KÜMELERİN CEBİRSEL TOPLAMI, MİNKOWSKİ FARKI ve UYGULAMALARI ÜZERİNE

Sümeyya ŞEKER

Yüksek Lisans Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Haziran- 2014

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Sümeyya Şeker'in **"Kümelerin Cebirsel Toplamı, Minkowski Farkı ve Uygulamaları Üzerine"** başlıklı **Matematik** Anabilim Dalındaki **Yüksek Lisans Tezi** tezi 20.06.2014 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	Adı - Soyadı	**İmza**
Üye (Tez Danışmanı)	**Prof. Dr. YALÇIN KÜÇÜK**	....
Üye	**Prof. Dr. METİN AKDAĞ**	....
Üye	**Yard. Doç. Dr. YUNUS ÖZDEMİR**	....

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KÜMELERİN CEBİRSEL TOPLAMI, MİNKOWSKİ FARKI ve UYGULAMALARI ÜZERİNE

Sümeyya ŞEKER

Anadolu Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Yalçın KÜÇÜK

2014, 40 Sayfa

Bu çalışmada, $\mathbb{R}^n$'nin alt kümeleri ailesi üzerinde tanımlanan cebirsel toplam ve Minkowski fark işlemleri tanıtılmış, bunların önemli bazı özellikleri kanıtlanmıştır. Buna ek olarak, konveks kümelerin cebirsel toplamlarının hacimleri, düzlemde eğrisel integralle uzayda ise yüzey integraliyle formüle edilmiştir. Ayrıca cebirsel toplam kullanılarak bir robotun engeller arasından hareketini sağlayan bir yöntem verilmiştir. Son olarak da bilgisayarda oluşturulan grafiklerin diletasyon ve erozyon işlemleri cebirsel toplam ve Minkowski fark işlemleriyle ifade edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Cebirsel toplam, Minkowski fark, konveks kümelerin hacimleri, diletasyon, erozyon

ABSTRACT

Master of Science Thesis

ON ALGEBRAIC SUM, MINKOWSKI DIFFERENCE OF SETS AND APPLICATIONS

Sümeyya ŞEKER

Anadolu University

Graduate School of Sciences

Mathematics Program

Supervisor: Prof. Dr. Yalçın KÜÇÜK

2014, 40 Pages

In this study, algebraic sum and Minkowski difference operations which are defined on the family of subsets of $\mathbb{R}^n$ are presented. Some important properties of these operations are proved. In addition, volume of algebraical sum of convex sets is formulated in plane and in space by using line integral and surface integral, respectively. Moreover, a method which provides movement of a robot through barriers is given. At the end, dilation and erosion operations of computer graphs are expressed by means of algebraic sum and Minkowski difference.

Keywords: Algebraic sum, Minkowski difference, volumes of convex sets, dilation, erosion

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında yol gösteren ve beni her zaman destekleyen danışmanım Prof. Dr. Yalçın KÜÇÜK' e, tezin hazırlanmasında yardımlarını esirgemeyen değerli hocalarım Prof. Dr. Mahide KÜÇÜK, Yard. Doç. Dr. İlknur ATASEVER GÜVENÇ, Yard. Doç. Dr. Mustafa SOYERTEM, Araş. Gör. Didem TOZKAN ve Araş. Gör. Emrah KARAMAN' a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Sümeyya ŞEKER
Haziran, 2014

İÇİNDEKİLER

ÖZET i

ABSTRACT ii

TEŞEKKÜR iii

İÇİNDEKİLER iv

ŞEKİLLER DİZİNİ v

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ vi

1. GİRİŞ 1

2. CEBİRSEL KÜME TOPLAMI 2

2.1. Cebirsel Küme Toplam Tanımı ve Özellikleri 2

2.2. Konveks Kümelerin Cebirsel Toplamının Alanı ve Hacmi 13

2.3. Cebirsel Küme Toplamına Örnekler 19

3. MİNKOWSKİ KÜME FARKI **22**

3.1. Minkowski Küme Farkının Tanımı ve Özellikleri 22

3.2. Minkowski Küme Farkına Örnekler 31

4. CEBİRSEL TOPLAM ve MİNKOWSKİ FARKIN BAZI UYGULAMALARI **33**

4.1. Robotik-Robot Hareket Planlama 33

4.2. Bilgisayar Grafikleri-Dijital Görüntü İşleme 35

4.2.1. Diletasyon İşlemi(Genleşme) 35

4.2.3. Erozyon işlemi 36

4.2.5. İzolasyon sınır özelliği 38

4.2.6. Karmaşık morfolojik işlemleri 38

KAYNAKÇA **40**

ŞEKİLLER DİZİNİ

2.1. İki konveks çokgeninin cebirsel toplamının yüzey alanı 14
2.2. A ile B kümeleri 19
2.3. A ile B kümelerinin cebirsel toplamı 20
2.4. Bir dikdörtgenle bir dairenin cebirsel toplamı 20
2.5. Yıldız ile çay kaşığının cebirsel toplamı 20
2.6. Çember ile kürenin cebirsel toplamı 21
3.7. A ile B çokgenleri 25
3.8. A ile B çokgenlerinin Minkowski farkı $(A \ominus B)$ 26
3.9. $(A \ominus B) \oplus B$ çokgeni 26
3.10. Bir dikdörtgen ile bir dairenin Minkowski farkı 32
3.11. Bir dikdörtgen ile bir üçgenin Minkowski farkı 32
4.12. Yapılandırma alanında robotun yeri 33
4.13. Serbest uzayda robot şekli 34
4.14. C engelinin belirlenmesi 35
4.15. Diletasyon işleminin tekrarlanırken yarattığı etki 36
4.16. X kümesinin B kümesi yardımıyla erozyon ve diletasyonu 37
4.17. Erozyon işleminin tekrarlanmasında oluşan etkiler 37
4.18. Açıklaştırma işlemi 38
4.19. Koyulaştırma işlemi 39

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}^n$	:	n-boyutlu Öklid uzayı
$B(\mathbb{R}^n)$	:	$\mathbb{R}^n$' nin boştan farklı, kompakt, konveks altkümelerinin ailesi
$\mathbb{R}^+$	:	Pozitif gerçel sayılar
$2^{\mathbb{R}^n}$	:	$\mathbb{R}^n$' nin kuvvet kümesi
C^2	:	İkinci dereceden sürekli kısmi türevlere sahip fonksiyonlar uzayı
$\overline{A}$	:	A kümesinin kapanışı
A'	:	A kümesinin tümleyeni
bdA	:	A kümesinin sınır noktaları kümesi
∂A	:	A kümesinin sınır noktaları kümesi
$\mathcal{N}(x)$	:	x' in komşuluklar ailesi
$\|A\|$	:	A kümesinin afin uzayının boyutu
$P(A)$	:	A çokgeninin alanı
$V(A)$	:	A çokgeninin hacmi
(x_1, x_2, x_3)	:	$\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3}$ vektörlerinin karma çarpımı
$m(pq)$	:	$\overrightarrow{pq}$ ile x ekseni arasındaki açı
$extA$	:	A çokgeninin uç noktaları kümesi
$convA$	:	A kümesinin konveks zarfı
$\overline{conv}A$	:	A kümesinin kapalı konveks zarfı
$intA$	:	A kümesinin iç noktaları kümesi
clA	:	A kümesinin kapanış noktaları kümesi
$\delta_B(A)$	:	A kümesinin görüntü diletasyon işlemi
$\varepsilon_B(A)$	:	A kümesinin görüntü erozyon işlemi
$\gamma_B(A)$	:	Açıklaştırma işlemi
$\varphi_B(A)$	:	Koyulaştırma işlemi
$\nabla_1(A)$	:	A kümesinin morfolojik gradyantı
$\nabla^2(A)$	:	A kümesinin morfolojik Laplacian'ı

1 GİRİŞ

$\mathbb{R}^n$'deki iki kümenin cebirsel toplamı $\mathbb{R}^n$'nin alt kümeleri ailesi üzerinde bir geometrik ikili işlemdir. Bu toplam çeşitli biçimlerde oluşturulabilir. İki kümenin cebirsel toplamı, kabaca, bu kümelere ait noktaların yer vektörlerinin toplamı olarak ifade edilebilir. Ancak pratikte işleme giren kümelerden birinin, diğerinin sınır noktalarında yön koruyarak sürekli bir şekilde hareketiyle elde edilebilir. Minkowski fark için de benzer bir yaklaşım söz konusudur.

İlk olarak 1903 yılında Hermann Minkowski tarafından tanımlanan bu toplamın $\mathbb{R}^3$ uzayında, bilgisayar kullanılarak yapılan dizayn ve yapılar [6], bilgisayar animasyonları ve dönüştürme (morphing) [5], şekil biliminde (morphology) görüntü analizleri [10], robot hareket planlamaları [7], cisim modellenmesi ve kristal büyüme [4] gibi birçok uygulaması vardır. Ayrıca cebirsel toplam ve farkın matematiğin ve diğer bilim dallarının birçok alanında kullanıldığı da bilinen bir gerçektir. Özel olarak, iki kümenin, özellikle de iki polihedral veya iki konveks kümenin cebirsel toplamlarının hacimlerini bulma problemi oldukça önemlidir.

Bu çalışmada, ilk olarak, $\mathbb{R}^n$'nin alt kümeleri ailesi üzerinde tanımlanan cebirsel toplam ve Minkowski fark işlemleri tanıtılmış, bunların önemli bazı özellikleri kanıtlanmıştır. Bunlar ayrı ayrı ele alınarak, önce, iki polihedral kümenin cebirsel toplamlarının hacimlerini bulma problemi üzerinde durulmuştur. Daha sonra düzlemde ve uzayda, iki konveks küme için aynı problem ele alınmış ve bu problemin çözümü düzlemde eğrisel integralle, uzayda ise, yüzey integraliyle formüle edilmiştir. Ayrıca cebirsel toplam kullanılarak bir robotun engeller arasından hareketini sağlayan bir yöntem verilmiştir. Son olarak da bilgisayarda oluşturulan grafiklerin diletasyon ve erozyon işlemleri cebirsel toplam ve Minkowski fark işlemleriyle ifade edilmiş ve bunlara dayalı olarak açıklaştırma ve koyulaştırma dönüşümleri tanımlanıp bunların dijital fotoğraflara nasıl uygulandığı açıklanmıştır.

2 CEBİRSEL KÜME TOPLAMI

Bu bölümde cebirsel toplam kavramı ve özellikleri tanıtılacaktır. Buna ek olarak cebirsel küme toplamının algoritması verilecektir.

2.1 Cebirsel Küme Toplam Tanımı ve Özellikleri

Tanım 2.1.1. *$A, B \subset \mathbb{R}^n$ kümeleri verilsin.*
$A \oplus B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ kümesine A ve B kümelerinin cebirsel toplamı denir.

Farklı kaynaklarda Cebirsel toplam işareti değişiktir. Bazen bu $+$ bazen de $\oplus_M$ olarak gösterilir. Bu çalışmada $\oplus$ ile gösterilmektedir.

Tanım 2.1.2. *$A \subset X$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ verilsin. $\alpha A := \{\alpha a \mid a \in A\}$ kümesine A kümesinin α ile skaler çarpımı denir.*

Tanım 2.1.3. *$A, B \subset \mathbb{R}^n$ kümeleri verilsin. $A\dot{+}B := cl(A \oplus B)$ kümesine A ve B kümelerinin Minkowski toplamı denir.*

A ile B'nin cebirsel toplamı, A ve B kümelerinin elemanları toplamının birleşimi olarak da yazılabilir.

Önerme 2.1.4. *$A, B \subset \mathbb{R}^n$ kümeleri verilsin. Bu durumda*

$$A \oplus B := \bigcup_{b \in B} (A + b) \text{ ' dir.}$$

Kanıt. $x \in A \oplus B$ keyfi bir eleman olsun. Bu durumda $x = a + b$ olacak şekilde $\exists a \in A$ ve $\exists b \in B$ vardır. Buradan $x - b = a \in A$ olur. Dolayısıyla $x \in A + b \subset \bigcup_{b \in B} (A + b)$ elde edilir. O halde

$$A \oplus B \subset \bigcup_{b \in B} (A + b)$$

olur. Tersine $x \in \bigcup_{b \in B} (A + b)$ keyfi elemanı alınsın. Bu durumda $\exists b \in B$ için $x \in A + b$ ve $\exists a \in A$ için $x = a + b$ olur. O halde $x \in A \oplus B$ elde edilir.

Buradan $\bigcup_{b\in B}(A+b) \subset A \oplus B$ olur. Sonuç olarak

$$A \oplus B := \bigcup_{b\in B}(A+b)$$

elde edilir. □

Bu yaklaşım cebirsel toplamı anlamada yardımcı olacaktır.

Teorem 2.1.5. $2^{\mathbb{R}^n}$ *üzerinde kümelerin cebirsel toplama işlemi birleşmeli ve değişmelidir.* $\{0\}$ *bu toplama işleminin etkisiz elemanıdır.*

Kanıt. Cebirsel toplama işleminin birleşmeli ve değişmeli olduğu açıktır. Gösterilmesi gereken herhangi bir $A \subset \mathbb{R}^n$ için; $A \oplus \{0\} = \{0\} \oplus A = A$ olduğudur. $A = \{a \mid a \in A\} = \{a+0 \mid a \in A\} = A \oplus \{0\}$ olduğu açıktır. Toplama işlemi değişmeli olduğundan
$A = A \oplus \{0\} = \{0\} \oplus A$ elde edilir. □

Tanım 2.1.6. *Kapalı, birleşmeli ve birim elemanı olan kümeye yarı-grup denir.*

Sonuç 2.1.7. $(2^{\mathbb{R}^n}, \oplus)$, $\{0\}$ *birim elemanına sahip, değişmeli yarı-gruptur.*

Tanım 2.1.8. *Boş kümeden farklı* X *kümesinin üzerinde* $+ : X \times X \longrightarrow X$ *ve* $\cdot : \mathbb{R} \times X \longrightarrow X$ *işlemleri tanımlı olsun.* $(X, +)$ *değişmeli herhangi bir grup,* $\mathrm{u}, \mathrm{v} \in X$ *ve* $a, b \in \mathbb{R}$ *için*

1. $a \cdot (\mathrm{u}+\mathrm{v}) = a \cdot \mathrm{u} + a \cdot \mathrm{v}$
2. $(a+b) \cdot \mathrm{v} = a \cdot \mathrm{v} + b \cdot \mathrm{v}$
3. $a \cdot (b \cdot \mathrm{v}) = (a \cdot b) \cdot \mathrm{v}$
4. $1 \cdot \mathrm{v} = \mathrm{v}$

koşulları sağlanıyorsa $(X, +, \cdot)$ *doğrusal uzaydır denir.*

Aşağıdaki teoremde iki küme ailesinin birleşiminin cebirsel toplamının iki küme ailesinin elemanlarının cebirsel toplamının birleşimine eşit olduğu ifade edilmektedir.

