DAVRANIŞI AFİN İNTEGRAL DENKLEM İLE VERİLEN KONTROL SİSTEMİN YÖRÜNGELER KÜMESİNİN ÖZELLİKLERİ VE YAKLAŞIK İNŞASI

Nesir HÜSEYİN

Doktora Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Haziran-2014

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Nesir Hüseyin'in **"Davranışı Afin İntegral Denklem ile Verilen Kontrol Sistemin Yörüngeler Kümesinin Özellikleri ve Yaklaşık İnşası"** başlıklı **Matematik** Anabilim Dalındaki, Doktora Tezi 27.06.2014 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim - Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

		Adı-Soyadı	**İmza**
Üye (Tez Danışmanı)	**:**	**Prof. Dr. KAMAL N. SOLTANOV**	....
Üye	**:**	**Doç. Dr. EMRAH AKYAR**	....
Üye	**:**	**Doç. Dr. NİHAL EGE**	....
Üye	**:**	**Yard. Doç. Dr. ŞENER AĞALAR**	....
Üye	**:**	**Yard. Doç. Dr. ALİ SERDAR NAZLIPINAR**	....

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

DAVRANIŞI AFİN İNTEGRAL DENKLEM İLE VERİLEN KONTROL SİSTEMİN YÖRÜNGELER KÜMESİNİN ÖZELLİKLERİ VE YAKLAŞIK İNŞASI

Nesir HÜSEYİN

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Kamal N. SOLTANOV

2014, 88 Sayfa

Tezde, kontrol sistemin yörüngeler kümesi incelenmektedir. Kontrol sistemin davranışının durum vektörüne göre doğrusal olmayan, kontrol vektörüne göre ise afin olan Volterra integral denklemi ile verildiği ve kontrol fonksiyonunun integral kısıtlı olduğu varsayılmaktadır. Yörüngeler kümesinin kontrol sistemin çeşitli parametrelerine bağlantısı araştırılmış, yörüngeler kümesinin yaklaşık hesaplanması için yaklaşım yöntemi elde edilmiştir. Mümkün kontrol fonksiyonlar kümesi sonlu sayıda kontrol fonksiyonlarından oluşan küme ile değiştirilerek, sistemin yörüngeler kümesi ile, sonlu sayıda yörüngelerden oluşan küme arasındaki Hausdorff uzaklığı değerlendirilmiştir. Yörüngeler kümesini sonlu sayıda yapan parametreler uygun biçimde seçildiğinde, bulunan Hausdorff uzaklığının yeterince küçük olacağı kanıtlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Doğrusal Olmayan Kontrol Sistem, İntegral Denklem, İntegral Kısıtlama, Yörüngeler Kümesi, Yaklaşım Yöntemi, Hausdorff Uzaklığı.

ABSTRACT

PhD Dissertation

PROPERTIES AND APPROXIMATE CONSTRUCTION OF THE SET OF TRAJECTORIES OF THE CONTROL SYSTEM DESCRIBED BY AN AFFINE INTEGRAL EQUATION

Nesir HUSEYIN

Anadolu University
Graduate School of Sciences
Mathematics Program

Supervisor: Prof. Dr. Kamal N. SOLTANOV
2014, 88 Pages

In this thesis the set of trajectories of the control system is investigated. It is assumed that the behavior of control system is described by a Volterra integral equation which is nonlinear with respect to the state vector and is affine with respect to the control vector, and the control functions have integral constraints. The dependence of the set of trajectories on the various parameters of the system is studied and an approximation method is obtained for numerical calculation of the set of trajectories. The set of admissible control functions is replaced by the set which consists of a finite number of control functions. The Hausdorff distance between the set of trajectories of the system and the set, consisting of a finite number of trajectories is evaluated. It is proved that in the appropriate specifying of the discretization parameters, evaluated Hausdorff distance stands sufficiently small.

Keywords: Nonlinear Control System, Integral Equation, Integral Constraint, Set of Trajectories, Approximation Method, Hausdorff Distance.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanması sürecinde gösterdikleri ilgiden dolayı danışman hocam Prof. Dr. Kamal N. SOLTANOV 'a ve tez izleme komitesi üyelerine teşekkür ederim.

Nesir HÜSEYİN

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}^n$	:	n-boyutlu Euclidean uzay
$\|x\|$	:	$x \in \mathbb{R}^n$ vektörünün Euclidean normu
$B_n(x_0, r)$	:	$\mathbb{R}^n$ uzayında merkezi x_0 noktasında, yarıçapı r olan kapalı yuvar
$B_n(r)$	:	$\mathbb{R}^n$ uzayında merkezi orijinde, yarıçapı r olan kapalı yuvar
B_n	:	$\mathbb{R}^n$ uzayında kapalı birim yuvar
$d_n(x, E)$	:	$\mathbb{R}^n$ uzayında x noktasından E kümesine olan uzaklık
$h_n(D, E)$	:	$\mathbb{R}^n$ uzayında D ve E kümeleri arasında Hausdorff uzaklığı
$L_p\big([t_0, \theta]; \mathbb{R}^m\big)$	:	L_p normu sonlu olan ölçülebilir $x(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonlar uzayı
$\|u(\cdot)\|_p$	:	$u(\cdot) \in L_p\big([t_0, \theta]; \mathbb{R}^m\big)$ fonksiyonunun L_p normu
$C\big([t_0, \theta]; \mathbb{R}^n\big)$	:	sürekli $x(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonlar uzayı
$\|x(\cdot)\|_C$	:	$x(\cdot) \in C\big([t_0, \theta]; \mathbb{R}^n\big)$ fonksiyonunun C normu
$comp\,(\mathbb{R}^n)$	:	$\mathbb{R}^n$ uzayının boştan farklı, kompakt alt kümeleri ailesi
$b(\mathbb{R}^n)$	:	$\mathbb{R}^n$ uzayının boştan farklı, sınırlı alt kümeleri ailesi
$\mathbf{X}_{p,\mu_0}$	:	sistemin yörüngeler kümesi
$\mathbf{X}_{p,\mu_0}(t)$	:	sistemin t anındaki yörüngeler kümesinin kesiti
U_{p,μ_0}	:	mümkün kontrol fonksiyonlar kümesi
$B_C(1)$	:	$C\left([t_0, \theta]\,; \mathbb{R}^n\right)$ uzayının kapalı birim yuvarı
$h_C\,(U, V)$	:	$C\left([t_0, \theta]\,; \mathbb{R}^n\right)$ uzayındaki U ve V kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığı
$\hbar_1(G, W)$	:	$G \subset L_{p_1}\big([t_0, \theta]; \mathbb{R}^m\big)$ ve $W \subset L_{p_2}\big([t_0, \theta]; \mathbb{R}^m\big)$ kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığı
$B_{L_p}(0, \mu_0)$	:	$L_p\left([t_0, \theta]; \mathbb{R}^m\right)$ uzayının merkezi orijinde ve yarıçapı μ_0 olan kapalı yuvarı

GİRİŞ

Tez Konusunun Güncelliği: Çağdaş uygulamalı matematiğin önemli dallarından biri olan kontrol sistemlerin matematik teorisi, II. Dünya Savaşından sonra teknikte, fizikte, biyolojide, ekonomide ve bilimin başka dallarında karşılaşılan problemlerin matematiksel modellerinin oluşumunda ve bu problemlere çözüm yöntemlerinin arayışlarında ortaya çıkmış bilim dalıdır. Günümüzde kontrol sistemlerin matematik teorisi, uygulamalı matematiğin yanı sıra, mühendisliğin en önemli ve vazgeçilmez dallarından biri olmuştur. Otomatik kontrol sistemlerde kullanılan bir çok cihaz, önceden teoride elde edilen sonuçlar ile geliştirilmiş yöntem ve prensipler temelinde çalışmaktadır. Ayrıca, kontrol sistemlerin incelenmesinde uygulanan bir çok altyapı, yöntem ve prensipler, XX. asır matematiğinde farklı dalların ortaya çıkmasına bir neden oluşturmuştur. Matematiğin çağdaş alanlarından olan küme değerli analiz, düzgün olmayan analiz, diferansiyel oyunlar teorisi, Hamilton-Jacobi denkleminin minimaks çözümler teorisinin birçok temel kavram ve sonuçları kontrol sistemlerin matematiksel teorisi kapsamında elde edilmiştir (bkz., [1] - [11]).

Kontrol sistemlerin matematiksel teorisinde ilk olarak, davranışı adi diferansiyel denklemlerle verilen kontrol sistemler incelenmeye başlamıştır. Bu sistemler için elde edilen ilk önemli sonuç, Pontryagin 'in maksimum prensibidir. Bu prensip, 1950 'li yılların sonunda kanıtlanmış olup optimal kontrolün varlığı için bir gerek koşuldur (bkz, [11]). Daha sonra 1960 'ın ilk yıllarında, doğrusal sistemlerin kontrol edilebilirliği için Kalman koşulu elde edilmiştir (bkz, [12]).

Davranışı integral denklemlerle verilen sistemler, fizikte, mekanikte, ekonomide, biyolojide ele alınan bir çok modellerde karşımıza çıkmaktadır (bkz,, [13] - [34]). W. Heisenberg ünlü "Fizik ve Felsefe" kitabında integral denklemlerin öneminden bahsederken, *"Maddenin hareketinin son denklemi büyük olasılıkla çok karmaşık integral denklemler sistemine denktir..."* (bkz., [35]) diyerek konunun altını çiziyor.

Kontrol fonksiyonları integral kısıtlı kontrol sistemler, genelde enerji kaynaklarının sınırlı olduğu sistemlerin kontrolünde ortaya çıkmaktadır. Ayrıca, finans kaynaklı kontrol edilebilir ekonomik sistemlerin matematiksel modellerinde kontrol fonksiyonlar integral kısıtlı olmaktadır. Kontrol fonksiyonu üzerinde geometrik kısıtlama olan kontrol sistemlerde, mümkün kontrol fonksiyonlar, değerleri önceden verilen bir sınırlı kümeden seçilen ölçülebilir fonksiyonlardır. Bu kontrol sistemler, üzerlerinde çok geniş araştırmalar yapılmış kontrol sistemlerdendir (bkz., [3] - [7], [36] - [42]).

Kontrol fonksiyonu integral kısıtlı olan kontrol sistemlerde, mümkün kontrol fonksiyonların integralinin önceden verilen bir sayı ile sınırlı olması istenmektedir. Bu durumda, verilen bir fonksiyonun integral kısıtlı olması, bu fonksiyonun geometrik kısıtlı olmasını gerektirmez. Bundan dolayı, kontrol fonksiyonları integral kısıtlı kontrol sistemlerin incelenmesi, kontrol fonksiyonları geometrik kısıtlı olan kontrol sistemlere göre daha zordur. Genelde enerji, yakıt veya finans kaynaklı kontrol etki kullanıldıkça tükenir ve bu tür kontrol etkilerin sınırlılığı integral türü sınırlılık olur. Örneğin, uzayda hareket eden değişken kütleli objelerin hareketlerinin matematiksel modeli, kontrol fonksiyonlarında integral kısıtlılık olan kontrol sistem olarak verilmektedir (bkz., [6], [43] - [47]).

Kontrol sistemlerde en temel kavramlardan biri, kontrol sistemin yörüngeler kümesidir. Sistemin yörüngeler kümesi, her biri sürekli fonksiyon olmak üzere tüm mümkün kontrol fonksiyonların ürettiği yörüngelerden oluşmaktadır. Yörüngeler kümesinin bulunması, verilen kontrol sistemin birçok özelliklerinin önceden öngörülmesine imkan sağlamaktadır. Davranışı adi diferansiyel denklem ile verilen ve kontrol fonksiyonları geometrik kısıtlı olan kontrol sistemin yörüngeler kümesinin birçok topolojik özellikleri [4]- [7], [36] - [39] 'da incelenmiştir. Bu tür kontrol sistemlerin yörüngeler kümesinin kesitlerini, yani sistemin erişim kümelerini yaklaşık hesaplamak için farklı yöntemler [41], [48] - [50] 'de verilmektedir.

Davranışı adi diferansiyel denklem ile verilen ve kontrol fonksiyonları geometrik kısıtlı olan kontrol sistemlerin erişim kümelerinin yaklaşık hesaplanması için geliştirilen yöntemler, kontrol fonksiyonları integral kısıtlı olan kontrol sistemlerin erişim kümelerinin yaklaşık hesaplanmasında kolayca kullanılamamaktadır. Bu nedenle, davranışı adi diferansiyel denklem ile verilen ve kontrol fonksiyonları integral kısıtlı olan kontrol sistemlerin erişim kümelerinin yaklaşık hesaplanması için farklı yöntemlerin geliştirilmesi gerekir. Davranışı adi diferansiyel denklem ile karakterize edilen ve kontrol fonksiyonları integral kısıtlı olan kontrol sistemlerin yörüngeler kümesinin farklı özellikleri [44], [51] - [64] 'te araştırılmıştır.

Davranışı adi diferansiyel denklem ile karakterize edilen ve kontrol fonksiyonları integral kısıtlı olan kontrol sistemlerin yörüngeler kümesinin yaklaşık hesaplanması için farklı yöntemler [50], [64] - [67] 'de bulunabilir.

Adi diferansiyel denklemler teorisinden bilindiği gibi, davranışı adi diferansiyel denklem ile verilen sistemin, verilen zaman anında verilen noktadan geçen yörüngesi, her zaman bir integral denklemin çözümü olarak bulunabilir. Ama bu olayın tersi doğru değil. Yani, davranışı integral denklem ile verilen bir sistemin yörüngesi, her zaman adi diferansiyel denklem için bir başlangıç değer probleminin çözümü olarak bulunamaz. Bundan dolayı, davranışı integral denklem ile verilen kontrol sistemlerin yörüngeler kümesinin özelliklerinin incelenmesi ve yörüngeler kümesinin yaklaşık hesaplanması teori ve pratikte önemli bir yer bulmaktadır.

Tezde Yapılan Araştırmaların Amacı: Yapılan araştırmalarda amaç, önce davranışı durum vektörüne göre doğrusal olmayan, kontrol vektörüne göre ise afin olan Volterra integral denklemi ile verilen ve kontrol fonksiyonları integral kısıtlı olan kontrol sistemin yörüngeler kümesinin sınırlılık, kapalılık, kompaktlık gibi topolojik özelliklerinin yanı sıra, yörüngeler kümesinin kontrol sistemin bazı parametrelerine bağlantısını incelemektir. Daha sonraki amaç, kontrol fonksiyonlar kümesini sonlu sayıda kontrol fonksiyonlarından oluşan bir küme ile değişerek, sistemin yörüngeler kümesine, Hausdorff metriğinde bu kümeye yakın ve sonlu sayıda yörüngeden oluşan bir küme ile yaklaşım vermektir.

Bilimsel Yenilik: Tez kapsamında, davranışı durum vektörüne göre doğrusal olmayan, kontrol vektörüne göre ise afin olan Volterra integral denklemi ile verilen ve kontrol fonksiyonları integral kısıtlı olan kontrol sistemin yörüngeler kümesi incelenmiş ve yapılan çalışmalar doğrultusunda, aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

1. Sistemin verilen mümkün kontrol fonksiyonu tarafından üretilen yörüngesinin varlığı ve tekliği incelenmiş, yörüngeler kümesinin kesitlerinin Hausdorff metriğine göre sürekli olduğu ve yörüngeler kümesinin sürekli fonksiyonlar uzayında kompakt küme olduğu kanıtlanmıştır.

2. Yörüngeler kümesinin, sisteme verilen kontrol etkinin kapasitesini gösteren μ_0 'a ve kontrol fonksiyonların seçildiği L_p uzayının p parametresine bağlantısının sürekli olduğu kanıtlanmıştır. Yörüngeler kümesinin kesitlerinin çapı için bir üst değerlendirme elde edilmiştir.

3. İntegral kısıtlı kontrol fonksiyonlar kümesi, sonlu sayıda mümkün kontrol fonksiyonlarından oluşan ve her biri integral ve geometrik kısıtlı, parçalı sabit, sabit olduğu alt aralıklarda normları verilen sonlu ağda bulunan, değerleri ise birim kürenin yüzeyinde verilen sonlu ağla ayarlanan kontrol fonksiyonlar kümesi ile değiştiriliyor. Sistemin yörüngeler kümesi ile, sonlu sayıda kontrol fonksiyonlarının ürettiği yörüngeler kümesi arasındaki Hausdorff uzaklığı için, kontrol fonksiyonlar kümesini sonlu yapan parametrelere bağlı bir üst değerlendirme elde edilmiştir.

4. Keyfi $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde, kontrol fonksiyonları için kullanılan diskretleştirme parametrelerinin, sistemin yörüngeler kümesi ile sonlu sayıda yörüngelerden oluşan küme arasındaki Hausdorff uzaklığını ε 'dan küçük yapacak değerleri bulunmuştur. Böylece, sonlu sayıda yörüngelerden oluşan kümenin, davranışı faz vektörüne göre doğrusal olmayan, kontrol fonksiyonuna göre ise doğrusal olan integral denklem ile verilen ve kontrol fonksiyonları integral kısıtlı olan kontrol sistemin yörüngeler kümesine bir yaklaşım olduğu gösterilmiştir.

Tezde Kullanılan Araştırma Yöntemleri: Tezde yapılan araştırmalarda reel analizin, fonksiyonel analizin, integral denklemler teorisinin, diferansiyel denklemler teorisinin, küme değerli analizin, kontrol sistemler teorisinin yöntemleri kullanılmaktadır.

Tez Kapsamında Elde Edilmiş Sonuçların Teorik ve Pratik Değeri: Davranışı durum vektörüne göre doğrusal olmayan, kontrol vektörüne göre ise afin olan Volterra integral denklemi ile verilen ve kontrol fonksiyonları integral kısıtlı olan kontrol sistemin yörüngeler kümesinin bazı topolojik özellikleri ve bu kümenin bulunması için bir yaklaşım yöntemi verilmiştir. Elde edilmiş sonuçlar, davranışı doğrusal olmayan integral denklem ile verilen kontrol sistemlerin incelenmesinde önemlidir.

Yörüngeler kümesinin sistemin parametrelerine sürekli bağlantılılığı, pratikte verilen kontrol sistemlerin modelleme sürecinde sistemin ele alınan parametrelerinin ölçümünde oluşabilecek küçük hataların, sistemin yörüngeler kümesini az etkileyeceğini göstermektedir. Başka deyişle, kontrol sistemin yörüngeler kümesi, verilen sistem hakkında önbilgiler elde etmek için kullanılan en önemli yapılardan biri olduğundan, modelleme sırasında sistemin parametrelerinin ölçümünde oluşan küçük hatalar, sistem hakkında elde edeceğimiz önbilgileri az etkiler.

Sistemin yörüngeler kümesine Hausdorff uzaklığı yakın olan ve sonlu sayıda yörüngelerden oluşan kümenin bulunması, yörüngeler kümesinin yaklaşık hesaplanmasında kullanılabilir. Davranışı durum vektörüne göre doğrusal olmayan, kontrol vektörüne göre ise afin olan Volterra integral denklemi ile verilen ve kontrol fonksiyonları integral kısıtlı olan kontrol sistemin yörüngeler kümesinin inşası için elde edilmiş yaklaşım yöntemi yenidir. Tezde ele alınan kontrol sistemlerin yörüngeler kümesinin yaklaşık hesaplanması için literatürde herhangi bir yaklaşım yöntemi bulunmamaktadır.

Tezin Yapısı: Tez giriş ve dört bölümden oluşmaktadır.

Giriş kısmında tezin genel karakterizasyonu verilmektedir.

1. bölüm üç alt bölümden oluşuyor. Alt bölüm 1.1 'de, tezde kullanılan temel kavram ve teoremler verilmektedir.

Alt bölüm 1.2 'de, davranışı durum vektörüne göre doğrusal olmayan, kontrol vektörüne göre ise afin olan integral denklemle verilen kontrol sistemi verilmiş, bu sistemin sağlayacağı temel koşullar ifade edilmiştir. Verilen sistemlerde, kontrol fonksiyonları integral kısıtlı olarak seçilmektedir. Mümkün kontrol fonksiyonlar, L_p uzayının merkezi orijinde μ_0 yarıçaplı kapalı yuvarın elemanları olarak tanımlanmaktadır. Bu bölümde her mümkün kontrol fonksiyonunun ürettği yörünge kavramı verilmiş, sistemin tüm mümkün kontrol fonksiyonları tarafından üretilen yörüngeler kümesi tanımlanmıştır.

Alt bölüm 1.3 'te, sistem üzerine konulan koşullar kapsamında, her mümkün kontrol fonksiyonunun ürettiği yörüngenin var ve tek olduğu kanıtlanmıştır.

2. bölüm üç alt bölümden oluşmaktadır ve bu bölümde sistemin yörüngeler kümesinin çeşitli topolojik özellikleri incelenmektedir.

Alt bölüm 2.1 'de, yörüngeler kümesinin sürekli fonksiyonlar uzayında sınırlı küme olduğu kanıtlanmıştır.

Alt bölüm 2.2 'de, yörüngeler kümesinin eşsürekli fonksiyonlar ailesi olduğu ve Arzela-Ascoli teoremini kullanarak, yörüngeler kümesinin sürekli fonksiyonlar uzayında prekompakt küme olduğu ispatlanmıştır.

Alt bölüm 2.3 'te, sistemin yörüngeler kümesinin kapalılık özelliği araştırılmaktadır. Mümkün kontrol fonksiyonlar kümesinin L_p uzayında zayıf kompakt olduğunu kullanarak, yörüngeler kümesinin sürekli fonksiyonlar uzayında kapalı küme olduğu kanıtlanmıştır. Böylece, yörüngeler kümesinin alt bölüm 2.2 'de elde edilmiş prekompaktlık özelliği ile, bu alt bölümde elde edilmiş kapalılık özelliği, bu kümenin sürekli fonksiyonlar uzayında kompakt küme olmasını gerektirir.

2. bölümde elde edilmiş sonuçlar, [68] 'de yayınlanmıştır.

3. bölüm üç alt bölümden oluşmaktadır ve bu bölümde sistemin yörüngeler kümesinin verilen sistemin bazı parametrelerine bağlantısı incelenmektedir.

Alt bölüm 3.1 'de, sistemin yörüngeler kümesinin, kontrol fonksiyonunun integral kısıtlamasını ayarlayan μ_0 parametresine, başka deyişle sistemin enerji kaynağı sınırını ayarlayan parametreye bağlantısının Lipschitz sürekli olduğu gösterilmiştir.

Alt bölüm 3.2 'de, sistemin yörüngeler kümesinin, integral kısıtlı kontrol fonksiyonların bulunduğu L_p $(p > 1)$ uzayının p parametresine göre sürekli olduğu kanıtlanmıştır.

Alt bölüm 3.3 'te, sistemin yörüngeler kümesinin verilen zaman anındaki kesitinin çapı için bir üst değerlendirme bulunmuştur.

4. bölüm beş alt bölümden oluşmaktadır. Bu bölümde kompakt olan yörüngeler kümesine, sonlu sayıda sayıda yörüngeden oluşan bir küme ile yaklaşım incelenmektedir.

Klasik analizden bilindiği gibi, integrali sınırlı olan fonksiyon her zaman sınırlı olmayabilir. Bundan dolayı integral kısıtlı kontrol fonksiyonlar genelde geometrik kısıtlı olmayan fonksiyonlardır. Yörüngeler kümesinin yaklaşık hesaplanmasında bu durum ek sorunlar çıkarabilir.

Alt bölüm 4.1 'de, integral kısıtlı kontrol fonksiyonlar üzerine ek geometrik kısıtlama da konularak, sadece integral kısıtlı kontrol fonksiyonlar kümesi, integral ve aynı zamanda geometrik kısıtlı kontrol fonksiyonlar kümesi ile değiştirilir. Bu durumda uygun yörüngeler kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığının, geometrik kısıtı ayarlayan parametreye göre bir üst değerlendirmesi elde edilmiştir. Geometrik kısıtı ayarlayan sınır parametresi yeterince büyük iken, uygun yörüngeler kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığının yeterince küçük olacağı kanıtlanmıştır.

Alt bölüm 4.2 'de, karmaşık (integral ve geometrik) kısıtlı kontrol fonksiyonlar, karmaşık kısıtlı ve parçalı sabit kontrol fonksiyonlar kümesi ile değiştirilerek, bu kontrol fonksiyonların ürettiği yörüngeler kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığı için üst değerlendirme verilmiştir. Kontrol fonksiyonunun sabit olduğu alt aralığın uzunluğu yeterince küçük iken, uygun olarak karmaşık kısıtlı ve karmaşık kısıtlı, parçalı sabit kontrol fonksiyonların ürettiği yörüngeler kümeleri arasındaki Hausdoff uzaklığının da yeterince küçük olacağı kanıtlanmıştır.

Alt bölüm 4.3 'te, karmaşık kısıtlı ve parçalı sabit olan kontrol fonksiyonların ürettiği yörüngeler kümesi ile, ek olarak sabit oldukları alt aralıklarda normları verilen bir ağda bulunan kontrol fonksiyonların ürettiği yörüngeler kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığı değerlendirilmiştir. Kontrol fonksiyonların normlarının seçildiği ağın çapı yeterince küçük iken, yörüngeler kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığının da yeterince küçük olacağı gösterilmiştir.

Alt bölüm 4.4 'te, sonlu boyutlu uzayda verilen birim kürenin yüzeyinin sonlu

σ-ağı kullanılarak, karmaşık kısıtlı, parçalı sabit ve normları verilen bir ağdan seçilen kontrol fonksiyonlar kümesi, sonlu sayıda kontrol fonksiyonlarından oluşan kontrol fonksiyonlar kümesi ile değiştirilmiş ve uygun kontrol fonksiyonların ürettiği yörüngeler kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığının σ 'ya olan bağlantısı elde edilmiştir.

Alt bölüm 4.5 'te, daha önceki bölümlerde elde edilmiş sonuçlar kullanılarak, kontrol fonksiyonları integral kısıtlı olan sistemin yörüngeler kümesi ile, kontrol fonksiyonları sonlu olan aynı sistemin yörüngeler kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığının, geometrik kısıtlamayı ayarlayan sabite, kontrol fonksiyonların sabit olduğu alt aralıkların uzunluğuna, kontrol fonksiyonların normlarının seçildiği ağın çapına, birim kürenin yüzeyinde seçilen sonlu σ-ağ 'a olan bağlantısı değerlendirilmiştir. Keyfi $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde, kontrol fonksiyonları için kullanılan diskretleştirme parametrelerinin, sistemin yörüngeler kümesi ile sonlu sayıda yörüngelerden oluşan küme arasındaki Hausdorff uzaklığını ε 'dan küçük yapacak değerleri bulunmuştur.

1 YÖRÜNGELER KÜMESİ

1.1 Temel Tanım ve Teoremler

Önce bazı temel tanım ve önermeler verelim.

$x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r \geq 0$ için

$$B_n(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq r\}, \quad B_n(r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq r\},$$

$$B_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$$

olsun. Burada $\|x\|$ verilen $x \in \mathbb{R}^n$ vektörünün Euclidean normudur.

Verilen $D \subset \mathbb{R}^n$ ve $E \subset \mathbb{R}^n$ kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığını tanımlayalım.

$D \subset \mathbb{R}^n$ ve $E \subset \mathbb{R}^n$ kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığı $h_n(D, E)$ olarak gösterilir ve

$$h_n(D, E) = \max\{\sup_{x \in D} d_n(x, E), \ \sup_{y \in E} d_n(y, D)\}$$

olarak tanımlanır (bkz., [1], [2]). Burada $d_n(x, E) = \inf\{\|x - y\| : y \in E\}$.

Önerme 1.1.1 *Keyfi $D \subset \mathbb{R}^n$ ve $E \subset \mathbb{R}^n$ kümeleri için,*

$$h_n(D, E) = \inf\{r > 0 : D \subset E + rB_n, \ E \subset D + rB_n\}$$

olur.

Benzer olarak, herhangi bir metrik uzayın alt kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığı tanımlanabilir (bkz., [1], [2]).

Ayrıca, eğer $\mathbb{R}^n$ uzayının boştan farklı, kompakt alt kümeleri ailesi $comp\,(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilirse, $\big(comp\,(\mathbb{R}^n), h_n(\cdot, \cdot)\big)$ uzayı bir metrik uzay olur (bkz., [1], [2], [37]).

$\mathbb{R}^n$ uzayının boştan farklı, sınırlı alt kümeleri ailesini $b(\mathbb{R}^n)$ ile gösterelim. O zaman, $h_n(\cdot, \cdot)$ fonksiyonu $b(\mathbb{R}^n)$ 'de yarı metrik olur.

Şimdi tezde yoğun olarak kullanacağımız Gronwall, Hölder ve Minkowski eşitsizliklerini verelim.

Teorem 1.1.2 *(Gronwall eşitsizliği) [10]* $u(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}$, $h(\cdot) : [t_0, \theta] \to [0, +\infty)$, $\psi(\cdot) : [t_0, \theta] \to [0, +\infty)$ *sürekli fonksiyonlar, keyfi* $t \in [t_0, \theta]$ *için*

$$u(t) \leq h(t) + \int_{t_0}^{t} \psi(\tau) u(\tau) d\tau$$

olsun. O halde $c = \exp\left(\int\limits_{t_0}^{\theta} \psi(\tau)d\tau\right)$ *olmak üzere keyfi* $t \in [t_0, \theta]$ *için*

$$u(t) \leq h(t) + c\int\limits_{t_0}^{t} \psi(\tau)h(\tau)d\tau$$

olur.

Eğer Teorem 1.1.2 'de $h(\cdot) : [t_0, \theta] \to [0, +\infty)$ azalmayan fonksiyon ise, o halde Gronwall eşitsizliği daha basit biçimde ifade edilebilir.

Teorem 1.1.3 *(Gronwall eşitsizliği)* $u(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}$, $h(\cdot) : [t_0, \theta] \to [0, +\infty)$, $\psi(\cdot) : [t_0, \theta] \to [0, +\infty)$ *sürekli fonksiyonlar,* $h(\cdot) : [t_0, \theta] \to [0, +\infty)$ *azalmayan fonksiyon, keyfi* $t \in [t_0, \theta]$ *için*

$$u(t) \leq h(t) + \int\limits_{t_0}^{t} \psi(\tau)u(\tau)d\tau$$

olsun. O halde keyfi $t \in [t_0, \theta]$ *için*

$$u(t) \leq h(t) \cdot \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} \psi(\tau)d\tau\right)$$

olur.

Eğer Teorem 1.1.3 'te keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için $h(t) = h_0 \geq 0$ ise, yani $h(\cdot) : [t_0, \theta] \to [0, +\infty)$ fonksiyonu negatif olmayan sabit fonksiyon ise, o halde Gronwall eşitsizliği aşağıdaki biçimde olur.

Teorem 1.1.4 $u(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}$, $\psi(\cdot) : [t_0, \theta] \to [0, +\infty)$ *sürekli fonksiyonlar,* $h_0 \geq 0$, *keyfi* $t \in [t_0, \theta]$ *için*

$$u(t) \leq h_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \psi(\tau)u(\tau)d\tau$$

olsun. O halde keyfi $t \in [t_0, \theta]$ *için*

$$u(t) \leq h_0 \cdot \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} \psi(\tau)d\tau\right)$$

olur.

$p \in [1, +\infty)$ için $L_p([t_0, \theta]; \mathbb{R}^m)$ uzayı $\|u(\cdot)\|_p < \infty$ olacak biçimdeki ölçülebilir $u(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonlar uzayıdır. Burada

$$\|u(\cdot)\|_p = \left(\int_{t_0}^{\theta} \|u(t)\|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Teorem 1.1.5 *(Hölder eşitsizliği) [10] $p \in (1, +\infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $u_1(\cdot) \in L_q([t_0, \theta]; \mathbb{R}^m)$, $u_2(\cdot) \in L_p([t_0, \theta]; \mathbb{R}^m)$ olsun. O halde*

$$\int_{t_0}^{\theta} \|u_1(t)\| \cdot \|u_2(t)\| \, dt \leq \left(\int_{t_0}^{\theta} \|u_1(t)\|^q \, dt \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\int_{t_0}^{\theta} \|u_2(t)\|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizliği doğrudur. Başka deyişle,

$$\int_{t_0}^{\theta} \|u_1(t)\| \cdot \|u_2(t)\| \, dt \leq \|u_1(\cdot)\|_q \cdot \|u_2(\cdot)\|_p$$

olur.

