin Kararlılık Tanımları

$\mathcal{P}$ bir metrik uzayda kompakt küme olmak üzere

$$\dot{x} = A_p x, \quad p \in \mathcal{P},\ x = x(t) \in \mathbb{R}^n$$

sistemi verilsin. Burada A_p matrisleri $n \times n$ boyutludur.

Düzgün Asimptotik Kararlılık: Öyle $\delta > 0$ ve $\beta(r,t)$ fonksiyonu vardır ki $\| x(0) \| < \delta$ iken ve her $\sigma(t) \in \mathcal{P}$ sinyalinin ürettiği $x(t)$ çözümü için

$$\| x(t) \| \leq \beta(\| x(0) \|, t) \quad (t \geq 0)$$

eşitsizliği sağlanmaktadır. Burada $\beta(r,t)$ fonksiyonu r'ye göre artan, $\beta(0,t) = 0$ ve $t \to \infty$ iken $\beta(r,t) \to 0$ koşulunu sağlamaktadır.

Düzgün Eksponansiyel Kararlılık: Eğer yukarıdaki tanımda $\beta(r,t) = cre^{-\lambda t}$ $(c > 0, \lambda > 0)$ ise

$$\| x(t) \| \leq c \| x(0) \| e^{-\lambda t} \quad (\forall t \geq 0)$$

eşitsizliği gerçekleşir. Bu durumda anahtarlamalı sisteme düzgün eksponansiyel kararlı sistem denir.

Eğer bu eşitsizlikler her $x(0) \in \mathbb{R}^n$ başlangıç koşulu için sağlanıyorsa sisteme global düzgün asimptotik kararlı (GDAK) ve global düzgün eksponansiyel kararlı (GDEK) sistem denir.

$$\dot{x} = f_p(x) \quad x = x(t) \in \mathbb{R}^n$$

lineer olmayan iyi tanımlı anahtarlamalı sistemi verilsin. Eğer $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $V(0) = 0$ fonsiyonu varsa ki her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]^T f_p(x) < 0$$

eşitsizliği sağlansın, bu $V(x)$ fonksiyonuna sistemin ortak Lyapunov fonksiyonu denir. Burada

$$[\tfrac{\partial V}{\partial x}]^T = (\tfrac{\partial V}{\partial x_1}, \tfrac{\partial V}{\partial x_2}, \ldots, \tfrac{\partial V}{\partial x_n})^T$$

gradiyent vektörünü ifade eder.

Teorem 1.3.1. *Eğer sistem radyal sınırsız ortak Lyapunov fonksiyonuna sahip ise o zaman bu sistem GDAK'dır.*

Burada radyal sınırsızlık $\| x \| \to \infty$ iken $V(x) \to \infty$ anlamına gelmektedir.

2 ORTAK P PROBLEMİ

2.1 Problemin ifadesi

A_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$'ler $n \times n$ boyutlu reel matrisler olmak üzere,

$$\mathcal{A} = \mathrm{conv}\{\mathrm{A_1}, \mathrm{A_2}, \ldots, \mathrm{A_N}\} \tag{2.1}$$

matris politopunu ele alalım. Bu politop, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$ olmak üzere

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \;\; A \in \{A_1, A_2, \ldots, A_N\} \tag{2.2}$$

anahtarlamalı lineer sistemine karşılık gelir. Biz (2.2) sisteminin kararlılık problemiyle ilgileniyoruz. $N = 1$ durumu için yani $\dot{x}(t) = Ax(t)$ basit sistemi için, kararlılık teorisine göre $x = 0$ denge noktası kararlıdır $\Leftrightarrow$ A matrisinin bütün özdeğerleri sol açık yarı düzlemdedir (yani $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$). Bu durumda A kararlı (Hurwitz) matris olarak adlandırılır. Q simetrik pozitif tanımlı matris $(Q > 0)$ olmak üzere,

$$A^T P + PA = -Q \tag{2.3}$$

matris denklemi Lyapunov matris denklemi olarak adlandırılır. (2.3) denkleminin simetrik pozitif tanımlı $(P > 0)$ bir çözümünün varlığı için gerekli ve yeterli koşul A'nın Hurwitz olmasıdır.

(2.2) anahtarlamalı sistem durumunda A matrisi A_1, A_2, $\ldots$, A_N matrisleri arasında değişir. Bir sinyal $\sigma(t)$ sağdan parçalı sürekli $\sigma : [0, \infty) \to \{1, 2, \ldots, N\}$ bir fonksiyondur ve geçiş zamanları keyfidir. $x(0) = x_0$ başlangıç koşulu ve $\sigma(t)$ sinyali ile verilen (2.2) sisteminin çözümü $x(t, x_0, \sigma(\cdot))$ ile temsil edilir.

Tanım 2.1.1. *Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $\sigma(t)$ sinyali ve $\| \; x_0 \; \| < \delta$ koşulunu sağlayan x_0 başlangıç koşulu için $\| \; x(t, x_0, \sigma(\cdot)) \; \| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı varsa ve her $\sigma(\cdot)$ sinyali için*

$$\lim_{t \to \infty} x(t, x_0, \sigma(\cdot)) = 0$$

ise (2.2) sistemi için orijin düzgün asimptotik kararlıdır (DAK).

(2.2) deki bütün sistemlerin $V(x) = x^T P x$ gibi ortak kuadratik Lyapunov fonksiyonu (OKLF) varsa anahtarlamalı sistem DAK'dır. Bu durumda öyle bir $P > 0$ vardır ki

$$A_i^T P + P A_i < 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N) \tag{2.4}$$

olur ve bu $P > 0$ matrisi (2.4) Lyapunov matris eşitsizlikleri için P ortak çözüm olarak adlandırılır.

Tersine varsayalım ki anahtarlamalı sistem DAK olsun. Öyleyse bu sistemin radyal sınırsız ortak Lyapunov fonksiyonu vardır. Anahtarlamalı lineer sistemlerde düzgün asimptotik kararlılığın, ortak kuadratik Lyapunov fonksiyonunun varlığını gerektirmediğine dikkat etmeliyiz.

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -10 \\ 0.1 & -1 \end{pmatrix}$$

Hurwitz matrislerini ele alalım ([8]). $\dot{x} \in \{A_1, A_2\}x$ anahtarlamalı sistemi DAK'dır ancak OKLF'ye sahip değildir.

(2.4)'ün ortak pozitif tanımlı P çözümünün varlığı problemleri bir çok çalışmada yer aldı ([4], [6], [7], [8], [11], [15], [16], [21], [20]). Diferansiyellenemeyen konveks optimizasyon yardımıyla ortak P için numerik çözüm ([4])'de incelenmiştir.

İki tane 2×2 boyutlu kararlı

$$\dot{x} = A_1 x, \quad \dot{x} = A_2 x$$

sistemleri için ortak P'nin varlığı için gerekli ve yeter koşul $A_1 A_2$ ve $A_1 A_2^{-1}$ matrislerinin negatif özdeğerlerinin olmamasıdır.

Sonlu sayıda $n \times n$ boyutlu kararlı ve komutatif ($A_i A_j = A_j A_i$) matrisler ailesi olan $A_1, A_2, \dots, A_n$'nin daima ortak P'si vardır.

2.2 Ortak P için konveks optimizasyon problemi

$$\dot{x} = \{A_1, \ldots, A_N\}x$$

anahtarlamalı sistemi için $P > 0$ iken $V(x) = x^T\, P\, x$ gibi OKLF'nin varlık problemini ele alalım. Bu problem

- Kelley'nin kesen düzlemler yöntemi
- Gradiyent yöntemi

ile incelenebilir. Ortak $P > 0$' ın varlığı problemi N tane

$$A_i^T P + P A_i < 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, N). \tag{2.5}$$

matris eşitsizliğinin ortak $P > 0$ çözümünün varlığı problemiyle bağlantılıdır. $x \in \mathbb{R}^r$, $x^T = (x_1, x_2, \ldots, x_r)$ ve P parametreye bağlı

$$P = P(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_2 & x_{n+1} & \cdots & x_{2n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & x_{2n-1} & \cdots & x_r \end{pmatrix}, \quad (r = \frac{n(n+1)}{2}) \tag{2.6}$$

gibi tanımlı $n \times n$ boyutlu pozitif tanımlı simetrik matris olsun.

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \max_{1 \le i \le N} \lambda_{\max}(A_i^T P + P A_i) \\ &= \max_{1 \le i \le N, \|u\|=1} u^T (A_i^T P + P A_i) u \end{aligned} \tag{2.7}$$

şeklinde fonksiyon tanımlansın. Burada $\lambda_{\max}(C)$ sayısı C simetrik matrisinin en büyük özdeğerini ifade etmektedir. En az bir $x_* \in \mathbb{R}^r$ için $P(x_*) > 0$ ve $\phi(x_*) < 0$ ise $P(x_*)$ matrisi uygun çözümdür. Bu problem konveks kısıtlar altında konveks fonksiyonun minimizasyonuna indirgenebilir. Gerçekten,

$$\begin{gathered} \phi(x) \to \min \\ \min_{\|v\|=1} v^T P v > 0 \end{gathered} \tag{2.8}$$

problemi bir konveks optimizasyon problemidir.

$X \subset \mathbb{R}^n$ konveks küme ve $F : X \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon olsun. Her $x \in X$ için

$$F(x) \geq F(x_*) + g^T(x - x_*)$$

olacak şekilde $g \in \mathbb{R}^n$ vektörü var ise bu vektöre $F(x)$'in $x_* \in X$'daki bir subgradiyent vektörü denir.

$F(x)$'in $x = x_*$'daki tüm subgradiyentlerinin kümesi $\partial F(x_*)$ ile temsil edilir. x_* vektörü, X'in bir iç noktası ise $\partial F(x_*)$ kümesi boştan farklı ve konvekstir. ϕ fonksiyonu bir maksimum fonksiyonu ise subgradiyent kümesi aşağıdaki teorem yardımıyla verilir.

Teorem 2.2.1. *Y kompakt, $f(x, y)$ sürekli ve x'e göre diferansiyellenebilir konveks fonksiyon olmak üzere, $\phi(x)$*

$$\phi(x) = \max_{y \in Y} f(x, y) \tag{2.9}$$

olarak tanımlansın. $Y(x)$, (2.9)'u maksimum yapan elemanların kümesi yani

$$Y(x) = \{y \in Y : \; f(x, y) = \phi(x)\}$$

olmak üzere

$$\partial \phi(x) = \mathrm{conv}\{\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} : \; y \in Y(x)\}$$

dır.

$$\phi(x) \quad = \max_{1 \leq i \leq N, \|u\|=1} u^T(A_i^T P + P A_i)u \tag{2.10}$$

fonksiyonu için

$$\begin{aligned} \partial \phi(x) = \mathrm{conv}\{\frac{\partial}{\partial x}\big(u^T(A_i^T P + P A_i)u\big) : \; i \text{ indisi} \\ \lambda_{\max}(A_i^T P + P A_i) : \text{ ifadesini maksimize eder,} \\ u \text{ ise karşı gelen birim özvektördür.}\} \end{aligned} \tag{2.11}$$

Verilen x için, eşitlik (2.7)'yi maksimal yapan i tek ve ayrıca maksimalleştiren u tek ise ϕ x noktasında diferansiyellenebilirdir.

2.3 Kelley'nin kesen düzlemler yöntemi

Genel eşitsizlik kısıtlı konveks programlama problemleri için Kelley'nin kesen düzlemler metodunu ifade edelim.

$f(x)$ ve $-c_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, q)$ konveks fonksiyonlar iken genel konveks minimizasyon problemi olan

$$\begin{aligned} f(x) &\to \min, \\ c_j(x) &\geq 0, \qquad (j = 1, 2, \ldots, q) \end{aligned} \tag{2.12}$$

problemini ele alalım.

$z = (x_1, x_2, \ldots, x_r, L)^T$, $c = (0, \ldots, 0, 1)^T$, $c(z) = L - f(x)$, $c_j(z) = c_j(x)$ değişken değişimleri ile bu problem

$$\begin{aligned} c^T z &\to \min \\ c(z) &\geq 0, \\ c_j(z) &\geq 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, q) \end{aligned} \tag{2.13}$$

problemine dönüştürülebilir. Bizim problem için (2.8) ve (2.13), $c_1(z) = L - \phi(x)$, $c_2(z) = \min\limits_{\|v\|=1} v^T P v$ olmak üzere

$$\begin{gathered} L \to \min \\ c_1(z) \geq 0, \\ c_2(z) \geq 0, \\ -1 \leq x_i \leq 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \end{gathered} \tag{2.14}$$

problemine dönüşür.

z^0 başlangıç noktası verilsin. $z^0, z^1, \ldots, z^k$ noktaları $k+1$ tane farklı nokta olsun. $h_j^T(z^i)$, $-c_j(z)$' nin z^i' deki bir subgradyenti olmak üzere

$$-c_j(z) \geq -c_j(z^i) + h_j^T(z^i)(z - z^i) \quad 0 \leq i \leq k, \ j = 1, 2 \tag{2.15}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Eğer z noktası $c_j(z) \geq 0$ kısıtlarını sağlıyorsa,

$$\begin{aligned} -h_1^T(z^0)z &\geq -h_1^T(z^0)z^0 - c_1(z^0) \\ -h_2^T(z^0)z &\geq -h_2^T(z^0)z^0 - c_2(z^0) \\ &\vdots \\ -h_1^T(z^k)z &\geq -h_1^T(z^k)z^k - c_1(z^k) \\ -h_2^T(z^k)z &\geq -h_2^T(z^k)z^k - c_2(z^k). \end{aligned} \tag{2.16}$$

lineer eşitsizliklerini de sağlar. k iterasyonda, kesen düzlemler algoritması aşağıdaki lineer programlama (LP) problemini çözer:

$$\begin{aligned} &L \to \min \\ -h_1^T(z^0)z &\geq -h_1^T(z^0)z^0 - c_1(z^0) \\ -h_2^T(z^0)z &\geq -h_2^T(z^0)z^0 - c_2(z^0) \\ &\vdots \\ -h_1^T(z^k)z &\geq -h_1^T(z^k)z^k - c_1(z^k) \\ -h_2^T(z^k)z &\geq -h_2^T(z^k)z^k - c_2(z^k) \\ -1 \leq\; &x_i \leq 1. \end{aligned} \tag{2.17}$$

z_*^k vektörü, (2.17) probleminin optimal çözümü olsun. $\varepsilon > 0$ tolerans için $\min\{c_1(z_*^k), c_2(z_*^k)\} \geq -\varepsilon$ eşitsizliği sağlanıyorsa z_*^k noktası, (2.13)'deki problemin yaklaşık çözümüdür. Aksi takdirde en büyük negatif $c_j(z_*^k)$ için bir j indisi tanımlanır ve

$$c_{j^*}(z^{k+1}) - h_{j^*}^T(z^{k+1})(z - z^{k+1}) \geq 0 \tag{2.18}$$

lineer kısıtı (2.17)'deki kısıtlara eklenir ve prosedür tekrarlanır.

Amacımızın (2.8) ve (2.13) minimizasyon probleminin optimal çözümünü bulmak değil, $P(x_*) > 0$ ve $\phi(x_*) < 0$ olacak şekildeki x_*'ı bulmak olduğunu hatırlayalım.

Teorem 2.3.1. *(2.5) problemini ele alalım. $z_*^k = (x_*^k, L^k)$, (2.17) probleminin optimal çözümü olsun.*

$$c_1(z_*^k) > L^k, \quad c_2(z_*^k) > 0$$

eşitsizlikleri sağlanacak biçimde bir k varsa o zaman $P = P(x_*^k)$ matrisi (2.5) için ortak bir çözümdür.

Bu sonuçtan aşağıdaki algoritma elde edilir.

Algoritma 2.3.2. *1) Bir $z^0 = (x^0, L^0)^T$ başlangıç noktası alalım.*

$\phi(x^0)$'ı ve $c_2(z^0)$'ı hesaplayalım.

$\phi(x^0) < 0$ ve $c_2(z^0) > 0$ ise duralım;

Aksi takdirde uygulamaya devam edelim.

2) (2.17)'deki LP problemini çözerek z_*^k vektörünü bulalım.

$c_1(z_*^k) > L^k$ ve $c_2(z_*^k) > 0$ ise duralım;

Aksi takdirde uygulamaya devam edelim ve $z^{k+1} = z_*^k$'ı bulalım,

(2.17)'deki kısıtları güncelleştirelim ve prosedürü tekrarlayalım.

Yapılan işlemleri bir kaç örnekle ele alalım.

Örnek 2.3.3.

$$A_1 = \begin{pmatrix} -8/5 & -5/2 \\ 5/2 & 11/10 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 9/8 & 2 \\ -2 & -15/8 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -3/10 & 2 \\ -1 & -13/10 \end{pmatrix}, \; A_4 = \begin{pmatrix} 9/10 & 33/10 \\ -4 & -7/2 \end{pmatrix}$$

Hurwitz kararlı matrisler olmak üzere $A_i^T P + PA_i < 0 \quad (i = 1,2,3,4)$ için ortak $P > 0$ matrisinin varlığını araştıralım.

$$\dot{x} \in \{A_1, A_2, A_3, A_4\}x$$

anahtarlamalı sistemini ele alalım. $P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix}$ *ve $u = (u_1, u_2)^T$ için,*

$$\begin{aligned} u^T(A_1^T P + PA_1)u = \; & (-16/5u_1^2 - 5u_1u_2)x_1 \\ & +(-u_1u_2 - 5u_2^2 + 5u_1^2)x_2 \\ & +(11/5u_2^2 + 5u_1u_2)x_3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u^T(A_2^T P + PA_2)u = \; & (9/4u_1^2 + 4u_1u_2)x_1 \\ & +(-3/2u_1u_2 + 4u_2^2 - 4u_1^2)x_2 \\ & -(15/4u_2^2 + 4u_1u_2)x_3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u^T(A_3^T P + PA_3)u = \; & (-3/5u_1^2 + 4u_1u_2)x_1 \\ & +(-16/5u_1u_2 + 4u_2^2 - 2u_1^2)x_2 \\ & -(13/5u_2^2 + 2u_1u_2)x_3. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
u^T(A_4^T P + PA_4)u = \quad & (9/5u_1^2 + 33/5u_1u_2)x_1 \\
& +(-26/5u_1u_2 + 33/5u_2^2 - 8u_1^2)x_2 \\
& -(7u_2^2 + 8u_1u_2)x_3.
\end{aligned}
$$

$z^0 = (1,0,1,1)^T$*'ı alırsak,* $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $L^0 = 1$*'dır.*

$$
A_1^T P + PA_1 = \begin{pmatrix} -16/5 & 0 \\ 0 & 11/5 \end{pmatrix}
$$

matrisinin özdeğerleri $-3.2,\ 2.2$

$$
A_2^T P + PA_2 = \begin{pmatrix} 9/4 & 0 \\ 0 & -15/4 \end{pmatrix}
$$

matrisinin özdeğerleri $2.25,\ -3.75$

$$
A_3^T P + PA_3 = \begin{pmatrix} -3/5 & 0 \\ 0 & -13/5 \end{pmatrix}
$$

matrisinin özdeğerleri $-0.1857,\ -3.0142$

$$
A_4^T P + PA_4 = \begin{pmatrix} 9/5 & -7/10 \\ -7/10 & -7 \end{pmatrix}
$$

matrisinin özdeğerleri $1.8553,\ -7.0553$ *dır.*

$\lambda_{\max}(A_i^T P + PA_i) = 2.25 \quad (i = 2)$ *ve karşı gelen birim özvektör* $u = (1,0)^T$ *olur.*

$-c_1(z)$ *ve* $-c_2(z)$ *nin* z^0 *daki subgradiyentleri sırasıyla*

$$
\begin{aligned}
h_1^T(z^0) &= (2.25, -4, 0, -1), \\
h_2^T(z^0) &= (0, 0, 1, 0)
\end{aligned}
$$

ve (2.17) kısıtları aşağıdaki gibidir:

$$
\begin{cases}
-2.25x_1 + 4x_2 + L \ \geq \ 0 \\
\qquad\qquad\quad -x_3 \ \geq \ -2 \\
\quad -1 \leq x_i \leq 1 \qquad (i = 1,2,3).
\end{cases}
\tag{2.19}
$$

(2.17)'deki lineer programlama problemi çözülerek

$$
\begin{aligned}
L^1 &= -6.249999, \\
z_*^0 &= (x^1, L^1)^T \\
&= (-0.999999, 1, 0, -6.249999)^T
\end{aligned}
$$

elde edilir. $z^1 = z_*^0$ *için*

$$c_1(z^1) = -14.75198 < 0, \;\; c_2(z^1) = -1.618033 < 0$$

olur. $c_1(z^1) < c_2(z^1) < 0$, *ve* $-c_1(z)$*'nin* z^1*'deki subgradiyenti*

$$h_1^T(z^1) = (-1.7578, 6.7440, -4.0048, -1)$$

dır. (2.18) eşitsizliği

$$1.7578 z_1 - 6.7440 z_2 + 4.0048 z_3 + z_4 \geq 0$$

olarak bulunur ve bu eşitsizlik (2.19)'daki kısıtlara eklenir. 7 *adımdan sonra hesaplamalar aşağıdaki tabloyu vermektedir:*

k	L^k	$c_1(z^k)$	$c_2(z^k)$
1	-6.249999	-14.751980	-1.618033
2	-2.248866	-9.973805	-1
3	-0.738554	-1.336207	0.2533
4	-0.164820	-0.261738	0.400378
5	-0.087438	-0.219040	0.339863
6	-0.057306	-0.072170	0.370242
7	-0.033562	-0.014329	0.381797

Buradan

$$
\begin{aligned}
z^7 &= (x^7, L^7)^T \\
&= (0.976939, 0.606563, 1, -0.033562)^T.
\end{aligned}
$$

$$L^7 - c_1(z^7) = -0.019233 < 0$$

$$c_2(z^7) = 0.381797 > 0$$

olduğu için

$$P = P(x^7) = \begin{pmatrix} 0.976939 & 0.606563 \\ 0.606563 & 1 \end{pmatrix}$$

$(i = 1, 2, 3, 4)$ olmak üzere

$$A_i^T P + P A_i < 0$$

olduğu için P matrisi ortak pozitif tanımlı çözümdür.

Örnek 2.3.4.

$$A_1 = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ -3 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} -8 & -3 & 1 \\ 9 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

Hurwitz kararlı matrisler olmak üzere

$$\dot{x} \in \{A_1, A_2\}x$$

anahtarlamalı sistemini ele alalım. $P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_4 & x_5 \\ x_3 & x_5 & x_6 \end{pmatrix}$ *ve* $u = (u_1, u_2, u_3)^T$

için,

$$\begin{aligned} u^T(A_1^T P + P A_1)u = \ & (-2u_1u_2 + 6u_1u_3 - 8u_1^2)x_1 + (-12u_1u_2 \\ & +6u_2u_3 - 6u_1^2 - 2u_2^2 + 4u_1u_3)x_2 \\ & +(-14u_1u_3 + 6u_3^2 - 2u_2u_3 + 6u_1^2)x_3 \\ & +(-6u_1u_2 - 4u_2^2 + 4u_2u_3)x_4 \\ & +(4u_3^2 - 6u_1u_3 - 10u_2u_3 + 6u_1u_2)x_5 \\ & +(6u_1u_3 - 6u_3^2)x_6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u^T(A_2^T P + P A_2)u = \ & (-6u_1u_2 + 2u_1u_3 - 16u_1^2)x_1 + (-12u_1u_2 \\ & -6u_2^2 + 2u_2u_3 + 18u_1^2)x_2 \\ & +(6u_1u_2 + 2u_3^2 - 28u_1u_3 - 6u_2u_3 + 12u_1^2)x_3 \\ & +(4u_2^2 + 18u_1u_2)x_4 \\ & +(12u_1u_2 + 6u_2^2 - 8u_2u_3 + 18u_1u_3)x_5 \\ & +(6u_2u_3 - 12u_3^2 + 12u_1u_3)x_6. \end{aligned}$$

$z^0 = (1,0,0,1,0,1,1)^T$'ı alırsak, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *$L^0 = 1$'dır.*

$$A_1^T P + P A_1 = \begin{pmatrix} -8 & -4 & 6 \\ -4 & -4 & 2 \\ 6 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

matrisinin özdeğerleri

$$-0.388794335, \; -14.83766535, \; -2.773540312$$

ve

$$A_2^T P + P A_2 = \begin{pmatrix} -16 & 6 & 7 \\ 6 & 4 & 3 \\ 7 & 3 & -12 \end{pmatrix}$$

matrisinin özdeğerleri

$$6.955030038, \; -21.66300671, \; -9.292023330$$

dır. $\lambda_{\max}(A_i^T P + P A_i) = 6.955030038$ *$(i = 2)$ ve karşı gelen birim özvektör*

$$u = (0.317980, 0.911276, 0.261655)^T.$$

$-c_1(z)$ ve $-c_2(z)$ nin z^0 daki subgradiyentleri sırasıyla

$$\begin{aligned} h_1^T(z^0) &= (-3.1899, -6.1628, -0.6714, 8.5375, 8.0498, 1.6074, -1), \\ h_2^T(z^0) &= (0,0,0,0,0,1,0) \end{aligned}$$

ve (2.17) kısıtları

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3.1899x_1 + 6.1628x_2 + 0.6714x_3 & & \\ -8.5375x_4 - 8.0498x_5 - 1.6074x_6 + L & \geq & 0 \\ -x_6 & \geq & -2 \\ -1 \leq x_i \leq 1 & & (i = 1, \ldots, 6). \end{array} \right. \tag{2.20}$$

olur. (2.17)'deki lineer programlama problemi çözülerek

$$\begin{aligned} L^1 &= -28.219158, \\ z_*^0 &= (x^1, L^1)^T \\ &= (0.99999, 0.99999, 1, -1, -0.99999, -0.99999, -28.219158)^T \end{aligned}$$

noktası elde edilir. $z^1 = z_*^0$ *için*

$$c_1(z^1) = -73.702566 < 0,\ c_2(z^1) = -2.5615528 < 0$$

olur.

$c_1(z^1) < c_2(z^1) < 0,$ *ve* $-c_1(z)$*'nin* z^1*'deki subgradiyenti*

$$h_1^T(z^1) = (-2.8705, 8.3351, 2.0383, -6.01895, -2.8002, -0.16204, -1)$$

olur. (2.18) eşitsizliği

$$2.8705z_1 - 8.3351z_2 - 2.0383z_3 + 6.01895z_4 + 2.8002z_5 + 0.16204z_6 + z_7 \geq 0$$

haline gelir ve (2.20)'deki kısıtlara eklenir. 20 adımdan sonra, hesaplamalar

k	L^k	$c_1(z^k)$	$c_2(z^k)$
1	−28.219158	−73.702566	−2.561552
2	−19.081911	−24.971772	−1.424481
3	−8.516632	−19.357678	−2.299787
4	−7.476758	−14.824587	−1.732399
⋮	⋮	⋮	⋮
19	−0.163793	−0.219505	0.008031
20	−0.152980	−0.069460	0.195110

tablosunu ortaya çıkarır.

$$\begin{aligned} z^{20} &= (x^{20}, L^{20})^T \\ &= (0.99999, 0.35007, -0.04853, 0.42700, -0.14819, 0.40224, -0.15298)^T. \end{aligned}$$

$$L^{20} - c_1(z^{20}) = -0.08352 < 0$$
$$c_2(z^{20}) = 0.195511 > 0$$

olduğu için

$$P = P(x^{20}) = \begin{pmatrix} 1 & 0.350762 & -0.048535 \\ 0.350762 & 0.427004 & -0.148193 \\ -0.048535 & -0.148193 & 0.402247 \end{pmatrix}$$

matrisi, $i = 1, 2$ *olmak üzere*

$$A_i^T P + P A_i < 0$$

için ortak pozitif tanımlı çözümdür.

2.4 Gradiyent yöntemi

$\mathcal{S}$ kümesi, R herhangi $n \times n$ boyutlu simetrik matris olmak üzere

$$R \oplus R \oplus \cdots \oplus R$$

formundaki $(nN) \times (nN)$ boyutlu simetrik blok köşegen matrislerinin kümesi (alt uzayı) ve $Z_1, Z_2, \ldots, Z_r$ matrisleri $\mathcal{S}$'nin tabanı olsun.

$$Q_i = (-Z_i) \oplus \left(A_1^T Z_i + Z_i A_1\right) \oplus \cdots \oplus \left(A_N^T Z_i + Z_i A_N\right),$$

iken

$$\phi(x) = \phi(x_1, \ldots, x_r) = \lambda_{\max}\left(\sum_{i=1}^{r} x_i Q_i\right) \tag{2.21}$$

olarak tanımlansın. Burada $\lambda_{\max}(Q)$ daha önce ifade ettiğimiz gibi Q simetrik matrisinin en büyük özdeğerini ifade etmektedir ve

$$\sum_{i=1}^{r} x_i Q_i = \begin{pmatrix} -P(x) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_1^T P(x) + P(x) A_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & A_N^T P(x) + P(x) A_N \end{pmatrix}$$

blok köşegen matristir. $(P(x) = \sum_{i=1}^{r} x_i Z_i)$

$\{A_1, A_2, \ldots, A_N\}$ matrisler ailesi için OKLF vardır $\Leftrightarrow$ öyle x^* vardır ki $\phi^* = \phi(x^*) < 0$. Bu durumda $P = \sum_{i=1}^{r} x_i^* Z_i$ matrisi ortak pozitif tanımlı çözümdür.

Birim kutu üzerinde tanımlı aşağıdaki optimizasyon problemini ele alalım.

$$\begin{gathered} \phi(x) \to \min \\ -1 \leq x_i \leq 1 \ (i = 1, 2, \ldots, r). \end{gathered} \tag{2.22}$$

$\displaystyle\sum_{i=1}^{r} x_i Q_i$ matrisi simetrik olduğu için $\phi(x)$ (2.21) fonksiyonu

$$\phi(x) = \max_{||u||=1} u^T \left(\sum_{i=1}^{r} x_i Q_i\right) u. \tag{2.23}$$

olarak yazılabilir. u vektörü, $\sum_{i=1}^{r} x_i Q_i$ matrisinin maksimum özdeğerine karşı gelen birim özvektör olmak üzere, $\phi(x)$ in a noktasındaki gradiyent vektörü

$$\nabla \phi(x)|_{x=a} = \left(u^T Q_1 u, u^T Q_2 u, \ldots, u^T Q_r u\right) \tag{2.24}$$

olarak bulunur ([4]).

Örnek 2.4.1.

$$A_1 = \begin{pmatrix} -8/5 & -5/2 \\ 5/2 & 11/10 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 9/10 & 33/10 \\ -4 & -7/2 \end{pmatrix}$$

Hurwitz matrisleri olmak üzere

$$\dot{x} = \{A_1, A_2\}x$$

sistemi verilsin.

$$Z_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Z_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, Z_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

taban matrisleridir.

$$Q_i = (-Z_i) \oplus (A_1^T Z_i + Z_i A_1) \oplus (A_2^T Z_i + Z_i A_2) \quad (i = 1, 2, 3)$$

olarak tanımlayalım. Başlangıç noktası $x^0 = (1/2, 0, 1/4)^T$ *alalım.*

$$P(x^0) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

pozitif tanımlıdır.

$$\sum_{i=1}^{3} x_i^0 Q_i = \frac{1}{2} \cdot Q_1 + 0 \cdot Q_2 + \frac{1}{4} \cdot Q_3$$

Bu matrisin özdeğerleri

$$-0.250, -0.500, -0.718, -1.768, 1.050, -1.900.$$

Maksimum özdeğeri 1.050*'dir ve bu özdeğere karşı gelen birim özvektör*

$$v = [0, 0, 0, 0, 0.9741, 0.2260]^T$$

dır. ϕ *fonksiyonunun* x^0*'daki gradiyenti*

$$\nabla\phi|_{x=x^0} \;=\; [3.1614, -8.3989, -2.1194]^T$$

olur. $x^1 = x^0 - t \cdot \nabla\phi|_{x=x^0}$ *vektörü* 3 *boyutlu birim kutu yüzeyi üzerinde olmalıdır.*

$$\frac{1}{2} - 3.1614 \cdot t = 1,$$
$$\frac{1}{2} - 3.1614 \cdot t = -1$$

İki denklemden elde edilen t*'ler sırasıyla* -0.1581 *ve* 0.4744*'dır.*

$$8.3989 \cdot t = 1,$$

$$8.3989 \cdot t = -1$$

Son iki denklemden elde edilen t*'ler sırasıyla* 0.1190 *ve* -0.1190*'dır.*

$$\frac{1}{4} + 2.1194 \cdot t = 1,$$
$$\frac{1}{4} + 2.1194 \cdot t = -1$$

Bu iki denklemden elde edilen t*'ler ise sırasıyla* 0.3538 *ve* -0.5897*'dır.*

$$[-0.1581, 0.4744] \cap [-0.119, 0.119] \cap [-0.5897, 0.3538]$$

aralıklarının $[-0.119, 0.119]$ *kesişimi bize sıfıra en yakın* t *değerini verir. Buradan* $t = 0.119$ *ve*

$$x^1 = (0.1235, 1, 0.5023)^T$$

bulunur. 6 *adımdan sonra,*

$$x^6 = (0.906, 0.452, 1)^T$$

iken $\phi(x^6) < 0$ *elde ederiz.*

$$P(x^6) = \begin{pmatrix} 0.906 & 0.452 \\ 0.452 & 1 \end{pmatrix}.$$

P *matrisi,* $A_i^T P + P A_i < 0$ *için ortak pozitif tanımlı çözümdür (*$i = 1, 2$*).*

Ele aldığımız, kutu üzerinde tanımlı (2.22) optimizasyon problemi için birçok örnekte $\phi(x)$ fonksiyonun değerinin bazı adımlarda arttığını gözlemledik. Bunun sebebi kutunun köşe noktalarında fonksiyonun gradiyentinin kutunun dışına yönlenmesidir. Bunu önlemek için birim kutu yüzeyi yerine birim küre yüzeyi üzerinde aynı problemi inceleyelim.

$\phi(x)$ (2.21) fonksiyonu pozitif homojendir (her $\alpha \geq 0$ için $\phi(\alpha x) = \alpha\phi(x)$). Bundan dolayı x vektörü $||x|| = 1$ koşuluna kısıtlanabilir. $||x|| = 1$ kısıtının amacını aşağıdaki önerme gösteriyor.

Önerme 2.4.2. *$S = \{x \in \mathbb{R}^r : \ ||x|| = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_r^2 = 1\}$ birim küreyi göstersin. $f : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ fonksiyonu pozitif homojen ($f(\lambda x) = \lambda f(x), \quad \forall\lambda > 0$) ve $a \in S$ noktasında diferansiyellenebilir olsun. Varsayalım ki $f(a) \geq 0$. ∇f gradiyenti ve $< \cdot, \cdot >$ skaler çarpımı göstersin. O zaman $g = -\nabla\ f(x)|_{x=a}$ iken $< g, a > \leq 0$ olur.*

Kanıt. f pozitif homojen olduğu için a vektörünün yönünde artar:

$$\lambda > 1 \text{ için }, \quad f(\lambda a) = \lambda f(a) \geq f(a).$$

Bu nedenle f' in a noktasındaki a yönündeki yönlü türevi negatif değil:

$$D_a\ f(a) \geq 0.$$

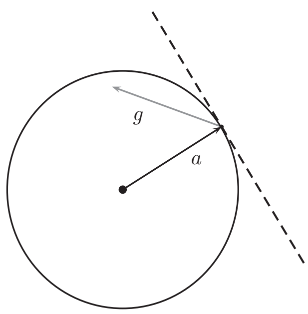
Diğer taraftan

$$D_a\ f(a) = < \nabla f, a >$$

ve

$$\begin{aligned} < \nabla f, a > &\geq 0\ , \\ < -\nabla f, a > &\leq 0\ , \\ < g, a > &\leq 0 \end{aligned}$$

elde edilir. □



Soldaki şekil, önermenin varsayımı altında a noktasındaki eksi gradiyent vektörünün birim yuvarın içine doğru yönlendiğini gösterir.