Teorem 2.1.9. $(A_i)_{i\in I}, (B_j)_{j\in J} \subset 2^{\mathbb{R}^n}$ *küme aileleri verilsin. Bu durumda*

$$\bigcup_{i\in I}(A_i) \oplus \bigcup_{j\in J}(B_j) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J}(A_i \oplus B_j) \text{ olur.}$$

Kanıt. $x \in \bigcup_{i\in I}(A_i)\oplus\bigcup_{j\in J}(B_j)$ herhangi bir eleman olsun. Bu durumda $x = a+b$ olacak şekilde $\exists a \in \bigcup_{i\in I}(A_i), \exists b \in \bigcup_{j\in J}(B_j)$ vardır. Buradan $\exists i_o \in I$ ve $\exists j_o \in J$ için $a \in A_{i_o}$ ve $b \in B_{j_o}$ olur. O halde $x = a+b \in A_{i_o} \oplus B_{j_o} \subset \bigcup_{(i,j)\in I\times J}(A_i \oplus B_j)$ yani $\bigcup_{i\in I}(A_i) + \bigcup_{j\in J}(B_j) \subset \bigcup_{(i,j)\in I\times J}(A_i \oplus B_j) \ldots (1)$ elde edilir.
$x \in \bigcup_{(i,j)\in I\times J}(A_i \oplus B_j)$ herhangi bir eleman olsun. Bu durumda $\exists(i_o, j_o) \in I \times J$ için $x \in A_{i_o} \oplus B_{j_o}$ olur. O halde $x = a + b$ olacak şekilde $\exists a \in A_{i_o}$ ve $\exists b \in B_{j_o}$ vardır. Buradan $a \in \bigcup_{i\in I}(A_i)$ ve $b \in \bigcup_{j\in J}(B_j)$ elde edilir. Sonuç olarak
$x = a + b \in \bigcup_{i\in I}(A_i) \oplus \bigcup_{j\in J}(B_j)$ yani $\bigcup_{(i,j)\in I\times J}(A_i \oplus B_j) \subset \bigcup_{i\in I}(A_i) \oplus \bigcup_{j\in J}(B_j) \ldots (2)$ olur. (1) ve (2)' den eşitlik elde edilir. □

Aşağıdaki önermede cebirsel küme toplamının küme birleşimi üzerine dağıldığı ifade edilmektedir.

Önerme 2.1.10. $A, B, C \subset \mathbb{R}^n$ *kümeleri verilsin. Bu durumda*

$$A \oplus (B \cup C) = (A \oplus B) \cup (A \oplus C) \quad \text{olur.}$$

Kanıt. Cebirsel toplam tanımından

$$\begin{aligned} A \oplus (B \cup C) &= A \oplus \{x \mid x \in B \text{ veya } x \in C\} \\ &= \{a + x \mid a \in A, x \in B \text{ veya } x \in C\} \\ &= \{a + x \mid a \in A, x \in B\} \cup \{a + x | a \in A, x \in C\} \\ &= (A \oplus B) \cup (A \oplus C) \end{aligned}$$

elde edilir. □

Aşağıdaki teoremde iki küme ailesinin arakesitlerinin cebirsel toplamının iki küme ailesinin elemanlarının cebirsel toplamının arakesitinin alt kümesi

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

olduğu gösterilmiştir.

Teorem 2.1.11. $(A_i)_{i\in I}, (B_j)_{j\in j} \subset 2^{\mathbb{R}^n}$ *küme aileleri verilsin. Bu durumda*

$$\bigcap_{i\in I} A_i \oplus \bigcap_{j\in J} B_j \subset \bigcap_{(i,j)\in I\times J} (A_i \oplus B_j) \text{ olur.}$$

Kanıt. $x \in \bigcap_{i\in I} A_i \oplus \bigcap_{j\in J} B_j$ olsun. Bu durumda $x = a+b$ olacak şekilde $\exists a \in \bigcap_{i\in I} A_i$ ve $\exists b \in \bigcap_{j\in J} B_j$ vardır. Buradan $\forall i \in I$ için $a \in A_i$ ve $\forall j \in J$ için $b \in B_j$ olur. Dolayısıyla $\forall (i,j) \in I \times J$ için $x = a + b \in A_i \oplus B_j$ olur. Buradan $x \in \bigcap_{(i,j)\in I\times J} (A_i \oplus B_j)$ elde edilir. O halde $\bigcap_{i\in I} A_i \oplus \bigcap_{j\in J} B_j \subset \bigcap_{(i,j)\in I\times J} (A_i \oplus B_j)$ olur. $\square$

$$\bigcap_{(i,j)\in I\times J} (A_i \oplus B_j) \subset \bigcap_{i\in I} A_i \oplus \bigcap_{j\in J} B_j$$

kapsamı doğru olmayabilir. Örnek 2.1.13 da buna bir örnek verilmiştir.

Örnek 2.1.12. $A_1 = \{2\}, A_2 = \{3\}, B_1 = [2,4], B_2 = [4,6]$ *kümeleri verilsin. Bu durumda*

$A_1 \oplus B_1 = [4,6], A_1 \oplus B_2 = [6,8],$

$A_2 \oplus B_1 = [5,7], A_2 \oplus B_2 = [7,9],$

$A_1 \cap A_2 = \emptyset, B_1 \cap B_2 = \{4\}$ *olur.* $I = J = \{1,2\}$ *olmak üzere*

$\bigcap_{(i,j)\in I\times J} A_i \oplus B_j = [6,9] \nsubseteq \bigcap_{i\in I} A_i \oplus \bigcap_{j\in J} B_j = \emptyset \oplus \{4\} = \emptyset$ *elde edilir.*

Tanım 2.1.13. $A \subset \mathbb{R}^n$ *kümesi verilsin.* $\forall a, b \in A$ *için*

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = a + t(b-a), 0 \le t \le 1\} \subset A$$

oluyorsa A'ya konveks küme denir.

Teorem 2.1.14. $A, B, C \subset \mathbb{R}^n$ *keyfi kümeler olsun. O zaman*

$$(A \cap B) \oplus C \subset (A \oplus C) \cap (B \oplus C) \text{ ' dir.}$$

Buna ek olarak, A, B kapalı, konveks, $A \cup B$ ve C konveks ise

$$(A \cap B) \oplus C = (A \oplus C) \cap (B \oplus C) \quad \text{' dir.}$$

.

Kanıt. Teorem 2.1.11' den $(A \cap B) \oplus C \subset (A \oplus C) \cap (B \oplus C)$ olur. Eşitlik için $(A \oplus C) \cap (B \oplus C) \subset (A \cap B) \oplus C$ gösterilmelidir. $x \in (A \oplus C) \cap (B \oplus C)$ olsun. O zaman $x = a + c = b + d$ olacak şekilde $\exists a \in A, \exists b \in B$ ve $\exists c, d \in C$ vardır . $A \cup B$ konveks ve kapalı olduğundan $[a, b] \cap (A \cup B)$ boştan farklı, kapalı ve konveks kümedir. Dolayısıyla $(1 - \alpha)a + \alpha b \in A \cap B$ olacak şekilde $\alpha \in [0, 1]$ sayısı vardır. Buradan C' nin de konveks olduğu kullanılarak

$$\begin{aligned} x &= (1 - \alpha)(a + c) + \alpha(b + d) \\ &= (1 - \alpha)a + \alpha b + (1 - \alpha)c + \alpha d \\ &\in (A \cap B) \oplus C \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $(A \oplus C) \cap (B \oplus C) \subset (A \cap B) \oplus C$ ' dir.
Böylece $(A \cap B) \oplus C = (A \oplus C) \cap (B \oplus C)$ elde edilir. □

Teorem 2.1.14' de A, B' nin konveks küme olma şartı sağlanmazsa teorem doğru olmayabilir. Örnek 2.1.15' de buna bir örnek verilmiştir.

Örnek 2.1.15. $A = \{2\}, B = \{4\}, C = [2, 4]$ *olsun. Bu durumda*
$(A \cap B) \oplus C = \emptyset \oplus [2, 4] = \emptyset$
ve $(A \oplus C) \cap (B \oplus C) = [4, 6] \cap [6, 8] = \{6\}$ *olur.*
Dolayısıyla $(A \oplus C) \cap (B \oplus C) = \{6\} \nsubseteq (A \cap B) \oplus C = \emptyset$*' dir.*

Teorem 2.1.16. $A, B \subset \mathbb{R}^n$ *kapalı, konveks kümeler ve* $A \cup B$ *konveks küme olsun. Bu durumda*

$$(A \cup B) \oplus (A \cap B) = A \oplus B \quad \text{' dir.}$$

Kanıt. $(A \cup B) \oplus (A \cap B) \subset A \oplus B$ olduğu açıktır. $a \in A, b \in B$ olsun. $A \cup B$ konveks olduğundan $a_1 = (1 - \alpha)a + \alpha b \in A \cap B, b_1 = \alpha a + (1 - \alpha)b \in A \cup B$

olacak şekilde $\exists \alpha \in [0,1]$ vardır. Buradan $a_1+b_1 = a+b$ elde edilir. Dolayısıyla

$$A \oplus B \subset (A \cup B) \oplus (A \cap B) \text{ ' dir.}$$

Sonuç olarak $(A \cup B) \oplus (A \cap B) = A \oplus B$ olur. □

Teorem 2.1.17. *$A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^n$ konveks kümeler ise $A_1 \oplus A_2$ konvekstir.*

Kanıt. $a, b \in A_1 \oplus A_2$ keyfi elemanlar olsunlar. Böylece $a = a_1+a_2$ ve $b = b_1+b_2$ olacak şekilde $\exists a_i, b_i \in A_i,\ i = 1,2$ vardır. A_i konveks olduğundan dolayı $[a_i, b_i] \subset A_i$ ' dir. Bu nedenle

$$\begin{aligned}
[a,b] &= \{(1-t)a + tb \mid t \in [0,1]\} \\
&\subset \{(1-t)a_1 + tb_1 \mid t \in [0,1]\} + \{(1-t)a_2 + tb_2 | t \in [0,1]\} \\
&= [a_1, b_1] \oplus [a_2, b_2] \subset A_1 \oplus A_2
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $A_1 \oplus A_2$ de konveks olur. □

Tanım 2.1.18. *$A \subset \mathbb{R}^n$ kümesi verilsin. A kümesini içeren konveks kümelerin kesişimine A' nın konveks zarfı denir ve $convA$ ile gösterilir. A'yı içeren kapalı konveks kümelerin kesişimine A'nın kapalı konveks zarfı denir ve $\overline{conv}A$ ile gösterilir.*

Teorem 2.1.19. *$A, B \subset \mathbb{R}^n$ kümeleri verilsin. Bu durumda*

$$convA \oplus convB = conv(A \oplus B) \text{ olur.}$$

Kanıt. $A \subset convA, B \subset convB$ olduğundan ve cebirsel toplam alt küme olmayı koruduğundan $A \oplus B \subset convA \oplus convB$ olur.
Teorem 2.1.17' de iki konveks kümenin cebirsel toplamı yine konvekstir. Dolayısıyla $conv(A \oplus B) \subset convA \oplus convB$ olur.
$x \in convA \oplus convB$ keyfi bir eleman olsun. Bu durumda $x = y + z$ olacak şekilde $\exists y \in convA, \exists z \in convB$ vardır. $y \in convA$ ve $z \in convB$ olduğundan $y = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \alpha_{i-1}) a_i$ ve $z = \sum_{j=1}^{m} (\beta_j - \beta_{j-1}) b_j$ olacak şekilde $a_i \in A\{i = 1, \ldots, n\}$,

$b_j \in B\{j = 1, \ldots, m\}$ elemanları ve $0 = \alpha_o \leq \alpha_1 \leq \ldots \leq a_n = 1$ ve $0 = \beta_o \leq \beta_1 \leq \ldots \leq \beta_m = 1$ sayıları vardır. Buradan

$$x = y + z = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \alpha_{i-1}) a_i + \sum_{j=1}^{m} (\beta_j - \beta_{j-1}) b_j$$

olur.$\{v_o, v_1, \ldots, v_p\} = \{\alpha_o, \ldots, \alpha_n\} \cup \{\beta_o, \ldots, \beta_m\}$ ve $0 = v_o \leq v_1 \leq \ldots \leq v_p = 1$ olarak alınsın. Buna ek olarak $\alpha_{q(k)-1} \leq v_{k-1} \leq v_k \leq \alpha_{q(k)}$, $\beta_{r(k)-1} \leq v_{k-1} \leq v_k \leq \beta_{r(k)}$ olur. O zaman

$$x = \sum_{i=1}^{p} (v_i - v_{i-1}) a_{q(i)} + \sum_{i=1}^{p} (v_i - v_{i-1}) b_{r(i)} = \sum_{i=1}^{p} (v_i - v_{i-1}) (a_{q(i)} + b_{r(i)})$$

olur. Böylece $x \in conv(A \oplus B)$ elde edilir. O halde

$$convA \oplus convB = conv(A \oplus B)$$

olur. □

Uyarı 2.1.20. *Teorem 2.1.17' de verilen A, B kümeleri konveks ise $A \oplus B$ kümesi de konvekstir. Gerçekten A ve B konveks olduğundan $A = convA_1$ ve $B = convB_1$ olacak şekilde A_1 ve A_2 kümeleri vardır. Bu durumda $A \oplus B = conv(A_1 \oplus B_1)$' dir.*

Teorem 2.1.21. *$A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt bir küme ise kapalı ve sınırlıdır.*

Teorem 2.1.22. *$A \subset \mathbb{R}^n$ kapalı bir küme, $B \subset \mathbb{R}^n$ de kompakt bir küme ise $A \oplus B$ kapalı kümedir.*

Kanıt. $A \oplus B \subset \overline{A \oplus B}$ olduğu açıktır. $\overline{A \oplus B} \subset A \oplus B$ olduğu gösterilmelidir. $c \in \overline{A \oplus B}$ olsun. Bu durumda $\exists (c_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A \oplus B$ dizisi $c_n \longrightarrow c$ olacak şekilde vardır. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $c_n \in A \oplus B$ olduğundan $c_n = a_n + b_n$ olacak şekilde $a_n \in A, b_n \in B$ vardır. B kompakt olduğundan $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset B$ dizisinin yakınsak bir $(b_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ alt dizisi vardır. $b_{n_k} \longrightarrow b \in B$ olsun. Bu durumda $\forall k \in \mathbb{N}$ için $c_{n_k} = a_{n_k} + b_{n_k}$ buradan $a_{n_k} = c_{n_k} - b_{n_k} \longrightarrow c - b$ olur. $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \subset A$ ve A kapalı olduğundan $c - b \in A$' dır. Buradan $c \in A + b \subset A \oplus B$ elde edilir. O halde $\overline{A \oplus B} \subset A \oplus B$' dir. □

Teorem 2.1.23. *(Tychonoff Teoremi)* (X, τ_x), (Y, τ_y) *kompakt uzaylar olsun. Bu durumda* $X \times Y$ *topolojik uzayı da kompakttır.*

Aşağıdaki teorem kompakt kümelerin cebirsel toplamının da kompakt olduğunu vermektedir.