Teorem 1.1.6 *(Minkowski eşitsizliği) [10] $p \in [1, +\infty)$, $u_1(\cdot) \in L_p([t_0, \theta]; \mathbb{R}^m)$, $u_2(\cdot) \in L_p([t_0, \theta]; \mathbb{R}^m)$ olsun. O halde*

$$\left(\int_{t_0}^{\theta} \|u_1(t) + u_2(t)\|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{t_0}^{\theta} \|u_1(t)\|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{t_0}^{\theta} \|u_2(t)\|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizliği doğrudur. Başka deyişle,

$$\|u_1(\cdot) + u_2(\cdot)\|_p \leq \|u_1(\cdot)\|_p + \|u_2(\cdot)\|_p$$

olur.

1.2 Sistem

Davranışı

$$x(t) = g(t, x(t)) + \lambda \int_{t_0}^{t} [K_1(t, s, x(s)) + K_2(t, s, x(s)) u(s)] \, ds \qquad (1.2.1)$$

integral denklemi ile verilen kontrol sistemi ele alalım. Burada $x(t) \in \mathbb{R}^n$ sistemin durum vektörünü, $u(s) \in \mathbb{R}^m$ kontrol vektörünü göstermektedir, $t \in [t_0, \theta]$, $\lambda \in \mathbb{R}$ gerçel sayıdır.

$L_p\big([t_0,\theta];\mathbb{R}^m\big)$ $(p>1)$ ile $\|u(\cdot)\|_p$ normu sınırlı olan ölçülebilir $u(\cdot):[t_0,\theta]\to\mathbb{R}^m$ fonksiyonlar uzayı gösterilir. Burada

$$\|u(\cdot)\|_p=\left(\int\limits_{t_0}^{\theta}\|u(t)\|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

ve $\|\cdot\|$ Euclid normunu göstermektedir.

$p\in(1,\infty)$ ve $\mu_0>0$ sabitlenmiş olsun.

$$\|u(\cdot)\|_p\leq\mu_0$$

yani

$$\left(\int\limits_{t_0}^{\theta}\|u(t)\|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\leq\mu_0 \tag{1.2.2}$$

eşitsizliğini sağlayan her $u(\cdot)\in L_p\big([t_0,\theta];\mathbb{R}^m\big)$ fonksiyonuna, (1.2.1) sisteminin mümkün kontrol fonksiyonu denir.

(1.2.1) sisteminin tüm mümkün kontrol fonksiyonlar kümesini U_{p,μ_0} olarak gösterelim. Bu durumda

$$U_{p,\mu_0}=\big\{u(\cdot)\in L_p\big([t_0,\theta];\mathbb{R}^m\big):\|u(\cdot)\|_p\leq\mu_0\big\} \tag{1.2.3}$$

olur.

Açıktır ki, (1.2.1) sisteminin U_{p,μ_0} tüm mümkün kontrol fonksiyonlar kümesi, $L_p\left([t_0,\theta];\mathbb{R}^m\right)$ uzayında merkezi orijinde ve yarıçapı μ_0 olan kapalı yuvardır.

(1.2.1) sisteminde bulunan fonksiyonların ve $\lambda\in\mathbb{R}$ sayısının aşağıdaki koşulları sağladığı varsayılıyor:

1.2.A. $g(\cdot,\cdot):[t_0,\theta]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $K_1(\cdot,\cdot,\cdot):[t_0,\theta]\times[t_0,\theta]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ vektör fonksiyonları ve $K_2(\cdot,\cdot,\cdot):[t_0,\theta]\times[t_0,\theta]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n\times m}$ matris fonksiyonu sürekli fonksiyonlardır;

1.2.B. Keyfi $(t,s,x_1)\in[t_0,\theta]\times[t_0,\theta]\times\mathbb{R}^n$, $(t,s,x_2)\in[t_0,\theta]\times[t_0,\theta]\times\mathbb{R}^n$ için

$$\|g(t,x_1)-g(t,x_2)\|\leq L_0\,\|x_1-x_2\|\,,$$

$$\|K_1(t,s,x_1)-K_1(t,s,x_2)\|\leq L_1\,\|x_1-x_2\|\,,$$

$$\|K_2(t,s,x_1) - K_2(t,s,x_2)\| \le L_2 \|x_1 - x_2\|$$

olacak biçimde $L_0 \in [0,1)$, $L_1 \ge 0$ ve $L_2 \ge 0$ sabitleri vardır;

1.2.C. λ sayısı $0 \le \lambda \cdot \left(L_1(\theta - t_0) + L_2(\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}}\mu_0\right) < 1 - L_0$ eşitsizliğini sağlıyor.

Bundan sonra, (1.2.1) sisteminde verilen $g(\cdot,\cdot) : [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $K_1(\cdot,\cdot,\cdot) : [t_0,\theta] \times [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $K_2(\cdot,\cdot,\cdot) : [t_0,\theta] \times [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}$ fonksiyonlarının ve $\lambda \in \mathbb{R}$ sayısının 1.2.A, 1.2.B ve 1.2.C koşullarını sağladığını varsayacağız.

$$r_0 = L_1(\theta - t_0) + L_2(\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}}\mu_0 \,, \tag{1.2.4}$$

$$L(\lambda) = L_0 + \lambda r_0 \tag{1.2.5}$$

olarak gösterelim. O halde 1.2.C koşulu gereği $L(\lambda) < 1$ olur.

Şimdi (1.2.1) sisteminin $u_*(\cdot) \in U_{p,\mu_0}$ mümkün kontrol fonksiyonu tarafından üretilen yörüngesini tanımlayalım.

Tanım 1.2.1 *$u_*(\cdot) \in U_{p,\mu_0}$ olsun. Her $t \in [t_0,\theta]$ için*

$$x_*(t) = g(t, x_*(t)) + \lambda \int_{t_0}^{t} \left[K_1(t,s,x_*(s)) + K_2(t,s,x_*(s))\,u_*(s)\right] ds$$

integral denklemini sağlayan sürekli $x_*(\cdot) : [t_0,\theta] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonuna, (1.2.1) sisteminin $u_*(\cdot) \in U_{p,\mu_0}$ mümkün kontrol fonksiyonu tarafından üretilen yörüngesi denir.

$x(\cdot;u(\cdot))$ ile (1.2.1) sisteminin mümkün $u(\cdot) \in U_{p,\mu_0}$ kontrol fonksiyonu tarafından üretilen yörüngesini gösterelim.

$\mathbf{X}_{p,\mu_0}$ ile (1.2.1) sisteminin tüm mümkün $u(\cdot) \in U_{p,\mu_0}$ kontrol fonksiyonları tarafından üretilen yörüngeler kümesi gösterilir, yani

$$\mathbf{X}_{p,\mu_0} = \{x(\cdot;u(\cdot)) : u(\cdot) \in U_{p,\mu_0}\}\,. \tag{1.2.6}$$

Açıktır ki, $\mathbf{X}_{p,\mu_0} \subset C([t_0,\theta];\mathbb{R}^n)$. Burada $C([t_0,\theta];\mathbb{R}^n)$, sürekli $x(\cdot) : [t_0,\theta] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonlar uzayıdır ve $x(\cdot) \in C([t_0,\theta];\mathbb{R}^n)$ için

$$\|x(\cdot)\|_C = \max\{\|x(t)\| : t \in [t_0,\theta]\}\,.$$

$\mathbf{X}_{p,\mu_0}$ kümesine (1.2.1) sisteminin yörüngeler kümesi denir.

Ayrıca her sabitlenmiş $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\mathbf{X}_{p,\mu_0}(t) = \{x(t) \in \mathbb{R}^n : x(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}\} \tag{1.2.7}$$

olarak gösterelim.

Açıktır ki, $\mathbf{X}_{p,\mu_0}(t)$ kümesi, $\mathbf{X}_{p,\mu_0}$ kümesinde bulunan yörüngelerin t 'de aldığı değerlerden oluşur.

1.3 Yörüngelerin Varlığı ve Tekliği

Bu bölümde verilen her $u(\cdot) \in U_{p,\mu_0}$ mümkün kontrol fonksiyonunun, (1.2.1) sisteminin bir $x(\cdot; u(\cdot))$ yörüngesini ürettiğini ve bu yörüngenin tek olduğunu kanıtlayacağız.

Teorem 1.3.1 *$u_*(\cdot) \in U_{p,\mu_0}$ olsun. O halde (1.2.1) sisteminin $u_*(\cdot)$ mümkün kontrol fonksiyonu tarafından üretilen $x_*(\cdot) = x(\cdot; u_*(\cdot))$ yörüngesi vardır ve bu yörünge tektir.*

Kanıt. Her $x(\cdot) \in C([t_0, \theta]; \mathbb{R}^n)$ için

$$\begin{aligned} A(x(\cdot))|(t) &= g(t, x(t)) + \lambda \int_{t_0}^{t} \big[K_1(t, s, x(s)) \\ &+ K_2(t, s, x(s))\, u_*(s)\big] ds\,, \quad t \in [t_0, \theta] \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

olmak üzere $x(\cdot) \to A(x(\cdot))$ dönüşümünü tanımlayalım. $u_*(\cdot) \in U_{p,\mu_0}$, $x(\cdot) \in C([t_0, \theta]; \mathbb{R}^n)$ olduğundan, 1.2.A koşulu gereği $t \to A(x(\cdot))|(t)$, $t \in [t_0, \theta]$, fonksiyonu sürekli fonksiyon olur. Böylece (1.3.1) ile tanımlı $x(\cdot) \to A(x(\cdot))$ dönüşümü

$$A(\cdot) : C([t_0, \theta]; \mathbb{R}^n) \to C([t_0, \theta]; \mathbb{R}^n)$$

biçiminde dönüşümdür.

(1.3.1) ile tanımlı $A(\cdot) : C([t_0, \theta]; \mathbb{R}^n) \to C([t_0, \theta]; \mathbb{R}^n)$ dönüşümünün büzülen dönüşüm olduğunu kanıtlayalım.

Keyfi $x_1(\cdot) \in C([t_0, \theta]; \mathbb{R}^n)$ ve $x_2(\cdot) \in C([t_0, \theta]; \mathbb{R}^n)$ alalım ve sabitleyelim. O zaman (1.3.1) 'den keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned}
& \left\| A\left(x_2(\cdot)\right)|(t) - A\left(x_1(\cdot)\right)|(t) \right\| = \Big\| \; g\left(t, x_2\left(t\right)\right) \\
+ \quad & \lambda \int_{t_0}^{t} \left[K_1\left(t, s, x_2\left(s\right)\right) + K_2\left(t, s, x_2\left(s\right)\right) u_*\left(s\right)\right] ds \\
- \quad & g\left(t, x_1\left(t\right)\right) - \lambda \int_{t_0}^{t} \left[K_1\left(t, s, x_1\left(s\right)\right) + K_2\left(t, s, x_1\left(s\right)\right) u_*\left(s\right)\right] ds \Big\| \\
\leq \quad & \left\| g\left(t, x_2\left(t\right)\right) - g\left(t, x_1\left(t\right)\right) \right\| \\
+ \quad & \lambda \int_{t_0}^{t} \left\| K_1\left(t, s, x_2\left(s\right)\right) - K_1\left(t, s, x_1\left(s\right)\right) \right\| ds \\
+ \quad & \lambda \int_{t_0}^{t} \left\| K_2\left(t, s, x_2\left(s\right)\right) - K_2\left(t, s, x_1\left(s\right)\right) \right\| \left\| u_*(s) \right\| ds
\end{aligned} \qquad (1.3.2)$$

olduğu elde edilir.

1.2.B koşulundan ve (1.3.2) 'den, keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned}
\left\| A\left(x_2(\cdot)\right)|(t) \right. \quad - \quad & \left. A\left(x_1(\cdot)\right)|(t) \right\| \leq L_0 \left\| x_2\left(t\right) - x_1\left(t\right) \right\| \\
+ \quad & \lambda L_1 \int_{t_0}^{t} \left\| x_2\left(s\right) - x_1\left(s\right) \right\| ds \\
+ \quad & \lambda L_2 \int_{t_0}^{t} \left\| x_2\left(s\right) - x_1\left(s\right) \right\| \left\| u_*(s) \right\| ds
\end{aligned} \qquad (1.3.3)$$

olduğu bulunur.

Keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\left\| x_2\left(t\right) - x_1\left(t\right) \right\| \leq \left\| x_2\left(\cdot\right) - x_1\left(\cdot\right) \right\|_C$$

olduğundan, (1.3.3) 'ten, keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned}
& \left\| A\left(x_2(\cdot)\right)|(t) - A\left(x_1(\cdot)\right)|(t) \right\| \leq L_0 \left\| x_2\left(\cdot\right) - x_1\left(\cdot\right) \right\|_C \\
+ \quad & \lambda L_1 \int_{t_0}^{t} \left\| x_2\left(\cdot\right) - x_1\left(\cdot\right) \right\|_C ds + \lambda L_2 \int_{t_0}^{t} \left\| x_2\left(\cdot\right) - x_1\left(\cdot\right) \right\|_C \left\| u_*(s) \right\| ds \\
\leq \quad & \left(L_0 + \lambda L_1 \left(\theta - t_0\right) + \lambda L_2 \int_{t_0}^{t} \left\| u_*(s) \right\| ds \right) \left\| x_2\left(\cdot\right) - x_1\left(\cdot\right) \right\|_C
\end{aligned} \qquad (1.3.4)$$

olur.

$u_*(\cdot) \in U_{p,\mu_0}$ olduğundan, Hölder eşitsizliği gereği

$$\int_{t_0}^{t} \left\| u_*(s) \right\| ds \leq \left(t - t_0\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{t_0}^{t} \left\| u_*(s) \right\|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\theta - t_0\right)^{\frac{p-1}{p}} \mu_0$$

olur. O zaman (1.2.5) ve (1.3.4) 'ten, keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned}
& \left\| A\left(x_2(\cdot)\right)|(t) - A\left(x_1(\cdot)\right)|(t) \right\| \\
\leq \quad & \left(L_0 + \lambda L_1 \left(\theta - t_0\right) + \lambda L_2 (\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \mu_0 \right) \left\| x_2\left(\cdot\right) - x_1\left(\cdot\right) \right\|_C \\
= \quad & L(\lambda) \left\| x_2\left(\cdot\right) - x_1\left(\cdot\right) \right\|_C
\end{aligned} \qquad (1.3.5)$$

olduğu elde edilir.

Son olarak (1.3.5) 'ten

$$\left\| A\left(x_2(\cdot)\right)|(\cdot) - A\left(x_1(\cdot)\right)|(\cdot)\right\|_C \leq L(\lambda) \left\| x_2(\cdot) - x_1(\cdot) \right\|_C \tag{1.3.6}$$

olduğu bulunur.

1.2.C koşulundan $L(\lambda) < 1$ olur. O halde (1.3.6) eşitsizliği gereği, (1.3.1) ile tanımlı $A(\cdot) : C([t_0, \theta]; \mathbb{R}^n) \to C([t_0, \theta]; \mathbb{R}^n)$ dönüşümü büzülen dönüşümdür. $C([t_0, \theta]; \mathbb{R}^n)$ uzayı tam olduğundan, Banach sabit nokta teoremi gereği $A(\cdot)$ dönüşümünün $C([t_0, \theta]; \mathbb{R}^n)$ uzayında sabit noktası vardır ve bu sabit nokta tektir. Yani (1.3.1) ile tanımlı $A(\cdot) : C([t_0, \theta]; \mathbb{R}^n) \to C([t_0, \theta]; \mathbb{R}^n)$ dönüşümü için

$$A(x_*(\cdot)) = x_*(\cdot) \tag{1.3.7}$$

olacak biçimde tek bir $x_*(\cdot) \in C([t_0, \theta]; \mathbb{R}^n)$ vardır.

Bu durumda (1.3.1) ve (1.3.7) 'den $A(\cdot)$ dönüşümünün $x_*(\cdot) \in C([t_0, \theta]; \mathbb{R}^n)$ tek sabit noktası için

$$x_*(t) = g\left(t, x_*(t)\right) + \lambda \int_{t_0}^{t} \left[K_1\left(t, s, x_*(s)\right) + K_2\left(t, s, x_*(s)\right) u_*(s)\right] ds \ , \ t \in [t_0, \theta]$$

olur. Başka deyişle, sürekli $x_*(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu (1.2.1) denkleminin tek çözümü olur. ■

Uyarı 1.3.2 *Teorem 1.3.1 'in kanıtına göre her sabitlenmiş $u_*(\cdot) \in U_{p,\mu_0}$ için (1.2.1) integral denkleminin tek çözümü (1.3.1) ile tanımlı büzülen $A(\cdot) : C([t_0, \theta]; \mathbb{R}^n) \to C([t_0, \theta]; \mathbb{R}^n)$ dönüşümünün tek $x_*(\cdot) \in C([t_0, \theta]; \mathbb{R}^n)$ sabit noktasıdır. O halde Banach sabit nokta teoremi gereği büzülen $A(\cdot)$ dönüşümünün tek $x_*(\cdot)$ sabit noktası, $x_0(\cdot) \in C([t_0, \theta]; \mathbb{R}^n)$ keyfi seçilmek üzere ve her $x_n(\cdot) \in C([t_0, \theta]; \mathbb{R}^n)$ için*

$$x_{n+1}(\cdot) = A(x_n(\cdot))$$

yani, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$x_{n+1}(t) = g\left(t, x_n(t)\right) + \lambda \int_{t_0}^{t} \left[K_1\left(t, s, x_n(s)\right) + K_2\left(t, s, x_n(s)\right) u_*(s)\right] ds$$

olmak üzere $\{x_n(\cdot)\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin limiti olur.

2 YÖRÜNGELER KÜMESİNİN TOPOLOJİK ÖZELLİKLERİ

2.1 Yörüngeler Kümesinin Sınırlılığı

Bu bölümde (1.2.1) sisteminin (1.2.6) ile tanımlı $\mathbf{X}_{p,\mu_0}$ yörüngeler kümesinin sınırlı olduğunu göstereceğiz.

Önce, daha sonra kullanacağımız bir yardımcı önerme kanıtlayalım.

$g(\cdot,\cdot) : [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $K_1(\cdot,\cdot,\cdot) : [t_0,\theta] \times [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ve $K_2(\cdot,\cdot,\cdot) : [t_0,\theta] \times [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}$ fonksiyonları 1.2.A koşulunu sağladığından dolayı, $g(\cdot,0) : [t_0,\theta] \to \mathbb{R}^n$, $K_1(\cdot,\cdot,0) : [t_0,\theta] \times [t_0,\theta] \to \mathbb{R}^n$ ve $K_2(\cdot,\cdot,0) : [t_0,\theta] \times [t_0,\theta] \to \mathbb{R}^{n\times m}$ fonksiyonları süreklidir. O zaman

$$c_0 = \max\{\|g(t,0)\| : t \in [t_0,\theta]\}, \tag{2.1.1}$$

$$c_1 = \max\{\|K_1(t,s,0)\| : (t,s) \in [t_0,\theta] \times [t_0,\theta]\}, \tag{2.1.2}$$

$$c_2 = \max\{\|K_2(t,s,0)\| : (t,s) \in [t_0,\theta] \times [t_0,\theta]\} \tag{2.1.3}$$

olarak tanımlayalım. Açıktır ki, $c_0 \geq 0$, $c_1 \geq 0$ ve $c_2 \geq 0$ olur.

Önerme 2.1.1 *$g(\cdot,\cdot) : [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $K_1(\cdot,\cdot,\cdot) : [t_0,\theta] \times [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ve $K_2(\cdot,\cdot,\cdot) : [t_0,\theta] \times [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}$ fonksiyonları 1.2.A ve 1.2.B koşullarını sağlasın. O zaman keyfi $(t,s,x) \in [t_0,\theta] \times [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n$ için*

$$\|g(t,x)\| \leq c_0 + L_0 \|x\|,$$

$$\|K_1(t,s,x)\| \leq c_1 + L_1 \|x\|,$$

$$\|K_2(t,s,x)\| \leq c_2 + L_2 \|x\|$$

olur.

Kanıt. 1.2.B koşulu gereği $g(\cdot,\cdot) : [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu x değişkenine göre Lipschitz sürekli olduğundan, keyfi $(t,x) \in [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n$ için

$$\|g(t,x) - g(t,0)\| \leq L_0 \|x\|$$

olur. Son eşitsizlikten keyfi $(t,x) \in [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n$ için

$$\|g(t,x)\| \leq \|g(t,0)\| + L_0 \|x\| \tag{2.1.4}$$

olduğu elde edilir.

O halde (2.1.1) ve (2.1.4) 'ten keyfi $(t, x) \in [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ için

$$\|g(t, x)\| \leq c_0 + L_0 \|x\|$$

olur.

Şimdi önermede kanıtlanması gereken ikinci eşitsizliğin doğruluğunu kanıtlayalım.

1.2.B koşulu gereği $K_1(\cdot, \cdot, \cdot) : [t_0, \theta] \times [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu x değişkenine göre Lipschitz sürekli olduğundan, keyfi $(t, s, x) \in [t_0, \theta] \times [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ için

$$\|K_1(t, s, x) - K_1(t, s, 0)\| \leq L_1 \|x\|$$

olur. Son eşitsizlikten keyfi $(t, s, x) \in [t_0, \theta] \times [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ için

$$\|K_1(t, s, x)\| \leq \|K_1(t, s, 0)\| + L_1 \|x\| \tag{2.1.5}$$

olduğu elde edilir.

(2.1.2) ve (2.1.5) 'ten keyfi $(t, s, x) \in [t_0, \theta] \times [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ için

$$\|K_1(t, s, x)\| \leq c_1 + L_1 \|x\|$$

olur.

Önermede verilen üçüncü eşitsizliğin doğruluğu benzer olarak kanıtlanır. ■

Şimdi, (1.2.1) sisteminin (1.2.6) ile tanımlı $\mathbf{X}_{p,\mu_0}$ yörüngeler kümesinin sınırlı olduğunu gösteren teoremi ifade edelim ve kanıtlayalım.

$$r_* = \frac{c_0 + \lambda c_1 (\theta - t_0) + \lambda c_2 (\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \mu_0}{1 - L_0} \cdot \exp\left[\frac{L(\lambda) - L_0}{1 - L_0}\right] \tag{2.1.6}$$

olsun. Burada $L_0 \in [0, 1)$, $L_1 \geq 0$ ve $L_2 \geq 0$ sabitleri 1.2.B koşulunda, $L(\lambda)$ sabiti (1.2.5), $c_0 \geq 0$, $c_1 \geq 0$ ve $c_2 \geq 0$ sabitleri ise uygun olarak (2.1.1), (2.1.2) ve (2.1.3) ile tanımlıdır.

Teorem 2.1.2 *Keyfi* $x(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}$ *için*

$$\|x(\cdot)\|_C \leq r_*$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt. Keyfi $x(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}$ alalım ve sabitleyelim. O halde her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$x(t) = g\left(t, x\left(t\right)\right) + \lambda \int_{t_0}^{t} \left[K_1\left(t, s, x\left(s\right)\right) + K_2\left(t, s, x\left(s\right)\right) u\left(s\right)\right] ds \qquad (2.1.7)$$

olacak biçimde $u(\cdot) \in U_{p,\mu_0}$ vardır.

(2.1.7) ve Önerme 2.1.1 'den her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \|g\left(t, x\left(t\right)\right)\| + \lambda \int_{t_0}^{t} \left[\|K_1\left(t, s, x\left(s\right)\right)\| + \|K_2\left(t, s, x\left(s\right)\right)\| \|u\left(s\right)\|\right] ds \\ &\leq c_0 + L_0 \|x(t)\| + \lambda \int_{t_0}^{t} \left(c_1 + L_1 \|x\left(s\right)\|\right) ds \\ &\quad + \lambda \int_{t_0}^{t} \left(c_2 + L_2 \|x\left(s\right)\|\right) \|u\left(s\right)\| ds \\ &\leq L_0 \|x(t)\| + c_0 + \lambda c_1 \left(\theta - t_0\right) + \lambda c_2 \int_{t_0}^{t} \|u(s)\| ds \\ &\quad + \lambda \int_{t_0}^{t} \left(L_1 + L_2 \|u\left(s\right)\|\right) \|x\left(s\right)\| ds \\ &\leq L_0 \|x(t)\| + c_0 + \lambda c_1 \left(\theta - t_0\right) + \lambda c_2 \left(\theta - t_0\right)^{\frac{p-1}{p}} \mu_0 \\ &\quad + \lambda \int_{t_0}^{t} \left(L_1 + L_2 \|u\left(s\right)\|\right) \|x\left(s\right)\| ds \end{aligned}$$

olduğu elde edilir.

$L_0 \in [0, 1)$ olduğundan, son eşitsizlikten keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \frac{c_0 + \lambda c_1 \left(\theta - t_0\right) + \lambda c_2 \left(\theta - t_0\right)^{\frac{p-1}{p}} \mu_0}{1 - L_0} \\ &\quad + \frac{\lambda}{1 - L_0} \int_{t_0}^{t} \left(L_1 + L_2 \|u\left(s\right)\|\right) \|x\left(s\right)\| ds \end{aligned} \qquad (2.1.8)$$

olur.

(2.1.8) ve Gronwall eşitsizliğinden, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \frac{c_0 + \lambda c_1 \left(\theta - t_0\right) + \lambda c_2 \left(\theta - t_0\right)^{\frac{p-1}{p}} \mu_0}{1 - L_0} \\ &\quad \cdot \exp\left[\frac{\lambda}{1 - L_0} \int_{t_0}^{t} \left(L_1 + L_2 \|u\left(s\right)\|\right) ds\right] \\ &\leq \frac{c_0 + \lambda c_1 \left(\theta - t_0\right) + \lambda c_2 \left(\theta - t_0\right)^{\frac{p-1}{p}} \mu_0}{1 - L_0} \\ &\quad \cdot \exp\left[\frac{\lambda}{1 - L_0} \left(L_1 \left(\theta - t_0\right) + L_2 \int_{t_0}^{\theta} \|u\left(s\right)\| ds\right)\right] \end{aligned} \qquad (2.1.9)$$

olduğu bulunur.

$u(\cdot) \in U_{p,\mu_0}$ olduğundan, Hölder eşitsizliği gereği

$$\int_{t_0}^{\theta} \|u(s)\| \, ds \leq (\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{t_0}^{\theta} \|u(s)\|^p \, ds \right)^{\frac{1}{p}} \leq (\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \mu_0$$

olur. O zaman (2.1.9) 'dan, keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \frac{c_0 + \lambda c_1 (\theta - t_0) + \lambda c_2 (\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \mu_0}{1 - L_0} \\ &\cdot \exp\left[\frac{\lambda}{1 - L_0} \left(L_1 (\theta - t_0) + L_2(\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \mu_0\right)\right] \end{aligned} \tag{2.1.10}$$

olduğu bulunur.

Son olarak (1.2.5), (2.1.6) ve (2.1.10) 'dan, keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \frac{c_0 + \lambda c_1 (\theta - t_0) + \lambda c_2 (\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \mu_0}{1 - L_0} \\ &\cdot \exp\left[\frac{\lambda L_1 (\theta - t_0) + \lambda L_2(\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \mu_0}{1 - L_0}\right] \\ &= \frac{c_0 + \lambda c_1 (\theta - t_0) + \lambda c_2 (\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \mu_0}{1 - L_0} \cdot \exp\left[\frac{L(\lambda) - L_0}{1 - L_0}\right] = r_* \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu ise

$$\|x(\cdot)\|_C \leq r_*$$

olması demektir. ■

1.2.B koşulu gereği, her sabitlenmiş $t \in [t_0, \theta]$ için, $x \to g(t, x)$ fonksiyonu $L_0 \in [0, 1)$ olmak üzere L_0 sabiti ile Lipschitz sürekli fonksiyondur. Bu ise her sabitlenmiş $t \in [t_0, \theta]$ için, $x \to g(t, x)$ fonksiyonunun büzülen dönüşüm olması demektir. O halde Banach sabit nokta teoreminden, her sabitlenmiş $t \in [t_0, \theta]$ için, $x \to g(t, x)$ fonksiyonunun tek sabit noktası vardır, yani her sabitlenmiş $t \in [t_0, \theta]$ için,

$$a(t) = g(t, a(t))$$

olacak biçimde tek $a(t) \in \mathbb{R}^n$ vardır. $a_0 = a(t_0)$ dersek

$$a_0 = g(t_0, a_0) \tag{2.1.11}$$

olur. Açıktır ki, $a_0 \in \mathbb{R}^n$, (2.1.11) eşitliğini sağlayan tek elemandır.

Önerme 2.1.3 *Keyfi $x(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}$ için $x(t_0) = a_0$ olur.*

Burada $a_0 \in \mathbb{R}^n$ (2.1.11) ile tanımlıdır.

Kanıt. Keyfi $x(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}$ alalım. O halde her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$x(t) = g\left(t, x\left(t\right)\right) + \lambda \int_{t_0}^{t} \left[K_1\left(t, s, x\left(s\right)\right) + K_2\left(t, s, x\left(s\right)\right) u\left(s\right)\right] ds \tag{2.1.12}$$

olacak biçimde $u(\cdot) \in U_{p,\mu_0}$ vardır.

(2.1.12) 'de $t = t_0$ alırsak,

$$x(t_0) = g\left(t_0, x\left(t_0\right)\right) \tag{2.1.13}$$

olur.

$a_0 \in \mathbb{R}^n$, (2.1.11) eşitliğini sağlayan tek eleman olduğundan, (2.1.13) 'ten $x(t_0) = a_0$ olduğu bulunur. ■

Önerme 2.1.3 'ten aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.1.4 $\mathbf{X}_{p,\mu_0}(t_0) = \{a_0\}$ *eşitliği doğrudur.*

Burada $\mathbf{X}_{p,\mu_0}(t_0)$ *kümesi (1.2.7) eşitliği ile tanımlıdır,* $a_0 \in \mathbb{R}^n$ *(2.1.11) ile tanımlıdır, yani* a_0 *noktası* $g(t_0, \cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *fonksiyonunun tek sabit noktasıdır.*

2.2 Yörüngeler Kümesinin Prekompaktlığı

Bu bölümde (1.2.1) sisteminin (1.2.6) ile tanımlı $\mathbf{X}_{p,\mu_0}$ yörüngeler kümesinin $C\big([t_0, \theta]; \mathbb{R}^n\big)$ uzayında prekompakt küme olduğunu göstereceğiz.

Önce bazı gösterimler verelim.

$\Delta > 0$ herhangi sayı, $r_* > 0$ (2.1.6) ile tanımlı olmak üzere

$$D_1 = [t_0, \theta] \times B_n(r_*), \tag{2.2.1}$$

$$D_2 = [t_0, \theta] \times [t_0, \theta] \times B_n(r_*), \tag{2.2.2}$$

$$M_1 = \max\left\{\ \|K_1(t, s, x)\| : (t, s, x) \in D_2\right\}, \tag{2.2.3}$$

$$M_2 = \max\left\{\ \|K_2(t, s, x)\| : (t, s, x) \in D_2\right\}, \tag{2.2.4}$$

$$\omega_0(\Delta) = \max\left\{ \|g(t_2,x) - g(t_1,x)\| \ : \ |t_2 - t_1| \leq \Delta,\ (t_1,x) \in D_1,\right.$$
$$\left.(t_2,x) \in D_1\right\}, \tag{2.2.5}$$

$$\begin{aligned} \omega_1(\Delta) &= \max\left\{ \|K_1(t_2,s_2,x_2) - K_1(t_1,s_1,x_1)\| : |t_2 - t_1| \leq \Delta,\ |s_2 - s_1| \leq \Delta,\right. \\ &\left.\|x_2 - x_1\| \leq \Delta,\ (t_1,s_1,x_1) \in D_2,\ (t_2,s_2,x_2) \in D_2\right\}, \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

$$\begin{aligned} \omega_2(\Delta) &= \max\left\{ \|K_2(t_2,s_2,x_2) - K_2(t_1,s_1,x_1)\| : |t_2 - t_1| \leq \Delta,\ |s_2 - s_1| \leq \Delta,\right. \\ &\left.\|x_2 - x_1\| \leq \Delta,\ (t_1,s_1,x_1) \in D_2,\ (t_2,s_2,x_2) \in D_2\right\}, \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

$$\begin{aligned} \varphi(\Delta) &= \frac{1}{1-L_0}\Big[\omega_0\left(\Delta\right) + \lambda\omega_1\left(\Delta\right)\left(\theta - t_0\right) + \lambda M_1 \Delta \\ &+ \lambda\omega_2\left(\Delta\right)\left(\theta - t_0\right)^{\frac{p-1}{p}}\mu_0 + \lambda M_2 \Delta^{\frac{p-1}{p}}\mu_0\Big] \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

olsun. Genelliği bozmaksızın,

$$\varphi(\Delta) \geq \Delta \tag{2.2.9}$$

olduğunu kabul edeceğiz.