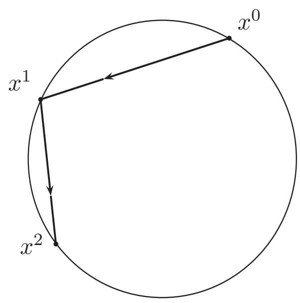
Şimdi birim küre yüzeyi üzerinde tanımlı aşağıdaki optimizasyon problemini ele alalım:

$$\begin{aligned} \phi(x) &\to \min \\ \| x \| &= 1. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Gradiyent algoritması ve Önerme 2.4.2 göz önüne alınarak bu problemin çözümü için aşağıdaki algoritma verilebilir.

Algoritma 2.4.3. 1. Adım: *$x^0 \in S$ vektörü alalım. $\phi(x^0)$' ı hesaplayalım. $\phi(x^0) \geq 0$ ise $l(t) = x^0 - t \cdot \nabla\phi(x)|_{x=x^0}$ doğrusunun S birim küresinin yüzeyini kestiği noktayı bulalım (Şekil 2.1).*

2. Adım: *$\| \, l(t_*) \, \| = 1$ koşulunu sağlayan t_* ($t_* \neq 0$) için $x^1 = x^0 - t_* \cdot \nabla\phi(x)|_{x=x^0}$ vektörünü alalım. $\phi(x^1) < 0$ ise x^1 gereken noktadır. Aksi takdirde $l(t) = x^1 - t \cdot \nabla\phi(x)|_{x=x^1}$ doğrusunun birim kürenin yüzeyini kestiği noktayı bulalım ve prosedürü tekrarlayalım.*



Şekil 2.1. Birim küre yüzeyi üzerinde arama.

Örnek 2.4.4.

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1.6 & -2.5 \\ 2.5 & 1.1 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \; A_3 = \begin{pmatrix} -0.3 & 2 \\ -1 & -1.3 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0.9 & 3.3 \\ -4 & -3.5 \end{pmatrix}$$

Hurwitz kararlı matrisler olmak üzere

$$\dot{x} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}x$$

anahtarlamalı sistemi verilsin. Bu anahtarlamalı sistem için ortak P'nin varlığını araştıralım.

$$Z_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; Z_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; Z_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

taban matrisleri olmak üzere $i = 1, 2, 3$ *için*

$$Q_i = (A_1^T Z_i + Z_i A_1) \oplus (A_2^T Z_i + Z_i A_2) \oplus (A_3^T Z_i + Z_i A_3) \oplus (A_4^T Z_i + Z_i A_4)$$

olarak tanımlayalım. Başlangıç noktasını $x^0 = (0.5, 0, 0.866)^T$ *olarak alalım.*

$$P(x^0) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.866 \end{pmatrix}$$

pozitif tanımlıdır. $\sum_{i=1}^{3} x_i^0 Q_i = 0.5 \cdot Q_1 + 0 \cdot Q_2 + 0.866 \cdot Q_3$ *matrisinin özdeğerleri* -2.260, -3.581, 1.116, 2.129, 1.344, -1.824, -6.506, -0.290 *olup maksimum özdeğeri* 2.129 *ve bu özdeğere karşı gelen birim özvektör*

$$v = (0.238, 0.971, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$$

elde edilir. ϕ *fonksiyonunun* x^0 *noktasındaki gradiyenti*

$$\nabla\phi|_{x=x^0} \;=\; (-1.338, -4.663, 3.232)^T$$

vektörüdür. $x^1 = x^0 - t \cdot \nabla\phi|_{x=x^0}$ *vektörünün üç boyutlu birim küre yüzeyi üzerinde olması koşulundan* $t = 0.1253$ *değeri ve* $x^1 = (0.667, 0.584, 0.460)^T$ *vektörü elde edilir.*

Böyle devam edilirse 4 adımdan sonra, $x^4 = (0.678, 0.388, 0.622)^T$ *iken* $\phi(x^4) < 0$ *elde edilir.*

$$P(x^4) = \begin{pmatrix} 0.678 & 0.388 \\ 0.388 & 0.622 \end{pmatrix}$$

matrisi için $A_1^T P + P A_1 < 0$, $A_2^T P + P A_2 < 0$, $A_3^T P + P A_3 < 0$, $A_4^T P + P A_4 < 0$ *sağlanmaktadır, yani* $P(x^4)$ *ortak pozitif tanımlı çözümdür.*

Örnek 2.4.5.

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 1 \\ 8 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

Hurwitz kararlı matris olmak üzere

$$\dot{x} = Ax$$

sistemi verilsin. Tek matristen oluşan bu sistem için bir $P > 0$ bulalım.

$$Z_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; Z_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; Z_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Z_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; Z_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; Z_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.26}$$

taban matrisleridir. $i = 1, 2, \ldots, 6$ olmak üzere

$$Q_i = (A^T Z_i + Z_i A)$$

olarak tanımlayalım. Başlangıç noktası $x^0 = (6/11, 0, 0, 9/11, 0, 2/11)^T$ alalım.

$$P(x^0) = \begin{pmatrix} 6/11 & 0 & 0 \\ 0 & 9/11 & 0 \\ 0 & 0 & 2/11 \end{pmatrix}$$

pozitif tanımlıdır.

$$\sum_{i=1}^{6} x_i^0 Q_i = \frac{6}{11} \cdot Q_1 + 0 \cdot Q_2 + 0 \cdot Q_3 + \frac{9}{11} \cdot Q_4 + 0 \cdot Q_5 + \frac{2}{11} \cdot Q_6$$

Bu matrisin özdeğerleri $5.542,\ -7.855,\ -1.686$. *Maksimum özdeğeri* 5.542 *olur ve bu özdeğere karşı gelen birim özvektörü $v = (-0.4148, -0.9049, -0.0940)^T$ olarak elde edilir. ϕ fonksiyonunun x^0 noktasındaki gradiyenti*

$$\nabla\phi|_{x=x^0} \;=\; (-3.896, -4.242, 0.853, 9.283, 4.755, 0.394)^T$$

vektörüdür. $x^1 = x^0 - t \cdot \nabla\phi|_{x=x^0}$ vektörünün altı boyutlu birim küre yüzeyi üzerinde olmasını sağlayan t değeri $t = 0.0775$ *olur. O halde yeni nokta*

$$x^1 = (0.8477, 0.3291, -0.0662, 0.0978, -0.3689, 0.1512)^T$$

elde edilir. 5 *adımdan sonra,*

$$x^4 = (0.870, 0.295, -0.196, 0.189, -0.077, 0.273)^T$$

iken $\phi(x^4) < 0$ *olur ve*

$$P(x^4) = \begin{pmatrix} 0.870 & 0.295 & -0.196 \\ 0.295 & 0.189 & -0.077 \\ -0.196 & -0.077 & 0.273 \end{pmatrix}$$

matrisi, $A^T P + PA < 0$ *Lyapunov eşitsizliğinin çözümüdür.*

Örnek 2.4.6. *Örnek (2.3.4)'deki anahtarlamalı sistemi ele alalım.*

$$A_1 = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ -3 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} -8 & -3 & 1 \\ 9 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

Hurwitz kararlı matrisler olmak üzere

$$\dot{x} = \{A_1, A_2\}x$$

anahtarlamalı sistemi verilsin.

$Z_1, Z_2, \ldots, Z_6$ *taban matrisleri bir önceki örnekte alındığı gibidir.*

$$Q_i = (A_1^T Z_i + Z_i A_1) \oplus (A_2^T Z_i + Z_i A_2)$$

olarak tanımlayalım. Başlangıç noktası $x^0 = (6/11, 0, 0, 9/11, 0, 2/11)^T$ *alalım.*

$$P(x^0) = \begin{pmatrix} 6/11 & 0 & 0 \\ 0 & 9/11 & 0 \\ 0 & 0 & 2/11 \end{pmatrix}$$

pozitif tanımlıdır.

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{i=1}^{6} x_i^0 Q_i \quad &= \quad \tfrac{6}{11} \cdot Q_1 + 0 \cdot Q_2 + 0 \cdot Q_3 + \\ &\quad\ \ \tfrac{9}{11} \cdot Q_4 + 0 \cdot Q_5 + \tfrac{2}{11} \cdot Q_6 \end{aligned}$$

matrisinin özdeğerleri

$$5.726, -11.215, -2.147, 0.012, -7.949, -0.790$$

olup maksimum özdeğeri 5.726*'dır, bu özdeğere karşı gelen birim özvektör*

$$v = (0, 0, 0, 0.3784, 0.9147, 0.1414)^T$$

elde edilir. ϕ *fonksiyonunun* x^0 *noktasındaki gradiyenti*

$$\nabla\phi|_{x=x^0} \;=\; (-4.262, -6.338, 1.561, 9.578, 9.103, 1.178)^T$$

olur. $x^1 = x^0 - t \cdot \nabla\phi|_{x=x^0}$ *vektörünün altı boyutlu birim küre yüzeyi üzerinde olması gerekir. Buradan* $t = 0.0483$ *değeri ve*

$$x^1 = [0.7516, 0.3065, -0.0755, 0.3548, -0.4403, 0.1248]^T$$

noktası bulunur. 5 *adımdan sonra ,*

$$x^5 = (0.800, 0.316, -0.167, 0.279, -0.113, 0.375)^T$$

iken $\phi(x^5) < 0$ *elde edilir.*

$$P(x^5) = \begin{pmatrix} 0.800 & 0.316 & -0.167 \\ 0.316 & 0.279 & -0.113 \\ -0.167 & -0.113 & 0.375 \end{pmatrix}$$

matrisi, $A_1^T P + P A_1 < 0$ *ve* $A_2^T P + P A_2 < 0$ *için ortak pozitif tanımlı çözümdür.*

Aynı örneği Kelley'nin kesen düzlemler yöntemi 20 adımda çözüme ulaştırırken, gradiyent yönteminin 5 adımda çözüme ulaştırdığı görülmektedir. Gradiyent yöntemi, Kelley'nin yöntemine göre daha pratiktir.

Örnek 2.4.7.

$$A_1 = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ -6 & -8 & 3 \\ 1 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

Hurwitz kararlı matrisler olmak üzere

$$\dot{x} = \{A_1, A_2, A_3\}x$$

anahtarlamalı sistemi verilsin.

$Z_1, Z_2, \ldots, Z_6$ taban matrisleri olsun ve i, 1' den 6' ya kadar olmak üzere

$$Q_i = (A_1^T Z_i + Z_i A_1) \oplus (A_2^T Z_i + Z_i A_2) \oplus (A_3^T Z_i + Z_i A_3)$$

olarak tanımlayalım. Başlangıç noktası $x^0 = (2/7, 0, 0, 6/7, 0, 3/7)^T$ alalım.

$$P(x^0) = \begin{pmatrix} 2/7 & 0 & 0 \\ 0 & 6/7 & 0 \\ 0 & 0 & 3/7 \end{pmatrix}$$

pozitif tanımlıdır.

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{i=1}^{6} x_i^0 Q_i &= \tfrac{2}{7} \cdot Q_1 + 0 \cdot Q_2 + 0 \cdot Q_3 + \\ & \tfrac{6}{7} \cdot Q_4 + 0 \cdot Q_5 + \tfrac{3}{7} \cdot Q_6 \end{aligned}$$

Bu matrisin özdeğerleri 0.422, -15.484, -5.223, 1.916, -5.803, -1.827, 0.897, -5.323, -3.287 *olup maksimum özdeğeri* 1.916 *ve bu özdeğere karşı gelen birim özvektör*

$$v = (0, 0, 0, 0.476, 0.726, 0.495, 0, 0, 0)^T$$

elde edilir. ϕ fonksiyonunun x^0 noktasındaki gradiyenti

$$\nabla\phi|_{x=x^0} \;=\; (-2.071, -0.592, -4.027, 3.900, -0.193, -1.948)^T$$

vektörüdür. $x^1 = x^0 - t \cdot \nabla\phi|_{x=x^0}$ vektörünün altı boyutlu birim küre yüzeyi üzerinde olması gerekir. Buradan $t = 0.0960$ değeri ve

$$x^1 = (0.4846, 0.0569, 0.3868, 0.4824, 0.0185, 0.6157)^T$$

noktası bulunur.

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{i=1}^{6} x_i^0 Q_i &= 0.4846 \cdot Q_1 + 0.0569 \cdot Q_2 + 0.3868 \cdot Q_3 + \\ & 0.4824 \cdot Q_4 + 0.0185 \cdot Q_5 + 0.6157 \cdot Q_6 \end{aligned}$$

Bu matrisin maksimum özdeğeri 0.607 *olup bu özdeğere karşı gelen birim özvektör*

$$v = (0.9743, -0.0786, 0.2106, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$$

elde edilir. ϕ fonksiyonunun x^1 noktasındaki gradiyenti

$$\nabla\phi|_{x=x^1} \;=\; (-4.8264, 5.3148, 5.1676, -0.3975, 0.5633, 1.3425)^T$$

olur. $x^2 = x^1 - t\cdot\nabla\phi|_{x=x^1}$ *vektörü altı boyutlu birim küre yüzeyi üzerinde olması gerekir. Buradan* $t = 0.015$ *değeri ve*

$$x^2 = (0.5574, -0.0232, 0.3088, 0.4884, 0.0100, 0.5954)^T$$

noktası bulunur. $\phi(x^2) < 0$ *sağlanmaktadır.*

$$P(x^2) = \begin{pmatrix} 0.557 & -0.023 & 0.308 \\ -0.023 & 0.488 & 0.010 \\ 0.308 & 0.010 & 0.595 \end{pmatrix}$$

matrisi, $A_1^T P + PA_1 < 0$, $A_2^T P + PA_2 < 0$ *ve* $A_3^T P + PA_3 < 0$ *eşitsizliklerini sağlamaktadır ve ortak çözümdür.*

Örnek 2.4.8.

$$A_1 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -3 & 0 \\ -5 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

Hurwitz kararlı matrisler olmak üzere

$$\dot{x} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}x$$

anahtarlamalı sistemi verilsin. $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{10}$ *taban matrisleri ve* i*,* 1*'den* 10*'a kadar olmak üzere*

$$Q_i = (A_1^T Z_i + Z_i A_1) \oplus (A_2^T Z_i + Z_i A_2) \oplus (A_3^T Z_i + Z_i A_3) \oplus (A_4^T Z_i + Z_i A_4)$$

olarak tanımlayalım. Başlangıç noktası $x^0 = (1/2, 0, 0, 0, 1/2, 0, 0, 1/2, 0, 1/2)^T$ *alalım.*

$$P(x^0) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

pozitif tanımlıdır.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{10} x_i^0 Q_i &= 1/2\cdot Q_1 + 0\cdot Q_2 + 0\cdot Q_3 + 0\cdot Q_4 + 1/2\cdot Q_5 + \\ & \quad 0\cdot Q_6 + 0\cdot Q_7 + 1/2\cdot Q_8 + 0\cdot Q_9 + 1/2\cdot Q_{10}\end{aligned}$$

Bu matrisin özdeğerleri $0.707,\ -0.707,\ -1,\ 0.066,\ 0.606,\ -2.316,\ -3.355,\ -4,\ 0.249,\ -0.327,\ -1.904,\ -6.016,\ 0.693,\ -0.455,\ -1.667,\ -5.570$ *olup maksimum özdeğeri* 0.707 *ve bu özdeğere karşı gelen birim özvektör*

$$v = (0,0,0,0,-0.5,0.707,0,0.5,0,0,0,0,0,0,0,0)^T$$

elde edilir. Özvektörün girdilerine bakarak en büyük özdeğerin A_2 *matrisine ait olduğunu söylenebilir.* ϕ *fonksiyonunun* x^0 *noktasındaki gradiyenti*

$$\nabla\phi|_{x=x^0} = (-1,-0.085,-3.621,0.707,2.121,5.121,1.914,0,3.621,0.292)^T$$

vektörüdür. $x^1 = x^0 - t\cdot\nabla\phi|_{x=x^0}$ *vektörünün on boyutlu birim küre yüzeyi üzerinde olması gerektiği için* t *değeri* 0.0227 *elde edilir ve*

$$x^1 = (0.522,0.001,0.082,-0.016,0.451,-0.116,-0.043,0.5,-0.082,0.493)^T$$

noktasına ulaşılır. Böyle devam edilirse 86 *adımdan sonra,*

$$x^{86} = (0.724,0.120,-0.115,0.049,0.344,-0.103,0.047,0.438,-0.049,0.343)^T$$

iken $\phi(x^{86}) < 0$ *elde edilir. Yani*

$$P(x^{86}) = \begin{pmatrix} 0.724 & 0.120 & -0.115 & 0.049 \\ 0.120 & 0.344 & -0.103 & 0.047 \\ -0.115 & -0.103 & 0.438 & -0.049 \\ 0.049 & -0.047 & -0.049 & 0.343 \end{pmatrix}$$

matrisi, $A_1^TP+PA_1<0$, $A_2^TP+PA_2<0$, $A_3^TP+PA_3<0$ *ve* $A_4^TP+PA_4<0$ *eşitsizliklerini sağlamaktadır ve ortak çözümdür.*

Aynı örnek, ([13]) deki algoritma ile çözülürse ancak 8394 adımdan sonra olumlu cevap verir.

2.5 Ağırlıklı ortak P yöntemi

A matrisi Hurwitz kararlı olsun. $\mathcal{P}_A(Q)$ lineer dönüşümü şöyle tanımlansın: $\forall Q > 0$ için, $A^T P + PA = -Q$ denkleminin tek çözümü $\mathcal{P}_A(Q) > 0$'dır.

$A_1, A_2, \ldots, A_N$ Hurwitz kararlı matrisler olmak üzere bu matrislerin Lyapunov denklemlerinin ortak $P > 0$ çözümlerini araştıracağız.

$$P_1 = \mathcal{P}_{A_1}(Q_1) > 0,$$

$$P_2 = \mathcal{P}_{A_2}(Q_2) > 0,$$

$$\vdots$$

$$P_N = \mathcal{P}_{A_N}(Q_N) > 0,$$

ve

$$\begin{aligned} l_{11} &= \lambda_{\max}(A_1^T P_1 + P_1 A_1) < 0, \\ l_{22} &= \lambda_{\max}(A_2^T P_2 + P_2 A_2) < 0, \\ &\vdots \\ l_{NN} &= \lambda_{\max}(A_N^T P_N + P_N A_N) < 0 \end{aligned} \tag{2.27}$$

olsun. Daha genel olarak girdileri

$$l_{ij} = \lambda_{\max}(A_i^T P_j + P_j A_i) \quad i, j \in \{1, 2, \ldots, N\}$$

olan

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & \ldots & l_{1N} \\ l_{21} & l_{22} & \ldots & l_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{N1} & l_{N2} & \ldots & l_{NN} \end{pmatrix} \tag{2.28}$$

$N \times N$ boyutlu kare matrisini tanımlayalım.

$$S = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N)^T, \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N = 1, \alpha_i \geq 0\}$$

konveks kompakt küme olmak üzere $L(S) = \{L\alpha : \alpha \in S\}$ kümesi de konveks kompakt bir kümedir. $K = \{(x_1, x_2, \ldots, x_N)^T : x_i < 0, i = 1, 2, \ldots, N\}$ kümesi N- boyutlu uzayda tüm koordinatları negatif olan açık bölgeyi ifade eder.

Teorem 2.5.1. *Eğer* $L(S) \cap K \neq 0$ *ise ortak* P *vardır ve* $P = \alpha_1^* P_1 + \cdots + \alpha_N^* P_N$ *dir. Burada* $(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_N^*)$ *vektörü kesişimin boş olmayışından ortaya çıkan vektördür.*

Kanıt. $L(S) \cap K \neq 0$ olsun. O zaman en azından bir $(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_N^*)^T$ vardır öyleki

$$\begin{cases} l_{11}\alpha_1^* + l_{12}\alpha_2^* + \ldots l_{1N}\alpha_N^* < 0, \\ l_{21}\alpha_1^* + l_{22}\alpha_2^* + \ldots l_{2N}\alpha_N^* < 0, \\ \vdots, \\ l_{N1}\alpha_1^* + l_{N2}\alpha_2^* + \ldots l_{NN}\alpha_N^* < 0, \\ \alpha_1^* \geq 0, \alpha_2^* \geq 0, \ldots \alpha_N^* \geq 0, \\ \alpha_1^* + \alpha_2^* + \cdots + \alpha_N^* = 1, \end{cases} \tag{2.29}$$

eşitsizlikleri sağlanmaktadır.

$i = 1, 2, \ldots, N$ olmak üzere ve P matrisi teoremdeki gibi tanımlı olmak üzere

$$\begin{aligned} \lambda_{\max}(A_i^T P + P A_i) &= \lambda_{max}(\alpha_1^*(A_i^T P_1 + P_1 A_i) + \alpha_2^*(A_i^T P_2 + P_2 A_i) + \cdots + \\ &\quad \alpha_N^*(A_i^T P_N + P_N A_i)) \\ &\leq \alpha_1{}^* \lambda_{max}(A_i^T P_1 + P_1 A_i) + \alpha_2{}^* \lambda_{max}(A_i^T P_2 + P_2 A_i) + \\ &\quad \cdots + \alpha_N{}^* \lambda_{max}(A_i^T P_N + P_N A_i) \\ &= l_{i1}\alpha_1{}^* + l_{i2}\alpha_2{}^* + \cdots + l_{iN}\alpha_N{}^* < 0 \end{aligned}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Burada $P \to \lambda_{\max}(A_i^T P + P A_i)$ fonksiyonunun konveksliği ve (2.29) kullanıldı. Dolayısıyla $P = \alpha_1^* P_1 + \cdots + \alpha_N^* P_N$ matrisi ortak P dir. □

Şimdi

$$\tilde{K} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_N)^T : x_i \leq -1,\ i = 1, 2, \ldots, N\}$$

ve

$$\tilde{S} = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N)^T, \alpha_i \geq 0\}$$

kümelerini tanımlayalım.

Teorem 2.5.2. *Eğer* $L(\tilde{S}) \cap \tilde{K} \neq \emptyset$ *ise ortak* P *vardır öyleki* $P = \alpha_1^* P_1 + \cdots + \alpha_N^* P_N$*, burada* $(\alpha_1{}^*, \alpha_2{}^*, \ldots, \alpha_N{}^*)$ *önceki teoremdeki gibi tanımlıdır.*

Kanıt. $L(\tilde{S}) \cap \tilde{K} \neq \emptyset$ olsun. O zaman en azından bir $({\alpha_1}^*, {\alpha_2}^*, \ldots, {\alpha_N}^*)^T \in \tilde{S}$ vardır öyleki

$$\begin{cases} l_{11}{\alpha_1}^* + l_{12}{\alpha_2}^* + \ldots l_{1N}{\alpha_N}^* \leq -1, \\ l_{21}{\alpha_1}^* + l_{22}{\alpha_2}^* + \ldots l_{2N}{\alpha_N}^* \leq -1, \\ \vdots, \\ l_{N1}{\alpha_1}^* + l_{N2}{\alpha_2}^* + \ldots l_{NN}{\alpha_N}^* \leq -1, \\ {\alpha_1}^* \geq 0, {\alpha_2}^* \geq 0, \ldots {\alpha_N}^* \geq 0, \end{cases} \tag{2.30}$$

eşitsizlikleri sağlanmaktadır.

$i = 1, 2, \ldots, N$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \lambda_{\max}(A_i^T P + P A_i) &= \lambda_{max}(\alpha_1^*(A_i^T P_1 + P_1 A_i) + \alpha_2^*(A_i^T P_2 + P_2 A_i) + \cdots + \\ &\quad \alpha_N^*(A_i^T P_N + P_N A_i)) \\ &\leq {\alpha_1}^* \lambda_{max}(A_i^T P_1 + P_1 A_i) + {\alpha_2}^* \lambda_{max}(A_i^T P_2 + P_2 A_i) + \\ &\quad \cdots + {\alpha_N}^* \lambda_{max}(A_i^T P_N + P_N A_i) \\ &= l_{i1}{\alpha_1}^* + l_{i2}{\alpha_2}^* + \ldots l_{iN}{\alpha_N}^* \leq -1 \end{aligned}$$

denklemleri sağlanır. Buradan $P = \alpha_1^* P_1 + \cdots + \alpha_N^* P_N$ matrisi bir ortak P'dir. □

Yardımcı Teorem 2.5.3. $L(\tilde{S}) \cap \tilde{K} \neq \emptyset \Leftrightarrow L(S) \cap K \neq \emptyset$

Kanıt. $(\Rightarrow)$ $L(\tilde{S}) \cap \tilde{K} \neq \emptyset$ ise en azından bir $\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_N^*)^T \in \tilde{S}$ vardır ki $L\alpha^* \in \tilde{K}$.

$\beta_i^* = \frac{\alpha_i^*}{\sum_{i=1}^N \alpha_i^*}$ tanımlayalım. O zaman $\beta^* = (\beta_1^*, \ldots, \beta_N^*)^T \in S$ ve $L\beta^* \in K$. Yani $L(S) \cap K \neq \emptyset$.

$(\Leftarrow)$ $L(S) \cap K \neq \emptyset$ olsun. En azından bir $\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_N^*)^T \in S$ vardır ki $L\alpha^* \in K$. α^* vektörünü büyük öyle pozitif k sayısıyla çarpalım ki $\beta^* = k\alpha^*$ vektörü için $L\beta^* \in \tilde{K}$ olsun. Dolayısıyla $L(\tilde{S}) \cap \tilde{K} \neq \emptyset$. □

Bu lemmadan dolayı (2.29) eşitsizlikleri yerine LP yöntemlerinin uygulanmasının daha verimli olacağı aşağıdaki (2.31) problemi ele alınır.

$$\begin{aligned} &\max(-x_1 - x_2 - \cdots - x_N) \\ &l_{11}x_1 + l_{12}x_2 + \ldots l_{1N}x_N \leq -1 \\ &\vdots \\ &l_{N1}x_1 + l_{N2}x_2 + \ldots l_{NN}x_N \leq -1 \\ &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots x_N \geq 0 \end{aligned} \tag{2.31}$$

Şimdi bir kaç örnek üzerinde (2.31) LP probleminin çözümlerini araştıralım.

Örnek 2.5.4. *Örnek (2.4.7)'de aldığımız*

$$A_1 = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ -6 & -8 & 3 \\ 1 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

Hurwitz kararlı matrislerdir. Herhangi bir $Q = Q^T > 0$ matrisi verildiğinde $A_1^T P_1 + P_1 A_1 = -Q$, $A_2^T P_2 + P_2 A_2 = -Q$, $A_3^T P_3 + P_3 A_3 = -Q$ Lyapunov eşitliklerini sağlayan P_1, P_2, P_3 matrislerinin tek olarak var olduğunu bilinir. Bu matrisler $P_i = \int_0^\infty e^{A_i^T t} Q e^{A_i t} dt$ biçimindedir.

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olsun.

$P_1 = \int_0^\infty e^{A_1^T t} \cdot Q \cdot e^{A_1 t} dt$ *eşitliğinden*

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0.4626 & -0.0582 & 0.2510 \\ -0.0582 & 0.3544 & 0.0340 \\ 0.2510 & 0.0340 & 0.2730 \end{pmatrix}$$

matrisini,

$P_2 = \int_0^\infty e^{A_2^T t} \cdot Q \cdot e^{A_2 t} dt$ *eşitliğinden*

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0.3887 & 0.2805 & 0.2135 \\ 0.2805 & 0.4202 & 0.1801 \\ 0.2135 & 0.1801 & 0.2730 \end{pmatrix}$$

matrisini,

$P_3 = \int_0^\infty e^{A_3^T t} \cdot Q \cdot e^{A_3 t} dt$ *eşitliğinden*

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0.2114 & 0.0570 & 0.0536 \\ 0.0570 & 0.0981 & 0.0451 \\ 0.0536 & 0.0451 & 0.1061 \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir. (2.28) matrisine göre hesaplınırsa

$$L = \begin{pmatrix} -0.9999 & 1.5712 & 0.1967 \\ -0.1175 & -0.9999 & -0.1654 \\ 0.7059 & -0.7289 & -0.9999 \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir. $\tilde{S} = \{(x_1, x_2, x_3)^T, x_i \geq 0\}$ *ve* $L(\tilde{S}) = \{Lx : x \in \tilde{S}\}$ *olmak üzere*

$$Lx = \begin{pmatrix} -0.9999x_1 + 1.5712x_2 + 0.1967x_3 \\ -0.1175x_1 - 0.9999x_2 - 0.1654x_3 \\ 0.7059x_1 - 0.7289x_2 - 0.9999x_3 \end{pmatrix}$$

sütun matrisi olur.

$$\begin{gathered} \max(-x_1 - x_2 - x_3) \\ -0.9999x_1 + 1.5712x_2 + 0.1967x_3 \leq -1 \\ -0.1175x_1 - 0.9999x_2 - 0.1654x_3 \leq -1 \\ 0.7059x_1 - 0.7289x_2 - 0.9999x_3 \leq -1 \\ x_i \geq 0, \quad i \in \{1, 2, 3\} \end{gathered}$$

lineer programlama problemini çözülürse ve amaç fonksiyonunu maksimize eden $x_1 = 1.92051,\ x_2 = 0,\ x_3 = 4.67969$ *değerleri*

$$P^* = x_1 P_1 + x_2 P_2 + x_3 P_3$$

denkleminde yerine konulursa

$$P^* = \begin{pmatrix} 1.8778 & 0.1549 & 0.7333 \\ 0.1549 & 1.1400 & 0.2766 \\ 0.7333 & 0.2766 & 1.0209 \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir.

P^* *matrisi,* $A_1^T P + PA_1 < 0$*,* $A_2^T P + PA_2 < 0$ *ve* $A_3^T P + PA_3 < 0$ *için ortak pozitif tanımlı çözümdür.*

Örnek 2.5.5.

$$A_1 = \begin{pmatrix} -6 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & -5 & -5 & -4 \\ -1 & 6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 5 & -4 \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 4 & 3 \\ -1 & -5 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 1 & -7 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -6 & -4 & -5 & 1 \\ 1 & -4 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & -4 & 2 \\ 4 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \ A_4 = \begin{pmatrix} -5 & 5 & -1 & -4 \\ -5 & -9 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & -5 & -5 \\ -5 & -5 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Hurwitz kararlı matrislerdir.

Herhangi bir $Q_1 = Q_1^T > 0$ *matrisi verildiğinde* $A_1^T P_1 + P_1 A_1 = -Q_1$ *Lyapunov eşitliğini sağlayan* P_1*,*

Herhangi bir $Q_2 = Q_2^T > 0$ *matrisi verildiğinde* $A_2^T P_2 + P_2 A_2 = -Q_2$ *Lyapunov eşitliğini sağlayan* P_2*,*

Herhangi bir $Q_3 = Q_3^T > 0$ *matrisi verildiğinde* $A_3^T P_3 + P_3 A_3 = -Q_3$ *Lyapunov eşitliğini sağlayan* P_3*,*

Herhangi bir $Q_4 = Q_4^T > 0$ *matrisi verildiğinde* $A_4^T P_4 + P_4 A_4 = -Q_4$ *Lyapunov eşitliğini sağlayan* P_4*,*

matrislerinin tek olarak var olduğunu bilinir. Önceki örnekte her matris için oluşan Lyapunov denkleminde bir tek Q *matrisi kullanıldı, bu örnekte ise* Q *matrisleri her bir* A_i *çin farklıdır.*

Bu matrisler $P_i = \int_0^\infty e^{A_i^T t} Q_i e^{A_i t} dt$ *biçimindedir.*

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \; Q_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$Q_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \; Q_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olsun.

$P_1 = \int_0^\infty e^{A_1^T t} \cdot Q_1 \cdot e^{A_1 t} dt$ *eşitliğinden*

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0.459 & -0.068 & -0.332 & -0.330 \\ -0.068 & 0.378 & 0.158 & 0.094 \\ -0.332 & 0.158 & 0.702 & 0.380 \\ -0.330 & 0.094 & 0.380 & 0.486 \end{pmatrix}$$

matrisi,

$P_2 = \int_0^\infty e^{A_2^T t} \cdot Q_2 \cdot e^{A_2 t} dt$ *eşitliğinden*

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0.223 & -0.087 & 0.148 & 0.171 \\ -0.087 & 0.262 & -0.144 & -0.080 \\ 0.148 & -0.144 & 0.792 & 0.424 \\ 0.171 & -0.080 & 0.424 & 0.409 \end{pmatrix}$$

matrisi,

$P_3 = \int_0^\infty e^{A_3^T t} \cdot Q_3 \cdot e^{A_3 t} dt$ *eşitliğinden*

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0.530 & -0.431 & -0.736 & 0.101 \\ -0.431 & 0.935 & 0.935 & 0.077 \\ -0.736 & 0.935 & 1.607 & 0.061 \\ 0.101 & 0.077 & 0.061 & 0.381 \end{pmatrix}$$

matrisi,

$P_4 = \int_0^\infty e^{A_4^T t} \cdot Q_4 \cdot e^{A_4 t} dt$ *eşitliğinden*

$$P_4 = \begin{pmatrix} 0.121 & 0.036 & -0.040 & -0.066 \\ 0.036 & 0.111 & 0.008 & -0.057 \\ -0.040 & 0.008 & 0.134 & 0.022 \\ -0.066 & -0.057 & 0.022 & 0.140 \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir. (2.28) matrisine göre hesaplanırsa

$$L = \begin{pmatrix} -1 & 5.151 & 0.332 & 0.798 \\ -0.047 & -0.585 & 0.355 & 0.102 \\ 0.140 & 0.919 & -1 & 0.014 \\ 0.002 & 1.342 & 0.360 & -0.999 \end{pmatrix}$$

matrisi olur. $\tilde{S} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T, x_i \geq 0\}$ *ve* $L(\tilde{S}) = \{Lx : x \in \tilde{S}\}$ *matrisi olmak üzere*

$$Lx = \begin{pmatrix} -x_1 + 5.151x_2 + 0.332x_3 + 0.798x_4 \\ -0.047x_1 - 0.585x_2 + 0.355x_3 + 0.102x_4 \\ 0.140x_1 + 0.919x_2 - x_3 + 0.014x_4 \\ 0.002x_1 + 1.342x_2 + 0.360x_3 - 0.999x_4 \end{pmatrix}$$

sütun matrisidir.

$$\begin{gathered} \max(-x_1 - x_2 - x_3 - x_4) \\ -x_1 + 5.151x_2 + 0.332x_3 + 0.798x_4 \leq -1 \\ -0.047x_1 - 0.585x_2 + 0.355x_3 + 0.102x_4 \leq -1 \\ 0.140x_1 + 0.919x_2 - x_3 + 0.014x_4 \leq -1 \\ 0.002x_1 + 1.342x_2 + 0.360x_3 - 0.999x_4 \leq -1 \\ x_i \geq 0, \quad i \in \{1, 2, 3, 4\} \end{gathered}$$

LP problemi çözülürse ve amaç fonksiyonunu maksimize eden $x_1 = 765.018$, $x_2 = 101.873$, $x_3 = 205.700$, $x_4 = 213.954$ *değerleri*

$$P^* = x_1 P_1 + x_2 P_2 + x_3 P_3 + x_4 P_4$$

denkleminde yerine konulursa

$$P^* = \begin{pmatrix} 509.370 & -142.390 & -399.541 & -229.109 \\ -142.390 & 532.382 & 301.071 & 67.481 \\ -399.541 & 301.071 & 977.343 & 351.358 \\ -229.109 & 67.481 & 351.358 & 522.908 \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir.

