ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

DÜZGÜN OLMAYAN ANALİZİN TEMEL ELEMANLARI VE KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLERİN SÜREKLİLİKLERİ ÜZERİNE

İpek TÜKENMEZ

Yüksek Lisans Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Haziran 2014

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

İpek Tükenmez'in **"Düzgün Olmayan Analizin Temel Elemanları ve Küme Değerli Dönüşümlerin Süreklilikleri Üzerine"** başlıklı **Matematik** Anabilim Dalındaki, Yüksek Lisans tezi 20.06.2014 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

		Adı - Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	:	Prof. Dr. YALÇIN KÜÇÜK	....
Üye	:	Prof. Dr. METİN AKDAĞ	....
Üye	:	Doç. Dr. HANDAN AKYAR	....

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DÜZGÜN OLMAYAN ANALİZİN TEMEL ELEMANLARI VE KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLERİN SÜREKLİLİKLERİ ÜZERİNE

İpek Tükenmez

Anadolu Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Yalçın Küçük

2014, 93 Sayfa

Bu çalışmada Dini, Hadamard ve Clarke yönlü türevler tanıtılmış, bunlara dayalı olarak subdiferansiyel ve Clarke subdiferansiyel gibi kavramlar verilmiştir. Daha sonra bir kümenin teğet ve normal konileri kavramları tanıtılmış ve bunlarla subdiferansiyel, Clarke subdiferansiyel ve yönlü türevler arasındaki bazı ilişkiler incelenmiştir.

Buna ek olarak küme değerli dönüşümlerin alttan, üstten yarı süreklilikleri, Hausdorff, Lipschitz, pseudo Lipschitz ve pseuo Hölder süreklilikleri tanıtılmış ve belirgin özellikleri üzerinde durulmuştur. Aynı zamanda, bir küme değerli dönüşümün sürekliliği ile bu dönüşüm ile belirlenen uzaklık, destek fonksiyonları ve marjinal dönüşümlerin süreklilikleri arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Son olarak da konveks işlem kavramı tanıtılmış ve bazı özellikleri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Küme Değerli Dönüşüm, Clarke Koni, Clarke Subdiferansiyel, Lipschitz Süreklilik, Pseudo Lipschitz Süreklilik , Pseudo Hölder Süreklilik

ABSTRACT

Master of Science Thesis

BASIC ELEMENTS OF NONSMOOTH ANALYSIS AND ON THE CONTINUITIES OF MULTIVALUED MAPPINGS

İpek Tükenmez

Anadolu University

Graduate School of Sciences

Mathematics Program

Supervisor: Prof. Dr. Yalçın Küçük

2014, 93 Pages

In this work Dini, Hadamard and Clarke directional derivatives are defined and according to these the concepts of subdifferential and Clarke subdifferential are given. Then the concepts of tangent cones and normal cones of a set are defined and some relationships between these cones and subdifferential, Clarke subdifferential and directional derivatives are studied.

In addition, upper and lower semicontinuities, Lipschitsz, pseudo Lipschitz and pseudo Hölder continuities of multivalued mappings are defined, and some important proporties of them are expressed. At the same time, relations between continuity of multivalued mappings and the continuities of support, distance functions and marginal mappings which are defined by multivalued mappings are studied. At the end, concept of convex processes is defined and some proporties of it are given.

Keywords: Multivalued Mapping, Clarke Cone, Clarke Subdifferential, Lipschitz Continuity, Pseudo Lipschitz Continuity, Pseudo Hölder Continuity

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında yol gösteren ve beni her zaman destekleyen danışmanım Prof. Dr. Yalçın Küçük'e, tezin hazırlanmasında yardımlarını esirgemeyen hocalarım Prof. Dr. Mahide Küçük, Prof. Dr. Andrzej Karafiat, Yard. Doç. Dr. İlknur Atasever Güvenç, Yard. Doç. Dr. Mustafa Soyertem, Arş. Gör. Didem Tozkan, Arş. Gör. Emrah Karaman ve Arş. Gör. Şükrü Acıtaş'a ve beni destekleyen aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

İpek TÜKENMEZ
Haziran 2014

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$affS$	:	S kümesinin afin zarfı
$\mathbb{B}$	:	0 merkezli açık birim yuvar
$B(x,r)$	:	x merkezli r-yarıçaplı açık yuvar
$\overline{B(x,r)}$	:	x merkezli r-yarıçaplı kapalı yuvar
clC	:	C kümesinin kapanış noktaları kümesi
$coneM$	:	M kümesinin konik örtüsü
$convS$	:	S kümesinin konveks zarfı
$\overline{conv}S$	:	S kümesinin kapalı konveks zarfı
$convF$	:	F küme değerli dönüşümünün konveks zarfı
$\overline{conv}F$	:	F küme değerli dönüşümünün kapalı konveks zarfı
$d_A(x)$	:	x noktasının A kümesine uzaklığı
$domf$	:	f fonksiyonunun etkin tanım kümesi
$domF$	:	F küme değerli dönüşümünün etkin tanım kümesi
d_F	:	F küme değerli dönüşümüne bağlı uzaklık fonksiyonu
$D_+f(x;\overline{x})$	:	f fonksiyonun x noktasındaki $\overline{x}$ yönündeki Dini alt türevi
$D^+f(x;\overline{x})$	:	f fonksiyonun x noktasındaki $\overline{x}$ yönündeki Dini üst türevi
$D_\oplus f(x;\overline{x})$	:	f fonksiyonun x noktasındaki $\overline{x}$ yönündeki Hadamard alt türevi
$D^\oplus f(x;\overline{x})$	:	f fonksiyonun x noktasındaki $\overline{x}$ yönündeki Hadamard üst türevi
$epif$	:	f fonksiyonunun epigrafı
$epiF$	:	F küme değerli dönüşümünün epigrafı
f^*	:	f fonksiyonunun eşlenik fonksiyonu
$f^o(x,\overline{x})$	:	f fonksiyonunun x noktasındaki $\overline{x}$ yönündeki Clarke yönlü türevi
$f'(x;\bar{x})$	:	f fonksiyonun x noktasındaki $\overline{x}$ yönündeki yönlü türevi
$F^-(U)$	:	U kümesinin F dönüşümü altındaki alt ters görüntüsü
$F^+(U)$	:	U kümesinin F dönüşümü altındaki üst ters görüntüsü
$intC$	:	C kümesinin iç noktaları kümesi
i_C	:	C kümesinin indikatör fonksiyonu
K^+	:	K konisinin pozitif polar konisi
$N_E(x)$	:	E kümesinin x noktasındaki Clarke normal konisi
$\mathbb{R}^n$	:	n-boyutlu Öklid uzayı
riC	:	C kümesinin indirgenmiş iç noktaları kümesi
S_C	:	C kümesinin destek fonksiyonu
S_F	:	F küme değerli dönüşümüne bağlı destek fonksiyonu
$T_E^L(x)$	:	E kümesinin x noktasındaki alt tanjant konisi
$T_E^U(x)$	:	E kümesinin x noktasındaki üst tanjant konisi
$T_E^C(x)$	:	E kümesinin x noktasındaki Clarke konisi
$\langle x^*, x\rangle$	:	$x, x^* \in X$ vektörlerinin skaler çarpımları

$\|x\|$	:	x'in Öklid normu
0^+C	:	C kümesinin recession konisi
$\rho_H(A,B)$	:	A ve B kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklık
$\partial f(x)$	:	f fonksiyonunun $x \in dom f$'deki subdiferansiyeli
$\nabla f(x)$	:	f fonksiyonunun x noktasındaki gradienti
$\partial_C f(x_0)$	:	f fonksiyonunun x_0 noktasındaki genelleştirilmiş subdiferansiyeli
$\partial^\infty f(x)$	:	f kümesinin x noktasındaki asimptotik Clarke subdiferansiyeli

1 GİRİŞ

$\mathbb{R}^n$'den $\mathbb{R}$'ye tanımlı tek değerli bir fonksiyonun sürekli türevlenebilmesi Düzgün Analiz (Smooth Analysis) diye adlandırılan çalışma alanının konusudur. Sürekli türevlenemeyen fonksiyonların analizi ise Düzgün Olmayan Analizin (Nonsmooth Analysis) bir konusudur. Bu konudaki çalışmalar çok eskilere dayanır. Son yıllarda Konveks Analizde bu tür fonksiyonların analizinin yapılabilmesi için türevin çeşitli genellemeleri üzerinde çalışılmıştır. Bu genellemelerin en belirgin olanlarından bazıları Dini, Hadamard ve Clarke [4] yönlü türevlerdir. Bu çalışmada bu yönlü türevler tanıtılmış, bunlara dayalı olarak subdiferansiyel ve Clarke subdiferansiyel gibi kavramlar verilmiştir. Daha sonra bir kümenin teğet ve normal konileri kavramları tanıtılmış ve bunlarla subdiferansiyel, Clarke subdiferansiyel ve yönlü türevler arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Küme değerli analiz başlangıçta, konveks kümeler ve fonksiyonların özellikleri araştırılırken ortaya çıkmıştır. Bugün ise küme değerli analiz gelişmiş matematik teorileri içinde yerini almıştır. Küme Değerli Analiz, yani küme değerli dönüşümlerin teorisi Matematiğin Kontrol Teori, Diferansiyel Denklemler, Optimizasyon Teorisi ve Viability Teori gibi birçok alanında uygulanmıştır. Küme değerli dönüşümlerin çeşitli süreklilikleri Küme Değerli Analizin en önemli yapı taşlarından biridir. Bu konudaki ilk ve kapsamlı çalışmalar Kruse [10] ve Michael [14,15], Ponomarev [17, 18, 19], Simithson [20], Strother [21, 22], Choquet [3] ve Hahn [7] tarafından yapılmıştır.

Küme Değerli Analizin önemli konularından biri de türev konusudur. Küme değerli bir dönüşümün türevi de çeşitli şekillerde tanımlanmıştır. Bunlardan biri de teğet konilere dayanan tanımdır. Buna göre bir küme değerli dönüşümün bir noktadaki türevi, grafiği verilen küme değerli dönüşümün grafiğinin o noktadaki teğet konisine eşit olan küme değerli dönüşümdür. Dolayısıyla Küme Değerli Analizde koniler, özel olarak da teğet konileri, oldukça önemli bir yer tutar.

Bu çalışmada da küme değerli dönüşümlerin alttan, üstten yarı süreklilikleri, Hausdorf, Lipschitz, pseudo Lipschitz ve pseudo Hölder süreklilikleri tanıtılmış ve belirgin özellikleri üzerinde durulmuştur. Buna ek olarak bir küme değerli dönüşümün sürekliliği ile bu dönüşüm ile belirlenen uzaklık, destek fonksiyonları ve marjinal dönüşümlerin süreklilikleri arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

2 DÜZGÜN OLMAYAN ANALİZİN TEMEL KAVRAMLARI

Bu bölümde, Konveks Analizin bazı temel kavramları hatırlatılacaktır. Bu çalışmada, aksi belirtilmedikçe $\mathbb{R}^n$ uzayı X ile, $\mathbb{R}^m$ uzayı da Y ile gösterilecektir. $\langle x^*, x\rangle$ ile $x, x^* \in X$ vektörlerinin iç çarpımları, $\|x\|$ ile x vektörünün Öklid normu, $\mathbb{B}$ ile de 0 merkezli açık birim yuvar, yani $\mathbb{B} = \{x \in X : \|x\| < 1\}$ kümesi gösterilecektir.

2.1 Konveks Kümeler ve Konveks Koniler

Konveks küme ve konveks koni kavramları Küme Değerli Analizde ve optimizasyonda büyük bir role sahiptir. Bu bölümde de konveks küme ve konveks koni kavramları hatırlatılacaktır.

Tanım 2.1.1. *$A \subseteq X$ olsun. $\forall x_1, x_2 \in A$ ve $\forall \lambda \in [0,1]$ için $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in A$ oluyorsa A'ya konveks küme denir.*

Tanım 2.1.2. *$C \subseteq \mathbb{R}^n$ verilsin. C'yi içeren tüm konveks kümelerin arakesitine C'nin konveks zarfı denir ve $convC$ ile gösterilir.*

Önerme 2.1.1. *$C \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesinin konveks zarfı C'deki elemanların tüm konveks kombinasyonlarından oluşur. Yani*

$$convC = \{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i | x_i \in C, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1, i = 1, 2, \ldots, m\} \quad \text{'dir.}$$

Tanım 2.1.3. *$\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi verilsin. Bu durumda S'yi içeren kapalı konveks kümelerin ara kesitine S kümesinin kapalı konveks zarfı denir ve $\overline{conv}S$ ile gösterilir.*

Önerme 2.1.2. *$\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi verilsin. Bu durumda S'nin kapalı konveks zarfı S'nin konveks zarfının kapanışına eşittir. Yani,*

$$\overline{conv}S = cl(convS)$$

olur.

Tanım 2.1.4. *$K \subset X$ verilsin , $\forall x \in K$ ve $\forall \lambda \geq 0$ için $\lambda x \in K$ oluyorsa K'ya koni denir.*

Sıradaki önerme bir koninin konveks olması için gerek ve yeter koşulu vermektedir.