$D_1 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ve $D_2 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ kompakt kümeler, $g(\cdot,\cdot) : [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $K_1(\cdot,\cdot,\cdot) : [t_0,\theta] \times [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ve $K_2(\cdot,\cdot,\cdot) : [t_0,\theta] \times [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times m}$ fonksiyonları sürekli olduklarından dolayı $M_1 \in [0,\infty)$, $M_2 \in [0,\infty)$, $\Delta \to 0^+$ iken $\omega_0(\Delta) \to 0$, $\omega_1(\Delta) \to 0$, $\omega_2(\Delta) \to 0$, $\varphi(\Delta) \to 0$ ve ayrıca $\Delta_1 < \Delta_2$ iken

$$\begin{aligned} \omega_0(\Delta_1) \leq \omega_0(\Delta_2),\ \ \omega_1(\Delta_1) \leq \omega_1(\Delta_2), \\ \omega_2(\Delta_1) \leq \omega_2(\Delta_2),\ \ \varphi(\Delta_1) \leq \varphi(\Delta_2) \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

olur.

Önerme 2.2.1 *Keyfi $x(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}$ ve $t_1 \in [t_0,\theta]$, $t_2 \in [t_0,\theta]$ için*

$$\|x(t_2) - x(t_1)\| \leq \varphi\left(|t_2 - t_1|\right) \tag{2.2.11}$$

eşitsizliği doğrudur.

Burada $\varphi(\cdot)$ (2.2.8) ile tanımlıdır.

Kanıt. Keyfi $x(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}$ alalım ve genelliği bozmaksızın $t_2 > t_1$ olduğunu varsayalım.

$x(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}$ olduğundan her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$x(t) = g\left(t, x\left(t\right)\right) + \lambda \int_{t_0}^{t} \left[K_1\left(t, s, x\left(s\right)\right) + K_2\left(t, s, x\left(s\right)\right) u\left(s\right)\right] ds \qquad (2.2.12)$$

olacak biçimde $u(\cdot) \in U_{p,\mu_0}$ vardır. O halde (2.2.12) 'den

$$\begin{aligned} x(t_2) \; = \; & g\left(t_2, x\left(t_2\right)\right) \\ & + \lambda \int_{t_0}^{t_2} \left[K_1\left(t_2, s, x\left(s\right)\right) + K_2\left(t_2, s, x\left(s\right)\right) u\left(s\right)\right] ds \; , \end{aligned} \qquad (2.2.13)$$

$$\begin{aligned} x(t_1) \; = \; & g\left(t_1, x\left(t_1\right)\right) \\ & + \lambda \int_{t_0}^{t_1} \left[K_1\left(t_1, s, x\left(s\right)\right) + K_2\left(t_1, s, x\left(s\right)\right) u\left(s\right)\right] ds \end{aligned} \qquad (2.2.14)$$

olduğu elde edilir.

(2.2.13) ve (2.2.14) 'ten

$$\begin{aligned}
\big\| x(t_2) \; - \; & x(t_1) \big\| \leq \left\| g\left(t_2, x\left(t_2\right)\right) - g\left(t_1, x\left(t_1\right)\right) \right\| \\
+ \; & \lambda \Big\| \int_{t_0}^{t_2} K_1\left(t_2, s, x\left(s\right)\right) ds + \int_{t_0}^{t_2} K_2\left(t_2, s, x\left(s\right)\right) u(s) ds \\
- \; & \int_{t_0}^{t_1} K_1\left(t_1, s, x\left(s\right)\right) ds - \int_{t_0}^{t_1} K_2\left(t_1, s, x\left(s\right)\right) u(s) ds \Big\| \\
\leq \; & \left\| g\left(t_2, x\left(t_2\right)\right) - g\left(t_1, x\left(t_2\right)\right) \right\| + \left\| g\left(t_1, x\left(t_2\right)\right) - g\left(t_1, x\left(t_1\right)\right) \right\| \\
+ \; & \lambda \left\| \int_{t_0}^{t_2} K_1\left(t_2, s, x\left(s\right)\right) ds - \int_{t_0}^{t_1} K_1\left(t_1, s, x\left(s\right)\right) ds \right\| \\
+ \; & \lambda \left\| \int_{t_0}^{t_2} K_2\left(t_2, s, x\left(s\right)\right) u(s) ds - \int_{t_0}^{t_1} K_2\left(t_1, s, x\left(s\right)\right) u(s) ds \right\| \\
\leq \; & \left\| g\left(t_2, x\left(t_2\right)\right) - g\left(t_1, x\left(t_2\right)\right) \right\| + \left\| g\left(t_1, x\left(t_2\right)\right) - g\left(t_1, x\left(t_1\right)\right) \right\| \\
+ \; & \lambda \int_{t_0}^{t_1} \left\| K_1\left(t_2, s, x\left(s\right)\right) - K_1\left(t_1, s, x\left(s\right)\right) \right\| ds \\
+ \; & \lambda \int_{t_1}^{t_2} \left\| K_1\left(t_2, s, x\left(s\right)\right) \right\| ds \\
+ \; & \lambda \int_{t_0}^{t_1} \left\| K_2\left(t_2, s, x\left(s\right)\right) - K_2\left(t_1, s, x\left(s\right)\right) \right\| \left\| u(s) \right\| ds \\
+ \; & \lambda \int_{t_1}^{t_2} \left\| K_2\left(t_2, s, x\left(s\right)\right) \right\| \left\| u(s) \right\| ds
\end{aligned}$$

ve son olarak

$$
\begin{aligned}
\big\|x(t_2) &- x(t_1)\big\| \leq \|g(t_2, x(t_2)) - g(t_1, x(t_2))\| \\
&+ \|g(t_1, x(t_2)) - g(t_1, x(t_1))\| \\
&+ \lambda \int_{t_0}^{t_1} \|K_1(t_2, s, x(s)) - K_1(t_1, s, x(s))\|\, ds \\
&+ \lambda \int_{t_1}^{t_2} \|K_1(t_2, s, x(s))\|\, ds \\
&+ \lambda \int_{t_0}^{t_1} \|K_2(t_2, s, x(s)) - K_2(t_1, s, x(s))\|\, \|u(s)\|\, ds \\
&+ \lambda \int_{t_1}^{t_2} \|K_2(t_2, s, x(s))\|\, \|u(s)\|\, ds \qquad (2.2.15)
\end{aligned}
$$

olduğu bulunur.

$x(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}$ olduğundan, Teorem 2.1.2 'den keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için

$$x(t) \in B_n(r_*) \qquad (2.2.16)$$

olur.

(2.2.1), (2.2.5) ve (2.2.16) 'dan

$$\|g(t_2, x(t_2)) - g(t_1, x(t_2))\| \leq \omega_0(|t_2 - t_1|) \qquad (2.2.17)$$

olduğu elde edilir.

1.2.B koşulu gereği

$$\|g(t_1, x(t_2)) - g(t_1, x(t_1))\| \leq L_0 \|x(t_2) - x(t_1)\| \qquad (2.2.18)$$

eşisizliği doğrudur.

(2.2.2), (2.2.6) ve (2.2.16) 'dan keyfi $s \in [t_0, \theta]$ için

$$\|K_1(t_2, s, x(s)) - K_1(t_1, s, x(s))\| \leq \omega_1(|t_2 - t_1|) \qquad (2.2.19)$$

O halde (2.2.19) 'dan

$$
\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t_1} \big\|K_1(t_2, s, x(s)) &- K_1(t_1, s, x(s))\big\| ds \leq \omega_1(|t_2 - t_1|)(t_1 - t_0) \\
&\leq \omega_1(|t_2 - t_1|)(\theta - t_0) \qquad (2.2.20)
\end{aligned}
$$

olduğu elde edilir.

(2.2.2), (2.2.7) ve (2.2.16) 'dan keyfi $s \in [t_0, \theta]$ için

$$\|K_2(t_2, s, x(s)) - K_2(t_1, s, x(s))\| \leq \omega_2(|t_2 - t_1|) \qquad (2.2.21)$$

O halde (2.2.21) 'den, Hölder eşitsizliğinden ve $u(\cdot) \in U_{p,\mu_0}$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t_1} \left\| K_2\left(t_2, s, x\left(s\right)\right) \right. &- \left. K_2\left(t_1, s, x\left(s\right)\right) \right\| \left\| u(s) \right\| ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t_1} \omega_2\left(\left|t_2 - t_1\right|\right) \left\| u(s) \right\| ds \\
&= \omega_2\left(\left|t_2 - t_1\right|\right) \int_{t_0}^{t_1} \left\| u(s) \right\| ds \\
&\leq \omega_2\left(\left|t_2 - t_1\right|\right) \left(t_1 - t_0\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{t_0}^{t_1} \left\| u(s) \right\|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \omega_2\left(\left|t_2 - t_1\right|\right) \left(\theta - t_0\right)^{\frac{p-1}{p}} \mu_0 \qquad (2.2.22)
\end{aligned}$$

olduğu elde edilir.

(2.2.2), (2.2.3) ve (2.2.16) 'dan keyfi $s \in [t_0, \theta]$ için

$$\left\| K_1\left(t_2, s, x\left(s\right)\right) \right\| \leq M_1$$

ve buradan da

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\| K_1\left(t_2, s, x\left(s\right)\right) \right\| ds \leq M_1 \left|t_2 - t_1\right| \qquad (2.2.23)$$

olduğu bulunur.

(2.2.2), (2.2.4) ve (2.2.16) 'dan ise keyfi $s \in [t_0, \theta]$ için

$$\left\| K_2\left(t_2, s, x\left(s\right)\right) \right\| \leq M_2 \qquad (2.2.24)$$

olur.

$u(\cdot) \in U_{p,\mu_0}$ olduğundan, (2.2.24) ve Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \left\| K_2\left(t_2, s, x\left(s\right)\right) \right\| \left\| u(s) \right\| ds &\leq M_2 \int_{t_1}^{t_2} \left\| u(s) \right\| ds \\
&\leq M_2 \left(t_2 - t_1\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{t_1}^{t_2} \left\| u(s) \right\|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq M_2 \left|t_2 - t_1\right|^{\frac{p-1}{p}} \mu_0 \qquad (2.2.25)
\end{aligned}$$

olduğu elde edilir.

(2.2.15), (2.2.17), (2.2.18), (2.2.20), (2.2.22), (2.2.23) ve (2.2.25) 'ten

$$\begin{aligned}
\left\| x(t_2) - x(t_1) \right\| &\leq \omega_0\left(\left|t_2 - t_1\right|\right) + L_0 \left\| x(t_2) - x(t_1) \right\| \\
&+ \lambda\omega_1\left(\left|t_2 - t_1\right|\right)\left(\theta - t_0\right) + \lambda\omega_2\left(\left|t_2 - t_1\right|\right)\left(\theta - t_0\right)^{\frac{p-1}{p}} \mu_0 \\
&+ \lambda M_1 \left|t_2 - t_1\right| + \lambda M_2 \left|t_2 - t_1\right|^{\frac{p-1}{p}} \mu_0 \qquad (2.2.26)
\end{aligned}$$

olur.

(2.2.8) ve (2.2.26) 'dan

$$\begin{aligned}\left\|x(t_2)-x(t_1)\right\| &\le \frac{1}{1-L_0}\Big[\omega_0\left(|t_2-t_1|\right)+\lambda\omega_1\left(|t_2-t_1|\right)\left(\theta-t_0\right)\\ &+ \lambda\omega_2\left(|t_2-t_1|\right)\left(\theta-t_0\right)^{\frac{p-1}{p}}\mu_0\\ &+ \lambda M_1\left|t_2-t_1\right|+\lambda M_2\left|t_2-t_1\right|^{\frac{p-1}{p}}\mu_0\Big]=\varphi\left(|t_2-t_1|\right)\end{aligned}$$

olduğu elde edilir.

Böylece (2.2.11) eşitsizliğinin doğruluğu kanıtlanmış olur. ■

Önerme 2.2.1 'den, $t\to\mathbf{X}_{p,\mu_0}(t)$, $t\in[t_0,\theta]$, küme değerli dönüşümünü karakterize eden aşağıdaki önerme elde edilir.

Önerme 2.2.2 *Keyfi $t_1\in[t_0,\theta]$ ve $t_2\in[t_0,\theta]$ için*

$$h_n\left(\mathbf{X}_{p,\mu_0}(t_2),\mathbf{X}_{p,\mu_0}(t_1)\right)\le\varphi\left(|t_2-t_1|\right)$$

eşitsizliği doğrudur.

Burada $\varphi(\cdot):[0,\infty)\to[0,\infty)$ fonksiyonu (2.2.8) ile tanımlıdır.

Kanıt. Genelliği bozmaksızın $t_2>t_1$ olduğunu varsayalım. Keyfi $x_2\in\mathbf{X}_{p,\mu_0}(t_2)$ alalım. O halde $x(t_2)=x_2$ olacak biçimde $x(\cdot)\in\mathbf{X}_{p,\mu_0}$ vardır. $x_1=x(t_1)$ dersek, $x_1\in\mathbf{X}_{p,\mu_0}(t_1)$ olur. Önerme 2.2.1 'den

$$\|x_2-x_1\|=\|x(t_2)-x(t_1)\|\le\varphi\left(|t_2-t_1|\right)$$

olur.

Böylece her $x_2\in\mathbf{X}_{p,\mu_0}(t_2)$ için

$$\|x_2-x_1\|\le\varphi\left(|t_2-t_1|\right)$$

olacak biçimde $x_1\in\mathbf{X}_{p,\mu_0}(t_1)$ vardır. Bu ise

$$\mathbf{X}_{p,\mu_0}(t_2)\subset\mathbf{X}_{p,\mu_0}(t_1)+\varphi\left(|t_2-t_1|\right)\cdot B_n \tag{2.2.27}$$

olması demektir. Benzer olarak

$$\mathbf{X}_{p,\mu_0}(t_1)\subset\mathbf{X}_{p,\mu_0}(t_2)+\varphi\left(|t_2-t_1|\right)\cdot B_n \tag{2.2.28}$$

olduğu gösterilir.

(2.2.27) ve (2.2.28) 'den önermenin kanıtı elde edilir. ■

$\Delta\to 0^+$ iken $\varphi(\Delta)\to 0$ olduğundan, Önerme 2.2.2 'den, $t\to\mathbf{X}_{p,\mu_0}(t)$, $t\in[t_0,\theta]$, küme değerli dönüşümününün sürekli olduğu bulunur.

Sonuç 2.2.3 $t \to \mathbf{X}_{p,\mu_0}(t)$, $t \in [t_0, \theta]$, *küme değerli dönüşümü süreklidir.*

$\Delta \to 0^+$ iken $\varphi(\Delta) \to 0$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $\Delta \in (0, \Delta_*(\varepsilon)]$ iken

$$\varphi(\Delta) \leq \varepsilon \tag{2.2.29}$$

olacak biçimde $\Delta_*(\varepsilon) > 0$ vardır.

Bu durumda Önerme 2.2.1 'den aşağıdaki önermenin doğruluğu elde edilir.

Önerme 2.2.4 $\mathbf{X}_{p,\mu_0} \subset C([t_0, \theta]; \mathbb{R}^n)$ *yörüngeler kümesi, eşsürekli fonksiyonlar kümesidir.*

Kanıt. Keyfi $\varepsilon > 0$ alalım ve $\Delta_*(\varepsilon) > 0$ sayısı $\Delta \in (0, \Delta_*(\varepsilon)]$ iken (2.2.29) eşitsizliğini sağlayacak biçimde seçilmiş olsun.

Şimdi keyfi $x(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}$ ve $|t_2 - t_1| \leq \Delta_*(\varepsilon)$ olmak üzere $t_1 \in [t_0, \theta]$, $t_2 \in [t_0, \theta]$ alalım. O halde (2.2.10), (2.2.29) ve Önerme 2.2.1 'den

$$\|x(t_2) - x(t_1)\| \leq \varphi(|t_2 - t_1|) \leq \varphi(\Delta_*(\varepsilon)) \leq \varepsilon \tag{2.2.30}$$

eşitsizliği doğru olur. Burada $\varphi(\cdot)$ (2.2.8) ile tanımlıdır.

$x(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}$ ve $|t_2 - t_1| \leq \Delta_*(\varepsilon)$ olmak üzere $t_1 \in [t_0, \theta]$, $t_2 \in [t_0, \theta]$ keyfi seçildiğinden, (2.2.30) 'dan $\mathbf{X}_{p,\mu_0} \subset C([t_0, \theta]; \mathbb{R}^n)$ yörüngeler kümesinin, eşsürekli fonksiyonlar kümesi olduğu elde edilir. ∎

Teorem 2.1.2, Önerme 2.2.4 ve Arzela-Ascoli teoreminden, $\mathbf{X}_{p,\mu_0}$ yörüngeler kümesinin $C([t_0, \theta]; \mathbb{R}^n)$ uzayında prekompakt küme olduğu elde edilir. Böylece sıradaki önerme doğrudur.

Önerme 2.2.5 $\mathbf{X}_{p,\mu_0}$ *yörüngeler kümesi,* $C([t_0, \theta]; \mathbb{R}^n)$ *uzayında prekompakt kümedir.*

2.3 Yörüngeler Kümesinin Kapalılığı

Şimdi $\mathbf{X}_{p,\mu_0} \subset C([t_0, \theta]; \mathbb{R}^n)$ yörüngeler kümesinin kapalı küme olduğunu gösterelim.

Önerme 2.3.1 $\mathbf{X}_{p,\mu_0}$ *yörüngeler kümesi* $C([t_0, \theta]; \mathbb{R}^n)$ *uzayında kapalı kümedir.*

Kanıt. $k=1,2,\ldots$ için $x_k(\cdot)\in\mathbf{X}_{p,\mu_0}$ ve $k\to\infty$ iken $\{x_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi $C([t_0,\theta];\mathbb{R}^n)$ uzayında $x_0(\cdot)\in C([t_0,\theta];\mathbb{R}^n)$ fonksiyonuna yakınsasın. Yani $k\to\infty$ iken $\{x_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi $x_0(\cdot)\in C([t_0,\theta];\mathbb{R}^n)$ fonksiyonuna düzgün yakınsasın. $x_0(\cdot)\in\mathbf{X}_{p,\mu_0}$ olduğunu kanıtlayalım.

$x_k(\cdot)\in\mathbf{X}_{p,\mu_0}$ olduğundan her $t\in[t_0,\theta]$ için

$$\begin{aligned} x_k(t) &= g(t,x_k(t)) \\ &\quad+\lambda\int_{t_0}^{t}\left[K_1(t,s,x_k(s))+K_2(t,s,x_k(s))\,u_k(s)\right]ds \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

olacak biçimde $u_k(\cdot)\in U_{p,\mu_0}$ vardır.

U_{p,μ_0} mümkün kontrol fonksiyonlar kümesi $L_p([t_0,\theta];\mathbb{R}^m)$ uzayının μ_0 yarıçaplı kapalı yuvarı olduğundan, U_{p,μ_0} kümesi zayıf kompakt kümedir. O halde $\{u_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ dizisinin $L_p([t_0,\theta];\mathbb{R}^m)$ uzayında zayıf yakınsak bir alt dizisi vardır. Genelliği bozmaksızın $k\to\infty$ iken $\{u_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ dizisinin $L_p([t_0,\theta];\mathbb{R}^m)$ uzayında bir $u_*(\cdot)\in L_p([t_0,\theta];\mathbb{R}^m)$ fonksiyonuna zayıf yakınsadığını varsayalım. U_{p,μ_0} kümesi zayıf kompakt olduğundan $u_*(\cdot)\in U_{p,\mu_0}$ olur.

(1.2.1) sisteminin $u_*(\cdot)\in U_{p,\mu_0}$ mümkün kontrol fonksiyonu tarafından üretilen yörüngesini $x_*(\cdot):[t_0,\theta]\to\mathbb{R}^n$ olarak gösterirsek, her $t\in[t_0,\theta]$ için

$$\begin{aligned} x_*(t) &= g(t,x_*(t)) \\ &\quad+\lambda\int_{t_0}^{t}\left[K_1(t,s,x_*(s))+K_2(t,s,x_*(s))\,u_*(s)\right]ds \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

ve $x_*(\cdot)\in\mathbf{X}_{p,\mu_0}$ olur.

(2.3.1), (2.3.2) ve 1.2.B koşulundan her $t\in[t_0,\theta]$ için

$$\begin{aligned} &\|x_k(t)-x_*(t)\| = \Big\|\, g(t,x_k(t))+\lambda\int_{t_0}^{t}\big[K_1(t,s,x_k(s)) \\ &+\ K_2(t,s,x_k(s))\,u_k(s)\big]ds - g(t,x_*(t)) \\ &-\ \lambda\int_{t_0}^{t}\left[K_1(t,s,x_*(s))+K_2(t,s,x_*(s))\,u_*(s)\right]ds\Big\| \\ &\le\ \|g(t,x_k(t))-g(t,x_*(t))\|+\lambda\int_{t_0}^{t}\|K_1(t,s,x_k(s))-K_1(t,s,x_*(s))\|\,ds \\ &+\ \lambda\Big\|\int_{t_0}^{t}\big[K_2(t,s,x_k(s))\,u_k(s)-K_2(t,s,x_*(s))\,u_k(s) \\ &+\ K_2(t,s,x_*(s))\,u_k(s)-K_2(t,s,x_*(s))\,u_*(s)\big]ds\Big\| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \|g(t,x_k(t))-g(t,x_*(t))\|+\lambda\int_{t_0}^{t}\|K_1(t,s,x_k(s))-K_1(t,s,x_*(s))\|\,ds\\
&+\lambda\left\|\int_{t_0}^{t}\left[K_2(t,s,x_k(s))\,u_k(s)-K_2(t,s,x_*(s))\,u_k(s)\right]ds\right\|\\
&+\lambda\left\|\int_{t_0}^{t}\left[K_2(t,s,x_*(s))\,u_k(s)-K_2(t,s,x_*(s))\,u_*(s)\right]ds\right\|\\
&\leq \|g(t,x_k(t))-g(t,x_*(t))\|+\lambda\int_{t_0}^{t}\|K_1(t,s,x_k(s))-K_1(t,s,x_*(s))\|\,ds\\
&+\lambda\int_{t_0}^{t}\|K_2(t,s,x_k(s))-K_2(t,s,x_*(s))\|\cdot\|u_k(s)\|\,ds\\
&+\lambda\left\|\int_{t_0}^{t}K_2(t,s,x_*(s))\,(u_k(s)-u_*(s))\,ds\right\|
\end{aligned}
$$

olduğu elde edilir.

Böylece her $t\in[t_0,\theta]$ için

$$
\begin{aligned}
\|x_k(t)-x_*(t)\| &\leq \|g(t,x_k(t))-g(t,x_*(t))\|\\
&+\lambda\int_{t_0}^{t}\|K_1(t,s,x_k(s))-K_1(t,s,x_*(s))\|\,ds\\
&+\lambda\int_{t_0}^{t}\|K_2(t,s,x_k(s))-K_2(t,s,x_*(s))\|\cdot\|u_k(s)\|\,ds\\
&+\lambda\left\|\int_{t_0}^{t}K_2(t,s,x_*(s))\,(u_k(s)-u_*(s))\,ds\right\| \qquad (2.3.3)
\end{aligned}
$$

olur.

1.2.B koşulundan her $t\in[t_0,\theta]$ ve $s\in[t_0,\theta]$ için

$$\|g(t,x_k(t))-g(t,x_*(t))\|\leq L_0\|x_k(t)-x_*(t)\|, \qquad (2.3.4)$$

$$\|K_1(t,s,x_k(s))-K_1(t,s,x_*(s))\|\leq L_1\|x_k(s)-x_*(s)\|, \qquad (2.3.5)$$

$$\|K_2(t,s,x_k(s))-K_2(t,s,x_*(s))\|\leq L_2\|x_k(s)-x_*(s)\| \qquad (2.3.6)$$

olduğu bulunur.

Böylece (2.3.3), (2.3.4), (2.3.5) ve (2.3.6) 'dan her $t\in[t_0,\theta]$ için

$$
\begin{aligned}
\|x_k(t)-x_*(t)\| &\leq L_0\|x_k(t)-x_*(t)\|+\lambda L_1\int_{t_0}^{t}\|x_k(s)-x_*(s)\|\,ds\\
&+\lambda L_2\int_{t_0}^{t}\|x_k(s)-x_*(s)\|\cdot\|u_k(s)\|\,ds\\
&+\lambda\left\|\int_{t_0}^{t}K_2(t,s,x_*(s))\,(u_k(s)-u_*(s))\,ds\right\|
\end{aligned}
$$

olur. $L_0 \in [0,1)$ olduğundan, son eşitsizlikten her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned}\|x_k(t) - x_*(t)\| &\leq \frac{\lambda}{1-L_0} \int_{t_0}^{t} (L_1 + L_2 \|u_k(s)\|) \cdot \|x_k(s) - x_*(s)\| \, ds \\ &+ \frac{\lambda}{1-L_0} \left\| \int_{t_0}^{t} K_2(t,s,x_*(s)) (u_k(s) - u_*(s)) \, ds \right\| \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

elde edilir.

Eğer $z(t,s) = K_2(t,s,x_*(s))$ olarak gösterirsek, $z(t,s) : [t_0,\theta] \times [t_0,\theta] \to \mathbb{R}^{n\times m}$ sürekli fonksiyon olur. Bu durumda (2.3.7) eşitsizliği

$$\begin{aligned}\|x_k(t) - x_*(t)\| &\leq \frac{\lambda}{1-L_0} \int_{t_0}^{t} (L_1 + L_2 \|u_k(s)\|) \cdot \|x_k(s) - x_*(s)\| \, ds \\ &+ \frac{\lambda}{1-L_0} \left\| \int_{t_0}^{t} z(t,s) (u_k(s) - u_*(s)) \, ds \right\|, \ t \in [t_0, \theta] \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

biçiminde olur.

$k \to \infty$ iken $\{u_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi $L_p([t_0,\theta];\mathbb{R}^m)$ uzayında $u_*(\cdot) \in L_p([t_0,\theta];\mathbb{R}^m)$ fonksiyonuna zayıf yakınsadığından, keyfi $\psi(\cdot) \in L_q([t_0,\theta];\mathbb{R}^{n\times m})$ fonksiyonu için $k \to \infty$ iken

$$\left\| \int_{t_0}^{\theta} \psi(s) [u_k(s) - u_*(s)] \, ds \right\| \to 0 \tag{2.3.9}$$

olur.

Burada $q \in \mathbb{R}$ sayısı $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olacak biçimde sayıdır.

Eğer herhangi sabitlenmiş $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\psi_*(s) = \begin{cases} \psi(s), & s \in [t_0, t], \\ 0, & s \in (t, \theta] \end{cases} \tag{2.3.10}$$

olarak gösterirsek, (2.3.9) ve (2.3.10) 'dan her sabitlenmiş $t \in [t_0, \theta]$ ve $\psi_*(\cdot) \in L_q([t_0,t];\mathbb{R}^{n\times m})$ fonksiyonu için $k \to \infty$ iken

$$\left\| \int_{t_0}^{t} \psi_*(s) [u_k(s) - u_*(s)] \, ds \right\| \to 0 \tag{2.3.11}$$

olur. $\psi(\cdot) \in L_q([t_0,\theta];\mathbb{R}^{n\times m})$ keyfi olduğundan, $\psi_*(\cdot) \in L_q([t_0,t];\mathbb{R}^{n\times m})$ keyfi seçilmiş fonksiyon olur. Böylece (2.3.11) 'den, keyfi $t \in [t_0,\theta]$ ve keyfi $\psi_*(\cdot) \in L_q([t_0,t];\mathbb{R}^{n\times m})$ için $k \to \infty$ iken

$$\left\| \int_{t_0}^{t} \psi_*(s) [u_k(s) - u_*(s)] \, ds \right\| \to 0 \tag{2.3.12}$$

olur.

$(t,s)\to z\,(t,s):[t_0,\theta]\times[t_0,\theta]\to\mathbb{R}^{n\times m}$ fonksiyonu sürekli olduğundan, (2.3.12) gereği her sabitlenmiş $t\in[t_0,\theta]$ için $k\to\infty$ iken

$$\left\|\int_{t_0}^{t} z\,(t,s)\,[u_k(s)-u_*(s)]\,ds\right\|\to 0 \tag{2.3.13}$$

olduğu elde edilir.

(2.3.13) 'ten, herhangi bir sabitlenmiş $t\in[t_0,\theta]$ aldığımızda, keyfi $\varepsilon>0$ için $k>K(t)$ iken

$$\left\|\int_{t_0}^{t} z\,(t,s)\,[u_k(s)-u_*(s)]\,ds\right\|<\varepsilon \tag{2.3.14}$$

olacak biçimde $K(t)>0$ sayısının var olduğu elde edilir.

Şimdi keyfi $\varepsilon>0$ için $k>k_*$ iken keyfi $t\in[t_0,\theta]$ için

$$\left\|\int_{t_0}^{t} z\,(t,s)\,(u_k(s)-u_*(s))\,ds\right\|<\varepsilon \tag{2.3.15}$$

olacak biçimde $k_*>0$ (t 'den bağımsız) sayısının var olduğunu gösterelim.

(2.3.15) eşitsizliğinin sağlanmadığını varsayalım. O halde $\varepsilon_*>0$ sayısı vardır öyle ki

$$\left\|\int_{t_0}^{t_i} z\,(t_i,s)\,[u_{k_i}(s)-u_*(s)]\,ds\right\|\geq\varepsilon_* \tag{2.3.16}$$

olacak biçimde $t_i\in[t_0,\theta]$ ve $u_{k_i}(\cdot)$ vardır ve ayrıca $i\to\infty$ iken $k_i\to\infty$ olur.

$i=1,2,\ldots$ için $t_i\in[t_0,\theta]$ ve $[t_0,\theta]$ aralığı kompakt olduğundan genelliği bozmaksızın $i\to\infty$ iken $t_i\to t_*$ ve $t_*\in[t_0,\theta]$ olduğunu varsayalım. Açıktır ki, keyfi $i=1,2,\ldots$ için

$$\begin{aligned}
\left\|\int_{t_0}^{t_i} z\,(t_i,s)\,[u_{k_i}(s)-u_*(s)]\,ds\right\| &\leq \left\|\int_{t_0}^{t_*} z\,(t_i,s)\,[u_{k_i}(s)-u_*(s)]\,ds\right\|\\
&+\left\|\int_{t_*}^{t_i} z\,(t_i,s)\,[u_{k_i}(s)-u_*(s)]\,ds\right\|\\
&\leq \left\|\int_{t_0}^{t_*} [z\,(t_i,s)-z\,(t_*,s)]\,[u_{k_i}(s)-u_*(s)]\,ds\right\|\\
&+\left\|\int_{t_0}^{t_*} z\,(t_*,s)\,[u_{k_i}(s)-u_*(s)]\,ds\right\|\\
&+\left\|\int_{t_*}^{t_i} z\,(t_i,s)\,[u_{k_i}(s)-u_*(s)]\,ds\right\|
\end{aligned} \tag{2.3.17}$$

eşitsizliği doğrudur.