P^* *matrisi,* $A_1^T P + PA_1 < 0$, $A_2^T P + PA_2 < 0$, $A_3^T P + PA_3 < 0$ *ve* $A_4^T P + PA_4 < 0$ *için ortak pozitif tanımlı çözümdür.*

Örnek 2.5.6. *Şimdi aynı örneği tekrardan ele alalım.*

$$A_1 = \begin{pmatrix} -6 & 5 & 0 & -4 \\ 1 & -5 & -5 & -4 \\ -1 & 6 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 5 & -4 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 4 & 3 \\ -1 & -5 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 1 & -7 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -6 & -4 & -5 & 1 \\ 1 & -4 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & -4 & 2 \\ 4 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} -5 & 5 & -1 & -4 \\ -5 & -9 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & -5 & -5 \\ -5 & -5 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Hurwitz kararlı matrislerine bağlı

$$\dot{x} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}x$$

anahtarlamalı sistemi için önceki çözümde bahsedilen P_1, P_2, P_3 *ve* P_4 *matrisleri yerine Liberzon-Tempo yönteminin ara adımlarında ortaya çıkan matrisleri kullanılır. Liberzon-Tempo ([13]) yöntemi'nin verdiği* P *matrislerinden* 7., 8., 9. *ve* 10. *adımdaki* P*'leri alarak ağırlıklı ortak* P *bulma yöntemini uygulayalım.*

$$P_7 = \begin{pmatrix} 0.3095 & 0.0914 & -0.1259 & -0.2828 \\ 0.0914 & 1.6415 & 0.2156 & -0.1641 \\ -0.1259 & 0.2156 & 2.5156 & 0.4543 \\ -0.2828 & -0.1641 & 0.4543 & 1.3340 \end{pmatrix},$$

$$P_8 = \begin{pmatrix} 1.3206 & 0.3579 & -0.2855 & -0.1128 \\ 0.3579 & 1.4524 & 0.2423 & -0.3433 \\ -0.2855 & 0.2423 & 2.5226 & 0.4868 \\ -0.1128 & -0.3433 & 0.4868 & 1.1692 \end{pmatrix},$$

$$P_9 = \begin{pmatrix} 1.4081 & -0.1798 & -0.3093 & -0.1321 \\ -0.1798 & 1.6704 & 0.6095 & 0.4498 \\ -0.3093 & 0.6095 & 2.5133 & 0.4439 \\ -0.1321 & 0.4498 & 0.4439 & 1.0264 \end{pmatrix},$$

$$P_{10} = \begin{pmatrix} 0.9115 & -0.3581 & -0.6990 & 0.0572 \\ -0.3581 & 1.9437 & 0.2833 & 0.0596 \\ -0.6990 & 0.2833 & 2.3102 & 0.8456 \\ 0.0572 & 0.0596 & 0.8456 & 1.5768 \end{pmatrix}$$

pozitif tanımlı matrislerdir. Girdileri

$$l_{ij} = \lambda_{\max}(A_i^T P_j + P_j A_i) \quad i \in \{1,2,3,4\}, j \in \{7,8,9,10\}$$

olan

$$L = \begin{pmatrix} 2.3042 & 3.0517 & 1.2308 & -2.7220 \\ 0.0206 & -0.4543 & 1.4447 & -1.9496 \\ 1.3876 & 0.0912 & -0.8479 & 0.4626 \\ 0.9580 & -4.6321 & 3.5132 & 0.6447 \end{pmatrix}$$

matrisi oluşturulur. Buradan

$$Lx = \begin{pmatrix} 2.3042x_1 + 3.0517x_2 + 1.2308x_3 - 2.7220x_4 \\ 0.0206x_1 - 0.4543x_2 + 1.4447x_3 - 1.9496x_4 \\ 1.3876x_1 + 0.0912x_2 - 0.8479x_3 + 0.4626x_4 \\ 0.9580x_1 - 4.6321x_2 + 3.5132x_3 + 0.6477x_4 \end{pmatrix}$$

sütun matrisi elde edilir ve

$$\max(-x_1 - x_2 - x_3 - x_4)$$
$$2.3042x_1 + 3.0517x_2 + 1.2308x_3 - 2.7220x_4 \leq -1$$
$$0.0206x_1 - 0.4543x_2 + 1.4447x_3 - 1.9496x_4 \leq -1$$
$$1.3876x_1 + 0.0912x_2 - 0.8479x_3 + 0.4626x_4 \leq -1$$
$$0.9580x_1 - 4.6321x_2 + 3.5132x_3 + 0.6477x_4 \leq -1$$
$$x_i \geq 0, \quad i \in \{1, 2, 3, 4\}$$

LP problemi çözülür. Buradan amaç fonksiyonunu maksimize eden $x_1 = 0$, $x_2 = 29.7089$, $x_3 = 30.2001$ *ve* $x_4 = 47.3297$ *değerleri elde edilir ve bu değerler*

$$P^* = x_1 P_1 + x_2 P_2 + x_3 P_3 + x_4 P_4$$

denkleminde yerine konulursa

$$P^* = \begin{pmatrix} 124.9040 & -11.7498 & -50.9109 & -4.6359 \\ -11.7498 & 185.5921 & 39.0194 & 6.2082 \\ -50.9109 & 39.0194 & 260.1918 & 67.8976 \\ -4.6359 & 6.2082 & 67.8976 & 140.3675 \end{pmatrix}$$

olur. P^* *matrisi,* $A_1^T P + P A_1 < 0$, $A_2^T P + P A_2 < 0$, $A_3^T P + P A_3 < 0$ *ve* $A_4^T P + P A_4 < 0$ *için ortak pozitif tanımlı çözümdür.*

Bundan sonraki teorem ortak P'nin varlığı durumunda onun bir ağırlıktan elde edilebileceğini göstermektedir.

Teorem 2.5.7. *Eğer ortak* P *var ise öyle* $P_1 = \mathcal{P}_{A_1}(Q_1), P_2 = \mathcal{P}_{A_2}(Q_2), \ldots, P_N = \mathcal{P}_{A_N}(Q_N)$, *öyle* $({\alpha_1}^*, {\alpha_2}^*, \ldots, {\alpha_N}^*) \in S$ *vardır ki* $P = {\alpha_1}^* P_1 + {\alpha_2}^* P_2 + \cdots + {\alpha_N}^* P_N$.

Yani ortak P *var ise bu matris* $A_1, A_2, \ldots, A_N$*' lerin Lyapunov denklemlerinin çözümlerinin ağırlıklı toplamıdır.*

Kanıt. Ortak P var ise $i = 1, 2, \ldots, N$ olmak üzere $A_i^T P + P A_i = -Q_i$ eşitlikleri sağlanır. Bu ise her $i = 1, 2, \ldots, N$ için $P = \mathcal{P}_i(Q_i)$ eşitliğini vermektedir. Buradan

$$\begin{aligned} P &= \tfrac{1}{N}\mathcal{P}_1(Q_1) + \cdots + \tfrac{1}{N}\mathcal{P}_N(Q_N) \\ &= \tfrac{1}{N}P_1 + \cdots + \tfrac{1}{N}P_N \end{aligned}$$

elde edilmektedir. □

2.6 Gradiyent yönteminin ağırlık katılarak uygulanması

$n \times n$ boyutlu $A_1, A_2, \ldots, A_N$ Hurwitz kararlı matrisleri verilsin. $Z_1, Z_2, \ldots, Z_r$ $(r = \frac{n(n+1)}{2})$ simetrik taban matrisleri olmak üzere

$$Q_i = \left(A_1^T Z_i + Z_i A_1\right) \oplus \cdots \oplus \left(A_N^T Z_i + Z_i A_N\right),$$

iken $\phi(x)$ fonksiyonunu

$$\phi(x) = \phi(x_1, \ldots, x_r) = \lambda_{\max}\left(\sum_{i=1}^{r} x_i Q_i\right)$$

olarak ifade etmiştik. Burada

$$\sum_{i=1}^{r} x_i Q_i = \begin{pmatrix} A_1^T P(x) + P(x)A_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_2^T P(x) + P(x)A_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & A_N^T P(x) + P(x)A_N \end{pmatrix}$$

blok köşegen matristir.

Birim küre yüzeyi üzerinde tanımlı (2.25) optimizasyon problemini ele alalım:

$$\phi(x) \to \min$$
$$\| x \| = 1.$$

u vektörü, $\sum_{i=1}^{r} a_i Q_i$ matrisinin maksimum özdeğerine karşı gelen birim özvektör olmak üzere, $\phi(x)$ in a noktasındaki gradiyent vektörü

$$\nabla\phi(x)|_{x=a} = \left(u^T Q_1 u, u^T Q_2 u, \ldots, u^T Q_r u\right) \tag{2.32}$$

olarak bulunur ([4]).

$x^0 \in \mathbb{R}^n$, $\| x_0 \| = 1$ başlangıç vektörünü alalım. Gradiyent algoritması ve ağırlıklı ortak P yöntemini göz önüne alınarak bu problemin çözümü için aşağıdaki algoritma verilebilir.

Algoritma 2.6.1. 1. Adım: *x^k'ya karşılık gelen $\phi(x^k)$'ı hesaplayalım. Eğer $\phi(x^k) < 0$ ise x^k gereken noktadır. Aksi takdirde bir sonraki adıma geçelim.*

2. Adım: *$\phi(x^k) \geq 0$ ise L matrisinin 2. sütunundaki sayıları 1. sütuna, 3. sütunundaki sayıları 2. sütuna, ..., N. sütunundaki sayıları $(N-1)$. sütuna öteleyelim. x^k' a karşılık gelen P_k matrisi için L matrisinin N. sütunu*

$$l_{iN} = \lambda_{\max}(A_i^T P_k + P_k A_i)$$

şeklinde oluşturalım ve bir sonraki adıma geçelim (İlk N adımda L matrisinin sırasıyla $1, 2, \ldots, N$ sütunları benzer biçimde oluşturulur).

3. Adım: *(2.31)'de verilen LP probleminin çözümü yok ise bir sonraki adıma geçelim.*

Eğer varsa problemin optimal çözümünü veren nokta $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_N^*)$ ise $P^* = x_1^* P_{k-N+1} + \cdots + x_{N-1} P_{k-1} + x_N P_k$ ortak P'dir.

4. Adım: *u vektörü $\phi(x^k)$ fonksiyonuna karşılık gelen birim özvektör olmak üzere $\nabla\phi(x)|_{x=x^k}$ vektörü hesaplayalım, $l(t) = x^k - t \cdot \nabla\phi(x)|_{x=x^k}$ doğrusunun birim küre yüzeyini kestiği noktayı bulalım. $\| l(t_*) \| = 1$ koşulunu sağlayan t_* $(t_* \neq 0)$ için $x^{k+1} = x^k - t_* \cdot \nabla\phi(x)|_{x=x^k}$ vektörünü alalım ve prosedürü tekrarlayalım.*

Örnek (2.4.4)'de aldığımız anahtarlamalı sistemi bu yöntemle tekrar ele alalım.

Örnek 2.6.2.

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1.6 & -2.5 \\ 2.5 & 1.1 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \; A_3 = \begin{pmatrix} -0.3 & 2 \\ -1 & -1.3 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0.9 & 3.3 \\ -4 & -3.5 \end{pmatrix}$$

Hurwitz kararlı matrisler olmak üzere

$$\dot{x} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}x$$

anahtarlamalı sistemi verilsin.

$x^0 = (0.2, 0, 0.9797)$ *olsun. O halde*

$$P_0 = P(x^0) = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.9797 \end{pmatrix}$$

pozitif tanımlı matristir.

$$Z_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; Z_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; Z_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

taban matrisleri olmak üzere

$$Q_i = \left(A_1^T Z_i + Z_i A_1\right) \oplus \cdots \oplus \left(A_4^T Z_i + Z_i A_4\right),$$

iken $\phi(x^0) = 3.1565$ *olur. L matrisinin ilk sütunu*

$$l_{11} = 3.1565,$$

$$l_{21} = 0.9042,$$

$$l_{31} = 0.0113,$$

$$l_{41} = 1.6137$$

olacak şekilde elde edilir. $\phi(x^0)$*'a karşılık gelen birim özvektör*

$$u = (0.4567, 0.8895, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$$

olmak üzere $\nabla\phi(x)|_{x=x^0} = (-2.6994, -3.3198, 3.7726)^T$ *elde edilir.*

$$x^1 = x^0 - t \cdot \nabla\phi(x)|_{x=x^0}$$

vektörünün birim küre yüzeyi üzerinde olmasını sağlayan $t = 0.1940$ *olur. Böylece*

$$x^1 = (0.7236, 0.6440, 0.2478)^T$$

noktasına ulaşılır. $\phi(x^1) = 2.5277$ *olup L matrisinin ikinci sütunu elde edilir:*

$$l_{12} = 1.4574,$$

$$l_{22} = 1.6191,$$

$$l_{32} = 1.9395,$$

$$l_{42} = 2.5277.$$

$\phi(x^1)$'e karşılık gelen birim özvektör

$$u = (0, 0, 0, 0, -0.0435, 0.9990, 0, 0)^T$$

olmak üzere $\nabla\phi(x)|_{x=x^1} = (-0.2835, 6.7984, -6.6388)^T$ *elde edilir.* $t = 0.0559$ *olup*

$$x^2 = (0.7395, 0.2637, 0.6192)^T$$

noktasına ulaşılır. $\phi(x^2) = 0.4244$ *olup* L *matrisinin ücüncü sütunu elde edilir:*

$$l_{13} = 0.1942,$$

$$l_{23} = 0.4244,$$

$$l_{33} = -0.2783,$$

$$l_{43} = -0.5265.$$

$\phi(x^2)$'e karşılık gelen birim özvektör

$$u = (0, 0, 0.9999, -0.1253, 0, 0, 0, 0)^T$$

olmak üzere $\nabla\phi(x)|_{x=x^2} = (1.9495, -3.9736, 0.0494)^T$ *olur.* $t = 0.0433$ *olup*

$$x^3 = (0.6551, 0.4358, 0.6171)^T$$

elde edilir. $\phi(x^3) = 0.1808$ *olup* L *matrisinin dördüncü sütunu da elde edilerek,* L *matrisi*

$$L = \begin{pmatrix} 3.1565 & 1.4574 & 0.1942 & 0.1808 \\ 0.9042 & 1.6191 & 0.4244 & -0.1908 \\ 0.0113 & 1.9395 & -0.2783 & 0.1391 \\ 1.6137 & 2.5277 & -0.5265 & -0.3719 \end{pmatrix} \quad \textit{oluşturulur.}$$

Böylece gradiyent yönteminin ilk 4 adımı (matrislerin sayısı kadar) kullanılarak L *matrisi oluşturuldu. Buradan*

$$Lx = \begin{pmatrix} 3.1565x_1 + 1.4574x_2 + 0.1942x_3 + 0.1808x_4 \\ 0.9042x_1 + 1.6191x_2 + 0.4244x_3 - 0.1908x_4 \\ 0.0113x_1 + 1.9395x_2 - 0.2783x_3 + 0.1391x_4 \\ 1.6137x_1 + 2.5277x_2 - 0.5265x_3 - 0.3719x_4 \end{pmatrix}$$

sütun matrisi elde edilir ve

$$\begin{gathered}\max(-x_1 - x_2 - x_3 - x_4)\\ 3.1565x_1 + 1.4574x_2 + 0.1942x_3 + 0.1808x_4 \leq -1\\ 0.9042x_1 + 1.6191x_2 + 0.4244x_3 - 0.1908x_4 \leq -1\\ 0.0113x_1 + 1.9395x_2 - 0.2783x_3 + 0.1391x_4 \leq -1\\ 1.6137x_1 + 2.5277x_2 - 0.5265x_3 - 0.3719x_4 \leq -1\\ x_i \geq 0, \quad i \in \{1,2,3,4\}\end{gathered}$$

LP problemini çözülür. Çözüm kümesi boştan farklı olup problemin optimal çözümünü veren nokta $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2.4427$, $x_4 = 15.5762$ *elde edilir.*

$$P^* = 0 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2 + 2.4427 \cdot P_3 + 15.5762 \cdot P_4$$

olmak üzere

$$P^* = \begin{pmatrix} 12.1691 & 6.7808 \\ 6.7808 & 11.4193 \end{pmatrix}$$

matrisi $A_1^T P + PA_1 < 0$, $A_2^T P + PA_2 < 0$, $A_3^T P + PA_3 < 0$ *ve* $A_4^T P + PA_4 < 0$ *için ortak pozitif tanımlı çözümdür.*

Örnek 2.6.3.

$$A_1 = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 8 \\ 4 & -6 & 1 \\ 2 & -3 & -7 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} -7 & -4 & -2 \\ -7 & -6 & 7 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix}, \; A_3 = \begin{pmatrix} -25 & 5 & 12 \\ -8 & 3 & -2 \\ -9 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

Hurwitz kararlı matrisler olmak üzere

$$\dot{x} = \{A_1, A_2, A_3\}x$$

anahtarlamalı sistemi verilsin.

$x^0 = (1/\sqrt{3}, 0, 0, 1/\sqrt{3}, 0, 1/\sqrt{3})$ *olsun. O halde*

$$P_0 = P(x^0) = \begin{pmatrix} 0.5773 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5773 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5773 \end{pmatrix}$$

pozitif tanımlı matristir.

$Z_1, Z_2, \ldots, Z_6$ *taban matrisleri olsun ve* i, 1*'den* 6*'ya kadar olmak üzere*

$$Q_i = \left(A_1^T Z_i + Z_i A_1\right) \oplus \left(A_2^T Z_i + Z_i A_2\right) \oplus \left(A_3^T Z_i + Z_i A_3\right),$$

iken $\phi(x^0) = 4.542$ *olur.* L *matrisinin ilk sütunu*

$$l_{11} = 0.6469,$$

$$l_{21} = -0.7180,$$

$$l_{31} = 4.5420$$

elde edilir. $\phi(x^0)$*'a karşılık gelen birim özvektör*

$$u = (0, 0, 0, 0, 0, 0, -0.0315, 0.9424, 0.3329)^T$$

olmak üzere $\nabla\phi(x)|_{x=x^0} = (-0.6001, 17.7485, 5.9529, 4.55, 12.6947, 3.9172)^T$ *olur.* $x^1 = x^0 - t \cdot \nabla\phi(x)|_{x=x^0}$ *vektörünün birim küre yüzeyi üzerinde olmasını sağlayan* t *değeri* $t = 0.0165$ *elde edilir. Böylece*

$$x^1 = (0.5872, -0.2942, -0.0986, 0.5019, -0.2104, 0.5124)^T$$

noktasına ulaşılır. $\phi(x^1) = 1.3747$ *olup* L *matrisinin ikinci sütunu elde edilir:*

$$l_{12} = 0.8172,$$

$$l_{22} = 1.3747,$$

$$l_{32} = -0.5497$$

$\phi(x^1)$*'e karşılık gelen birim özvektör*

$$u = (0, 0, 0, -0.2411, 0.8349, 0.4946, 0, 0, 0)^T$$

olmak üzere $\nabla\phi(x)|_{x=x^1} = (1.2737, -4.4786, -0.1499, 0.2343, -8.3907, -5.0527)^T$ *elde edilir.* $t = 0.0233$ *olup*

$$x^2 = (0.5575, -0.1895, -0.0951, 0.4964, -0.0144, 0.6304)^T$$

noktasına ulaşılır. $\phi(x^2) = 1.3062$ *olup* L *matrisinin üçüncü sütunu da elde edilerek,* L *matrisi oluşturulur:*

$$L = \begin{pmatrix} 0.6469 & 0.8172 & 0.1529 \\ -0.7180 & 1.3747 & -1.2076 \\ 4.5420 & -0.5497 & 1.3062 \end{pmatrix}$$

Algoritma uygulamaya devam edilirse, 14. *adımda*

$$P_{14} = \begin{pmatrix} 0.4004 & -0.2545 & 0.0324 \\ -0.2545 & 0.4750 & -0.1367 \\ 0.0324 & -0.1367 & 0.7275 \end{pmatrix},$$

$\phi(x^{14}) = 0.1643$ *olmak üzere*

$$L = \begin{pmatrix} 0.0392 & 0.0770 & -0.0693 \\ -0.2700 & -0.1794 & -0.2543 \\ 0.0396 & -0.0371 & 0.1643 \end{pmatrix}$$

matrisi, 15. *adımda*

$$P_{15} = \begin{pmatrix} 0.4008 & -0.2530 & -0.0479 \\ -0.2530 & 0.4760 & -0.1858 \\ -0.0479 & -0.1858 & 0.7154 \end{pmatrix},$$

$\phi(x^{15}) = 0.0830$ *olmak üzere*

$$L = \begin{pmatrix} 0.0770 & -0.0693 & 0.0830 \\ -0.1794 & -0.2543 & 0.0635 \\ -0.0371 & 0.1643 & -0.1215 \end{pmatrix}$$

matrisi ve 16. *adımda*

$$P_{16} = \begin{pmatrix} 0.3923 & -0.2511 & -0.0162 \\ -0.2511 & 0.4831 & -0.1558 \\ -0.0162 & -0.1558 & 0.7245 \end{pmatrix},$$

$$L = \begin{pmatrix} -0.0693 & 0.0830 & -0.0737 \\ -0.2543 & 0.0635 & 0.0186 \\ 0.1643 & -0.1215 & 0.0805 \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir. Buradan

$$Lx = \begin{pmatrix} -0.0693x_1 + 0.0830x_2 - 0.0737x_3 \\ -0.2543x_1 + 0.0635x_2 + 0.0186x_3 \\ 0.1643x_1 - 0.1215x_2 + 0.0805x_3 \end{pmatrix}$$

sütun matrisi ve

$$\begin{gathered} \max(-x_1 - x_2 - x_3) \\ -0.0693x_1 + 0.0830x_2 - 0.0737x_3 \leq -1 \\ -0.2543x_1 + 0.0635x_2 + 0.0186x_3 \leq -1 \\ 0.1643x_1 - 0.1215x_2 + 0.0805x_3 \leq -1 \\ x_i \geq 0, \quad i \in \{1, 2, 3\} \end{gathered}$$

LP problemi oluşturulur. Problemin çözüm kümesi boştan farklı olup, optimal çözümünü veren nokta $x_1 = 231.483$, $x_2 = 729.5852$, $x_3 = 617.0131$ *olur.*

$$P^* = 231.483 \cdot P_{14} + 729.5852 \cdot P_{15} + 617.0131 \cdot P_{16}$$

olmak üzere

$$P^* = \begin{pmatrix} 627.2919 & -398.5047 & -52.5566 \\ -398.5047 & 755.3870 & -263.4149 \\ -52.5566 & -264.4149 & 1137.4289 \end{pmatrix}$$

matrisi $A_1^T P + PA_1 < 0$, $A_2^T P + PA_2 < 0$, $A_3^T P + PA_3 < 0$ *için ortak pozitif tanımlı çözümdür.*

2.7 Liberzon-Tempo'nun verdiği ortak $P > 0$ algoritması

$A_1, A_2, \ldots, A_N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ Hurwitz kararlı matrisleri verilsin. $P = P^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrik matris ve $Q = Q^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pozitif tanımlı matris olmak üzere

$$f(P, A) := \lambda_{\max}(A^T P + PA + Q)$$

fonksiyonelini alalım.

Algoritma 2.7.1. 1. Adım: P_0 *simetrik matris,* Q *pozitif tanımlı matris ve* $\alpha \in [0, 2]$, $r > 0$ *skalerleri alınır.*

2. Adım: $h(k) = (k \mod N) + 1$ *olmak üzere* $f(P_k, A_{h(k)})$ *hesaplanır.*

3. Adım: *Eğer* $f(P_k, A_{h(k)}) \leq 0$ *ise* $P_{k+1} = P_k$ *olarak alınır.*

Eğer $f(P_k, A_{h(k)}) > 0$ *ise;* $\lambda_{\max}(A_{h(k)}^T P_k + P_k A_{h(k)} + Q)$ *özdeğerine karşılık gelen* x *birim özvektörü için* $\partial_P f(P_k, A_{h(k)}) = A_{h(k)} x x^T + x x^T A_{h(k)}^T$ *gradiyent matrisi hesaplanır ve*

$$\mu_k = \frac{\alpha f(P_k, A_{h(k)}) + r\|\partial_P f(P_k, A_{h(k)})\|}{\|\partial_P f(P_k, A_{h(k)})\|^2}$$

sayısı için $P_{k+1} = P_k - \mu_k \partial_P f(P_k, A_{h(k)})$ *olur. Adım 2'ye gidilir.*

Bir k_* *adımı ve sonraki* $k_* + 1, k_* + 2, \ldots, k_* + N - 1$ *adımlarında* $f(P_{k_*+i}, A_{h(k_*+i)}) \leq 0$ $(i = 0, 1, \ldots, N - 1)$ *ise prosedür durdurulur.* $P = P_{k_*}$ *matrisi* $A_1, A_2, \ldots, A_N$ *matrisleri için ortak* $P > 0$ *matrisidir.*

2.8 Liberzon-Tempo'nun verdiği ortak P algoritmasının ağırlık katılarak uygulanması

P_0 simetrik matris, Q pozitif tanımlı matris ve $\alpha \in [0, 2]$, $r > 0$ skalerleri alınır.

Algoritma 2.8.1. 1. Adım: $h(k) = (k \mod N) + 1$ *olmak üzere* $f(P_k, A_{h(k)})$*'ı hesaplayalım.*

2. Adım: *Eğer* $f(P_k, A_{h(k)}) \leq 0$ *ise* L *matrisi aynı kalsın.*

Eğer $f(P_k, A_{h(k)}) > 0$ *ise* L *matrisinin* 2. *sütunundaki sayıları* 1. *sütuna,* 3. *sütunundaki sayıları* 2. *sütuna,* $\ldots$, N. *sütunundaki sayıları* $(N - 1)$. *sütuna öteleyelim.* x^k*' a karşılık gelen* P_k *matrisi için* L *matrisinin* N. *sütunu*

$$l_{iN} = \lambda_{\max}(A_i^T P_k + P_k A_i)$$

şeklinde oluşturalım ve bir sonraki adıma geçelim (İlk N *adımda* L *matrisinin sırasıyla* $1, 2, \ldots, N$ *sütunları benzer biçimde oluşturulur).*

3. Adım: *(2.31)' de verilen LP probleminin çözümü yok ise bir sonraki adıma geçelim.*

Eğer varsa, problemin optimal çözümünü veren nokta $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_N^*)$ *ise* $P^* = x_1^* P_{k-N+1} + \cdots + x_{N-1} P_{k-1} + x_N P_k$ *ortak* P*'dir.*

4. Adım: *Eğer* $f(P_k, A_{h(k)}) \leq 0$ *ise* $P_{k+1} = P_k$ *olarak alalım.*

Eğer $f(P_k, A_{h(k)}) > 0$ *ise* $\lambda_{\max}(A_{h(k)}^T P_k + P_k A_{h(k)} + Q)$ *özdeğerine karşılık gelen* x *birim özvektörü için* $\partial_P f(P_k, A_{h(k)}) = A_{h(k)} x x^T + x x^T A_{h(k)}^T$ *gradiyent matrisini hesaplayalım ve*

$$\mu_k = \frac{\alpha f(P_k, A_{h(k)}) + r\|\partial_P f(P_k, A_{h(k)})\|}{\|\partial_P f(P_k, A_{h(k)})\|^2}$$

sayısı için $P_{k+1} = P_k - \mu_k \partial_P f(P_k, A_{h(k)})$ *alalım. 1. Adım'a gidelim.*
Bir k_* *adımı ve sonraki* $k_* + 1, k_* + 2, \ldots, k_* + N - 1$ *adımlarında* $f(P_{k_*+i}, A_{h(k_*+i)}) \leq 0$ $(i = 0, 1, \ldots, N-1)$ *ise prosedürü durduralım.* $P = P_{k_*}$ *matrisi* $A_1, A_2, \ldots, A_N$ *matrisleri için ortak* $P > 0$ *matrisidir.*

Algoritmayı uyguladığımız bir örnek ele alalım.

Örnek 2.8.2.

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -3 & -5 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} -2 & -8 & 4 \\ 0 & -6 & 4 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Hurwitz kararlı matrisler olmak üzere

$$\dot{x} = \{A_1, A_2, A_3\}x$$

anahtarlamalı sistemi verilsin.

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; ve \; Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pozitif tanımlı matrislerini $\alpha = 1$ *ve* $r = 1$ *skalerlerini alalım.*

$h(0) = 1$ *olmak üzere* $f(P_0, A_1) = \lambda_{\max}(A_1^T P_0 + P_0 A_1 + Q) = 0.7219$ *olur. L matrisinin ilk sütununu*

$$l_{11} = -0.2780,$$

$$l_{21} = 1.5537,$$

$$l_{31} = -0.3944$$

olacak şekilde elde ederiz. $f(P_0, A_1) \geq 0$ *olduğundan* $\lambda_{\max}(A_1^T P_0 + P_0 A_1 + Q)$ *özdeğerine karşılık gelen* $x = (0.7945, -0.2451, 0.5554)^T$ *birim özvektörü için gradiyent matrisi*

$$\partial_P f(P_0, A_1) = A_1 x x^T + x x^T A_1^T = \begin{pmatrix} 0.1227 & -0.0561 & -0.2601 \\ -0.0561 & 0.0229 & 0.0674 \\ -0.2601 & 0.0674 & -0.4237 \end{pmatrix}$$

olur. $\mu_0 = 3.7873$ *sayısı için* $P_1 = P_0 - \mu_0 \partial_P f(P_0, A_1)$ *olduğundan*

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0.5352 & 0.2127 & 0.9853 \\ 0.2127 & 0.9129 & -0.2555 \\ 0.9853 & -0.2555 & 2.6047 \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir. $h(1) = 2$ *olmak üzere*

$$\begin{aligned} f(P_1, A_2) &= \lambda_{\max}(A_2^T P_1 + P_1 A_2 + Q) \\ &= 3.18322 \end{aligned}$$

olur. L matrisinin ikinci sütunu

$$l_{12} = 2.5307,$$

$$l_{22} = 2.1832,$$

$$l_{32} = 5.3809$$

elde edilir. $f(P_1, A_2) > 0$ *olduğundan* $\lambda_{\max}(A_2^T P_1 + P_1 A_2 + Q)$ *özdeğerine karşılık gelen* $x = (0.9356, -0.3529, -0.0002)^T$ *birim özvektörü için gradiyent matrisi*

$$\partial_P f(P_1, A_2) = A_2 x x^T + x x^T A_2^T = \begin{pmatrix} 1.7795 & 1.6446 & 0.8761 \\ 1.6446 & -1.4938 & -0.3310 \\ 0.8761 & -0.3310 & -0.0004 \end{pmatrix}$$

olur. $\mu_1 = 0.5355$ *sayısı için* $P_2 = P_1 - \mu_0 \partial_P f(P_1, A_2)$ *olduğundan*

$$P_2 = \begin{pmatrix} -0.4177 & -0.6680 & 0.5161 \\ -0.5244 & 1.7129 & -0.0782 \\ 0.5161 & -0.0782 & 2.6050 \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir.

$h(2) = 3$ *olmak üzere*

$$\begin{aligned} f(P_2, A_3) &= \lambda_{\max}(A_3^T P_2 + P_2 A_3 + Q) \\ &= 12.8208 \end{aligned}$$

L matrisinin üçüncü sütunu

$$l_{13} = 7.0462,$$

$$l_{23} = 7.7037,$$

$$l_{33} = 11.8207$$

olup L matrisi

$$L = \begin{pmatrix} -0.2780 & 2.5307 & 7.0462 \\ 1.5537 & 2.1832 & 7.7037 \\ -0.3944 & 5.3809 & 11.8207 \end{pmatrix}$$

oluşturulur. Algoritma uygulamaya devam edilirse, 11. *adımda*

$$P_{11} = \begin{pmatrix} 0.7336 & 0.0297 & 0.5386 \\ 0.0297 & 3.7728 & -0.7168 \\ 0.5386 & -0.7168 & 2.1892 \end{pmatrix}$$

ve $h(11) = 3$ *için,*

$$\begin{aligned} f(P_{11}, A_3) &= \lambda_{\max}(A_3^T P_{11} + P_{11} A_3 + Q) \\ &= 3.4211 \end{aligned}$$

olmak üzere

$$L = \begin{pmatrix} -0.0410 & -0.6022 & 2.7240 \\ 0.2281 & 5.6874 & -0.7730 \\ -0.3029 & 0.5262 & 2.4211 \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir. 12. *adımda*

$$P_{12} = \begin{pmatrix} 2.0284 & -0.0228 & 0.2286 \\ -0.0113 & 3.6183 & -0.9838 \\ 0.2286 & -0.9838 & 1.7644 \end{pmatrix}$$

ve $h(12) = 1$ *için,*

$$\begin{aligned} f(P_{12}, A_1) &= \lambda_{\max}(A_1^T P_{12} + P_{12} A_1 + Q) \\ &= 1.0965 \end{aligned}$$

olmak üzere

$$L = \begin{pmatrix} -0.6022 & 2.7240 & 0.0965 \\ 5.6874 & -0.7730 & -0.7539 \\ 0.5262 & 2.4211 & -0.6785 \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir. 13. *adımda*

$$P_{13} = \begin{pmatrix} 2.5334 & 0.8850 & 0.7532 \\ 0.8850 & 3.2963 & -0.4980 \\ 0.7532 & -0.4980 & 2.2023 \end{pmatrix}$$

ve $h(13) = 2$ *için,*

$$\begin{aligned} f(P_{13}, A_2) &= \lambda_{\max}(A_2^T P_{13} + P_{13} A_2 + Q) \\ &= 6.4218 \end{aligned}$$

olmak üzere

$$L = \begin{pmatrix} 2.7240 & 0.0965 & -0.8621 \\ -0.7730 & -0.7539 & 5.4218 \\ 2.4211 & -0.6785 & 0.0694 \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir. Buradan

$$Lx = \begin{pmatrix} 2.7240x_1 + 0.0965x_2 - 0.8621x_3 \\ -0.7730x_1 - 0.7539x_2 + 5.4218x_3 \\ 2.4211x_1 - 0.6785x_2 + 0.0694x_3 \end{pmatrix}$$

sütun matrisi ve

$$\max(-x_1 - x_2 - x_3)$$
$$2.7240x_1 + 0.0965x_2 - 0.8621x_3 \leq -1$$
$$-0.7730x_1 - 0.7539x_2 + 5.4218x_3 \leq -1$$
$$2.4211x_1 - 0.6785x_2 + 0.0694x_3 \leq -1$$
$$x_i \geq 0, \quad i \in \{1, 2, 3\}$$

LP problemi oluşturulur. Problemin çözüm kümesi boştan farklı olup, optimal çözümünü veren nokta $x_1 = 0$, $x_2 = 49.7245$, $x_3 = 6.7301$ olur.

$$P^* = 0 \cdot P_{11} + 49.7245 \cdot P_{12} + 6.7301 \cdot P_{13}$$

olmak üzere

$$P^* = \begin{pmatrix} 117.9137 & 4.8195 & 16.4404 \\ 4.8195 & 202.1059 & -52.2720 \\ 16.4404 & -52.2720 & 102.5608 \end{pmatrix}$$

matrisi $A_1^T P + PA_1 < 0$, $A_2^T P + PA_2 < 0$, $A_3^T P + PA_3 < 0$ için ortak pozitif tanımlı çözümdür.

Liberzon-Tempo'nun verdiği algoritma ile ortak P matrisini 159 adımda elde ederken, ağırlık katarak verdiğimiz algoritma ile 13 adımda elde edilir.

2.9 Gradiyenti matris olarak alıp, ağırlık katarak hesaplama

$A_1, A_2, \ldots, A_N$ Hurwitz kararlı matrisler olsun.

$Q > 0$ olmak üzere, $A_i^T P + PA_i = -Q$ denklemlerinden

$$P_1 = \mathcal{P}_{A_1}(Q) > 0,$$

$$P_2 = \mathcal{P}_{A_2}(Q) > 0,$$

$$\vdots$$

$$P_N = \mathcal{P}_{A_N}(Q) > 0,$$

matrisleri elde edilir.

$$f(Q) \quad = \quad \sum_{i,j=1}^{N} (\lambda_{\max}(A_i^T P_j + P_j A_i)) \quad i \neq j \text{ için}$$

konveks fonksiyonunun

$$f(Q) \to \min$$
$$Q \in R^{n \times n},\ Q > 0$$

minimizasyon problemini ele alalım.