Önerme 2.1.3. *$K \subset \mathbb{R}^n$ bir koni olsun. Bu durumda K konisinin konveks olması için gerek ve yeter koşul $\forall x_1, x_2 \in K$ için $x_1 + x_2 \in K$ olmasıdır.*

Kanıt. ($\Longrightarrow$)K konisi konveks olsun. Bu durumda $\lambda = \frac{1}{2}$ ve $\forall x_1, x_2 \in K$ için $\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \in K$ yani $\frac{1}{2}(x_1 + x_2) \in K$ olup K koni olduğundan $x_1 + x_2 \in K$ elde edilir.
($\Longleftarrow$)$\forall x_1, x_2 \in K$ için $x_1 + x_2 \in K$ olsun. $\lambda \in [0, 1]$ alınsın. Bu durumda K bir koni olduğundan $\lambda x_1 \in K$ ve $(1 - \lambda)x_1 \in K$ olur. Hipotezden de $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in K$ olur. Yani K konvekstir. □

Tanım 2.1.5. *$M \subset X$ kümesi verilsin. $\bigcup\limits_{\lambda \geq 0} \lambda M$ olarak tanımlanan kümeye M'nin konik örtüsü denir ve $coneM$ ile gösterilir.*

Önerme 2.1.4. *$M \subset X$ kümesi verilsin. Bu durumda $coneM$ bir konidir.*

Kanıt. $x \in coneM$ ve $\alpha > 0$ olsun. Bu durumda $\exists \lambda > 0$ için $x \in \lambda M$'dir. Buradan $\alpha x \in \alpha \lambda M \subset coneM$ olur. O halde $coneM$ konidir. □

Önerme 2.1.5. *$M \subset \mathbb{R}^n$ verilsin. M konveks ise $coneM$ konvekstir ve $coneM$, M'yi ve orijini içeren tüm konveks konilerin kesişimidir.*

Kanıt. $coneM$ koni olduğundan $\forall x, y \in coneM$ için $x + y \in coneM$ olduğunu göstermek yeterlidir. $x, y \in coneM$ olduğundan $x \in \alpha M$ ve $y \in \beta M$ olacak şekilde $\exists \alpha \geq 0$ ve $\exists \beta \geq 0$ vardır. Buradan $\dfrac{x}{\alpha}, \dfrac{y}{\beta} \in M$ olur. $\lambda := \dfrac{\alpha}{\alpha + \beta}$ olsun. Bu durumda $\lambda \in (0, 1)$ ve $1 - \lambda = \dfrac{\beta}{\alpha + \beta}$ olur. M konveks olduğundan

$$\lambda \frac{x}{\alpha} + (1 - \lambda)\frac{y}{\beta} = \frac{x}{\alpha + \beta} + \frac{y}{\alpha + \beta} = \frac{x + y}{\alpha + \beta}$$

olur. Dolayısıyla $x + y \in (\alpha + \beta)M \subset coneM$ elde edilir. O halde $coneM$ konvekstir.
$\bigcup\limits_{\lambda \geq 0} \lambda M$ ifadesinde $0 \in coneM$ olduğu açıktır.

$A := \bigcap\{C \mid M \subset C$ ve C, orjini içeren konveks koni$\}$ kümesi göz önüne alındığında $M \subset coneM$ olduğundan ve A kümesinin tanımından

$$A \subset coneM\text{'dir.} \tag{2.1}$$

$x \in coneM$ keyfi bir elaman olsun. Bu durumda $\exists \lambda \geq 0$ ve $\exists\ y \in M$ $x = \lambda y$ olacak şekilde vardır. C, M'yi ve orjini içeren keyfi bir koni ise $x = \lambda y \in C$ olur. Bu durumda A kümesinin tanımlanışından $x \in A$ dolayısıyla

$$coneM \subset A \tag{2.2}$$

elde edilir. (2.1) ve (2.2)'den $coneM = A$ olur. □

Tanım 2.1.6. *$K \subset X$ konveks koni olsun.*

$$K^+ = \{x^* \in X \mid \langle x^*, x\rangle \geq 0, \forall x \in K\}$$

kümesine K konisinin pozitif polar konisi denir.

Örnek 2.1.1. *K ve C kümeleri*

$$\begin{aligned} K &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \frac{1}{3}x \leq y \leq 2x, x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\} \\ C &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq -2x \wedge y \geq 0\} \end{aligned}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda pozitif polar koni tanımı gereği

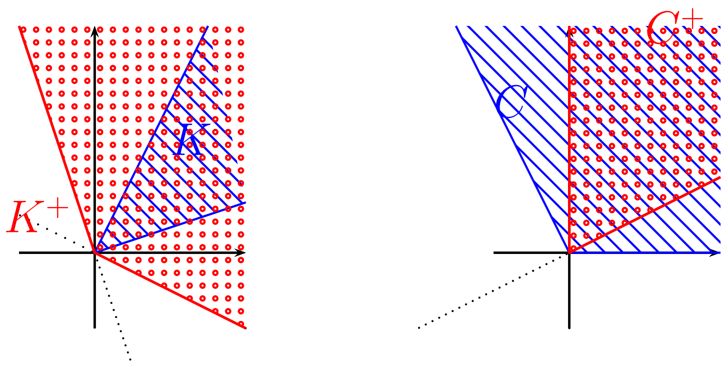
$$\begin{aligned} K^+ &= \{x^* \in \mathbb{R}^2 | \langle x^*, x\rangle \geq 0, \forall x \in K\} \\ C^+ &= \{x^* \in \mathbb{R}^2 | \langle x^*, x\rangle \geq 0, \forall x \in C\} \end{aligned}$$

olur. Burada α, x^* ve x vektörleri arasındaki açı olmak üzere $\langle x^*, x\rangle = \|x^*\|\|x\|\cos\alpha$ olduğundan $\langle x^*, x\rangle \geq 0$ olması için $\|x^*\|\|x\|\cos\alpha \geq 0$ olmalıdır. Burada $\|x^*\| \geq 0$ ve $\|x\| \geq 0$ olduğundan

$\cos\alpha \geq 0$ *yani* $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$ *olmalıdır. Böylece*

$$\begin{aligned} K^+ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq \frac{-1}{2}x \wedge y \geq -3x, x \in \mathbb{R}\} \\ C^+ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq \frac{1}{2}x, x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\} \end{aligned}$$

elde edilir. Şekil 2.1'de K ve C kümeleri ve pozitif polar konileri gösterilmiştir.



(a) (b)

Şekil 2.1. (a) $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \frac{1}{3}x \leq y \leq 2x, x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\}$ konisinin pozitif polar konisi, (b) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq -2x \wedge y \geq 0\}$ konisinin pozitif polar konisi

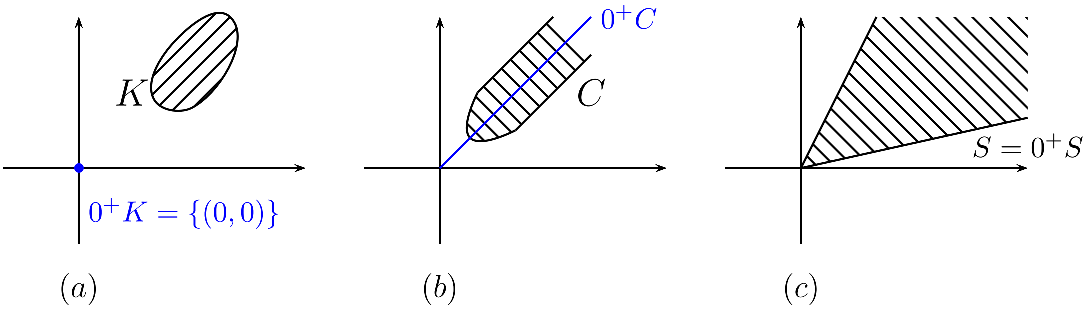
Tanım 2.1.7. $\emptyset \neq C \subset X$ *konveks küme olmak üzere*

$$0^+C = \{\bar{x} \in X | x + \lambda\bar{x} \in C, \forall x \in C, \lambda > 0\}$$

kümesine C kümesinin recession konisi denir.

Örnek 2.1.2. *Şekil 2.2(a)'daki K kümesi göz önüne alındığında* $0^+K = \{(0,0)\}$, *Şekil 2.2(b)'deki C kümesi göz önüne alındığında* $0^+C = \{(x,x) | x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\}$, *Şekil 2.2(c)'deki S kümesi göz önüne alındığında, kendisi bir koni olduğundan* $0^+S = S$ *olur.*

Buradan 0^+C'nin en az bir elemana sahip olduğu söylenebilir.



Şekil 2.2. (a) K kümesi ve recesion konisi, (b) C kümesi ve recession konisi, (c) S kümesi ve recession konisi

Önerme 2.1.6. *$\emptyset \neq C \subset X$ konveks küme olmak üzere 0^+C konvekstir ve $0^+C = \{\bar{x} \mid C + \bar{x} \subset C\}$'dir.*

2.2 Konveks Fonksiyonlar

Bu bölümde konveks fonksiyon kavramı hatırlatılacak ve konveks fonksiyonların bazı özellikleri ele alınacaktır.

Tanım 2.2.1. *$f : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ fonksiyonu verilsin.*

(a) $dom f = \{x \in X \mid f(x) < \infty\}$ kümesine f fonksiyonun etkin tanım(effective domain) kümesi denir.
$epi f = \{(x, \lambda) \in X \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq \lambda\}$ kümesine f fonksiyonunun epigrafı denir. Ayrıca f fonksiyonu epigrafı yardımıyla $f(x) = \inf\{\lambda \mid (x, \lambda) \in epi f\}$ olarak tanımlanabilir.

(b) Epigrafı konveks olan fonksiyonlara konveks fonksiyon denir.

(c) $\forall x \in X$ için $dom f \neq \emptyset$ ve $f(x) > -\infty$ ise f'ye has fonksiyon denir.

Önerme 2.2.1. *$f : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda f has fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter koşul $\forall x_1, x_2 \in X, \forall \lambda \in [0, 1]$ için*

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \tag{2.3}$$

olmasıdır.

Kanıt. ($\Longrightarrow$) f konveks, yani $epif$ konveks olsun,

$\forall x_1, x_2 \in X$ ve $\lambda \in [0,1]$ alınsın.

Bu durumda $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)) \in epif$ ve $epif$ konveks olduğundan

$$\lambda(x_1, f(x_1)) + (1-\lambda)(x_2, f(x_2)) \in epif$$

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

olur.

($\Longleftarrow$) $\forall x_1, x_2 \in X$ ve $\lambda \in [0,1]$ için (2.3) sağlansın. $(x_1, r), (x_2, t) \in epif$ ve $\lambda \in [0,1]$ alınsın.

$(x_1, r) \in epif$ olduğundan $f(x_1) \leq r$ ve $(x_2, t) \in epif$ olduğundan $f(x_2) \leq t$ olur. Hipotezden

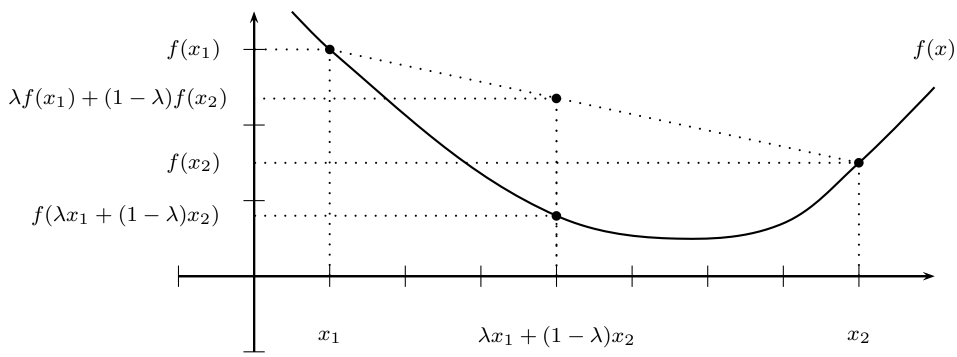
$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \leq \lambda r + (1-\lambda)t$$

elde edilir. Buradan

$$(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda r + (1-\lambda)t) = \lambda(x_1, r) + (1-\lambda)(x_2, t) \in epif$$

olur. O halde $epif$ konvekstir yani f konveks bir fonksiyondur. □

$X = \mathbb{R}$ alınırsa Önerme 2.2.1'in kanıtının geometrik yorumu Şekil 2.3'de verilmiştir.



Şekil 2.3. Önerme 2.2.1'in geometrik yorumu

$+\infty$ ve $-\infty$ kavramları ile ilgili bazı kurallar aşağıda verilmiştir:

$$+\infty + \alpha = +\infty, \quad -\infty + \alpha = -\infty$$
$$+\infty + \infty = +\infty, \quad -\infty - \infty = -\infty, \quad +\infty - \infty = -\infty + \infty = +\infty$$
$$(+\infty)\alpha = +\infty, \quad (-\infty)\alpha = -\infty, \quad 0 < \alpha < +\infty$$
$$0(+\infty) = 0, \quad 0(-\infty) = 0$$
$$\inf \emptyset = +\infty, \quad \sup \emptyset = -\infty$$

Aşağıda bazı önemli konveks fonksiyon örnekleri verilmiştir.

Örnek 2.2.1. ***(İndikatör Fonksiyonu)*** *$\emptyset \neq C \subset X$ konveks bir küme olsun. $\forall x \in X$ için*

$$i_C(x) = \begin{cases} 0 & x \in C \\ +\infty & x \notin C \end{cases}$$

olarak tanımlanan $i_C : X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonuna C kümesinin indikatör fonksiyonu denir.