(2.3.14) 'ten $\varepsilon_* > 0$ sayısı için $i > N_1$ iken

$$\left\| \int_{t_0}^{t_*} z\left(t_*, s\right)\left[u_{k_i}(s) - u_*(s)\right] ds \right\| < \frac{\varepsilon_*}{5} \tag{2.3.18}$$

olacak biçimde $N_1 > 0$ sayısı vardır.

Keyfi $k = 1, 2, \ldots$ için $u_k(\cdot) \in U_{p,\mu_0}$, $u_*(\cdot) \in U_{p,\mu_0}$ olduğundan (1.2.3) 'ten

$$\left(\int\limits_{t_0}^{\theta} \|u_k(t)\|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \le \mu_0 \ , \quad \left(\int\limits_{t_0}^{\theta} \|u_*(t)\|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \le \mu_0 \tag{2.3.19}$$

olur.

$z\left(t, s\right) : [t_0, \theta] \times [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^{n \times m}$ fonksiyonu sürekli olduğundan, $\dfrac{\varepsilon_*}{10\left(\theta - t_0\right)^{\frac{p-1}{p}} \mu_0}$ için $i > N_2$ iken keyfi $s \in [t_0, \theta]$ için

$$\|z(t_i, s) - z(t_*, s)\| < \frac{\varepsilon_*}{10\left(\theta - t_0\right)^{\frac{p-1}{p}} \mu_0} \tag{2.3.20}$$

olacak biçimde $N_2 > 0$ sayısı vardır. O halde Hölder eşitsizliğinden, (2.3.19) ve (2.3.20) 'den, keyfi $i > N_2$ için

$$\left\| \int_{t_0}^{t_*} \left[z\left(t_i, s\right) - z\left(t_*, s\right)\right] \cdot \left[u_{k_i}(s) - u_*(s)\right] ds \right\|$$

$$\le \int_{t_0}^{t_*} \left\|z\left(t_i, s\right) - z\left(t_*, s\right)\right\| \cdot \left\|u_{k_i}(s) - u_*(s)\right\| ds$$

$$\le \frac{\varepsilon_*}{10\left(\theta - t_0\right)^{\frac{p-1}{p}} \mu_0} \cdot \int_{t_0}^{t_*} \left[\, \|u_{k_i}(s)\| + \|u_*(s)\| \,\right] ds$$

$$= \frac{\varepsilon_*}{10\left(\theta - t_0\right)^{\frac{p-1}{p}} \mu_0} \cdot \left[\int_{t_0}^{t_*} \|u_{k_i}(s)\| \, ds + \int_{t_0}^{t_*} \|u_*(s)\| \, ds \right]$$

$$\le \frac{\varepsilon_*}{10\left(\theta - t_0\right)^{\frac{p-1}{p}} \mu_0} \cdot \Bigg[\left(\int_{t_0}^{t_*} 1^q ds \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\int_{t_0}^{t_*} \|u_{k_i}(s)\|^p \, ds \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+ \left(\int_{t_0}^{t_*} 1^q ds \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\int_{t_0}^{t_*} \|u_*(s)\|^p \, ds \right)^{\frac{1}{p}} \Bigg]$$

$$\leq \frac{\varepsilon_*}{10\,(\theta-t_0)^{\frac{p-1}{p}}\,\mu_0}\cdot\Big[\left(\int_{t_0}^{\theta}ds\right)^{\frac{1}{q}}\cdot\left(\int_{t_0}^{\theta}\|u_{k_i}(s)\|^p\,ds\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+\left(\int_{t_0}^{\theta}ds\right)^{\frac{1}{q}}\cdot\left(\int_{t_0}^{\theta}\|u_*(s)\|^p\,ds\right)^{\frac{1}{p}}\Big]$$

$$\leq \frac{\varepsilon_*}{10\,(\theta-t_0)^{\frac{p-1}{p}}\,\mu_0}\cdot\left[(\theta-t_0)^{\frac{1}{q}}\,\mu_0+(\theta-t_0)^{\frac{1}{q}}\,\mu_0\right]$$

$$=\frac{\varepsilon_*}{5\,(\theta-t_0)^{\frac{p-1}{p}}}\cdot(\theta-t_0)^{\frac{1}{q}}$$

olduğu bulunur. $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ olduğundan $\dfrac{1}{q}=\dfrac{p-1}{p}$ olur. O halde son eşitsizlikten, keyfi $i>N_2$ için

$$\begin{aligned}\left\|\int_{t_0}^{t_*}\left[z\left(t_i,s\right)-z\left(t_*,s\right)\right]\cdot\left[u_{k_i}(s)-u_*(s)\right]ds\right\| &\leq \frac{\varepsilon_*}{5\,(\theta-t_0)^{\frac{p-1}{p}}}\cdot(\theta-t_0)^{\frac{p-1}{p}}\\ &= \frac{\varepsilon_*}{5} \qquad (2.3.21)\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

$z(t,s)=K_2\left(t,s,x_*\left(s\right)\right)$ olduğundan, (2.2.4) 'ten keyfi $i=1,2,\ldots$ ve $s\in[t_0,\theta]$ için

$$\|z(t_i,s)\|\leq M_2 \qquad (2.3.22)$$

olur.

Genelliği bozmaksızın keyfi $i=1,2,\ldots$ için $t_i\geq t_*$ olduğunu varsayalım. O halde (2.3.19), (2.3.22) ve Hölder eşitsizliğinden, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ olmak üzere

$$\left\|\int_{t_*}^{t_i}z\left(t_i,s\right)\left[u_{k_i}(s)-u_*(s)\right]ds\right\|\leq\int_{t_*}^{t_i}\left\|z\left(t_i,s\right)\right\|\cdot\left\|\left[u_{k_i}(s)-u_*(s)\right]\right\|ds$$

$$\leq\; M_2\left[\int_{t_*}^{t_i}\|u_{k_i}(s)\|\,ds+\int_{t_*}^{t_i}\|u_*(s)\|\,ds\right]$$

$$\leq\; M_2\Bigg[\left(\int_{t_*}^{t_i}1^q ds\right)^{\frac{1}{q}}\cdot\left(\int_{t_*}^{t_i}\|u_{k_i}(s)\|^p\,ds\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+\;\left(\int_{t_*}^{t_i}1^q ds\right)^{\frac{1}{q}}\cdot\left(\int_{t_*}^{t_i}\|u_*(s)\|^p\,ds\right)^{\frac{1}{p}}\Bigg]$$

$$\leq \quad M_2\left[\left(\int_{t_*}^{t_i} ds\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\int_{t_0}^{\theta} \|u_{k_i}(s)\|^p\, ds\right)^{\frac{1}{p}}\right.$$

$$\left. + \quad \left(\int_{t_*}^{t_i} ds\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\int_{t_0}^{\theta} \|u_*(s)\|^p\, ds\right)^{\frac{1}{p}}\right]$$

$$\leq \quad M_2\left[(t_i - t_*)^{\frac{p-1}{p}}\,\mu_0 + (t_i - t_*)^{\frac{p-1}{p}}\,\mu_0\right]$$

$$= \quad 2M_2\,(t_i - t_*)^{\frac{p-1}{p}}\,\mu_0 \qquad (2.3.23)$$

olduğu elde edilir.

$i \to \infty$ iken $t_i \to t_*$ olduğundan, (2.3.23) 'ten keyfi $i > N_3$ için

$$\left\|\int_{t_*}^{t_i} z\,(t_i, s)\,[u_{k_i}(s) - u_*(s)]\,ds\right\| < \frac{\varepsilon_*}{5} \qquad (2.3.24)$$

olacak biçimde $N_3 > 0$ sayısı vardır.

$N_* = \max\{N_1, N_2, N_3\}$ olsun. O halde (2.3.17), (2.3.18), (2.3.21) ve (2.3.24) 'ten, keyfi $i > N_*$ için

$$\left\|\int_{t_0}^{t_i} z\,(t_i, s)\,[u_{k_i}(s) - u_*(s)]\,ds\right\| < \frac{\varepsilon_*}{5} + \frac{\varepsilon_*}{5} + \frac{\varepsilon_*}{5} = \frac{3\varepsilon_*}{5} < \varepsilon_* \qquad (2.3.25)$$

olduğu bulunur.

(2.3.16) ve (2.3.25) eşitsizlikleri çelişir. O halde varsayımımız doğru değil. Bu ise (2.3.15) eşitsizliğinin doğru olması demektir. Bu durumda (2.3.8) ve (2.3.15) eşitsizliklerinden keyfi $t \in [t_0, \theta]$ ve keyfi $k > k_*$ için

$$\begin{aligned}\|x_k\,(t) \quad - \quad x_*\,(t)\,\| &\leq \frac{\lambda\varepsilon}{1 - L_0} \\ &+ \quad \frac{\lambda}{1 - L_0}\int_{t_0}^{t} (L_1 + L_2\,\|u_k(s)\|) \cdot \|x_k\,(s) - x_*\,(s)\|\,ds \qquad (2.3.26)\end{aligned}$$

olduğu elde edilir.

(2.3.26) ve Gronwall eşitsizliğinden keyfi $t \in [t_0, \theta]$ ve keyfi $k > k_*$ için

$$\|x_k\,(t) - x_*\,(t)\| \leq \frac{\lambda\varepsilon}{1 - L_0} \cdot \exp\left[\frac{\lambda}{1 - L_0}\int_{t_0}^{\theta} (L_1 + L_2\,\|u_k(s)\|)\,ds\right] \qquad (2.3.27)$$

olduğu bulunur.

$u_k(\cdot) \in U_{p,\mu_0}$ olduğundan Hölder eşitsizliğinden ve (1.2.4) 'ten keyfi k için

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{\theta} \left(L_1 + L_2 \|u_k(s)\|\right) ds &\le L_1 (\theta - t_0) + L_2 \int_{t_0}^{\theta} \|u_k(s)\| \, ds \\ &\le L_1 (\theta - t_0) + L_2 \left(\int_{t_0}^{\theta} ds\right)^{\frac{p-1}{p}} \cdot \left(\int_{t_0}^{\theta} \|u_k(s)\|^p \, ds\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\le L_1 (\theta - t_0) + L_2 (\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \mu_0 = r_0 \end{aligned} \qquad (2.3.28)$$

olduğu elde edilir. Böylece (2.3.27) ve (2.3.28) 'den keyfi $t \in [t_0, \theta]$ ve keyfi $k > k_*$ için

$$\|x_k(t) - x_*(t)\| \le \frac{\lambda \varepsilon}{1 - L_0} \cdot \exp\left(\frac{\lambda r_0}{1 - L_0}\right) \qquad (2.3.29)$$

olur.

(2.3.29) eşitsizliğinden, keyfi $k > k_*$ için

$$\|x_k(\cdot) - x_*(\cdot)\|_C \le \frac{\lambda \varepsilon}{1 - L_0} \cdot \exp\left(\frac{\lambda r_0}{1 - L_0}\right)$$

olduğu bulunur. Böylece, $k \to \infty$ iken $\{x_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ dizisinin $C([t_0, \theta]; \mathbb{R}^n)$ uzayında $x_*(\cdot) \in C([t_0, \theta]; \mathbb{R}^n)$ fonksiyonuna yakınsadığı elde edilir. Öte yandan, $k \to \infty$ iken $\{x_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi $x_0(\cdot) \in C([t_0, \theta]; \mathbb{R}^n)$ fonksiyonuna düzgün yakınsadığından, limitin tekliğinden $x_0(\cdot) = x_*(\cdot)$ olur. Son olarak, $x_*(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}$ olmasından $x_0(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}$ olduğu elde edilir. Böylece $\mathbf{X}_{p,\mu_0}$ yörüngeler kümesinin kapalılığı kanıtlanmış olur. ■

Önerme 2.2.5 ve Önerme 2.3.1 'den $\mathbf{X}_{p,\mu_0}$ yörüngeler kümesinin $C([t_0, \theta]; \mathbb{R}^n)$ uzayında kompaktlığı elde edilir. Böylece aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem 2.3.2 *(1.2.1) sisteminin (1.2.6) ile tanımlı* $\mathbf{X}_{p,\mu_0}$ *yörüngeler kümesi* $C([t_0, \theta]; \mathbb{R}^n)$ *uzayında kompakt kümedir.*

3 YÖRÜNGELER KÜMESİNİN SİSTEMİN PARAMETRELERİNE BAĞLILIĞI

3.1 Yörüngeler Kümesinin μ_0 'a Göre Sürekliliği

1.2.C koşulu gereği, (1.2.1) sisteminde verilen λ sayısı

$$0 \leq \lambda \cdot \Big(L_1 \left(\theta - t_0\right) + L_2 (\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \mu_0 \Big) < 1 - L_0$$

eşitsizliğini sağlıyor. Teorem 1.3.1 gereği, bu eşitsizlik her mümkün $u(\cdot) \in U_{p,\mu_0}$ kontrol fonksiyonu için (1.2.1) sisteminin tek yörüngesinin olduğunu garanti eder.

Açıktır ki, $\mu_0 - \alpha > 0$ olmak üzere, keyfi $\mu \in [\mu_0 - \alpha, \mu_0 + \alpha]$ için

$$0 \leq \lambda \cdot \Big(L_1 \left(\theta - t_0\right) + L_2 (\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \mu \Big) < 1 - L_0 \qquad (3.1.1)$$

olacak biçimde $\alpha > 0$ vardır.

$\mu \in [\mu_0 - \alpha, \mu_0 + \alpha]$ için

$$U_{p,\mu} = \Big\{ u(\cdot) \in L_p\big([t_0, \theta]; \mathbb{R}^m\big) : \|u(\cdot)\|_p \leq \mu \Big\} \qquad (3.1.2)$$

olarak gösterelim.

Açıktır ki, $U_{p,\mu}$ kümesi, $L_p\left([t_0, \theta]; \mathbb{R}^m\right)$ uzayında merkezi orijinde ve yarıçapı μ olan kapalı yuvardır.

(3.1.2) ile tanımlı $U_{p,\mu}$ kümesini yeni mümkün kontrol fonksiyonlar kümesi olarak alalım. O halde Teorem 1.3.1 'e benzer olarak, (3.1.1) eştsizliğini kullanarak her $u(\cdot) \in U_{p,\mu}$ kontrol fonksiyonunun (1.2.1) sisteminin tek yörüngesini ürettiği kanıtlanabilir. (1.2.1) sisteminin tüm mümkün $u(\cdot) \in U_{p,\mu}$ kontrol fonksiyonları tarafından üretilen yörüngeler kümesini $\mathbf{X}_{p,\mu}$ olarak gösterelim. O halde

$$\mathbf{X}_{p,\mu} = \{ x(\cdot; u(\cdot)) : u(\cdot) \in U_{p,\mu} \}$$

olur.

Teorem 3.1.1 *$\mu \in (\mu_0 - \alpha, \mu_0 + \alpha)$ olsun. O halde*

$$h_C \left(\mathbf{X}_{p,\mu} \ , \ \mathbf{X}_{p,\mu_0} \right) \leq r_1 \left| \mu - \mu_0 \right|$$

eşitsizliği doğrudur.

Burada $h_C(\cdot, \cdot)$, $C\left([t_0, \theta]; \mathbb{R}^n\right)$ uzayındaki kümeler arasındaki Hausdorff uzaklığını göstermektedir,

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{\lambda}{1 - L_0} M_2 \left(\theta - t_0\right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\quad \cdot \exp\left[\frac{\lambda}{1 - L_0} \left[L_1(\theta - t_0) + L_2 \left(\theta - t_0\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\mu_0 + \alpha\right) \right] \right], \end{aligned} \qquad (3.1.3)$$

$M_2 \geq 0$ sabiti ise (2.2.4) ile tanımlanmaktadır.

Kanıt. Keyfi $x_*(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}$ alalım ve sabitleyelim. O halde her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned} x_*(t) &= g\left(t, x_*\left(t\right)\right) \\ &+ \lambda \int_{t_0}^{t} \left[K_1\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) + K_2\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) u_*\left(s\right)\right] ds \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

olacak biçimde $u_*(\cdot) \in U_{p,\mu_0}$ vardır.

$u_*(\cdot) \in U_{p,\mu_0}$ olduğundan

$$\left(\int_{t_0}^{\theta} \|u_*(t)\|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq \mu_0 \tag{3.1.5}$$

olur.

Her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$u(t) = \frac{\mu}{\mu_0} u_*(t) \tag{3.1.6}$$

olsun. O halde (3.1.5) ve (3.1.6) 'dan

$$\begin{aligned} \left(\int_{t_0}^{\theta} \|u(t)\|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\int_{t_0}^{\theta} \frac{\mu^p}{\mu_0^p} \|u_*(t)\|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \frac{\mu}{\mu_0} \left(\int_{t_0}^{\theta} \|u_*(t)\|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\mu}{\mu_0} \cdot \mu_0 = \mu \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

olur.

Böylece, (3.1.7) 'den, (3.1.6) ile tanımlı $u(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu için $u(\cdot) \in U_{p,\mu}$ olur.

Bu durumda, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$x(t) = g\left(t, x\left(t\right)\right) + \lambda \int_{t_0}^{t} \left[K_1\left(t, s, x\left(s\right)\right) + K_2\left(t, s, x\left(s\right)\right) u\left(s\right)\right] ds \tag{3.1.8}$$

denklemini sağlayan sürekli $x(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu için $x(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu}$ olur.

(3.1.4) ve (3.1.8) 'den her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$
\begin{aligned}
& \left\| x(t) - x_*(t) \right\| = \bigg\| \; g\left(t, x\left(t\right)\right) \\
+ \quad & \lambda \int_{t_0}^{t} \left[K_1\left(t, s, x\left(s\right)\right) + K_2\left(t, s, x\left(s\right)\right) u\left(s\right) \right] ds \\
- \quad & g\left(t, x_*\left(t\right)\right) - \lambda \int_{t_0}^{t} \left[K_1\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) + K_2\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) u_*\left(s\right) \right] ds \bigg\| \\
\leq \quad & \left\| g\left(t, x\left(t\right)\right) - g\left(t, x_*\left(t\right)\right) \right\| + \lambda \int_{t_0}^{t} \left\| K_1\left(t, s, x\left(s\right)\right) - K_1\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) \right\| ds \\
+ \quad & \lambda \int_{t_0}^{t} \left\| K_2\left(t, s, x\left(s\right)\right) u(s) - K_2\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) u_*(s) \right\| ds \\
\leq \quad & \left\| g\left(t, x\left(t\right)\right) - g\left(t, x_*\left(t\right)\right) \right\| + \lambda \int_{t_0}^{t} \left\| K_1\left(t, s, x\left(s\right)\right) - K_1\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) \right\| ds \\
+ \quad & \lambda \int_{t_0}^{t} \left\| K_2\left(t, s, x\left(s\right)\right) u(s) - K_2\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) u(s) \right\| ds \\
+ \quad & \lambda \int_{t_0}^{t} \left\| K_2\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) u(s) - K_2\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) u_*(s) \right\| ds \\
\leq \quad & \left\| g\left(t, x\left(t\right)\right) - g\left(t, x_*\left(t\right)\right) \right\| + \lambda \int_{t_0}^{t} \left\| K_1\left(t, s, x\left(s\right)\right) - K_1\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) \right\| ds \\
+ \quad & \lambda \int_{t_0}^{t} \left\| K_2\left(t, s, x\left(s\right)\right) - K_2\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) \right\| \cdot \left\| u(s) \right\| ds \\
+ \quad & \lambda \int_{t_0}^{t} \left\| K_2\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) \right\| \cdot \left\| u(s) - u_*(s) \right\| ds
\end{aligned}
$$

olduğu elde edilir.

Böylece her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$
\begin{aligned}
\left\| x(t) - x_*(t) \right\| \quad \leq \quad & \left\| g\left(t, x\left(t\right)\right) - g\left(t, x_*\left(t\right)\right) \right\| \\
+ \quad & \lambda \int_{t_0}^{t} \left\| K_1\left(t, s, x\left(s\right)\right) - K_1\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) \right\| ds \\
+ \quad & \lambda \int_{t_0}^{t} \left\| K_2\left(t, s, x\left(s\right)\right) - K_2\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) \right\| \cdot \left\| u(s) \right\| ds \\
+ \quad & \lambda \int_{t_0}^{t} \left\| K_2\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) \right\| \cdot \left\| u(s) - u_*(s) \right\| ds \qquad (3.1.9)
\end{aligned}
$$

olur.

1.2.B koşulundan her $t \in [t_0, \theta]$ ve $s \in [t_0, \theta]$ için

$$\left\| g\left(t, x\left(t\right)\right) - g\left(t, x_*\left(t\right)\right) \right\| \leq L_0 \left\| x\left(t\right) - x_*\left(t\right) \right\|, \qquad (3.1.10)$$

$$\left\| K_1\left(t, s, x\left(s\right)\right) - K_1\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) \right\| \leq L_1 \left\| x\left(s\right) - x_*\left(s\right) \right\|, \qquad (3.1.11)$$

$$\left\| K_2\left(t, s, x\left(s\right)\right) - K_2\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) \right\| \leq L_2 \left\| x\left(s\right) - x_*\left(s\right) \right\| \qquad (3.1.12)$$

olduğu bulunur.

$x_*(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}$ olduğundan, Teorem 2.1.2 gereği

$$\|x_*(\cdot)\|_C \leq r_* \tag{3.1.13}$$

olur. Burada $r_* > 0$ sabiti (2.1.6) ile tanımlıdır. O halde (2.2.4) ve (3.1.13) 'ten

$$\max\{\, \|K_2(t,s,x_*(s))\| : (t,s) \in [t_0,\theta]\times[t_0,\theta]\} \leq M_2, \tag{3.1.14}$$

olduğu elde edilir. (3.1.5), (3.1.6), (3.1.14) ve Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t} \|K_2(t,s,x_*(s))\| \cdot \|u(s) - u_*(s))\|\, ds \\
= &\int_{t_0}^{t} \|K_2(t,s,x_*(s))\| \cdot \left\| \frac{\mu}{\mu_0} u_*(s) - u_*(s) \right\| ds \\
\leq\ & M_2 \frac{|\mu - \mu_0|}{\mu_0} \int_{t_0}^{t} \|u_*(s)\|\, ds \leq M_2 \frac{|\mu-\mu_0|}{\mu_0} \left(\int_{t_0}^{t} ds \right)^{\frac{p-1}{p}} \cdot \left(\int_{t_0}^{t} \|u_*(s)\|^p\, ds \right)^{\frac{1}{p}} \\
\leq\ & M_2 \frac{|\mu-\mu_0|}{\mu_0} (\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \mu_0 = M_2 (\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} |\mu - \mu_0|
\end{aligned} \tag{3.1.15}$$

olduğu elde edilir.

(3.1.9), (3.1.10), (3.1.11), (3.1.12) ve (3.1.15) 'ten, her $t \in [t_0,\theta]$ için

$$\begin{aligned}
\|x(t) &- x_*(t)\| \leq L_0 \|x(t) - x_*(t)\| + \lambda L_1 \int_{t_0}^{t} \|x(s) - x_*(s))\|\, ds \\
&+ \lambda L_2 \int_{t_0}^{t} \|x(s) - x_*(s)\| \cdot \|u(s)\|\, ds + \lambda M_2 (\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} |\mu - \mu_0| \\
&= L_0 \|x(t) - x_*(t)\| + \lambda \int_{t_0}^{t} [L_1 + L_2 \|u(s)\|]\, \|x(s) - x_*(s))\|\, ds \\
&+ \lambda M_2 (\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} |\mu - \mu_0|
\end{aligned}$$

olduğu bulunur.

Son eşitsizlikten, her $t \in [t_0,\theta]$ için

$$\begin{aligned}
\|x(t) - x_*(t)\| \ &\leq\ \frac{\lambda}{1-L_0} \int_{t_0}^{t} [L_1 + L_2 \|u(s)\|]\, \|x(s) - x_*(s))\|\, ds \\
&+\ \frac{\lambda}{1-L_0} M_2 (\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} |\mu - \mu_0|
\end{aligned} \tag{3.1.16}$$

olur.

$\mu \in (\mu_0 - \alpha, \mu_0 + \alpha)$, $u(\cdot) \in U_{p,\mu}$ olduğundan, Hölder eşitsizliği gereği

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t} \|u(s)\| \, ds &\leq (t - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{t_0}^{t} \|u(s)\|^p \, ds \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq (t - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \mu \leq (\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} (\mu_0 + \alpha) \qquad (3.1.17)\end{aligned}$$

olur.

(3.1.3), (3.1.16), (3.1.17) ve Gronwall eşitsizliğinden, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned}\left\|x(t) - x_*(t)\right\| &\leq \frac{\lambda}{1 - L_0} M_2 (\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} |\mu - \mu_0| \\ &\cdot \exp\left[\frac{\lambda}{1 - L_0} \int_{t_0}^{t} [L_1 + L_2 \|u(s)\|] \, ds \right] \\ &\leq \frac{\lambda}{1 - L_0} M_2 (\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} |\mu - \mu_0| \\ &\cdot \exp\left[\frac{\lambda}{1 - L_0} \left[L_1(\theta - t_0) + L_2 \int_{t_0}^{t} \|u(s)\| \, ds \right] \right] \\ &\leq \frac{\lambda}{1 - L_0} M_2 (\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} |\mu - \mu_0| \\ &\cdot \exp\left[\frac{\lambda}{1 - L_0} \left[L_1(\theta - t_0) + L_2(\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} (\mu_0 + \alpha) \right] \right] \\ &= r_1 |\mu - \mu_0| \qquad (3.1.18)\end{aligned}$$

olduğu bulunur.

(3.1.18) 'den keyfi sabitlenmiş $x_*(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}$ için

$$\|x(\cdot) - x_*(\cdot)\|_C \leq r_1 |\mu - \mu_0|$$

olacak biçimde $x(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu}$ var olduğu elde edilir. Bu ise

$$\mathbf{X}_{p,\mu_0} \subset \mathbf{X}_{p,\mu} + r_1 |\mu - \mu_0| B_C(1) \qquad (3.1.19)$$

olması demektir. Burada

$$B_C(1) = \{x(\cdot) \in C([t_0, \theta]; \mathbb{R}^n) : \|x(\cdot)\|_C \leq 1\}$$

olarak tanımlıdır. Yani, $B_C(1)$ kümesi $C([t_0, \theta]; \mathbb{R}^n)$ uzayının kapalı birim yuvarıdır.

Benzer olarak

$$\mathbf{X}_{p,\mu} \subset \mathbf{X}_{p,\mu_0} + r_1 \left|\mu - \mu_0\right| B_C(1) \tag{3.1.20}$$

olduğu kanıtlanabilir.

(3.1.19) ve (3.1.20) 'den teoremin kanıtı elde edilir. ■

Teorem 3.1.1 'e benzer olarak aşağıdaki teorem, yani $\mathbf{X}_{p,\mu}$ yörüngeler kümesinin μ 'ye göre Lipschitz sürekli olduğu elde edilir.

Teorem 3.1.2 *(1.2.1) sisteminin* $\mathbf{X}_{p,\mu}$ *yörüngeler kümesi* $(\mu_0-\alpha, \mu_0+\alpha)$ *aralığında* μ *'ye göre* r_1 *sabiti ile Lipschitz süreklidir.*

Kanıt. Keyfi $\mu_1 \in (\mu_0 - \alpha, \mu_0 + \alpha)$ ve $\mu_2 \in (\mu_0 - \alpha, \mu_0 + \alpha)$ alalım. Bu durumda Teorem 3.1.1 'e benzer olarak

$$h_C\left(\mathbf{X}_{p,\mu_2}, \mathbf{X}_{p,\mu_1}\right) \leq r_1 \left|\mu_2 - \mu_1\right|$$

olduğu kanıtlanır. ■

3.2 Yörüngeler Kümesinin p 'ye Göre Sürekliliği

Teori ve pratikte ortaya çıkan bazı problemlerde verilen kümeler arasındaki uzaklığın bulunması gerekir (bkz., [1], [2], [37], [41], [48], [55], [56], [69]). Verilen metrik uzayın alt kumeleri arasındaki uzaklık, Hausdorff uzaklığı ile tanımlanmaktadır (bkz., [1], [2], [37], [41], [69]). Farklı metrik uzayların alt kümeleri arasındaki uzaklığı tanımlamak için Gromov - Hausdorff uzaklığı kavramı kullanılmaktadır (bkz., [69]). Kümeler arasında başka uzaklık kavramları [69] 'da verilmiştir.

Yörüngeler kümesinin p 'ye olan bağlılığını incelemeden önce, farklı $L_{p_1}\big([t_0,\theta];\mathbb{R}^m\big)$ ve $L_{p_2}\big([t_0,\theta];\mathbb{R}^m\big)$, $(p_1 \in [1,\infty), p_2 \in [1,\infty), p_1 \neq p_2)$, uzaylarının alt kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığını tanımlayalım.

Keyfi $p \in [1,\infty)$ için $L_p\big([t_0,\theta];\mathbb{R}^m\big) \subset L_1\big([t_0,\theta];\mathbb{R}^m\big)$ olduğundan, farklı $L_p\big([t_0,\theta];\mathbb{R}^m\big)$ uzaylarının alt kümeleri arasında Hausdorff uzaklığını tanımlarken $L_1\big([t_0,\theta];\mathbb{R}^m\big)$ uzayının normunu kullanacağız.

$1 \leq p_1 < +\infty$ ve $1 \leq p_2 < +\infty$ için $G \subset L_{p_1}\big([t_0,\theta];\mathbb{R}^m\big)$ ve $W \subset L_{p_2}\big([t_0,\theta];\mathbb{R}^m\big)$ kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığı $\hbar_1(G,W)$ olarak gösterilir ve

$$\hbar_1\big(G,W\big) = \max\left\{\sup_{x(\cdot)\in G} d_{L_1}\big(x(\cdot),W\big), \sup_{y(\cdot)\in W} d_{L_1}\big(y(\cdot),G\big)\right\}$$

olarak tanımlanır. Burada

$$d_{L_1}\big(x(\cdot),W\big)=\inf_{y(\cdot)\in W}\|x(\cdot)-y(\cdot)\|_1\ ,\quad \|x(\cdot)-y(\cdot)\|_1=\int_{t_0}^{\theta}\|x(t)-y(t)\|\ dt\ .$$

$L_p\big([t_0,\theta];\mathbb{R}^m\big)$, $p\in(1,\infty)$, uzayının merkezi orijinde olan $\mu_0>0$ yarıçaplı kapalı yuvarı

$$B_{L_p}(0,\mu_0)=\Big\{u(\cdot)\in L_p\big([t_0,\theta];\mathbb{R}^m\big):\|u(\cdot)\|_p\le\mu_0\Big\}$$

olarak tanımlanır. Açıktır ki, $B_{L_p}(0,\mu_0)=U_{p,\mu_0}$. Burada U_{p,μ_0}, (1.2.1) sisteminin mümkün kontrol fonksiyonlar kümesidir ve (1.2.3) ile tanımlanmaktadır.

$L_p\big([t_0,\theta];\mathbb{R}^m\big)$, $p\in(1,\infty)$, uzaylarının merkezi orijinde olan μ_0 yarıçaplı kapalı yuvarlarının p 'ye sürekli bağlı olduğunu gösteren aşağıdaki önerme doğrudur (bkz.[56]).

Teorem 3.2.1 *[56] $p>1$ ve $\varepsilon>0$ olsun. Bu durumda her $\tilde{p}\in(p-\delta_*,p+\delta_*)$ için*

$$\hbar_1(B_{L_{\tilde{p}}}(0,\mu_0),B_{L_p}(0,\mu_0))<\varepsilon$$

olacak biçimde bir $\delta_*=\delta_*(\varepsilon,p)\in(0,p-1)$ sayısı vardır.

Teorem 3.2.1 'i kullanarak, (1.2.2) kısıtı olan (1.2.1) sisteminin yörüngeler kümesinin p 'ye olan bağlılığını inceleyeceğiz.

1.2.C koşulu gereği, (1.2.1) sisteminde verilen λ sayısı

$$0\le\lambda\cdot\Big(L_1\left(\theta-t_0\right)+L_2(\theta-t_0)^{\frac{p-1}{p}}\mu_0\Big)<1-L_0$$

eşitsizliğini sağlıyor. Teorem 1.3.1 gereği, bu eşitsizlik her mümkün $u(\cdot)\in U_{p,\mu_0}$ kontrol fonksiyonu için (1.2.1) sisteminin tek yörüngesinin olduğunu garanti eder.