$f(Q)$ fonksiyonun Q^0 noktasındaki gradiyent matrisi, $\lambda_{\max}(A_i^T P_j + P_j A_i)$ $(i \neq j)$ ayrı ayrı gradiyent matrislerinin toplamıdır.

v vektörleri, $i \neq j$ için $A_i^T P_j + P_j A_i$ matrislerinin maksimum özdeğerlerine karşı gelen birim özvektörlerdir. Gradiyent algoritmasını uygulayarak $A_1, A_2, \ldots, A_N$ matrislerinin ortak P matrisini elde ettiğimiz bir kaç örnek ele alalım.

Örnek 2.9.1.

$$A_1 = \begin{pmatrix} -6 & -3 & -2 \\ -7 & -7 & 10 \\ 6 & -2 & -10 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} -12 & 5 & 12 \\ -10 & 3 & -2 \\ -9 & 7 & -15 \end{pmatrix}$$

Hurwitz kararlı matrislerdir.

$$Q^0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad > 0$$

olsun. $P_1 = \int_0^\infty e^{A_1^T t} \cdot Q^0 \cdot e^{A_1 t} dt$ *eşitliğinden*

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0.11809 & -0.10656 & -0.08956 \\ -0.10656 & 0.14890 & 0.13868 \\ -0.08956 & 0.13868 & 0.30659 \end{pmatrix}$$

matrisi,

$P_2 = \int_0^\infty e^{A_2^T t} \cdot Q^0 \cdot e^{A_2 t} dt$ *eşitliğinden*

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0.21539 & -0.27009 & 0.06846 \\ -0.27009 & 0.41291 & -0.12689 \\ 0.06846 & -0.12689 & 0.17169 \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir.

$$L = \begin{pmatrix} -0.32486 & 3.98570 \\ 3.29274 & -0.32486 \end{pmatrix}$$

matrisi olmak üzere

$$Lx = \begin{pmatrix} -0.32486x_1 + 3.98570x_2 \\ 3.29274x_1 - 0.32486x_2 \end{pmatrix}$$

sütun matrisi elde edilir.

$$\min(x_1 + x_2)$$
$$-0.32486x_1 + 3.98570x_2 \leq -1$$
$$3.29274x_1 - 0.32486x_2 \leq -1$$
$$x_i \geq 0, \quad i \in \{1, 2\}$$

LP probleminin çözüm kümesi boş kümedir.

$$f(Q) = \lambda_{\max}(A_1^T P_2 + P_2 A_1) + \lambda_{\max}(A_2^T P_1 + P_1 A_2)$$

fonksiyonun gradiyenti $\lambda_{\max}(A_1^T P_2 + P_2 A_1)$ *ile* $\lambda_{\max}(A_2^T P_1 + P_1 A_2)$*'nin gradyentlerinin toplamıdır.*

$A_1^T P_2 + P_2 A_1$ *matrisinin en büyük özdeğeri* 3.98570 *olup bu özdeğere karşı gelen birim özvektör* $v_1 = (-0.75637, 0.46750, 0.45753)^T$*'dır.*

$A_2^T P_1 + P_1 A_2$ *matrisinin en büyük özdeğeri* 3.29274 *olup bu özdeğere karşı gelen birim özvektör* $v_2 = (-0.60196, 0.79482, -0.07681)^T$*'dır.*

$C_1 = A_1^T v_1 v_1^T + v_1 v_1^T A_1$ *olarak tanımlanırsa,*

$$C_1 = \begin{pmatrix} -3.35935 & -3.95197 & 8.61655 \\ -3.95197 & 6.16864 & -1.67919 \\ 8.61655 & -1.67919 & -9.19510 \end{pmatrix}$$

matrisi ve $C_2 = A_2^T v_2 v_2^T + v_2 v_2^T A_2$ *olarak tanımlanırsa,*

$$C_2 = \begin{pmatrix} -12.37147 & 3.01606 & -8.09330 \\ 3.01606 & 13.60370 & 8.98669 \\ -8.09330 & 8.98669 & -1.86401 \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir.

$Q^1 = Q^0 - t \cdot (C_1 + C_2)$ *denkleminde* t *değerini* $Q^1 > 0$ *olacak şekilde seçelim.* $t = 1/30$ *alınırsa,*

$$Q^1 = \begin{pmatrix} 1.52436 & -0.96880 & -1.01744 \\ -0.96880 & 1.34092 & 0.75641 \\ -1.01744 & 0.75641 & 3.36863 \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir.

2 *adımdan sonra*

$$Q^2 = \begin{pmatrix} 1.91383 & -0.97051 & -1.07331 \\ -0.97051 & 0.69305 & 0.49499 \\ 0.69305 & 0.49499 & 3.76394 \end{pmatrix} > 0$$

$P_1 = \int_0^\infty e^{A_1^T t} \cdot Q^2 \cdot e^{A_1 t} dt$ *eşitliğinden*

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0.20293 & -0.11620 & -0.09211 \\ -0.11620 & 0.07860 & 0.07245 \\ -0.09211 & 0.07245 & 0.27907 \end{pmatrix}$$

matrisi,

$P_2 = \int_0^\infty e^{A_2^T t} \cdot Q^2 \cdot e^{A_2 t} dt$ *eşitliğinden*

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0.17199 & -0.11635 & 0.00628 \\ -0.11635 & 0.11040 & -0.01370 \\ 0.00628 & -0.01370 & 0.13231 \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir.

$$L = \begin{pmatrix} -0.15449 & -0.01772 \\ 0.43265 & -0.15449 \end{pmatrix}$$

matrisi olmak üzere

$$Lx = \begin{pmatrix} -0.15449x_1 - 0.01772x_2 \\ 0.43265x_1 - 0.15449x_2 \end{pmatrix}$$

sütun matrisidir.

$$\min(x_1 + x_2)$$
$$-0.15449x_1 - 0.01772x_2 \leq -1$$
$$0.43265x_1 - 0.15449x_2 \leq -1$$
$$x_i \geq 0, \quad i \in \{1, 2\}$$

lineer programlama probleminin çözümü $x_1 = 4.33632$, $x_2 = 18.61645$ *olur. Bu değerler*

$$P^* = x_1 P_1 + x_2 P_2$$

denkleminde yerine konulursa

$$P^* = \begin{pmatrix} 4.08196 & -2.67003 & -0.28254 \\ -2.67003 & 2.39611 & 0.05900 \\ -0.28254 & 0.05900 & 3.67341 \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir. P^*, $A_1^T P + PA_1 < 0$ *ve* $A_2^T P + PA_2 < 0$ *için ortak pozitif tanımlı çözümdür.*

Örnek 2.9.2.

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -3 & -5 & 2 \\ 1 & -2 & -6 \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} -3 & -8 & 4 \\ 1 & -6 & 5 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -3 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

Hurwitz kararlı matrislerdir.

$$Q^0 = \begin{pmatrix} 6/7 & 0 & 0 \\ 0 & 3/7 & 0 \\ 0 & 0 & 2/7 \end{pmatrix} \quad > 0$$

olsun. $P_1 = \int_0^\infty e^{A_1^T t} \cdot Q^0 \cdot e^{A_1 t} dt$ *eşitliğinden*

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0.39497 & -0.06987 & 0.15175 \\ -0.06987 & 0.05322 & -0.02593 \\ 0.15175 & -0.02593 & 0.09104 \end{pmatrix}$$

matrisi,

$P_2 = \int_0^\infty e^{A_2^T t} \cdot Q^0 \cdot e^{A_2 t} dt$ *eşitliğinden*

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0.12094 & -0.08789 & 0.02216 \\ -0.08789 & 0.15291 & 0.02356 \\ 0.02216 & 0.02356 & 0.08733 \end{pmatrix}$$

matrisi,

$P_3 = \int_0^\infty e^{A_3^T t} \cdot Q^0 \cdot e^{A_3 t} dt$ *eşitliğinden*

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0.11141 & 0.02320 & -0.00977 \\ 0.02320 & 0.13981 & 0.03725 \\ -0.00977 & 0.03725 & 0.03524 \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir.

$$L = \begin{pmatrix} -0.28571 & 0.09868 & 0.05200 \\ 2.39657 & -0.28571 & 0.46363 \\ 0.51958 & 0.31783 & -0.28571 \end{pmatrix}$$

matrisi olmak üzere

$$Lx = \begin{pmatrix} -0.28571x_1 + 0.09868x_2 + 0.05200x_3 \\ 2.39657x_1 - 0.28571x_2 + 0.46363x_3 \\ 0.51958x_1 + 0.31783x_2 - 0.28571x_3 \end{pmatrix}$$

sütun matrisi elde edilir.

$$\begin{gathered} \min(x_1 + x_2 + x_3) \\ -0.28571x_1 + 0.09868x_2 + 0.05200x_3 \leq -1 \\ 2.39657x_1 - 0.28571x_2 + 0.46363x_3 \leq -1 \\ 0.51958x_1 + 0.31783x_2 - 0.28571x_3 \leq -1 \\ x_i \geq 0, \quad i \in \{1, 2, 3\} \end{gathered}$$

lineer programlama probleminin çözümü boş kümedir.

$$\begin{aligned} f(Q) \;\; = \;\; & (\lambda_{\max}(A_1^T P_2 + P_2 A_1)) + (\lambda_{\max}(A_2^T P_1 + P_1 A_2)) + \\ & (\lambda_{\max}(A_1^T P_3 + P_3 A_1)) + (\lambda_{\max}(A_2^T P_3 + P_3 A_2)) + \\ & (\lambda_{\max}(A_3^T P_2 + P_2 A_3)) + (\lambda_{\max}(A_3^T P_1 + P_1 A_3)) \end{aligned}$$

fonksiyonun gradiyenti fonksiyondaki toplamların ayrı ayrı gradiyentlerinin toplamına eşittir. $Q = Q^0$ *alındığında*

$A_1^T P_2 + P_2 A_1$ *matrisinin en büyük özdeğeri* 0.098 *olup bu özdeğere karşı gelen birim özvektör* $v_1 = (-0.9967, -0.0798, 0.0054)^T$*'dır.*

$A_2^T P_1 + P_1 A_2$ *matrisinin en büyük özdeğeri* 2.396 *olup bu özdeğere karşı gelen birim özvektör* $v_2 = (-0.4529, 0.7950, -0.4033)^T$*'dır.*

$A_1^T P_3 + P_3 A_1$ *matrisinin en büyük özdeğeri* 0.052 *olup bu özdeğere karşı gelen birim özvektör* $v_3 = (0.6359 - 0.2681, 0.7236)^T$*'dır.*

$A_2^T P_3 + P_3 A_2$ *matrisinin en büyük özdeğeri* 0.463 *olup bu özdeğere karşı gelen birim özvektör* $v_4 = (-0.5609, 0.0423, -0.8267)^T$*'dır.*

$A_3^T P_2 + P_2 A_3$ *matrisinin en büyük özdeğeri* 0.317 *olup bu özdeğere karşı gelen birim özvektör* $v_5 = (0.3688, 0.9034, 0.2184)^T$*'dır.*

$A_3^T P_1 + P_1 A_3$ *matrisinin en büyük özdeğeri* 0.519 *olup bu özdeğere karşı gelen birim özvektör* $v_6 = (0.5886, -0.4584, -0.6658)^T$*'dır.*

$C_1 = A_1^T v_1 v_1^T + v_1 v_1^T A_1$ *olarak tanımlanırsa, birinci fonksiyonun gradiyenti*

$$C_1 = \begin{pmatrix} -4.00704 & -3.55004 & 0.87807 \\ -3.55004 & -0.54296 & 0.08801 \\ 0.87807 & 0.08801 & -0.00950 \end{pmatrix}$$

matrisi,

$C_2 = A_2^T v_2 v_2^T + v_2 v_2^T A_2$ *olarak tanımlanırsa,*

$$C_2 = \begin{pmatrix} 5.99257 & -1.98032 & 2.14268 \\ -1.98032 & -11.51308 & 3.84307 \\ 2.14268 & 3.84307 & -0.93618 \end{pmatrix}$$

matrisi,

$C_3 = A_1^T v_3 v_3^T + v_3 v_3^T A_1$ *olarak tanımlanırsa,*

$$C_3 = \begin{pmatrix} 1.14348 & 1.14348 & -1.36523 \\ 1.14348 & -0.47186 & 1.48663 \\ -1.36523 & 1.48663 & -4.58749 \end{pmatrix}$$

matrisi,

$C_4 = A_2^T v_4 v_4^T + v_4 v_4^T A_2$ *olarak tanımlanırsa,*

$$C_4 = \begin{pmatrix} 2.20229 & 2.69300 & 0.08243 \\ 2.69300 & -0.41920 & 4.20780 \\ 0.08243 & 4.20780 & -4.54061 \end{pmatrix}$$

matrisi,

$C_5 = A_3^T v_5 v_5^T + v_5 v_5^T A_3$ *olarak tanımlanırsa,*

$$C_5 = \begin{pmatrix} -2.90501 & -3.79073 & -0.01628 \\ -3.79073 & -1.14241 & 1.92879 \\ -0.01628 & 1.92879 & 0.99953 \end{pmatrix}$$

matrisi,

$C_6 = A_3^T v_6 v_6^T + v_6 v_6^T A_3$ *olarak tanımlanırsa,*

$$C_6 = \begin{pmatrix} 0.65924 & 0.19202 & 2.60054 \\ 0.19202 & -0.69899 & -2.82344 \\ 2.60054 & -2.82344 & -6.72730 \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir.

$Q^1 = Q^0 - t \cdot (C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 + C_6)$ *matrisini elde etmek için* $Q^0 - t \cdot (C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 + C_6)$ *matrisinin girdilerinin kareleri toplamını* 1 *yapan* $t = 0.0452$ *değeri seçilir. O halde*

$$Q^1 = \begin{pmatrix} 0.71766 & 0.27653 & -0.19537 \\ 0.27653 & 1.09706 & -0.39466 \\ -0.19537 & -0.39466 & 1 \end{pmatrix}$$

olur. $P_1 = \int_0^\infty e^{A_1^T t} \cdot Q^1 \cdot e^{A_1 t} dt$ *eşitliğinden*

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0.32330 & -0.05686 & 0.11717 \\ -0.05686 & 0.12991 & -0.05051 \\ 0.11717 & -0.05051 & 0.12508 \end{pmatrix}$$

matrisi, $P_2 = \int_0^\infty e^{A_2^T t} \cdot Q^1 \cdot e^{A_2 t} dt$ *eşitliğinden*

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0.11023 & -0.04950 & 0.02138 \\ -0.04950 & 0.15743 & 0.00234 \\ 0.02138 & 0.00234 & 0.14930 \end{pmatrix}$$

matrisi, $P_3 = \int_0^\infty e^{A_3^T t} \cdot Q^1 \cdot e^{A_3 t} dt$ *eşitliğinden*

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0.11710 & 0.07455 & -0.01317 \\ 0.07455 & 0.21098 & 0.00751 \\ -0.01317 & 0.00751 & 0.07922 \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir.

$$L = \begin{pmatrix} -0.57115 & -0.05254 & -0.09300 \\ 0.86447 & -0.57115 & 0.39996 \\ 0.21652 & 0.04973 & -0.57115 \end{pmatrix}$$

matrisi olmak üzere

$$Lx = \begin{pmatrix} -0.57115x_1 - 0.05254x_2 - 0.09300x_3 \\ 0.86447x_1 - 0.57115x_2 0.39996x_3 \\ 0.21652x_1 + 0.04973x_2 - 0.57115x_3 \end{pmatrix}$$

sütun matrisi elde edilir.

$$\begin{gathered} \min(x_1 + x_2 + x_3) \\ -0.57115x_1 - 0.05254x_2 - 0.09300x_3 \leq -1 \\ 0.86447x_1 - 0.57115x_2 0.39996x_3 \leq -1 \\ 0.21652x_1 + 0.04973x_2 - 0.57115x_3 \leq -1 \\ x_i \geq 0, \quad i \in \{1, 2, 3\} \end{gathered}$$

lineer programlama probleminin çözümü $x_1 = 0.89410$, $x_2 = 4.86421$, $x_3 = 2.51335$ *olur. Bu değerler* $P^* = x_1 P_1 + x_2 P_2 + x_3 P_3$ *denkleminde yerine konulursa*

$$P^* = \begin{pmatrix} 1.11960 & -0.10428 & 0.17566 \\ -0.10428 & 1.41222 & -0.01487 \\ 0.17566 & -0.01487 & 1.03721 \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir. P^*, $A_1^T P + P A_1 < 0$, $A_2^T P + P A_2 < 0$, $A_3^T P + P A_3 < 0$ *için ortak pozitif tanımlı çözümdür.*

3 AİLEDE KARARLI ELEMANIN VARLIĞI PROBLEMİ

3.1 Problemin ifadesi

Bu bölümde aşağıdaki soru araştırılmaktadır:

$$A(q) = A_0 + q_1 A_1 + \cdots + q_k A_k, \quad q_j \in [a_j, b_j] \ \ (j = 1, 2, \ldots, k), \tag{3.33}$$

gibi matris politopu verildiğinde bu ailede Hurwitz kararlı bir matris var mıdır?

Bu problem (3.33) biçiminde verilen politoplar ve 3×3 boyutlu aralık aile için ele alınacaktır. Çözüm yöntemi olarak gradiyent yöntemi ve rastgele seçim yöntemi uygulanacaktır.

3.2 Uygun optimizasyon problemi

Önce ailede kararlı matrisin varlığı problemini bir optimizasyon problemine dönüştürelim.

$r = \frac{n(n+1)}{2}$ olmak üzere $Z_1, Z_2, \ldots, Z_r$ matrisleri $n \times n$ boyutlu simetrik matrislerin alt uzayı için bir taban olsun ve $x = (x_1, x_2, \ldots, x_r)^T$, $q = (q_1, q_2, \ldots, q_k)^T$ olmak üzere

$$\begin{aligned} Q_i(q) &= (-Z_i) \oplus (A^T(q) Z_i + Z_i A(q)), \quad (i = 1, 2, \ldots, r) \\ \phi(x, q) &= \lambda_{\max}\left(\sum_{i=1}^{r} x_i Q_i(q)\right) \end{aligned} \tag{3.34}$$

olarak tanımlansın.

$$\begin{gathered} \phi(x, q) \to \min \\ -1 \le x_i \le 1, \ \ a_j \le q_j \le b_j \\ (i = 1, 2, \ldots, r, \ \ j = 1, 2, \ldots, k). \end{gathered} \tag{3.35}$$

optimizasyon problemini ele alalım.

Teorem 3.2.1. *$A(q)$ (3.33) ailesinde en azından bir kararlı matris olması için gerekli ve yeterli koşul $\phi^* = \min_{(x,q)} \phi(x, q) < 0$ eşitsizliğinin sağlanmasıdır.*

Kanıt. $\phi^* < 0 \Leftrightarrow$ en azından bir (x^*, q^*) vardır ki $\sum_{i=1}^{r} x_i^* Q_i(q^*) < 0 \Leftrightarrow$

$$\left(-\sum_{i=1}^{r} x_i^* Z_i\right) \oplus \left[A^T(q^*)\left(\sum_{i=1}^{r} x_i^* Z_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{r} x_i^* Z_i\right) A(q^*)\right] < 0 \Leftrightarrow$$

Blok matrisin özdeğerlerinin özelliğinden $P(x^*) = \sum_{i=1}^{r} x_i^* Z_i > 0$ ve $A(q^*)^T P(x^*) + P(x^*)A(q^*) < 0$ olur.

Lyapunov teoremine göre $A(q^*)$ matrisi kararlıdır. □

Bu teoremi ve gradient algoritmasını göz önüne alarak bazı ailelerde kararlı eleman olup olmadığına karar verebiliriz.

Örnek 3.2.2.

$$A_0 = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \ A_1 = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & -5 & -2 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

iken

$$A(q) = A_0 + q_1 A_1 + q_2 A_2, \quad q \in \mathbb{R}^2$$

matrisler ailesini ele alalım. $q = (0,0)^T$ *için,*

$$A(q) = A_0 = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

olup A_0 *matrisi kararsızdır. Biz bu ailenin kararlı üyesini bulmak için gradiyent algoritmasına başvururuz.* $x^0 = (0.1, 0, 0, 0.4, 0, \sqrt{0.83})^T$ *ve* $q^0 = (0,0)$ *olsun. Böylece*

$$\begin{aligned} a^0 &= (x^0, q^0) = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0, x_5^0, x_6^0, q_1^0, q_2^0)^T \\ &= (0.1, 0, 0, 0.4, 0, \sqrt{0.83}, 0, 0)^T \end{aligned}$$

olur.

$$-P(x^0) = \begin{pmatrix} -0.1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.4 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{0.83} \end{pmatrix}.$$

Bu matrisin özdeğerleri $-0.1, -0.4, -\sqrt{0.83}$ *ve*

$$A(q^0)^T P(x^0) + P(x^0)A(q^0)$$

matrisinin özdeğerleri -7.7998, -0.5966 *ve* 2.3523 *olur. Maksimum özdeğer* 2.3523 *ve bu özdeğere karşı gelen birim özvektör* $v = (0.0884, 0.7806, 0.6186)^T$ *elde edilir.* ϕ *fonksiyonun* a^0 *noktasındaki gradiyenti*

$$\nabla\phi|_{a^0} = (0.3231, 2.9345, 2.5774, 0.7363, 3.3889, 2.2232, -6.0614, 0.7055)^T$$

olur. $a^1 = a^0 - t \cdot \nabla\phi|_{a^0}$ *vektörünün ilk altı bileşenin altı boyutlu birim küre yüzeyi üzerinde olması koşulu konularak* $t = 0.1455$ *değeri ve*

$$a^1 = (0.052, -0.427, -0.375, 0.292, -0.493, 0.587, 0.882, 0.102)^T$$

elde edilir. Böyle devam edilirse 36 *adımdan sonra,*

$$\begin{aligned} a^{36} &= (x^{36}, q^{36}) \\ &= (0.777, -0.190, -0.172, 0.082, 0.030, \\ &\quad\ 0.567, 0.665, 0.445, 0.665, 0.445)^T \end{aligned}$$

noktasına ulaşılır. $\phi(x^{36}, q^{36}) < 0$ *olup*

$$P(x^{36}) = \begin{pmatrix} 0.7772972105 & -0.1902326180 & -0.1723439072 \\ -0.1902326180 & 0.08272965220 & 0.03023027645 \\ -0.1723439072 & 0.03023027645 & 0.5675914995 \end{pmatrix}$$

ve $A(q)$*'nun kararlı üyesi*

$$A(q^{36}) = \begin{pmatrix} -4.658826401 & 0.8891734986 & 3.893261903 \\ 2.884826452 & -0.8955647488 & 1.010738297 \\ -0.3347823492 & 0.2283028956 & -3.330435302 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

Çözüm yöntemini bir algoritma ile ifade etmek için

$$P(x) = \sum_{i=1}^{r} x_i Z_i, \;\; B_0(x,q) = -P(x) \,\text{ve}\, B_1(x,q) = A^T(q)P(x) + P(x)A(q)$$

olarak tanımlanırsa

$$\sum_{i=1}^{r} x_i Q_i(q) = B_0(x,q) \oplus B_1(x,q)$$

biçiminde ifade edilir. Burada $B_0 \oplus B_1$ işareti direkt toplamı göstermektedir.

Algoritma 3.2.3. • $\phi(x,q) = \max_{i=0,1,\|v\|=1} v^T(B_i(x,q))v$.

$f_0 = v^T(B_0(x,q))v$ ve $f_1 = v^T(B_1(x,q))v$'in gradiyenti hesaplanır. Aşağıda en büyük özdeğer $B_0(x,q)$'nun ise f_0'ın gradiyentini, $B_1(x,q)$'nun ise f_1'in gradiyenti kullanılır.

$$(x^1, q^1) = (x^0, q^0) - t \cdot \nabla f_i|_{x=x^0, q=q^0}$$

vektörünün ilk r bileşenin r boyutlu birim küre yüzeyi üzerinde olmasını sağlayan t_* ($t_* \neq 0$) hesaplanır.

- *Türev koşulu:*

$$(\widetilde{x}^1, \widetilde{q}^1) \;\; = \;\; (x^0, q^0) - \alpha \cdot \nabla f_i|_{(x^0, q^0)}$$

olarak alınarak,

$$C(\alpha) \;\; = \;\; \widetilde{x}_1^1 Q_1(\widetilde{q}^1) + \widetilde{x}_2^1 Q_2(\widetilde{q}^1) + \ldots + \widetilde{x}_r^1 Q_r(\widetilde{q}^1), \quad (\alpha > 0)$$

matris fonksiyonunu tanımlayalım.

$$F(\alpha) \;\; = \;\; \lambda_{\max}(C(\alpha)) \;\; = \;\; \max_{\|v\|=1} v^T \; C(\alpha) \; v$$

olmak üzere, $F(\alpha)$'nın minimumunu arayalım. $F(\alpha)$'nın türevi alınır ve bu türev sıfıra eşitlenirse $F'(\alpha) = v^T(\alpha) \; C'(\alpha) \; v(\alpha) = 0$ denklemi elde edilir ve α bulunur. Burada $v(\alpha)$ yaklaşık değer olarak (x^0, q^0)'a karşı gelen maksimum özvektör alınmaktadır. $F'(\alpha) \cong v^T(0) \; C'(\alpha) \; v(0) = 0$ denkleminden yaklaşık α değeri bulunur.

- *$\alpha > t_*$ ise*

$$(x^1, q^1) = (x^0, q^0) - t \cdot \nabla f_i|_{x=x^0, q=q^0}$$

denkleminde t yerine t_* değeri alınır. Aksi durumda α değeri alınır. t'nin aldığımız değeri $\tilde{t}$ olsun.

- *Pozitiflik koşulu: P matrisinin sadece pozitif bölgede kalmasını sağlayan yani $P > 0$ bölgesinin sınırına gelecek η (sıfırı içeren aralığın sağ ucu) değeri hesaplanır.*

- *$\eta > \tilde{t}$ ise*

$$(x^1, q^1) = (x^0, q^0) - t \cdot \nabla f_i|_{x=x^0, q=q^0}$$

denkleminde t yerine $\tilde{t}$ değeri alınır. Aksi durumda η değeri alınır ve yeni nokta belirlenmiş olur. Her adımda bu prosedür tekrarlanır.

Şimdi $C(\alpha)$'nın türevinin ve P matrisinin pozitiflik koşulunun kullanılmadığı, birim küre yerine birim kutu alınan bir örnek ele alalım.

Örnek 3.2.4.

$$A_0 = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \ A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \textit{ ve}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$$

iken

$$A(q) = A_0 + q_1 A_1 + q_2 A_2, \quad q \in \mathbb{R}^2$$

matrisler ailesini ele alalım. $q = (0,0)^T$ için,

$$A(q) = A_0 = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisi kararsızdır. Bu ailenin kararlı elemanı olup olmadığını inceleriz. $x^0 = (1,0,1)^T$ ve $q^0 = (1,0)^T$ olsun. Böylece

$$\begin{aligned} (x^0, q^0) &= (x_1^0, x_2^0, x_3^0, q_1^0, q_2^0)^T \\ &= (1,0,1,1,0)^T \end{aligned}$$

olur. $B_0(x^0, q^0) = -P(x^0)$ *olduğundan*

$$B_0(x^0, q^0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$B_1(x^0, q^0) = A(q^0)^T P(x^0) + P(x^0)A(q^0)$ *olduğundan*

$$B_1(x^0, q^0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$B_0(x^0, q^0)$ *matrisinin özdeğerleri* -1 *(2 katlı) ve* $B_1(x^0, q^0)$ *matrisinin özdeğerleri* 5.2195, -13.2195 *elde edilir.*

$\phi(x^0, q^0)$*'ın maksimum özdeğeri* 5.2195 *ve bu özdeğere karşı gelen birim özvektör* $v = [0.8021, 1]^T$ *bulunur. En büyük özdeğer* $B_1(x^0, q^0)$ *matrisine ait olduğu için* f_1 *fonksiyonun* (x^0, q^0) *noktasındaki gradiyenti*

$$\nabla f_1|_{(x^0,q^0)} = \begin{pmatrix} -1.0135 \\ 10.2432 \\ 14.3445 \\ 7.7567 \\ -38.7769 \end{pmatrix}$$

alınır.

$(x^1, q^1) = (x^0, q^0) - t \cdot \nabla f_1|_{(x^0,q^0)}$ *vektörünün* x *koordinatının birim kutu üzerinde olmasını sağlayan* t *değeri* 0.0099 *elde edilir.*

$$(x^1, q^1) = (1.0100, -0.1016, 0.8576, 0.9230, 0.3846)^T$$

olup

$$B_0(x^1, q^1) = -P(x^1) = \begin{pmatrix} -1.0100 & 0.1016 \\ 0.1016 & -0.8576 \end{pmatrix}$$

$B_1(x^1, q^1) = A(q^1)^T P(x^1) + P(x^1)A(q^1)$ *olduğundan*

$$B_1(x^1, q^1) = \begin{pmatrix} -12.0811 & 6.0328 \\ 6.0328 & -3.6029 \end{pmatrix} \quad olur.$$

$B_0(x^1, q^1)$ *matrisinin özdeğerleri* -1.0608, -0.80687 *ve* $B_1(x^1, q^1)$ *matrisinin özdeğerleri* -15.2153, -0.4687 *olur.* $\phi(x^1, q^1) < 0$ *olup* $A(q)$*'nun kararlı üyesi*

$$A(q^1) == \begin{pmatrix} -5.4619 & 0.8459 \\ 5.1534 & -2.0001 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

Örnek 3.2.5.

$$A_0 = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \; A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -6 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \; ve$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

iken

$$A(q) = A_0 + q_1 A_1 + q_2 A_2, \quad q \in \mathbb{R}^2$$

matrisler ailesini ele alalım. $q = (0,0)^T$ *için,*

$$A(q) = A_0 = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

A_0 *kararsızdır. Bu ailenin kararlı üyesini algoritmayı kullanarak elde edelim.* $x^0 = (0.9354, 0, 0, 0.25, 0, 0.25)^T$ *ve* $q^0 = (-1, 0)^T$ *olsun. Böylece*

$$\begin{aligned} (x^0, q^0) &= (x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0, x_5^0, x_6^0, q_1^0, q_2^0)^T \\ &= (0.9354, 0, 0, 0.25, 0, 0.25, -1, 0)^T \end{aligned}$$

olur.

$$B_0(x^0, q^0) = -P(x^0) = \begin{pmatrix} -0.9354 & 0 & 0 \\ 0 & -0.25 & 0 \\ 0 & 0 & -0.25 \end{pmatrix}$$

$$B_1(x^0, q^0) = A(q^0)^T P(x^0) + P(x^0) A(q^0) = \begin{pmatrix} -5.6124 & 3.7416 & -0.50 \\ 3.7416 & -2.50 & 2 \\ -0.50 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$B_0(x^0, q^0)$ *matrisinin özdeğerleri* -0.9354, -0.25, -0.25 *olur.*

$B_1(x^0, q^0)$ *matrisinin özdeğerleri* -8.3937, -1.2294, 1.5108 *olur.*

$\phi(x^0, q^0)$*' ın maksimum özdeğeri* 1.5108 *ve bu özdeğere karşı gelen birim özvektör* $v = [0.2754, 0.6223, 0.7326]^T$ *bulunur. En büyük özdeğer* $B_1(x^0, q^0)$ *matrisine ait olduğu için* f_1 *fonksiyonun* (x^0, q^0) *noktasındaki gradiyenti*

$$\nabla f_1|_{(x^0,q^0)} = \begin{pmatrix} 0.9161 \\ 3.9883 \\ 1.7904 \\ 4.3344 \\ 3.6427 \\ -1.7192 \\ -0.3173 \\ -2.7251 \end{pmatrix}$$

alınır. $(x^1, q^1) = (x^0, q^0) - t \cdot \nabla f_1|_{(x^0,q^0)}$ *vektörünün ilk altı bileşenin altı boyutlu birim küre yüzeyi üzerinde olmasını sağlayan* $t_* = 0.0549$*'ı elde edilir. Öte yandan* $(\widetilde{x}^1, \widetilde{q}^1) = (x^0, q^0) - \alpha \cdot \nabla f_1|_{(x^0,q^0)}$ *ve*

$$\begin{aligned} C(\alpha) &= (0.9354 - 0.9161 \cdot \alpha)Q_1(\widetilde{q}^1) + (-3.9883 \cdot \alpha)Q_2(\widetilde{q}^1) + \\ &\quad (-1.7904 \cdot \alpha)Q_3(\widetilde{q}^1) + (0.25 - 4.3344 \cdot \alpha)Q_4(\widetilde{q}^1) + \\ &\quad (-3.6427 \cdot \alpha)Q_5(\widetilde{q}^1) + (0.25 + 1.7192 \cdot \alpha)Q_6(\widetilde{q}^1) \end{aligned}$$

olur ve $\alpha = 0.2964$ *elde edilir.* $\alpha > t_*$ *olduğundan* t *yerine* t_* *değeri alınır. Pozitiflik koşulundan* $\eta = 0.0183$ *olur.* $t_* > \eta$ *olduğundan*

$$(x^1, q^1) = (x^0, q^0) - t \cdot \nabla f_i|_{x=x^0, q=q^0}$$

denkleminde t *olarak* η *değerini alınır. O halde yeni noktamız*

$$(x^1, q^1) = (0.935, -0.073, -0.032, 0.170, -0.006, 0.281, -0.994, 0.049)^T$$

olur. Böyle devam edilirse 15 *adımdan sonra,*

$x^{15} = (0.719, -0.083, -0.013, 0.179, -0.219, 0.556)^T$ *ve*

$q^{15} = (-0.748, 0.427)^T$ *vektörleri elde edilir.*

$$P(x^{15}) = \begin{pmatrix} 0.719 & -0.0831 & -0.0135 \\ -0.0831 & 0.1799 & -0.2192 \\ -0.0135 & -0.2192 & 0.5561 \end{pmatrix} > 0$$

ve $A(q)$'nun kararlı üyesi

$$A(q^{15}) = \begin{pmatrix} -2.8238 & 2.2124 & -1.8878 \\ 0.0757 & -5.1003 & 8.7728 \\ -1.7481 & -0.1687 & -0.5036 \end{pmatrix}$$

olur.

Algoritmadaki pozitiflik koşulunu göz ardı ettiğimiz bir kaç örnek inceleyelim.