Örnek 2.2.2. ***(Destek Fonksiyonu)*** *$\emptyset \neq C \subset X$ konveks bir küme olsun.*

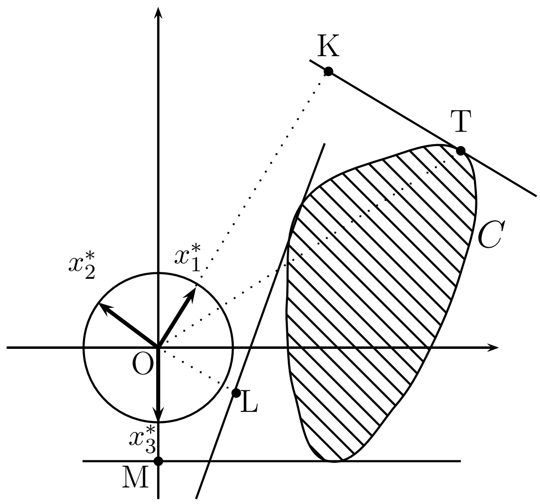
$$S_C(x^*) = \sup_{x \in C} \langle x^*, x \rangle$$

olarak tanımlanan $S_C : X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonuna C kümesinin destek fonksiyonu denir.

Örnek 2.2.3. *Şekil 2.4'deki C kümesi göz önüne alınsın.*
O merkezli birim çember üzerindeki x_1^*, x_2^*, x_3^* vektörlerine bağlı olarak C kümesinin destek fonksiyonu değerleri:
x_1^* için

$$\begin{aligned} S_C(x_1^*) &= \sup_{x \in C} \langle x_1^*, x \rangle \\ &= \sup_{x \in C} \|x_1^*\| \|x\| \cos\alpha \\ &= \|\overrightarrow{OT}\| \|x_1^*\| \cos\alpha \\ &= |OK|, \end{aligned}$$

benzer olarak x_2^* *için* $S_C(x_2^*) = -|OL|$ *ve* x_3^* *için* $S_C(x_3^*) = |OM|$ *olarak bulunur.*



Şekil 2.4. S kümesinin x_1^*, x_2^* ve x_3^* yönlerindeki destekleri

Tanım 2.2.2. *A ve C, X'te boş olmayan kompakt kümeler olmak üzere*

$$\rho_H(A, C) = \max\{\sup_{x\in C} d_A(x), \sup_{x\in A} d_C(x)\} \tag{2.4}$$

sayısına A ve C kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklık denir.

Önerme 2.2.2. *$A, C \subset X$ kompakt, konveks kümeler ve $x^* \in X$ olmak üzere*

$$\rho_H(A, C) = \sup_{\|x^*\|\leq 1} |S_A(x^*) - S_C(x^*)| \tag{2.5}$$

olur.

Tanım 2.2.3. *$f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $\forall\lambda > 0, \forall x \in X$ için*

$$f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

oluyorsa f fonksiyonuna pozitif homojen fonksiyon denir.

Önerme 2.2.3. *$f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. f'nin konveks ve pozitif homojen olması için gerek ve yeter koşul $epif$'in konveks koni olmasıdır. Buna ek olarak f kapalı ve pozitif homojen ise ($epif$ kapalı ise) $f(0) = 0$'dır.*

Kanıt. ($\Longrightarrow$) f konveks ve pozitif homojen olsun. Bu durumda $k > 0$ *ve* $(x, \lambda) \in epif$ keyfi elemanlar olmak üzere $k(x, \lambda) \in epif$ olduğu gösterilmelidir. $(x, \lambda) \in epif$ olduğundan $f(x) \leq \lambda$ olup $kf(x) \leq k\lambda$ olur.
f pozitif homojen olduğundan $f(kx) = kf(x) \leq k\lambda$ elde edilir. O halde $(kx, k\lambda) \in epif$ yani $k(x, \lambda) \in epif$ olur.
($\Longleftarrow$) $epif$ konveks koni olsun. Bu durumda f'nin konveks ve pozitif homojen olduğu gösterilmelidir.
$epif$ konveks olduğundan f konvekstir ve öte yandan $\forall x_1, x_2 \in X, \forall \lambda \in [0, 1]$ için (2.3) geçerlidir. $epif$ koni olduğundan $\forall \lambda > 0$ ve $(x, f(x)) \in epif$ için $(\lambda x, \lambda f(x)) \in epif$ olur. Yani $\forall \lambda > 0$ için $f(\lambda x) \leq \lambda f(x)$ elde edilir. Öte yandan $f(x) = f(\frac{1}{\lambda}\lambda x) \leq \frac{1}{\lambda} f(\lambda x)$ olduğundan

$$\lambda f(x) \leq f(\lambda x)$$

olur. Dolayısıyla $\lambda f(x) = f(\lambda x)$'dir. O halde f pozitif homojendir.
f kapalı, yani $epif$ kapalı olsun. Bu durumda $\overline{epif} = epif$'dir. $epif$ koni olduğundan $k_1 = 1, k_2 = \frac{1}{2}, ..., k_n = \frac{1}{n}$ için $\frac{1}{n}(x, \lambda) \to (0, 0) \in \overline{epif} = epif$ olur. Yani $f(0) \leq 0$ olur. Kabul edelim ki $f(0) < 0$ olsun. f konveks olduğundan $\forall x_1, x_2 \in X$ ve $\forall \lambda \in [0, 1]$ için

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2) \tag{2.6}$$

olur. $\forall x_1, x_2 \in X$ ve $\forall \lambda \in [0, 1]$ için (2.6) geçerli olduğundan bu eşitsizlik $x_1 = 0$ için de geçerlidir. Buradan
$f((1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(0) + (1 - \lambda) f(x_2) < (1 - \lambda) f(x_2)$ olur ki bu da f'nin pozitif homojen olması ile çelişir. O halde $f(0) = 0$ olmalıdır. □

Önerme 2.2.4. *$\emptyset \neq C \subset X$ konveks bir küme olsun. Bu durumda S_C fonksiyonu kapalı, konveks ve pozitif homojendir.*

Kanıt. $\forall x^* \in X$ alınsın $\langle x^*, \cdot\rangle$ lineer bir dönüşümdür. Lineer dönüşümler kapalı ve konvekstir. Üstelik $S_C(x^*)$ lineer fonksiyonların supremumu olduğundan konvekstir. Buna ek olarak

$$S_C(0) = sup\{< x, 0 > |x \in C\} = 0 < +\infty$$

yani en az bir noktada sonlu değer aldığından kapalıdır. $\square$

Önerme 2.2.5. *Her konveks, kapalı, pozitif homojen bir fonksiyon kompakt, konveks bir kümenin destek fonksiyonudur.*

Tanım 2.2.4. $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *olsun.*

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in X}\{\langle x^*, x\rangle - f(x)\}$$

ile tanımlı f^* *fonksiyonuna* f*'nin eşlenik(conjugate) fonksiyonu denir.*

Önerme 2.2.6. $f : X \to \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ *olmak üzere* f^* *eşlenik fonksiyonu konveks ve kapalıdır.*

Yardımcı Teorem 2.2.1. *(Fenchel-Moreau Teoremi)*$f : X \to \mathbb{R} \cup \pm\infty$, f *kapalı, konveks ve has fonksiyon olsun. Bu durumda*

$$f^{**}(x) = \sup_{x \in X}\{\langle x^*, x\rangle - f^*(x^*)\} = f(x)$$

olur.

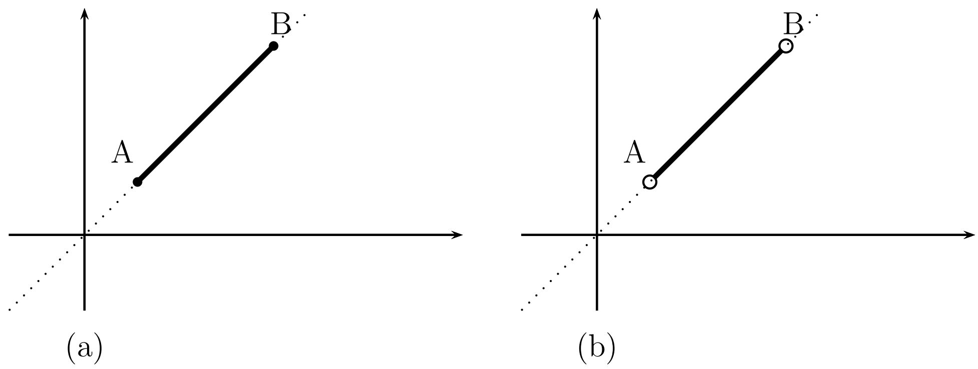
Tanım 2.2.5. $S \subset \mathbb{R}^n$ *olmak üzere*

$$ri(S) = \{x \in \mathbb{R}^n | \exists\varepsilon > 0, \quad B_\varepsilon(x) \cap aff(S) \subset S\} \subset aff(S)$$

kümesine S *kümesinin indirgenmiş içi (relative interior) denir.*

Örnek 2.2.4. $I^2 = \{(x, y, 0)|0 \leq x, y \leq 1\} \subset \mathbb{R}^3$, *kümesi için* $int(I^2) = \emptyset$*'dir. Çünkü* I^2*'nin içinde kalan* $\mathbb{R}^3$*'ün bir açığı yoktur. Öte yandan*
$ri(I^2) = \{(x, y, 0)|0 < x, y < 1\}$ *olur çünkü* $aff(I^2) \quad xy-$ *düzlemidir.*

Örnek 2.2.5. *Şekil 2.5(a)'da verilen $[AB]$ kümesinin içi $\mathbb{R}^2$'de boş kümedir. Fakat bu kümenin indirgenmiş içinden söz edilebilir. $[AB]$'nin indirgenmiş içi Şekil 2.5 (b)'de gösterilmiştir.*



Şekil 2.5. (a) $\mathbb{R}^2$'de $[AB]$ kümesi, (b) $\mathbb{R}^2$'de $[AB]$ kümesinin indirgenmiş içi

Örnek 2.2.6. $I^3 := \{(x, y, z) | 0 \leq x, y, z \leq 1\} \subset \mathbb{R}^3$ *kümesi için*

$$int(I^3) = ri(I^3) = \{(x, y, z) | 0 < x, y, z < 1\} \subset \mathbb{R}^3$$

olur.

Örnek 2.2.7. $x \in \mathbb{R}$, $S = \{x\}$ *ise* $intS = \emptyset$ *fakat* $ri(S) = \{x\}$ *olur.*

Örnek 2.2.8. $T \subset S \subset \mathbb{R}^n$ *iken* $int(T) \subseteq int(S)$ *olur.*
Fakat aynı durum indirgenmiş iç için geçerli olamayabilir. Gerçekten $I^2 = \{(x, y, 0) | 0 \leq x, y \leq 1\}$ *ve* $I^3 = \{(x, y, z) | 0 \leq x, y, z \leq 1\}$ *kümeleri için* $I^2 \subset I^3$ *olmasına rağmen* $ri(I^2) = \{(x, y, 0) | 0 < x, y < 1\}$ *ve* $ri(I^3) = \{(x, y, z) | 0 < x, y, z < 1\}$ *olduğundan* $ri(I^2) \cap ri(I^3) = \emptyset$ *elde edilir.*

2.3 Konveks Fonksiyonların Bazı Topolojik ve Diferansiyel Özellikleri

Konveks bir f fonksiyonu $ridomf$'in tüm noktalarında süreklidir.

Tanım 2.3.1. $f : X \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu* , $\overline{x}, x \in \mathbb{R}^n$ *verilsin.*

$$f'(x; \bar{x}) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{f(x + \varepsilon\bar{x}) - f(x)}{\varepsilon}$$

limiti var ise bu değere f fonksiyonunun $\bar{x}$ yönünde, x noktasındaki yönlü türevi denir.

f'nin $\forall x \in dom f$ ve tüm yönlerde yönlü türevi var ise bu fonksiyona yönlü türevlenebilirdir denir.

Önerme 2.3.1. *$f : X \to \mathbb{R}$ has, konveks fonksiyon olsun. Bu durumda $\forall x \in dom f$ ve herhangi bir $\bar{x}$ yönünde $f'(x; \bar{x})$ yönlü türevi vardır. Bu türev $\bar{x}$ değişkenine bağlı konveks, pozitif homojen bir fonksiyondur.*

Tanım 2.3.2. *$f : X \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyonu ve $x, x_0 \in dom f$ verilsin.*

$$\partial f(x_0) = \{x^* \in X | f(x) - f(x_0) \geq \langle x^*, x - x_0 \rangle, \forall x \in X\}$$

ile tanımlı $\partial f(x_0)$ kümesine f fonksiyonunun x_0'daki subdiferansiyeli denir.