Teorem 2.1.24. $A, B \subset \mathbb{R}^n$ *kompakt kümeler ise* $A \oplus B$ *kompakttır.*

Kanıt. A, B kompakt kümeleri için Tychonoff Teoremi'nden bunların kartezyen çarpımı $A \times B$, $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$' nin kompakt bir alt kümesidir.
$(a, b) \in A \times B$ olsun. Cebirsel toplam tanımından $a + b \in \mathbb{R}^n$' dir.
$f : A \times B \to \mathbb{R}^n$, $f(a, b) = a+b$ sürekli bir fonksiyondur. $A \times B$ kompakt ve f sürekli bir fonksiyon olduğundan $A \oplus B$ cebirsel toplamı da kompakt olur. □

Sıradaki teorem cebirsel küme toplamının alt küme olmayı koruduğunu gösterecektir.

Teorem 2.1.25. $A_i, B_i \subset \mathbb{R}^n$ $i = 1, 2$ *kümeleri verilsin. Bu durumda* $A_i \subset B_i$ $i = 1, 2$ *ise*

$$A_1 \oplus A_2 \subset B_1 \oplus B_2 \text{ olur.}$$

Kanıt. $A_1 \subset B_1$, $A_2 \subset B_2$ ve $z \in A_1 \oplus A_2$ olsun. Bu durumda $z = x+y$ olacak şekilde $x \in A_1, y \in A_2$ vardır. $A_1 \subset B_1$, $A_2 \subset B_2$ olduğundan $x \in B_1, y \in B_2$ dolayısıyla $z = x + y \in B_1 \oplus B_2$ olur. Buradan $A_1 \oplus A_2 \subset B_1 \oplus B_2$ elde edilir. □

Teorem 2.1.26. $A, B \subset \mathbb{R}^n$ *kümeleri ve* $\alpha \in \mathbb{R}$ *için* $\alpha A \oplus \alpha B = \alpha(A \oplus B)$' *dir.*

Kanıt. $x \in \alpha A \oplus \alpha B$ olsun. $x \in \alpha(A \oplus B)$ olduğu gösterilmelidir. $x \in \alpha A \oplus \alpha B$ olduğundan $x = \alpha a + \alpha b$ olacak şekilde $\exists a \in A, \exists b \in B$ vardır. Buradan $x = \alpha(a + b) \in \alpha(A \oplus B)$ olur. Dolayısıyla

$$\alpha A \oplus \alpha B \subset \alpha(A \oplus B)\text{'dir} \tag{2.1}$$

$x \in \alpha(A \oplus B)$ olsun. Bu durumda $x = \alpha(a + b)$ olacak şekilde $\exists a \in A, \exists b \in B$ vardır. Buradan $x = \alpha a + \alpha b \in \alpha A \oplus \alpha B$ elde edilir.

O halde

$$\alpha(A \oplus B) \subset \alpha A \oplus \alpha B\text{'dir.} \tag{2.2}$$

(2.1) ve (2.2) den

$$\alpha A \oplus \alpha B = \alpha(A \oplus B)$$

elde edilir. □

Teorem 2.1.27. *$A \subset \mathbb{R}^n$ kümesi ve $\alpha, \beta \geq 0$ sayıları için*

$$(\alpha + \beta)A \subset \alpha A \oplus \beta A \text{ ' dir.}$$

Buna ek olarak A konveks ise

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A \oplus \beta A \text{ olur.}$$

Kanıt. $\alpha = \beta = 0$ ise hem alt küme olma hem de eşitlik açıktır. $\alpha, \beta \geq 0$ ve $x \in (\alpha + \beta)A$ olsun. Bu durumda $x = (\alpha + \beta)a$ olacak şekilde $a \in A$ vardır. Buradan $x = \alpha a + \beta a \in \alpha A \oplus \beta A$ elde edilir. Yani $(\alpha + \beta)A \subset \alpha A \oplus \beta A$ olur. A konveks olsun. Eşitliği göstermek için $\alpha A \oplus \beta A \subset (\alpha + \beta)A$ olduğunu göstermek yeterlidir.
$t := \frac{\beta}{\alpha+\beta}$ olsun. O zaman $t \in [0, 1]$' dir.
$1 - t = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ olduğundan $\alpha = (1 - t)(\alpha + \beta)$ ve $\beta = (\alpha + \beta)t$ olur.
$a_1, a_2 \in A$ keyfi elemanlar olsunlar. Bu durumda

$$\alpha a_1 + \beta a_2 = (\alpha + \beta)((1 - t)a_1 + ta_2) \in (\alpha + \beta)[a_1, a_2]\text{' dir.} \tag{2.3}$$

A konveks olduğundan $[a_1, a_2] \subset A$' dır. (2.3) den , $\alpha A \oplus \beta A \subset (\alpha + \beta)A$ elde edilir. Sonuç olarak

$$\alpha A \oplus \beta A = (\alpha + \beta)A$$

olur. □

A konveks olmadığında yukarıdaki eşitlik doğru olmayabilir. Sıradaki örnekte bu duruma bir örnek verilmiştir.

Örnek 2.1.28. $A = \{0, 4\}, \quad \alpha = 1, \quad \beta = 4$ *olsun. O zaman*
$(\alpha + \beta)A = (1 + 4)\{0, 4\} = 5\{0, 4\} = \{0, 20\}$ *ve*
$\alpha A \oplus \beta A = 1\{0, 4\} \oplus 4\{0, 4\} = \{0, 4\} \oplus \{0, 16\} = \{0, 4, 16, 20\}$ *olur.*
Dolayısıyla $(\alpha + \beta)A \neq \alpha A \oplus \beta A$ *elde edilir.*

Tanım 2.1.29. *(Taban Tanımı) (X, τ) topolojik uzay X'in boş olmayan alt kümelerinin bir $\mathcal{B}$ ailesi için aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa $\mathcal{B}$' ya τ için bir tabandır denir.*

i. *$\mathcal{B}$ ye ait her küme açık küme olmalıdır, yani $\mathcal{B} \subset \tau$ olmalıdır.*

ii. *Boş olmayan her açık küme $\mathcal{B}$ ye ait kümelerin bir birleşimi olarak yazılmalıdır.*
$\mathcal{B}, \tau$ için tabandır $\Longleftrightarrow \forall\ U \in \tau$ *için* $\exists \mathcal{B}' \subset \mathcal{B} \ni U = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B$

Tanım 2.1.30. *(X, τ) topolojik uzay $x \in X$ için $\mathcal{N}(x)$, x'in komşuluklar ailesi ve $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}(x)$ olsun. Eğer $\forall\ V \in \mathcal{N}(x)$ için $\exists U \in \mathcal{M} \ni x \in U \subset V$ ise $\mathcal{M}$'ye x'in komşuluklar tabanı denir.*

Tanım 2.1.31. *(X, τ) topolojik uzayı ve $A \subset X$ verilsin. $\forall U$ açık kümesi ve $x \in U$ için $U \cap A \neq \emptyset, \quad U \cap (X \backslash A) \neq \emptyset$ oluyorsa x'e A' nın bir sınır noktası denir.*
A' nın tüm sınır noktaları kümesi ∂A veya bdA ile gösterilir.

Teorem 2.1.32. *(Kısaltma Kuralı) $A, B, C \subset \mathbb{R}^n$, B sınırlı ve C konveks ise*

$$A \oplus B \subset \overline{C \oplus B} \Longrightarrow A \subset C \text{ olur.}$$

Kanıt. $\mathcal{U}, X$ topolojik vektör uzayında sıfırın komşuluklar tabanı olsun. Herhangi bir $\mathcal{U}$ komşuluğu için $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi, $V_0 + V_0 \subset U, \quad V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n$ ve $\ldots V_{n+1} \subset V_n \subset \ldots \subset V_1 \subset V_0 \subset U$ olacak şekilde seçilsin. $A \oplus B \subset \overline{C \oplus B}$ olduğundan $\forall\ \ V \in \mathcal{U}$ için $A \oplus B \subset C \oplus B \oplus V$ ve bundan dolayı $\forall n \in \mathbb{N}$ için $A \oplus B \subset C \oplus B \oplus V_n$ olur. $a \in A,\ b_1 \in B$ olsun. Bu durumda
$a + b_1 = c_1 + b_2 + v_1$ olacak şekilde $c_1 \in C, b_2 \in B, v_1 \in V_1$ ve
$a + b_2 = c_2 + b_3 + v_2 \quad c_2 \in C, b_3 \in B, v_2 \in V_2$ vardır. $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$a + b_n = c_n + b_{n+1} + v_n \quad c_n \in C, b_{n+1} \in B, v_n \in V_n$ olur. Bundan dolayı $a = \dfrac{1}{n}(c_1 + \ldots + c_n) + \dfrac{1}{n}(b_{n+1} - b_1) + \dfrac{1}{n}(v_1 + \ldots + v_n),\ n \in \mathbb{N}$ olur. C'nin konveksliği ve B'nin sınırlılığından yeterince büyük $n \in \mathbb{N}$ için
$a + C + v_0 + v_1 + \ldots + v_n \subset C + U$ olur. Böylece $\forall U \in \mathcal{U}$ için $A \subset C + U$ ve buradan $A \subset C$ olur. $A \subset C + \bigcap\limits_{U \in \mathcal{U}} U = C$ elde edilir. □

Teorem 2.1.33. *(Sıralı Kısaltma) $A, B, C \subset \mathbb{R}^n$, herhangi bir A kümesi, B sınırlı kümesi ve C konveks, kompakt kümesi için*

$$A \oplus B \subset C \oplus B \Longrightarrow A \subset C \text{ ' } dir.$$

Kanıt. C kompakt, B sınırlı olduğundan cebirsel toplamları da kapalı olacağından $C \oplus B = \overline{C \oplus B}$ olur. Dolayısıyla Teorem 2.1.32' ten $A \oplus B \subset C \oplus B$ iken $A \subset C$ elde edilir. □

Teorem 2.1.34. *A ile C kümeleri $\mathbb{R}^n$' de kapalı, konveks kümeler ve $B \subset \mathbb{R}^n$ kümesi de sınırlı ise*

$$A \oplus B = C \oplus B \Longrightarrow A = C \quad olur.$$

Kanıt. $A \oplus B = C \oplus B$ iken $A \subset C$ olduğu açıktır. Ters kapsam gösterilmelidir.
$c \in C$ olsun. Bu durumda $A \oplus B = C \oplus B$ olduğundan
$c + b_1 = a_1 + b_2$ olacak şekilde $b_1, b_2 \in B, a_1 \in A$ vardır.
Aynı zamanda
$c + b_2 = a_2 + b_3$ olacak şekilde $b_3 \in B, a_2 \in A$ vardır. Bu durum genelleştirilirse $\forall n \in \mathbb{N}$ için
$c + b_n = a_n + b_{n+1}$ olacak şekilde $a_n \in A, b_{n+1} \in B$ vardır. Buradan

$$c = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + \frac{1}{n}(b_{n+1} - b_1) \tag{2.4}$$

elde edilir. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall i \in \{1, 2 \ldots, n\}$ için $a_i \in A$ ve A konveks olduğundan $\dfrac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \in A$' dır. B sınırlı küme ve $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset B$ olduğundan $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin yakınsak bir alt dizisi vardır. Genelliği bozmadan $b_n \to b_o$ olsun. Bu durumda $n \to \infty$ için limit alınırsa A' nın kapalılığından

$$
\begin{aligned}
c &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + \frac{1}{n}(b_{n+1} - b_1) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \in A
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan $C \subset A$'dır. Sonuç olarak $A = C$ olur. □

Teorem 2.1.35. *A ve B iki konveks çokgen ve m, n sırasıyla bunların kenar sayısı olsun. $A \oplus B$ cebirsel toplamın köşe sayısı en fazla $m+n$ olan çokgendir.*

Sonuç 2.1.36. *A, B çokgenlerinin aynı yöne bakan kenarları paralel değilse $A \oplus B$'nin kenar sayısı tam olarak $m + n$ dir.*

Tanım 2.1.37. *$(X, \boldsymbol{A})$ ölçülebilir uzay olsun. ($\boldsymbol{A}, X'$in alt kümelerinin σ-cebiri) $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $\forall c \in \mathbb{R}$ için $f^{-1}((c, \infty)) = \{x \in X : f(x) > c\}$ kümesi ölçülebilir ise ($f^{-1}((c, \infty)) \in \boldsymbol{A}$) f ölçülebilirdir denir.*

Cebirsel küme toplamı aşağıdaki eşitsizliği sağlar.