Örnek 3.2.6.

$$A_0 = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \ A_1 = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & -5 & -2 \end{pmatrix} \ ve$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

iken

$$A(q) = A_0 + q_1 A_1 + q_2 A_2, \quad q \in \mathbb{R}^2$$

matrisler ailesini ele alalım. $q = (0,0)^T$ *için,*

$$A(q) = A_0 = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

A_0 *kararsızdır.* $x^0 = (0.1, 0, 0, 0.4, 0, 0.911043)^T$ *ve* $q^0 = (0,0)^T$ *olsun. Böylece*

$$\begin{aligned} (x^0, q^0) &= (x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0, x_5^0, x_6^0, q_1^0, q_2^0)^T \\ &= (0.1, 0, 0, 0.4, 0, 0.911043, 0, 0)^T \end{aligned}$$

olur.

$$B_0(x^0, q^0) = -P(x^0) = \begin{pmatrix} -0.1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.4 & 0 \\ 0 & 0 & -0.9110 \end{pmatrix}$$

$B_1(x^0, q^0) = A(q^0)^T P(x^0) + P(x^0) A(q^0)$ *olduğundan*

$$B_1(x^0, q^0) = \begin{pmatrix} -0.8 & 1.0 & -0.8110 \\ 1.0 & -1.6 & 4.8441 \\ -0.8110 & 4.8441 & -3.6441 \end{pmatrix}$$

$B_0(x^0, q^0)$ *matrisin özdeğerleri* -0.1, -0.4, -0.9110 *ve* $B_1(x^0, q^0)$ *matrisinin özdeğerleri* -7.7998, -0.5966 *and* 2.3523 *dır.* $\phi(x^0, q^0)$*' ın maksimum özdeğeri* 2.3523 *ve bu özdeğere karşı gelen birim özvektör* $v = (0.0884, 0.7806, 0.6186)^T$ *olur. En büyük özdeğer* $B_1(x^0, q^0)$ *matrisine ait olduğu için* f_1 *fonksiyonun* (x^0, q^0) *noktasındaki gradiyenti*

$$\nabla f_1|_{(x^0,q^0)} = \begin{pmatrix} -2.8687 \\ -1.1359 \\ -1.5187 \\ 3.0861 \\ -0.1502 \\ -0.1992 \\ 3.9234 \\ -0.3767 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

$$(x^1, q^1) \quad = \quad (x^0, q^0) - t \cdot \nabla f_1|_{(x^0,q^0)}$$

vektörünün ilk altı bileşenin altı boyutlu birim küre yüzeyi üzerinde olmasını sağlayan $t_* = 0.1455$ *değeri elde edilir. Öte yandan*

$$(\widetilde{x}^1, \widetilde{q}^1) \quad = \quad (x^0, q^0) - \alpha \cdot \nabla f_1|_{(x^0,q^0)}.$$

$$\begin{aligned} C(\alpha) \quad = \quad & (0.1 - 0.3231\alpha) Q_1(\widetilde{q}^1) + (-2.9345\alpha) Q_2(\widetilde{q}^1) + \\ & (-2.5774\alpha) Q_3(\widetilde{q}^1) + (0.4 - 0.7363\alpha) Q_4(\widetilde{q}^1) + \\ & (-3.3889\alpha) Q_5(\widetilde{q}^1) + (0.9110 - 2.2232\alpha) Q_6(\widetilde{q}^1) \end{aligned}$$

olur ve $\alpha = 0.1197$ *elde edilir.* $t_* > \alpha$ *olduğundan* α *alınır. Buradan*

$$(x^1, q^1) \quad = \quad (0.061, -0.351, -0.308, 0.311, -0.405, 0.644, 0.725, 0.084)^T$$

olur. Böyle devam edilirse 12 *adımdan sonra,*

$x^{12} = (0.617, 0.070, -0.018, 0.180, 0.246, 0.721)^T$ *ve* $q^{12} = (0.736, 0.566)^T$

vektörleri elde edilir.

$$P(x^{12}) = \begin{pmatrix} 0.617 & 0.070 & -0.018 \\ 0.070 & 0.180 & 0.246 \\ -0.018 & -0.246 & 0.721 \end{pmatrix}$$

matrisi ve $A(q)$*'nun kararlı üyesi*

$$A(q^{12}) = \begin{pmatrix} -4.511 & 0.696 & 4.5682 \\ 2.907 & -0.922 & 1.015 \\ -0.263 & -0.249 & -3.473 \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir.

Örnek 3.2.7.

$$A_0 = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \; A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \; ve$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -5 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

iken

$$A(q) = A_0 + q_1 A_1 + q_2 A_2, \quad q \in \mathbb{R}^2$$

matrisler ailesini ele alalım. $q = (0, 0)^T$ *için,*

$$A(q) = A_0 = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

A_0 kararsızdır. $x^0 = (0.1, 0, 0, 0.4, 0, 0.911043)^T$ ve $q^0 = (0, 0)^T$ olsun. Böylece

$$\begin{aligned}(x^0, q^0) &= (x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0, x_5^0, x_6^0, q_1^0, q_2^0)^T \\ &= (0.1, 0, 0, 0.4, 0, 0.911043, 0, 0)^T\end{aligned}$$

olur.

$$B_0(x^0, q^0) = -P(x^0) = \begin{pmatrix} -0.1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.4 & 0 \\ 0 & 0 & -0.911043 \end{pmatrix}$$

$$B_1(x^0, q^0) = A(q^0)^T P(x^0) + P(x^0)A(q^0) = \begin{pmatrix} -0.8 & 1.0 & -0.8110 \\ 1.0 & -1.6 & 4.8441 \\ -0.8110 & 4.8441 & -3.6441 \end{pmatrix}$$

$B_0(x^0, q^0)$ matrisin özdeğerleri -0.1, -0.4, -0.9110 ve $B_1(x^0, q^0)$ matrisinin özdeğerleri -7.7998, -0.5966, 2.3523 olur. Maksimum özdeğer 2.3523 ve bu özdeğere karşı gelen birim özvektör $v = (0.0884, 0.7806, 0.6186)^T$ elde edilir. En büyük özdeğer $B_1(x^0, q^0)$ matrisine ait olduğu için f_1 fonksiyonun (x^0, q^0) noktasındaki gradiyenti

$$\nabla f_1|_{(x^0,q^0)} = \begin{pmatrix} 0.3231 \\ 2.9345 \\ 2.5774 \\ 0.7363 \\ 3.3889 \\ 2.2232 \\ 5.5313 \\ 0.1638 \end{pmatrix}$$

olur.

$$(x^1, q^1) = (x^0, q^0) - t \cdot \nabla f_1|_{(x^0,q^0)}$$

vektörünün ilk altı bileşenin altı boyutlu birim küre yüzeyi üzerinde olmasını sağlayan $t_* = 0.14552$ değeri elde edilir.

Öte yandan $(\widetilde{x}^1, \widetilde{q}^1) = (x^0, q^0) - \alpha \cdot \nabla f_1|_{(x^0,q^0)}$

$$\begin{aligned}C(\alpha) &= (0.1 - 0.3231 \cdot \alpha)Q_1(\widetilde{q}^1) + (-2.9345 \cdot \alpha)Q_2(\widetilde{q}^1) + \\ &\quad (-2.5774 \cdot \alpha)Q_3(\widetilde{q}^1) + (0.4 - 0.7363 \cdot \alpha)Q_4(\widetilde{q}^1) + \\ &\quad (-3.3889 \cdot \alpha)Q_5(\widetilde{q}^1) + (0.9110 - 2.2232 \cdot \alpha)Q_6(\widetilde{q}^1)\end{aligned}$$

olur ve $\alpha = 0.1458$ *elde edilir.* $\alpha > t_*$ *olduğundan* t_* *alınır. Buradan*

$$(x^1, q^1) \quad = \quad (0.052, -0.427, -0.375, 0.292, -0.493, 0.587, -0.804, 0.023)^T$$

olur. Böyle devam edilirse 8 *adımdan sonra,*
$x^8 = (0.617, 0.070, -0.018, 0.180, 0.246, 0.721)^T$ *ve* $q^8 = (-0.514, -0.194)^T$ *elde edilir.*

$$P(x^8) = \begin{pmatrix} 0.634 & -0.305 & 0.871 \\ -0.305 & 0.353 & 0.100 \\ 0.871 & 0.100 & 0.382 \end{pmatrix}$$

matrisi ve $A(q)$*'nun kararlı üyesi*

$$A(q^8) = \begin{pmatrix} -3.873 & 2.708 & 0.097 \\ 1.941 & -3.154 & 4.988 \\ -1.708 & 1.623 & -3.222 \end{pmatrix} \quad \textit{olur.}$$

Örnek 3.2.8.

$$A_0 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \ A_1 = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -5 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix} \ \textit{ve}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 4 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

iken

$$A(q) = A_0 + q_1 A_1 + q_2 A_2, \quad q \in \mathbb{R}^2$$

matrisler ailesini ele alalım. $q = (0, 0)^T$ *için,*

$$A(q) = A_0 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

A_0 kararsızdır. $x^0 = (1/\sqrt{3}, 0, 0, 1/\sqrt{3}, 0, 1/\sqrt{3})^T$ ve $q^0 = (0,0)^T$ olsun. Böylece

$$\begin{aligned}(x^0, q^0) &= (x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0, x_5^0, x_6^0, q_1^0, q_2^0)^T \\ &= (0.5773, 0, 0, 0.5773, 0, 0.5773, 0, 0)^T\end{aligned}$$

olur.

$$B_0(x^0, q^0) = -P(x^0) = \begin{pmatrix} -0.5773 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5773 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5773 \end{pmatrix}$$

$$B_1(x^0, q^0) = A(q^0)^T P(x^0) + P(x^0)A(q^0) = \begin{pmatrix} -2.3094 & 0 & 0.5773 \\ 0 & -3.4641 & 3.4641 \\ 0.5773 & 3.4641 & -2.3094 \end{pmatrix}$$

$B_0(x^0, q^0)$ matrisinin özdeğeri -0.5773 (3 katlı) ve $B_1(x^0, q^0)$ matrisinin özdeğerleri 0.6902, -6.4326, -2.3405 dır. Maksimum özdeğer 0.6902 ve bu özdeğere karşı gelen birim özvektör $v = [0.1462, 0.6335, 0.7597]^T$ bulunur. En büyük özdeğer $B_1(x^0, q^0)$ matrisine ait olduğu için f_1 fonksiyonun (x^0, q^0) noktasındaki gradiyenti

$$\nabla f_1|_{(x^0,q^0)} = \begin{pmatrix} -0.2339 \\ -0.8170 \\ -1.1038 \\ 0.8504 \\ 1.5027 \\ 0.5790 \\ -5.8957 \\ 2.2500 \end{pmatrix}$$

elde edilir. $(x^1, q^1) = (x^0, q^0) - t \cdot \nabla f_1|_{(x^0,q^0)}$ vektörünün ilk altı bileşenin altı boyutlu birim küre yüzeyi üzerinde olmasını sağlayan $t_* = 0.2625$ elde edilir. Diğer taraftan $(\widetilde{x}^1, \widetilde{q}^1) = (x^0, q^0) - \alpha \cdot \nabla f_1|_{(x^0,q^0)}$

$$\begin{aligned}C(\alpha) = {} & (0.5773 + 0.2339 \cdot \alpha)Q_1(\widetilde{q}^1) + (0.8170 \cdot \alpha)Q_2(\widetilde{q}^1) + \\ & (1.1038 \cdot \alpha)Q_3(\widetilde{q}^1) + (0.5773 - 0.8504 \cdot \alpha)Q_4(\widetilde{q}^1) + \\ & (-1.5027 \cdot \alpha)Q_5(\widetilde{q}^1) + (0.5773 - 0.5790 \cdot \alpha)Q_6(\widetilde{q}^1)\end{aligned}$$

olur ve $\alpha = 0.2302$ *bulunur.* $\alpha < t_*$ *olduğundan* α *alınır. Buradan* $(x^1, q^1) = (0.631, 0.188, 0.254, 0.381, -0.346, 0.444, 1.357, -0.518)^T$ *olur. Böyle devam edilirse* 5 *adımdan sonra,*
$x^5 = (0.722, 0.278, 0.058, 0.424, -0.243, 0.396)^T$ *ve* $q^5 = (0.187, -0.101)^T$ *vektörleri elde edilir.*

$$P(x^5) = \begin{pmatrix} 0.722 & 0.278 & 0.058 \\ 0.278 & 0.424 & -0.243 \\ 0.058 & -0.243 & 0.396 \end{pmatrix}$$

ve $A(q)$*'nun kararlı üyesi*

$$A(q^5) = \begin{pmatrix} -3.350 & -2.076 & 0.273 \\ -2.076 & -3.914 & 2.704 \\ -2.076 & 2.704 & -2.700 \end{pmatrix} \quad \textit{olur.}$$

Şimdi de pozitiflik koşulunu da dahil ettiğimiz bir örnek inceleyelim.

Örnek 3.2.9.

$$A_0 = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \; A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -6 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \quad \textit{ve}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

iken

$$A(q) = A_0 + q_1 A_1 + q_2 A_2, \quad q \in \mathbb{R}^2$$

matrisler ailesini ele alalım. $q = (0,0)^T$ *için,*

$$A(q) = A_0 = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

A_0 kararsızdır. $x^0 = (0.1, 0, 0, 0.4, 0, 0.91104)^T$ ve $q^0 = (-4, 0)^T$ olsun. Böylece

$$\begin{aligned}(x^0, q^0) &= (x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0, x_5^0, x_6^0, q_1^0, q_2^0)^T \\ &= (0.1, 0, 0, 0.4, 0, 0.91104, -4, 0)^T\end{aligned}$$

olur.

$$B_0(x^0, q^0) = -P(x^0) = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.91104 \end{pmatrix}$$

$$B_1(x^0, q^0) = A(q^0)^T P(x^0) + P(x^0) A(q^0) = \begin{pmatrix} 0 & -1.4 & -4.8552 \\ -1.4 & -11.2 & -3.7766 \\ -4.8552 & -3.7766 & 10.9325 \end{pmatrix}$$

$B_0(x^0, q^0)$ matrisinin özdeğerleri -0.1, -0.4, -0.91104 ve $B_1(x^0, q^0)$ matrisinin özdeğerleri 13.16244, -12.24314, -1.18677 olur. Maksimum özdeğer 13.16244 ve bu özdeğere karşı gelen birim özvektör $v = (-0.33150, -0.12589, 0.935014)^T$ olur. En büyük özdeğer $B_1(x^0, q^0)$ matrisine ait olduğu için f_1 fonksiyonun (x^0, q^0) noktasındaki gradiyenti

$$\nabla f_1|_{(x^0, q^0)} = \begin{pmatrix} 2.6944 \\ -18.2021 \\ -13.7539 \\ -7.3012 \\ 51.8881 \\ 17.3575 \\ -4.2539 \\ 0.1801 \end{pmatrix}$$

elde edilir. $(x^1, q^1) = (x^0, q^0) - t \cdot \nabla f_1|_{(x^0, q^0)}$ vektörünün ilk altı bileşenin altı boyutlu birim küre yüzeyi üzerinde olmasını sağlayan $t_* = 0.0073$ elde edilir. Öte yandan $(\widetilde{x}^1, \widetilde{q}^1) = (x^0, q^0) - \alpha \cdot \nabla f_1|_{(x^0, q^0)}$

$$\begin{aligned}C(\alpha) &= (0.1 - 2.6944 \cdot \alpha) Q_1(\widetilde{q}^1) + (18.2021 \cdot \alpha) Q_2(\widetilde{q}^1) + \\ &\quad (13.7539 \cdot \alpha) Q_3(\widetilde{q}^1) + (0.4 + 7.3012 \cdot \alpha) Q_4(\widetilde{q}^1) + \\ &\quad (-51.8881 \cdot \alpha) Q_5(\widetilde{q}^1) + (0.9110 - 17.3575 \cdot \alpha) Q_6(\widetilde{q}^1)\end{aligned}$$

ve $\alpha = 0.4832$ *elde edilir.* $\alpha > t_*$ *olduğundan* t_* *alınır.* P *matrisinin sadece pozitif bölgede kalmasını sağlayan yani* $P > 0$ *bölgesinin sınırına gelecek* $\eta = 0.0031$ *değeri elde edilir.* $\eta < t_*$ *olduğundan*

$$(x^1, q^1) = (x^0, q^0) - t \cdot \nabla f_1|_{(x^0,q^0)}$$

denkleminde t *yerine* t_* *değeri alınır. Buradan*

$$(x^1, q^1) = (0.0914, 0.0576, 0.0435, 0.4231, -0.1644, 0.8560, -3.9865, -0.0005)^T$$

olur. 6 *adımdan sonra,* $x^6 = (0.1849, 0.1265, 0.0027, 0.4429, -0.2747, 0.8069)^T$ *ve* $q^6 = (-3.9739, -0.0027)^T$ *elde edilir.*

$$P(x^6) = \begin{pmatrix} 0.1849 & 0.1265 & 0.0027 \\ 0.1265 & 0.4429 & -0.2747 \\ 0.0027 & -0.2747 & 0.8069 \end{pmatrix}$$

ve $A(q)$*'nun kararlı üyesi*

$$A(q^6) = \begin{pmatrix} -1.5419 & -1.2319 & 0.4831 \\ -1.2319 & -1.0876 & 0.9232 \\ 0.4831 & 0.9232 & -5.1649 \end{pmatrix}$$

bulunur.

3.3 $P = B^T B$ durumunda gradiyent yönteminin uygulanması

Bilindiği gibi $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ herhangi matrisi verildiğinde $B^T B$ matrisi simetrik pozitif yarı belirli olmaktadır.

$x \in \mathbb{R}^{n^2}$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n^2})^T$ olmak üzere

$$B = B(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_{n+1} & x_{n+2} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n(n-1)+1} & x_{n(n-1)+2} & \cdots & x_{n^2} \end{pmatrix} \tag{3.36}$$

$n \times n$ boyutlu B matrisini parametrik biçimde yazalım. P matrisini $B^T B$ olarak tanımlarsak ($P = B^T B$) pozitif yarı tanımlı $n \times n$ boyutlu simetrik matrisi elde edilir.

Aşağıdaki örnekte ailede kararlı eleman bulunması problemi için P olarak böyle matrisler denenmektedir.

Örnek 3.3.1.

$$A_0 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \ ve$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

iken

$$A(q) = A_0 + q_1 A_1 + q_2 A_2, \quad q \in \mathbb{R}^2$$

matrisler ailesini ele alalım. $q = (0,0)^T$ *için,*

$$A(q) = A_0 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisi kararsızdır. $x^0 = (0.2, 0.1, 0.4, \sqrt{1 - 0.2^2 - 0.1^2 - 0.4^2})^T$ *ve* $q^0 = (0,1)^T$ *olsun. Böylece* $(x^0, q^0) = (0.2, 0.1, 0.4, 0.8888, 0, 1)^T$ *olur.*

$$B = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.4 & 0.8888 \end{pmatrix} \tag{3.37}$$

$P = B^T B$ *ise*

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3755 \\ 0.3755 & 0.7999 \end{pmatrix} \tag{3.38}$$

elde edilir.

$$A(q^0)^T P(x^0) + P(x^0) A(q^0) = \begin{pmatrix} 0.2952 & 4.4 \\ 4.4 & 4.7021 \end{pmatrix}$$

matrisinin özdeğerleri $8.3145, \ -0.6571$ *dır. Maksimum özdeğer* 8.3145 *ve bu özdeğere karşı gelen birim özvektör* $v = (0.6345, 0.7728)^T$ *olur.* $\phi(x,q)$ *fonksiyonun* (x^0, q^0) *noktasındaki gradiyenti*

$$\nabla \phi(x,q)|_{x=x^0, q=q^0} = [0.7820, 2.7419, 5.9834, 15.5319, -5.8513, 7.0532]^T$$

elde edilir. $(x^1, q^1) = (x^0, q^0) - t \cdot \nabla\phi(x, q)|_{x=x^0, q=q^0}$ *vektörünün ilk dört bileşenin dört boyutlu birim küre yüzeyi üzerinde olmasını sağlayan* $t_* = 0.1166$ *olur.*

$$\begin{aligned}(x^1, q^1) \;\; = \;\; & (0.2, 0.1, 0.4, 0.8888, 0, 1)^T - (0.1166) \cdot (0.7820, 2.7419, \\ & 5.9834, 15.5319, -5.8513, 7.0532)^T\end{aligned}$$

eşitliğinden

$$(x^1, q^1) = (0.1087, -0.2197, -0.2878, -0.9225, 0.6824, 0.1774)^T$$

noktasına ulaşılır. Buradan

$$B = \begin{pmatrix} 0.1087 & -0.2197 \\ -0.2978 & -0.9225 \end{pmatrix} \tag{3.39}$$

ve

$$P = \begin{pmatrix} 0.1005 & 0.2508 \\ 0.2508 & 0.8994 \end{pmatrix} \tag{3.40}$$

matrisleri elde edilir.

$$A(q^1)^T P(x^1) + P(x^1) A(q^1) = \begin{pmatrix} 1.1137 & 1.0088 \\ 1.0088 & -5.5234 \end{pmatrix}$$

matrisinin özdeğerleri -5.6734, 1.2637 *olur.* 8 *adımdan sonra,* $x^8 = (0.9197, -0.2542, -0.1201, -0.2738)^T$ *ve* $q^8 = (0.9466, 0.8364)^T$ *noktaları için,*

$$P(x^8) = \begin{pmatrix} 0.8603 & -0.2009 \\ -0.2009 & 0.1396 \end{pmatrix}$$

matrisi ve $A(q)$*'nun kararlı üyesi*

$$A(q^8) = \begin{pmatrix} -3.0627 & 0.7979 \\ 0.7979 & -0.5170 \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir.

Örnek 3.3.2. *Yukarıdaki matrisler ailesini, algoritmadaki küre koşulunun yanısıra türev koşulunu da göz önüne alarak, tekrar ele alalım.*

$$A_0 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \;\; A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \text{ ve}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

iken

$$A(q) = A_0 + q_1 A_1 + q_2 A_2 \quad q \in \mathbb{R}^2$$

olarak almıştık. $q = (0,0)^T$ *için,*

$$A(q) = A_0 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

A_0 *kararsızdır.* $x^0 = (0.2, 0.1, 0.4, 0.8888)^T$ *ve* $q^0 = (0,1)^T$ *olsun. Böylece* $(x^0, q^0) = (0.2, 0.1, 0.4, 0.8888, 0, 1)^T$ *başlangıç vektörüdür. Buradan*

$$B = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.4 & 0.8888 \end{pmatrix} \tag{3.41}$$

matrisini ve $P = B^T B$ *olduğundan*

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3755 \\ 0.3755 & 0.7999 \end{pmatrix} \tag{3.42}$$

matrisini elde ederiz.

$$A(q^0)^T P(x^0) + P(x^0) A(q^0) = \begin{pmatrix} 0.2952 & 4.4 \\ 4.4 & 4.7021 \end{pmatrix}$$

matrisinin özdeğerleri 8.3145, −0.6571 *olur. Maksimum özdeğer* 8.3145 *ve bu özdeğere karşı gelen birim özvektör* $v = [0.6345, 0.7728]^T$*'dır.* $\phi(x,q)$ *fonksiyonunun* (x^0, q^0) *noktasındaki gradiyenti*

$$\nabla\phi(x,q)|_{x=x^0, q=q^0} = [0.7820, 2.7419, 5.9834, 15.5319, -5.8513, 7.0532]^T.$$

$(x^1, q^1) = (x^0, q^0) - t \cdot \nabla\phi(x,q)|_{x=x^0, q=q^0}$ *vektörünün ilk dört bileşenin dört boyutlu birim küre yüzeyi üzerinde olmasını sağlayan* $t_* = 0.1166$ *elde edilir. Öte yandan* $(\widetilde{x}^1, \widetilde{q}^1) = (x^0, q^0) - \alpha \cdot \nabla\phi(x,q)|_{x=x^0, q=q^0}$.

$$B = \begin{pmatrix} 0.2 - 0.7820\alpha & 0.3755 - 2.7419\alpha \\ 0.3755 - 2.7419\alpha & 0.7999 - 5.9834\alpha \end{pmatrix} \tag{3.43}$$

$P = B^T B$ *alıp* $C(\alpha) = A(\widetilde{q}^1)^T P(\widetilde{x}^1) + P(\widetilde{x}^1) A(\widetilde{q}^1)$ *denilirse* *girdileri*

$$c_{11} = 2.952 - 110.469\alpha + 1201.710\alpha^2 - 3340.753\alpha^3,$$

$$c_{12} = 4.392 - 182.302\alpha + 2380.217\alpha^2 - 9138.082\alpha^3,$$

$$c_{21} = 4.392 - 182.302\alpha + 2380.217\alpha^2 - 9138.082\alpha^3,$$

$$c_{22} = 4.694 - 243.558\alpha + 4241.495\alpha^2 - 24908.485\alpha^3$$

olan

$$C(\alpha) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir. $F(\alpha) = \max_{\|v\|=1} v^T\ C(\alpha)\ v$ *olup,* $F(\alpha)$*'nın türevi alınır. Bu türev sıfıra eşitlenirse* $F'(\alpha) = v^T(\alpha)\ C'(\alpha)\ v(\alpha) = 0$ *denkleminde* $v(\alpha) = (0.6345, 07728)^T$ *alınırsa* $-75573.76\alpha^2 + 10710.24\alpha - 369.15 = 0$ *elde edilir ve* $\alpha = 0.0591$ *bulunur.* $\alpha < t_*$ *olduğundan* α *değeri alınır.*

$$\begin{aligned} (x^1, q^1) &= (0.2, 0.1, 0.4, 0.8888, 0, 1)^T - \\ &\quad (0.0591) \cdot (0.7820, 2.7419, 5.9834, 15.5319, -5.8513, 7.0532)^T \end{aligned}$$

eşitliğinden

$$(x^1, q^1) = (0.1537, -0.0622, 0.0458, -0.0304, 0.3463, 0.5825)^T$$

noktasına varılır. Buradan

$$B = \begin{pmatrix} 0.1537 & -0.0622 \\ 0.0458 & -0.0304 \end{pmatrix} \tag{3.44}$$

ve

$$P = \begin{pmatrix} 0.0257 & -0.0109 \\ -0.0109 & 0.0048 \end{pmatrix} \tag{3.45}$$

matrisleri elde edilir.

$$A(q^1)^T P(x^1) + P(x^1) A(q^1) = \begin{pmatrix} -0.0691 & 0.0460 \\ 0.0460 & -0.0265 \end{pmatrix}$$

matrisinin özdeğerleri 0.0029, -0.0985 *olur.* 5 *adımdan sonra,* $x^5 = (0.1373, -0.0874, 0.0464, -0.0295)^T$ *ve* $q^5 = (0.3473, 0.5886)^T$ *noktaları için,*

$$P(x^5) = \begin{pmatrix} 0.0210 & -0.0133 \\ -0.0133 & 0.0085 \end{pmatrix}$$

matrisi ve $A(q)$'nun kararlı üyesi

$$A(q^5) = \begin{pmatrix} -0.0072 & 0.9578 \\ 3.2267 & -0.5595 \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir.

Örnek 3.3.3.

$$A_0 = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \; A_1 = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & -5 & -2 \end{pmatrix} \; ve$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

iken

$$A(q) = A_0 + q_1 A_1 + q_2 A_2, \quad q \in \mathbb{R}^2$$

matrisler ailesini ele alalım. $q = (0,0)^T$ *için,*

$$A(q) = A_0 = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

A_0 *kararsızdır.* $x^0 = (0.25, 0.35, 0.1, 0.15, 0.02, 0.3, 0.09, 0.05, 0.8255)^T$ *ve* $q^0 = (1,0)^T$ *olsun. Böylece*

$$(x^0, q^0) = (0.25, 0.35, 0.1, 0.15, 0.02, 0.3, 0.09, 0.05, 0.8255, 1, 0)^T$$

olur. Buradan

$$B = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.35 & 0.1 \\ 0.15 & 0.02 & 0.3 \\ 0.09 & 0.05 & 0.82553 \end{pmatrix} \tag{3.46}$$

matrisi $P = B^T B$ *olduğundan*

$$P = \begin{pmatrix} 0.093 & 0.095 & 0.144 \\ 0.095 & 0.125 & 0.082 \\ 0.144 & 0.082 & 0.781 \end{pmatrix} \tag{3.47}$$

matrisi elde edilir.

$$A(q^0)^T P(x^0) + P(x^0)A(q^0) = \begin{pmatrix} -0.543 & -0.119 & -1.261 \\ -0.119 & 0.276 & -0.944 \\ -1.261 & -0.944 & -6.003 \end{pmatrix}$$

matrisinin özdeğerleri $-6.415,\ 0.421,\ -0.276$ *olur. Maksimum özdeğer* 0.421 *ve bu özdeğere karşı gelen birim özvektör* $v = (-0.090, -0.982, 0.162)^T$ *olur.* $\phi(x,q)$ *fonksiyonun* (x^0, q^0) *noktasındaki gradiyenti*

$$\begin{aligned} \nabla\phi(x,q)|_{x=x^0,q=q^0} &= [0.118, 2.263, -0.414, -0.012, -0.175, 0.030, \\ &\quad -0.038, -0.628, 0.112, 1.007, -0.776]^T \end{aligned}$$

olur. t_* *değerini* 0.25 *seçelim.*

$$\begin{aligned} (x^1, q^1) &= (0.25, 0.35, 0.1, 0.15, 0.02, 0.3, 0.09, 0.05, 0.82553, 1, 0)^T - \\ &\quad (0.5/2) \cdot (0.118, 2.263, -0.414, -0.012, -0.175, 0.030, \\ &\quad -0.038, -0.628, 0.112, 1.007, -0.776)^T \end{aligned}$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned} (x^1, q^1) &= (0.220, -0.215, 0.203, 0.153, 0.063, 0.292, \\ &\quad 0.099, 0.207, 0.797, 0.748, 0.194)^T \end{aligned}$$

noktasına varılır. Buradan

$$B = \begin{pmatrix} 0.220 & -0.215 & 0.203 \\ 0.153 & 0.063 & 0.292 \\ 0.099 & 0.207 & 0.797 \end{pmatrix} \tag{3.48}$$

ve

$$P = \begin{pmatrix} 0.081 & -0.017 & 0.168 \\ -0.017 & 0.093 & 0.139 \\ 0.168 & 0.139 & 0.762 \end{pmatrix} \tag{3.49}$$

matrisleri elde edilir.

$$A(q^1)^T P(x^1) + P(x^1)A(q^1) = \begin{pmatrix} -1.126 & -0.471 & -1.052 \\ 0.471 & -0.0450 & -0.342 \\ -1.052 & -0.3421 & -4.458 \end{pmatrix}$$

matrisin özdeğerleri 0.244, -1.103, -4.771 *olur. Maksimum özdeğer* 0.244 *olur.* $\phi(x^0, q^0) > \phi(x^1, q^1)$ *olduğu için seçtiğimiz* t_* *değeri uygundur.* 8 *adımdan sonra*

$$x^8 = (0.150, 0.070, 0.200, 0.236, -0.043, 0.252, 0.069, 0.036, 0.810)^T$$

ve

$$q^8 = (0.765, 0.350)^T$$

noktaları için,

$$P(x^8) = \begin{pmatrix} 0.083 & 0.002 & 0.145 \\ 0.002 & 0.008 & 0.032 \\ 0.145 & 0.032 & 0.760 \end{pmatrix}$$

matrisi ve $A(q)$*'nun kararlı üyesi*

$$A(q^8) = \begin{pmatrix} -5.246 & 0.884 & 3.5171 \\ 3.181 & -0.403 & 0.222 \\ -0.234 & -0.178 & -3.531 \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir.

3.4 Polinom ve matris ailesinde kararlı eleman için Polyak algoritması

3.4.1 Gürbüzlük Sınırı

Önce parametreye bağlı $p(s,q)$ polinom ailesi için gürbüzlük sınırını elde etme problemini ele alalım ([18]). $p(s,0)$ kararlı bir polinom ve $\| \,.\, \|$ vektör normu, $Q_\gamma = \{q : \| q \| \leq \gamma\}$, γ yarıçaplı kapalı yuvarı temsil etsin. Gürbüzlük sınırı

$$\gamma_{\max} = \max\{\gamma : \forall q \in Q_\gamma \text{ için } \; p(s,q) \text{ kararlıdır}\} \tag{3.50}$$

gibi tanımlanmaktadır. Aşağıdaki önermede polinomların perturbe edilmiş köklerinin lineer yaklaşımı için bir formül sunulur.

Önerme 3.4.2. *$p(s,q)$, $q=(q_1,q_2,\dots,q_l)^T \in Q \subseteq \mathbb{R}^l$ parametre vektörüne bağlı n. dereceden bir polinom olsun. Varsayalım ki $p(s,q)$ polinomu, q'ya göre $q=0$ noktasında diferansiyellenebilir olsun ve*

$$\pi_i(s) = \tfrac{\partial p(s,q)}{\partial q_i}|_{q=0}, \quad i=1,2,\dots,l. \tag{3.51}$$

olarak temsil edilsin. $s_k = s_k(0)$ sayısı, $p_0(s)=p(s,0)$ polinomunun basit bir kökü olsun. O halde

$$\pi^k = (\pi_1^k, \pi_2^k, \dots, \pi_l^k)^T, \quad \pi_i^k = \pi_i(s_k), \quad r_k = p_0'(s)|_{s=s_k} \tag{3.52}$$

olmak üzere yeterince küçük q'lar için $p(s,q)$ polinomunun $s_k(q)$ kökleri için

$$s_k(q) = s_k - \tfrac{(\pi^k,q)}{r_k} + o(q) \tag{3.53}$$

olur.

$p(s,0)$ Hurwitz kararlı bir polinom olsun. Diğer bir deyişle $max_k \mathrm{Re(s_k)} < 0$ olsun. Perturbe edilmiş $p(s,q)$ polinomunun kararlı olması için birinci dereceden koşullar verilebilir. Verilen bir q için $\mathrm{Res_k(q)} < 0$ olsun. O zaman

$$\mathrm{Res_k} - \mathrm{Re}\frac{(\pi^{\mathrm{k}},\mathrm{q})}{\mathrm{r_k}} < 0, \quad (\forall \mathrm{k}\, \text{için})$$

veya kompakt formda

$$\begin{gathered} \max_k(\mathrm{Res_k} + (\mathrm{u^k},\mathrm{q})) < 0, \\ u_i^k = -\mathrm{Re}(\pi_{\mathrm{i}}^{\mathrm{k}}/\mathrm{r_k}), \\ i=1,2,\dots,l. \end{gathered} \tag{3.54}$$

gibi yazılabilir.

Algoritma 3.4.3. 1. Adım: *$\widehat{q}=0$ alınır.*

2. Adım: *$p(s,0)$' ın s_k köklerini ve (3.51), (3.52), (3.54)'e göre u^k vektörleri hesaplanır.*

3. Adım: $h^k = \max_{\|q\|\leq 1}(u^k, q)$ *ve maksimalleştirici* $q^k = \arg\max_{\|q\|\leq 1}(u^k, q)$ *hesaplanır.* $\gamma = \min_k(-\mathrm{Res_k}/\mathrm{h^k})$ *ve* $m = \arg\min_k(-\mathrm{Res_k}/\mathrm{h^k})$ *hesaplanır. Yön olarak* q^m*, adım büyüklüğü olarak* γ *alınır :* $dq = \gamma \cdot q^m$.

4. Adım: *Eğer* $p(s, dq)$ *polinomu kararlı ise* $\widehat{q} := \widehat{q} - dq$ *değerleri değiştirilir ve* $\widehat{q} := \widehat{q} + dq$ *konulur ve* 2. *adıma gidilir.*

Aksi takdirde $\alpha_{\min} = \min\{\alpha > 0 : p(s, \alpha \cdot dq) \textit{kararsızdır}\}$ *bulunur ve* $\widehat{q} := \widehat{q} + \alpha_{\min} \cdot dq$ *değeri hesaplanır.*

5. Adım: *Gürbüzlük sınırı için bir üst sınır olarak* $\overline{\gamma} = \| \widehat{q} \|$ *kabul edilir.*

Algoritmadaki h^k ve q^k ifadelerini daha açık ifade edelim.

$$(u^k, q) \quad = \quad \| u^k \| \, \| q \| \, \cos\theta \quad (\| q \| \leq 1)$$

Bunu maksimum yapmak için $\theta = 0$, $\| q \| = 1$ alınır. Buradan $q^k = \frac{u^k}{\|u^k\|}$ ve

$$h^k = (u^k, q^k) = (u^k, \frac{u^k}{\| u^k \|}) = \| u^k \|$$

eşitliklerini gerçekler.

Bu algoritmayı uyguladığımız birkaç örnek inceleyelim.

Örnek 3.4.4.

$$\begin{aligned} p(s,q) \quad = \quad & s^3 + (-q_2 + 2q_1 + 8)s^2 + (-4q_2^2 + 5 + 19q_2q_1 + 39q_1 - 33q_1^2)s + \\ & 10 + 68q_1 - 81q_1^3 - 14q_2^3 + 61q_2^2 + 3q_1^2 - 61q_2q_1 - 58q_1q_2^2 - \\ & 7q_2 + 195q_2q_1^2 \end{aligned}$$

polinom ailesini ele alalım.