Önerme 2.3.2. *$f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $x_0 \in dom f$ olmak üzere $\partial f(x_0)$ kümesi X içinde konveks ve kapalıdır.*

Kanıt. $x_1^*, x_2^* \in \partial f(x_0)$ ve $\lambda \in [0, 1]$ olsun. Bu durumda $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\lambda(f(x) - f(x_0)) \geq \langle \lambda x_1^*, x - x_0 \rangle \tag{2.7}$$

$$(1 - \lambda)(f(x) - f(x_0)) \geq \langle (1 - \lambda) x_2^*, x - x_0 \rangle \tag{2.8}$$

olur. (2.7) ve (2.8)'den

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &\geq \langle \lambda x_1^*, x - x_0 \rangle + \langle (1 - \lambda) x_2^*, x - x_0 \rangle \\ f(x) - f(x_0) &\geq \langle \lambda x_1^* + (1 - \lambda) x_2^*, x - x_0 \rangle \qquad \text{elde edilir.} \end{aligned}$$

Yani, $\lambda x_1^* + (1 - \lambda) x_2^* \in \partial f(x)$ olup $\partial f(x_0)$ konvekstir.
f'nin kapalı olduğu yani $\overline{\partial f(x_0)} = \partial f(x_0)$ gösterilsin.
$\partial f(x_0) \subset \overline{\partial f(x_0)}$ olduğu açıktır.
$y \in \overline{\partial f(x_0)}$ alınsın. Bu durumda $x_n^* \to y$ olacak şekilde $\exists (x_n^*)_{n \in \mathbb{N}} \subset \partial f(x_0)$ dizisi vardır. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n^* \in \partial f(x_0)$ olduğundan, $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$\langle x_n^*, x - x_0 \rangle \leq f(x) - f(x_0)$$

olur. Eşitsizliğin her iki tarafında $n \to \infty$ için limit alınırsa $x_n^* \to y$ olduğundan

$$\langle y, x - x_0 \rangle \leq f(x) - f(x_0)$$

elde edilir. O halde, $y \in \partial f(x_0)$ olur. Buradan $\overline{\partial f(x_0)} \subset \partial f(x_0)$ olur. $\partial f(x_0)$ kapalıdır. □

Aşağıda bir fonksiyonun subdiferansiyeli, destek fonksiyonu ve yönlü türevinin ilişkisine dair özellikler verilmiştir.

Önerme 2.3.3. *$f : X \to \mathbb{R}$, $x \in domf$ ve $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır.*

(i) $S_{\partial f(x)}(\overline{x}) = cl f'(x; \overline{x})$

(ii) $\partial_{\overline{x}} f'(x; 0)$ *ifadesi, ikinci değişkene göre subdiferansiyeli belirtmek üzere,* $\partial f(x) = \partial_{\overline{x}} f'(x; 0)$*'dir.*

(iii) $f'(x; .) = S_{\partial f(x)}(.)$ *ise* $\partial S_{\partial f(x)}(0) = \partial f(x)$*'dir.*

(iv) f*, x'te sürekli ve konveks ise,* $\partial f(x)$ *boştan farklı, kompakttır ve*

$$f'(x; \overline{x}) = max\{\langle x^*, \overline{x} \rangle | x^* \in \partial f(x)\} \tag{2.9}$$

olur.

(v) f*, konveks ve X üzerinde türevlenebilirse* $\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$*'dir.*

Yardımcı Teorem 2.3.1. *(Min-Maks Teoremi)* $X_0 \subseteq X$, $Y_0 \subseteq Y$ *ve* $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *olsun. Bu durumda*

1. $\inf\limits_{x \in X_0} \sup\limits_{y \in Y_0} f(x, y) \geq \sup\limits_{y \in Y_0} \inf\limits_{x \in X_0} f(x, y)$ *olur.*

2. X_0 *ve* Y_0*'dan en az biri kompakt olmak üzere ikisi de konveks ve kapalı ise*

$$\inf_{x \in X_0} \sup_{y \in Y_0} f(x, y) = \sup_{y \in Y_0} \inf_{x \in X_0} f(x, y)$$

olur.

2.4 Dini, Hadamard ve Clarke Yönlü Türevler

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $x \in \mathbb{R}^n$ verilsin. x'in en az bir N komşuluğu içindeki x' ve x'' noktaları için

$$|f(x') - f(x'')| \leq K\|x' - x''\|$$

olan bir K sayısı varsa f'ye x'de yerel Lipschitzdir denilmektedir. (Burada ε pozitif bir tamsayı olmak üzere $N = x + \varepsilon\mathbb{B}$ alınabilir.) Bu K sayısına f'nin Lipschitz rankı da denir. Yerel Lipschitz gerçel değerli fonksiyonlar ele alındığında bilinen türev kavramı, doğal bir şekilde genelleştirilmiş gradient kavramıyla yer değiştirebilir.

f'nin türevi ile ilgili özellikleri incelendiğinde, f'nin bir x noktasında yerel Lipshitz olduğu durumda, bu noktada türevlenemeyebileceği görülmektedir. Hatta, bir tek yönde bile yönlü türeve sahip olmayabilir. Böyle bir durumda

$$f^o(x, v) = \limsup_{\substack{y \to x \\ \lambda \to 0^+}} \frac{f(y + \lambda v) - f(y)}{\lambda}$$

tanımlanırsa bu ifadedeki $\dfrac{f(y + \lambda v) - f(y)}{\lambda}$ oranı üstten $K\|v\|$ ile sınırlı olacağından söz konusu limit iyi tanımlı ve sonlu olacaktır. Buna genelleştirilmiş Clarke türev denilmektedir. Tanımlanan genelleştirilmiş türevin çok kullanışlı oluşunun nedeni $f^o(x, v)$'nin v'nin bir fonksiyonu olarak pozitif homojen ve alttoplamsal (sublineer) olmasıdır. Bu türev x noktasındaki genelleştirilmiş gradient diye adlandırılan ξ vektörlerinden oluşan

$$\partial_C f(x) := \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid f^o(x, v) \geq \langle u, \xi \rangle \ \forall v \in \mathbb{R}^n\}$$

kümesinin tanımlanmasına olanak sağlar. Bu kümeye f'nin x'deki genelleştirilmiş subdiferansiyeli denir. $\partial_C f(x)$ $\mathbb{R}^n$'nin kompakt, konveks bir alt kümesidir ve f^o ile $\partial_C f(x)$ arasındaki

$$f^o(x, v) = \operatorname*{maks}_{\xi \in \partial_C f(x)} \langle \xi, v \rangle$$

ilişkisi f^o'ı bilmenin $\partial_C f(x)$'i bilmeye denk olmasını verir ki bu f^o'ın özelliklerini inceleyebilmek için $\partial_C f(x)$'yi kullanılabileceğini söyler. f'nin düzgün (yani sürekli türevlenebilir) olduğu durumda $\partial_C f(x)$, $\{\nabla f(x)\}$ tek nokta kümesine ve f'nin konveks olduğu durumda da $\partial_C f(x)$ kümesi

$$\partial f(x) = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid f(x+u) - f(x) \geq \langle u, \xi \rangle, \ \forall u \in \mathbb{R}^n\}$$

ile tanımlı f'nin x'deki subdiferansiyeline eşit olmaktadır. $\partial f(x)$'in tanımı düşünüldüğünde bunu hesaplamak ürkütücü gelebilir. Ancak kalkülüsten bilindiği gibi, bir fonksiyonun türevi nadiren tanımı kullanılarak hesaplanır. Bunun yerine, belli tipteki fonksiyonların türev kurallarından yararlanılır. Benzer biçimde genelleştirilmiş gradientler için de benzer bir teori kurulabilir. Bu çalışmada bu teoride yer alan bazı formüllere yer verilmiştir.

Genelleştirilmiş gradiente dayalı genelleştirilmiş subdiferansiyel çeşitli şekillerde tanımlanabilir. Bunlardan biri de Rademacher'in

"Yerel Lipschitz fonksiyonlar hemen hemen her yerde türevlenebilirler"

biçiminde ifade edilen Teoremini temel alan tanımdır ve

$$\partial_C f(x) = conv\{\lim_{i\to\infty} \nabla f(x_i) \mid x_i \to x, x_i \notin \Omega_f \cup S\}$$

biçiminde tanımlanır. (Burada Ω_f, $x + \varepsilon\mathbb{B}$ içinde f'nin diferansiyellenemeyen noktalar kümesi ve S Lebesque ölçüsü sıfır olan bir kümedir.) Sıradaki tanımda, yukarıda bahsedilen Clarke yönlü türevin tanımı formal olarak verilmiştir.

Tanım 2.4.1. $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *ve* $x, \overline{x} \in X$ *olsun.*

$$f^o(x, \overline{x}) = \limsup_{\substack{x' \to x \\ \varepsilon \to 0^+}} \frac{f(x' + \varepsilon\overline{x}) - f(x')}{\varepsilon}$$

değerine f *fonksiyonunun* x *noktasında,* $\overline{x}$ *yönündeki Clarke yönlü türevi denir.*

Tanım 2.4.2. $f : X \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu verilsin.* $x, \overline{x} \in X$ *olsun.*

$$D_+ f(x; \overline{x}) = \liminf_{\varepsilon \to 0^+} \frac{f(x + \varepsilon\overline{x}) - f(x)}{\varepsilon}$$

$$D^+ f(x; \overline{x}) = \limsup_{\varepsilon \to 0^+} \frac{f(x + \varepsilon\overline{x}) - f(x)}{\varepsilon}$$

ifadelerine sırası ile f *fonksiyonun* x *noktasında* $\overline{x}$ *yönünde Dini alt ve Dini üst türevleri denir.*

Örnek 2.4.1. *$f(x) = x\sin(\frac{1}{x})$ fonksiyonunun herhangi bir $\overline{x}$ yönündeki ve $x = 0$ noktasındaki Dini alt ve üst türevleri sırası ile*

$$D_+f(x;\overline{x}) = \liminf_{\varepsilon\to 0^+}\frac{f(\varepsilon\overline{x}+0)-f(0)}{\varepsilon} = \liminf_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\varepsilon\overline{x}\sin(\frac{1}{\varepsilon\overline{x}})-0}{\varepsilon} = -\overline{x}$$

ve

$$D^+f(x;\overline{x}) = \limsup_{\varepsilon\to 0^+}\frac{f(\varepsilon\overline{x}+0)-f(0)}{\varepsilon} = \limsup_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\varepsilon\overline{x}\sin(\frac{1}{\varepsilon\overline{x}})-0}{\varepsilon} = \overline{x}$$

olur.

Örnek 2.4.2. *$f(x) = \sqrt{|x|}\sin(\frac{1}{x})$ fonksiyonunun $\overline{x}$ yönünde $x = 0$ noktasındaki Dini türevleri de $D^+f(0;\overline{x}) = \infty$ ve $D_+f(0;\overline{x}) = -\infty$'dir.*

Görüldüğü gibi bu türevler sonlu olmalarına gerek olmamasına rağmen herzaman vardır. f fonksiyonunun Hadamard anlamında üstten ve alttan yönlü türevleri aşağıdaki gibi verilir.

Tanım 2.4.3. *$f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $x, \overline{x} \in X$ noktaları verilsin.*

$$D_{\oplus}f(x;\overline{x}) = \liminf_{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ \hat{x}\to\overline{x}}}\frac{f(x+\varepsilon\hat{x})-f(x)}{\varepsilon}$$

$$D^{\oplus}f(x;\overline{x}) = \limsup_{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ \hat{x}\to\overline{x}}}\frac{f(x+\varepsilon\hat{x})-f(x)}{\varepsilon}$$

türevlerine sırası ile f fonksiyonunun x noktasında $\overline{x}$ yönünde Hadamard alttan türevi ve Hadamard üstten türevi denir.

Teorem 2.4.1. *$f : U \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $U \subset \mathbb{R}^n$ üzerinde konveks ve $x \in U$ noktasının bir komşuluğunda Lipschitz ise $f^o(x,\cdot) = D^+f(x;\cdot)$ olur.*

Kanıt. $\forall v \in \mathbb{R}^n$ alınsın. $f^0(x,v) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\sup\limits_{\|x'-x\|<\varepsilon\delta}\sup\limits_{0<t<\varepsilon}\dfrac{f(x'+tv)-f(x')}{t}$'dir. Burada δ keyfi sabitlenmiş pozitif bir sayıdır. f konveks olduğundan

$$t \mapsto \frac{f(x'+tv)-f(x')}{t}$$

dönüşümü azalmayandır. Böylece $f^0(x,v) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+0}\sup\limits_{\|x'-x\|<\varepsilon\delta\varepsilon}\dfrac{f(x'+\varepsilon v)-f(x')}{\varepsilon}$

yazılabilir. f, x noktasında yerel Lipschitz olduğundan en az bir $K > 0$ sayısı $x' \in x + \varepsilon\delta\mathbb{B}$ iken

$$\left| \frac{f(x' + \varepsilon v)}{\varepsilon} - \frac{f(x + \varepsilon v)}{\varepsilon} \right| \leq K \frac{\|x - x'\|}{\varepsilon} \leq \delta K \tag{2.10}$$

ve

$$\left| \frac{f(x') - f(x)}{\varepsilon} \right| \leq K \frac{\|x - x'\|}{\varepsilon} \leq \delta K \tag{2.11}$$

olacak şekilde vardır. Üçgen eşitsizliği, (2.10) ve (2.11)'den $x' \in x + \varepsilon\delta\mathbb{B}$ iken

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x' + \varepsilon v) - f(x')}{\varepsilon} - \frac{f(x + \varepsilon v) - f(x)}{\varepsilon} \right| &\leq \left| \frac{f(x' + \varepsilon v)}{\varepsilon} - \frac{f(x + \varepsilon v)}{\varepsilon} \right| + \left| \frac{f(x') - f(x)}{\varepsilon} \right| \\ &\leq \delta K + \delta K = 2\delta K \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\dfrac{f(x' + \varepsilon v) - f(x')}{\varepsilon} \leq \dfrac{f(x + \varepsilon v) - f(x)}{\varepsilon} + 2\delta K$ olur. O halde

$$f^o(x, v) = \limsup_{\substack{x' \to x \\ \varepsilon \to 0^+}} \frac{f(x' + \varepsilon \overline{x}) - f(x')}{\varepsilon} \leq \limsup_{\varepsilon \to 0^+} \frac{f(x + \varepsilon v) - f(x)}{\varepsilon} + 2\delta K = D^+ f(x; v) + 2\delta K$$

olur. δ keyfi sabitlenmiş bir eleman olduğundan $f^o(x, v) \leq D^+ f(x; v)$ elde edilir. Ters eşitsizlik her zaman doğru olduğundan $f^o(x, v) = D^+ f(x; v)$ olur.