Teorem 2.1.38. *$A, B \subset \mathbb{R}^n$ kümeleri verilsin. $|A \oplus B|$, A ile B' nin cebirsel toplamının afin uzayının boyutu olarak verilsin. Bu durumda $|A \oplus B| \leq |A||B|$ olur.*

Kanıt. Konveks kümelerin cebirsel toplamı konveks idi. Cebirsel küme toplamı A ile B'nin kartezyen çarpımında tanımlı bir fonksiyonun görüntüsüdür. Yani $f : A \times B \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(a, b) = a + b$ ile tanımlı f fonksiyonu için $f(A \times B) = A \oplus B$'dir. Kartezyen çarpımın boyutu, kümelerin boyutunun çarpımına eşit olduğundan

$$|A \oplus B| \leq |A||B|$$

elde edilir. □

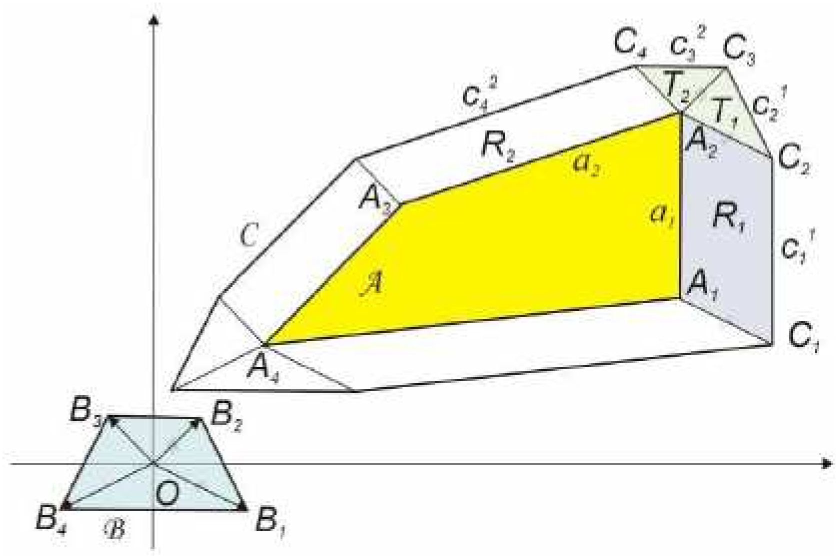
2.2 Konveks Kümelerin Cebirsel Toplamının Alanı ve Hacmi

Teorem 2.2.1. *A, B konveks çokgenler, $\mathbf{0} = (0, 0)$ B çokgeninin bir iç noktası ve $C = A \oplus B$ olsun. Bu durumda $P(C)$, C çokgeninin yüzey alanı, $P(A), P(B)$ sırasıyla A ile B çokgeninin alanı, a_i A çokgeninin kenarları,*

b_i B çokgeninin kenarları ve v_i'ler de toplam sonucu oluşan paralelkenarların yükseklikleri olmak üzere

$$P(C) = P(A) + P(B) + \sum_{i=1}^{n} |a_i||v_i|$$

olur.



Şekil 2.1. İki konveks çokgeninin cebirsel toplamının yüzey alanı

Kanıt. $A_1, A_2, \ldots, A_m,$ A çokgeninin köşeleri ve $B_1, B_2, \ldots, B_n,$ B çokgeninin köşeleri olsun. A çokgeninin kenarları $i = 1, 2, \ldots, m$ için
$a_i = A_iA_{i+1}, A_{m+1} = A_1$ ve Y çokgeninin kenarları $b_j = B_jB_{j+1}, j = 1, 2, \ldots, n$ $B_{n+1} = B_1$ ile gösterilsin. Teorem 2.1.35' den m, A'nın köşe sayısı ve n, B'nin köşe sayısı olmak üzere çokgenlerin cebirsel toplamının köşeleri en fazla $m + n$ kadardır. C çokgeninin köşeleri $C_1, C_2, \ldots, C_{m+n},$ $c_k^i = C_kC_{k+1}$ veya $c_k^j = C_kC_{k+1}$ ise C'nin kenarları olmak üzere bu kenarlar A veya B çokgenlerinin kenarlarına paraleldir. C çokgeninin alanı iki bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümü A'dan, ikinci bölümü ise paralelkenar ve üçgenlerden gelir ve aşağıdaki şekilde oluşturulur.$(A \subset C, \mathbf{0} \in B)$

1. a_i kenarı tarafından belirlenen c_k^i kenarı vardır öyle ki $a_i // c_k^i$' dir. n_i' ler B çokgeninin köşegen vektörleri olmak üzere a_i' leri n_i' ler kadar kay-

dırarak c_k^i' ler oluşturulur. O zaman $C_k = A_i + b_j$ olur. a_i kenarlarının her iki tarafında R_i denilen paralelkenarları ve paralelkenarların yüksekliği v_i alınırsa bu R_i' lerin alanı $P(R_i) = |a_i| \cdot |v_i|$ olur.

2. $C_k = A_i + b_j$ ve $C_{k+1} = A_i + b_{j+1}$ olmak üzere $c_k^j = C_k C_{k+1}$ olur ve buradan
   $T_j = C_k C_{k+1} A_i$ üçgenleri elde edilir. B çokgeninin alanı bu üçgenlerin alanlarının toplamından elde edilir.$P(B) = \sum_{j=1}^{m} P(T_j)$

Buradan

$$P(C) = P(A) + P(B) + \sum_{i=1}^{n} |a_i| \cdot |v_i|$$

olarak C çokgeninin alanı elde edilir. □

Teorem 2.2.2. *(Green Teoremi) $K, X \subset \mathbb{R}^2$ nin pozitif yönlendirilmiş sınır eğrisi olsun. $\overline{X} = X \cup K$ $P,\ Q : \overline{X} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\overline{X}$' de iki sürekli fonksiyon ve X' de sürekli kısmi türevleri var olsun. O zaman*

$$\oint_K P dx + Q dy = \int\int_X \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy \ olur.$$

Örnek 2.2.3. *X bölgesinin yüzey alanı, K sınır eğrisi için*
$P(X) = \int\int_X 1.dxdy = \oint_K xdy = -\oint_K ydx$ *olarak ifade edilir.*

Tanım 2.2.4. *$S \subset \mathbb{R}^n$ bir konveks küme $x \in S$ olsun. $x_1, x_2 \in S, \lambda \in (0,1)$ için $x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$ iken $x = x_1 = x_2$ oluyorsa x' e S' nin bir uç(extreme) noktası denir. Yani $x \in S$, S' deki elemanların konveks kombinasyonu olarak yazılamıyorsa x' e bir uç nokta denir.*

Teorem 2.2.5. *$A, B \subset \mathbb{R}^2$ konveks, sınırlı ve kapalı kümeleri için $C = A \oplus B$ olsun. $c_1(t) = (x_1(t), y_1(t))$, $t \in I$ eğrisi A kümesinin sınırı, $c_2(s) = (x_2(s), y_2(s))$,*
$s \in J$ B kümesinin sınır eğrisi olsun. $s(t) : I \longrightarrow J$ parametresi alınsın.
$(dx_1(t), dy_1(t)) = k(dx_2(s(t)), dy_2(s(t)))$, $t \in I, k > 0$ olsun. Bu durumda $P(C), C$ kümesinin alanı olmak üzere

$$P(C) \;=\; P(A) + P(B) + \int_I \left\| (x_2(s(t)), y_2(s(t)), 0) \times \left(\frac{dx_1(t)}{dt}, \frac{dy_1(t)}{dt}, 0 \right) \right\| dt$$

olur.

Kanıt. $C = A \oplus B$ kümesinin uç noktaları A ile B'nin uç noktalarının toplamı biçiminde ifade edilebilir. Konveks kümeler için her uç nokta bir sınır noktasıdır. O halde C'nin sınır noktaları c_1 ve c_2 sınır eğrilerinin birini diğerine ekleyerek bulunabilir. c_3, C kümesinin sınır eğrisi olmak üzere c_3 için bir parametrizasyon $t \in I = [a, b]$ $c_3(t) = (x_1(t) + x_2(s(t), y_1(t) + y_2(s(t))$ olarak verilsin. Bu durumda

$$P(C) = \oint_{C_3} x dy = \int_I (x_1(t) + x_2(s(t))) d(y_1(t) + y_2(s(t)))$$

$$= \int_I x_1(t) d(y_1(t)) + \int_I x_2(s(t)) d(y_2(s(t))) + \int_I (x_2(s(t)) d(y_1(t)) + x_1(t) d(y_2(s(t))))$$

$$= P(A) + P(B) + \int_I (x_2(s(t)) d(y_1(t)) + x_1(t) d(y_2(s(t))))$$

Buradan

$$\int_I x_1(t) d(y_2(s(t))) = [x_1(t) y_2(s(t))]_a^b - \int_I y_2(s(t)) dx_1(t)$$

$C_3(t)$ eğrisi kapalı bir eğri olduğundan $[x_1(t) y_2(s(t))]_a^b = 0$ olur.

$$\int_I [x_2(s(t)) dy_1(t) + x_1(t) d(y_2(s(t)))]$$

$$= \int_I [x_2(s(t)) dy_1(t) - y_2(s(t) dx_1(t))]$$

$$= \int_I ||(x_2(s(t)), y_2(s(t)), 0) \times (\frac{dx_1(t)}{dt}, \frac{dy_1(t)}{dt}, 0)|| dt$$

elde edilir. Bu nedenle

$$P(C) = P(A) + P(B) + \int_I ||(x_2(s(t)), y_2(s(t)), 0) \times (\frac{dx_1(t)}{dt}, \frac{dy_1(t)}{dt}, 0)||dt$$

olur.

$\square$

Tanım 2.2.6. *$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ vektörleri için $(\vec{u} \times \vec{w}) \cdot \vec{v}$ ifadesine $\vec{u}, \vec{w}$ ve $\vec{v}$ vektörlerinin karma çarpımı denir.*

Teorem 2.2.7. *(Gauss Divergence) $V \subset \mathbb{R}^3$, S kapalı, sınırlı yüzey ve $P(x, y, z), Q(x, y, z)$ ile $R(x, y, z)$ birinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip fonksiyonların bölgesi olsun. O zaman;*

$$\int \int_S (Pdydz + Qdzdx + Rdxdy) = \int \int \int_V (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z})dxdydz$$

dir.

Teorem 2.2.8. *(Stoke's Teoremi) $S \subset \mathbb{R}^3$ kapalı yönlendirilmiş eğrisi ve $P(x, y, z), Q(x, y, z)$ ile $R(x, y, z)$ birinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip fonksiyonlar ve ∂S yönlendirilmiş olsun. Bu durumda*

$$\int_{\partial S} (Pdx+Qdy+Rdz) = \int \int_S ((\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})dydz + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})dzdx + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy)$$

olur.

Teorem 2.2.9. *$A, B \subset \mathbb{R}^3$ konveks, kapalı, sınırlı kümeler, $C = A \oplus B$ ve X_1, X_2 sırasıyla A ve B kümelerinin yüzeyleri olmak üzere $\overline{x_1}, \overline{x_2}$ bu yüzeylerin parametrizasyonları ve $\overline{x_1}, \overline{x_2}$ de C^2 sınıfından olsun. Parametreler*

$\overline{x_1}(u, v) = (x_1(u, v), y_1(u, v), z_1(u, v))$

$\overline{x_2}(u, v) = (x_2(u, v), y_2(u, v), z_2(u, v))$ $u, v \in \Omega$

olarak verilsin. n_1, X_1 yüzeyinin, n_2, X_2 yüzeyinin normal vektörü olmak üzere $n_1(u, v) = \lambda n_2(u, v)$ $\lambda > 0$ olsun. Bu durumda , $x_{iu} = \dfrac{\partial x_i}{\partial u}, x_{iv} = \dfrac{\partial x_i}{\partial v}$, $i = 1, 2$ ve (x_i, x_{iu}, x_{iv}) x_i, x_{iu}, x_{iv} vektörlerinin karma çarpımı olmak üzere C kümesinin hacmi $V(C)$

$$V(C) = V(A)+V(B)+\int\int_{\Omega}(x_2, x_{1u}, x_{1v})dudv+\int\int_{\Omega}(x_1, x_{2u}, x_{2v})dudv \quad (2.5)$$

olur.