$\widehat{q} = q^0 = (0,0)$ *alınırsa* $p(s, q^0) = s^3 + 8s^2 + 5s + 10$ *polinomu elde edilir. Bu polinomun kökleri* $s_1 = -7.511$, $s_2 = -0.244 - 1.127j$, $s_3 = -0.244 + 1.127j$ *olur.*

(3.51) eşitliğine göre $\pi_1(s) = 2s^2 + 39s + 68$ *ve* $\pi_2(s) = -s^2 - 7$ *elde edilir.*

$$\pi_1(s^1) = \pi_1^1 = -112.104, \quad \pi_2(s^1) = \pi_2^1 = -63.424,$$

$$\pi_1(s^2) = \pi_1^2 = 56.052 - 42.877j, \quad \pi_2(s^2) = \pi_2^2 = -5.787 - 0.550j,$$

$$\pi_1(s^3) = \pi_1^3 = 56.052 + 42.877j, \quad \pi_2(s^3) = \pi_2^3 = -5.787 + 0.550j$$

olup buradan

$$\pi^1 = (-112.104, -63.424)^T,$$

$$\pi^2 = (56.052 - 42.877j, -5.787 - 0.550j)^T,$$

$$\pi^3 = (56.052 + 42.877j, -5.787 + 0.550j)^T$$

ve

$$r_1 = 54.086,$$

$$r_2 = -2.543 - 16.390j,$$

$$r_3 = -2.543 + 16.390j$$

değerlerine ulaşılır.

(3.54) eşitsizliğine göre $u^1 = (2.072, 1.172)$, $u^2 = (-2.036, -0.086)$ *ve* $u^3 = (-2.036, -0.086)$ *olur.* $h^1 = 2.381$, $h^2 = 2.038$ *ve* $h^3 = 2.038$ *elde edilir.* $q^1 = (0.870, 0.492)$ *ve* $q^2 = (-0.999, -0.042)$ *bulunur.* $\gamma = 0.119$ *ve* $m = 2$ *olup* $dq = (-0.119, -0.005)$ *elde edilir.* $p(s, dq)$ *kararsız olduğundan* $\alpha_{\min} = 0.914$ *olur.* $\widehat{q} = (-0.109, -0.004)$ *elde edilir. Böylece* $\overline{\gamma} = 0.109$ *gürbüzlük sınırı için bir üst sınırdır.*

Örnek 3.4.5.

$$p(s,q) \quad = \quad s^3 + (q_1 + 0.5)s^2 + (-q_1 + 0.4 + q_2)s - q_2 + 0.1$$

polinom ailesini ele alalım.

$\widehat{q} = q^0 = (0, 0)$ *alınırsa* $p(s, q^0) = s^3 + 0.5s^2 + 0.4s + 0.1$ *polinomu elde edilir. Bu polinomun kökleri* $s_1 = -0.102 + 0.573j$, $s_2 = -0.294$, $s_3 = -0.102 - 0.573j$ *olur.*

(3.51)'e göre $\pi_1(s) = 2s^2 + 39s + 68$ *ve* $\pi_2(s) = -s^2 - 7$ *elde edilir.*

$$\pi_1(s^1) = \pi_1^1 = -0.215 - 0.691j, \quad \pi_2(s^1) = \pi_2^1 = -1.102 + 0.573j,$$

$$\pi_1(s^2) = \pi_1^2 = 0.381, \quad \pi_2(s^2) = \pi_2^2 = -1.294,$$

$$\pi_1(s^3) = \pi_1^3 = -0.215 + 0.691j, \quad \pi_2(s^3) = \pi_2^3 = -1.102 - 0.573j$$

olup buradan

$$\pi^1 = (-0.215 - 0.691j, -1.102 + 0.573j)^T,$$

$$\pi^2 = (0.381, -1.294)^T,$$

$$\pi^3 = (-0.215 + 0.691j, -1.102 - 0.573j)^T$$

ve

$$r_1 = -0.657 + 0.22j,$$

$$r_2 = 0.365,$$

$$r_3 = -0.657 - 0.22j$$

değerleri elde edilir. (3.54) eşitsizliğine göre

$u^1 = (0.021, -1.769)$, $u^2 = (-1.042, 3.539)$, $u^3 = (0.021, -1.769)$ *olur.*

$h^1 = 1.7699$, $h^2 = 3.689$ *ve* $h^3 = 1.769$ *olur.* $q^1 = (0.012, -0.999)$ *ve* $q^2 = (-0.282, 0.959)$ *bulunur.* $\gamma = 0.058$ *ve* $m = 1$ *olup*

$$dq = (0.0006, -0.058)$$

vektörü elde edilir. $p(s, dq)$ *kararlı olduğundan* $q^1 = (0.0006, -0.058)$ *olur.*

3 *adımdan sonra* $q^3 = (-0.002, -0.080)$ *ve* $p(s, q^3)$ *'ün kökleri* $s_1 = -0.216 + 0.496j$, $s_2 = -0.064$, $s_3 = -0.216 - 0.496j$ *elde edilir.*

$\alpha_{\min} = 0.541$ *olup* $\widehat{q} = q^3 + \alpha_{\min} \cdot dq = (0.004, -0.061)$ *elde edilir ve* $\| \widehat{q} \| = 0.062$ *gürbüzlük sınırı için bir üst sınır olur.*

3.4.6 Polinomlar Ailesinde Kararlı Elemanın Varlığı Problemi

Parametreye bağlı $p(s, q)$ $(q \in \mathbb{R}^l)$ polinom ailesi verilsin ([18]). Bu aileden alınan $p(s, 0)$ polinomu kararsız bir polinom olsun. Yani $\mathrm{Res_k}(0) \geq 0$ eşitsizliği sağlanır. Problem, $p(s, \widehat{q})$'u kararlı yapan $\widehat{q}$'yı bulmayı amaçlar. Burada $\mathrm{Res_k(q)} < 0$, $\mathrm{k} = 1, 2, \ldots, \mathrm{n}$ koşullarını sağlayacak şekilde q noktasını bulmak için $p(s, q)$' nun köklerini iteratif olarak değiştirmek fikrini temel alınır. $q = 0$ noktasında $\mathrm{Res_k(q)} \approx (\mathrm{a_k, dq}) - \mathrm{b_k}$ lineer yaklaşımları kurulur ve

$$\begin{gathered} \min \| dq \| \\ (a_k, dq) - b_k \leq 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n \end{gathered} \tag{3.55}$$

kuadratik programlama problemi çözülür. Yani her adımda bir kuadratik programlama problemi çözülür.

$\delta > 0$ seçelim. Eğer $\max_k \mathrm{Res_k} < -\delta$ ise polinom kararlıdır. $\triangle_k$, polinomun köklerinin reel kısmı maksimum olan s_k kökünün perturbe edilmişi olsun. Bu kökü kararlı yapmak için $\mathrm{Re(s_k + \triangle_k)} \leq -\delta$ koşulu konulmaktadır. Bu koşula denk olarak

$$\mathrm{Re\triangle_k} \leq -\mu_\mathrm{k}, \quad \mu_\mathrm{k} = (\mathrm{Res_k} + \delta) \tag{3.56}$$

koşulu yazılabilir. Aşağıda polinomun köklerinin reel kısmı maksimum olanın tek katlı yada çift katlı olmasına göre değişen lineerleştirilmiş koşullar verilir :

Birinci mertebeden yaklaşım. Varsayalım ki polinomun köklerinin reel kısmı maksimum olanın katlılığı 1 olsun. Başka bir deyişle $p(s_k, 0) = 0$; $p'(s,0)|_{s=s_k} \neq 0$' dır. (3.56) koşulunun lineerleştirilmiş hali

$$\begin{aligned} &(w^k, dq) \leq -\mu_k, \quad w_i^k = -\mathrm{Re}\tfrac{\pi(\mathrm{s_k})}{\mathrm{p}_0'(\mathrm{s_k})}, \quad \mathrm{\pi_i(s)} = \tfrac{\partial \mathrm{p(s,q)}}{\partial \mathrm{q_i}}|_{\mathrm{q}=0}, \\ &p_0'(s_k) = p'(s,0)|_{s=s_k} \end{aligned} \tag{3.57}$$

olarak verilir.

İkinci mertebeden yaklaşım. Varsayalım ki polinomun köklerinin reel kısmı maksimum olanın katlılığı 2 olsun. Başka bir deyişle $p(s_k, 0) = 0$; $p'(s,0)|_{s=s_k} = 0$; $p''(s,0)|_{s=s_k} \neq 0$' dır.

$$u_i^k = \tfrac{\pi'(s_k)}{p_0''(s_k)}, \quad v_i^k = \tfrac{2\pi_i(s_k)}{p_0''(s_k)} \tag{3.58}$$

gibi işaretleyelim. Eğer s_k kökü kompleks kök $s_k^+ = \widehat{s}_k + jt_k$ ve $s_k^- = \widehat{s}_k - jt_k$ (Burada $\widehat{s}_k \leq -\delta$ ve $t_k \neq 0$) ise (3.56) koşulunun lineerleştirilmiş hali

$$\begin{cases} (u^k, dq) = \mu_k, \\ (-v^k, dq) \leq -\mu_k^2 \end{cases} \tag{3.59}$$

gibidir.

Eğer s_k kökü reel kökse, (3.56) koşulunun lineerleştirilmiş hali

$$\begin{cases} (-u^k, dq) \leq -\mu_k, \\ (v^k, dq) = -\mu_k^2 \end{cases} \tag{3.60}$$

gibidir.

Algoritma 3.4.7. **1. Adım:** *$\widehat{q} = 0$ alınır.*

2. Adım: *s_k lar, $p(s,0)$' ın kökleri olmak üzere $\eta = \max_k \mathrm{Res_k}$ hesaplanır.*

$\eta \leq -\delta$ ise algoritma durdurulur öyle ki $p(s,\widehat{q})$ kararlıdır.

Aksi takdirde reel kısmı en büyük olan kökünü belirleyip, (3.57), (3.58)'e göre w^k, u^k, v^k hesaplanır ve (3.57), (3.59), (3.60) eşitsizlikleri oluşturulur.

3. Adım: *(3.57), (3.59), (3.60) kısıtları altında kuadratik programlama problemi (3.55) çözülür ve dq elde edilir.*

4. Adım: *s_k'lar $p(s,\gamma \cdot dq)$ polinomunun kökleri ve $\eta(\gamma) = \max_k \mathrm{Res_k}$ olmak üzere $\gamma_{\min} = \arg\min\limits_{0\leq\gamma\leq 1} \eta(\gamma)$ hesaplanır. $q := q - \gamma_{\min} \cdot dq$ değerleri değiştirilir ve $\widehat{q} := \widehat{q} + \gamma_{\min} \cdot dq$ değeri konulur. 2. adıma gidilir.*

Örnek 3.4.8.

$$p(s,q) \quad = \quad s^3 + q_1 s^2 + (q_2 - 5q_1 - 13)s + q_2$$

polinom ailesini ele alalım. Kararlı elemanın varlığını araştıralım.

$\delta = 0.001 > 0$ ve $\widehat{q} = q^0 = (0,0)$ alalım. $p(s,q^0) = s^3 - 13s$ polinomunu elde ederiz. Bu polinomun kökleri $s_1 = 0$, $s_2 = 3.605$, $s_3 = -3.605$ olur. O halde reel kısmı maksimum olan kök $s_2 = 3.605$ köküdür. Bu kökün katlılığı 1 olduğu için birinci mertebeden yaklaşımı kullanırız.

(3.56) denklemine dayanarak $\mu_0 = 3.6065$ elde ederiz.

$p_0'(s_2) = p'(s,0)|_{s=s_2} = 26$, $\pi_1(s) = s^2 - 5s$, $\pi_2(s) = s + 1$,

$w^0 = (0, 1933, -0.1771)^T$ *elde ederiz.*

$$\min(x_1^2 + x_2^2)$$
$$0.1933x_1 - 0.1771x_2 \leq -3.6065$$

kuadratik programlama problemi çözülürse $dq = (-10.141, 9.28)$ elde edilir.

$\gamma_{\min} = 0.3$ olup $q^1 = (-3.042, 2.786)$ olur.

28 adımdan sonra $q^{28} = (3.396, 42.511)$ vektörü elde edilir ve bu vektöre karşı gelen $p(s,q^{28}) = s^3 + 3.396s^2 + 12.529s + 42.511$ polinomunun kökleri $s_1 = -0.0009 + 3.538j$, $s_2 = -0.0009 - 3.538j$, $s_3 = -3.394$ olup kararlı bir polinomdur.

Örnek 3.4.9.

$$A(q) = \begin{pmatrix} 6-3q_1-q_2-q_3 & 2+q_1-4q_3 & -2-5q_1-q_2-q_3 \\ 5+q_1+3q_2-q_3 & 8-2q_1-2q_2+2q_3 & 3+q_1-3q_3 \\ 5+5q_1-q_2+2q_3 & -4q_1-5q_2+q_3 & -2q_1-q_2 \end{pmatrix}$$

matrisler ailesi verilsin.

$\delta = 0.1 > 0$ ve $\widehat{q} = q^0 = (0,0,0)$ alalım. $A(q^0)$ matrisinin karakteristik polinomu $p(s,q^0) = s^3 - 14s^2 + 48s - 110$ olur. Bu polinomun kökleri $s_1 = 10.402$,$s_2 = 1.798 + 2.708j$,$s_3 = 1.798 - 2.708j$'dır. O halde polinomun köklerinin reel kısmı maksimum olanı $s_1 = 10.4021$ köküdür. Bu kökün katlılığı 1 olduğu için birinci mertebeden yaklaşım kullanılır.

(3.56) denklemine dayanarak $\mu_0 = 10.502$ elde edilir.

$p_0'(s_1) = p'(s,0)|_{s=s_1} = 81.354$, $\pi_1(s) = 7s^2 - 24s - 351$, $\pi_2(s) = 4s^2 - 22s - 100$, $w^0 = (-1.927, -1.278, -2.933)^T$ *olur.*

$$\min(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$
$$-1.9271x_1 - 1.278x_2 - 2.9336x_3 \leq -10.502$$

kuadratik programlama problemi çözülürse $dq = (1.4504, 0.9619, 2.2080)$ vektörü elde edilir. $\gamma_{\min} = 0.43$ ve $q^1 = (0.6237, 0.4136, 0.9494)$ olur. 14 adımdan sonra $q^{14} = (9.4332, -0.1993, -2.1716)$ vektörü elde edilir ve bu vektöre karşı gelen $A(q^{14})$ matrisinin özdeğerleri $s_1 = -26.7003 + 53.7849j$, $s_2 = -26.7003 - 53.7849j$, $s_3 = -0.0062$ olup kararlı bir matristir.

Örnek 3.4.10.

$$A(q) = \begin{pmatrix} 1+q_1 & -3-q_1q_3 & -3q_2q_3-7 \\ -5-q_1+q_3 & -1 & -3+q_2 \\ 4+q_1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

ailesi verilsin. Bu ailenin karakteristik polinomu

$$\begin{aligned} p(s,q) &= s^3 + (-q_1+1)s^2 + (-5q_1q_3 - 1q_1^2q_3 + 3q_3 - 2q_2 + 12q_2q_3 + 2q_1 + \\ &\quad 18 + 3q_1q_3q_2 + q_1q_3^2)s - 18q_2q_3 + 5q_1q_2 - 4q_1^2q_3 - 17q_1q_3 - \\ &\quad 26q_1 + 17q_3 + 14q_2 - 100 + q_1^2q_3q_2 + q_1q_3q_2 + q_1q_3^2 + 6q_2q_3^2 \end{aligned}$$

$\delta = 0.001 > 0$ ve $\widehat{q} = q^0 = (0,0,0)$ alalım. $A(q^0)$ matrisinin karakteristik polinomu $p(s,q^0) = s^3+s^2+18s-100$ olur. Bu polinomun kökleri $s_1 = 3.1889$, $s_2 = -2.0944 + 5.1934j$, $s_3 = -2.0944 - 5.1934j$'dır. O halde polinomun köklerinin reel kısmı maksimum olanı $s_1 = 3.1889$ köküdür. Bu kökün katlılığı 1 olduğu için birinci mertebeden yaklaşım kullanılır.

(3.56) denklemine dayanarak $\mu_0 = 3.1899$ elde edilir.

$p_0'(s_1) = p'(s,0)|_{s=s_1} = 54.886$, $w^0 = (0.5427, -0.1388, -0.4840)^T$ elde edilir.

$$\min(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

$$0.5427x_1 - 0.1388x_2 - 0.4840x_3 \leq -3.1899$$

kuadratik programlama problemi çözülürse $dq = (-3.1584, 0.8080, 2.8166)$ olur. $\gamma_{\min} = 0.1$ ve $q^1 = (-0.3158, 0.0808, 0.2816)$ elde edilir. 7 adımdan sonra $q^7 = (-2.2109, 0.5656, 1.9716)$ vektörü elde edilir ve bu vektöre karşı gelen $A(q^7)$ matrisinin özdeğerleri $s_1 = -1.3069 + 4.9640j$,
$s_2 = -1.3069 - 4.9640j$, $s_3 = -0.5970$ olup kararlı bir matristir.

Şu ana kadar q'lar tüm uzayda alınarak ailede kararlı var mı problemine cevap arandı. Bu bölümde ise q'lar belirli bir kutuda verilseydi tüm uzaya nasıl genişletilebilir sorusuna cevap verilir.

3.5 (q_i^-, q_i^+) aralığını $(-\infty, \infty)$ aralığına Genişletme

$$p(s,q) = a_n(q)s^n + a_{n-1}(q)s^{n-1} + \cdots + a_0, \quad a_n(q) \neq 0$$

olmak üzere ,

$$\mathcal{P} = \{p(s,q) : q \in Q = [q_1^-, q_1^+] \times [q_2^-, q_2^+] \times \cdots \times [q_l^-, q_l^+], \quad Q \subset \mathbb{R}^l\}$$

polinom ailesi verilsin. (q_i^-, q_i^+) aralığını $(-\infty, \infty)$ aralığına genişletelim.

$$(q_i^-, q_i^+) \to (-\pi/2, \pi/2) \to (-\infty, \infty)$$

$y = ux + v$ doğrusal denkleminde,

x yerine q_i^-, y yerine $-\pi/2$ yazılırsa: $-\pi/2 = q_i^- u + v$

x yerine q_i^+, y yerine $\pi/2$ yazılırsa: $\pi/2 = q_i^+ u + v$

elde edilir. Buradan $u = \frac{\pi}{q_i^+ - q_i^-}$ ve $v = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi q_i^+}{q_i^+ - q_i^-}$ olur. O halde

$$f(q) = \frac{\pi}{q_i^+ - q_i^-}(q - q_i^+) + \frac{\pi}{2}$$

fonksiyonudur.

$$\tan : (-\pi/2, \pi/2) \to (-\infty, \infty)$$

$$\arctan : (-\infty, \infty) \to (-\pi/2, \pi/2)$$

$g(x) = \tan(x)$ olarak tanımlanırsa

$$\tilde{q} = h(q) = (g \circ f)(q) = \tan[\frac{\pi}{q_i^+ - q_i^-}(q - q_i^+) + \frac{\pi}{2}]$$

$$q = h^{-1}(\tilde{q}) = \arctan[\frac{\pi}{q_i^+ - q_i^-}(q - q_i^+) + \frac{\pi}{2}] \in (-\infty, \infty)$$

olur. $\tilde{q} \in (-\infty, \infty)$ iken

$$q = \arctan(\tilde{q}) = \tfrac{\pi}{q_i^+ - q_i^-}(q - q_i^+) + \tfrac{\pi}{2}$$

elde edilir.

$$\frac{q_i^+ - q_i^-}{\pi}(\arctan \tilde{q} - \frac{\pi}{2}) + q_i^+ \in (q_i^-, q_i^+)$$

olur.

$$\begin{aligned} p(s, \hat{q}) &= a_n(\hat{q})s^n + a_{n-1}(\hat{q})s^{n-1} + \cdots + a_0, \\ \hat{q} &= (\hat{q}_1, \hat{q}_2, \ldots, \hat{q}_l) \\ \hat{q}_i &= \tfrac{q_i^+ - q_i^-}{\pi}(\arctan \tilde{q}_i - \tfrac{\pi}{2}) + q_i^+, \\ \tilde{q}_i &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Böylece $p(s, q)$ ailesi $\hat{p}(s, \tilde{q})$ polinom ailesine genişletilmiş olur.

Örnek 3.5.1. $q_1 \in [0, 8]$ *ve* $q_2 \in [0, 25]$ *iken*

$$p(s, q) = s^3 + (q_1 q_2 - 2q_2 + q_1 + 3)s^2 - (3q_1 - 2q_2 + 30)s - (q_1 - 2q_2 - 10)$$

polinom ailesinde kararlı eleman bulalım.

$$\hat{q_1} = \frac{8(\arctan \widetilde{q_1} - 0.5\pi)}{\pi} + 8,$$

$$\hat{q_2} = \frac{25(\arctan \widetilde{q_2} - 0.5\pi)}{\pi} + 25,$$

olarak hesaplanır ve

$\widetilde{q}_1 \in \mathbb{R}$, $\widetilde{q}_2 \in \mathbb{R}$ *iken*

$$\begin{aligned}
\widehat{p}(s,\widetilde{q}) \;=\;& 0.999s^3 + 20.264s^2 \arctan\widetilde{q}_1 \arctan\widetilde{q}_2 + 34.377s^2 \arctan\widetilde{q}_1 + \\
& 15.915s^2 \arctan\widetilde{q}_2 + 31.999s^2 - 7.639s \arctan\widetilde{q}_1 - 17s + \\
& 15.915s \arctan\widetilde{q}_2 - 2.546 \arctan\widetilde{q}_1 + 30.999 + 15.915 \arctan\widetilde{q}_2
\end{aligned}$$

yeni polinom ailesini elde edilir. Şimdi de [18] makalesindeki Algoritma (3.4.7) kullanılarak, $\widehat{p}(s,\widetilde{q})$ *polinom ailesinde kararlı eleman olup olmadığını araştıralım.* $\delta = 0.001 > 0$ *ve* $\widetilde{q}^0 = (0,0)$ *alalım.*
$\widehat{p}(s,\widetilde{q}^0) = 0.999s^3 + 30.999 + 31.999s^2 - 17s$ *polinomu elde edilir. Bu polinomun kökleri* $s_1 = 0.2757 + 0.9361j$, $s_2 = 0.2757 - 0.9361j$ *ve* $s_3 = -32.5515$ *olur. O halde reel kısmı maksimum olan kök* s_1 *köküdür. Bu kökün katlılığı* 1 *olduğu için birinci mertebeden yaklaşım kullanılır.*

(3.56) denklemine dayanarak $\mu_0 = 0.2767$ *elde edilir.*
$\widehat{p}_0'(s_1) = \widehat{p}'(s,0)|_{s=s_1} = -1.7525 + 61.4596j$, $\pi_1(s) = -2.5464 + 34.3774s^2 - 7.6394s$, $\pi_2(s) = 15.9154 + 15.9154s^2 + 15.9154s$, $w^0 = (-0.1871, -0.3722)^T$ *olur.*

$$\min(x_1^2 + x_2^2)$$
$$-0.1871x_1 - 0.3722x_2 \leq -0.2767$$

kuadratik programlama problemi çözülürek $dq = (0.2983, 0.5933)$ *elde edilir.* $\gamma_{\min} = 1$ *ve* $\widetilde{q}^1 = (0.2983, 0.5933)$ *olur.*

k	$\widetilde{q}^k$	$\max_k \mathrm{Res_k}$	katlılık	dq	$\gamma_{\min}$
0	$(0,0)$	0.27575	1	$(0.2983, 0.5933)$	1
1	$(0.2983, 0.5933)$	0.10596	1	$(0.1168, 0.7435)$	1
2	$(0.4151, 1.3368)$	0.04342	1	$(-0.2752, 0.8450)$	1
3	$(0.1399, 2.1819)$	0.00636	1	$(-0.1183, 0.0560)$	0.1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
21	$(0.0464, 2.2232)$	0.00009	1	$(-0.0151, 0.0061)$	0.1
22	$(0.0449, 2.2239)$	-0.1424			

22 adımdan sonra $\widetilde{q}^{22} = (0.0449, 2.2239)$ *vektörü elde edilir ve bu vektöre karşı gelen* $p(s, \widetilde{q}^{22})$ *polinomunun kökleri* $-0.1424+0.9643j$*,* $-0.1424-0.9643j$*,* -52.8636 *olup kararlı bir polinomdur.*

3.6 Bendixson Teoreminin uygulanması

3.6.1 Ailede kararlı elemanın varlığı için yeter koşul

Simetrik bir matrisin kararlı olması için gerek ve yeter koşul negatif tanımlı olmasıdır. Bundan dolayı simetrik matrislerden oluşan bir ailede kararlı eleman bulma problemi negatif tanımlı bir eleman bulma problemine denktir.

Diğer taraftan A, $n \times n$ boyutlu gerçel kare matris ise B matrisi bu matrisin simetrik kısmı, C matrisi anti-simetrik kısmı olmak üzere

$$A = B + C, \quad B = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right), \quad C = \frac{1}{2}\left(A - A^T\right)$$

şeklinde yazabiliriz. Bendixson teoremi A, B ve C matrislerinin özdeğerleri için önemli eşitsizlikler vermektedir.

Teorem 3.6.2 (([14], p. 140))**.** *A, nxn boyutlu gerçel kare matris,* $B = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right)$ *ve* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ $(|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|)$*,* $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_n$ *sırasıyla A ve B matrislerinin özdeğerleri ise*

$$\mu_n \leq \mathrm{Re}(\lambda_i) \leq \mu_1, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Burada Re(λ*) sayısı* λ *kompleks sayısının reel kısmını göstermektedir.*

Bendixson teoremi aşağıdaki sonuçları verir.

Önerme 3.6.3. $\{A(q) : \ q \in Q\}$ *ailesi verilsin ve* $B(q)$ *ailesi* $A(q)$ *ailesinin simetrik kısmı olsun. O halde*

(i) En azından bir $q_* \in Q$ *için* $B(q_*)$ *matrisi Hurwitz kararlı ise* $A(q_*)$ *da Hurwitz kararlıdır,*

(ii) En azından bir $q_* \in Q$ *için* $B(q_*)$ *pozitif kararlı ise (özdeğerlerinin hepsi sağ açık yarı düzlemde ise)* $A(q_*)$ *da pozitif kararlıdır.*

Önerme (3.6.3) kararlı elemanın varlığı için yeter koşul verir. Simetrik $B(q)$ ailesinde kararlı eleman var ise $A(q)$ ailesinde de kararlı vardır. Gerçekten, bir q_* için $B(q_*)$ kararlı ise onun tüm özdeğerleri gerçel negatiftir. $A(q_*)$ matrisinin özdeğerlerinin hepsinin reel kısmı μ_1' den küçük olduğu için

$$Re\ (\lambda(A(q_*))) < 0$$

olur. $B(q)$ simetrik matrisi için

$$\begin{aligned} g(q) &= \lambda_{\max}(B(q)) \\ &= \max_{\|v\|=1} v^T(B(q))v \end{aligned} \tag{3.61}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bizim amacımız öyle bir q_* bulmaktır ki $g(q_*) < 0$ eşitsizliği sağlansın.

$A(q)$ ailesi afin olduğu durumda yani $Q \subset \mathbb{R}^l$ bir kutu olmak üzere

$$A(q) = A_0 + q_1A_1 + \cdots + q_lA_l, \quad q \in Q$$

ise $B(q)$ ailesinde kararlı eleman bulma problemi Doğrusal Matris Eşitsizlikleri (LMI) yöntemi ile etkili bir şekilde çözülebilir. Ancak aile afin olmadığı durumda LMI yöntemi çalışmaz, gradiyent yöntemi uygulanabilir.

Doğrusal Matris Eşitsizlikleri

Doğrusal matris eşitsizliği (LMI), $x \in \mathbb{R}^m$ bilinmeyen vektör ve $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n\times n}, (i = 0, \cdots, m)$ simetrik matrisleri verildiğinde

$$F(x) \triangleq F_0 + \sum_{i=1}^{m} x_iF_i \ < 0$$

matris eşisizliğini sağlayan x parametresinin bulunmasıdır.

Şimdi $A(q)$ ailesi verildiğinde

$$B(q) = F_0 + q_1F_1 + \cdots + q_kF_k \quad < \quad 0$$

olacak şekilde $(q_1, \cdots, q_k)$ vektörünün olup olmadığı problemini örnek üzerinde ele alalım.

Örnek 3.6.4. *$q_i \in [-10, 10]$ $(i = 1, 2, 3)$ iken*

$$A(q) = \begin{pmatrix} 6-3q_1-q_2-q_3 & 2+q_1-4q_3 & -2-5q_1-q_2-q_3 \\ 5+q_1+3q_2-q_3 & 8-2q_1-2q_2+2q_3 & 3+q_1-3q_3 \\ 5+5q_1-q_2+2q_3 & -4q_1-5q_2+q_3 & -2q_1-q_2 \end{pmatrix}$$

afin ailesini ele alalım. $B(q) = (A(q) + A^T(q))/2$ olarak hesaplandığı takdirde

$$B(q) = \begin{pmatrix} 6-3q_1-q_2-q_3 & \frac{1}{2}(7+2q_1-5q_3+3q_2) & \frac{1}{2}(3-2q_2+q_3) \\ \frac{1}{2}(7+2q_1-5q_3+3q_2) & 8-2q_1-2q_2+2q_3 & \frac{1}{2}(3-3q_1-2q_3-5q_2) \\ \frac{1}{2}(3-2q_2+q_3) & \frac{1}{2}(3-3q_1-2q_3-5q_2) & -2q_1-q_2 \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir. LMI yöntemi $B(q) < 0$ matris eşitsizliği için uygulandığında bize

$$q_* = (9.4591, -3.5180, -0.0354)^T$$

verir. $B(q_*)$ kararlıdır, bunun sonucu olarak $A(q_*)$ da kararlıdır.

LMI yöntemi $B(q) > 0$ eşitsizliği için de uygulandığında

$$\tilde{q} = (-2.6549, 1.3609, 0.9393)^T$$

değeri elde edilir. O halde $A(q)$ ailesinde pozitif kararlı $A(\tilde{q})$ matrisi de vardır.

Örnek 3.6.5.

$$A_0 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 5 & 5 & 3 \\ 5 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -5 \\ 5 & -4 & 1 \\ 5 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & -5 & -1 \end{pmatrix} \quad ve \quad A_3 = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

iken

$$A(q) = A_0 + q_1A_1 + q_2A_2 + q_3A_3, \quad q \in \mathbb{R}^3$$

matrisler ailesini ele alalım. $q = (0, 0, 0)^T$ için,

$$A(q) = A_0 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 5 & 5 & 3 \\ 5 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

ve A_0 *kararsızdır.* $B(q) = (A(q) + A^T(q))/2$ *olarak hesaplandığı takdirde*

$$B(q) = \begin{pmatrix} 3 - 3q_1 - 5q_2 - 2q_3 & 3q_1 + \frac{7-5q_3+3q_2}{2} & \frac{3+q_3}{2} - q_2 \\ 3q_1 + \frac{7-5q_3+3q_2}{2} & 5 - 4q_1 - 2q_2 + 2q_3 & \frac{3-3q_1-5q_2}{2} - q_3 \\ \frac{3+q_3}{2} - q_2 & \frac{3-3q_1-5q_2}{2} - q_3 & -3 - 2q_1 - q_2 \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir. $B(q) = F_0 + q_1F_1 + q_2F_2 + q_3F_3$ *ifadesi*

$$F_0 = \begin{pmatrix} 3 & 7/2 & 3/2 \\ 7/2 & 5 & 3/2 \\ 3/2 & 3/2 & -3 \end{pmatrix}, \; F_1 = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & -3/2 \\ 0 & -3/2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$F_2 = \begin{pmatrix} -5 & 3/2 & -1 \\ 3/2 & -2 & -5/2 \\ -1 & -5/2 & -1 \end{pmatrix} \; ve \; F_3 = \begin{pmatrix} -2 & -5/2 & 1/2 \\ -5/2 & 2 & -1 \\ 1/2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

matrislerinden oluşur. LMI $q^* = (7.7911, -3.3833, 5.5283)^T$ *vektörünü verir.* $A(q)$*'nun kararlı üyesi*

$$A(q^*) = \begin{pmatrix} -14.5134 & -12.3221 & -43.1005 \\ 28.2773 & -8.3412 & -5.7938 \\ 58.3954 & -8.7196 & -15.1989 \end{pmatrix}$$

matrisidir.

Şimdi aynı örneği gradiyent yöntemi ile inceleyelim.

Örnek 3.6.6.

$$A_0 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 5 & 5 & 3 \\ 5 & 0 & -3 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -5 \\ 5 & -4 & 1 \\ 5 & -4 & -2 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & -5 & -1 \end{pmatrix} \; ve \; A_3 = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

iken

$$A(q) = A_0 + q_1 A_1 + q_2 A_2 + q_3 A_3, \quad q \in \mathbb{R}^3$$

ailesini tekrardan ele alalım. $q = (0,0,0)^T$ *için,*

$$A(q) = A_0 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 5 & 5 & 3 \\ 5 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

A_0*'ın kararsız olduğu ve* $B(q)$ *matrisinin*

$$B(q) = \begin{pmatrix} 3 - 3q_1 - 5q_2 - 2q_3 & \frac{7+3q_2-5q_3}{2} + 3q_1 & \frac{3+q_3}{2} - q_2 \\ \frac{7+3q_2-5q_3}{2} + 3q_1 & 5 - 4q_1 - 2q_2 + 2q_3 & \frac{3-3q_1-5q_2}{2} - q_3 \\ \frac{3+q_3}{2} - q_2 & \frac{3-3q_1-5q_2}{2} - q_3 & -3 - 2q_1 - q_2 \end{pmatrix}$$

biçiminde olduğu LMI ile incelediğimizde belirtilmişti. $q^0 = (0,0,0)^T$ *alalım.* $B(q^0)$*'ın özdeğerlerinin reel kısımlarının maksimumu* 8.0402 *olur.*

$$q^1 = -(1/2)^s \cdot (\nabla g(q)|_{q=q^0})^T$$

eşitliğinde s'yi, $g(q^1) < g(q^0)$ *olacak şekilde seçelim. Buradan* $q^1 = (1.2161, 2.5908, 2.0061)^T$ *noktası elde edilir.*

11 *adımdan sonra* $q^{11} = (6.411, -1.662, 4.001)^T$ *olur ve* $A(q)$*'nun kararlı üyesi*

$$A(q^{11}) = \begin{pmatrix} -15.927 & -7.596 & -36.396 \\ 28.068 & -9.317 & -2.594 \\ 46.722 & -13.332 & -14.160 \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir.

Örnek 3.6.7.

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -9 & -3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

iken

$$A(q) = A_0 + q_1 A_1 + q_2 A_2 + q_3 A_3, \quad q \in \mathbb{R}^3$$

olarak alalım. $q = (0,0)^T$ *için,*

$$A(q) = A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

matrisi kararsızdır. $B(q) = (A(q) + A^T(q))/2$ *olarak hesaplandığı takdirde*

$$B(q) = \begin{pmatrix} 1 - q_1 - 5q_2 - 9q_3 & \frac{5+q_3}{2} + 3q_2 \\ \frac{5+q_3}{2} + 3q_2 & 4(1+q_2) + 3(q_1 + 2q_3) \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir. $q^0 = (0,0,3)^T$ *olsun.* $B(q^0)$*'ın özdeğerlerinin reel kısımlarının maksimumu* 22.331 *ve bu özdeğere karşı gelen birim özvektör* $v = (0.082, 0.996)^T$ *olur.*

$$g(q) = \max_{\|v\|=1} v^T (B(q)) v$$

fonksiyonun q^0 *noktasındaki gradiyenti* $\nabla g(q)|_{q=q^0} = [2.972, 4.431, 5.980]^T$ *elde edilir.*

$$q^1 = q^0 - (1/2)^s \cdot (\nabla g(q)|_{q=q^0})^T$$

eşitliğinde s'yi, $g(q^1) < g(q^0)$ *olacak şekilde seçelim. Buradan* $q^1 = (-1.486, -2.215, 0.009)^T$ *noktası elde edilir.*

9 *adımdan sonra* $q^9 = (-2.502, -1.340, 1.218)^T$ *olur ve* $A(q)$*'nun kararlı üyesi*

$$A(q^9) = \begin{pmatrix} -1.849 & -13.207 \\ 11.933 & -0.787 \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir.