Açıktır ki, $p-\gamma>1$ olmak üzere keyfi $\tilde{p}\in[p-\gamma,p+\gamma]$ için

$$0\le\lambda\cdot\Big(L_1\left(\theta-t_0\right)+L_2(\theta-t_0)^{\frac{\tilde{p}-1}{\tilde{p}}}\mu_0\Big)<1-L_0\qquad(3.2.1)$$

olacak biçimde $\gamma>0$ vardır.

$\tilde{p}\in[p-\gamma,p+\gamma]$ için

$$U_{\tilde{p},\mu_0}=\Big\{u(\cdot)\in L_{\tilde{p}}\big([t_0,\theta];\mathbb{R}^m\big):\|u(\cdot)\|_{\tilde{p}}\le\mu_0\Big\}\qquad(3.2.2)$$

olarak gösterelim.

Açıktır ki, $U_{\tilde{p},\mu_0}$ kümesi, $L_{\tilde{p}}([t_0,\theta];\mathbb{R}^m)$ uzayında merkezi orijinde ve yarıçapı μ_0 olan kapalı yuvardır ve $B_{L_{\tilde{p}}}(0,\mu_0) = U_{\tilde{p},\mu_0}$.

(3.2.2) ile tanımlı $U_{\tilde{p},\mu_0}$ kümesini yeni mümkün kontrol fonksiyonlar kümesi olarak alalım. Bu durumda (3.2.1) eştsizliğini kullanarak Teorem 1.3.1 'e benzer biçimde, her $u(\cdot) \in U_{\tilde{p},\mu_0}$ kontrol fonksiyonunun (1.2.1) sisteminin tek yörüngesini ürettiği kanıtlanabilir. (1.2.1) sisteminin tüm mümkün $u(\cdot) \in U_{\tilde{p},\mu_0}$ kontrol fonksiyonları tarafından üretilen yörüngeler kümesini $\mathbf{X}_{\tilde{p},\mu_0}$ olarak gösterelim. O halde

$$\mathbf{X}_{\tilde{p},\mu_0} = \{x(\cdot;u(\cdot)) : u(\cdot) \in U_{\tilde{p},\mu_0}\}$$

olur.

$$\alpha_* = \max\{1,\ \theta - t_0\}\ , \tag{3.2.3}$$

$$\beta_* = \frac{\lambda M_2}{(1-L_0)} \cdot \exp\left[\frac{\lambda}{1-L_0}\left(L_1(\theta - t_0) + L_2\mu_0\alpha_*\right)\right] \tag{3.2.4}$$

olsun. (3.2.3) 'ten keyfi $\tilde{p} \in [1,\infty)$ için

$$(\theta - t_0)^{\frac{\tilde{p}-1}{\tilde{p}}} \leq \alpha_* \tag{3.2.5}$$

olur.

Teorem 3.2.2 *Keyfi $\varepsilon > 0$ için $\tilde{p} \in (p-\delta, p+\delta)$ iken*

$$h_C(\mathbf{X}_{\tilde{p},\mu_0}, \mathbf{X}_{p,\mu_0}) \leq \varepsilon$$

ve her $t \in [t_0,\theta]$ için

$$h_n(\mathbf{X}_{\tilde{p},\mu_0}(t), \mathbf{X}_{p,\mu_0}(t)) \leq \varepsilon$$

olacak biçimde bir $\delta = \delta(\varepsilon, p) > 0$ sayısı vardır.

Kanıt. Teorem 3.2.1 'den $\dfrac{\varepsilon}{\beta_*}$ için her $\tilde{p} \in (p-\delta, p+\delta)$ için

$$\hbar_1(B_{L_{\tilde{p}}}(0,\mu_0), B_{L_p}(0,\mu_0)) < \frac{\varepsilon}{\beta_*} \tag{3.2.6}$$

olacak biçimde bir $\delta = \delta(\varepsilon, p) \in (0, p-1)$ sayısı vardır.

Genelliği bozmaksızın $\delta < \gamma$ olduğunu varsayalım. Burada $\gamma > 0$ sayısı (3.2.1) ile tanımlıdır. Bu durumda

$$(p-\delta, p+\delta) \subset [p-\gamma, p+\gamma]$$

olur.

Keyfi $\tilde{p} \in (p-\delta, p+\delta)$ ve $\tilde{x}(\cdot) \in \mathbf{X}_{\tilde{p},\mu_0}$ alalım ve sabitleyelim. Bu durumda, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\tilde{x}(t) = g(t, \tilde{x}(t)) + \lambda \int_{t_0}^{t} [K_1(t, s, \tilde{x}(s)) + K_2(t, s, \tilde{x}(s))\tilde{u}(s)] \, ds \tag{3.2.7}$$

olacak şekilde $\tilde{u}(\cdot) \in U_{\tilde{p},\mu_0} = B_{L_{\tilde{p}}}(0, \mu_0)$ vardır. (3.2.6) 'dan

$$\|\tilde{u}(\cdot) - u(\cdot)\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{\beta_*}$$

olacak biçimde, yani

$$\int_{t_0}^{\theta} \|\tilde{u}(s) - u(s)\| \, ds \leq \frac{\varepsilon}{\beta_*} \tag{3.2.8}$$

olacak biçimde bir $u(\cdot) \in U_{p,\mu_0} = B_{L_p}(0, \mu_0)$ fonksiyonu vardır.

$x(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu (1.2.1) sisteminin $u(\cdot) \in U_{p,\mu_0} = B_{L_p}(0, \mu_0)$ mümkün kontrol fonksiyonu tarafından üretilen yörüngesi olsun. Bu durumda $x(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}$ ve her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$x(t) = g(t, x(t)) + \lambda \int_{t_0}^{t} [K_1(t, s, x(s)) + K_2(t, s, x(s))u(s)] \, ds \tag{3.2.9}$$

olur. (3.2.7) ve (3.2.9) 'dan, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned}
\left\|\tilde{x}(t) - x(t)\right\| &= \Big\| g\left(t, \tilde{x}\left(t\right)\right) \\
+ & \lambda \int_{t_0}^{t} \left[K_1\left(t, s, \tilde{x}\left(s\right)\right) + K_2\left(t, s, \tilde{x}\left(s\right)\right) \tilde{u}\left(s\right)\right] ds \\
- & g\left(t, x\left(t\right)\right) - \lambda \int_{t_0}^{t} \left[K_1\left(t, s, x\left(s\right)\right) + K_2\left(t, s, x\left(s\right)\right) u\left(s\right)\right] ds \Big\| \\
\leq & \left\|g\left(t, \tilde{x}\left(t\right)\right) - g\left(t, x\left(t\right)\right)\right\| + \lambda \int_{t_0}^{t} \left\|K_1\left(t, s, \tilde{x}\left(s\right)\right) - K_1\left(t, s, x\left(s\right)\right)\right\| ds \\
+ & \lambda \int_{t_0}^{t} \left\|K_2\left(t, s, \tilde{x}\left(s\right)\right) \tilde{u}(s) - K_2\left(t, s, x\left(s\right)\right) u(s)\right\| ds \\
\leq & \left\|g\left(t, \tilde{x}\left(t\right)\right) - g\left(t, x\left(t\right)\right)\right\| + \lambda \int_{t_0}^{t} \left\|K_1\left(t, s, \tilde{x}\left(s\right)\right) - K_1\left(t, s, x\left(s\right)\right)\right\| ds \\
+ & \lambda \int_{t_0}^{t} \left\|K_2\left(t, s, \tilde{x}\left(s\right)\right) \tilde{u}(s) - K_2\left(t, s, x\left(s\right)\right) \tilde{u}(s)\right\| ds \\
+ & \lambda \int_{t_0}^{t} \left\|K_2\left(t, s, x\left(s\right)\right) \tilde{u}(s) - K_2\left(t, s, x\left(s\right)\right) u(s)\right\| ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|g(t,\tilde{x}(t))-g(t,x(t))\|+\lambda\int_{t_0}^{t}\|K_1(t,s,\tilde{x}(s))-K_1(t,s,x(s))\|\,ds\\
&+ \lambda\int_{t_0}^{t}\|K_2(t,s,\tilde{x}(s))-K_2(t,s,x(s))\|\cdot\|\tilde{u}(s)\|\,ds\\
&+ \lambda\int_{t_0}^{t}\|K_2(t,s,x(s))\|\cdot\|\tilde{u}(s)-u(s)\|\,ds
\end{aligned}$$

olduğu elde edilir.

Böylece her $t\in[t_0,\theta]$ için

$$\begin{aligned}
\|\tilde{x}(t)-x(t)\| &\leq \|g(t,\tilde{x}(t))-g(t,x(t))\|\\
&+ \lambda\int_{t_0}^{t}\|K_1(t,s,\tilde{x}(s))-K_1(t,s,x(s))\|\,ds\\
&+ \lambda\int_{t_0}^{t}\|K_2(t,s,\tilde{x}(s))-K_2(t,s,x(s))\|\cdot\|\tilde{u}(s)\|\,ds\\
&+ \lambda\int_{t_0}^{t}\|K_2(t,s,x(s))\|\cdot\|\tilde{u}(s)-u(s)\|\,ds \qquad (3.2.10)
\end{aligned}$$

olur.

1.2.B koşulundan her $t\in[t_0,\theta]$ ve $s\in[t_0,\theta]$ için

$$\|g(t,\tilde{x}(t))-g(t,x(t))\|\leq L_0\|\tilde{x}(t)-x(t)\|, \qquad (3.2.11)$$

$$\|K_1(t,s,\tilde{x}(s))-K_1(t,s,x(s))\|\leq L_1\|\tilde{x}(s)-x(s)\|, \qquad (3.2.12)$$

$$\|K_2(t,s,\tilde{x}(s))-K_2(t,s,x(s))\|\leq L_2\|\tilde{x}(s)-x(s)\| \qquad (3.2.13)$$

olduğu bulunur.

$x(\cdot)\in\mathbf{X}_{p,\mu_0}$ olduğundan, Teorem 2.1.2 'den

$$\|x(\cdot)\|_C\leq r_* \qquad (3.2.14)$$

olduğu elde edilir. Burada $r_*>0$ sayısı (2.1.6) ile tanımlıdır. Bu durumda (2.2.4) ve (3.2.14) 'ten keyfi $(t,s)\in[t_0,\theta]\times[t_0,\theta]$ için

$$\|K_2(t,s,x(s))\|\leq M_2 \qquad (3.2.15)$$

olur.

Bu durumda (3.2.8), (3.2.10), (3.2.11), (3.2.12), (3.2.13) ve (3.2.15) 'ten her $t\in[t_0,\theta]$ için

$$\|\tilde{x}(t)-x(t)\| \leq L_0 \|\tilde{x}(t)-x(t)\| + \lambda L_1 \int_{t_0}^{t} \|\tilde{x}(s)-x(s)\| ds$$

$$+ \quad \lambda L_2 \int_{t_0}^{t} \|\tilde{x}(s)-x(s)\| \cdot \|\tilde{u}(s)\| ds + \lambda M_2 \int_{t_0}^{t} \|\tilde{u}(s)-u(s)\| ds$$

$$\leq \quad L_0 \|\tilde{x}(t)-x(t)\| + \lambda \int_{t_0}^{t} \left[L_1 + L_2 \|\tilde{u}(s)\|\right] \|\tilde{x}(s)-x(s)\| ds$$

$$+ \quad \lambda M_2 \frac{\varepsilon}{\beta_*}$$

olduğu elde edilir. $L_0 \in [0,1)$ olduğundan, son eşitsizlikten her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\|\tilde{x}(t)-x(t)\| \leq \frac{\lambda M_2}{\beta_*(1-L_0)} \varepsilon$$

$$+ \quad \frac{\lambda}{1-L_0} \int_{t_0}^{t} \left[L_1 + L_2 \|\tilde{u}(s)\|\right] \|\tilde{x}(s)-x(s)\| ds \qquad (3.2.16)$$

olduğu bulunur.

(3.2.16) ve Gronwall eşitsizliğinden, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\left\|\tilde{x}(t)-x(t)\right\| \leq \frac{\lambda M_2}{\beta_*(1-L_0)} \varepsilon \cdot \exp\left(\frac{\lambda}{1-L_0} \int_{t_0}^{t} \left[L_1 + L_2 \|\tilde{u}(s)\|\right] ds\right)$$

$$\leq \frac{\lambda M_2}{\beta_*(1-L_0)} \varepsilon \cdot \exp\left(\frac{\lambda}{1-L_0} \left[L_1(\theta - t_0) + L_2 \int_{t_0}^{t} \|\tilde{u}(s)\| ds\right]\right) \qquad (3.2.17)$$

olduğu elde edilir.

$\tilde{u}(\cdot) \in U_{\tilde{p}}$ olduğundan, Hölder eşitsizliği ve (3.2.5) 'ten $\frac{1}{\tilde{q}} + \frac{1}{\tilde{p}} = 1$ olmak üzere

$$\int_{t_0}^{t} \|\tilde{u}(s)\| ds \quad \leq \quad \left(\int_{t_0}^{t} 1^{\tilde{q}} ds\right)^{\frac{1}{\tilde{q}}} \cdot \left(\int_{t_0}^{t} \|\tilde{u}(s)\|^{\tilde{p}} ds\right)^{\frac{1}{\tilde{p}}}$$

$$\leq \quad \mu_0 (\theta - t_0)^{\frac{\tilde{p}-1}{\tilde{p}}} \leq \alpha_* \mu_0 \qquad (3.2.18)$$

olur.

Bu durumda (3.2.4), (3.2.17) ve (3.2.18) 'den her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\|\tilde{x}(t)-x(t)\| \leq \varepsilon \frac{\lambda M_2}{(1-L_0)\beta_*} \cdot \exp\left[\frac{\lambda}{1-L_0} \left(L_1(\theta - t_0) + L_2 \mu_0 \alpha_*\right)\right] = \varepsilon \qquad (3.2.19)$$

olarak bulunur.

(3.2.19) 'dan

$$\|\tilde{x}(\cdot) - x(\cdot)\|_C \leq \varepsilon \qquad (3.2.20)$$

olduğu elde edilir. Böylece $\tilde{p} \in (p-\delta, p+\delta)$ iken keyfi seçilmiş $\tilde{x}(\cdot) \in \mathbf{X}_{\tilde{p},\mu_0}$ için (3.2.20) eşitsizliğini sağlayacak biçimde $x(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}$ olduğu kanıtlandı. Bu ise $\tilde{p} \in (p-\delta, p+\delta)$ iken

$$\mathbf{X}_{\tilde{p},\mu_0} \subset \mathbf{X}_{p,\mu_0} + \varepsilon B_C(1) \tag{3.2.21}$$

olması demektir. Burada $B_C(1)$ kümesi, $C\left([t_0, \theta]; \mathbb{R}^n\right)$ uzayının merkezi orijinde olan kapalı birim yuvardır.

$\tilde{p} \in (p-\delta, p+\delta)$ için, önce keyfi $x(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}$ yörüngesi seçilip sabitlenirse, benzer olarak

$$\|x(\cdot) - \tilde{x}(\cdot)\|_C \leq \varepsilon$$

olacak biçimde $\tilde{x}(\cdot) \in \mathbf{X}_{\tilde{p},\mu_0}$ yörüngesinin var olduğu kanıtlanabilir. Bu ise $\tilde{p} \in (p-\delta, p+\delta)$ iken

$$\mathbf{X}_{p,\mu_0} \subset \mathbf{X}_{\tilde{p},\mu_0} + \varepsilon B_C(1) \tag{3.2.22}$$

kapsamasının doğru olması demektir.

Böylece (3.2.21) ve (3.2.22) içermelerinden $\tilde{p} \in (p-\delta, p+\delta)$ için

$$h_C\left(\mathbf{X}_{\tilde{p},\mu_0}, \mathbf{X}_{p,\mu_0}\right) \leq \varepsilon \tag{3.2.23}$$

olduğu bulunur.

(3.2.23) 'ten ise keyfi $\tilde{p} \in (p-\delta, p+\delta)$ ve $t \in [t_0, \theta]$ için

$$h_n\left(\mathbf{X}_{\tilde{p},\mu_0}(t), \mathbf{X}_{p,\mu_0}(t)\right) \leq \varepsilon$$

olduğu elde edilir. ■

3.3 Yörüngeler Kümesinin Çapı

Bu bölümde $\mathbf{X}_{p,\mu_0}$ yörüngeler kümesinin çapı için bir üst değerlendirme elde edeceğiz.

$(X, d(\cdot,\cdot))$ metrik uzay, $E \subset X$ olsun. E kümesinin çapı $diam\, E$ olarak gösterilir ve

$$diam\, E = \sup\{d(x,y) : x \in E,\ y \in E\}$$

olarak tanımlanır.

$t \in [t_0, \theta]$ için

$$w_*(t) = \frac{2\lambda M_2 \mu_0}{1 - L_0} (t - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \cdot \exp\left[\frac{\lambda}{1 - L_0}\left(L_1(t - t_0) + L_2\mu_0 (t - t_0)^{\frac{p-1}{p}}\right)\right] \tag{3.3.1}$$

olsun. Burada $M_2 > 0$ sayısı (2.2.4) ile tanımlıdır.

Teorem 3.3.1 *Her $t \in [t_0, \theta]$ için*

$$diam\, \mathbf{X}_{p,\mu_0}(t) \leq w_*(t) \tag{3.3.2}$$

ve

$$diam\, \mathbf{X}_{p,\mu_0} \leq w_*(\theta) \tag{3.3.3}$$

eşitsizlikleri doğrudur.

Kanıt. Keyfi $x(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}$ ve $y(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}$ alalım ve sabitleyelim. O halde her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$x(t) = g(t, x(t)) + \lambda \int_{t_0}^{t} [K_1(t, s, x(s)) + K_2(t, s, x(s))\, u_1(s)]\, ds \tag{3.3.4}$$

ve

$$y(t) = g(t, y(t)) + \lambda \int_{t_0}^{t} [K_1(t, s, y(s)) + K_2(t, s, y(s))\, u_2(s)]\, ds \tag{3.3.5}$$

olacak biçimde $u_1(\cdot) \in U_{p,\mu_0}$ ve $u_2(\cdot) \in U_{p,\mu_0}$ vardır. Bu durumda (3.3.4) ve (3.3.5) 'ten, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned}
\left\|x(t) - y(t)\right\| = \Bigg\| & \; g(t, x(t)) \\
+ & \; \lambda \int_{t_0}^{t} [K_1(t, s, x(s)) + K_2(t, s, x(s))\, u_1(s)]\, ds \\
- & \; g(t, y(t)) - \lambda \int_{t_0}^{t} [K_1(t, s, y(s)) + K_2(t, s, y(s))\, u_2(s)]\, ds \Bigg\| \\
\leq & \; \|g(t, x(t)) - g(t, y(t))\| + \lambda \int_{t_0}^{t} \|K_1(t, s, x(s)) - K_1(t, s, y(s))\|\, ds \\
+ & \; \lambda \int_{t_0}^{t} \|K_2(t, s, x(s))\, u_1(s) - K_2(t, s, y(s))\, u_2(s)\|\, ds
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \|g(t,x(t))-g(t,y(t))\| + \lambda\int_{t_0}^{t}\|K_1(t,s,x(s))-K_1(t,s,y(s))\|\,ds \\
&+ \lambda\int_{t_0}^{t}\|K_2(t,s,x(s))\,u_1(s)-K_2(t,s,y(s))\,u_1(s)\|\,ds \\
&+ \lambda\int_{t_0}^{t}\|K_2(t,s,y(s))\,u_1(s)-K_2(t,s,y(s))\,u_2(s)\|\,ds \\
&\le \|g(t,x(t))-g(t,y(t))\| + \lambda\int_{t_0}^{t}\|K_1(t,s,x(s))-K_1(t,s,y(s))\|\,ds \\
&+ \lambda\int_{t_0}^{t}\|K_2(t,s,x(s))-K_2(t,s,y(s))\|\cdot\|u_1(s)\|\,ds \\
&+ \lambda\int_{t_0}^{t}\|K_2(t,s,y(s))\|\cdot\|u_1(s)-u_2(s)\|\,ds
\end{aligned}
$$

olduğu elde edilir.

Böylece her $t\in[t_0,\theta]$ için

$$
\begin{aligned}
\|x(t)-y(t)\| &\le \|g(t,x(t))-g(t,y(t))\| \\
&+ \lambda\int_{t_0}^{t}\|K_1(t,s,x(s))-K_1(t,s,y(s))\|\,ds \\
&+ \lambda\int_{t_0}^{t}\|K_2(t,s,x(s))-K_2(t,s,y(s))\|\cdot\|u_1(s)\|\,ds \\
&+ \lambda\int_{t_0}^{t}\|K_2(t,s,y(s))\|\cdot\|u_1(s)-u_2(s)\|\,ds \qquad (3.3.6)
\end{aligned}
$$

olduğu bulunur.

1.2.B koşulundan her $t\in[t_0,\theta]$ ve $s\in[t_0,\theta]$ için

$$\|g(t,x(t))-g(t,y(t))\| \le L_0\,\|x(t)-y(t)\|, \qquad (3.3.7)$$

$$\|K_1(t,s,x(s))-K_1(t,s,y(s))\| \le L_1\,\|x(s)-y(s)\|, \qquad (3.3.8)$$

$$\|K_2(t,s,x(s))-K_2(t,s,y(s))\| \le L_2\,\|x(s)-y(s)\| \qquad (3.3.9)$$

olur.

$L_0\in[0,1)$ olduğundan, (3.3.6), (3.3.7), (3.3.8) ve (3.3.9) 'dan, her $t\in[t_0,\theta]$ için

$$
\begin{aligned}
\|x(t)-y(t)\| &\le \frac{\lambda}{1-L_0}\int_{t_0}^{t}\left(L_1+L_2\|u_1(s)\|\right)\cdot\|x(s)-y(s)\|\,ds \\
&+ \frac{\lambda}{1-L_0}\int_{t_0}^{t}\|K_2(t,s,y(s))\|\cdot\|u_1(s)-u_2(s)\|\,ds \qquad (3.3.10)
\end{aligned}
$$

olarak bulunur.

$y(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}$ olduğundan, Teorem 2.1.2 'den keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için

$$y(t) \in B_n(r_*) \tag{3.3.11}$$

olur. Burada $r_* > 0$ sayısı (2.1.6) ile tanımlıdır.

(2.2.2), (2.2.4) ve (3.3.11) 'den ise keyfi $t \in [t_0, \theta]$, $s \in [t_0, \theta]$ için

$$\|K_2(t, s, y(s))\| \leq M_2 \tag{3.3.12}$$

olur.

$u_1(\cdot) \in U_{p,\mu_0}$ ve $u_2(\cdot) \in U_{p,\mu_0}$ olduğundan, Hölder eşitsizliğinden ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere)

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t} \big\|u_1(s) - u_2(s)\big\| ds \leq \int_{t_0}^{t} \|u_1(s)\| \, ds + \int_{t_0}^{t} \|u_2(s)\| \, ds \\
\leq\ & \left(\int_{t_0}^{t} 1^q ds \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\int_{t_0}^{t} \|u_1(s)\|^p \, ds \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{t_0}^{t} 1^q ds \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\int_{t_0}^{t} \|u_2(s)\|^p \, ds \right)^{\frac{1}{p}} \\
\leq\ & (t - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \mu_0 + (t - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \mu_0 \\
=\ & 2 (t - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \mu_0
\end{aligned} \tag{3.3.13}$$

olduğu elde edilir.

Bu durumda (3.3.10), (3.3.12) ve (3.3.13) 'ten, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned}
\|x(t) - y(t)\| \ &\leq\ \frac{\lambda}{1 - L_0} \int_{t_0}^{t} (L_1 + L_2 \|u_1(s)\|) \cdot \|x(s) - y(s)\| \, ds \\
&+\ \frac{2\lambda M_2 \mu_0}{1 - L_0} (t - t_0)^{\frac{p-1}{p}}
\end{aligned} \tag{3.3.14}$$

olduğu bulunur. (3.3.14) ve Gronwall eşitsizliğinden, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned}
\big\|x(t) \ &-\ y(t)\big\| \leq \frac{2\lambda M_2 \mu_0}{1 - L_0} (t - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\cdot\ \exp\left[\frac{\lambda}{1 - L_0} \int_{t_0}^{t} (L_1 + L_2 \|u_1(s)\|) \, ds \right]
\end{aligned} \tag{3.3.15}$$

olur. Ayrıca $u_1(\cdot) \in U_{p,\mu_0}$ olduğundan, (3.3.1), (3.3.15) ve Hölder eşitsizliğinden, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$
\begin{aligned}
\left\|x(t)\right. &- \left. y(t)\right\| \leq \frac{2\lambda M_2\mu_0}{1-L_0}(t-t_0)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\cdot \ \exp\left[\frac{\lambda}{1-L_0}\left(L_1(t-t_0)+L_2\int_{t_0}^{t}\|u_1(s)\|\,ds\right)\right] \\
&\leq \ \frac{2\lambda M_2\mu_0}{1-L_0}(t-t_0)^{\frac{p-1}{p}}\cdot\exp\left[\frac{\lambda}{1-L_0}\left(L_1(t-t_0)+L_2\mu_0(t-t_0)^{\frac{p-1}{p}}\right)\right] \\
&= \ w_*(t) \qquad (3.3.16)
\end{aligned}
$$

olur.

$x(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}$ ve $y(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}$ keyfi seçildiğinden, $x(t) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}(t)$ ve $y(t) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}(t)$ keyfi seçilmiş olur. O halde (3.3.16) 'dan, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$
\begin{aligned}
diam\,\mathbf{X}_{p,\mu_0}(t) &= \sup\{\|x(t)-y(t)\| : x(t)\in\mathbf{X}_{p,\mu_0}(t),\ y(t)\in\mathbf{X}_{p,\mu_0}(t)\} \\
&\leq w_*(t) \qquad (3.3.17)
\end{aligned}
$$

olur.

(3.3.17) 'den (3.3.2) eşitsizliğinin doğru olduğu elde edilir.

$w_*(\cdot) : [t_0, \theta] \to [0, \infty)$ fonksiyonu monoton artan fonksiyon olduğundan, (3.3.16) 'dan, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$
\|x(t)-y(t)\| \leq w_*(\theta)
$$

ve buradan da

$$
\|x(\cdot)-y(\cdot)\|_C = \max\{\|x(t)-y(t)\| : t\in[t_0,\theta]\} \leq w_*(\theta) \qquad (3.3.18)
$$

olduğu bulunur. $x(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}$ ve $y(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}$ keyfi seçildiğinden, (3.3.18) eşitsizliğinden (3.3.3) 'ün doğruluğu elde edilir. ■

4 YÖRÜNGELER KÜMESİNİN YAKLAŞIK İNŞASI

4.1 Geometrik Kısıt

Bu bölümde, U_{p,μ_0} mümkün kontrol fonksiyonlar kümesinin alt kümesi olan yeni kontrol fonksiyonlar kümesi tanımlayacağız.

$H \in (0, +\infty)$ için

$$U_{p,\mu_0}^H = \{u(\cdot) \in U_{p,\mu_0} : \text{ keyfi } t \in [t_0, \theta] \text{ için } \|u(t)\| \leq H\}$$

olsun. Açıktır ki, $U_{p,\mu_0}^H \subset U_{p,\mu_0}$.

(1.2.1) sisteminin tüm mümkün $u(\cdot) \in U_{p,\mu_0}^H$ kontrol fonksiyonları tarafından üretilen yörüngeler kümesini $\mathbf{X}_{p,\mu_0}^H$ olarak gösterelim. O halde

$$\mathbf{X}_{p,\mu_0}^H = \left\{x(\cdot; u(\cdot)) : u(\cdot) \in U_{p,\mu_0}^H\right\} \tag{4.1.1}$$

olur.

Her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\mathbf{X}_{p,\mu_0}^H(t) = \left\{x(t) \in \mathbb{R}^n : x(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}^H\right\} \tag{4.1.2}$$

olarak gösterelim.

$$L_* = \frac{2\lambda M_2 \mu_0^p}{1 - L_0} \cdot \exp\left[\frac{L(\lambda) - L_0}{1 - L_0}\right] \tag{4.1.3}$$

olsun. Burada $L(\lambda)$ sayısı (1.2.5), M_2 sayısı ise (2.2.4) ile tanımlıdır.

Teorem 4.1.1

$$h_C\left(\mathbf{X}_{p,\mu_0}^H \ , \ \mathbf{X}_{p,\mu_0}\right) \leq \frac{L_*}{H^{p-1}}$$

eşitsizliği doğrudur.

Kanıt. $U_{p,\mu_0}^H \subset U_{p,\mu_0}$ olduğundan

$$\mathbf{X}_{p,\mu_0}^H \subset \mathbf{X}_{p,\mu_0} \tag{4.1.4}$$

olur.

Keyfi $x(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}$ alalım ve sabitleyelim. O halde her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$x(t) = g\left(t, x\left(t\right)\right) + \lambda \int_{t_0}^{t} \left[K_1\left(t, s, x\left(s\right)\right) + K_2\left(t, s, x\left(s\right)\right) u\left(s\right)\right] ds \tag{4.1.5}$$

olacak biçimde $u(\cdot) \in U_{p,\mu_0}$ vardır.

Her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$u_*(t) = \begin{cases} u(t) \ , & \text{eğer } \|u(t)\| \leq H, \\ H\dfrac{u(t)}{\|u(t)\|} \ , & \text{eğer } \|u(t)\| > H \end{cases} \tag{4.1.6}$$

olmak üzere $u_*(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^m$ kontrol fonksiyonunu tanımlayalım.

Açıktır ki, keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için $\|u_*(t)\| \leq H$ olur. Ayrıca $u(\cdot) \in U_{p,\mu_0}$ olduğundan, $\|u(\cdot)\|_p \leq \mu_0$ olur. O halde keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için $\|u_*(t)\| \leq \|u(t)\|$ olduğundan

$$\|u_*(\cdot)\|_p = \left(\int_{t_0}^{\theta} \|u_*(t)\|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{t_0}^{\theta} \|u(t)\|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} = \|u(\cdot)\|_p \leq \mu_0$$

olur. Böylece, $u_*(\cdot) \in U^H_{p,\mu_0}$ olduğu elde edilir.

(1.2.1) sisteminin $u_*(\cdot) \in U^H_{p,\mu_0}$ kontrol fonksiyonu tarafından üretilen yörüngesini $x_*(\cdot)$ olarak gösterirsek, $x_*(\cdot) \in \mathbf{X}^H_{p,\mu_0}$ ve her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned} x_*(t) &= g\left(t, x_*\left(t\right)\right) \\ &+ \lambda \int_{t_0}^{t} \left[K_1\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) + K_2\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) u_*\left(s\right)\right] ds \end{aligned} \tag{4.1.7}$$

olur.

(4.1.5) ve (4.1.7) 'den, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned} \big\|x(t) - x_*(t)\big\| = \Big\| \; & g\left(t, x\left(t\right)\right) \\ + \; & \lambda \int_{t_0}^{t} \left[K_1\left(t, s, x\left(s\right)\right) + K_2\left(t, s, x\left(s\right)\right) u\left(s\right)\right] ds \\ - \; & g\left(t, x_*\left(t\right)\right) - \lambda \int_{t_0}^{t} \left[K_1\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) + K_2\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) u_*\left(s\right)\right] ds \Big\| \\ \leq \; & \left\|g\left(t, x\left(t\right)\right) - g\left(t, x_*\left(t\right)\right)\right\| + \lambda \int_{t_0}^{t} \left\|K_1\left(t, s, x\left(s\right)\right) - K_1\left(t, s, x_*\left(s\right)\right)\right\| ds \\ + \; & \lambda \int_{t_0}^{t} \left\|K_2\left(t, s, x\left(s\right)\right) u(s) - K_2\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) u_*(s)\right\| ds \\ \leq \; & \left\|g\left(t, x\left(t\right)\right) - g\left(t, x_*\left(t\right)\right)\right\| + \lambda \int_{t_0}^{t} \left\|K_1\left(t, s, x\left(s\right)\right) - K_1\left(t, s, x_*\left(s\right)\right)\right\| ds \\ + \; & \lambda \int_{t_0}^{t} \left\|K_2\left(t, s, x\left(s\right)\right) u(s) - K_2\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) u(s)\right\| ds \\ + \; & \lambda \int_{t_0}^{t} \left\|K_2\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) u(s) - K_2\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) u_*(s)\right\| ds \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \|g(t,x(t))-g(t,x_*(t))\|+\lambda\int_{t_0}^{t}\|K_1(t,s,x(s))-K_1(t,s,x_*(s))\|\,ds\\
&+ \lambda\int_{t_0}^{t}\|K_2(t,s,x(s))-K_2(t,s,x_*(s))\|\cdot\|u(s)\|\,ds\\
&+ \lambda\int_{t_0}^{t}\|K_2(t,s,x_*(s))\|\cdot\|u(s)-u_*(s)\|\,ds
\end{aligned}
$$

olduğu elde edilir.