Kanıt. Gauss- Divergence Teoremi' nden

$$\begin{aligned} V(A) &= \int\int\int_{A} 1dxdydz = \int\int_{bdA} zdxdy \\ &= \int\int_{\Omega} z_1(x_{1u}du + x_{1v}dv)(y_{1u}du + y_{1v}dv) \\ &= \int\int_{\Omega}(x_{1u}y_{1v}z_1 - x_{1v}y_{1u}z_1)dudv \end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde;

$$V(B) = \int\int_{\Omega}(x_{2u}y_{2v}z_2 - x_{2v}y_{2u}z_2)dudv$$

elde edilir. (2.5) eşitliğinin sağındaki karma çarpımları hesaplansın.

$$V(C) = V(A) + V(B) + \int\int_{\Omega}(x_2, x_{1u}, x_{1v})dudv + \int\int_{\Omega}(x_1, x_{2u}, x_{2v})dudv$$

$$\begin{vmatrix} x_{1u} & y_{1u} & z_{1u} \\ x_{1v} & y_{1v} & z_{1v} \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{2u} & y_{2u} & z_{2u} \\ x_{2v} & y_{2v} & z_{2v} \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}$$

$$= (x_{1u}y_{1v}z_2 + x_2y_{1u}z_{1v} + x_{1v}y_2z_{1u} - x_2y_{1v}z_{1u} - x_{1u}y_2z_{1v} - x_{1v}y_{1u}z_2)$$

$$+(x_{2u}y_{2v}z_1 + x_1y_{2u}z_{2v} + x_{2v}y_1z_{2u} - x_1y_{2v}z_{2u} - x_{2v}y_{2u}z_1 - x_{2u}y_1z_{2v})$$

Denklemin sağındaki ifade soldan çıkarılıp Green Teoremi uygulanırsa

$$V(C) - (V(A) + V(B) + \int\int_{\Omega}(x_2, x_{1u}, x_{1v})dudv + \int\int_{\Omega}(x_1, x_{2u}, x_{2v})dudv)$$

$$= \int\int_{\Omega}(x_{1u}y_{1v}z_2 + x_2y_{1u}z_{1v} + x_{1v}y_2z_{1u} - x_2y_{1v}z_{1u} - x_{1u}y_2z_{1v} - x_{1v}y_{1u}z_2)dudv$$

$$+\int\int_{\Omega}(x_{2u}y_{2v}z_1 + x_1y_{2u}z_{2v} + x_{2v}y_1z_{2u} - x_1y_{2v}z_{2u} - x_{2v}y_{2u}z_1 - x_{2u}y_1z_{2v})dudv$$

olur. A ile B kenarları sırasıyla $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ parametreli kümeler olduğundan Ω eğrisinin Γ sınırı boyunca sabittirler. Bundan dolayı eşitliğin sağ tarafı

$$\int_{x_1 o \Gamma} (-y_2 o x_1^{-1} z dx + x_2 o x_1^{-1} z dy) + \int_{x_2 o \Gamma} (-y_1 o x_2^{-1} z dx + x_1 o x_2^{-1} z dy)$$

integraline eşit olur. Bu integral denklemine Stoke's Teoremi uygulanırsa bu denklemin eşiti 0 olur dolayısyla $C = A \oplus B$ cebirsel toplamının hacmi

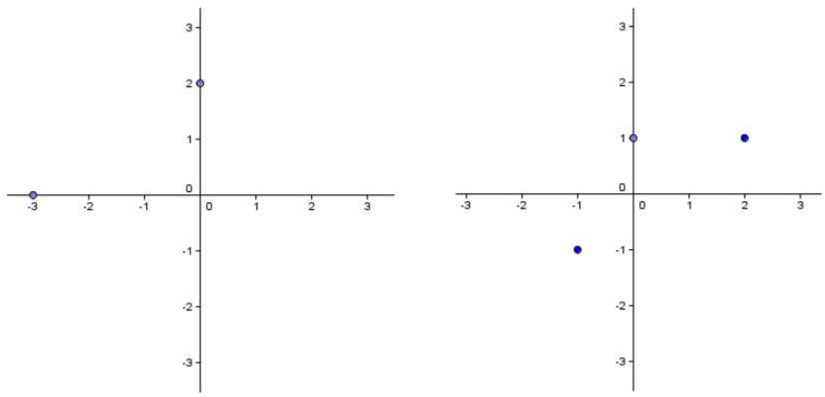
$$V(C) = V(A) + V(B) + \int\int_{\Omega} (x_2, x_{1u}, x_{1v}) dudv + \int\int_{\Omega} (x_1, x_{2u}, x_{2v}) dudv$$

olarak elde edilir. $\square$

2.3 Cebirsel Küme Toplamına Örnekler

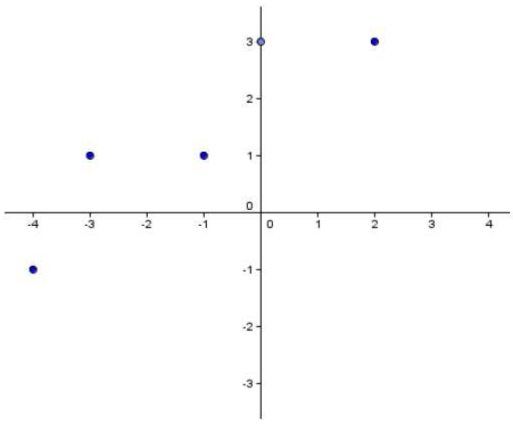
Örnek 2.3.1. *1.* $A = \{1, 3, 7\}$, $B = \{8, 10\}$ *kümeleri verilsin. Bu durumda* $A \oplus B = \{9, 11, 13, 15, 17\}$ *olur.*

2. $A = \{(-3, 0), (0, 2)\}, B = \{(-1, -1), (0, 1), (2, 1)\}$ *kümeleri verilsin. Bu durumda* $A \oplus B = \{(-4, -1), (-3, 1), (-1, 1), (0, 3), (2, 3)\}$ *olur. Bu kümeler ve cebirsel toplamları sırasıyla Şekil 2.2 ve Şekil 2.3' te verilmiştir.*

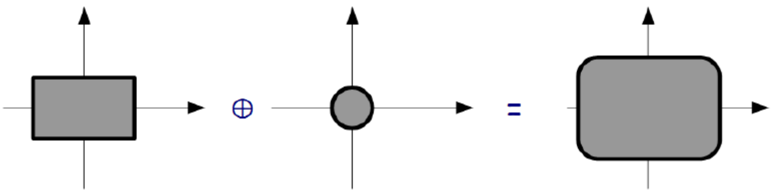


Şekil 2.2. A ile B kümeleri

3. Bir dikdörtgene bir daire eklenirse yuvarlak köşeli dörtgen elde edilir. Şekil 2.4 buna bir örnek oluşturur.

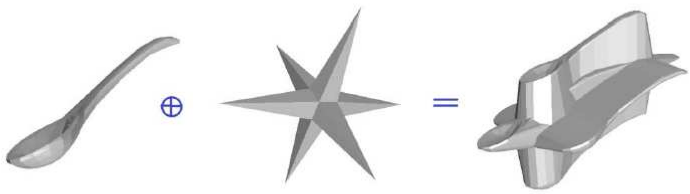


Şekil 2.3. A ile B kümelerinin cebirsel toplamı



Şekil 2.4. Bir dikdörtgenle bir dairenin cebirsel toplamı

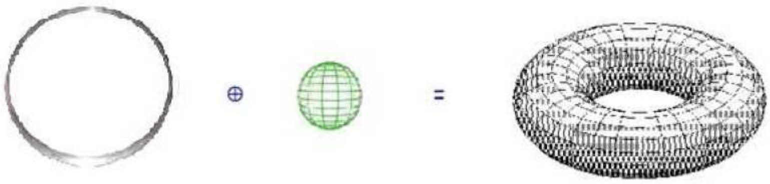
4. *Cebirsel küme toplamı yardımıyla üç boyutlu nesneler oluşturulabilir. Örneğin bir yıldız ve bir çay kaşığının şekli toplanılırsa Şekil 2.5' daki şekil elde edilir. Bu toplam [7] de verilmiştir.*



Şekil 2.5. Yıldız ile çay kaşığının cebirsel toplamı

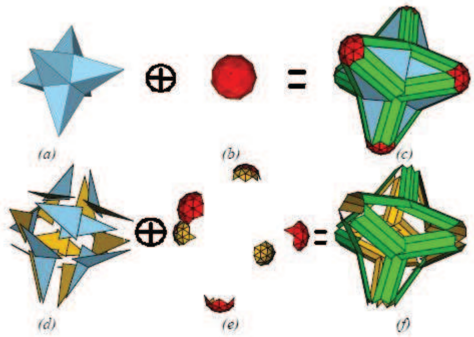
5. *İçi boş disk ile kürenin cebirsel toplamı tam Torusu verir. Şekil 2.6' de bu geometrik olarak verilmiştir.*

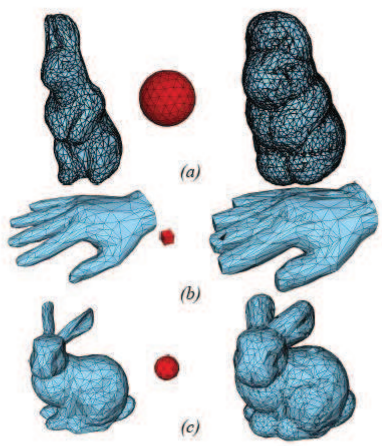
6. *Reel ve imajiner sayıların cebirsel toplamı karmaşık sayılar kümesini yani* $\mathbb{C} = \mathbb{R} + i\mathbb{R}$ *kümesini verir.*



Şekil 2.6. Çember ile kürenin cebirsel toplamı

7. *Aşağıdaki şekilde polihedral iki kümenin ve farklı kümelerin cebirsel toplamlarının nasıl yapıldığı hakkında bir fikir verecektir.*





3 MİNKOWSKİ KÜME FARKI

Bu bölümde kümeler için Minkowski fark tanımı verilecektir. Buna ek olarak, Minkowski farkın, sezgisel yaklaşım yoluyla, cebirsel toplamın ters işlemi olmadığı gösterilecektir. Daha sonra Minkowski farkının özellikleri anlatılacaktır.

3.1 Minkowski Küme Farkının Tanımı ve Özellikleri

Tanım 3.1.1. *$A, B \subset \mathbb{R}^n$ olsun. $A \ominus B := \bigcap_{b \in B} (A - b)$ ile tanımlı kümeye A ile B 'nin Minkowski farkı denir.*

Minkowski fark Pontryagin farkı, Minkowski geometrisi veya fark setleri olarak da adlandırılmaktadır. Minkowski farkı aşağıdaki gibi de ifade edilebilir.

Önerme 3.1.2. *$A, B \subset \mathbb{R}^n$ olsun. Bu durumda*

$$A \ominus B = \{x \mid \forall b \in B \ \textit{için} \ \ x + b \in A\} = \{x \mid x + B \subset A\}$$

B kümesi boş küme ise o zaman Minkowski farkı da boş kümeye eşittir.

Kanıt. $x \in A \ominus B$ olsun. Bu durumda
$x \in \bigcap_{b \in B} A - b$ olur. Buradan $\forall b \in B$ için $x \in A - b$ yani $x + b \in A$ olur. Dolayısıyla $A \ominus B \subset \{x \mid \forall b \in B \text{ için } \ x + b \in A\}$ elde edilir.

$y \in \{x \mid \forall b \in B \text{için } \ x + b \in A\}$ olsun. Bu durumda $\forall \ b \in B$ için $y + b \in A$ yani $y \in A - b$ olur. Buradan $y \in \bigcap_{b \in B} A - b = A \ominus B$ elde edilir. O halde

$$\{x \mid \forall b \in B \text{ için } \ x + b \in A\} \subset A \ominus B$$

olur. Sonuç olarak

$$A \ominus B = \{x \mid \forall b \in B \text{ için } \ x + b \in A\}$$

elde edilir. □

Cebirsel küme toplamı yardımıyla Minkowski küme farkı

$$A \ominus B \subset A \oplus (-B) = \{a - b \mid a \in A, b \in B\}$$

olarak da verilebilir.

Önerme 3.1.3. *$A, B, C \subset X$ kümeleri ve $\alpha \in \mathbb{R}^+$ verilsin. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır:*

1. $(A \ominus B) \ominus C = A \ominus (B \oplus C)$,
2. $(A \ominus C) \oplus B \subset (A \oplus B) \ominus C$,
3. $\alpha(A \ominus B) = \alpha A \ominus \alpha B$,
4. $(A \cap B) \ominus C = (A \ominus C) \cap (B \ominus C)$,
5. $A \subset C \Longrightarrow A \ominus B \subset C \ominus B$,
6. $(A \ominus B) \oplus B \subset A$.

Kanıt. 1.

$$\begin{aligned} x \in (A \ominus B) \ominus C &\iff x + C \subset A \ominus B \\ &\iff (x + C) \oplus B \subset A \\ &\iff x + (B \oplus C) \subset A \\ &\iff x \in A \ominus (B \oplus C) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} x \in (A \ominus C) \oplus B &\iff \exists y \in B,\ \exists z \in A \ominus C\ x = y + z \text{ olacak şekilde vardır.} \\ &\iff \exists y \in B, \exists z \in A \ominus C\ z + C \subset A \text{ ve } x = y + z \\ &\iff \exists y \in B, \exists z \in A \ominus C\ z + y + C \subset A + y \text{ ve } x = y + z \\ &\Longrightarrow x + C \subset A \oplus B \\ &\Longrightarrow x \in (A \oplus B) \ominus C \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned}\alpha(A\ominus B) &= \alpha\{x|x+B\subset A\}\\ &= \{\alpha x|x+B\subset A\}\\ &= \{\alpha x|\ \alpha x+\alpha B\subset \alpha A\}\\ &= \{y|\ y+\alpha B\subset \alpha A\}\\ &= \alpha A\ominus \alpha B \ \text{ olur.}\end{aligned}$$

4. Minkowski farkının tanımı kullanılarak

$$\begin{aligned}(A\cap B)\ominus C &= \bigcap_{c\in C}[(A\cap B)-c]\\ &= \bigcap_{c\in C}[(A-c)\cap(B-c)]\\ &= (\bigcap_{c\in C}A-c)\cap(\bigcap_{c\in C}B-c)\\ &= (A\ominus C)\cap(B\ominus C)\end{aligned}$$

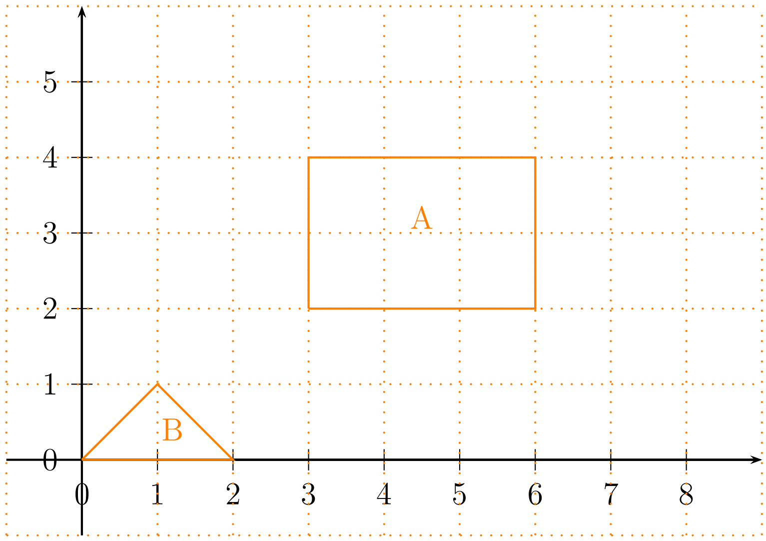
olur.