$\square$

2.5 Normaller ve Teğetler

$E \subseteq \mathbb{R}^n$ boş olmayan kapalı küme olmak üzere

$$d_E(x) = \min\{\|x - c\| \mid c \in E\}$$

ile tanımlı düzgün olmayan (nonsmooth) fakat Lipschitz olan uzaklık fonksiyonu gözönüne alınsın.

E'nin düzgün ya da konveks olmasına ihtiyaç duymadan d_E'nin d_E^o Clarke genelleştirilmiş türevi kullanılarak E'nin x'deki bir teğeti kavramı ve buna dayalı olarak da E'nin x'deki $T_E^C(x)$ Clarke teğet konisi kavramı

$$T_E^C(x) := \{v \in \mathbb{R}^n \mid d_E^o(x, v) = 0\}$$

biçiminde tanımlanabilir.

Bunun kapalı ve konveks bir koni olduğu gösterilebilir. Teğet konisi tanımlandığından normal koni tanımı $T_E^C(x)$'in poları yardımıyla

$$N_E(x) := \{\xi \mid \langle \xi, v\rangle \leq 0, \forall v \in T_E^C(x)\}$$

olarak verilebilir. Açıktır ki $N_E(x)$ kapalı ve konveks bir küme olan $\partial d_E(x)$ subdiferansiyeliyle üretilir.

T_E^C ve N_E'yi uzaklık fonksiyonu kullanmadan tanımlayıp tanımlayamayacağımızı sormak doğaldır. Bunun yanıtı olumludur ve şu şekilde yapılabilir:

$v \in T_E^C(x)$'dir $\iff$ x'e yakınsak her $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ ve 0'a yakınsak her $(t_n) \subset \mathbb{R}^+$ için $x_n + t_n v_n \in E$ olacak şekilde v'ye yakınsak en az bir $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ dizisi vardır.

N_E'nin direk tanımını verebilmek için bir diklik tanımına ihtiyaç duyulur. Bu tanım şu şekilde verilebilir:

Bir $v \in \mathbb{R}^n$ vektörü E'ye x noktasında diktir $\iff$ x', x'e E içinde tek en yakın noktası olmak üzere $v = x' - x$'dir $\iff$ x' merkezli öyle bir kapalı yuvar vardır ki bunun E ile kesişimi x tek noktasından oluşur.

Bu durumda

$$N_E(x) = \overline{conv}\{\lambda \lim_{i\to\infty} \frac{v_i}{\|v_i\|} \mid \lambda \geq 0, x_n \text{ noktasında } v_n \perp E,\ x_n \to x \text{ ve } v_i \to 0\}.$$

Buraya kadar, f^o ve $\partial_C f$ gibi iki analitik notasyon ve T_E^C ve N_E gibi iki geometrik notasyon oluşturuldu ve bunlar bir anlamda birbirlerinin dualidirler. Yani, biri bilinirse diğeri bundan elde edilebilir.

Buna göre, bu analitik kavramlarla geometrik kavramların birbirleriyle ilişkisi kurulacaktır. Bu ilişki de fonksiyonun epigrafı yardımıyla kurulacaktır. Geometrik olarak bu küme, bir fonksiyonun grafiğinin üstünde kalan bölgeden başka birşey değildir. Buradan iki önemli sonuç elde edilir.

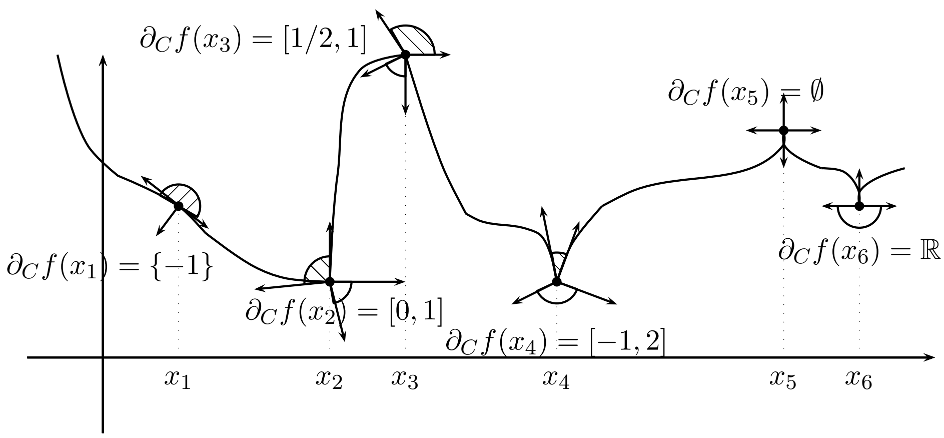
$$T_{epif}^C(x, f(x)) = epi f^o(x, \cdot)$$

$$\partial_C f(x) = \{\xi \mid (\xi, -1) \in N_{epif}(x, f(x))\}.$$

Elde edilen son sonuç, diferansiyel kalkülüste bilinen $[f'(x,-1)]$ vektörünün f'nin grafiğine $(x, f(x))$ noktasında dik olması (ya da normali olması) özelliğinin bir genellemesidir.

Dolayısıyla, f^o, ∂f_C, T_E^C ve N_E kavramları bu tür çalışmaların çekirdeğini oluşturmaktadır.

Buraya kadar, yerel Lipschitz fonksiyonlar sınıfı üzeride duruldu. Bununla birlikte yerel Lipschitz olmayan fonksiyonlar ailesi üzerinde iş gören benzer kavramlar tanımlanabilir. Bu durumda düzgünlük ve konvekslik gibi kavramlardan biraz uzaklaşılır. Çünkü f, x noktasının bir komşuluğunda Lipschitz değilse $\partial_C f(x)$ kompakt olmayabilir. Hatta bazen boş küme olur. Aşağıda Şekil 2.6'da grafiği verilen fonksiyon bu duruma bir örnek olarak verilebilir.



Şekil 2.6. Bazı noktalarda yerel Lipschitz olmayan fonksiyon örneği

Kuşkusuz bu kavramlar Banach uzaylara genelleştirilebilir ve bunlarla, bilinen türev kavramları arasındaki ilişkiler incelenebilir.

Tanım 2.5.1. *$X = \mathbb{R}^n$ ve $E \subset X$ kümesi verilsin. $\overline{x} \in X$ için $\forall \varepsilon \geq 0$ iken $x + \varepsilon\overline{x} + o(\varepsilon) \in E$ ve $\varepsilon \to 0^+$ iken $\dfrac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \to 0$ olacak şekilde n boyutlu vektör değerli $o(\varepsilon)$ fonksiyonu var ise $\overline{x} \in X$ noktasına, E kümesinin x noktasındaki alt teğeti denir. Bütün bu $\overline{x}$ teğetlerinin oluşturduğu kümeye de E kümesinin x noktasındaki alt tanjant konisi denir ve $T_E^L(x)$ ile gösterilir. Yani E kümesinin x noktasındaki alt tanjant konisi*

$$T_E^L(x) = \{\overline{x} | \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{d(x + \varepsilon\overline{x}, E)}{\varepsilon} = 0\}$$

biçiminde ifade edilir.

Tanım 2.5.2. *$X = \mathbb{R}^n$, $E \subset X$ kümesi ve $x \in cl(E)$ elemanı verilsin. $\varepsilon_k \to 0^+$*

ve $\hat{x}_k \to \overline{x}$ *için* $x + \varepsilon_k \hat{x}_k \in E, \quad k = 1, 2, ...$ *olacak şekilde* $\exists(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ *ve* $\exists(\hat{x}_k)_{k\in N} \subset X$ *dizileri var ise* $\overline{x} \in X$ *noktasına,* E *kümesinin* x *noktasındaki üst teğeti denir. Bütün bu* $\overline{x}$ *teğetlerinin oluşturduğu kümeye de* E *kümesinin* x *noktasındaki üst tanjant konisi veya Contingent konisi denir ve* $T_E^U(x)$ *ile gösterilir. Yani* E *kümesinin* x *noktasındaki Contingent konisi*

$T_E^U(x) = \{\overline{x} | \hat{x}_k \to \overline{x}, \varepsilon_k \to 0^+$ *ve* $\forall k \in \mathbb{N}$ *için* $x + \varepsilon_k \hat{x}_k \in E$ *olan*

$\exists(\hat{x}_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ *ve* $\exists(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ *dizileri vardır* $\}$

biçiminde ifade edilir.

Tanım 2.5.3. $\emptyset \neq E \subseteq X,\ x \in cl(E)$ *verilsin.*

$x_k \xrightarrow{E} x,\ \varepsilon_k \to 0^+$ *olan* $\forall(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq E$ *ve* $\forall(\varepsilon_k)_{k\in N}$ *dizileri için* $\hat{x}_k \to \overline{x}$ *ve* $\forall k \in \mathbb{N}$ *için* $x_k + \varepsilon_k \hat{x}_k \in E$ *olacak şekilde* $\exists(\hat{x}_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ *dizisi bulunabiliyor ise* $\overline{x}$*'ye* E *kümesinin* x *noktasındaki Clarke teğeti,* $\overline{x}$ *teğetlerinin oluşturduğu kümeye de* E *kümesinin* x *noktasındaki Clarke konisi denir ve* $T_E^C(x)$ *ile gösterilir.*

Aşağıda $T_E^L(x)$ ve $T_E^U(x)$ için bazı karakterizasyonlar verilmiştir.

Önerme 2.5.1. $\emptyset \neq E \subseteq X,\ x \in cl(E)$ *verilsin.* $\overline{x} \in T_E^L(x)$ *olması için gerek ve yeter koşul* $\varepsilon_k \to 0^+$ *olan* $\forall(\varepsilon_k)_{k\in N}$ *dizisi için* $x + \varepsilon_k \hat{x}_k \in E, k = 1, 2, ...$ *ve* $\hat{x}_k \to \overline{x}$ *olacak şekilde* $\exists(\hat{x}_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq E$ *dizisinin var olmasıdır.*

Önerme 2.5.2. $\emptyset \neq E \subseteq X,\ x \in cl(E)$ *verilsin.* $\overline{x} \in T_E^U(x)$ *olması için gerek ve yeter koşul* $x_k \to x$ *ve* $\overline{x} = \lim_{k\to\infty} \varepsilon_k(x_k - x)$ *olacak şekilde* $\exists(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^+$ *ve* $\exists(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq E$ *dizilerinin var olmasıdır.*

Önerme 2.5.3. $\emptyset \neq E \subset X$ *ve* $x \in cl(E)$ *verilsin. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.*

(i) $T_E^U(x), T_E^C(x)$ *ve* $T_E^L(x)$ *kapalıdır.*

(ii) $T_E^C(x)$ *konvekstir.*

(iii) $T_E^C(x) \subset T_E^L(x) \subset T_E^U(x)$*'dir.*

Kanıt. (i) $T_E^U(x)$ kapalılığı gösterilsin. $T_E^U(x) \subset \overline{T_E^U(x)}$ olduğundan $\overline{T_E^U(x)} \subset T_E^U(x)$ gösterilmelidir. O halde $y \in \overline{T_E^U(x)}$ alınsın. Bu durumda

$$y_n \to y \tag{2.12}$$

olacak şekilde $\exists (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T_E^U(x)$ dizisi vardır. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $y_n \in T_E^U(x)$ olduğundan $\lim\limits_{k\to\infty} \hat{x}_k = x$, $\quad \lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon_k(\hat{x}_k - x) = y_n$ olacak şekilde $\exists (\hat{x}_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq E$ ve $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^+$ vardır. Buradan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $k \geq k(n)$ olmak üzere

$$\|\hat{x}_k - x\| \leq \frac{1}{n} \qquad ve \qquad \|\varepsilon_k(\hat{x}_k - x) - y_n\| \leq \frac{1}{n} \tag{2.13}$$

olacak şekilde $\exists k(n) \in \mathbb{N}$ vardır. Öte yandan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $h_n := \hat{x}_{k(n)}$ ve $t_n := \varepsilon_{k(n)} > 0$ olmak üzere (2.13)'ten $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = x$ olur. Buradan,

$$\|t_n(h_n - x) - y\| = \|\varepsilon_{k(n)}(\hat{x}_{k(n)} - x) - y_n + y_n - y\|$$

$$\leq \|\varepsilon_{k(n)}(\hat{x}_{k(n)} - x) - y_n\| + \|y_n - y\|$$

(2.13)'ten

$$\|t_n(h_n - x) - y\| \leq \frac{1}{n} + \|y_n - y\|$$

olur. (2.12)'den

$$\lim_{n\to\infty} \|t_n(h_n - x) - y\| = 0$$

elde edilir. Böylece $\lim\limits_{n\to\infty} t_n(h_n - x) = y$ olup $y \in T_E^U(x)$ yani $\overline{T_E^U(x)} \subset T_E^U(x)$'dir. Dolayısıyla $T_E^U(x)$ kapalıdır.