Böylece her $t\in[t_0,\theta]$ için

$$
\begin{aligned}
\|x(t)-x_*(t)\| &\leq \|g(t,x(t))-g(t,x_*(t))\|\\
&+ \lambda\int_{t_0}^{t}\|K_1(t,s,x(s))-K_1(t,s,x_*(s))\|\,ds\\
&+ \lambda\int_{t_0}^{t}\|K_2(t,s,x(s))-K_2(t,s,x_*(s))\|\cdot\|u(s)\|\,ds\\
&+ \lambda\int_{t_0}^{t}\|K_2(t,s,x_*(s))\|\cdot\|u(s)-u_*(s)\|\,ds \qquad (4.1.8)
\end{aligned}
$$

olur.

1.2.B koşulundan her $t\in[t_0,\theta]$ ve $s\in[t_0,\theta]$ için

$$\|g(t,x(t))-g(t,x_*(t))\|\leq L_0\|x(t)-x_*(t)\|, \qquad (4.1.9)$$

$$\|K_1(t,s,x(s))-K_1(t,s,x_*(s))\|\leq L_1\|x(s)-x_*(s)\|, \qquad (4.1.10)$$

$$\|K_2(t,s,x(s))-K_2(t,s,x_*(s))\|\leq L_2\|x(s)-x_*(s)\| \qquad (4.1.11)$$

olduğu bulunur.

$x_*(\cdot)\in\mathbf{X}^H_{p,\mu_0}\subset\mathbf{X}_{p,\mu_0}$ olduğundan, (2.2.4) 'ten keyfi $(t,s)\in[t_0,\theta]\times[t_0,\theta]$ için

$$\|K_2(t,s,x_*(s))\|\leq M_2 \qquad (4.1.12)$$

olur. Böylece (4.1.8), (4.1.9), (4.1.10) (4.1.11) ve (4.1.12) 'den her $t\in[t_0,\theta]$ için

$$
\begin{aligned}
\big\|x(t) &- x_*(t)\big\|\leq L_0\|x(t)-x_*(t)\|+\lambda L_1\int_{t_0}^{t}\|x(s)-x_*(s)\|\,ds\\
&+ \lambda L_2\int_{t_0}^{t}\|x(s)-x_*(s)\|\cdot\|u(s)\|\,ds+\lambda M_2\int_{t_0}^{t}\|u(s)-u_*(s)\|\,ds\\
&= L_0\|x(t)-x_*(t)\|+\lambda\int_{t_0}^{t}[L_1+L_2\|u(s)\|]\,\|x(s)-x_*(s)\|\,ds\\
&+ \lambda M_2\int_{t_0}^{t}\|u(s)-u_*(s)\|\,ds
\end{aligned}
$$

ve $L_0 \in [0,1)$ olduğundan son eşitsizlikten

$$\begin{aligned} \|x(t)-x_*(t)\| &\leq \frac{\lambda}{1-L_0}\int_{t_0}^{t}\left[L_1+L_2\|u(s)\|\right]\|x(s)-x_*(s)\|\,ds \\ &+ \frac{\lambda M_2}{1-L_0}\int_{t_0}^{t}\|u(s)-u_*(s)\|\,ds \end{aligned} \tag{4.1.13}$$

olduğu bulunur.

$$\Omega_t = \{s \in [t_0,t] : \|u(s)\| > H\}$$

olsun. O halde $[t_0,t]\backslash\Omega_t = \{s \in [t_0,t] : \|u(s)\| \leq H\}$ ve $u_*(\cdot)$ kontrol fonksiyonunun tanımından, yani (4.1.6) 'dan, keyfi $s \in [t_0,t]\backslash\Omega_t$ için $\|u(s)-u_*(s)\| = 0$ olur. Bu durumda (4.1.13) 'ten, her $t \in [t_0,\theta]$ için

$$\begin{aligned} \|x(t)-x_*(t)\| &\leq \frac{\lambda}{1-L_0}\int_{t_0}^{t}\left[L_1+L_2\|u(s)\|\right]\|x(s)-x_*(s)\|\,ds \\ &+ \frac{\lambda M_2}{1-L_0}\int_{\Omega_t}\|u(s)-u_*(s)\|\,ds \end{aligned} \tag{4.1.14}$$

olur.

$u(\cdot) \in U_{p,\mu_0}$ olduğundan, açıktır ki

$$\mu_0^p \geq \int_{t_0}^{t}\|u(s)\|^p ds \geq \int_{\Omega_t}\|u(s)\|^p ds \geq \int_{\Omega_t} H^p ds = H^p\mu(\Omega_t)$$

olur. Burada $\mu(\Omega_t)$, Ω_t kümesinin Lebesgue ölçümünü göstermektedir.

Son eşitsizlikten

$$\mu(\Omega_t) \leq \frac{\mu_0^p}{H^p} \tag{4.1.15}$$

olduğu bulunur. $u(\cdot) \in U_{p,\mu_0}$, $u_*(\cdot) \in U_{p,\mu_0}^H \subset U_{p,\mu_0}$ olduğundan

$$\left(\int_{t_0}^{\theta}\|u(s)\|^p\,ds\right)^{\frac{1}{p}} \leq \mu_0\ ,\quad \left(\int_{t_0}^{\theta}\|u_*(s)\|^p\,ds\right)^{\frac{1}{p}} \leq \mu_0 \tag{4.1.16}$$

olur. Bu durumda (4.1.15), (4.1.16) ve Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t}\|u(s) &- u_*(s)\|ds \leq \int_{\Omega_t}\|u(s)\|ds + \int_{\Omega_t}\|u_*(s)\|ds \\ &\leq (\mu(\Omega_t))^{\frac{p-1}{p}}\left[\left(\int_{\Omega_t}\|u(s)\|^p ds\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\Omega_t}\|u_*(s)\|^p ds\right)^{\frac{1}{p}}\right] \\ &\leq (\mu(\Omega_t))^{\frac{p-1}{p}}\left[\left(\int_{t_0}^{\theta}\|u(s)\|^p ds\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{t_0}^{\theta}\|u_*(s)\|^p ds\right)^{\frac{1}{p}}\right] \\ &\leq \left(\frac{\mu_0^p}{H^p}\right)^{\frac{p-1}{p}}[\mu_0+\mu_0] = \frac{2\mu_0^p}{H^{p-1}} \end{aligned} \tag{4.1.17}$$

olduğu elde edilir.

(4.1.14) ve (4.1.17) 'den, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned} \|x(t) - x_*(t)\| &\leq \frac{\lambda}{1-L_0}\int_{t_0}^{t}[L_1 + L_2\|u(s)\|]\,\|x(s) - x_*(s)\|\,ds \\ &+ \frac{2\lambda M_2 \mu_0^p}{(1-L_0)H^{p-1}} \end{aligned} \tag{4.1.18}$$

olduğu bulunur.

(4.1.18) ve Gronwall eşitsizliğinden her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned} \big\|x(t) - x_*(t)\big\| &\leq \frac{2\lambda M_2 \mu_0^p}{(1-L_0)H^{p-1}} \cdot \exp\left[\frac{\lambda}{1-L_0}\int_{t_0}^{t}(L_1 + L_2\|u(s)\|)\,ds\right] \\ &\leq \frac{2\lambda M_2 \mu_0^p}{(1-L_0)H^{p-1}} \cdot \exp\left[\frac{\lambda}{1-L_0}\left(L_1(\theta - t_0) + L_2\int_{t_0}^{\theta}\|u(s)\|\,ds\right)\right] \end{aligned} \tag{4.1.19}$$

olduğu bulunur.

$u(\cdot) \in U_{p,\mu_0}$ olduğundan, Hölder eşitsizliği gereği

$$\int_{t_0}^{\theta}\|u(s)\|\,ds \leq (\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_{t_0}^{\theta}\|u(s)\|^p\,ds\right)^{\frac{1}{p}} \leq (\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}}\mu_0$$

olur. O zaman (4.1.19) 'dan, keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned} \big\|x(t) - x_*(t)\big\| &\leq \frac{2\lambda M_2 \mu_0^p}{(1-L_0)H^{p-1}} \\ &\cdot \exp\left[\frac{\lambda}{1-L_0}\left(L_1(\theta - t_0) + L_2(\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}}\mu_0\right)\right] \end{aligned} \tag{4.1.20}$$

olduğu bulunur.

Son olarak (1.2.5), (4.1.3) ve (4.1.20) 'den, keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned} \|x(t) - x_*(t)\| &\leq \frac{2\lambda M_2 \mu_0^p}{(1-L_0)H^{p-1}} \cdot \exp\left[\frac{\lambda L_1(\theta - t_0) + \lambda L_2(\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}}\mu_0}{1-L_0}\right] \\ &= \frac{2\lambda M_2 \mu_0^p}{(1-L_0)H^{p-1}} \cdot \exp\left[\frac{L(\lambda) - L_0}{1-L_0}\right] = \frac{L_*}{H^{p-1}} \end{aligned}$$

olarak bulunur. O halde

$$\|x(\cdot) - x_*(\cdot)\|_C \leq \frac{L_*}{H^{p-1}} \tag{4.1.21}$$

olur. Böylece keyfi seçilmiş $x(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}$ için (4.1.21) eşitsizliğini sağlayacak biçimde $x_*(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}^H$ olduğunu kanıtlamış olduk. Bu ise

$$\mathbf{X}_{p,\mu_0} \subset \mathbf{X}_{p,\mu_0}^H + \frac{L_*}{H^{p-1}} \cdot B_C(1) \tag{4.1.22}$$

olması demektir.

(4.1.4) ve (4.1.22) 'den teoremin kanıtı elde edilir. ■

Teorem 4.1.1 'den sonuç olarak aşağıdaki önermeler elde edilir.

Önerme 4.1.2 *Keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için*

$$h_n\left(\mathbf{X}^H_{p,\mu_0}(t)\ ,\ \mathbf{X}_{p,\mu_0}(t)\right) \leq \frac{L_*}{H^{p-1}}$$

eşitsizliği doğrudur.

Burada $\mathbf{X}_{p,\mu_0}(t)$ ve $\mathbf{X}^H_{p,\mu_0}(t)$ kümeleri uygun olarak (1.2.7) ve (4.1.2) ile tanımlıdır.

Önerme 4.1.3 *$H \to +\infty$ iken*

$$h_C\left(\mathbf{X}^H_{p,\mu_0}\ ,\ \mathbf{X}_{p,\mu_0}\right) \to 0$$

olur.

Önerme 4.1.4 *$H \to +\infty$ iken $[t_0, \theta]$ aralığında düzgün olarak*

$$h_n\left(\mathbf{X}^H_{p,\mu_0}(t)\ ,\ \mathbf{X}_{p,\mu_0}(t)\right) \to 0$$

olur.

4.2 Parçalı Sabit Kontrol Fonksiyonlar

Bu bölümde U^H_{p,μ_0} kontrol fonksiyonlar kümesinde bulunan, ama parçalı sabit olan yeni kontrol fonksiyonlar tanımlayacağız.

$\Gamma = \{t_0 < t_1 < \ldots < t_N = \theta\}$ $[t_0, \theta]$ aralığının bir düzgün bölüntüsü,

$$t_{i+1} - t_i = \frac{\theta - t_0}{N} = \Delta, \quad i = 0, 1, \ldots, N-1$$

olsun.

Yeni kontrol fonksiyonlar kümesi tanımlayalım.

$$U^{H,\Gamma}_{p,\mu_0} = \{u(\cdot) \in U^H_{p,\mu_0} : u(t) = u_i,\ \forall\ t \in [t_i, t_{i+1}),\ i = 0, 1, \ldots, N-1\}$$

olsun. Açıktır ki

$$U^{H,\Gamma}_{p,\mu_0} \subset U^H_{p,\mu_0}$$

olur.

(1.2.1) sisteminin tüm mümkün $u(\cdot) \in U^{H,\Gamma}_{p,\mu_0}$ kontrol fonksiyonları tarafından üretilen yörüngeler kümesini $\mathbf{X}^{H,\Gamma}_{p,\mu_0}$ olarak gösterelim. O halde

$$\mathbf{X}^{H,\Gamma}_{p,\mu_0} = \left\{x(\cdot; u(\cdot)) : u(\cdot) \in U^{H,\Gamma}_{p,\mu_0}\right\} \tag{4.2.1}$$

olur. Ayrıca $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,\Gamma}(t) = \left\{x(t) \in \mathbb{R}^n : x(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,\Gamma}\right\} \tag{4.2.2}$$

olarak gösterelim.

Keyfi $u(\cdot) \in U_{p,\mu_0}^{H,\Gamma}$ alalım. O halde $\|u(\cdot)\|_p \leq \mu_0$, her $t \in [t_0, \theta]$ için $\|u(t)\| \leq H$ ve $t \in [t_i, t_{i+1})$ $(i = 0, 1, \ldots, N-1)$ iken $u(t) = u_i$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned} \|u(\cdot)\|_p &= \left(\int_{t_0}^{\theta} \|u(t)\|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|u(t)\|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|u_i\|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=0}^{N-1} \Delta \|u_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \Delta^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=0}^{N-1} \|u_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

olur. $\|u(\cdot)\|_p \leq \mu_0$ olduğundan (4.2.3) 'ten

$$\Delta^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=0}^{N-1} \|u_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \mu_0$$

ve son olarak

$$\Delta \cdot \sum_{i=0}^{N-1} \|u_i\|^p \leq \mu_0^p \tag{4.2.4}$$

olduğu elde edilir. Böylece (4.2.4) 'ten her $u(\cdot) \in U_{p,\mu_0}^{H,\Gamma}$ kontrol fonksiyonu için (1.2.2) ile verilen integral kısıtlaması, (4.2.4) biçimindeki cebirsel kısıtlama olur. Ayrıca $u(\cdot) \in U_{p,\mu_0}^{H,\Gamma}$ için $t \in [t_0, \theta]$ iken $\|u(t)\| \leq H$ olduğundan

$$\text{her } i = 0, 1, \ldots, N-1 \text{ için } \|u_i\| \leq H \tag{4.2.5}$$

eşitsizliği de sağlanır. Böylece $U_{p,\mu_0}^{H,\Gamma}$ kümesi, (4.2.4) ve (4.2.5) eşitsizliklerini sağlayan parçalı sabit kontrol fonksiyonlarından oluşur.

$\Delta > 0$ için

$$\zeta(\Delta) = 2\omega_2\left(\varphi\left(\Delta\right)\right)\mu_0\left(\theta - t_0\right)^{\frac{p-1}{p}} + 2\mu_0 M_2 \Delta^{\frac{p-1}{p}}, \tag{4.2.6}$$

$$\chi(\Delta) = \zeta(\Delta)\frac{\lambda}{1 - L_0} \cdot \exp\left[\frac{L(\lambda) - L_0}{1 - L_0}\right] \tag{4.2.7}$$

olarak gösterelim. Burada $L(\lambda)$ sayısı (1.2.5), M_2 sayısı (2.2.4), $\omega_2(\cdot)$ (2.2.7) ile, $\varphi(\cdot)$ ise (2.2.8) ile tanımlıdır.

$\Delta \to 0^+$ iken $\varphi(\Delta) \to 0$ olduğundan, (4.2.6) ve (4.2.7) 'den $\Delta \to 0^+$ iken $\zeta(\Delta) \to 0$ ve $\chi(\Delta) \to 0$ olduğu bulunur.

Teorem 4.2.1

$$h_C\left(\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H}\ ,\ \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,\Gamma}\right) \leq \chi(\Delta)$$

eşitsizliği doğrudur.

Kanıt. $U_{p,\mu_0}^{H,\Gamma} \subset U_{p,\mu_0}^{H}$ olduğundan

$$\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,\Gamma} \subset \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H} \tag{4.2.8}$$

olur.

Keyfi $x(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H}$ alalım ve sabitleyelim. O halde her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$x(t) = g\left(t, x\left(t\right)\right) + \lambda \int_{t_0}^{t} \left[K_1\left(t, s, x\left(s\right)\right) + K_2\left(t, s, x\left(s\right)\right) u\left(s\right)\right] ds \tag{4.2.9}$$

olacak biçimde $u(\cdot) \in U_{p,\mu_0}^{H}$ vardır.

$u(\cdot) \in U_{p,\mu_0}^{H}$ kontrol fonksiyonunu kullanarak, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$u_*(t) = \frac{1}{\Delta} \int_{t_i}^{t_{i+1}} u(\tau) d\tau, \quad t \in [t_i, t_{i+1}), \quad i = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{4.2.10}$$

olmak üzere yeni $u_*(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^m$ kontrol fonksiyonunu tanımlayalım.

Açıktır ki, (4.2.10) ile tanımlı $u_*(\cdot)$ fonksiyonu her $[t_i, t_{i+1})$ $(i = 0, 1, \ldots, N-1)$ aralığında sabit fonksiyondur.

$u(\cdot) \in U_{p,\mu_0}^{H}$ olduğundan her $t \in [t_0, \theta]$ için $\|u(t)\| \leq H$ olur. O halde her $t \in [t_i, t_{i+1})$ $(i = 0, 1, \ldots, N-1)$ için

$$\|u_*(t)\| \leq \frac{1}{\Delta} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|u(\tau)\| \, d\tau \leq \frac{1}{\Delta} \cdot \Delta H = H \tag{4.2.11}$$

olur. Böylece (4.2.11) 'den her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\|u_*(t)\| \leq H \tag{4.2.12}$$

olduğu elde edilir.

(4.2.10) ve Hölder eşitsizliğinden, keyfi $t \in [t_i, t_{i+1})$ $(i = 0, 1, \ldots, N-1)$ için

$$\begin{aligned} \|u_*(t)\| &\leq \frac{1}{\Delta} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|u(\tau)\| \, d\tau \leq \frac{1}{\Delta} \Delta^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \|u(\tau)\|^p \, d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \frac{1}{\Delta^{\frac{1}{p}}} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \|u(\tau)\|^p \, d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned} \tag{4.2.13}$$

olduğu bulunur. (4.2.13) eşitsizliğinden, keyfi $t \in [t_i, t_{i+1})$ $(i = 0, 1, \ldots, N-1)$ için

$$\Delta \|u_*(t)\|^p \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|u(\tau)\|^p \, d\tau \tag{4.2.14}$$

olduğu bulunur.

$[t_i, t_{i+1})$ aralığında $u_*(\cdot)$ fonksiyonu sabit olduğundan, keyfi $t \in [t_i, t_{i+1})$ $(i = 0, 1, \ldots, N-1)$ için

$$\Delta \left\| u_*(t) \right\|^p = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\| u_*(\tau) \right\|^p d\tau \tag{4.2.15}$$

olur.

(4.2.14) ve (4.2.15) 'ten keyfi $i = 0, 1, \ldots, N-1$ için

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\| u_*(\tau) \right\|^p d\tau \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\| u(\tau) \right\|^p d\tau \tag{4.2.16}$$

olduğu elde edilir.

$u(\cdot) \in U_{p,\mu_0}^H$ olduğundan

$$\int_{t_0}^{\theta} \left\| u(\tau) \right\|^p d\tau \leq \mu_0^p$$

olur. O halde (4.2.16) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{\theta} \left\| u_*(\tau) \right\|^p d\tau &= \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\| u_*(\tau) \right\|^p d\tau \\ \leq \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\| u(\tau) \right\|^p d\tau &= \int_{t_0}^{\theta} \left\| u(\tau) \right\|^p d\tau \leq \mu_0^p \end{aligned} \tag{4.2.17}$$

olarak elde edilir.

Son olarak (4.2.17) eşitsizliğinden

$$\left\| u_*(\cdot) \right\|_p = \left(\int_{t_0}^{\theta} \left\| u_*(\tau) \right\|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \leq \mu_0 \tag{4.2.18}$$

olur.

$[t_i, t_{i+1})$ $(i = 0, 1, \ldots, N-1)$ aralığında $u_*(\cdot)$ fonksiyonu sabit olduğundan, (4.2.12) ve (4.2.18) 'den $u_*(\cdot) \in U_{p,\mu_0}^{H,\Gamma}$ olduğu elde edilir.

(1.2.1) sisteminin (4.2.10) ile tanımlı $u_*(\cdot) \in U_{p,\mu_0}^{H,\Gamma}$ kontrol fonksiyonu tarafından üretilen yörüngesini $x_*(\cdot)$ olarak gösterirsek, $x_*(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,\Gamma}$ ve her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$x_*(t) = g\left(t, x_*\left(t\right)\right) + \lambda \int_{t_0}^{t} \left[K_1\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) + K_2\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) u_*\left(s\right)\right] ds \tag{4.2.19}$$

olur.

(4.2.9) ve (4.2.19) 'dan, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$
\begin{aligned}
&\left\| x(t) - x_*(t) \right\| = \Bigg\| \, g\left(t, x\left(t\right)\right) \\
+ \;& \lambda \int_{t_0}^{t} \left[K_1\left(t, s, x\left(s\right)\right) + K_2\left(t, s, x\left(s\right)\right) u\left(s\right)\right] ds \\
- \;& g\left(t, x_*\left(t\right)\right) - \lambda \int_{t_0}^{t} \left[K_1\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) + K_2\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) u_*\left(s\right)\right] ds \Bigg\| \\
\leq \;& \left\| g\left(t, x\left(t\right)\right) - g\left(t, x_*\left(t\right)\right) \right\| + \lambda \int_{t_0}^{t} \left\| K_1\left(t, s, x\left(s\right)\right) - K_1\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) \right\| ds \\
+ \;& \lambda \left\| \int_{t_0}^{t} \left[K_2\left(t, s, x\left(s\right)\right) u(s) - K_2\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) u_*(s)\right] ds \right\| \\
\leq \;& \left\| g\left(t, x\left(t\right)\right) - g\left(t, x_*\left(t\right)\right) \right\| + \lambda \int_{t_0}^{t} \left\| K_1\left(t, s, x\left(s\right)\right) - K_1\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) \right\| ds \\
+ \;& \lambda \left\| \int_{t_0}^{t} \left[K_2\left(t, s, x\left(s\right)\right) u(s) - K_2\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) u(s)\right] ds \right\| \\
+ \;& \lambda \left\| \int_{t_0}^{t} \left[K_2\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) u(s) - K_2\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) u_*(s)\right] ds \right\| \\
\leq \;& \left\| g\left(t, x\left(t\right)\right) - g\left(t, x_*\left(t\right)\right) \right\| + \lambda \int_{t_0}^{t} \left\| K_1\left(t, s, x\left(s\right)\right) - K_1\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) \right\| ds \\
+ \;& \lambda \int_{t_0}^{t} \left\| K_2\left(t, s, x\left(s\right)\right) - K_2\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) \right\| \cdot \left\| u(s) \right\| ds \\
+ \;& \lambda \left\| \int_{t_0}^{t} K_2\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) \cdot \left[u(s) - u_*(s)\right] ds \right\|
\end{aligned}
$$

olduğu elde edilir.

Böylece her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$
\begin{aligned}
\left\| x(t) - x_*(t) \right\| \;\leq\; & \left\| g\left(t, x\left(t\right)\right) - g\left(t, x_*\left(t\right)\right) \right\| \\
+ \;& \lambda \int_{t_0}^{t} \left\| K_1\left(t, s, x\left(s\right)\right) - K_1\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) \right\| ds \\
+ \;& \lambda \int_{t_0}^{t} \left\| K_2\left(t, s, x\left(s\right)\right) - K_2\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) \right\| \cdot \left\| u(s) \right\| ds \\
+ \;& \lambda \left\| \int_{t_0}^{t} K_2\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) \cdot \left[u(s) - u_*(s)\right] ds \right\| \qquad (4.2.20)
\end{aligned}
$$

olur.

1.2.B koşulundan her $t \in [t_0, \theta]$ ve $s \in [t_0, \theta]$ için

$$\left\| g\left(t, x\left(t\right)\right) - g\left(t, x_*\left(t\right)\right) \right\| \leq L_0 \left\| x\left(t\right) - x_*\left(t\right) \right\|, \qquad (4.2.21)$$

$$\left\| K_1\left(t, s, x\left(s\right)\right) - K_1\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) \right\| \leq L_1 \left\| x\left(s\right) - x_*\left(s\right) \right\|, \qquad (4.2.22)$$

$$\left\| K_2\left(t, s, x\left(s\right)\right) - K_2\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) \right\| \leq L_2 \left\| x\left(s\right) - x_*\left(s\right) \right\| \qquad (4.2.23)$$

olduğu bulunur.

(4.2.20), (4.2.21), (4.2.22) ve (4.2.23) 'ten her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned}
\left\|x(t)\right. &- \left.x_*(t)\right\| \leq L_0 \left\|x(t) - x_*(t)\right\| + \lambda L_1 \int_{t_0}^{t} \left\|x(s) - x_*(s)\right\| ds \\
&+ \lambda L_2 \int_{t_0}^{t} \left\|x(s) - x_*(s)\right\| \cdot \left\|u(s)\right\| ds \\
&+ \lambda \left\| \int_{t_0}^{t} K_2(t, s, x_*(s)) \cdot [u(s) - u_*(s)] \, ds \right\| \\
&= L_0 \left\|x(t) - x_*(t)\right\| + \lambda \int_{t_0}^{t} \left[L_1 + L_2 \left\|u(s)\right\|\right] \left\|x(s) - x_*(s)\right\| ds \\
&+ \lambda \left\| \int_{t_0}^{t} K_2(t, s, x_*(s)) \cdot [u(s) - u_*(s)] \, ds \right\|
\end{aligned}$$

ve $L_0 \in [0, 1)$ olduğundan son eşitsizlikten

$$\begin{aligned}
\left\|x(t) - x_*(t)\right\| &\leq \frac{\lambda}{1 - L_0} \int_{t_0}^{t} \left[L_1 + L_2 \left\|u(s)\right\|\right] \left\|x(s) - x_*(s)\right\| ds \\
+ \quad \frac{\lambda}{1 - L_0} &\left\| \int_{t_0}^{t} K_2(t, s, x_*(s)) \cdot [u(s) - u_*(s)] \, ds \right\| \qquad (4.2.24)
\end{aligned}$$

olduğu bulunur.

$t \in [t_0, \theta]$, $\Gamma = \{t_0 < t_1 < \ldots < t_N = \theta\}$ $[t_0, \theta]$ aralığının bir düzgün bölüntüsü olduğundan, $t \in [t_k, t_{k+1})$ olacak biçimde bir $[t_k, t_{k+1})$ aralığı vardır (eğer $t = \theta$ ise, $t \in [t_{N-1}, t_N]$ olur). O halde

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^{t} K_2(t, s, x_*(s)) \cdot [u(s) - u_*(s)] \, ds \\
= & \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} K_2(t, s, x_*(s)) \cdot [u(s) - u_*(s)] \, ds \\
+ & \int_{t_k}^{t} K_2(t, s, x_*(s)) \cdot [u(s) - u_*(s)] \, ds \qquad (4.2.25)
\end{aligned}$$

olur.

(4.2.25) 'ten

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_{t_0}^{t} K_2(t, s, x_*(s)) \cdot [u(s) - u_*(s)] \, ds \right\| \\
\leq & \sum_{i=0}^{k-1} \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} K_2(t, s, x_*(s)) \cdot [u(s) - u_*(s)] \, ds \right\| \\
+ & \left\| \int_{t_k}^{t} K_2(t, s, x_*(s)) \cdot [u(s) - u_*(s)] \, ds \right\| \qquad (4.2.26)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Keyfi $i = 0, 1, \ldots, k-1$ alalım ve sabitleyelim. Açıktır ki

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} K_2\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) \cdot \left[u(s) - u_*(s)\right] ds \right\| \\
\leq &\left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[K_2\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) - K_2\left(t, t_i, x_*\left(t_i\right)\right)\right] \cdot \left[u(s) - u_*(s)\right] ds \right\| \\
+ &\left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} K_2\left(t, t_i, x_*\left(t_i\right)\right) \cdot \left[u(s) - u_*(s)\right] ds \right\|. \qquad (4.2.27)
\end{aligned}$$

(4.2.10) 'dan keyfi $\eta \in [t_i, t_{i+1})$ için

$$\Delta \cdot u_*(\eta) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} u(\tau) d\tau \qquad (4.2.28)$$

olur. $[t_i, t_{i+1})$ aralığında $u_*(\cdot)$ kontrol fonksiyonu sabit olduğundan, (4.2.28) 'den

$$\Delta \cdot u_*(\eta) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} u_*(\tau) d\tau = \int_{t_i}^{t_{i+1}} u(\tau) d\tau, \quad \eta \in [t_i, t_{i+1})$$

ve son eşitlikten

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[u(\tau) - u_*(\tau)\right] d\tau = 0 \qquad (4.2.29)$$

olduğu elde edilir. Bu durumda, (4.2.29) 'dan

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} K_2\left(t, t_i, x_*\left(t_i\right)\right) \left[u(s) - u_*(s)\right] ds \right\| \\
= &\left\| K_2\left(t, t_i, x_*\left(t_i\right)\right) \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[u(s) - u_*(s)\right] ds \right\| = 0 \qquad (4.2.30)
\end{aligned}$$

olarak bulunur. (4.2.27) ve (4.2.30) 'dan

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} K_2\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) \cdot \left[u(s) - u_*(s)\right] ds \right\| \\
\leq &\left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[K_2\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) - K_2\left(t, t_i, x_*\left(t_i\right)\right)\right] \cdot \left[u(s) - u_*(s)\right] ds \right\| \\
\leq &\int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\| K_2\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) - K_2\left(t, t_i, x_*\left(t_i\right)\right) \right\| \cdot \left\| u(s) - u_*(s) \right\| ds \qquad (4.2.31)
\end{aligned}$$

olur. $x_*(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,\Gamma} \subset \mathbf{X}_{p,\mu_0}$, $s \in [t_i, t_{i+1}]$, $t_{i+1} - t_i = \Delta$ olduğundan, Önerme 2.2.1 gereği, keyfi $s \in [t_i, t_{i+1}]$ için

$$\left\| x_*\left(s\right) - x_*\left(t_i\right) \right\| \leq \varphi(\Delta) \qquad (4.2.32)$$

olur. Burada $\varphi(\cdot)$ (2.2.8) ile tanımlıdır. (2.2.7), (2.2.9) ve (4.2.32) 'den, keyf $s \in [t_i, t_{i+1}]$ için

$$\left\| K_2\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) - K_2\left(t, t_i, x_*\left(t_i\right)\right) \right\| \leq \omega_2\left(\varphi\left(\Delta\right)\right) \tag{4.2.33}$$

olduğu elde edilir.

(4.2.31) ve (4.2.33) 'ten

$$\begin{aligned} &\left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} K_2\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) \cdot \left[u(s) - u_*(s)\right] ds \right\| \\ &\qquad \leq \omega_2\left(\varphi\left(\Delta\right)\right) \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\| u(s) - u_*(s) \right\| ds \end{aligned} \tag{4.2.34}$$

olduğu bulunur.

(4.2.34) 'ten

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{k-1} \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} K_2\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) \left[u(s) - u_*(s)\right] ds \right\| \\ \leq & \sum_{i=0}^{k-1} \omega_2\left(\varphi\left(\Delta\right)\right) \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\| u(s) - u_*(s) \right\| ds \\ = & \ \omega_2\left(\varphi\left(\Delta\right)\right) \int_{t_0}^{t_k} \left\| u(s) - u_*(s) \right\| ds \end{aligned} \tag{4.2.35}$$

eşitsizliği elde edilir.