5.
$$\begin{aligned}x\in A\ominus B &\iff x+B\subset A\\ &\implies x+B\subset C\\ &\implies x\in C\ominus B\\ &\implies A\ominus B\subset C\ominus B\end{aligned}$$

6.
$$\begin{aligned}x\in(A\ominus B)\oplus B &\iff \exists y\in(A\ominus B)\ \text{ve}\ \ \exists z\in B\ \text{için}\ x=y+z\\ &\iff \exists y\in(A\ominus B)\ \text{ve}\ \ \exists z\in B\ \text{için}\ x=y+z\ \text{ve}\ y+B\subset A\\ &\implies \exists y\ \text{ve}\ \exists z\ \text{için}\ x=y+z\in y+B\subset A\\ &\implies x\in A\end{aligned}$$

□

Uyarı 3.1.4. *Önerme 3.1.3' in 3. maddesinde $\alpha=0$ alınırsa eşitlik doğru olmayabilir. Gerçekten $A\ominus B=\emptyset$ ise $\alpha(A\ominus B)=\emptyset$ ve $\alpha A\ominus\alpha B=\{0\}\ominus\{0\}=\{0\}$ olur. Dolayısıyla $\emptyset=\alpha(A\ominus B)\neq\alpha A\ominus\alpha B=\{0\}$' dır.*



Şekil 3.7. A ile B çokgenleri

Uyarı 3.1.5. *Önerme 3.1.3' ün son özelliğinden anlaşılacağı üzere Minkowski farkı cebirsel toplamın ters işlemi değildir. Sıradaki örnek bu gerçeği göstermektedir.*

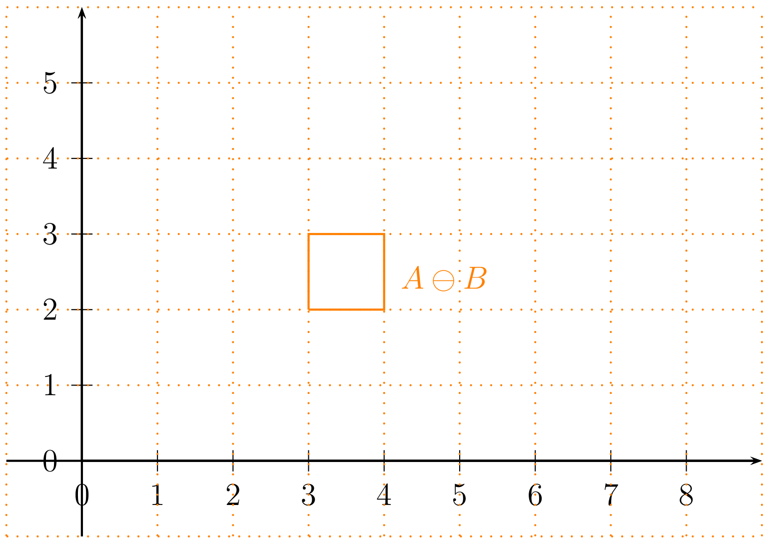
Örnek 3.1.6. *A köşeleri* $(3,2)$, $(6,2)$, $(6,4)$, $(3,4)$ *olan bir dikdörtgen, B köşeleri* $(0,0)$, $(2,0)$, $(1,1)$ *olan bir üçgen olsun. O zaman* $A \ominus B$ *Minkowski farkı köşeleri* $(3,2)$, $(4,2)$, $(4,3)$, $(3,3)$ *olan bir karedir. Minkowski farkı ve cebirsel toplam ters işlem olsaydı A bir dikdörtgen B bir üçgen iken* $A \ominus B$ *bir dikdörtgen olurdu. Şekil 3.7' de A ve B kümeleri, Şekil 3.8'da da* $A \ominus B$ *kümesi verilmiştir.*
$(A \ominus B) \oplus B$ *köşeleri* $(3,2)$, $(6,2)$, $(6,3)$, $(5,4)$, $(4,4)$, $(3,3)$ *olan bir altıgendir yani A'ya eşit değildir dolayısıyla Minkowski fark ve cebirsel toplam birbirlerinin ters işlemi değildir. Şekil 3.9' da* $(A \ominus B) \oplus B$ *kümesi verilmiştir.*

Teorem 3.1.7. $A \subset \mathbb{R}^n$ *konveks küme ve* $\alpha \geq \beta \geq 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *olsun. O zaman*

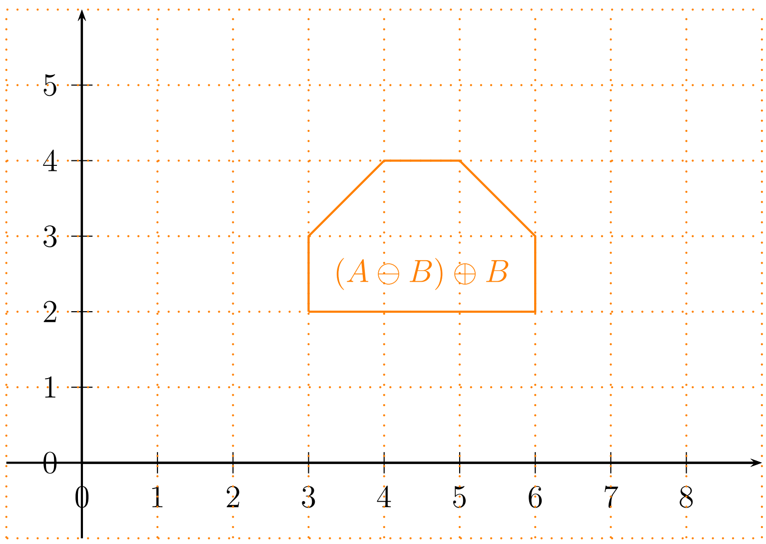
$$(\alpha - \beta)A \subset \alpha A \ominus \beta \text{ ' dır.} A$$

Buna ek olarak A kapalı ve $\alpha > \beta$ *ise*

$$(\alpha - \beta)A = \alpha A \ominus \beta A \text{ 'dır.}$$



Şekil 3.8. A ile B çokgenlerinin Minkowski farkı $(A \ominus B)$



Şekil 3.9. $(A \ominus B) \oplus B$ çokgeni

Kanıt. $(\alpha-\beta)A \subset \alpha A \ominus \beta A$ olduğu gösterilmelidir. A konveks, $\alpha-\beta \geq 0, \beta \geq 0$ olduğundan Teorem 2.1.27' den

$$\alpha A = (\alpha - \beta + \beta)A = (\alpha - \beta)A \oplus \beta A$$

elde edilir. Buradan $(\alpha - \beta)A \subset \alpha A \ominus \beta A$ olur.
A kapalı ve $\alpha > \beta$ olsun. $\alpha A \ominus \beta A \subset (\alpha - \beta)A$ kapsamı gösterilsin. $x \in \alpha A \ominus \beta A$ olsun. Bu durumda Minkowski farkın tanımından ve Teorem 2.1.27' den $x + \beta A \subset \alpha A = (\alpha - \beta)A \oplus \beta A$ olur. Buradan $x + \beta A \subset \beta A \oplus (\alpha - \beta)A$ elde edilir. Kısaltma kuralından $\{x\} \subset (\alpha - \beta)A$ yani $x \in (\alpha - \beta)A$ olur. Dolayısıyla $\alpha A \ominus \beta A \subset (\alpha - \beta)A$' dır. □

A'nın kapalı olmadığı durumda $(\alpha - \beta)A = \alpha A \ominus \beta A$ gerçeklenmeyebilir. Sıradaki örnek bunu göstermektedir.

Örnek 3.1.8. $A = (0, 2)$ *ve* $\alpha = 2, \beta = 1$ *olsun. Bu durumda*
$\alpha A \ominus \beta A = 2(0, 2) \ominus (0, 2) = \{x|(x, x + 2) \subset (0, 4)\} = [0, 2]$ *olur.*
$(\alpha-\beta)A = (2-1)(0, 2) = (0, 2)$ *olduğundan* $(0, 2) = (\alpha-\beta)A \neq \alpha A \ominus \beta A = [0, 2]$ *elde edilir.*

Teorem 3.1.9. $A, B, C \subset \mathbb{R}^n$*, C sınırlı, A kapalı ve konveks ise*

$$A \ominus B = (A \oplus C) \ominus (B \oplus C) \text{ 'dir.}$$

Kanıt. $x \in A \ominus B$ olsun. Bu durumda $x + B \subset A$' dır. Kapsamın her iki tarafına C eklenirse $(x + B) \oplus C \subset A \oplus C$ elde edilir. Buradan $x + (B \oplus C) \subset A \oplus C$ olur. Minkowski fark tanımından $x \in (A \oplus C) \ominus (B \oplus C)$' dir. Dolayısıyla

$$A \ominus B \subset (A \oplus C) \ominus (B \oplus C) \text{ ' dir.} \tag{3.6}$$

$x \in (A \oplus C) \ominus (B \oplus C)$ olsun. Bu durumda $x + (B \oplus C) \subset (A \oplus C)$' dir. Dolayısıyla $(x+B) \oplus C \subset A \oplus C$ olur. C sınırlı, A kapalı ve konveks olduğundan sıralı kısaltma kuralından $x + B \subset A$ yani $x \in A \ominus B$ elde edilir. Dolayısıyla

$$(A \oplus C) \ominus (B \oplus C) \subset A \ominus B \text{ 'dir.} \tag{3.7}$$

(3.6) ve (3.7) den istenen eşitlik elde edilir. □

Teorem 3.1.10. *$A, B \subset \mathbb{R}^n$ kümeleri verilsin ve $\{0\} \in B$ olsun. Bu durumda*

$$A \ominus B \subset A \subset A \oplus B \text{ 'dir.}$$

Kanıt. Önce $A \ominus B \subset A$ olduğu kanıtlansın.

$x \in A \ominus B$ olsun. $x + \{0\} \in x + B \subset A$ olduğundan $x \in A$ elde edilir. Yani $A \ominus B \subset A$' dır. Şimdi $A \subset A \oplus B$ olduğu kanıtlansın.

$x \in A$ olsun. Buradan $x \in A = A + \{0\} \subset A \oplus B$ olduğundan $x \in A \oplus B$ olur. Yani $A \subset A \oplus B$' dir. □

Teorem 3.1.11. *$A, B \subset \mathbb{R}^n$ kümeleri verilsin. Bu durumda*

$$(A \ominus B)' = A' \oplus (-B) \text{ 'dir.}$$

Kanıt. $x \in (A \oplus B)'$ olsun.

$$\begin{aligned}
x \in (A \ominus B)' &\iff x \notin A \ominus B \\
&\iff x \notin \bigcap_{b \in B} (A - b) \\
&\iff \exists b \in B \text{ için } x \notin (A - b) \\
&\iff \exists b \in B \text{ için } \ x \in (A - b)' \\
&\iff \exists b \in B \ \text{ için } \ x \in A' - b \\
&\iff x \in \bigcup_{b \in B} (A' - b) \\
&\iff x \in A' \oplus (-B)
\end{aligned}$$

□

Sonuç 3.1.12. *$A, B \subset \mathbb{R}^n$ kümeleri verilsin. Bu durumda $(A \oplus (-B))' = A' \ominus B$ olur.*

Teorem 3.1.13. *$A, B, C \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ herhangi kümeler ve $\alpha, \beta > 0$ olsun. Bu durumda*

$$A \oplus \alpha B \ominus \alpha C \oplus \beta B \ominus \beta C = A \oplus (\alpha + \beta) B \ominus (\alpha + \beta) C \text{ 'dir.}$$

Kanıt. Cebirsel toplam ve Minkowski fark özellikleri kullanılır.

$$\begin{aligned} A \oplus \alpha B \ominus \alpha C \oplus \beta B \ominus \beta C &\subset A \oplus (\alpha+\beta)B \ominus (\alpha+\beta)C \\ &= \frac{\beta}{\alpha+\beta}(A \oplus \beta B \ominus \beta C) \oplus \frac{\alpha}{\alpha+\beta}(A \oplus \alpha B \ominus \alpha C) \\ &\subset \frac{\alpha}{\alpha+\beta}A \oplus \alpha B \ominus \alpha C \oplus \frac{\beta}{\alpha+\beta}A \oplus \beta B \ominus \beta C \\ &\subset A \oplus \alpha B \ominus \alpha C \oplus \beta B \ominus \beta C \end{aligned}$$

$A \oplus (\alpha+\beta)B \ominus (\alpha+\beta)C \subset A \oplus \alpha B \ominus \alpha C \oplus \beta B \ominus \beta C$ gösterilmelidir. $x \in A \oplus (\alpha+\beta)B \ominus (\alpha+\beta)C$ olsun. Bu durumda $x + \alpha C + \beta C \subset A \oplus (\alpha+\beta)B$ olur. $(\alpha+\beta)B \subset \alpha B \oplus \beta B$ olduğundan $x + \alpha C + \beta C \subset A \oplus \alpha B \oplus \beta B$' dir. O halde $x \in A \oplus \alpha B \ominus \alpha C \oplus \beta B \ominus \beta C$ elde edilir. Böylece kanıt biter. □

Sonuç 3.1.14. *$A, B, C \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ kümeleri ve $n \in \mathbb{N}$ $\quad t_i \in \mathbb{R}^+, \quad i = 1, 2, \ldots, n$ için*

$$A \oplus t_1B \ominus t_1C \oplus t_2B \ominus t_2C \oplus \ldots \oplus t_nB \ominus t_nC = A \oplus (\sum_{i=1}^{n} t_i)B \ominus (\sum_{i=1}^{n} t_i)C$$

olur.

Genel olarak $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$A \oplus \underbrace{B \ominus C \oplus \ldots \oplus B \ominus C}_{n\ kere} = A \oplus nB \ominus nC \text{ ' dir.}$$

Teorem 3.1.15. *$A, B \subset \mathbb{R}^n$ ve A konveks küme olsun. Bu durumda $A \ominus B$ Minkowski farkı da konveks kümedir.*

Kanıt. Minkowski fark tanımından; $A \ominus B = \bigcap_{b \in B} (A - b)$' dir.
A bir konveks küme ise $\forall b \in B$ için $A - b$ farkı da konveks olacaktır. Konveks kümelerin keyfi sayıda kesişimi de konveks olduğundan $A \ominus B$ konvekstir. □

Teorem 3.1.16. *$A, B \subset \mathbb{R}^n$ ve A kapalı küme olsun. Bu durumda $A \ominus B$ kümesi kapalıdır.*

Kanıt. Minkowski fark tanımından $A \ominus B = \bigcap_{b \in B} (A - b)$' dir.
A kapalı olduğundan $\forall b \in B$ için $A - b$ de kapalıdır. Keyfi sayıda kapalı kümenin arakesiti de kapalı olduğundan $A \ominus B$ kapalı olur. □

Teorem 3.1.17. *$A, B \subset \mathbb{R}^n$ kümeleri verilsin. A kapalı ve konveks, B de sınırlı küme ise*

$$A \ominus B = A \ominus bdB$$

olur.