Örnek 3.6.8. $q_i \in [-3,3]$ $(i = 1,2,3)$ *iken*

$$A(q) = \begin{pmatrix} 1 + q_1 & -3 - q_1 q_3 & -3q_2 q_3 - 7 \\ -5 - q_1 + q_3 & -1 & -3 + q_2 \\ 4 + q_1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

ailesini ele alalım. Burada

$$B(q) = \begin{pmatrix} 1 + q_1 & \frac{1}{2}(-8 - q_1 + q_3 - q_1 q_3) & \frac{1}{2}(-3 + q_1 - 3q_2 q_3) \\ \frac{1}{2}(-8 - q_1 + q_3 - q_1 q_3) & -1 & \frac{1}{2}(-1 + q_2) \\ \frac{1}{2}(-3 + q_1 - 3q_2 q_3) & \frac{1}{2}(-1 + q_2) & -1 \end{pmatrix}$$

ve LMI uygulanamaz.

$$g(q) = \lambda_{\max}(B(q)) = \max_{||v||=1} v^T B(q) v$$

fonksiyonunu ele alalım. $g(q) < 0$*'ı sağlayan* q *vektörünün varlığını araştıralım. Bir* q *için* $\lambda_{\max}(B(q))$*'nun maksimum özdeğeri basit ise* $g(q)$ *fonksiyonu,* q *noktasında diferansiyellenebilir ve gradiyenti basitçe hesaplanabilir.*

Bu örnek için gradiyent yöntemi 6 *adımdan sonra yanıt verir:* $q^0 = (0,0,0)^T$, $\ldots$, $q^6 = (-2.1794, -0.8644, 1.6657)^T$. t *adım büyüklüğü* $G(q)$ *fonsiyonun azalanlık koşulunu:*

$$g(q^{k+1}) = g(q^k - t\nabla g|_{q^k}) < g(q^k)$$

sağlayacak şekilde seçilmektedir.

Çizelge 3.1. Örnek 3.6.8 için gradiyent yöntemi.

k	q^k	$\lambda_{\max}$	katlılık	$\nabla G\|_{q^k}$	t
0	$(0,0,0)$	4.274	1	$(0.957, 0.099, -0.463)$	1
1	$(-0.957, -0.099, 0.463)$	2.974	1	$(1.005, 0.483, -0.915)$	1
2	$(-1.963, -0.583, 1.379)$	0.319	1	$(0.447, 2.072, -1.252)$	1/4
3	$(-2.075, -1.101, 1.692)$	0.200	1	$(0.911, -1.537, 0.034)$	1/4
4	$(-2.303, -0.717, 1.683)$	0.107	1	$(-0.730, 1.121, 0.089)$	1/4
5	$(-2.120, -0.997, 1.661)$	0.032	1	$(0.471, -1.064, -0.033)$	1/8
6	$(-2.179, -0.864, 1.665)$	-0.053			

Örnek 3.6.9.

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & -4 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad ve \quad A_3 = \begin{pmatrix} -4 & 5 & -2 \\ -6 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

iken

$$A(q) = A_0 + q_1 A_1 + q_2 A_2 + q_3 A_3, \quad q \in \mathbb{R}^3$$

ailemizi tekrardan ele alalım. $q = (0,0,0)^T$ *için,*

$$A(q) = A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

A_0 *kararsız matristir ve*

$$B(q) = \begin{pmatrix} 1 - 5q_1 - 3q_2 - 4q_3 & \frac{4+3(q_1+q_2-q_3)}{2} & \frac{-3+3q_1-4q_2-q_3}{2} \\ \frac{4+3(q_1+q_2-q_3)}{2} & 2(1 - q_1 + q_3) + q_2 & \frac{-q_1+7q_2-q_3+5}{2} \\ \frac{-3+3q_1-4q_2-q_3}{2} & \frac{-q_1+7q_2-q_3+5}{2} & -3q_1 + 5q_2 - 4(q_3+1) \end{pmatrix}$$

biçimindedir. $q^0 = (0,0,0)^T$ *alalım.* $B(q^0)$*'ın özdeğerlerinin reel kısımlarının maksimumu* 3.743*'dır.*

$$q^1 = -(1/2)^s \cdot \left(\nabla g(q)|_{q=q^0}\right)^T$$

eşitliğinde s, $g(q^1) < g(q^0)$ *olacak şekilde seçilir. Buradan* $q^1 = (1.4093, -1.9919, 0.4488)^T$ *noktası elde edilir.* $B(q^1)$*'in özdeğerlerinin reel kısımlarının maksimumu* -0.286 *olur. İlk adımda* $A(q)$*'nun kararlı üyesi*

$$A(q^1) = \begin{pmatrix} -11.913 & 6.406 & 7.840 \\ 4.507 & -4.338 & 1.022 \\ 0.221 & -3.116 & -15.835 \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir.

Örnek 3.6.10.

$$A(q) = \begin{pmatrix} 1 + 2q_1q_3 & -3q_2 & q_1q_2 + 2q_3 \\ 3q_1q_3 - q_2 & 5q_3 - q_2 & 2q_2q_3 - 4 \\ 4q_1 + 1 & 2q_1q_2 & q_1q_3 - 3 \end{pmatrix}$$

ailesini ele alalım. Burada

$$B(q) = \begin{pmatrix} 1 + 2q_1q_3 & \frac{1}{2}(-4q_2 + 3q_1q_3) & \frac{1}{2}(q_1q_2 + 2q_3 + 4q_1 + 1) \\ \frac{1}{2}(-4q_2 + 3q_1q_3) & 5q_3 - q_2 & q_2q_3 - 2 + q_1q_2 \\ \frac{1}{2}(q_1q_2 + 2q_3 + 4q_1 + 1) & q_2q_3 - 2 + q_1q_2 & q_1q_3 - 3 \end{pmatrix}.$$

$$g(q) = \lambda_{\max}\left(B(q)\right) = \max_{||v||=1} v^T B(q) v.$$

fonksiyonunu ele alalım. $g(q) < 0$*'ı sağlayan* q*'u araştıralım. Bazı* q*'lar için* $\lambda_{\max}\left(B(q)\right)$*'nun maksimum özdeğeri basit ise* $g(q)$ *fonksiyonu,* q *noktasında diferansiyellenebilir ve gradiyenti basitçe hesaplanabilir.*

Bu örnek için gradiyent yöntemi 10 *adımdan sonra yanıt verir:* $q^0 = (0,0,0)^T$*,* $\ldots$*,* $q^{10} = (0.796, -0.653, -0.962)^T$*.* t *adım büyüklüğü yine* $g(q)$ *fonsiyonun azalanlık koşulunu*

$$g(q^{k+1}) = g(q^k - t\nabla g|_{q^k}) < g(q^k)$$

sağlayacak şekilde seçilmektedir.

Çizelge 3.2. Örnek 3.6.10 için gradiyent yöntemi.

k	q^k	$\lambda_{\max}$	katlılık	$\nabla G\|_{q^k}$	t
0	$(0,0,0)$	1.243	1	$(0, 2.414, 2.183)$	0.1
1	$(0, -0.241, -0.218)$	1.134	1	$(-0.554, -1.572, 0.339)$	0.1
2	$(0.055, -0.084, -0.252)$	1.004	1	$(-0.492, 0.496, 0.308)$	0.1
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	
9	$(0.645, -0.516, -0.797)$	0.167	1	$(-1.502, 1.364, 1.647)$	0.1
10	$(0.796, -0.653, -0.962)$	-0.280			

3.7 Bir Metzler ailesinde kararlı elemanın varlığı

Tanım 3.7.1. *Köşegen dışında her elemanı sıfırdan büyük veya eşit olan matrise Metzler matrisi denir.*

Eğer

$$A(q) = A_0 + q_1 A_1 + \cdots + q_k A_k$$

ailesinde A_i *matrislerinin hepsi Metzler matrisi ve* $q_i \geq 0$ *ise* $A(q)$ *ailesi Metzler ailesi olur.*

Bir Metzler matrisinin kararlı olması için gerekli ve yeterli koşul onun diyagonal kararlı olmasıdır. Buna göre aşağıdaki teorem geçerlidir.

Teorem 3.7.2. *$A(q)$ Metzler ailesinde Hurwitz kararlı bir matrisin bulunması için gerekli ve yeterli koşul bu ailede diagonal kararlı matrisin bulunmasıdır.*

Metzler matrislerinden oluşan $A(q)$ ailesinde diyagonal kararlı matrisin varlığını araştıralım. Burada $P(x) = diyag(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ seçilip, $x_i \geq 0$ koşulu konulacaktır. Bu problem için algoritmadaki t'nin seçimindeki türev koşulunu ve pozitiflik koşulunu göz ardı ederek keyfi yeterince küçük t_* seçelim. Yani algoritmayı artık aşağıdaki şekilde uygulayalım.

Algoritma 3.7.3. *(x^0, q^0) alalım. $\phi(x^0, q^0)$ (3.34)'ü hesaplayalım.*
$\phi(x^0, q^0) \geq 0$ ise, yeterince küçük keyfi t_* $(t \neq 0)$ seçelim.

$$(x^1, q^1) = (x^0, q^0) - t_* \cdot \nabla\phi(x, q)|_{x=x^0, q=q^0}$$

yeni noktamızdır. $\phi(x^0, q^0) > \phi(x^1, q^1)$ olup olmadığını kontrol edelim.
Bu eşitsizlik sağlanıyorsa t_* uygun biçimde seçilmiştir. Sağlanmıyorsa baştan $\phi(x^0, q^0) > \phi(x^1, q^1)$ olacak şekilde t seçeriz. $\phi(x^1, q^1) < 0$ ise (x^1, q^1) gereken noktadır.
Aksi takdirde prosedürü tekrarlamak gerekmektedir.

Örnek 3.7.4.

$$A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \; A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1/3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \; ve$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2/3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Metzler matrisleri iken

$$A(q) = A_0 + q_1 A_1 + q_2 A_2, \quad q_1 \in [0, 5], q_2 \in [0, 5]$$

Metzler matrisler ailesini ele alalım. $q = (0,0)^T$ *için,*

$$A(q) = A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

A_0 *kararsızdır.* $x^0 = (1,1,0.3)^T$ *ve* $q^0 = (0,1)^T$ *olsun. Böylece*

$$(x^0, q^0) = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, q_1^0, q_2^0)^T = (1,1,0.3,0,1)^T$$

olur.

$$B_0(x^0, q^0) = -P(x^0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.3 \end{pmatrix}$$

$$B_1(x^0, q^0) = A(q^0)^T P(x^0) + P(x^0) A(q^0) = \begin{pmatrix} -6 & 2.0 & 1.2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1.2 & 2 & -1.8 \end{pmatrix}$$

$B_0(x^0, q^0)$ *matrisin özdeğerleri* -1, -1,-0.3 *ve* $B_1(x^0, q^0)$ *matrisinin özdeğerleri* -6.6829, -3.0916, 1.9746 *olur.* $\phi(x,q)$*'nun maksimum özdeğeri* 1.9746 *ve bu özdeğere karşı gelen birim özvektör* $v = [0.2806, 0.8083, 0.5175]^T$ *elde edilir. En büyük özdeğer* $B_1(x^0, q^0)$ *matrisine ait olduğu için* f_1 *fonksiyonunun (bak: Algoritma 3.2.3)* (x^0, q^0) *noktasındaki gradiyenti kullanılmaktadır:*

$$\nabla f_1|_{(x^0,q^0)} = \begin{pmatrix} 0.2716 \\ 2.1269 \\ 1.4132 \\ 2.0013 \\ 1.2707 \\ -0.1992 \end{pmatrix}.$$

$(x^1, q^1) = (x^0, q^0) - t \cdot \nabla f_1|_{(x^0,q^0)}$ *noktasını bulmak için* t 0.5 *seçilir. Buradan,*

$$(x^1, q^1) = (0.9728, 0.7873, 0.4413, 0.2001, 1.1270)^T$$

olur. 2. adımda $(B_0(x^1, q^1) \oplus B_1(x^1, q^1))$ *matrisinin maksimum özdeğeri ilk adımdakine göre daha küçük olacak şekilde* t *seçilir ve devam edilir.*

5 *adımdan sonra,*

$$x^5 = (0.6171, 0.0707, -0.0183, 0.1805, 0.2461, 0.7214)^T$$

ve

$$q^5 = (0.7366, 0.5663)^T$$

olur.

$$P(x^5) = \begin{pmatrix} 0.8443 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5752 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7151 \end{pmatrix} > 0$$

ve $A(q)$'nun kararlı üyesi

$$A(q^5) = \begin{pmatrix} -3.8162 & 1.9578 & 1.5496 \\ 1 & -1.5074 & 2 \\ 1.1219 & 0 & -3.9578 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

Örnek 3.7.5.

$$A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \; A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; ve$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Metzler matrisleri iken

$$A(q) = A_0 + q_1 A_1 + q_2 A_2, \quad q_1 \in [0, 10], q_2 \in [0, 10]$$

Metzler matrisler ailesini ele alalım. $q = (0, 0)^T$ *için,*

$$A(q) = A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

A_0 kararsızdır. $x^0 = (0.2, 1, 0.3)^T$ ve $q^0 = (1, 1)^T$ olsun. Böylece

$$(x^0, q^0) = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, q_1^0, q_2^0)^T = (0.2, 1, 0.3, 1, 1)^T$$

olur.

$$(-P(x^0)) \oplus (A(q^0)^T P(x^0) + P(x^0)A(q^0)) = \begin{pmatrix} -0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & -10 & 2.9 \\ 0 & 0 & 0 & 2.1 & 2.9 & -3.6 \end{pmatrix}$$

matrisinin özdeğerleri -0.2, -1,4.062,-4.759,-14.102 ve -0.3 olur. Bu durumda maksimum özdeğeri 4.062 ve bu özdeğere karşı gelen birim özvektör $v = [0, 0, 0, 0.7873, 0.4733, 0.3949]^T$ olur. $\phi(x, q)$ fonksiyonun (x^0, q^0) noktasındaki gradiyenti

$$\nabla\phi(x, q)|_{(x^0,q^0)} = \begin{pmatrix} 3.7393 \\ 2.9795 \\ 1.1157 \\ 3.6452 \\ -1.3893 \end{pmatrix} \quad olur.$$

$(x^1, q^1) = (x^0, q^0) - t \cdot \nabla\phi(x, q)|_{(x^0,q^0)}$ noktasını bulmak için t'yi 0.1 seçelim. Buradan,

$$(x^1, q^1) = (-0.1739, 0.7020, 0.1884, 0.6354, 1, 1389)^T$$

olur. Her adımda t 0.1 seçilerek devam edilirse

5 adımdan sonra, $x^5 = (0.1746, 0.1679, 0.2888)^T$ ve $q^5 = (0.0065, 1.2957)^T$ vektörü elde edilir.

$$P(x^5) = \begin{pmatrix} 0.1746 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1679 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2888 \end{pmatrix} > 0$$

ve $A(q)$'nun kararlı üyesi

$$A(q^5) = \begin{pmatrix} 4.8805 & 1.0260 & 4.3087 \\ 2.6174 & -4.1958 & 2 \\ 1.0130 & 3 & -8.4719 \end{pmatrix}$$

olur.

Örnek 3.7.6.

$$A_0 = \begin{pmatrix} -0.73 & 3 & 2.3 \\ 1.85 & -2 & 0 \\ 4.51 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \; A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3.65 \\ 0 & 3 & 2.5 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \; ve$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -8 & 1 & 0 \\ 4 & -6 & 2 \\ 0.5 & 2 & -7 \end{pmatrix}$$

iken

$$A(q) = A_0 + q_1 A_1 + q_2 A_2, \quad q_1 \in [0,4], q_2 \in [0,4]$$

matrisler ailesini ele alalım. $q = (0,0)^T$ *için,*

$$A(q) = A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

A_0 *kararsızdır.* $x^0 = (1,1,1)^T$ *ve* $q^0 = (1,0)^T$ *olsun. Böylece* $(x^0, q^0) = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, q_1^0, q_2^0)^T = (1,1,1,1,0)^T$ *olur.*

$$(-P(x^0)) \oplus (A(q^0)^T P(x^0) + P(x^0)A(q^0)) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.54 & 4.85 & 11.46 \\ 0 & 0 & 0 & 4.85 & 2 & 2.5 \\ 0 & 0 & 0 & 11.46 & 2.5 & 2 \end{pmatrix}$$

matrisinin özdeğerleri -10.506, 0.211, -1 *(3 katlı),* 14.834 *elde edilir. Bu durumda maksimum özdeğer* 14.834 *ve bu özdeğere karşı gelen birim özvektör* $v = [0,0,0,0.653,0.375,0.656]^T$ *bulunur.* $\phi(x,q)$ *fonksiyonun* (x^0,q^0) *noktasındaki gradiyenti*

$$\nabla\phi(x,q)|_{(x^0,q^0)} = \begin{pmatrix} 6.815 \\ 2.421 \\ 5.597 \\ 6.064 \\ -9.719 \end{pmatrix} \quad olur.$$

$(x^1, q^1) = (x^0, q^0) - t \cdot \nabla\phi(x,q)|_{(x^0,q^0)}$ *noktasını bulmak için* t*'yi* 0.1 *seçelim. Buradan*

$$(x^1, q^1) = (0.318, 0.757, 0.440, 0.393, 0.971)^T$$

elde edilir.

$$(-P(x^1)) \oplus (A(q^1)^T P(x^1) + P(x^1) A(q^1)) = \begin{pmatrix} -0.318 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.757 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.440 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5.166 & 5.613 & 3.562 \\ 0 & 0 & 0 & 5.613 & -10.081 & 3.074 \\ 0 & 0 & 0 & 3.562 & 3.074 & -4.575 \end{pmatrix}$$

matrisinin özdeğerleri -0.318, -0.757, -0.440, -13.804, -7.904 *ve* 1.884 *olur. Bu durumda maksimum özdeğer* 1.884 *ve bu özdeğere karşı gelen birim özvektör* $v = (0, 0, 0, 0.664, 0.462, 0.586)^T$ *elde edilir.* $\phi(x,q)$ *fonksiyonun* (x^1, q^1) *noktasındaki gradiyenti*

$$\nabla\phi(x,q)|_{(x^1,q^1)} = \begin{pmatrix} -1.811 \\ 2.271 \\ 1.680 \\ 3.229 \\ -2.786 \end{pmatrix} \quad \textit{olur.}$$

$(x^2, q^2) = (x^1, q^1) - t \cdot \nabla\phi(x,q)|_{(x^1,q^1)}$ *noktasını elde etmek için* t *değerini* 0.1 *seçelim. Buradan,*

$$(x^2, q^2) = (0.499, 0.530, 0.272, 0.070, 1.250)^T$$

olur.

$$P(x^2) = \begin{pmatrix} 0.499 & 0 & 0 \\ 0 & 0.530 & 0 \\ 0 & 0 & 0.272 \end{pmatrix} > 0$$

ve $A(q)$*'nun kararlı üyesi*

$$A(q^2) = \begin{pmatrix} -10.664 & 4.250 & 2.557 \\ 6.852 & -9.291 & 2.677 \\ 5.205 & 2.501 & -6.824 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

3.8 Herhangi afin ailede diyagonal kararlı elemanın varlığı

$A(q)$ afin ailesi verilsin:

$$A(q) = A_0 + q_1 A_1 + \cdots + q_k A_k, \quad q_i \in \mathbb{R}$$

Bu bölümde $A(q)$ ailesinde diyagonal kararlı elemanının varlığı problemini ele alırız. Burada $P(x) = diyag(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ olarak seçeriz ve Algoritma (3.7.3)'ü uygularız.

Bir örnek ele alalım.

Örnek 3.8.1.

$$A_0 = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \; A_1 = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & -5 & -2 \end{pmatrix} \; ve$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

iken

$$A(q) = A_0 + q_1 A_1 + q_2 A_2 \quad q \in \mathbb{R}^2$$

matrisler ailesini ele alalım. $q = (0,0)^T$ *için,*

$$A(q) = A_0 = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \; dır.$$

A_0 *kararsızdır.* $x^0 = (0.5, 1, 0.7)^T$ *ve* $q^0 = (1,0)^T$ *olsun. Böylece* $(x^0, q^0) = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, q_1^0, q_2^0)^T = (0.5, 1, 0.7, 1, 0)^T$*'dır.*

$$(-P(x^0)) \oplus (A(q^0)^T P(x^0) + P(x^0) A(q^0)) = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 4.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4.5 & 2 & -2.7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2.7 & -5.6 \end{pmatrix}$$

matrisinin özdeğerleri -9.841, -1,-0.7,4.326,-5.084 *ve* -0.5 *olur. Bu durumda maksimum özdeğer* 4.326 *ve bu özdeğere karşı gelen birim özvektör* $v = [0, 0, 0, -0.344, -0.914, 0.213]^T$ *elde edilir.* $\phi(x, q)$ *fonksiyonun* (x^0, q^0) *noktasındaki gradiyenti*

$$\nabla\phi(x,q)|_{(x^0,q^0)} = \begin{pmatrix} -1.324 \\ 4.971 \\ 0.024 \\ 8.622 \\ -5.199 \end{pmatrix} \quad \textit{olur.}$$

$(x^1, q^1) = (x^0, q^0) - t \cdot \nabla\phi(x, q)|_{(x^0,q^0)}$ *noktasını elde etmek için* t*'yi* 0.1 *seçelim. Buradan,*

$$(x^1, q^1) = (0.632, 0.502, 0.697, 0.137, 0.519)^T$$

olur. Her adımda t *değeri* 0.1 *seçilerek devam edilirse* 3 *adımdan sonra,* $x^3 = (0.448, 0.241, 0.709)^T$ *ve* $q^3 = (0.703, 0.441)^T$ *vektörü elde edilir.*

$$P(x^3) = \begin{pmatrix} 0.448 & 0 & 0 \\ 0 & 0.241 & 0 \\ 0 & 0 & 0.709 \end{pmatrix} > 0$$

ve $A(q)$*'nun diyagonal kararlı üyesi*

$$A(q^3) = \begin{pmatrix} -4.785 & 1.957 & 1.549 \\ 1 & -1.507 & 2 \\ 1.121 & 0 & -3.957 \end{pmatrix} \quad \textit{olur.}$$

3.9 Özdeğerlerin kısmi türevleri alınarak gradiyent yönteminin uygulanması

$$A(q) = A_0 + q_1A_1 + \cdots + q_kA_k, \;\; q_j \in [a_j, b_j] \;\; (j = 1, 2, \ldots, k),$$

matrisler politopu verilsin. $F(q) = \max_i Re\ (\lambda_i(A(q)))$ olsun.

$$F(q) \to \min$$
$$q \in Q$$

problemini ele alalım.

Teorem 3.9.1 (([10], syf. 372)). *$A(q)$ ailesi $q = 0$'da diferansiyellenebilir $n\times n$ boyutlu kare matris olsun. λ, $A(0)$'ın cebirsel basit özdeğeri ve küçük t'ler için $\lambda(t)$, $A(t)$'nin özdeğeri olsun öyle ki $\lambda(0) = \lambda$. x, $A(0)$'ın λ özdeğerine karşı gelen sağ özvektörü; y, $A(0)$'ın λ özdeğerine karşı gelen sol özvektörü olsun. Bu durumda*

$$\lambda'(0) = y^* A'(0)x/y^*x$$

eşitliği sağlanır.

Aileden bir $q^* = (q_1^*, \ldots, q_k^*)^T$ alalım. $A(q)$'nun reel kısmı maksimum olan cebirsel basit özdeğeri $\lambda_1(q)$ olmak üzere, kısmi türevler :

$$\partial\lambda_1/\partial q_1|_{q=q^*} = y^* A_1 x/y^* x$$
$$\vdots$$
$$\partial\lambda_1/\partial q_k|_{q=q^*} = y^* A_k x/y^* x$$

olur. Reel kısmın kısmi türevleri :

$$\partial F/\partial q_1|_{q=q^*} = \mathrm{Re}\ (\partial\lambda_1/\partial \mathrm{q}_1)$$
$$\vdots$$
$$\partial F/\partial q_k|_{q=q^*} = \mathrm{Re}\ (\partial\lambda_1/\partial \mathrm{q}_\mathrm{k})$$

olur. $F(q)$'yu her adımda küçültecek şekilde α seçilerek yeni nokta

$$q^{**} = q^* - \alpha \cdot (\nabla F|_{q=q^*})^T$$

belirlenir. $F(q^{**}) < 0$ ise q^{**} gereken noktadır. Aksi takdirde $F(q^{**}) < F(q^*)$ olacak şekilde yeni bir α seçilerek yöntem tekrarlanır. Prosedür bu biçimde her adımda tekrarlanır.

Örnek 3.9.2.

$$A_0 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},\quad A_1 = \begin{pmatrix} -0.4582 & 0.4027 & 0.9691 \\ 0.7370 & -0.4511 & -0.3452 \\ -0.7406 & 0.8160 & 0.7331 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -0.5890 & 0.5471 & -0.6725 \\ 0.1761 & 0.5744 & 0.4972 \\ -0.7262 & -0.4928 & -0.8219 \end{pmatrix} \; ve$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -0.9571 & -0.3868 & -0.1505 \\ -0.4578 & -0.6560 & 0.3161 \\ -0.1786 & 0.4769 & 0.5364 \end{pmatrix}$$

iken

$$A(q) = A_0 + q_1 A_1 + q_2 A_2 + q_3 A_3$$

ailemizi tekrardan ele alalım. $q = (0,0,0)$ *için,*

$$A(q) = A_0 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \; dır.$$

A_0 *kararsız matristir.* $q^0 = (0,0,10)^T$ *alalım.* $A(q^0)$*'ın özdeğerleri*

$$\lambda_1 = 8.5512,$$

$$\lambda_2 = -7.6591 + 2.3126j,$$

$$\lambda_3 = -7.6591 - 2.3126j.$$

Reel kısmı en büyük olan özdeğer λ_1*'dir.*

λ_1 *özdeğerine karşı gelen sol özvektör* $(-0.0946, 0.3102, 0.9459)$,

λ_1 *özdeğerine karşı gelen sağ özvektör* $(-0.1118, 0.1780, 0.9776)^T$ *olur.*

Fonksiyonun kısmi türevlerinden

$$\begin{aligned} \partial F/\partial q_1|_{q=q^0} &= \mathrm{Re}\ (\partial\lambda_1/\partial \mathrm{q}_1) \\ &= 0.6433 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial F/\partial q_2|_{q=q^0} &= \mathrm{Re}\ (\partial\lambda_1/\partial \mathrm{q}_2) \\ &= -0.5481 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial F/\partial q_3|_{q=q^0} &= \mathrm{Re}\ (\partial\lambda_1/\partial \mathrm{q}_3) \\ &= 0.6554 \end{aligned}$$

değerleri elde edilir. $\nabla F|_{q=q^0} = [0.6433, -0.5481, 0.6554]$ *olur.*

$$q^1 \;=\; q^0 - (1/2)^s \cdot (\nabla F|_{q=q^0})^T$$

eşitliğinde s, $F(q^1) < F(q^0)$ *olacak şekilde seçilir. Buradan*

$$q^1 = (-0.6433, 0.5481, 9.3445)^T$$

noktası elde edilir. $A(q^1)$*'in özdeğerleri*

$$\lambda_1 = 7.4051$$

$$\lambda_2 = -6.9058 + 1.6502j$$

$$\lambda_3 = -6.9058 - 1.6502j$$

olur. Reel kısmı en büyük olan özdeğer λ_1*'dir.*

λ_1 *özdeğerine karşı gelen sol özvektör* $(-0.1143, 0.2835, 0.9521)$ *olur.*

λ_1 *özdeğerine karşı gelen sağ özvektör* $(-0.1835, 0.2146, 0.9592)^T$ *olur.*

Fonksiyonun kısmi türevlerinden

$$\begin{aligned} \partial F/\partial q_1|_{q=q^0} &= \mathrm{Re}\ (\partial\lambda_1/\partial \mathrm{q}_1) \\ &= 0.6835 \\ \partial F/\partial q_2|_{q=q^0} &= \mathrm{Re}\ (\partial\lambda_1/\partial \mathrm{q}_2) \\ &= -0.5179 \\ \partial F/\partial q_3|_{q=q^0} &= \mathrm{Re}\ (\partial\lambda_1/\partial \mathrm{q}_3) \\ &= 0.6498 \end{aligned}$$

değerleri elde edilir. $\nabla F|_{q=q^1} = [0.6835, -0.5179, 0.6498]$ *olur.*

$$q^2 = q^1 - (1/2)^s \cdot (\nabla F|_{q=q^1})^T$$

eşitliğinde s *değeri ,* $F(q^2) < F(q^1)$ *olacak şekilde seçilir. Buradan*

$$q^2 = (-1.3268, 1.0661, 8.6946)^T$$

noktası elde edilir. 11 *adımdan sonra* $q^{11} = (-4.6134, 2.1298, 7.5652)^T$ *olur ve* $A(q)$*'nun kararlı üyesi*

$$A(q^{11}) = \begin{pmatrix} -4.5395 & -1.7228 & -7.0920 \\ -0.5028 & -1.7842 & 5.1066 \\ -0.4720 & -1.1311 & 1.0228 \end{pmatrix} \quad \textit{olur.}$$

3.10 Parametre sayısı 2 iken kararlı elemanın bulunması

$k_1 \in [a, b]$, $k_2 \in [c, d]$ olmak üzere $f(k_1, k_2, s)$ fonksiyonu iki parametreye bağlı n. dereceden polinom ailesini ele alalım ve de şu problemi inceleyelim: $(k_1, k_2) \in [a, b] \times [c, d]$ çifti var mıdır ki $f(k_1, k_2, s)$ kararlı olsun.

D-ayrıştırma yöntemine göre ([9] ve [17]), kararlılık bölgesinin sınırı

$$f(k_1, k_2, j\omega) = 0, \quad -\infty < \omega < \infty \tag{3.62}$$

denklemiyle verilir. Bu eşitlik,

$$\begin{aligned} k_1 &= k_1(\omega) \\ k_2 &= k_2(\omega) \\ (-\infty &< \omega < \infty) \end{aligned} \tag{3.63}$$

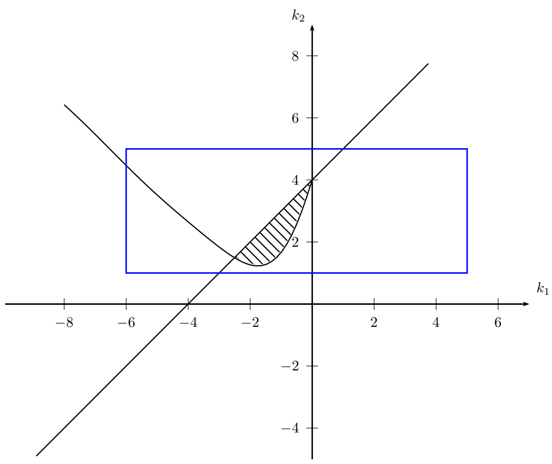
iki denklem (reel ve sanal kısım) ve kararlılık bölgesinin sınırını tanımlayan parametrik eğri verir.

Sonuç olarak, bu bölgeyi $[a, b] \times [c, d]$ kümesiyle karşılaştırmamız gerekir. Bu küme boştan farklı ise kararlı eleman vardır.

Örnek 3.10.1.

$$f(k_1, k_2, s) \;=\; s^3 + (k_1 + k_2 + 1)s^2 + (-4k_1 + k_2 - 4)s + 2k_1 - 2k_2 + 8,$$

$(k_1, k_2) \in [-6, 5] \times [1, 5]$.



Şekil 3.2. Örnek 3.10.1 için konveks kararlılık bölgesi

3.11 Parametre sayısı birden fazla iken kararlı elemanın rastgele seçimi

q parametresi

$$Q = [q_1^-, q_1^+] \times \ldots \times [q_l^-, q_l^+]$$

kutusunda değişen bilinmeyen bir parametre iken,

$$A(q) = A_0 + q_1 A_1 + \ldots + q_l A_l$$

afin ailesini ele alalım.

q_2 koordinatını $[q_2^-, q_2^+]$ aralığından, $\ldots$, q_l koordinatını $[q_l^-, q_l^+]$ aralığından aynı zamanda rastgele seçelim. Bu işlem Q kutusundan rastgele bir q üretir.

$$S = \{q \in Q : \ A(q) \ \text{kararlıdır}\} \tag{3.64}$$

kümesi açık bir kümedir. Varsayalım ki $S \neq \emptyset$ ve $v = \text{hacim(S)}$, $u = \text{hacim(Q)}$ iken

$$p = \frac{v}{u}$$

olsun. Böylece $0 < p \leq 1$ ve $p =$ rastgele seçilen q'nun kararlı nokta olma olasılığıdır.

k (k = denemelerin sayısı) iterasyondan sonra en azından bir seçilen q noktasının kararlı olma olasılığını hesaplayabiliriz:

E : en azından bir q noktası kararlıdır.

E^c : hiç bir q noktası kararlı değildir.

O halde $p(E) + p(E^c) = 1$'dir.

$$p(E^c) = \underbrace{(1-p).(1-p)\ldots(1-p)}_{k \text{ tane}} = (1-p)^k$$

$$p(E) = 1 - (1-p)^k \to 1 \quad \text{iken} \ \ k \to \infty$$

Biz aşağıdaki algoritmayı sunarız.

Algoritma 3.11.1. *1. Q bir kutu iken $A(q) : q \in Q$ ailesini düşünelim. $J \subset \{1, 2, \cdots, l\}$ indisler kümesinin bir alt kümesini ve rastgele şekilde q_i $(i \in J)$ koordinatlarını seçelim.*

2. *Alt ailede kararlı elemanın olup olmadığını kontrol edelim. Eğer öyle bir eleman varsa algoritmayı durduralım. Aksi takdirde q_i $(i \in J)$ koordinatları için başka bir rastgele değer seçelim ve algoritmayı uygulamaya devam edelim.*

$\mathcal{D}$ - ayrıştırma yöntemi ([9], [17])'ni kullanmak için kalan koordinatların sayısı (rastgele seçilmeyen) bir veya iki olması gerekir. $\mathcal{D}$- ayrıştırma yöntemi dışında aşağıdaki yardımcı teoremi de kullanalım.

Yardımcı Teorem 3.11.2.
- *$A(q)$'nun $\lambda = 0$ özdeğeri var olması için gerek ve yeter koşul* $\det(A(q)) = 0$ *olmasıdır.*
- *$A(q)$'nun $\lambda = j\omega$, $\omega > 0$ özdeğeri var ise* $\det(2A.I) = 0$*'dır.*

Bu yardımcı teoremde gösterilen "$\cdot$" sembolü bialternate çarpımı göstermektedir.

Örnek 3.11.3.

$$A_0 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \; A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$$

iken 2×2 *boyutlu*

$$A(q) = A_0 + q_1 A_1 + q_2 A_2 \qquad q_1 \in [0,1], q_2 \in [0,1]$$

ailesini ele alalım.

q_2*'nin değeri rastgele seçilir.* $q_2 = 0.44803$ *seçilirse*

$$\tilde{A}(q) = \begin{pmatrix} 1.7598 - 2q_1 & -1.6881 + 5q_1 \\ 0.6881 + 3q_1 & 3.2078 - 2q_1 \end{pmatrix}$$

ailesi elde edilir. $\det(2\tilde{A}(q).I) = 4.9677 - 4q_1$.

$\det(\tilde{A}(q)) = 0$ *ise* $q_1^1 = -1.2504$, $q_1^2 = 0.4948$ *ve*

$\det(2\tilde{A}(q).I) = 0$ *ise* $q_1 = 1.2419$

elde edilir.

$q_1 = 1.2419$ *iken* $\tilde{A}(q)$*'nun özdeğerleri* -4.5256, 4.5256 *olup* ω *sıfırdan farklı iken* $j\omega$ *kök veren* q_1 *yoktur.*

$\lambda = 0$ olacak şekilde $q_1^1 = -1.2504$ ve $q_1^2 = 0.4948$ olur.

Bu iki q_1 değeri arasından değerler seçersek örneğin $q_1 = 0.1$ ve $q_1 = 0.4949$ olsun.