$u(\cdot) \in U_{p,\mu_0}^{H} \subset U_{p,\mu_0}$, $u_*(\cdot) \in U_{p,\mu_0}^{H,\Gamma} \subset U_{p,\mu_0}$ olduğundan,

$$\int_{t_0}^{\theta} \left\| u(\tau) \right\|^p d\tau \leq \mu_0^p \ , \quad \int_{t_0}^{\theta} \left\| u_*(\tau) \right\|^p d\tau \leq \mu_0^p \tag{4.2.36}$$

olur. O halde Hölder ve Minkowski eşitsizliklerini kullanırsak,

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_k} \big\| u(s) \ &- \ u_*(s) \big\| ds \leq \int_{t_0}^{\theta} \left\| u(s) - u_*(s) \right\| ds \\ &\leq \ (\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{t_0}^{\theta} \left\| u(s) - u_*(s) \right\|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \ (\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \left[\left(\int_{t_0}^{\theta} \left\| u(s) \right\|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{t_0}^{\theta} \left\| u_*(s) \right\|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \right] \\ &\leq \ 2\left(\theta - t_0\right)^{\frac{p-1}{p}} \mu_0 \end{aligned} \tag{4.2.37}$$

olur.

(4.2.35) ve (4.2.37) 'den

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{k-1} \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} K_2\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) \left[u(s) - u_*(s)\right] ds \right\| \\ &\qquad \leq 2\omega_2\left(\varphi\left(\Delta\right)\right) \mu_0 \left(\theta - t_0\right)^{\frac{p-1}{p}} \end{aligned} \tag{4.2.38}$$

eşitsizliği elde edilir.

$t \in [t_k, t_{k+1})$ olduğundan, (2.2.4), (4.2.36), Hölder ve Minkowski eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_{t_k}^{t} K_2\left(t, s, x_*(s)\right)\big[u(s) - u_*(s)\big] ds \right\| \\
\leq\ & \int_{t_k}^{t} \left\| K_2\left(t, s, x_*(s)\right)\right\| \cdot \left\| u(s) - u_*(s)\right\| ds \\
\leq\ & \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left\| K_2\left(t, s, x_*(s)\right)\right\| \cdot \left\| u(s) - u_*(s)\right\| ds \\
\leq\ & M_2 \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left\| u(s) - u_*(s)\right\| ds \\
\leq\ & M_2 \left(t_{k+1} - t_k\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} \left\| u(s) - u_*(s)\right\|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \\
\leq\ & M_2 \Delta^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{t_0}^{\theta} \left\| u(s) - u_*(s)\right\|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \\
\leq\ & M_2 \Delta^{\frac{p-1}{p}} \left[\left(\int_{t_0}^{\theta} \left\| u(s)\right\|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{t_0}^{\theta} \left\| u_*(s)\right\|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \right] \\
\leq\ & 2\mu_0 M_2 \Delta^{\frac{p-1}{p}} \qquad (4.2.39)
\end{aligned}$$

olduğu bulunur.

(4.2.6), (4.2.26), (4.2.38) ve (4.2.39) 'dan

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{t_0}^{t} K_2\left(t, s, x_*(s)\right)\left[u(s) - u_*(s)\right] ds \right\| \ \leq\ & 2\omega_2\left(\varphi\left(\Delta\right)\right) \mu_0 \left(\theta - t_0\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
+\ & 2\mu_0 M_2 \Delta^{\frac{p-1}{p}} = \zeta(\Delta) \qquad (4.2.40)
\end{aligned}$$

olduğu elde edilir.

(4.2.24) ve (4.2.40) 'tan

$$\begin{aligned}
\left\| x(t) - x_*(t)\right\| \ \leq\ & \frac{\lambda}{1 - L_0} \int_{t_0}^{t} \left[L_1 + L_2 \left\| u(s)\right\|\right] \left\| x\left(s\right) - x_*\left(s\right)\right\| ds \\
+\ & \frac{\lambda}{1 - L_0}\, \zeta(\Delta) \qquad (4.2.41)
\end{aligned}$$

olur. $t \in [t_0, \theta]$ keyfi seçildiğinden, (4.2.41) ve Gronwall eşitsizliğinden, keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned}
&\big\| x(t) - x_*(t)\big\| \leq \zeta(\Delta)\frac{\lambda}{1 - L_0} \cdot \exp\left[\frac{\lambda}{1 - L_0} \int_{t_0}^{t} \left(L_1 + L_2 \left\| u\left(s\right)\right\|\right) ds\right] \\
\leq\ & \zeta(\Delta)\frac{\lambda}{1 - L_0} \cdot \exp\left[\frac{\lambda}{1 - L_0} \left(L_1\left(\theta - t_0\right) + L_2 \int_{t_0}^{\theta} \left\| u\left(s\right)\right\| ds\right)\right] \qquad (4.2.42)
\end{aligned}$$

olduğu bulunur.

$u(\cdot) \in U^H_{p,\mu_0} \subset U_{p,\mu_0}$ olduğundan, Hölder eşitsizliği gereği

$$\int_{t_0}^{\theta} \|u(s)\|\, ds \le (\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{t_0}^{\theta} \|u(s)\|^p\, ds \right)^{\frac{1}{p}} \le (\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \mu_0$$

olur. O zaman (1.2.5) ve (4.2.42) 'den, keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned} \|x(t) - x_*(t)\| &\le \zeta(\Delta)\frac{\lambda}{1-L_0} \cdot \exp\left[\frac{\lambda}{1-L_0}\left(L_1(\theta - t_0) + L_2(\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}}\mu_0\right)\right] \\ &= \zeta(\Delta)\frac{\lambda}{1-L_0} \cdot \exp\left[\frac{L(\lambda) - L_0}{1-L_0}\right] \qquad (4.2.43) \end{aligned}$$

olduğu bulunur.

Son olarak (4.2.7) ve (4.2.43) 'ten, keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\|x(t) - x_*(t)\| \le \chi(\Delta)$$

olur. O halde

$$\|x(\cdot) - x_*(\cdot)\|_C \le \chi(\Delta) \qquad (4.2.44)$$

olur. Böylece keyfi seçilmiş $x(\cdot) \in \mathbf{X}^H_{p,\mu_0}$ için (4.2.44) eşitsizliğini sağlayacak biçimde $x_*(\cdot) \in \mathbf{X}^{H,\Gamma}_{p,\mu_0}$ olduğunu kanıtlamış olduk. Bu ise

$$\mathbf{X}^H_{p,\mu_0} \subset \mathbf{X}^{H,\Gamma}_{p,\mu_0} + \chi(\Delta) B_C(1) \qquad (4.2.45)$$

olması demektir.

(4.2.8) ve (4.2.45) 'ten teoremin kanıtı elde edilir. ■

Teorem 4.2.1 'den sonuç olarak aşağıdaki önermeler elde edilir.

Önerme 4.2.2 $\Delta \to 0^+$ *iken*

$$h_C\left(\mathbf{X}^H_{p,\mu_0}\ ,\ \mathbf{X}^{H,\Gamma}_{p,\mu_0}\right) \to 0$$

olur.

Önerme 4.2.3 *Keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için*

$$h_n\left(\mathbf{X}^H_{p,\mu_0}(t)\ ,\ \mathbf{X}^{H,\Gamma}_{p,\mu_0}(t)\right) \le \chi(\Delta)$$

eşitsizliği doğrudur. Ayrıca $\Delta \to 0^+$ iken $[t_0, \theta]$ aralığında düzgün olarak

$$h_n\left(\mathbf{X}^H_{p,\mu_0}(t)\ ,\ \mathbf{X}^{H,\Gamma}_{p,\mu_0}(t)\right) \to 0$$

olur.

Burada $\mathbf{X}^H_{p,\mu_0}(t)$ ve $\mathbf{X}^{H,\Gamma}_{p,\mu_0}(t)$ kümeleri uygun olarak (4.1.2) ve (4.2.2) ile, $\chi(\Delta)$ ise (4.2.7) ile tanımlıdır.

4.3 Normları $[0, H]$ Aralığının Düzgün Bölüntüsünde Olan Parçalı Sabit Kontrol Fonksiyonlar

Bu bölümde $U_{p,\mu_0}^{H,\Gamma}$ kontrol fonksiyonlar kümesinde bulunan ve normları $[0, H]$ aralığının düzgün bölüntüsünde olan yeni kontrol fonksiyonlar tanımlayacağız.

$\Gamma^* = \{0 = r_0 < r_1 < \ldots < r_m = H\}$ $[0, H]$ aralığının bir düzgün bölüntüsü,

$$r_{j+1} - r_j = \frac{H}{m} = \Delta_*, \quad j = 0, 1, \ldots, m-1$$

olsun.

Yeni kontrol fonksiyonlar kümesi tanımlayalım.

$$U_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*} = \{u(\cdot) \in U_{p,\mu_0}^{H,\Gamma} \;\; : \;\; \|u(t)\| = r_{j_i} \; \forall \; t \in [t_i, t_{i+1}),$$
$$r_{j_i} \in \Gamma^*, \; i = 0, 1, \ldots, N-1\}$$

olsun. Açıktır ki

$$U_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*} \subset U_{p,\mu_0}^{H,\Gamma}$$

olur.

(1.2.1) sisteminin tüm mümkün $u(\cdot) \in U_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*}$ kontrol fonksiyonları tarafından üretilen yörüngeler kümesini $\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*}$ olarak gösterelim. O halde

$$\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*} = \left\{x(\cdot; u(\cdot)) : u(\cdot) \in U_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*}\right\} \tag{4.3.1}$$

olur.

Her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*}(t) = \left\{x(t) \in \mathbb{R}^n : x(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*}\right\} \tag{4.3.2}$$

olsun. Ayrıca,

$$\xi\left(\Delta_*\right) = \Delta_* \frac{\lambda M_2\left(\theta - t_0\right)}{1 - L_0} \cdot \exp\left[\frac{L(\lambda) - L_0}{1 - L_0}\right] \tag{4.3.3}$$

olarak gösterelim. Burada $L(\lambda)$ sayısı (1.2.5), M_2 sayısı ise (2.2.4) ile tanımlıdır.

Açıktır ki, $\Delta_* \to 0^+$ iken $\xi(\Delta_*) \to 0$ olur.

Teorem 4.3.1

$$h_C\left(\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,\Gamma}\;,\;\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*}\right) \leq \xi(\Delta_*)$$

eşitsizliği doğrudur.

Kanıt. $U^{H,\Gamma,\Gamma^*}_{p,\mu_0} \subset U^{H,\Gamma}_{p,\mu_0}$ olduğundan

$$\mathbf{X}^{H,\Gamma,\Gamma^*}_{p,\mu_0} \subset \mathbf{X}^{H,\Gamma}_{p,\mu_0} \tag{4.3.4}$$

olur.

Keyfi $x(\cdot) \in \mathbf{X}^{H,\Gamma}_{p,\mu_0}$ alalım ve sabitleyelim. O halde her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$x(t) = g\left(t, x\left(t\right)\right) + \lambda \int_{t_0}^{t} \left[K_1\left(t, s, x\left(s\right)\right) + K_2\left(t, s, x\left(s\right)\right) u\left(s\right)\right] ds \tag{4.3.5}$$

olacak biçimde $u(\cdot) \in U^{H,\Gamma}_{p,\mu_0}$ vardır.

$u(\cdot) \in U^{H,\Gamma}_{p,\mu_0}$ olduğundan

$$u(t) = u_i, \quad t \in [t_i, t_{i+1}), \quad i = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{4.3.6}$$

ve (4.2.4), (4.2.5) eşitsizlikleri gereği

$$\|u_i\| \leq H, \quad i = 0, 1, \ldots, N-1, \quad \Delta \cdot \sum_{i=0}^{N-1} \|u_i\|^p \leq \mu_0^p \tag{4.3.7}$$

olduğu elde edilir.

$i = 0, 1, \ldots, N-1$ için $\|u_i\| < H$ iken, bu durumda

$$\|u_i\| \in [r_{j_i}\ , r_{j_i+1}) \tag{4.3.8}$$

olacak biçimde $r_{j_i} \in \Gamma^*$ vardır. O halde (4.3.8) 'den $i = 0, 1, \ldots, N-1$ için $\|u_i\| < H$ iken

$$\|u_i\| \geq r_{j_i} \tag{4.3.9}$$

olur.

Verilen $u(\cdot) \in U^{H,\Gamma}_{p,\mu_0}$ kontrol fonksiyonunu kullanarak, $t \in [t_i, t_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$, iken

$$u_*(t) = \begin{cases} \dfrac{u_i}{\|u_i\|} r_{j_i}\ , & \text{eğer } 0 < \|u_i\| < H, \\[2ex] u_i\ , & \text{eğer } \ \|u_i\| = 0 \text{ veya } \ \|u_i\| = H \end{cases} \tag{4.3.10}$$

olmak üzere $u_*\left(\cdot\right) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^m$ kontrol fonksiyonunu tanımlayalım. Ayrıca, $u_*(\theta) = u_*(t_{N-1})$ olarak alalım.

(4.3.10) 'dan, $0 < \|u_i\| < H$ iken keyfi $t \in [t_i, t_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$, için

$$\|u_*(t)\| = r_{j_i} \in \Gamma^* \tag{4.3.11}$$

olur. Ayrıca, $\|u_i\| = 0$ veya $\|u_i\| = H$ iken $0 \in \Gamma^*$ ve $H \in \Gamma^*$ olduğundan, (4.3.11) içermesi $\|u_i\| = 0$ ve $\|u_i\| = H$ durumları için de doğru olur.

Keyfi $t \in [t_i, t_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$, için $u(t) = u_i$ olduğundan, (4.3.6), (4.3.9) ve (4.3.11) 'den keyfi $t \in [t_i, t_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$, için

$$\|u_*(t)\| \leq \|u(t)\| \tag{4.3.12}$$

olur. O halde (4.3.6), (4.3.7) ve (4.3.12) 'den keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\|u_*(t)\| \leq H, \tag{4.3.13}$$

$$\int\limits_{t_0}^{\theta} \|u_*(t)\|^p \ dt \leq \int\limits_{t_0}^{\theta} \|u(t)\|^p \ dt \leq \mu_0^p \tag{4.3.14}$$

olur.

(4.3.11), (4.3.13) ve (4.3.14) 'ten $u_*(\cdot) \in U_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*}$ olduğu bulunur.

Keyfi $[t_i, t_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$, aralığını alalım. O halde (4.3.6) 'dan keyfi $t \in [t_i, t_{i+1})$ için $\|u(t)\| = \|u_i\|$ olur.

Eğer $0 < \|u_i\| < H$ ise, $r_{j_i+1} - r_{j_i} = \Delta_*$ olduğundan, (4.3.6), (4.3.8), (4.3.9) ve (4.3.10) 'dan keyfi $t \in [t_i, t_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$, için

$$\begin{aligned} \|u(t) - u_*(t)\| &= \left\| u_i - \frac{u_i}{\|u_i\|} r_{j_i} \right\| = \|u_i\| \left[1 - \frac{r_{j_i}}{\|u_i\|} \right] \\ &= \|u_i\| - r_{j_i} \leq r_{j_i+1} - r_{j_i} = \Delta_* \end{aligned} \tag{4.3.15}$$

olduğu elde edilir.

Eğer $\|u_i\| = 0$ veya $\|u_i\| = H$ ise, (4.3.10) 'dan keyfi $t \in [t_i, t_{i+1})$ için $u_*(t) = u_i$ olur. Bu durumda, her $t \in [t_i, t_{i+1})$ için

$$\|u(t) - u_*(t)\| = 0 \tag{4.3.16}$$

olduğu elde edilir.

Böylece, (4.3.15) ve (4.3.16) 'dan keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\|u(t) - u_*(t)\| \leq \Delta_* \tag{4.3.17}$$

olduğu elde edilir.

(1.2.1) sisteminin (4.3.10) ile tanımlı $u_*(\cdot) \in U_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*}$ kontrol fonksiyonu tarafından üretilen yörüngesini $x_*(\cdot)$ olarak gösterirsek, $x_*(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*}$ ve her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned} x_*(t) &= g\left(t, x_*\left(t\right)\right) \\ &+ \lambda \int_{t_0}^{t} \left[K_1\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) + K_2\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) u_*\left(s\right) \right] ds \end{aligned} \tag{4.3.18}$$

olur. (4.3.5) ve (4.3.18) 'den, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$
\begin{aligned}
& \left\| x(t) - x_*(t) \right\| = \Big\| \; g\left(t, x\left(t\right)\right) \\
+ & \;\; \lambda \int_{t_0}^{t} \left[K_1\left(t, s, x\left(s\right)\right) + K_2\left(t, s, x\left(s\right)\right) u\left(s\right) \right] ds \\
- & \;\; g\left(t, x_*\left(t\right)\right) - \lambda \int_{t_0}^{t} \left[K_1\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) + K_2\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) u_*\left(s\right) \right] ds \Big\| \\
\leq & \;\; \left\| g\left(t, x\left(t\right)\right) - g\left(t, x_*\left(t\right)\right) \right\| + \lambda \int_{t_0}^{t} \left\| K_1\left(t, s, x\left(s\right)\right) - K_1\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) \right\| ds \\
+ & \;\; \lambda \int_{t_0}^{t} \left\| K_2\left(t, s, x\left(s\right)\right) u(s) - K_2\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) u_*(s) \right\| ds \\
\leq & \;\; \left\| g\left(t, x\left(t\right)\right) - g\left(t, x_*\left(t\right)\right) \right\| + \lambda \int_{t_0}^{t} \left\| K_1\left(t, s, x\left(s\right)\right) - K_1\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) \right\| ds \\
+ & \;\; \lambda \int_{t_0}^{t} \left\| K_2\left(t, s, x\left(s\right)\right) u(s) - K_2\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) u(s) \right\| ds \\
+ & \;\; \lambda \int_{t_0}^{t} \left\| K_2\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) u(s) - K_2\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) u_*(s) \right\| ds \\
\leq & \;\; \left\| g\left(t, x\left(t\right)\right) - g\left(t, x_*\left(t\right)\right) \right\| + \lambda \int_{t_0}^{t} \left\| K_1\left(t, s, x\left(s\right)\right) - K_1\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) \right\| ds \\
+ & \;\; \lambda \int_{t_0}^{t} \left\| K_2\left(t, s, x\left(s\right)\right) - K_2\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) \right\| \cdot \left\| u(s) \right\| ds \\
+ & \;\; \lambda \int_{t_0}^{t} \left\| K_2\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) \right\| \cdot \left\| u(s) - u_*(s) \right\| ds
\end{aligned}
$$

olduğu elde edilir. Böylece her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$
\begin{aligned}
\left\| x(t) - x_*(t) \right\| \;\; \leq & \;\; \left\| g\left(t, x\left(t\right)\right) - g\left(t, x_*\left(t\right)\right) \right\| \\
+ & \;\; \lambda \int_{t_0}^{t} \left\| K_1\left(t, s, x\left(s\right)\right) - K_1\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) \right\| ds \\
+ & \;\; \lambda \int_{t_0}^{t} \left\| K_2\left(t, s, x\left(s\right)\right) - K_2\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) \right\| \cdot \left\| u(s) \right\| ds \\
+ & \;\; \lambda \int_{t_0}^{t} \left\| K_2\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) \right\| \cdot \left\| u(s) - u_*(s) \right\| ds
\end{aligned} \tag{4.3.19}
$$

olur.

1.2.B koşulundan ve (2.2.4) 'ten her $t \in [t_0, \theta]$ ve $s \in [t_0, \theta]$ için

$$\left\| g\left(t, x\left(t\right)\right) - g\left(t, x_*\left(t\right)\right) \right\| \leq L_0 \left\| x\left(t\right) - x_*\left(t\right) \right\|, \tag{4.3.20}$$

$$\left\| K_1\left(t, s, x\left(s\right)\right) - K_1\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) \right\| \leq L_1 \left\| x\left(s\right) - x_*\left(s\right) \right\|, \tag{4.3.21}$$

$$\left\| K_2\left(t, s, x\left(s\right)\right) - K_2\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) \right\| \leq L_2 \left\| x\left(s\right) - x_*\left(s\right) \right\|, \tag{4.3.22}$$

$$\|K_2(t,s,x_*(s))\| \le M_2 \tag{4.3.23}$$

olduğu bulunur. Bu durumda (4.3.17), (4.3.19), (4.3.20), (4.3.21), (4.3.22) ve (4.3.23) 'ten

$$\begin{aligned}\|x(t)-x_*(t)\| &\le L_0\|x(t)-x_*(t)\| + \lambda L_1\int_{t_0}^{t}\|x(s)-x_*(s))\|\,ds\\ &+ \lambda L_2\int_{t_0}^{t}\|x(s)-x_*(s)\|\cdot\|u(s)\|\,ds + \lambda M_2(t-t_0)\Delta_*\end{aligned}$$

ve son eşitsizlikten ise

$$\begin{aligned}\|x(t)-x_*(t)\| &\le \frac{\lambda}{1-L_0}\int_{t_0}^{t}[L_1+L_2\|u(s)\|]\,\|x(s)-x_*(s))\|\,ds\\ &+ \frac{\lambda M_2(\theta-t_0)}{1-L_0}\Delta_*\end{aligned} \tag{4.3.24}$$

olduğu bulunur.

(4.3.24) ve Gronwall eşitsizliğinden, her $t\in[t_0,\theta]$ için

$$\begin{aligned}&\left\|x(t)-x_*(t)\right\| \le \Delta_*\frac{\lambda M_2(\theta-t_0)}{1-L_0}\cdot\exp\left[\frac{\lambda}{1-L_0}\int_{t_0}^{t}(L_1+L_2\|u(s)\|)\,ds\right]\\ &\le \Delta_*\frac{\lambda M_2(\theta-t_0)}{1-L_0}\cdot\exp\left[\frac{\lambda}{1-L_0}\left(L_1(\theta-t_0)+L_2\int_{t_0}^{\theta}\|u(s)\|\,ds\right)\right]\end{aligned} \tag{4.3.25}$$

olduğu bulunur.

$u(\cdot)\in U_{p,\mu_0}$ olduğundan, Hölder eşitsizliği gereği

$$\int_{t_0}^{\theta}\|u(s)\|\,ds \le (\theta-t_0)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_{t_0}^{\theta}\|u(s)\|^p\,ds\right)^{\frac{1}{p}} \le (\theta-t_0)^{\frac{p-1}{p}}\mu_0$$

olur. O zaman (1.2.5) ve (4.3.25) 'ten, keyfi $t\in[t_0,\theta]$ için

$$\begin{aligned}\|x(t)-x_*(t)\| &\le \Delta_*\frac{\lambda M_2(\theta-t_0)}{1-L_0}\\ &\quad\cdot\exp\left[\frac{\lambda}{1-L_0}\left(L_1(\theta-t_0)+L_2(\theta-t_0)^{\frac{p-1}{p}}\mu_0\right)\right]\\ &= \Delta_*\frac{\lambda M_2(\theta-t_0)}{1-L_0}\cdot\exp\left[\frac{L(\lambda)-L_0}{1-L_0}\right]\end{aligned} \tag{4.3.26}$$

olduğu bulunur.

Son olarak (4.3.3) ve (4.3.26) 'dan, keyfi $t\in[t_0,\theta]$ için

$$\|x(t)-x_*(t)\| \le \xi(\Delta_*)$$

olur. O halde

$$\|x(\cdot)-x_*(\cdot)\|_C \le \xi(\Delta_*) \tag{4.3.27}$$

olur. Böylece keyfi seçilmiş $x(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,\Gamma}$ için (4.3.27) eşitsizliğini sağlayacak biçimde $x_*(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*}$ olduğunu kanıtlamış olduk. Bu ise

$$\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,\Gamma} \subset \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*} + \xi(\Delta_*)B_C(1) \tag{4.3.28}$$

olması demektir.

(4.3.4) ve (4.3.28) 'den teoremin kanıtı elde edilir. ■

Teorem 4.3.1 'den sonuç olarak aşağıdaki önermeler elde edilir.

Önerme 4.3.2 $\Delta_* \to 0^+$ *iken*

$$h_C\left(\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,\Gamma}\ ,\ \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*}\right) \to 0$$

olur.

Önerme 4.3.3 *Keyfi* $t \in [t_0, \theta]$ *için*

$$h_n\left(\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,\Gamma}(t)\ ,\ \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*}(t)\right) \leq \xi(\Delta_*)$$

eşitsizliği doğrudur. Ayrıca $\Delta_* \to 0^+$ *iken* $[t_0, \theta]$ *aralığında düzgün olarak*

$$h_n\left(\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,\Gamma}(t)\ ,\ \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*}(t)\right) \to 0$$

olur.

Burada $\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,\Gamma}(t)$ *ve* $\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*}(t)$ *kümeleri uygun olarak (4.2.2) ve (4.3.2) ile,* $\xi(\Delta_*)$ *ise (4.3.3) ile tanımlıdır.*

4.4 Sonlu Sayıda Parçalı Sabit Kontrol Fonksiyonlar

$U_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*}$ kontrol fonksiyonlar kümesi, keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\|u(t)\| \leq H, \tag{4.4.1}$$

$$\int_{t_0}^{\theta} \|u(t)\|^p \ dt \leq \mu_0^p \tag{4.4.2}$$

ve keyfi $t \in [t_i, t_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$, için

$$\|u(t)\| = r_{j_i} \in \Gamma^* \tag{4.4.3}$$

olacak biçimdeki kontrol fonksiyonlar kümesidir. Bu durumda $u(\cdot) \in U_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*}$ kontrol fonksiyonu (4.4.3) biçiminde olduğundan, (4.4.1) ve (4.4.2) 'den keyfi $i = 0, 1, \ldots, N-1$ için

$$0 \leq r_{j_i} \leq H,$$

$$\int_{t_0}^{\theta} \|u(t)\|^p \ dt = \Delta \cdot \sum_{i=0}^{N-1} r_{j_i}^p \leq \mu_0^p$$

olur. Böylece $u(\cdot) \in U_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*}$ kontrol fonksiyonu (4.4.3) biçiminde olan ve keyfi $i = 0, 1, \ldots, N-1$ için

$$0 \leq r_{j_i} \leq H$$

ve

$$\Delta \cdot \sum_{i=0}^{N-1} r_{j_i}^p \leq \mu_0^p$$

eşitsizliklerini sağlayan parçalı sabit kontrol fonksiyonudur.

$$S = \{u \in \mathbb{R}^m : \|u\| = 1\}$$

olsun. Yani $S \subset \mathbb{R}^m$ kümesi, $\mathbb{R}^m$ uzayında kapalı birim yuvarın yüzeyini göstermektedir. $S \subset \mathbb{R}^m$ kompakt küme olduğundan, keyfi $\sigma > 0$ için S 'nin sonlu σ -ağı vardır. Verilen $\sigma > 0$ için

$$S_\sigma = \{s_l \in S : l = 1, 2, \ldots, K\}$$

kümesi $S \subset \mathbb{R}^m$ 'de bir sonlu σ -ağ olsun. O zaman keyfi $s \in S$ için

$$\|s - s_k\| \leq \sigma$$

olacak biçimde $s_k \in S_\sigma$ vardır.

Yeni kontrol fonksiyonlar kümesi tanımlayalım.

$$\begin{aligned} U_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*,\sigma} \quad = \quad & \Big\{ u(\cdot) \in U_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*} : u(t) = r_{j_i} s_{l_i}, \ t \in [t_i, t_{i+1}), \\ & r_{j_i} \in \Gamma^*, \quad s_{l_i} \in S_\sigma, \quad i = 0, 1, \ldots, N-1 \Big\} \end{aligned}$$

olsun. Açıktır ki

$$U_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*,\sigma} \subset U_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*}$$

ve $U_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*,\sigma}$ kontrol fonksiyonlar kümesi sonlu sayıda fonksiyonlardan oluşur.

(1.2.1) sisteminin tüm mümkün $u(\cdot) \in U_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*,\sigma}$ kontrol fonksiyonları tarafından üretilen yörüngeler kümesini $\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*,\sigma}$ olarak gösterelim. O halde

$$\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*,\sigma} = \left\{ x(\cdot; u(\cdot)) : u(\cdot) \in U_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*,\sigma} \right\} \tag{4.4.4}$$

olur.

Her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*,\sigma}(t) = \left\{ x(t) \in \mathbb{R}^n : x(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*,\sigma} \right\} \tag{4.4.5}$$

olsun. Ayrıca

$$\psi(\sigma, H) = \sigma H \frac{\lambda M_2 (\theta - t_0)}{1 - L_0} \cdot \exp\left[\frac{L(\lambda) - L_0}{1 - L_0} \right] \tag{4.4.6}$$

olarak gösterelim. Burada $L(\lambda)$ sayısı (1.2.5), M_2 sayısı ise (2.2.4) ile tanımlıdır.

Açıktır ki, her sabitlenmiş $H > 0$ için $\sigma \to 0^+$ iken $\psi(\sigma, H) \to 0$ olur.

Teorem 4.4.1

$$h_C \left(\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*} \; , \; \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*,\sigma} \right) \leq \psi(\sigma, H)$$

eşitsizliği doğrudur.

Kanıt. $U_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*,\sigma} \subset U_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*}$ olduğundan

$$\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*,\sigma} \subset \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*} \tag{4.4.7}$$

olur.

Keyfi $x(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*}$ alalım ve sabitleyelim. O halde her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$x(t) = g(t, x(t)) + \lambda \int_{t_0}^{t} \left[K_1(t, s, x(s)) + K_2(t, s, x(s)) \, u(s) \right] ds \tag{4.4.8}$$

olacak biçimde $u(\cdot) \in U_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*}$ vardır.

$u(\cdot) \in U_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*}$ olduğundan

$$\|u(t)\| = r_{j_i}, \quad t \in [t_i, t_{i+1}), \quad r_{j_i} \in \Gamma^*, \quad i = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{4.4.9}$$

ve

$$\Delta \cdot \sum_{i=0}^{N-1} r_{j_i}^p \leq \mu_0^p \tag{4.4.10}$$

olur. (4.4.9) 'dan, $h_i \in S$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$, olmak üzere keyfi $t \in [t_i, t_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$, için

$$u(t) = r_{j_i} h_i \tag{4.4.11}$$

olduğu elde edilir.

$h_i \in S$, S_σ ise S 'de σ -ağ olduğundan, her $h_i \in S$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$, için

$$\|h_i - s_{l_i}\| \leq \sigma \tag{4.4.12}$$

olacak biçimde $s_{l_i} \in S_\sigma$ vardır. Şimdi $t \in [t_i, t_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$, için

$$u_*(t) = r_{j_i} s_{l_i} \tag{4.4.13}$$

olmak üzere $u_*(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonunu tanımlayalım.

(4.4.9), (4.4.10) ve (4.4.13) 'ten keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\|u_*(t)\| = \|u(t)\| = r_{j_i} \leq H, \tag{4.4.14}$$

$$\int_{t_0}^{\theta} \|u_*(t)\|^p \ dt = \int_{t_0}^{\theta} \|u(t)\|^p \ dt = \Delta \cdot \sum_{i=0}^{N-1} r_{j_i}^p \leq \mu_0^p \tag{4.4.15}$$

olur.

(4.4.13), (4.4.14) ve (4.4.15) 'ten $u_*(\cdot) \in U_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*,\sigma}$ olur. Ayrıca (4.4.11), (4.4.12), (4.4.13) ve (4.4.14) 'ten keyfi $t \in [t_i, t_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$, için

$$\|u(t) - u_*(t)\| = \|r_{j_i} h_i - r_{j_i} s_{l_i}\| = r_{j_i} \|h_i - s_{l_i}\| \leq H\sigma \tag{4.4.16}$$

olduğu bulunur. O halde (4.4.16) 'dan keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\|u(t) - u_*(t)\| \leq H\sigma \tag{4.4.17}$$

olur.

(1.2.1) sisteminin (4.4.13) ile tanımlı $u_*(\cdot) \in U_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*,\sigma}$ kontrol fonksiyonu tarafından üretilen yörüngesini $x_*(\cdot)$ olarak gösterirsek, $x_*(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*,\sigma}$ ve her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned} x_*(t) &= g\left(t, x_*\left(t\right)\right) \\ &+ \lambda \int_{t_0}^{t} \left[K_1\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) + K_2\left(t, s, x_*\left(s\right)\right) u_*\left(s\right)\right] ds \end{aligned} \tag{4.4.18}$$

olur.