$T_E^C(x)$'in kapalılığı gösterilsin. $T_E^C(x) \subset \overline{T_E^C(x)}$ olduğundan $\overline{T_E^C(x)} \subset T_E^C(x)$ gösterilmelidir. O halde $y \in \overline{T_E^C(x)}$ alınsın. Bu durumda $y_n \to y$ olacak şekilde $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq T_E^C(x)$ dizisi vardır. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $y_n \in T_E^C(x)$ olduğundan $\forall \varepsilon_k \to 0$ ve $\forall x_k \to x$ için $x_k + \varepsilon_k \hat{x}_k \in E$ ve $\hat{x}_k \to y_n$ olacak şekilde $\exists (\hat{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi vardır. $\forall x_k \to x$ ve $\hat{x}_k \to y_n$ olduğundan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $k \geq k(n)$ iken,

$$\|x_{k(n)} - x\| < \frac{1}{n} \qquad ve \qquad \|\hat{x}_{k(n)} - y_n\| < \frac{1}{n} \tag{2.14}$$

olacak şekilde $\exists k(n) \in \mathbb{N}$ vardır. Öte yandan

$h_n := x_{k(n)}$, $\hat{h}_n := \hat{x}_{k(n)}$, $\lambda_n := \varepsilon_{k(n)}$ olmak üzere $\forall \lambda_n \to 0^+$ olur. Dahası

$$\begin{aligned} \|\hat{h}_n - y\| &= \|\hat{h}_n - y_n + y_n - y\| \\ \|\hat{h}_n - y\| &\leq \|\hat{h}_n - y_n\| + \|y_n - y\| \end{aligned}$$

olur. $y_n \to y$ olduğundan ve (2.14) ile birlikte $\lim_{n\to\infty} \hat{h}_n = y$ elde edilir.
Öte yandan $\|h_n - x\| = \|x_{k(n)} - x\| < \frac{1}{n}$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} \|h_n - x\| = 0$ ve $h_n + \lambda_n \hat{h}_n = x_{k(n)} + \varepsilon_{k(n)} \hat{x}_{k(n)} \in E$ olup $y \in T_E^C(x)$ olur. Bu durumda $\overline{T_E^C(x)} \subset T_E^C(x)$'dir. $T_E^C(x) = \overline{T_E^C(x)}$ olur. $T_E^C(x)$ kapalıdır.
$T_E^L(x)$'nin kapalılığı da benzer şekilde gösterilebilir.

(ii) $T_E^C(x)$'in konveks olduğu gösterilsin.
$T_E^C(x)$ koni olduğundan $\forall \overline{x}_1, \overline{x}_2 \in X$ için $\overline{x}_1 + \overline{x}_2 \in T_E^C(x)$ gösterilmesi yeterli olacaktır. Keyfi $\overline{x}_1, \overline{x}_2 \in T_E^C(x)$ alınsın. Bu durumda $\varepsilon_k \to 0^+$ ve $x_k \to x$ olan keyfi $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset E$, $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ dizileri ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\overline{x}_1 \in T_E^C(x)$ olduğundan
$\hat{x}_k^1 \to \overline{x}_1$ ve $x_k + \varepsilon_k \hat{x}_k^1 \in E$ olan $\exists (\hat{x}_k^1)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ dizisi vardır.
$x_{1,k} := x_k + \varepsilon_k \hat{x}_k^1$ olarak tanımlansın. Burada $\forall k \in \mathbb{N}$ için $x_{1,k} \in E$ ve $x_{1,k} \to x$ olduğu açıktır. $\overline{x}_2 \in T_E^C(x)$ olduğundan $\hat{x}_k^2 \to \overline{x}_2$ ve $x_{1,k} + \varepsilon_k \hat{x}_k^2 = x_k + \varepsilon_k \hat{x}_k^1 + \varepsilon_k \hat{x}_k^2 = x_k + \varepsilon_k(\hat{x}_k^1 + \hat{x}_k^2) \in E$ olan $\exists (\hat{x}_k^2)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ dizisi vardır. Böylece $x_k \to x, \varepsilon_k \to 0$ olan $\forall (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq E$, $\forall (\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ dizileri için $\hat{x}_k = \hat{x}_k^1 + \hat{x}_k^2 \to \overline{x}_1 + \overline{x}_2$ ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için $x_k + \varepsilon_k \hat{x}_k \in E$ olacak şekilde $(\hat{x}_k)_{k\in\mathbb{N}} = (\hat{x}_k^1 + \hat{x}_k^2)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ dizisi elde edilir. Dolayısıyla $\overline{x}_1 + \overline{x}_2 \in T_E^C(x)$ olur. O halde $T_E^C(x)$ konvekstir.

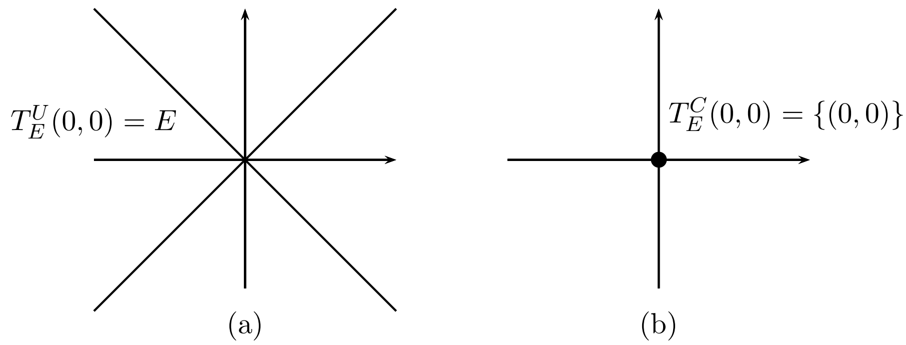
(iii) $T_E^C(x) \subseteq T_E^U(x)$ kapsamı gösterilsin.
$\overline{x} \in T_E^C(x)$ alınsın. Bu durumda $x_k \to x, \varepsilon_k \to 0$ olan keyfi $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset E$, $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ dizileri için $\hat{x}_k \to \overline{x}$ ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için $x_k + \varepsilon_k \hat{x}_k \in E$ olan $\exists (\hat{x}_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ dizisi vardır. Burada özel olarak $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} = (x)_{k\in\mathbb{N}}$ sabit dizisi seçilirse $\forall k \in \mathbb{N}$ için $x + \varepsilon_k \hat{x}_k \in E$ olur. Böylece $\varepsilon_k \to 0^+, \hat{x}_k \to \overline{x}$ ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için $x + \varepsilon_k \hat{x}_k \in E$ olan $\exists (\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ ve $\exists (\overline{x}_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ dizileri

elde edilir. Dolayısıyla $\overline{x} \in T_E^U(x)$ olur.

□

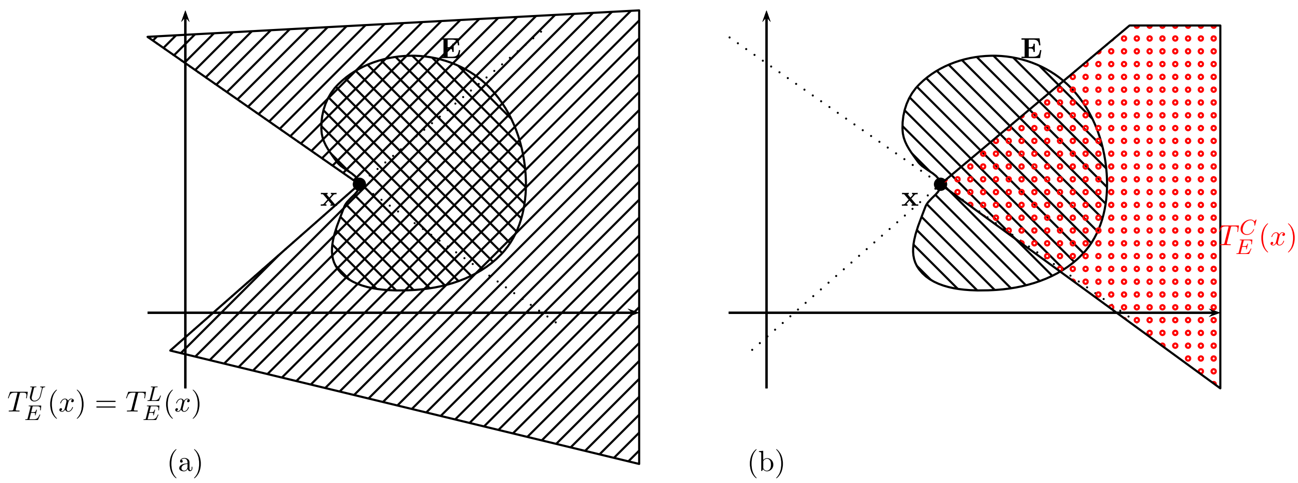
Aşağıda alt tanjant koni, üst tanjant koni ve Clarke koniye dair örnekler verilmiştir.

Örnek 2.5.1. $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | |x| = |y|\}$ *kümesi olmak üzere Şekil 2.7(a)'da* E *kümesinin* $(0,0)$*'daki üst tanjant konisi, Şekil 2.7(b)'de ise* E *kümesinin* $(0,0)$*'daki Clarke tanjant konisi gösterilmiştir.*



Şekil 2.7. (a) E kümesinin $(0,0)$'daki üst tanjant konisi, (b) E kümesinin $(0,0)$'daki Clarke konisi

Örnek 2.5.2. *Şekil 2.8(a)'da E kümesinin x noktasındaki alt ve üst tanjant konileri Şekil 2.8(b)'de de Clarke konisi gösterilmiştir.*



Şekil 2.8. (a) E kümesinin x noktasındaki alt ve üst tanjant konileri, (b) E kümesinin x noktasındaki Clarke konisi

2.6 Yönlü Türevler ile Tanjant Konilerin Karşılaştırılması

Yönlü türevler ve tanjant koniler arasında oldukça yakın bir ilişki vardır. Bu bölümde bu ilişki incelencektir.

Teorem 2.6.1. *$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$'nin bir komşuluğunda Lipschitz sürekli olsun. Bu durumda*

$$epi f^o(x, \cdot) = T^C_{epif}(x, f(x))$$

olur.

Kanıt. $(v, r) \in T^C_{epif}(x, f(x))$ olsun. $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ve $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizileri $y_k \to x,\ t_k \downarrow 0$ ve

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f(y_k + t_k v) - f(y_k)}{t_k} = f^o(x, v)$$

olacak şekilde seçilsin. Bu durumda $((y_k, f(y_k)))_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi $epif$ içinde $(x, f(x))$'e yakınsaktır. $T^C_{epif}(x, f(x))$'in tanımından $((v_k, r_k))_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi $(v_k, r_k) \to (v, r)$ ve $\forall\ k \in \mathbb{N}$ için $(y_k, f(y_k)) + t_k(v_k, t_k) \in epif$ olacak şekilde vardır. Böylece $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$f(y_k + t_k v_k) \leq f(y_k) + t_k r_k \qquad \text{olur.}$$

Buradan

$$\frac{f(y_k + t_k v_k) - f(y_k)}{t_k} \leq r_k$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte $k \to \infty$ için limit alınırsa

$$f^o(x, v) = \lim_{k \to \infty} \frac{f(y_k + t_k v) - f(y_k)}{t_k} \leq \lim_{k \to \infty} r_k = r$$

olur. Dolayısıyla $f^o(x, v) \leq r$ yani $(v, r) \in epif^o(x, \cdot)$'dir. O halde

$$T^C_{epif}(x, f(x)) \subseteq epif^o(x, \cdot) \tag{2.15}$$

elde edilir.

Keyfi bir $(v, r) \in epif^o(x, \cdot)$ alınsın. Bu durumda $f^o(x, v) \leq r$'dir. $\delta := r - f^o(x, v)$ alınırsa $f^o(x, v) \leq f^o(x, v) + \delta$ olur.

$epif$ içinde $(x, f(x))$'e yakınsak herhangibir $((x_k, r_k))_{k\in\mathbb{N}}$ ve 0'a yakınsak herhangibir $(t_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^+$ dizisi alınsın. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $(x_k, r_k) + t_k(v_k, s_k) \in epif$ ve $(v_k, s_k) \to (v, r)$ olacak şekilde $((v_k, s_k))_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi oluşturulursa kanıt tamamlanmış olur.

$\forall k \in \mathbb{N}$ için $v_k := v$ ve $s_k := maks\{f^o(x, v)+\delta, \frac{f(x_k + t_k v) - f(x_k)}{t_k}\}$ olarak seçilirse $s_k \to f^o(x, v) + \delta = r$ ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{f(x_k + t_k v) - f(x_k)}{t_k} \leq \lim_{i \to \infty} s_k = f^o(x, v) + \delta \tag{2.16}$$

olur. (2.16)'dan $\forall k \in \mathbb{N}$ için $f(x_k + t_k v_k) - f(x_k) \leq t_k s_k$ elde edilir.
$((x_k, r_k))_{k\in\mathbb{N}} \subseteq epif$ olduğundan $\forall k \in \mathbb{N}$ için $r_k - f(x_k) \geq 0$'dır. O halde

$$f(x_k + t_k v_k) \leq t_k s_k + f(x_k) \leq t_k s_k + r_k$$

olur. Dolayısıyla $\forall k \in N$ için $(x_k, r_k) + t_k(v_k, s_k) \in epif$ buradan da
$(v, r) \in T^C_{epif}(x, f(x))$ elde edilir. O halde

$$epif^o(x, \cdot) \subseteq T^C_{epif}(x, f(x)) \tag{2.17}$$

olur. (2.15) ve (2.17)'den $epif^o(x,\cdot) = T^C_{epif}(x, f(x))$ elde edilir. $\square$

Önerme 2.6.1. *$f : X \to \mathbb{R}$ verilsin. Bu durumda*

$$T^U_{epif}(x, f(x)) = epi(D_\oplus f(x,\cdot)) = epi(D_+ f(x,\cdot))$$

olur.