Eğer $q_1 = 0.1$ seçilirse $\tilde{A}(q)$'nun özdeğerleri $2.2838 + 0.8061j$ ve $2.2838 - 0.8061j$ elde edilir. Bu özdeğerlerin ikisi de sağ yarı düzlemde olur.

Eğer $q_1 = 0.4949$ seçilirse $\tilde{A}(q)$'nun özdeğerleri -0.0001 ve 2.9883 elde edilir. Bu özdeğerlerin biri sol, diğeri sağ yarı düzlemde olur.

Bize iki özdeğerin de sol yarı düzlemde olması gerektiği için rastgele yeni bir q_2 değeri seçilir. Rastgele seçilen q_2 değerleri aşağıda gösterilir:

1. adım: $q_2 = 0.44803$ *cevap: yok*

2. adım: $q_2 = 0.40168$ *cevap: yok*

3. adım: $q_2 = 0.63763$ *cevap: yok*

4. adım: $q_2 = 0.04131$ *cevap: yok*

5. adım: $q_2 = 0.88466$ *cevap: var.*

5 adımdan sonra ($q_2 = 0.88446$) bialterne çarpım yöntemi pozitif cevap verir. $\{A(q) : q_1 \in (0.25952, 0.88416), q_2 = 0.88466\}$ alt ailesi tamamen kararlıdır.

3.12 Köşegen elemanları sabit olan 3×3 boyutlu aralık aile için bölme-eleme algoritması

$$A(q) = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix}, \quad q_{ij} \in [a_{ij}, b_{ij}] \tag{3.65}$$

aralık matris ailesini ele alalım. Köşegen elemanları sabitlenmiş ise kararlılık koşulları $f_i : Q \to \mathcal{R}$, $(i = 1, 2)$ multilineer fonksiyonları için eşitsizlikler verir. Bu ailenin karakteristik polinomu $E_2(A)$, A'nın 2×2 boyutlu baş minörlerinin toplamı olmak üzere,

$$p(s, q) = s^3 - \mathrm{tr(A(q))s^2} + \mathrm{E_2(A(q))s} - \mathrm{det(A(q))} \tag{3.66}$$

biçiminde ifade edilir.

Önerme 3.12.1.

$$p(s) = s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0, \quad a_2 > 0.$$

3. *mertebeden monik polinomunu ele alalım.* $a_0 > 0$ *ve* $a_1 a_2 > a_0$ *ise bu polinom kararlıdır.*

Kanıt. Bu polinom için kararlılık problemi Routz-Hurwitz kararlılık kriterine dayanarak verilir: Hurwitz kararlılığın sağlanması için gerek ve yeter şart $a_0 > 0$, $a_1 > 0$ ve $a_1 a_2 > a_0$ koşullarının sağlanmasıdır.

$a_0 > 0$ ve $a_1 a_2 > a_0$ ise $a_1 > 0$ eşitsizliği de sağlanır.

Gerçekten, $a_1 a_2 > a_0 > 0 \Rightarrow a_1 a_2 > 0$. $a_2 > 0$ olduğu için $a_1 > 0$ olur. □

Bundan dolayı (3.66) ailesinin kararlılığı için gerek ve yeter koşullar şöyledir:

$$\begin{aligned} f_1 &= -\det(A(q)) > 0 \\ f_2 &= (-\mathrm{tr}(\mathrm{A(q)}).\mathrm{E}_2(\mathrm{A(q)}) + \det(\mathrm{A(q)}) > 0. \end{aligned} \tag{3.67}$$

Bu fonksiyonlar multilineerdir. Herbir f_1 ve f_2 fonksiyonunun altı boyutlu Q kutusu üzerindeki görüntüsü Q'nun q^i uç noktalarındaki görüntüleri $f_1(q^i)$, $f_2(q^i)$ hesaplanarak basitçe ve tam olarak hesaplanabilir. Köşegen elemanları sabit olan (3.65) ailesinin kararlı olup olmadığına karar vermek için aşağıdaki algoritmayı kullanacağız.

Algoritma 3.12.2. 1. Adım: *Köşegen elemanları sabitlenmiş olan (3.65) aralık matris ailesini alalım.* $f_1(Q)$ *ve* $f_2(Q)$ *görüntü aralıklarını hesaplayalım.*

2. Adım: *Bu görüntülerin bütün sol sınırları sıfırdan büyükse algoritmayı durduralım. Bu aile gürbüz kararlıdır. Bu görüntülerin üst sınırlarından en az biri sıfırdan küçük eşit ise algoritmayı durduralım. Bu ailede kararlı eleman yoktur. Aksi takdirde gelecek adıma geçelim.*

3. Adım: Q *kutusunu seçilen koordinat yönünde iki alt kutuya bölelim. Her bir alt kutu için 1. Adım-2. Adım'ı tekrarlayalım.*

4. Adım: *En azından bir fonksiyonun maksimumu sıfırdan küçük eşit olduğu kutuyu elimine edelim.*

Bütün alt kutular elimine edilirse (bu ailede kararlı eleman yoktur) veya bazı kutular üzerinde bütün sol sınırlar sıfırdan büyükse (o kutu kararlıdır) algoritma sonlandırılır. Bu algoritmayı kullanarak bir kaç örnek çözelim. Örnekler bu algoritmanın yeterince hızlı olduğunu gösterir.

Örnek 3.12.3. *$q_1 \in [1, 3/2]$, $q_2 \in [0, 2]$, $q_3 \in [0, 1]$, $q_4 \in [4, 6]$, $q_5 \in [-2, -1]$, $q_6 \in [-4, -2]$ olmak üzere*

$$A(q) = \begin{pmatrix} 0 & q_1 & q_2 \\ q_3 & 1 & q_4 \\ q_5 & q_6 & -2 \end{pmatrix}$$

matris ailesini ele alalım.

$A(q)$ ailesinin karakteristik polinomu

$$s^3 + s^2 - (2 + q_5 q_2 + q_4 q_6 + q_1 q_3)s - q_1 q_4 q_5 - q_2 q_3 q_6 + q_2 q_5 - 2q_1 q_3$$

olur.

$f_1(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)$ bu polinomun katsayı fonksiyonu, $f_2(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)$ kararlılık koşulundan elde edilen fonksiyon olmak üzere,

$$\begin{aligned} f_1(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6) &= -q_1 q_4 q_5 - q_2 q_3 q_6 + q_2 q_5 - 2q_1 q_3 \\ f_2(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6) &= -2 - 2q_2 q_5 - q_4 q_6 + q_1 q_3 + q_1 q_4 q_5 + q_2 q_3 q_6. \end{aligned} \tag{3.68}$$

Q ($Q = [1, 3/2] \times [0, 2] \times [0, 1] \times [4, 6] \times [-2, -1] \times [-4, -2]$) kutusunun uç noktalarına göre f_1 fonksiyonun görüntüsü $[2, 19]$ olur. Q kutusunun uç noktalarına göre f_2 fonksiyonun görüntüsü $[-8, 20]$ olur. Bu görüntüler sıfırı içerir. Bundan dolayı Q kutusu 2. koordinat yönünde Q_1 ve Q_2 olarak iki alt kutuya bölünür.

$$\begin{aligned} Q_1 &= [1, 3/2] \times [0, 1] \times [0, 1] \times [4, 6] \times [-2, -1] \times [-4, -2] \\ Q_2 &= [1, 3/2] \times [1, 2] \times [0, 1] \times [4, 6] \times [-2, -1] \times [-4, -2]. \end{aligned}$$

Bu alt kutuların uç noktalarına göre f_1 ve f_2 fonksiyonları altındaki görüntüler hesaplanır. Q_1 kutusunun uç noktalarının f_2 fonksiyonu altındaki görüntüsü $[-8, 18]$ olur. Bu yüzden Q_1 kutusu tekrar iki alt kutuya bölünür. Q_2 kutusunun

Çizelge 3.3. Örnek 3.12.3 için bölme-eleme prosedürü

subbox	min f_1	max f_1	min f_2	max f_2
$[1,3/2]\times[0,2]\times[0,1]\times[4,6]\times[-2,-1]\times[-4,-2]$	2	19	-8	20
$[1,3/2]\times[0,1]\times[0,1]\times[4,6]\times[-2,-1]\times[-4,-2]$	2	18	-8	18
$[1,3/2]\times[1,2]\times[0,1]\times[4,6]\times[-2,-1]\times[-4,-2]$	2	19	-9/2	20
$[1,3/2]\times[0,1]\times[0,1]\times[4,5]\times[-2,-1]\times[-4,-2]$	2	15	-7	15
$[1,3/2]\times[0,1]\times[0,1]\times[5,6]\times[-2,-1]\times[-4,-2]$	3	18	-8	18
$[1,3/2]\times[1,2]\times[0,1]\times[4,5]\times[-2,-1]\times[-4,-2]$	2	16	-7/2	17
$[1,3/2]\times[1,2]\times[0,1]\times[5,6]\times[-2,-1]\times[-4,-2]$	3	19	-9/2	20
$[1,3/2]\times[0,1]\times[0,1]\times[4,5]\times[-2,-1]\times[-4,-3]$	2	15	-2	15
$[1,3/2]\times[0,1]\times[0,1]\times[4,5]\times[-2,-1]\times[-3,-2]$	2	15	-7	10
$[1,3/2]\times[0,1]\times[0,1]\times[5,6]\times[-2,-1]\times[-4,-3]$	3	18	-2	18
$[1,3/2]\times[0,1]\times[0,1]\times[5,6]\times[-2,-1]\times[-3,-2]$	3	18	-8	12
$[1,3/2]\times[1,2]\times[0,1]\times[4,5]\times[-2,-1]\times[-4,-3]$	2	16	1/2	17

uç noktalarının f_2 fonksiyonu altındaki görüntüsü $[-9/2, 20]$ olur. Bundan dolayı Q_2 kutusu tekrar iki alt kutuya bölünür.

12 adımdan sonra, $q_1 \in [1, 3/2]$, $q_2 \in [1, 2]$, $q_3 \in [0, 1]$, $q_4 \in [4, 5]$, $q_5 \in [-2, -1]$, $q_6 \in [-4, -3]$ olmak üzere

$$\min f_1(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6) = 2$$

ve

$$\min f_2(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6) = 1/2$$

elde edilir. Bütün sol sınırlar sıfırdan büyük eşit olduğundan dolayı bu alt aile gürbüz kararlıdır.

Önerme 3.12.4. *λ, A matrisinin özdeğeri ise $\lambda - \alpha$, $A - \alpha I$ matrisinin bir özdeğeridir.*

$A - \alpha I$ matrisi A' nın bütün köşegen elemanlarından α sayısı çıkartılarak bulunur.

Buna göre, A matrisi kararsız ve $\mathrm{Re}\lambda_{\mathrm{i}}(\mathrm{A}) \geq 0$ ise

1) $\mathrm{Re}\lambda_{\mathrm{i}}(\mathrm{A} - \alpha\mathrm{I}) < 0$,

2) $A - \alpha I$ ailede kalıyor

koşullarını sağlayan $A - \alpha I$ matrisi ele alınabilir. $[a_i, b_i]$ $(i = 1, 2, ..., n)$ köşegen aralıkları iken $\alpha = \min_i(b_i - a_i)$ alınırsa ikinci koşul garanti edilir.

Örnek 3.12.5. $d_1 \in [a_1, b_1] \in [0,4]$, $d_2 \in [a_2, b_2] \in [-2,1]$, $d_3 \in [a_3, b_3] \in [-5,0]$, $q_1 \in [1,3]$, $q_2 \in [0,2]$, $q_3 \in [2,3]$, $q_4 \in [4,5]$, $q_5 \in [-5,-3]$,$q_6 \in [-3,-1]$ *iken*

$$A(d,q) = \begin{pmatrix} d_1 & q_1 & q_2 \\ q_3 & d_2 & q_4 \\ q_5 & q_6 & d_3 \end{pmatrix}$$

matris ailesini alalım.

$\alpha = \min_i(b_i - a_i) = 3$. *O halde* $A(q) - 3I$ *matrisini inceleyelim.*

$q_1 \in [1,3]$, $q_2 \in [0,2]$, $q_3 \in [2,3]$, $q_4 \in [4,5]$, $q_5 \in [-5,-3]$, $q_6 \in [-3,-1]$ *olmak üzere*

$$A(q) - 3I = \begin{pmatrix} 1 & q_1 & q_2 \\ q_3 & -2 & q_4 \\ q_5 & q_6 & -3 \end{pmatrix}$$

olur. $A(q) - 3I$ *matrisinin karakteristik polinomu*

$$s^3 + 4s^2 + (1 - q_3q_1 - q_2q_5 - q_4q_6)s - 6 + q_4q_6 - 3q_3q_1 - \\ q_3q_2q_6 - q_1q_4q_5 - 2q_2q_5$$

olur. $f_1(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)$ *katsayı fonksiyonu ve* $f_2(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)$ *kararlılık koşulundan elde edilen fonksiyon iken*

$$\begin{aligned} f_1(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6) &= -6 + q_4q_6 - 3q_3q_1 - q_3q_2q_6 - q_5q_1q_4 - 2q_5q_2 \\ f_2(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6) &= 10 - q_3q_1 - 2q_5q_2 - 5q_4q_6 + q_3q_2q_6 + q_5q_1q_4 \end{aligned} \tag{3.69}$$

olur. Q *(*$Q = [1,3] \times [0,2] \times [2,3] \times [4,5] \times [-5,-3] \times [-3,-1]$ *) kutusunun uç noktalarının* f_1 *altındaki görüntüsü* $[-15, 70]$ *ve* f_2 *altındaki görüntüsü* $[-49, 68]$*'dır. Bu görüntüler sıfırı içerir. Bu yüzden* Q *kutusu* 1. *koordinat yönünde* Q_1 *ve* Q_2 *olarak iki alt kutuya bölünür.*

$$\begin{aligned} Q_1 &= [1,2] \times [0,2] \times [2,3] \times [4,5] \times [-5,-3] \times [-3,-1] \\ Q_2 &= [2,3] \times [0,2] \times [2,3] \times [4,5] \times [-5,-3] \times [-3,-1]. \end{aligned} \tag{3.70}$$

Bu alt kutuların f_1 *ve* f_2 *altındaki görüntüleri hesaplanır.* Q_1 *kutusunun* f_1 *ve* f_2 *altındaki görüntüsü sırasıyla* $[-15, 51]$, $[-21, 68]$ *olur. Bundan dolayı* Q_1

kutusu tekrar iki alt kutuya bölünür. Ayrıca, Q_2 kutusunun f_1 ve f_2 altındaki görüntüleri sırasıyla $[-12, 70]$, $[-49, 51]$ olur. Bundan dolayı Q_2 kutusu tekrar iki alt kutuya bölünür.

Çizelge 3.4. Örnek 3.12.5 için bölme-eleme prosedürü

subbox	min f_1	max f_1	min f_2	max f_2
$[1,3]\times[0,2]\times[2,3]\times[4,5]\times[-5,-3]\times[-3,-1]$	-15	70	-49	68
$[1,2]\times[0,2]\times[2,3]\times[4,5]\times[-5,-3]\times[-3,-1]$	-15	51	-21	68
$[2,3]\times[0,2]\times[2,3]\times[4,5]\times[-5,-3]\times[-3,-1]$	-12	70	-49	51
$[1,2]\times[0,1]\times[2,3]\times[4,5]\times[-5,-3]\times[-3,-1]$	-15	39	-21	68
$[1,2]\times[1,2]\times[2,3]\times[4,5]\times[-5,-3]\times[-3,-1]$	0	51	-14	68
$[2,3]\times[0,1]\times[2,3]\times[4,5]\times[-5,-3]\times[-3,-1]$	-12	58	-49	51
$[2,3]\times[1,2]\times[2,3]\times[4,5]\times[-5,-3]\times[-3,-1]$	3	70	-42	51
$[1,2]\times[0,1]\times[2,3]\times[4,5]\times[-5,-4]\times[-3,-1]$	-11	39	-21	65
$[1,2]\times[0,1]\times[2,3]\times[4,5]\times[-4,-3]\times[-3,-1]$	-15	27	-11	68
$[1,2]\times[1,2]\times[2,3]\times[4,5]\times[-5,-4]\times[-3,-1]$	6	51	-14	67
$[1,2]\times[1,2]\times[2,3]\times[4,5]\times[-4,-3]\times[-3,-1]$	0	37	-6	68
$[2,3]\times[0,1]\times[2,3]\times[4,5]\times[-5,-4]\times[-3,-1]$	-4	58	-49	43
$[2,3]\times[0,1]\times[2,3]\times[4,5]\times[-4,-3]\times[-3,-1]$	-12	41	-34	51
$[2,3]\times[1,2]\times[2,3]\times[4,5]\times[-5,-4]\times[-3,-1]$	13	70	-42	45
$[2,3]\times[1,2]\times[2,3]\times[4,5]\times[-4,-3]\times[-3,-1]$	3	51	-29	51
$[1,2]\times[0,1]\times[2,3]\times[4,5]\times[-5,-4]\times[-3,-2]$	-11	36	4	65
$[1,2]\times[0,1]\times[2,3]\times[4,5]\times[-5,-4]\times[-2,-1]$	-7	39	-21	42
$[1,2]\times[0,1]\times[2,3]\times[4,5]\times[-4,-3]\times[-3,-2]$	-15	24	12	68
$[1,2]\times[0,1]\times[2,3]\times[4,5]\times[-4,-3]\times[-2,-1]$	-11	27	11	45
$[1,2]\times[1,2]\times[2,3]\times[4,5]\times[-5,-4]\times[-3,-2]$	6	50	8	67

20 *adımdan sonra,* $q_1 \in [1,2]$, $q_2 \in [1,2]$, $q_3 \in [2,3]$, $q_4 \in [4,5]$, $q_5 \in [-5,-4]$, $q_6 \in [-3,-2]$ *iken*

$$\min f_1(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6) = 6,$$

$$\min f_2(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6) = 8$$

elde edilir. $A(d,q)$*'nun bu alt ailesinin bütün sol sınırları sıfırdan büyük olduğundan gürbüz kararlıdır.*

3.13 Köşegen elemanları sabit olmayan 3×3 boyutlu aralık aile için rastgele seçim

Matris ailesi (3.65)'de diyagonal elemanları sabit değilse, kararlılık koşulları (3.67) doğrusal olmayan fonksiyonlardır. Bu durumda diyagonal elemanları rastgele seçeriz. 3×3 aralık matris ailesi (3.65)'yı ve 3 - boyutlu

$$\widetilde{Q} = [a_{11}, b_{11}] \times [a_{22}, b_{22}] \times [a_{33}, b_{33}].$$

köşegen kutusunu alalım. $(q_{11}, q_{22}, q_{33}) \in \widetilde{Q}$ vektörü $q_{11} = a$, $q_{22} = b$, $q_{33} = c$ olarak sabitlenir ise kararlılık koşulunun sol tarafları $(q_{12}, q_{13}, \ldots, q_{32})$ değişkenli multilineer fonksiyonlar olur ve multilineer fonksiyonların uç özelliklerine ve bölme-eleme yöntemine dayanan algoritma kullanılarak bir kararlı eleman bulunabilir (eğer varsa).

(q_{11}, q_{22}, q_{33}) vektörünü $\widetilde{Q}$ kutusundan rastgele seçip üstteki bölme-eleme prosedürünü uygulayalım. Defalarca tekrarladıktan sonra $p > 0$ ise 1'e yakın bir olasılıkla kararlı elemana ulaşırız.

Örnek 3.13.1. *$q_1 \in [-15, -10]$, $q_2 \in [-1, 3]$, $q_3 \in [-1, 5]$, $q_4 \in [-3, 4]$, $q_5 \in [-2, 5]$, $q_6 \in [2, 7]$, $q_7 \in [-4, 1]$ iken aşağıdaki aralık matris ailesini alalım.*

$$A(q) = \begin{pmatrix} 3 & q_2 & q_3 \\ q_4 & -7 & q_5 \\ q_6 & q_7 & q_1 \end{pmatrix}. \tag{3.71}$$

Bu ailenin karakteristik polinomu

$$\begin{aligned} p(s,q) \quad = \quad & s^3 - (q_1 - 4)s^2 + (-4q_1 - q_3q_6 - q_5q_7 - q_2q_4 - 21)s + \\ & 21q_1 - q_3q_4q_7 - q_2q_5q_6 - 7q_3q_6 + 3q_5q_7 + q_1q_2q_4 \end{aligned}$$

olur. Köşegen elemanı q_1, $[-15, -10]$ aralığından rastgele seçilir.

1. adım: $q_1 = -12.4146$ *Algoritma 3.12.2'e dayanarak cevap : yok*

2. adım: $q_1 = -14.1448$ *cevap : yok*

$\vdots$

18. adım: $q_1 = -10.1537$ *cevap : var*

$$\min f_1 = \frac{22328}{81919} > 0 \quad \min f_2 = \frac{39380}{10239} > 0.$$

Alt kutu $\{(q_1, q_2, \ldots, q_7) : q_1 = -10.1537, q_2 \in [95/32, 3], q_3 \in [-1, -125/128],$ $q_4 \in [-3, -761/256], q_5 \in [-2, -505/256], q_6 \in [1787/256, 7],$ $q_7 \in [-4, -1019/256]\}$ *tamamen kararlıdır. Bu örnekte $u = 5$, $v \approx 0.5$, $p = \frac{v}{u} \approx 0.1$ olur.*

Örnek 3.13.2. *$q_1 \in [-4,-1]$, $q_2 \in [-4,-2]$, $q_3 \in [-2,5]$, $q_4 \in [1,3]$, $q_5 \in [-2,1]$, $q_6 \in [-3,-1]$, $q_7 \in [5,7]$, $q_8 \in [-2,0]$ iken aşağıdaki aralık matris ailesini ele alalım.*

$$A(q) = \begin{pmatrix} 2 & q_3 & q_4 \\ q_5 & q_1 & q_6 \\ q_7 & q_8 & q_2 \end{pmatrix} \tag{3.72}$$

Bu ailenin karakteristik polinomu

$$\begin{aligned} p(s,q) \;&=\; s^3 - (q_1+q_2+2)s^2 + (q_1q_2 + 2q_1 - q_4q_7 - q_6q_8 - q_3q_5)s \\ &\quad -2q_1q_2 + q_1q_4q_7 - q_4q_5q_8 - q_3q_6q_7 + 2q_6q_8 + q_2q_3q_5 \end{aligned}$$

olur. $(q_1,q_2) \in [-4,-1]\times[-4,-2]$ vektörleri rastgele seçilir.

1. adım: $q_1 = -1.0095$ $q_2 = -3.6137$ *cevap : yok*

2. adım: $q_1 = -3.9551$ $q_2 = -2.3996$ *cevap : yok*

$\vdots$ $\vdots$

11. adım: $q_1 = -3.5518$ $q_2 = -3.8427$ *cevap : var*

$\{-3.5518\}\times\{-3.8427\}\times[\frac{243}{64},\frac{125}{32}]\times[1,\frac{17}{16}]\times[-2,\frac{-61}{32}]\times[\frac{-17}{16},-1]\times[5,\frac{41}{8}]\times[\frac{-1}{8},0]$ *alt kutusu tamamen kararlıdır.*

Örnek 3.13.3. *$q_1 \in [-10,-6]$, $q_2 \in [-15,-10]$, $q_3 \in [-1,3]$, $q_4 \in [-1,5]$, $q_5 \in [-3,4]$, $q_6 \in [-2,5]$, $q_7 \in [2,7]$, $q_8 \in [-4,1]$ iken aşağıdaki aralık matris ailesini ele alalım.*

$$A(q) = \begin{pmatrix} 3 & q_3 & q_4 \\ q_5 & q_1 & q_6 \\ q_7 & q_8 & q_2 \end{pmatrix}. \tag{3.73}$$

Bu ailenin karakteristik polinomu

$$\begin{aligned} p(s,q) \;&=\; s^3 + (-1-q_2-q_1)s^2 + (-q_7q_4 + q_2 + q_1q_2 - q_5q_3 + q_1 - q_6q_8)s - \\ &\quad q_7q_3q_6 + q_6q_8 + q_7q_4q_1 + q_5q_3q_2 - q_1q_2 - q_5q_4q_8 \end{aligned}$$

olur. $(q_1,q_2) \in [-10,-6]\times[-15,-10]$ vektörleri rastgele seçilir.

1. adım: $q_1 = -7.0095$ $q_2 = -12.4146$ *cevap : yok*

2. adım: $q_1 = -9.9551$ $q_2 = -14.1448$ *cevap : yok*

$\vdots$ $\vdots$

10. adım: $q_1 = -6.8524$ $q_2 = -10.1537$ *cevap : var*

$\{-6.8524\}\times\{-10.1537\}\times[\frac{95}{32},3]\times[-1,\frac{-61}{64}]\times[-3,\frac{-761}{256}]\times[-2,\frac{-249}{128}]\times[\frac{443}{64},\frac{891}{128}]\times[-4,\frac{-507}{128}]$ *alt kutusu tamamen kararlıdır.*

Örnek 3.13.4. *$q_1 \in [-10,-6]$, $q_2 \in [-15,-10]$, $q_3 \in [-1,3]$, $q_4 \in [-1,5]$, $q_5 \in [-3,4]$, $q_6 \in [-2,5]$, $q_7 \in [2,7]$, $q_8 \in [-4,1]$ iken aşağıdaki aralık matris ailesini ele alalım.*

$$A(q) = \begin{pmatrix} q_1 & q_4 & q_5 \\ q_6 & q_2 & q_7 \\ q_8 & q_9 & q_3 \end{pmatrix} \tag{3.74}$$

Bu ailenin karakteristik polinomu

$$\begin{aligned} p(s,q) &= s^3 + (q_1 - q_2 - q_3)s^2 + (-q_5q_8 + q_1q_3 + q_2q_3 - q_4q_6 + q_1q_2 - q_7q_9)s- \\ &\quad q_4q_7q_8 + q_1q_7q_9 + q_2q_5q_8 + q_3q_4q_6 - q_1q_2q_3 - q_5q_6q_9) \end{aligned}$$

elde edilir. $(q_1,q_2,q_3) \in [-8,-4] \times [-6,-3] \times [4,10]$ vektörleri rastgele seçilir.

1. adım: $q_1 = -5.0095$ $q_2 = -3.9484$ $q_3 = 6.5853$ *cevap : yok*

2. adım: $q_1 = -7.9551$ $q_2 = -5.1448$ $q_3 = 5.6852$ *cevap : yok*

$\vdots$ $\vdots$

8. adım: $q_1 = -4.1281$ $q_2 = -5.5518$ $q_3 = 4.1572$ *cevap : var*

$\{-4.1281\} \times \{-5.5518\} \times \{4.1572\} \times [-3, \frac{-11}{4}] \times [\frac{61}{16}, 4] \times [3, \frac{13}{4}] \times [-2, \frac{-27}{16}] \times [-6, \frac{-91}{16}] \times [2, \frac{19}{8}]$ *alt kutusu tamamen kararlıdır.*

Örnek 3.13.5.

$$A_0 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \ A_1 = \begin{pmatrix} -0.4582 & 0.4027 & 0.9691 \\ 0.7370 & -0.4511 & -0.3452 \\ -0.7406 & 0.8160 & 0.7331 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -0.5890 & 0.5471 & -0.6725 \\ 0.1761 & 0.5744 & 0.4972 \\ -0.7262 & -0.4928 & -0.8219 \end{pmatrix} \ \textit{ve}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -0.9571 & -0.3868 & -0.1505 \\ 0.4578 & -0.6560 & 0.3161 \\ -0.1786 & 0.4769 & 0.5364 \end{pmatrix}$$

iken

$$A(q) = A_0 + q_1A_1 + q_2A_2 + q_3A_3, \quad q_1 \in [-6,-3], q_2 \in [1,3], q_3 \in [6,8]$$

afin matrisler ailesini ele alalım. Bu ailenin karakteristik polinomu

$$\begin{aligned} p(s,q) \;=\;& s^3 + (0.8365q_2 + 0.1762q_1 + 1.0767q_3 - 4)s^2 + \\ & (-1.0018q_2 + 0.6615q_2q_3 - 4.9183q_3 - 1.3568q_1 - 0.6660q_2^2 \\ & -0.23795959q_3^2 - 0.8689q_1q_3 - 0.1050q_1q_2 + 6 + 0.2426q_1^2)s \\ & -4 - 2.1520q_1q_2 + 3.0086q_1q_3 + 3.1955q_2^2 + 1.3126q_1q_2q_3 \\ & -0.0858q_3^2 + 1.7904q_1 - 0.0492q_2 + 4.7882q_3 - 0.5826q_3^3 - \\ & 0.4881q_1q_2^2 - 1.3134q_1q_3^2 + 0.3789q_1^2q_2 + 1.6412q_1^2 - 0.2807q_1^2q_3 \\ & -0.1668q_1^3 - 1.9993q_2q_3 + 0.5785q_2q_3^2 + 0.2067q_2^3 - 0.1267q_2^2q_3 \end{aligned}$$

olur. $(q_1, q_2, q_3) \in [-6,-3] \times [1,3] \times [6,8]$ *vektörleri rastgele seçilir.*

1. adım: $q_1 = -3.0095 \quad q_2 = 1.3862 \quad q_3 = 6.0448$ *cevap : yok*

2. adım: $q_1 = -5.1448 \quad q_2 = 2.6852 \quad q_3 = 6.8245$ *cevap : yok*

$\vdots \qquad \vdots$

6. adım: $q_1 = -4.4998 \quad q_2 = 1.9094 \quad q_3 = 7.4732$ *cevap : var*

$\{-4.4998\} \times \{1.9094\} \times \{7.4732\}$ *alt kutusu tamamen kararlıdır.*

Örnek 3.13.6. $q_1 \in [-1,1]$, $q_2 \in [-5,5]$, $q_3 \in [-4,4]$, $q_4 \in [-2,6]$ *iken*

$$p(s,q) = s^4 + q_1s^3 + (q_2q_3 - q_2 - 1)s^2 + 3s + 2q_2q_3q_4 + 2q_2q_3 - 8q_3$$

4. *dereceden aralık polinom ailesini ele alalım.*

$$\begin{aligned} & f_0 = q_1 \\ & f_1 = q_2q_3 - q_2 - 1 \\ & f_2 = 2q_2q_3q_4 + 2q_2q_3 - 8q_3 \\ & f_3 = 3q_1q_2q_3 - 3q_1q_2 - 3q_1 - 2q_1^2q_2q_3 + 8q_1^2q_3 - 9. \end{aligned} \tag{3.75}$$

$q_1 \in [-1,1]$*'in değeri rastgele seçilir. (Bu durumda* f_3 *multilineer olur.)*

1. adım: $q_1 = -0.2085$ *Algoritma 3.12.2'e dayanarak cevap: yok*

2. adım: $q_1 = -0.6137$ *cevap: yok*

3. adım: $q_1 = -0.9551$ *cevap: yok*

4. adım: $q_1 = 0.600$ *cevap: var*

$\min f_0 = 24 > 0,\ \min f_1 = 16.5 > 0,\ \min f_2 = 0.6 > 0,\ \min f_3 = 2.605 > 0.$

$$\{(q_1,q_2,q_3,q_4) : q_1 = 0.600, q_2 \in [-5, \tfrac{-35}{8}], q_3 \in [-4,-3], q_4 \in [-1,0]\}$$

alt kutusu tamamen kararlıdır.

4 SONUÇ

Bu tez çalışmasında doğrusal sistemler teorisinin iki önemli problemi ele alınmıştır: Anahtarlamalı sistemlerin kararlılığını garanti eden ortak kuadratik Lyapunov fonksiyonunun (OKLF) varlığı ve bulunması problemi ile doğrusal sistemlerin kararlılaştırmasında çok önemli olan kararlı elemanın varlığı ve bulunması problemidir.

Birinci problem farklı yöntemlerle (Kelley yöntemi, modifiye edilmiş gradiyent yöntemi, ağırlıklı fonksiyon yöntemi) incelenmiş ve elde edilen sonuçların bilinen yöntemlerin verdiği sonuçlara göre daha iyi olduğu görülmüştür. İkinci problemin çözümü için problemi konveks olmayan optimizasyon problemine getirip gradiyent yönteminin uygulanması, Bendixson teoreminden elde edilen yeterli koşulun uygulanması, rastgele seçim ve bölme-eleme yöntemlerinin uygulanması ele alınmıştır.

OKLF probleminde ağırlıklı fonksiyonlar yönteminin daha hızlı çalışmasını sağlayacak yeni algoritma verilmesi ileride yeni bir problem olarak ele alınabilir.

Kararlı eleman probleminde ise daha geniş sınıflar için kararlı elemanın bulunması, Bendixson teoreminin verdiği yeterli koşulun ne zaman gerekli olacağı problemi de yeni bir problem olarak araştırılabilir.

KAYNAKLAR

[1] A. Antoniou and W. Lu, Practical Optimization: algorithms and engineering applications, New York, Springer, 2007.

[2] B.R. Barmish, *New Tools for Robustness of Linear Systems*, MacMillan, New York, 1995.

[3] S. P. Bhattacharya, H. Chapellat and L. Keel, *Robust control: The parametric approach*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 1995.

[4] S. Boyd and Q. Yang, "Structured and simultaneous Lyapunov functions for system stability problems", *Int. J. Control*, 49 (1989), 2215–2240.

[5] J. V. Burke, A. S. Lewis, M. L. Overton "Two numerical methods for optimizing matrix stability", *Linear Algebra and its Applications*, vol.351–352, pp. 117–145, 2002.

[6] T. Büyükköroğlu, Ö. Esen and V. Dzhafarov, "Common Lyapunov functions for some special classes of stable systems", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 56 (2011), 1963–1967.

[7] D. Cheng, L. Guo, and J. Huang, "On quadratic Lyapunov functions", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 48 (2003), 885–890.

[8] W. P. Dayawansa and C. F. Martin, "A converse Lyapunov theorem for a class of dynamical systems which undergo switching", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 44 (1999), 751–760.

[9] E. N. Gryazina and B. T. Polyak, "Stability regions in the parameter space: D-decomposition revisited", *Automatica*, vol.42, pp. 13–26, 2006.

[10] R.A. Horn and C.R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[11] C. King and R. Shorten, "A singularity test for the existence of common quadratic Lyapunov functions for pairs of stable LTI systems", Proc. Amer. Control Conf., (June 30 2004-July 2 2004), 3881–3884.

[12] A. S. Lewis, M. L. Overton, *Eigenvalue Optimization* , Acta Numer, 1996.

[13] D. Liberzon and R. Tempo, "Common Lyapunov Functions and Gradient Algorithms", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 49 (2004), 990–994.

[14] M. Marcus and H. Minc, *A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities*, Dover, New York, 1992.

[15] O. Mason and R. Shorten, "On the simultaneous diagonal stability of a pair of positive linear systems", *Linear Algebra and its Applications*, 413 (2006), 13–23.

[16] K.S. Narendra and J. Balakrishnan, "A common Lyapunov function for stable LTI systems with commuting A-matrices", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 39 (1994), 2469–2471.

[17] B.T. Polyak and P.S. Shcherbakov, "Hard problems in linear control theory: possible approaches to solution", *Automation and Remote Control*, 66 (2005), 681–718. Translated from Avtomatika i Telemekhanika, 5 (2005), 7–46.

[18] B. T. Polyak and P.S. Shcherbakov, "Numerical Search of Stable or Unstable Element in Matrix or Polynomial Families: A Unified Approach to Robustness Analysis and Stabilization", *Robustness in Identification and control Lecture Notes in Control and Information Sciences*, 245 (1999), 344–358.

[19] V. K. Rohatgi and A. K. Saleh, *An Introduction to Probability and Statistics*, Wiley-Interscience, 2001.

[20] R.N. Shorten and K. S. Narendra, "Necessary and sufficient conditions for the existence of a common quadratic Lyapunov function for a finite number of stable second order linear time-invariant systems", *Int. J. Adaptive Control Signal Processing*, 16 (2002), 709–728.

[21] R.N. Shorten, O. Mason, F.O. Cairbre, and P. Curran, "A unifying framework for the SISO Circle Criterion and other quadratic stability criteria", *International Journal of Control*, 77 (2004), 1–8.