Kanıt. A kapalı kümesi için $B \subset A$ ise $bdB \subset A$ olur. Bu nedenle $x + B \subset A$ ise $x + bdB = bd(x + B) \subset A$ olur. Dolayısıyla $A \ominus B \subset A \ominus bdB$ dir. Öte yandan A konveks ve B sınırlı kümesi için $bdB \subset A$ ise $B \subset A$ dır. Bu nedenle $x + bdB \subset A$ ise $x + bdB = bd(x + B) \subset A$. Yani $A \ominus bdB \subset A \ominus B$ olur ve kanıt biter. □

Teorem 3.1.18. *$A \subset X$ konveks küme, L doğru parçasının uç noktaları l_p ve l_k olsun. Bu durumda*

$$A \ominus L = A \ominus \{l_p, l_k\} \text{ olur.}$$

Kanıt. Minkowski fark tanımından $A \ominus L = \bigcap_{l \in L} (A - l)$' dır. $l_p, l_k \in L$ olduğundan

$$A \ominus L \subset (A - l_p) \cap (A - l_k) = A \ominus \{l_p, l_k\} \tag{3.8}$$

$\forall t \in (A - l_p) \cap (A - l_k)$ ve $l \in L$ alınsın. $t \in A - l$ olduğu gösterilirse kanıt biter. t'nin seçilişinden $t = a_1 - l_p = a_2 - l_k$ olacak şekilde $a_1, a_2 \in A$ vardır. $l \in L$ keyfi bir nokta olmak üzere $l = rl_p + (1 - r)l_k$, olacak şekilde $0 < r < 1$ vardır

$$\begin{aligned} t &= r(a_1 - l_p) + (1 - r)(a_2 - l_k) \\ &= (ra_1 - (1 - r)a_2) - (rl_p + (1 - r)l_k) \\ &= (ra_1 - (1 - r)a_2) - l \end{aligned}$$

olur. A konveks olduğundan $ra_1 - (1 - r)a_2 \in A$' dır. O halde

$$t = (ra_1 - (1 - r)a_2) - l \in A - l$$

olur. l keyfi olduğundan $t \in \bigcap_{l \in L} A - l = A \ominus L$ elde edilir. Yani

$$A \ominus \{l_p, l_k\} \subset A \ominus L \tag{3.9}$$

olur. (3.8) ve (3.9)' den istenilen eşitlik elde edilir. $\square$

Teorem 3.1.19. *$A \subset \mathbb{R}^n$ konveks bir küme ise $A \ominus B = A \ominus convB$' dir.*

Kanıt. $B \subset convB$ olduğundan $A \ominus convB \subset A \ominus B$' dir. $x \in A \ominus B$ alınsın. Minkowski fark tanımından $x + B \subset A$' dır.

$x + convB = conv(x + B) \subset convA$ olduğundan ve A' nın konveksliğinden $convA = A$ olduğundan $x + convB \subset A$' dır. Dolayısıyla $x \in A \ominus convB$ olur. Yani

$A \ominus B \subset A \ominus convB$' dir. O halde $A \ominus B = A \ominus convB$ elde edilir. $\square$

Uyarı 3.1.20. *A bir çokgen ise $vertA$ A kümesinin köşe noktaları kümesi olmak üzere*

$$extA = vertA \text{ olur.}$$

Örnek 3.1.21. *$A, B \subset \mathbb{R}^n$ konveks kümeler ve B bir çokgen ise $A \ominus B = A \ominus vertB$' dir.*

Teorem 3.1.22. *(Krein-Milman) X yerel konveks topolojik uzay, $A \subset X$ kompakt ve konveks küme olsun. Bu durumda A uç noktalar kümesinin konveks zarfının kapanışıdır. Yani*

$$A = \overline{conv}(extA) \text{ ' dır.}$$

Teorem 3.1.23. *$A, B \subset \mathbb{R}^n$ konveks bir küme ise $A \ominus B = A \ominus extB$ ' dir.*

Kanıt. $extB \subset B$ olduğundan $A \ominus B \subset A \ominus extB$' dir. Krein-Milman Teoremi'nden $B = \overline{conv}(extB)$' dir. $x \in A \ominus extB$ alınırsa buradan $x + extB \subset A$ olur. Bu kapsamdan $\overline{conv}(x + extB) \subset \overline{conv}A$ olur. Buna ek olarak $conv(x+extB) = x+\overline{conv}(extB) = x+B$ ve $\overline{conv}A = A$ olduğundan $x+B \subset A$ yani $x \in A \ominus B$ elde edilir. Yani $A \ominus extB \subset A \ominus B$' dir. Sonuç olarak $A \ominus B = A \ominus extB$ elde edilir. $\square$

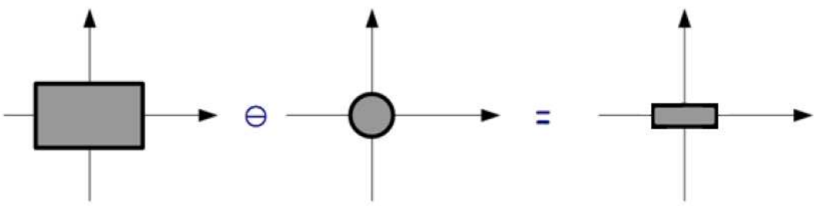
3.2 Minkowski Küme Farkına Örnekler

Örnek 3.2.1. *1. $A = \{1, 5, 10\}$, $B = \{5, 7\}$ olsun. Bu durumda*

$$A \ominus B = (\{1, 5, 10\} - 5) \cap (\{1, 5, 10\} - 7) = \{-4, 0, 5\} \cap \{-6, -2, 3\} = \emptyset$$

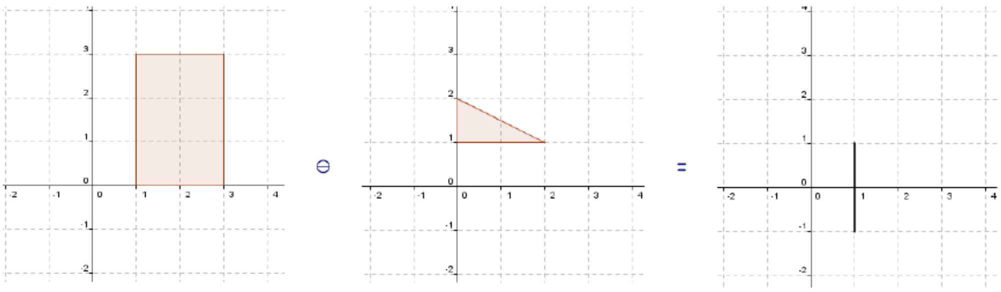
olur.

2. *Bir dikdörtgen ile bir dairenin Minkowski farkı orjinal şeklin alanından daha küçük bir dikdörtgendir. Buna bir örnek Şekil 3.10' da verilmiştir.*



Şekil 3.10. Bir dikdörtgen ile bir dairenin Minkowski farkı

3. *Bir dikdörtgen ile bir üçgenin Minkowski farkı bir doğru parçasıdır. Şekil 3.11 de buna bir örnek verilmiştir.*

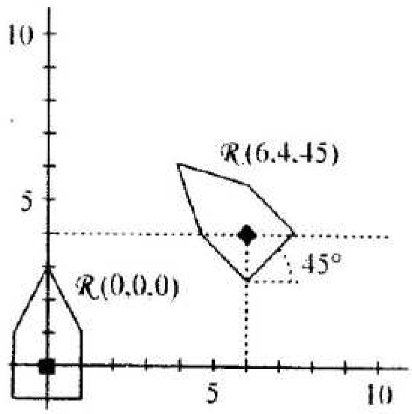


Şekil 3.11. Bir dikdörtgen ile bir üçgenin Minkowski farkı

4 CEBİRSEL TOPLAM ve MİNKOWSKİ FARKIN BAZI UYGULAMALARI

4.1 Robotik-Robot Hareket Planlama

Bir robot oluşturma sürecinde robotun mümkün olduğunca sorunsuz hareket etmesi önemlidir. Robotun hangi bölgede sorunlarla karşılaşacağını ve bunlardan nasıl kaçınacağını bilmesi gerekir. Bu tür sorunların çözebilmesi için önceki bölümlerde verilen teorilere ihtiyaç duyulmaktadır. Robot $\Re$ ile ifade edilsin. $\Re(x, y)$ robotun iki boyutlu uzaydaki konumunu göstersin. $\wp = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ robotu engelleyen noktalar dizisi olsun. $\Re(x, y)$ ile robotun xy-koordinat sisteminde $(0, 0)$'a göre konumunu ifade etsin.



Şekil 4.12. Yapılandırma alanında robotun yeri

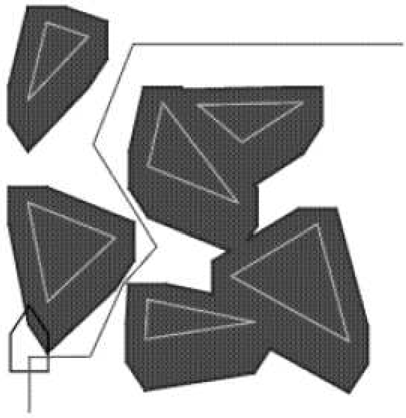
Robotun sadece bir sorunlu noktası olduğu varsayılırsa çarpışmanın algılanması zor olmayacaktır. Robotun döndürülebilir bir çokgen formunda olduğu düşünülürse problem çözülür. Robotun konumunu açıklığa kavuşturmak için bir üçüncü parametreye ihtiyaç vardır.

Tanım 4.1.1. *α saat yönünün tersi yönde robotun dönme açısı olmak üzere, $\Re(x, y, \alpha)$'ya robotun konumu denir.*

$\Re(0, 0, 0)$ (Şekil 4.12) başlangıç konumuna göre (x, y, α)'nın değişim uzayına $\Re$ robotunun parametre yapılandırma alanı denir ve bu $C(\Re)$ ile gösterilir.

Burada yapılandırma alanının üç boyutlu Öklid uzayı olmadığına ve $\mathbb{R}^2 \times [0, 360]$ biçiminde bir uzay olduğuna dikkat edilmelidir.

Yapılandırma alanında robot için yasaklanmış bölgeler vardır. Engel oluşturan bu bölgelerin herbiri $\wp$ kümesindeki noktalarla oluşan üçgensel bölgelerdir



Şekil 4.13. Serbest uzayda robot şekli

(Şekil 4.13). Bu engeller arasında çizilen eğri ise robotun engellere karşı dönüş yaparak izlemesi gereken yoldur.

Tanım 4.1.2. *Robot yapılandırma alanında yasaklanmış bölgeler kümesine yasaklanmış bölge denir ve $C_y(\Re, \wp)$ ile gösterilir. Yapılandırma alanının kalan kısmına boş bölge (serbest bölge) denir ve $C_s(\Re, \wp)$ ile gösterilir.*

Robotun engeller kümesi ile oluşturduğu yapılandırma alanı iki çokgenin cebirsel toplamı olarak düşünülebilir. Uzayda çarpışmasız bir yol serbest alanda bir eğriye karşılık gelir. Ayrıca $C-$ kısıtlamaları birbiriyle ayrık olsalar da oluşan yasaklanmış bölgeler çakışabilirler.

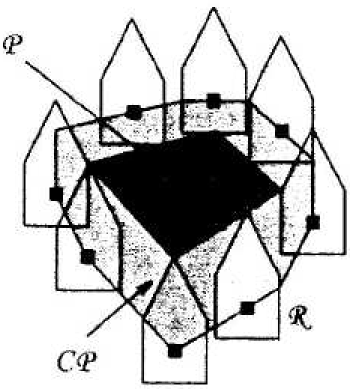
P engeline takılmadan robotun gidebileceği alan CP ile gösterilecektir.

$CP = \{(x, y)|\ \Re(x, y) \cap P \neq \emptyset\}$ $C-$ engellerini ifade etmek için aşağıdaki cebirsel toplam notasyonu yeterli olacaktır. $P = (P_x, P_y)$ kümesi yardımıyla $-P = (-P_x, -P_y)$ tanımlansın. $\wp$ kümesi yardımıyla tanımlanan $-\wp := \{-p \mid p \in \wp\}$ kümesi $\wp$'nin merkezi ile aynı merkezli olmak üzere $\wp$'nin orjine göre yansımasıdır.

Teorem 4.1.3. *P, düzlemde hareket eden $\Re$ robotu için bir engel ise*

$$CP = P \oplus (-\Re(0, 0)) \text{ olur.}$$

Kanıt. $\Re(x, y)$'nin P ile kesişmesi için gerekli ve yeterli koşul $(x, y) \in P \oplus (-\Re(0, 0)) = CP$ olmasıdır. Varsayalım ki $\Re(x, y), P$ ile kesişsin



Şekil 4.14. C engelinin belirlenmesi

ve $q = (q_x, q_y)$ kesişim noktası olsun. Bu durumda $q \in \Re(x,y)$ olması $(q_x - x, q_y - y) \in \Re(0,0)$ ya da $(-q_x + x, -q_y + y) \in \Re(0,0)$ olmasına denktir. Ayrıca $q \in P$ olduğu için $(x,y) \in P \oplus (-\Re(0,0))$ olmasını verir ki bu $CP \subset P \oplus (-\Re(0,0))$ demektir.