Kanıt. Kanıtı Teorem 2.6.1'e benzer şekilde yapılır. $\square$

Uyarı 2.6.1. *$C \subset \mathbb{R}^n$ konveks ise $d_C(\cdot)$ uzaklık fonksiyonu konveks dolayısıyla $d^o_C(\cdot) = d'_C(\cdot)$ olur. Diğer taraftan C konveks ise*

$$\begin{aligned} v \in T_C(x) \quad &\Longleftrightarrow \quad d^o_C(x,v) = d'_C(x,v) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad epid^o_C = epid'_C \\ &\Longleftrightarrow \quad T^U_{epif}(\cdot,\cdot) = T^C_{epif}(\cdot,\cdot) \end{aligned}$$

elde edilir.

2.7 Clarke Subdiferansiyel

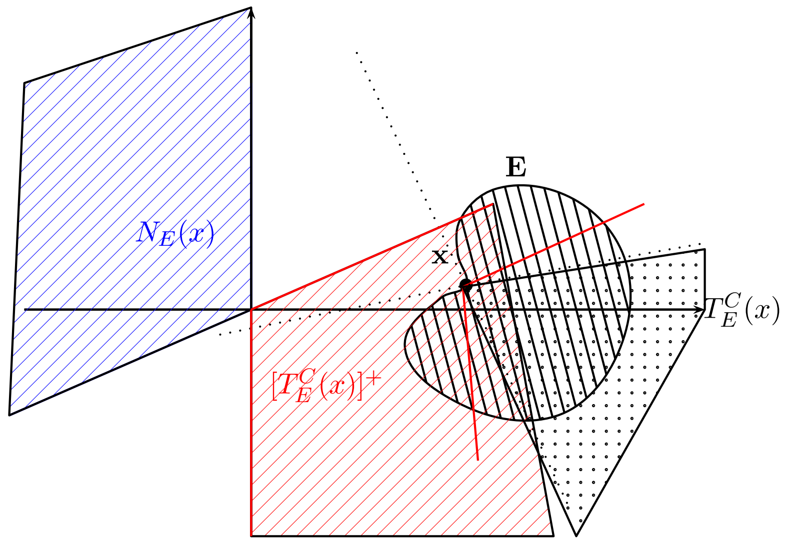
Tanım 2.7.1. *$E \subset X$ kümesi ve $x \in cl(E)$ noktası verilsin.*

$$N_E(x) = -[T^C_E(x)]^+$$

ile tanımlı $N_E(x)$ kümesine, $T^C_E(x)$ konisinin Clarke normal konisi denir.

Tanımdan da anlaşılacağı üzere Clarke normal koni, konveks, kapalı ve boştan farklıdır.

Örnek 2.7.1. *Şekil 2.9 'deki E kümesi ve x noktası göz önüne alınsın. E kümesinin x noktasındaki Clarke konisi ve Clarke normal konisi Şekil 2.9' de çizilen koniler olurlar.*



Şekil 2.9. E kümesinin x noktasındaki Clarke konisi ve Clarke Normal konisi

Tanım 2.7.2. *$f : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, X'te sonlu değer alan alttan yarı sürekli bir fonksiyon olsun.*

$$\partial^o f(x) = \{x^* \in X | (x^*, -1) \in N_{epif}(x, f(x))\}$$

ile tanımlı $\partial^o f(x)$ kümesine f fonksiyonunun x noktasındaki Clarke subdiferansiyeli (Clarke genelleştirilmiş gradient) denir.

Uyarı 2.7.1. *$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu olmak üzere aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

(i) $\partial^o f(x)$ konvekstir ve X'te kapalıdır. Özel olarak f, herbir x noktasının bir komşuluğunda yerel Lipschitz sürekli ise, $f^o(x, \cdot)$ genelleştirilmiş yönlü türevi $\partial^o f(x)$'in destek fonksiyonudur ve $\partial^o f(x)$ genelleştirilmiş Clarke subdiferansiyeli X'te boş olmayan ve kompakt bir kümedir.

(ii) f fonksiyonu Lipschitz sürekli ise f $\mathbb{R}^n$ üzerinde hemen hemen her yerde türevlenebilirdir. f'nin türevlenebilir olduğu tüm noktaların kümesi X_f ve gradienti $\nabla f(x)$ ile gösterilsin. Bu durumda

$$\partial^o f(x) = conv\{\lim_{x_i \to x} \nabla f(x_i) | x_i \in X_f\}$$

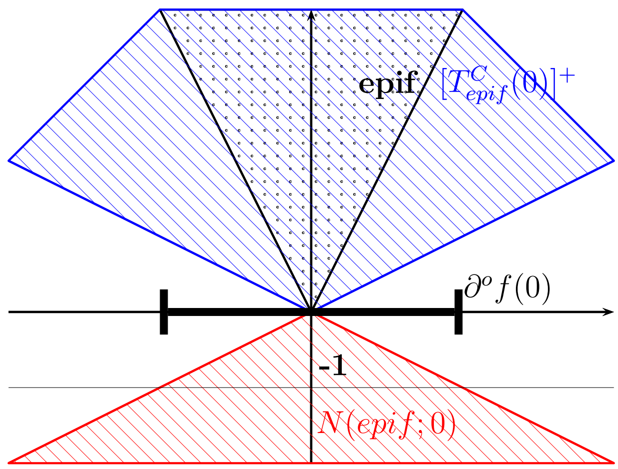
olur.

(iii) *f sürekli, konveks bir fonksiyon ise $\partial^o f(x)$ genelleştirilmiş Clarke subdiferansiyeli klasik $\partial f(x)$ subdiferansiyele eşittir.*

(iv) *f sürekli türevlenebilir ise Clarke subdiferansiyel f'nin gradientinden oluşan tek nokta kümesidir.*

Böylece Clarke subdiferansiyel, fonksiyonun türevlenemez olduğu durumlarda türevin bir genelleştirilmesini, konveks olmayan fonksiyonlar için de subdiferansiyel kavramının bir genelleştirilmesini verir.

Örnek 2.7.2. *Şekil 2.10'da epigrafı verilen bir f fonksiyonun Clarke subdiferansiyeli belirtilmiştir.*



Şekil 2.10. f fonksiyonunun 0 noktasındaki Clarke subdiferansiyeli

Tanım 2.7.3. *$f : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ fonksiyonu ve $x \in X$ noktası verilsin.*

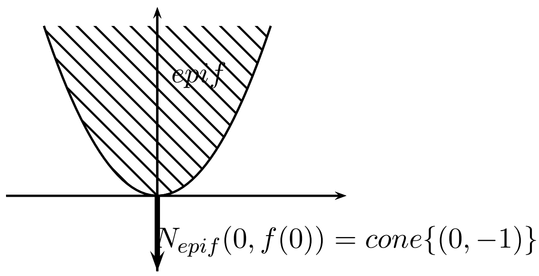
$$\partial^\infty f(x) = \{x^* \in X | (x^*, 0) \in N_{epif}(x, f(x))\}$$

kümesine f'nin x noktasındaki asimptotik Clarke subdiferansiyeli denir.

Örnek 2.7.3. *$f(x) = x^2$ fonksiyonu ve $x = 0$ noktası göz önüne alınsın. Bu durumda $N_{epif}(0, f(0)) = cone\{(0,-1)\} = \{(0, y)|y \leq 0\}$ olur. Buradan*

$$\begin{aligned}
\partial^{\infty} f(0) &= \{x^* \in \mathbb{R}|(x^*, 0) \in N_{epif}(0, f(0))\} \\
&= \{x^* \in \mathbb{R}|(x^*, 0) \in \{(0, y)|y \leq 0\}\} \\
&= \{0\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Aynı zamanda $T^C_{epif}(0) = \partial^{\infty} f(0) = \{0\}$ olur. Şekil 2.11'da f fonksiyounun grafiği ve f fonksiyonun 0 noktasındaki asimptotik Clarke subdiferansiyeli gösterilmiştir.



Şekil 2.11. $f(x) = x^2$ fonksiyonun $x = 0$ noktasındaki asimptotik Clarke subdiferansiyeli

Aşağıda bir fonksiyonun Clarke subdiferansiyeli ve asimptotik Clarke subdiferansiyeli ile igili bazı özellikler verilmiştir.

Önerme 2.7.1. *$f : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ fonksiyonu ve $x \in X$ verilsin. Bu durumda*

(i) $\partial^{\infty} f(x), X$'te konveks ve kapalı bir konidir.

(ii) $|f(x)| < \infty$ ise $\partial^{o} f(x) = (\partial^{\infty} f(x) \backslash \{0\}) \neq \emptyset$ olur.

(iii) Aşağıdaki ifadeler denktir.

(a) $\partial^{o} f(x) \neq \emptyset$ ve sınırlıdır.

(b) f x'in bir komşuluğunda Lipschitz süreklidir.

(c) $\partial^{\infty} f(x) = \{0\}$'dır.

3 KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLERİN BAZI SÜREKLİLİKLERİ VE KONVEKS İŞLEM

Bu bölümde küme değerli dönüşümlerin düzgün sınırlılığı, sürekliliği, üstten ve alttan yarı süreklilikleri , Lipschitz ve pseudo Lipschitz süreklilikleri ile küme değerli dönüşümlerle tanımlanan Uzaklık, Destek ve Marjinal Fonksiyonların süreklilikleri arasındaki bazı ilişkiler kurulacaktır.

3.1 Küme Değerli Dönüşümlerin Alttan ve Üstten Yarı Süreklilikleri ve Hausdorff Süreklilikleri

Tanım 3.1.1. *$X = \mathbb{R}^n$,$Y = \mathbb{R}^m$ $F : X \to 2^Y$ olsun. $\forall x \in X$ için $F(x) \subset Y$ oluyorsa, F dönüşümüne küme değerli dönüşüm denir.*

$$grF = \{(x, y)|x \in X, \quad y \in F(x)\}$$

ile tanımlı grF kümesine F dönüşümünün grafiği,

$$domF = \{x \in X|F(x) \neq \emptyset\}$$

ile tanımlı $domF$ kümesine F dönüşümünün etkin tanım kümesi denir. $F(x)$ kümesine, x noktasının görüntüsü denir. $M \subset X$ olmak üzere

$$F(M) = \bigcup_{x \in M} F(x)$$

ile tanımlı $F(M)$ kümesine M kümesinin F dönüşümü altındaki görüntüsü denir.

Önerme 3.1.1. *$F : X \to 2^Y$ küme değerli dönüşümü verilsin. $y \in F(x)$ olması için gerek ve yeter koşul $(x, y) \in grF$ olmasıdır.*

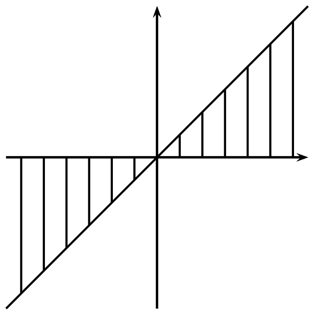
Tanım 3.1.2. *$F : X \to 2^Y$ küme değerli dönüşüm olmak üzere $\forall x \in X$ için $F(x)$ kümesi kapalı (kompakt, konveks) ise F küme değerli dönüşümüne kapalı (kompakt, konveks) değerli dönüşüm denir.*

Tanım 3.1.3. *$F : X \to 2^Y$ küme değerli dönüşümü verilsin. grF, $X \times Y$'de konveks bir küme ise F dönüşümüne konveks denir.*

Örnek 3.1.1. *$F : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$ olmak üzere,*

$$F(x) = \begin{cases} [0, x] & 0 \leq x \leq y \\ [x, 0] & y \leq x \leq 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanan F küme değerli dönüşümü verilsin. Şekil 3.12'de F dönüşümünün grafiği verilmiştir. Görüldüğü gibi $\forall x \in \mathbb{R}$ için $F(x)$ kapalı ve konveks olduğundan F kapalı ve konveks değerli bir dönüşümdür.



Şekil 3.12. F dönüşümünün grafiği

Tanım 3.1.4. *$F : X \to 2^Y$ küme değerli dönüşümü ve $x_0 \in X$ noktası verilsin.*

$$\limsup_{x \to x_0} F(x) := \{y \in Y | \exists x_k \to x_0 \ \textit{ve} \ \exists (y_k)_{k \in \mathbb{N}} \ni y_k \in F(x_k), k = 1, 2 \ldots \ \textit{ve} \ y_k \to y\}$$

$$\liminf_{x \to x_0} F(x) := \{y \in Y | \forall x_k \to x_0 \ \textit{için} \ \exists (y_k)_{k \in \mathbb{N}} \ni y_k \in F(x_k), k = 1, 2 \ldots \ \textit{ve} \ y_k \to y\}$$

kümelerine sırası ile F dönüşümünün x_0'da üstten topolojik limiti ve alttan topolojik limiti denir.

Bu limitlere denk bir tanım da uzaklık fonksiyonu yardımıyla aşağıdaki önermede verilmiştir.