(4.4.8) ve (4.4.18) ’den, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$
\begin{aligned}
& \left\| x(t) - x_*(t) \right\| = \Big\| \; g\left(t, x\left(t\right)\right) \\
+ & \quad \lambda \int_{t_0}^{t} \left[K_1\left(t,s,x\left(s\right)\right) + K_2\left(t,s,x\left(s\right)\right) u\left(s\right)\right] ds \\
- & \quad g\left(t, x_*\left(t\right)\right) - \lambda \int_{t_0}^{t} \left[K_1\left(t,s,x_*\left(s\right)\right) + K_2\left(t,s,x_*\left(s\right)\right) u_*\left(s\right)\right] ds \Big\| \\
\le & \quad \left\| g\left(t, x\left(t\right)\right) - g\left(t, x_*\left(t\right)\right) \right\| + \lambda \int_{t_0}^{t} \left\| K_1\left(t,s,x\left(s\right)\right) - K_1\left(t,s,x_*\left(s\right)\right) \right\| ds \\
+ & \quad \lambda \int_{t_0}^{t} \left\| K_2\left(t,s,x\left(s\right)\right) u(s) - K_2\left(t,s,x_*\left(s\right)\right) u_*(s) \right\| ds \\
\le & \quad \left\| g\left(t, x\left(t\right)\right) - g\left(t, x_*\left(t\right)\right) \right\| + \lambda \int_{t_0}^{t} \left\| K_1\left(t,s,x\left(s\right)\right) - K_1\left(t,s,x_*\left(s\right)\right) \right\| ds \\
+ & \quad \lambda \int_{t_0}^{t} \left\| \left[K_2\left(t,s,x\left(s\right)\right) - K_2\left(t,s,x_*\left(s\right)\right)\right] u(s) \right\| ds \\
+ & \quad \lambda \int_{t_0}^{t} \left\| K_2\left(t,s,x_*\left(s\right)\right) u(s) - K_2\left(t,s,x_*\left(s\right)\right) u_*(s) \right\| ds \\
\le & \quad \left\| g\left(t, x\left(t\right)\right) - g\left(t, x_*\left(t\right)\right) \right\| + \lambda \int_{t_0}^{t} \left\| K_1\left(t,s,x\left(s\right)\right) - K_1\left(t,s,x_*\left(s\right)\right) \right\| ds \\
+ & \quad \lambda \int_{t_0}^{t} \left\| K_2\left(t,s,x\left(s\right)\right) - K_2\left(t,s,x_*\left(s\right)\right) \right\| \cdot \left\| u(s) \right\| ds \\
+ & \quad \lambda \int_{t_0}^{t} \left\| K_2\left(t,s,x_*\left(s\right)\right) \right\| \cdot \left\| u(s) - u_*(s) \right\| ds
\end{aligned}
$$

olur.

Böylece her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$
\begin{aligned}
\left\| x(t) - x_*(t) \right\| \quad \le & \quad \left\| g\left(t, x\left(t\right)\right) - g\left(t, x_*\left(t\right)\right) \right\| \\
+ & \quad \lambda \int_{t_0}^{t} \left\| K_1\left(t,s,x\left(s\right)\right) - K_1\left(t,s,x_*\left(s\right)\right) \right\| ds \\
+ & \quad \lambda \int_{t_0}^{t} \left\| K_2\left(t,s,x\left(s\right)\right) - K_2\left(t,s,x_*\left(s\right)\right) \right\| \cdot \left\| u(s) \right\| ds \\
+ & \quad \lambda \int_{t_0}^{t} \left\| K_2\left(t,s,x_*\left(s\right)\right) \right\| \cdot \left\| u(s) - u_*(s) \right\| ds
\end{aligned}
\tag{4.4.19}
$$

olduğu bulunur.

1.2.B koşulundan ve (2.2.4) ’ten her $t \in [t_0, \theta]$ ve $s \in [t_0, \theta]$ için

$$
\left\| g\left(t, x\left(t\right)\right) - g\left(t, x_*\left(t\right)\right) \right\| \le L_0 \left\| x\left(t\right) - x_*\left(t\right) \right\|, \tag{4.4.20}
$$

$$
\left\| K_1\left(t,s,x\left(s\right)\right) - K_1\left(t,s,x_*\left(s\right)\right) \right\| \le L_1 \left\| x\left(s\right) - x_*\left(s\right) \right\|, \tag{4.4.21}
$$

$$\left\| K_2\left(t,s,x\left(s\right)\right) - K_2\left(t,s,x_*\left(s\right)\right)\right\| \le L_2 \left\| x\left(s\right) - x_*\left(s\right)\right\|, \tag{4.4.22}$$

$$\left\| K_2\left(t,s,x_*\left(s\right)\right)\right\| \le M_2 \tag{4.4.23}$$

olduğu bulunur. Bu durumda (4.4.17), (4.4.19), (4.4.20), (4.4.21), (4.4.22) ve (4.4.23) 'ten

$$\begin{aligned} \|x(t)-x_*(t)\| &\le L_0 \left\| x\left(t\right) - x_*\left(t\right)\right\| + \lambda L_1 \int_{t_0}^{t} \left\| x\left(s\right) - x_*\left(s\right)\right)\| \, ds \\ &+ \lambda L_2 \int_{t_0}^{t} \left\| x\left(s\right) - x_*\left(s\right)\right\| \cdot \|u(s)\| \, ds + \lambda M_2\left(t-t_0\right) H\sigma \end{aligned}$$

ve son eşitsizlikten ise

$$\begin{aligned} \|x(t)-x_*(t)\| &\le \frac{\lambda}{1-L_0}\int_{t_0}^{t}\left[L_1 + L_2\|u(s)\|\right] \left\| x\left(s\right) - x_*\left(s\right)\right)\| \, ds \\ &+ \frac{\lambda M_2\left(\theta-t_0\right)}{1-L_0} H\sigma \end{aligned} \tag{4.4.24}$$

olduğu bulunur.

(4.4.24) ve Gronwall eşitsizliğinden, her $t\in[t_0,\theta]$ için

$$\begin{aligned} \big\|x(t) &- x_*(t)\big\| \le \sigma H \frac{\lambda M_2\left(\theta-t_0\right)}{1-L_0} \cdot \exp\left[\frac{\lambda}{1-L_0}\int_{t_0}^{t}\left(L_1 + L_2\left\|u\left(s\right)\right\|\right) ds\right] \\ &\le \sigma H \frac{\lambda M_2\left(\theta-t_0\right)}{1-L_0} \\ &\cdot \exp\left[\frac{\lambda}{1-L_0}\left(L_1\left(\theta-t_0\right) + L_2\int_{t_0}^{\theta}\left\|u\left(s\right)\right\| ds\right)\right] \end{aligned} \tag{4.4.25}$$

olduğu bulunur.

$u(\cdot)\in U_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*}\subset U_{p,\mu_0}$ olduğundan, Hölder eşitsizliği gereği

$$\int_{t_0}^{\theta}\|u(s)\|\,ds \le \left(\theta-t_0\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_{t_0}^{\theta}\|u(s)\|^p\,ds\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\theta-t_0\right)^{\frac{p-1}{p}}\mu_0$$

olur. O zaman (1.2.5) ve (4.4.25) 'ten, son olarak keyfi $t\in[t_0,\theta]$ için

$$\begin{aligned} \|x(t)-x_*(t)\| &\le \sigma H \frac{\lambda M_2\left(\theta-t_0\right)}{1-L_0} \\ &\quad \cdot \exp\left[\frac{\lambda}{1-L_0}\left(L_1\left(\theta-t_0\right) + L_2(\theta-t_0)^{\frac{p-1}{p}}\mu_0\right)\right] \\ &= \sigma H \frac{\lambda M_2\left(\theta-t_0\right)}{1-L_0} \cdot \exp\left[\frac{L(\lambda)-L_0}{1-L_0}\right] \end{aligned} \tag{4.4.26}$$

olduğu bulunur.

(4.4.6) ve (4.4.26) 'dan keyfi $t\in[t_0,\theta]$ için

$$\|x(t)-x_*(t)\| \le \psi(\sigma,H)$$

olur. O halde

$$\|x(\cdot) - x_*(\cdot)\|_C \leq \psi(\sigma, H) \tag{4.4.27}$$

olur. Böylece keyfi seçilmiş $x(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*}$ için (4.4.27) eşitsizliğini sağlayacak biçimde $x_*(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*,\sigma}$ vardır. Bu ise

$$\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*} \subset \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*,\sigma} + \psi(\sigma, H) B_C(1) \tag{4.4.28}$$

olması demektir.

(4.4.7) ve (4.4.28) 'den teoremin kanıtı elde edilir. ■

Teorem 4.4.1 'den sonuç olarak aşağıdaki önermeler elde edilir.

Önerme 4.4.2 *Her sabitlenmiş $H > 0$ için $\sigma \to 0^+$ iken*

$$h_C\left(\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*}\ ,\ \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*,\sigma}\right) \to 0$$

olur.

Önerme 4.4.3 *Keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için*

$$h_n\left(\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*}(t)\ ,\ \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*,\sigma}(t)\right) \leq \psi(\sigma, H)$$

eşitsizliği doğrudur. Ayrıca her sabitlenmiş $H > 0$ için $\sigma \to 0^+$ iken $[t_0, \theta]$ aralığında düzgün olarak

$$h_n\left(\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*}(t)\ ,\ \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*,\sigma}(t)\right) \to 0$$

olur.

Burada $\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*}(t)$ ve $\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*,\sigma}(t)$ kümeleri uygun olarak (4.3.2) ve (4.4.5) ile, $\psi(\sigma, H)$ ise (4.4.6) ile tanımlıdır.

4.5 Hausdorff Uzaklığı İçin Genel Değerlendirme

Teorem 4.1.1, 4.2.1, 4.3.1 ve 4.4.1 'den, (1.2.1) sisteminin tüm mümkün $u(\cdot) \in U_{p,\mu_0}$ kontrol fonksiyonları tarafından üretilen $\mathbf{X}_{p,\mu_0}$ yörüngeler kümesi ile, sonlu sayıda sürekli fonksiyonlardan oluşan $\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*,\sigma}$ kümesi arasındaki Hausdorff uzaklığını karakterize eden aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem 4.5.1

$$h_C\left(\mathbf{X}_{p,\mu_0},\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*,\sigma}\right)\le \frac{L_*}{H^{p-1}}+\chi(\Delta)+\xi(\Delta_*)+\psi(\sigma,H)$$

eşitsizliği doğrudur.

Burada L_*, $\chi(\Delta)$, $\xi(\Delta_*)$ ve $\psi(\sigma,H)$ sırasıyla (4.1.3), (4.2.7), (4.3.3) ve (4.4.6) ile tanımlıdır.

Kanıt. Hausdorff uzaklığının özelliğinden ve Teorem 4.1.1, 4.2.1, 4.3.1, 4.4.1 'den

$$\begin{aligned} h_C\left(\mathbf{X}_{p,\mu_0},\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*,\sigma}\right) &\le h_C\left(\mathbf{X}_{p,\mu_0},\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H}\right)+h_C\left(\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H},\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,\Gamma}\right)\\ &+ h_C\left(\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,\Gamma},\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*}\right)+h_C\left(\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*},\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*,\sigma}\right)\\ &\le \frac{L_*}{H^{p-1}}+\chi(\Delta)+\xi(\Delta_*)+\psi(\sigma,H) \end{aligned}$$

olduğu elde edilir. Burada $\mathbf{X}_{p,\mu_0}$, $\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H}$, $\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,\Gamma}$, $\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*}$ ve $\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*,\sigma}$ kümeleri uygun olarak (1.2.6), (4.1.1), (4.2.1), (4.3.1) ve (4.4.4) ile tanımlıdır. ■

Teorem 4.5.1 'den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.5.2 *Keyfi $\varepsilon>0$ için*

$$h_C\left(\mathbf{X}_{p,\mu_0},\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*,\sigma}\right)<\varepsilon$$

olacak biçimde $H>0$, $\Delta>0$, $\Delta_*>0$, $\sigma>0$ vardır.

Kanıt. Verilen ε sayısı için

$$H(\varepsilon)=\left(\frac{4L_*}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{p-1}}$$

olsun. Şimdi $H>0$ sayısını

$$H>H(\varepsilon)=\left(\frac{4L_*}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{p-1}} \tag{4.5.1}$$

biçiminde seçersek, (4.5.1) 'den

$$\frac{L_*}{H^{p-1}}<\frac{\varepsilon}{4} \tag{4.5.2}$$

olur.

(2.2.8), (4.2.6) ve (4.2.7) 'den

$$\begin{aligned}\varphi(\Delta)=\frac{1}{1-L_0}\Big[\omega_0(\Delta) &+ \lambda\omega_1(\Delta)(\theta-t_0)+\lambda M_1\Delta\\ &+ \lambda\omega_2(\Delta)(\theta-t_0)^{\frac{p-1}{p}}\mu_0+\lambda M_2\Delta^{\frac{p-1}{p}}\mu_0\Big]\end{aligned}$$

ve

$$\zeta(\Delta) = 2\omega_2\left(\varphi\left(\Delta\right)\right)\mu_0\left(\theta - t_0\right)^{\frac{p-1}{p}} + 2\mu_0 M_2 \Delta^{\frac{p-1}{p}}$$

olmak üzere

$$\chi(\Delta) = \zeta(\Delta)\frac{\lambda}{1 - L_0} \cdot \exp\left[\frac{L(\lambda) - L_0}{1 - L_0}\right]$$

olduğunu biliyoruz. Burada $L(\lambda)$ sayısı (1.2.5) ile tanımlıdır. Bu durumda $\Delta \to 0^+$ iken $\chi(\Delta) \to 0$ olur. O halde, verilen $\varepsilon > 0$ için $\Delta < \delta(\varepsilon)$ iken

$$\chi(\Delta) < \frac{\varepsilon}{4} \tag{4.5.3}$$

olacak biçimde $\delta(\varepsilon) > 0$ vardır.

(4.3.3) 'ten

$$\xi\left(\Delta_*\right) = \Delta_* \frac{\lambda M_2\left(\theta - t_0\right)}{1 - L_0} \cdot \exp\left[\frac{L(\lambda) - L_0}{1 - L_0}\right] \tag{4.5.4}$$

olduğundan,

$$\Delta_* < \frac{1 - L_0}{4\lambda M_2\left(\theta - t_0\right) \cdot \exp\left[\frac{L(\lambda) - L_0}{1 - L_0}\right]} \cdot \varepsilon \tag{4.5.5}$$

olarak seçilirse, (4.5.4) ve (4.5.5) 'ten

$$\xi\left(\Delta_*\right) < \frac{\varepsilon}{4} \tag{4.5.6}$$

olur.

(4.4.6) 'dan

$$\psi\left(\sigma, H\right) = \sigma H \frac{\lambda M_2\left(\theta - t_0\right)}{1 - L_0} \cdot \exp\left[\frac{L(\lambda) - L_0}{1 - L_0}\right] \tag{4.5.7}$$

olduğundan, $H > 0$ sayısı (4.5.2) eşitsizliğini sağlayacak biçimde seçildikten sonra, σ sayısı

$$\sigma < \frac{1 - L_0}{4H\lambda M_2\left(\theta - t_0\right) \cdot \exp\left[\frac{L(\lambda) - L_0}{1 - L_0}\right]} \cdot \varepsilon \tag{4.5.8}$$

biçiminde seçilirse, (4.5.7) ve (4.5.8) 'den

$$\psi\left(\sigma, H\right) < \frac{\varepsilon}{4} \tag{4.5.9}$$

olduğu bulunur.

Böylece, Teorem 4.5.1, (4.5.2), (4.5.3), (4.5.6) ve (4.5.9) 'dan, H sayısı (4.5.1) eşitsizliğini, Δ sayısı $\Delta < \delta(\varepsilon)$ eşitsizliğini, Δ_* sayısı (4.5.5) eşitsizliğini, σ sayısı ise (4.5.8) eşitsizliğini (H sayısı (4.5.1) eşitsizliğini sağlayacak biçimde seçildikten sonra) sağlayacak biçimde seçilirse

$$\begin{aligned} h_C\left(\mathbf{X}_{p,\mu_0}, \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*,\sigma}\right) &\leq \frac{L_*}{H^{p-1}} + \chi(\Delta) + \xi(\Delta_*) + \psi(\sigma, H) \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon \end{aligned}$$

olduğu elde edilir. ■

Teorem 4.5.1 ve Teorem 4.5.2 'den aşağıdaki teoremler elde edilir.

Teorem 4.5.3 *Keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için*

$$h_n\left(\mathbf{X}_{p,\mu_0}(t), \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*,\sigma}(t)\right) \leq \frac{L_*}{H^{p-1}} + \chi(\Delta) + \xi(\Delta_*) + \psi(\sigma, H)$$

eşitsizliği doğrudur. Burada $\mathbf{X}_{p,\mu_0}(t)$ ve $\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*,\sigma}(t)$ kümeleri (1.2.7) ve (4.4.5) ile tanımlıdır.

Teorem 4.5.4 *Herhangi $\varepsilon > 0$ verildiğinde, keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için*

$$h_n\left(\mathbf{X}_{p,\mu_0}(t), \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,\Gamma,\Gamma^*,\sigma}(t)\right) < \varepsilon$$

olacak biçimde $H > 0$, $\Delta > 0$, $\Delta_* > 0$, $\sigma > 0$ vardır.

5 TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER

Davranışı integral denklem ile verilen süreçler, fizik ve mekaniğin bir çok problemlerinde ortaya çıkmaktadır. Bu süreçler bazı durumlarda dışarıdan yapılan etkilerle kontrol edilebilir olmaktadır. Sisteme verilen dış etkiler farklı nitelikte olabilir. Örneğin, sisteme verilen etki enerji veya finans kaynaklı olduğunda, bu etkiler kullanıldıkça tükenen kontrol etki olur. Bundan dolayı bu tür kontrol etkiler integral kısıtlı kontrol etkiler olur. Uçan bir araç yakıt tüketerek hareket eder ve bu aracın kütlesi yakıt tükendiği için değişken olur. Böyle bir aracın hareketi, kontrol fonksiyonu integral kısıtlı olan diferansiyel denklemle verilmektedir.

Tezde, davranışı kontrol vektörüne göre afin, durum vektörüne göre ise doğrusal olmayan Volterra tür integral denklem ile verilen, kontrol fonksiyonları ise integral kısıtlı olan sistemin yörüngeler kümesinin özellikleri ve diskretleştirilmesi incelenmektedir. Herhangi bir sistemin yörüngeler kümesinin farklı özelliklerini önceden bulmak ve bu kümeni yaklaşık hesaplamak, sistem hakkında birçok öngörüde bulunmaya yardımcı olur.

Yapılan araştırmalarda, sistemin yörüngeler kümesinin sınırlılık, kapalılık ve kompaktlık gibi topolojik özellikler incelenmiş ve sonuçta yörüngeler kümesinin sürekli fonksiyonlar uzayında sınırlı, kapalı ve kompakt olduğu gösterilmiş, yörüngeler kümesinin kesitlerinin Hausdorff metriğinde sürekli değiştiği kanıtlanmıştır. Daha sonra, yörüngeler kümesinin sistemin parametrelerine bağlantısı araştırılmıştır. Sistemin yörüngeler kümesinin, kontrol kaynağı kısıtlayan parametreye ve kontrol fonksiyonların seçildiği L_p uzayının p parametresine bağlantısının sürekli olduğu gösterilmiştir. Bu sonuç, pratikte verilen kontrol sistemlerin modelleme sürecinde sistemin ele alınan parametrelerinin ölçümünde oluşabilecek küçük hataların, sistemin yörüngeler kümesini az etkileyeceğini göstermektedir. Başka deyişle, kontrol sistemin yörüngeler kümesi, verilen sistem hakkında önbilgiler elde etmek için kullanılan en önemli yapılardan biri olduğundan, modelleme sırasında sistemin parametrelerinin ölçümünde oluşan küçük hatalar, sistem hakkında elde edeceğimiz önbilgileri az etkiler.

Tezde, davranışı kontrol vektörüne göre afin, durum vektörüne göre ise doğrusal olmayan Volterra tür integral denklem ile, yani afin Volterra tür integral denklem verilen, kontrol fonksiyonları ise integral kısıtlı olan sistemin yörüngeler kümesinin diskretleştirilmesi yöntemi verilmiştir. Yörüngeler kümesi ile sonlu sayıda yörüngeden oluşan bir küme arasındaki Hausdorff uzaklığının yeterince küçük yapılabilirliği kanıtlanmıştır. Bu sonuç, yörüngeler kümesini yaklaşık olarak hesaplamayı mümkün kılmaktadır. Yörüngeler kümesinin yaklaşık olarak hesaplanması, sisteme belli bir optimallik özelliğini sağlayan yörüngenin daha önceden bulunmasına imkan sağlamaktadır.

Tezde elde edilmiş sonuçlar, matematiksel modellemenin çeşitli problemlerinin çözümlerinde kullanılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Aubin, J.P. ve Frankowska H., *Set Valued Analysis,* Birkhäuser, Boston, 1990.

[2] Hu, Sh. ve Papageorgiou, N.S., *Handbook of Multivalued Analysis. Vol.1. Theory*, Kluwer, Dordrecht, 1997.

[3] Clarke, F.H., Ledyaev Yu.S., Stern, R.J. ve Wolenski, P.R., *Nonsmooth Analysis and Control Theory*, Springer, New York, 1998.

[4] Blagodatskikh, V.I. ve Filippov, A.F., "Differential inclusions and optimal control," *Proc. of the Steklov Inst. of Math.*, **169.** 199-256, 1986.

[5] Deimling, K., *Multivalued Differential Equations*, D.Gruyter, Berlin, 1992.

[6] Krasovskii, N.N., *Theory of Control of Motion: Linear Systems*, Nauka, Moscow, 1968. (In Russian)

[7] Krasovskii, N.N. ve Subbotin, A.I., *Game-Theoretical Control Problems*, Springer, New Yorki 1988.

[8] Soltanov, K.N., *Some Applications of Nonlinear Analysis to Differential Equations*, Elm, Baku, 2002.

[9] Subbotin, A.I., *Minimax Inequalities and Hamilton-Jacobi Equations*, Nauka, Moscow, 1991.

[10] Warga, J., *Optimal Control of Differential and Functional Equations*, Academic Press, New York, 1972.

[11] Pontryagin, L.S., Boltyanskii, V.G., Gamkrelidze, R.V. ve Mishenko, E.F., *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, Interscience Publishers John Wiley and Sons, New York-London, 1962.

[12] Kalman, R.E., Ho, Y.C. ve Narendra, K.S., "Controllability of linear dynamical systems," *Contributions to Differential Equations*, **1**, 189-213, 1963.

[13] Appell, J., Kalitvin, A.S. ve Zabreiko, P.P., "Boundary value problems for integro-differential equations of Barbashin type," *J. Integr. Equ. Appl.*, **6**, 1-30, 1994.

[14] Banas, J. ve Chlebowicz, A., "On integrable solutions of a nonlinear Volterra integral equation under Carathéodory conditions," *Bull. Lond. Math. Soc.*, **41**, 1073-1084, 2009.

[15] Brauer, F., "On a nonlinear integral equation for population growth problems," *SIAM J. Math. Anal.*, **6**, 312-317, 1975.

[16] Burton, T.A., "Six integral equations and a flexible Lyapunov functional," *Proc. Inst. Math. Mech. Ural Branch of Russian Acad. Sci.*, **16**, No.5, 241-252, 2010.

[17] El-Abd, E.M., "On the existence of solutions for nonlinear functional integral equation," *Filomat,* **24**, 17-23, 2010.

[18] Gohberg, I.G. ve Krein, M.G., *Theory and Applications of Volterra Operators in Hilbert Space*, Amer. Math. Soc., Providence, 1970.

[19] Guseinov, A.I. ve Mukhtarov, Sh.I., *Singular Integral Equations*, Nauka, Moscow, 1980.

[20] Hammerstein, A.," Nichtlineare integralgleichungen nebst anwendungen," *Acta Mathematica*, **54**, 1929.

[21] Krasnoselskii, M.A. ve Krein S.G., " On the principle of avaraging in nonlinear mechanics," *Uspekhi Mat. Nauk*, **10**, 147-153, 1955. (in Russian)

[22] Krasnov, M.L., *Integral Equations*, Nauka, Moscow, 1975. (In Russian)

[23] Lyapunov, A.M., "Sur les figures d'equilibre peu differentes des ellipoides d'une masse liquide homogene douee d'un mouvement de rotation, Premiere partle. Etude generale du probleme," *Zapiski Akademii Nauk, St.Petersburg*, 1-25, 1925.

[24] Miller, R.K., *Nonlinear Volterra Integral Equations*, W. A. Benjamin, Menlo Park, California, 1971.

[25] Nemytskiy, V.V., *Sur les Equations Integrates Non-Lineaires*, C.R. Acad. Sci., 196, 1933.

[26] Petrovskii, I.G., *Lectures on the Theory of Integral Equations*, Moskow. Gos. Univ., Moscow, 1984.

[27] Pluciennik, R. ve Szufia, S., "Nonlinear Volterra integral equations in Orlicz spaces," *Demonstratio Math*, **17**, 515-532, 1984.

[28] Polyanin, A.D. ve Manzhurov, A.V., *Handbook of Integral Equation*, CRC Press, 1998.

[29] Precub, R., *Methods in Nonlinear Integral Equations*, Kluwer, Dordrecht, 2002.

[30] Soltanov, K.N., "Remarks on separation of convex sets, fixed-point theorem, and applications in theory of linear operators," *Fixed Point Theory Appl.*, Art. ID 80987, 14 pp, 2007.

[31] Soltanov, K.N., "Perturbation of the mapping and solvability theorems in Banach space," *Nonlinear Anal.*, **72**, 164-175, 2010.

[32] Tricomi, F., *Integral Equations,* Dover Publications, New York, 1985.

[33] Urysohn, P.S., "Ob odnom tipe nelineynikh integralnikh uravneniy," *Matem. sbornik*, **31**, 1936. (In Russian)

[34] Väth, M., *Volterra and Integral Equations of Vector Functions*, M. Deccer. Inc., New York, 2000.

[35] Heisenberg, W., *Physics and Philosophy. The Revolution in Modern Science,* Harper and Row, New York, 1958.

[36] Aubin, J-P. ve Cellina, A., *Differential Inclusions. Set Valued Maps and Viability Theory,* Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[37] Filippov, A.F., *Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Sides*, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1998.

[38] Kurzhanskii, A.B., "Differential equations in control synthesis problems: I. Ordinary systems," *Differential Equations*, **41**, 10-21, 2005.

[39] Roxin, E., "The existence of optimal controls," *Michigan Math. J.*, **9**, 109-119, 1962.

[40] Markus, L. ve Lee, E.B., "On the existence of optimal controls," *Trans. ASME Ser. D. J. Basic Engrg.*, **84**, 13-22, 1962.

[41] Panasyuk, A.I., ”Equations of attainable set dynamics, part 1: integral funnel equations,” *J. Optimiz. Theory Appl.*, **64**, 349-366, 1990.

[42] Leigh, J.R., *Functional Analysis and Linear Control Theory*, Academic Press, London, 1980.

[43] Beletskii, V.V., *Studies of Motions of Celestial Bodies*, Nauka, Moscow, 1972. (In Russian)

[44] Conti, R., *Problemi di Controllo e di Controllo Ottimale*, UTET, Torino, 1974.

[45] Formalskii, A.M., *Controllability and Stability of Systems with Limited Resources. Theoretical Foundations of Engineering Cybernetics Series*, Nauka, Moscow, 1974.

[46] Lawden, D.F., *Optimal Trajectories for Space Navigation*, Butterworth, London, 1963.

[47] Ukhobotov, V.I., *One Dimensional Projection Method in Linear Differential Games with Integral Constraints*, Chelyabinsk State University press, Chelyabinsk, 2005. (In Russian)

[48] Guseinov, Kh.G., Moiseyev, A.N. ve Ushakov, V.N., ”On the approximation of reachable domains of control systems,” *J. Appl. Math. Mech.*, **62**, 169-175, 1998.

[49] Kurzhanskii, A.B. ve Valyi, L., *Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control*, Birkhauser, Boston, 1996.

[50] Zhu, Q.J., Zhang, N. ve He, Y., ”Algorithm for determining the reachability set of a linear control system,” *J. Optim. Theory Appl.*, **72**, 333-354, 1992.

[51] Akyar, E., ”Dependence on initial conditions of attainable sets of control systems with p-integrable controls,” *Nonlinear Anal. Model. Control*, **12**, 293-306, 2007.

[52] Chentsov, A.G., *Asymptotic Attainability*, Kluwer, Dordrecht, 1997.

[53] Chentsov A.G., ”Asymptotic attainability with perturbation of integral constraints in the abstract control problem. I,” *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **39.** P.57-68, 1995.

[54] Gozzi, F. ve Loretti, P., "Regularity of the minimum time function and minimum energy problems: the linear case," *SIAM J. Control Optim.*, **37**, 1195-1221, 1999.

[55] Guseinov, Kh.G., Ozer, O. ve Akyar, E., "On the continuity properties of the attainable sets of control systems with integral constraints on control," *Nonlinear Anal. Ser. A: Theory, Meth., Appl.*, **56** 433-449, 2004.

[56] Guseinov, Kh.G. ve Nazlipinar, A.S., "On the continuity property of L_p balls and an application," *J. Math. Anal. Appl.*, **335**, 1347-1359, 2007.

[57] Lou, H.W., "On the attainable sets of control systems with p-integrable controls," *J. Optim. Theory Appl.*, **123**, 123-147, 2004.

[58] Motta, M. ve Sartori, C., "Minimum time with bounded energy, minimum energy with bounded time," *SIAM J. Control Optim.*, **42.** 789-809, 2003.

[59] Polyak, B.T., "Convexity of the reachable set of nonlinear systems under L_2 bounded controls," *Institut Mittag-Leffler. Report no. 02.2002/2003, spring*, 2003.

[60] Solomatin, A.M., "A game theoretic approach-evasion problem for a linear system with integral constraints imposed on the player control," *J. Appl. Math. Mech.*, **48**, 401-405, 1984.

[61] Soravia, P., "Viscosity solutions and optimal control problems with integral constraints," *Systems Control Lett.*, **40**, 325-335, 2000.

[62] Subbotin, A.I. ve Ushakov, V.N., "Alternative for an encounter-evasion differential game with integral constraints on the players controls," *J. Appl. Math. Mech.*, **39**, 367-375, 1975.

[63] Ushakov, V.N., "Extremal strategies in differential games with integral constraints," *J. Appl. Math. Mech.*, **36**, 12-19, 1972.

[64] Zavalishchin, S.T. ve Sesekin, A.N., *Dynamic Impulse Systems. Theory and Applications*, Kluwer, Dordrecht, 1997.

[65] Guseinov, Kh.G., Neznakhin, A.A. ve Ushakov, V.N., "Approximate construction of reachable sets of control systems with integral constraints on the controls," *J. Appl. Math. Mech.*, **63**, 557-567, 1999.

[66] Guseinov, Kh.G., Ozer, O., Akyar, E. ve Ushakov, V.N., "The approximation of reachable sets of control systems with integral constraint on controls," *Nonlinear Different. Equat. Appl. (NoDEA)*, **14**, 57-73, 2007.

[67] Sirotin, A.N. ve Formalskii, A.M., "Reachability and Controllability of Discrete-Time Systems under Control Actions Bounded in Magnitude and Norm," *Autom. Rem. Contr.*, **64**, 1844-1857, 2003.

[68] Huseyin, N. ve Huseyin, A., "Compactness of the set of trajectories of the controllable system described by an affine integral equation," *Appl. Math. Comput.*, **219**, 8416-8424, 2013.

[69] Burago, D., Burago, Yu. ve Ivanov, S., *A Course in Metric Geometry. Graduate Studies in Mathematics, 33,* American Mathematical Society, Providence, 2001.