Öte yandan $(x,y) \in P \oplus (-\Re(0,0))$ olduğunda $(r_x, r_y) \in \Re(0,0)$ ve $(p_x, p_y) \in P$ olmak üzere $(x,y) = (p_x - r_x, p_y - r_y)$ yazılır. Buradan $p_x = r_x + x, \quad p_y = r_y + y$ elde edilir. Buradan da $P \oplus (-\Re(0,0)) \subset CP$ olur. Sonuç olarak $\Re(x,y), \quad P$ ile kesişir. $\square$

4.2 Bilgisayar Grafikleri-Dijital Görüntü İşleme

Minkoswski fark ve cebirsel toplamın bir diğer uygulama alanı da bilgisayarda oluşturulan grafiklerde görüntü geliştirmesi ve erozyon konularıdır. Bu alan morfoloji denilen matematiksel bir teoriye dayanmaktadır.

4.2.1 Diletasyon İşlemi(Genleşme)

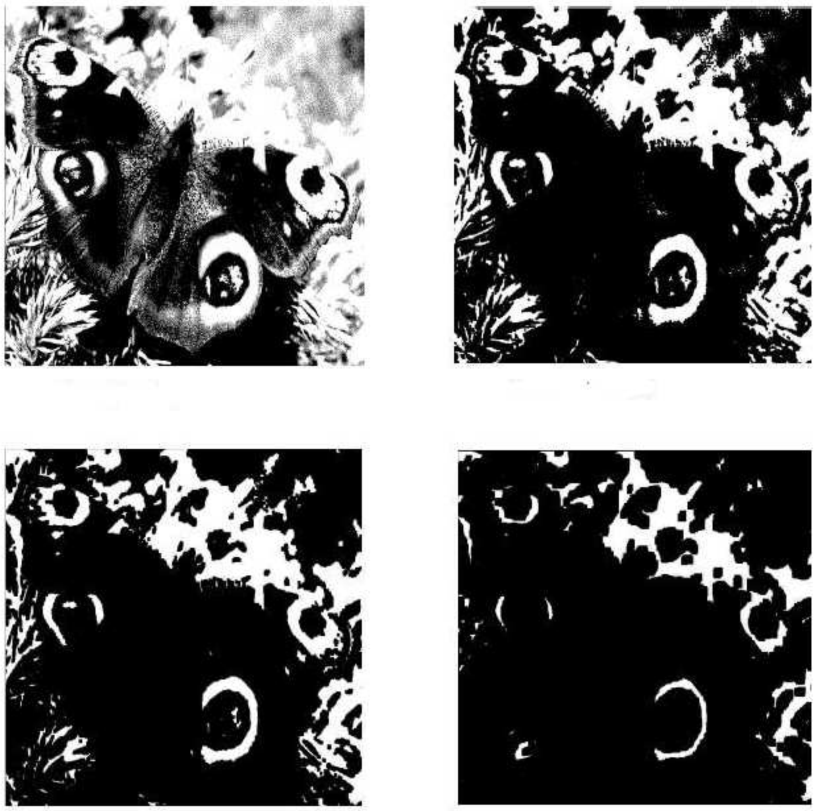
Tanım 4.2.2. *A, B kümeleri verilsin. Her bir $b \in B$ için $A_b := \{a+b \mid a \in A\}$ olmak üzere*

$$\delta_B(A) = \bigcup_{b \in B} A_b$$

işlemine A'nın B'ye göre görüntü genleşmesi (diletasyon) denir.

Yapılan diletasyon işlemler aşağıdaki özelliklere sahiptir:

1. $A \subset C \Longrightarrow \delta_B(A) \subset \delta_B(C)$'dir.



Şekil 4.15. Diletasyon işleminin tekrarlanırken yarattığı etki

2. Kaybolan noktalar olmasına rağmen diletasyon (genleşme) işleminden sonra nesnenin şekli orjinaline benzerdir.

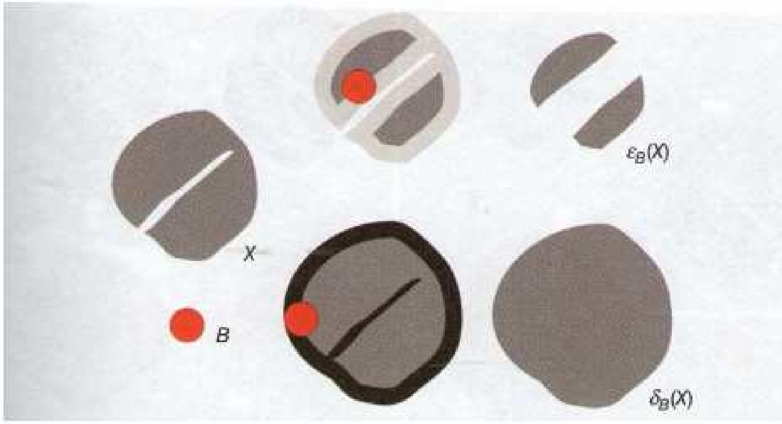
3. Genleşme dönüşümünden sonra önceki kümenin bir üst kümesi elde edilir.

Çoklu uygulamalarda artmış görüntü boyutları için diletasyon işlemi detay kaybı yaratır ve şekilde boşluk(delik) doldurmaya neden olur. Uygulama şekilde birkaç kez işlem etkisi gösterilmiştir. Bu işlemler bir kaç adımda Şekil 4.15' te gösterilmiştir.

4.2.3 Erozyon işlemi

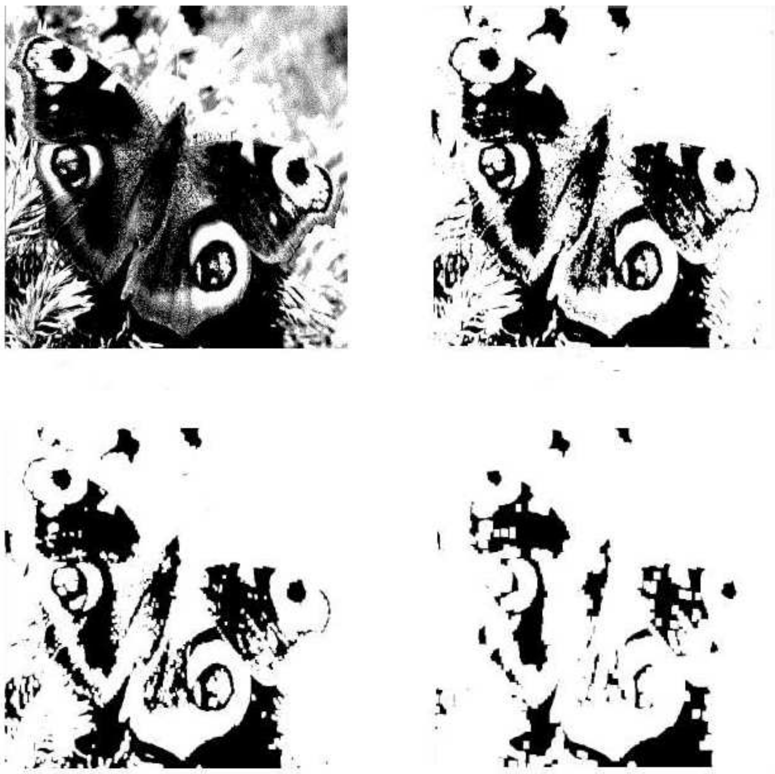
Tanım 4.2.4. *Bir A kümesinin görüntü erozyonu, B kümesinin bir $b \in B$ elemanını kaydırarak kesişim olarak A'yı yapılandırma işlemidir. Yani $\varepsilon_B(A) = \bigcap_{b \in B} A_b$ olarak tanımlanan $\varepsilon_B(A)$ işlemine A' nın görüntü erozyonu denir.*

Erozyon işlemi şu özelliklere sahiptir:



Şekil 4.16. X kümesinin B kümesi yardımıyla erozyon ve diletasyonu

1. (Monotonluk) $A \subset C \Longrightarrow \varepsilon_B(C) \subset \varepsilon_B(A)$' dır.
2. Görüntü erozyonu işlemi öteleme işlemi altında değişmez.
3. Erozyon dönüşümünde oluşan küme ilk kümenin alt kümesidir ve orjini B kümesine ait olmak koşuluyla dönüşüme karşılık bir anti-erozyon kümesi vardır.



Şekil 4.17. Erozyon işleminin tekrarlanmasında oluşan etkiler

Erozyon işlemi esnasında birden fazla işlem yapılırsa bütün nesnenin boyutunda detay kaybı ve genişlemesinde ”delik” (işaretlemesinde) bir azalma olur. Bir çok adımda erozyon işlem etkisi Şekil 4.17'de gösterilmiştir. Şekil 4.16'da da verilen bir X kümesinin B kümesi yardımıyla erozyon ve diletasyon işlemleri gösterilmiştir.

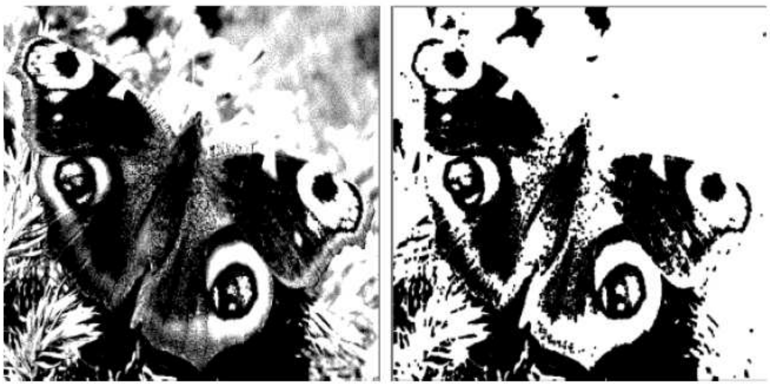
4.2.5 İzolasyon sınır özelliği

Nesnelerin sınırlarını tek tek belirlemek için diletasyon ve erozyon işlemleri avantajlı dönüşümlerdir. Bu diletasyon görüntü yürütülen işlem sonrasında görüntünün farkı ile nesnenin birincil(orjinal) görüntü sınırını verir.
Nesnenin sınırı(genişleme alanı)= $\delta_B(A) - A$
Erozyon işlemi sonrası nesnenin sınırı aşağıdaki gibi:
Nesnenin sınırı(Çekme alanı)= $A - \varepsilon_B(A)$ olarak elde edilir.

4.2.6 Karmaşık morfolojik işlemleri

Görüntü üzerinde sırasıyla erozyon ve diletasyon işlemleri yürütmeye açıklaştırma denir ve şöyle tanımlanır.

Tanım 4.2.7. *A kümesi verilsin. $\gamma_B(A) = \delta_B(\varepsilon_B(A))$ olarak tanımlanan $\gamma_B(A)$' ye açıklaştırma denir. Açıklaştırma işlemi $\circ$ işareti olarak belirlenmiştir. Açıklaştırma işleminin yürütülmesine bir örnek Şekil 4.18'de verilmiştir.*



Şekil 4.18. Açıklaştırma işlemi

Görüntü üzerinde sırasıyla diletasyon ve erozyon işlemleri yürütmeye koyulaştırma denir ve şöyle tanımlanır.

Tanım 4.2.8. *A kümesi verilsin. $\varphi_B(A) = \varepsilon_B(\delta_B(A))$ olarak tanımlanan $\varphi_B(A)$ işlemine koyulaştırma denir. Koyulaştırma işlemi $\bullet$ işaretiyle gösterilir.*

Şekil 4.19. Koyulaştırma işlemi

Koyulaştırma ve açıklaştırma işlemlerinin özellikleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Özellik	Diletasyon	Erozyon	Açıklaştırma	Koyulaştırma
Değişmezlik	var	var	var	var
Monotonluk	var	var	var	var
Yaygınlık	var	yok	yok	var
Anti yoğunluk	yok	var	var	yok

Şekil 4.19' da bu koyulaştırma işlemlerinin uygulaması verilmiştir.

Tanım 4.2.9. *Diletasyon ve erozyon işleminin sonucunda ortaya çıkan farka morfolojik gradyant işlemi denir ve* $\nabla_1(A)$ *ile gösterilir. Yani* A *bir küme olmak üzere* $\nabla_1(A) = \delta(A) - \varepsilon(A)$ *işlemine morfolojik gradyant denir. Morfolojik gradyant aşağıdaki gibi tanımlanabilir.*

$\nabla_2(A) = \delta(A) - A$ *ve* $\nabla_3(A) = A - \varepsilon(A)$*' dır.*

Bu işlem esas olarak duran görüntüdeki kenarları bulmak için kullanılır. Bir başka işlem ise aynı amaçla kullanılan ve morfolojik Laplacian denilen operasyonu gerçekleştirmektedir.

Tanım 4.2.10. *Morfolojik gradyantın değişik türlerinin farkına morfolojik Laplacian işlemi denir. Yani* A *bir küme olmak üzere*

$\nabla^2(A) = (A - \varepsilon(A)) - (\delta(A) - A)$ *işlemine morfolojik Laplacian işlemi denir.*

KAYNAKLAR

[1] Bardzinska, M., *Sumy Minkowskiego Zbiorów*, Adam Mickiewicz Üniversitesi, Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Fakültesi bitirme tezi, Poznan, 2007.

[2] Borowska, D., ve Grzybowski, J., *Minkowski difference and Sallee elements in an ordered semigroup,* Lehçe Matematik Derneği yıllıkları, 77-83, 2007.

[3] Ghosh, P. K., *A solution of polygon containment, spatial planning, and other related problems using Minkowski operations,* Computer vision, graphics, and image processing, **49**, 1-16, 1990.

[4] Grzybowski, J. ve Urbanski, R., *Crystal growth in terms of Minkowski-Radstrom-Hormander space,*tom Vol. LIX, **1**, 91-92, 2009.

[5] Kaul, A., Rossignac, J., *Solid-interpolating deformations: construction and animation of PIPs*, Comput. Graph. **16(1)**, 107-115, 1992.

[6] Lee, I.K., Kim, M.S., Elber, G., *Polynomial/rational approximation of Minkowski sum boundary curves*, Graph. Models Image Process, **60(2)**136-165, 1998.

[7] Lozano-Pérez, T., *Spatial Planning: a configuration space approach*, IEEE Trans. Comput., **32(2)**, 108-120, 1983.

[8] Schneider, R., *Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory*, New York: Cambridge University Press, 1993.

[9] Seater, R., *Minkowski sum decompositions of convex polygons,*Haverford College Mathematics Bitirme Tezi, 2002.

[10] Serra, J.,*Image Analysis and Mathematical Morphology*, **2**, Newyork Academic Press, 1998.