Önerme 3.1.2. *$F : X \to 2^Y$ küme değerli dönüşümü ve $x_0 \in X$ noktası verilsin. Bu durumda*

$$\limsup_{x\to x_0} F(x) = \{y \in Y | \liminf_{x\to x_0} d(y, F(x)) = 0\}$$

ve

$$\liminf_{x\to x_0} F(x) = \{y \in Y | \limsup_{x\to x_0} d(y, F(x)) = 0\}$$

olur.

Önerme 3.1.3. *$F : X \to 2^Y$ küme değerli dönüşümü ve $x_0 \in X$ olsun. $\limsup_{x\to x_0} F(x)$ ve $\liminf_{x\to x_0} F(x)$ kümeleri kapalıdır.*

Kanıt. $\liminf_{x\to x_0} F(x)$'in kapalılığı gösterilsin.
$\liminf_{x\to x_0} F(x) \subset \overline{\liminf_{x\to x_0} F(x)}$ olduğundan $\overline{\liminf_{x\to x_0} F(x)} \subset \liminf_{x\to x_0} F(x)$ gösterilmelidir.
$y_0 \in \overline{\liminf_{x\to x_0} F(x)}$ alınsın. Bu durumda
$\hat{y}_k \to y_0$ olacak şekilde $\exists (\hat{y}_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \liminf_{x\to x_0} F(x)$ vardır. Buradan $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{2}$ için

$$\|y_0 - \hat{y}_{\hat{k}}\| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.18}$$

olacak şekilde $\exists \hat{k}$ vardır. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\hat{y}_k \in \liminf_{x\to x_0} F(x)$ olduğundan
$\overline{y}_{\hat{k}} \in \liminf_{x\to x_0} F(x)$ olup, $x_i \to x_0$ olan $\forall (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq X$ için

$$y_{k,i} \to \hat{y}_k \tag{3.19}$$

olacak şekilde $\exists (y_{k,i})_{i\in\mathbb{N}} \subseteq F(x_i)$ vardır.
Öte yandan $x_j \to x_0$ olan keyfi bir $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ alınsın. Bu durumda $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$ için (3.19)'dan $\exists j$ ve $\exists y_{k,j} \in F(x_j)$ için

$$\|\hat{y}_{\hat{k}} - y_{k,j}\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

elde edilir. Böylece (3.18) ile birlikte

$$\|y_{k,j} - y_0\| = \|y_{k,j} - \hat{y}_{\hat{k}} + \hat{y}_{\hat{k}} - y_0\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \text{ olur.}$$

Buradan $y_{k,j} \to y_0$ elde edilir. Dolayısıyla $y_0 \in \liminf\limits_{x \to x_0} F(x)$ yani $\overline{\liminf\limits_{x \to x_0} F(x)} \subset \liminf\limits_{x \to x_0} F(x)$ olur. O halde $\liminf\limits_{x \to x_0} F(x)$ kapalıdır. $\square$

$\limsup\limits_{x \to x_0} F(x)$'in kapalılığı da benzer şekilde gösterilir.
$\liminf\limits_{x \to x_0} F(x) \subset \limsup\limits_{x \to x_0} F(x)$ durumu açıktır.

Tanım 3.1.5. *$F : X \to 2^Y$ küme değerli dönüşümü ve $x_0 \in X$ olsun.*

$$\limsup_{x \to x_0} F(x) \subset F(x_0)$$

ise F dönüşümüne x_0 noktasında üstten yarı sürekli ya da x_0 noktasında kapalıdır denir.

Buradan sonra üstten yarı sürekli yerine ü.y.s. kısaltması kullanılacaktır.

Tanım 3.1.6. *$F : X \to 2^Y$, $x_0 \in X$ olsun.*

$$\liminf_{x \to x_0} F(x) \supset F(x_0)$$

ise F dönüşümüne x_0 noktasında alttan yarı sürekli denir.

Buradan sonra alttan yarı sürekli yerine a.y.s. kısaltması kullanılacaktır.

Tanım 3.1.7. *$F : X \to 2^Y$, $x_0 \in X$ olsun. F dönüşümü x_0'da a.y.s. ve ü.y.s. ise dönüşüm süreklidir denir.*

Bir F küme değerli dönüşümünün a.y.s. ve ü.y.s. olmasına dair bazı karakterizasyonlar aşağıda verilmiştir.

Teorem 3.1.1. *$F : X \to 2^Y$ bir küme değerli dönüşüm, $x_0 \in X$ olsun.*

(i) F'nin x_0 noktasında ü.y.s. olması için gerek ve yeter koşul $F(x_0) \subset U$ olan $\forall U \subset Y$ açık kümesi için

$$F(x) \subset U, \qquad \forall x \in V$$

olacak şekilde , U'ya bağlı, x_0'ın bir $V \subset X$ komşuluğunun olmasıdır.

(ii) *F'nin x_0 noktasında a.y.s. olması için gerek ve yeter koşul $F(x_0) \cap U \neq \emptyset$ olan $\forall U \subset Y$ açık kümesi için*

$$F(V) \cap U \neq \emptyset, \qquad \forall x \in V$$

olacak şekilde U'ya bağlı, x_0'ın bir $V \subset X$ komşuluğunun olmasıdır.

Tanım 3.1.8. *$F : X \to 2^Y$ küme değerli dönüşüm olsun. $U \subseteq Y$ ise*

(i) *$F^{-}(U) := \{x \in X | F(x) \cap U \neq \emptyset\}$ şeklinde tanımlanan $F^{-}(U)$ kümesine U'nun F altındaki alt ters görüntüsü denir.*

(ii) *$F^{+}(U) := \{x \in X | F(x) \subseteq U\}$ şeklinde tanımlanan $F^{+}(U)$ kümesine U'nun F altındaki üst ters görüntüsü denir.*

Önerme 3.1.4. *$F : X \to 2^Y \backslash \{\emptyset\}$ küme değerli dönüşüm olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler elde edilir.*

(i) *F dönüşümünün a.y.s. olması için gerek ve yeter koşul $\forall U \subseteq Y$ açık kümesi için $F^{-}(U)$ kümesinin X'te açık olmasıdır.*

(ii) *F dönüşümünün a.y.s. olması için gerek ve yeter koşul $\forall C \subseteq Y$ kapalı kümesi için $F^{+}(C)$ kümesinin X'te kapalı olmasıdır.*

(iii) *F dönüşümünün ü.y.s. olması için gerek ve yeter koşul $\forall U \subseteq Y$ açık kümesi için $F^{+}(U)$ kümesinin X'te açık olmasıdır.*

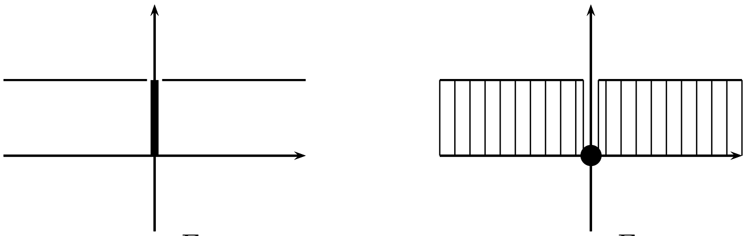
(iv) *F dönüşümünün ü.y.s. olması için gerek ve yeter koşul $\forall C \subseteq Y$ kapalı kümesi için $F^{-}(C)$ kümesinin X'te kapalı olmasıdır.*

(v) *F dönüşümünün sürekli olması için gerek ve yeter koşul $\forall U \subseteq Y$ açık kümesi için $F^{-}(U)$ ve $F^{+}(U)$ kümelerinin X'te açık olmasıdır.*

Örnek 3.1.2. *$F_1 : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$ ve $F_2 : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$ küme değerli dönüşümleri $\forall x \in \mathbb{R}$ için*

$$F_1(x) = \begin{cases} [0,1] & x = 0 \\ \{1\} & x \neq 0 \end{cases} \qquad ve \qquad F_2(x) = \begin{cases} \{0\} & x = 0 \\ [0,1] & x \neq 0 \end{cases}$$

olarak tanımlansınlar. Bu durumda F_1, $x = 0$'da ü.y.s. fakat a.y.s. değildir. F_2 de $x = 0$'da a.y.s. fakat ü.y.s. değildir. Şekil 3.13'de F_1 ve F_2 dönüşümlerinin grafikleri gösterilmiştir.



Şekil 3.13. F_1 ve F_2 dönüşümlerinin grafikleri

Çözüm:

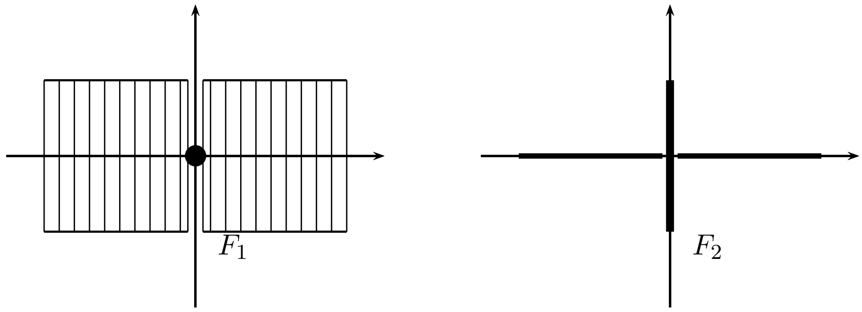
- $x = 0$, $F_1(0) \subset U$ olan herhangi bir U açığı alınsın. $a, b \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $V = (-a, b)$ olsun. $0 \in V$'dir ve V açık kümedir. Bunun yanında $\forall x \in (-a, b) = V$ için $F_1(x) = [0, 1]$ veya $F_1(x) = \{1\}$'dir. Bu durumda $F_1(x) \subset F_1(0) \subset U$ olur. Yani F_1, $x = 0$'da ü.y.s.'dir.
  Öte yandan $F_1(0) \cap U \neq \emptyset$ olan keyfi bir U açığı için 0'ı içeren en az bir V açığı, $\forall x \in V$ için $F_1(0) \cap U \neq \emptyset$ bulunamayabilir. Gerçekten $U = (0, 1)$ açığı için hangi V açığı alınırsa alınsın sıfırdan farklı bir $x \in V$ elemanı olacaktır. Dolayısıyla $F_1(x) = \{1\}$ olduğundan
  $$U \cap F_1(0) = (0, 1) \cap \{1\} = \emptyset$$
  olur. Dolayısıyla F_1, $x = 0$'da a.y.s. değildir.

- Benzer biçimde F_2 için $U = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ olsun. $F_2(0) = \{0\} \subset (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ olur. Ancak $0 \in V$ olacak şekilde herhangi bir V açığı için $x \neq 0$ olan $\exists x \in V$ vardır. Buradan $F_2(x) = [0, 1] \nsubseteq U = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ olur. O halde F_2, $x = 0$'da ü.y.s. değildir. Öte yandan $U \cap F_2(0) \neq 0$ olan herhangi bir U açığı alınsın. $a, b \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $V = (-a, b)$ açığı gözönüne alınırsa $0 \in V$'dir. Aynı zamanda $\forall x \in V$ için $F_2(x) \cap U \neq \emptyset$ olur. Dolayısıyla F_2, $x = 0$'da a.y.s.'dir.

Örnek 3.1.3. *$F_1 : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$ ve $F_2 : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$ küme değerli dönüşümleri $\forall x \in \mathbb{R}$ için*

$$F_1(x) = \begin{cases} \{0\} & x = 0 \\ [-1,1] & x \neq 0 \end{cases} \qquad ve \qquad F_2(x) = \begin{cases} [-1,1] & x = 0 \\ \{0\} & x \neq 0 \end{cases}$$

olarak tanımlansınlar. Bu durumda F_1, $x = 0$'da a.y.s. fakat ü.y.s. değildir. F_2 de $x = 0$'da ü.y.s. fakat a.y.s. değildir. Şekil 3.14'te F_1 ve F_2 dönüşümlerinin grafikleri gösterilmiştir.



Şekil 3.14. F_1 ve F_2 dönüşümlerinin grafikleri

Çözüm:

- $U \cap F_1(0) \neq 0$ olan herhangi bir U açığı alınsın. $a, b \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $V = (-a, b)$ açığı gözönüne alınırsa $0 \in V$'dir. Aynı zamanda $\forall x \in V$ için $F_1(x) \cap U \neq \emptyset$ olur. Dolayısıyla F_2, $x = 0$'da a.y.s.'dir.
  Öte yandan $U = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ olsun. $F_1(0) = \{0\} \subset (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ olur. Ancak $0 \in V$ olacak şekilde herhangi bir V açığı için $x \neq 0$ olan $\exists x \in V$ vardır. Buradan $F_1(x) = [-1,1] \nsubseteq U = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ olur. O halde F_1, $x = 0$'da ü.y.s. değildir.

- $x = 0$, $F_2(0) \subset U$ olan herhangi bir U açığı alınsın. $a, b \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $V = (-a, b)$ olsun. $0 \in V$'dir ve V açık kümedir. Ayrıca
  $\forall x \in (-a, b) = V$ için $F_2(x) = [-1,1]$ veya $F_2(x) = \{0\}$'dir. Bu durumda $F_2(x) \subseteq F_2(0) \subset U$ olur. Yani F_2, $x = 0$'da ü.y.s.'dir.
  Öte yandan, $F_2(0) \cap U \neq \emptyset$ olan keyfi bir U açığı için 0'ı içeren en az bir V

açığı, $\forall x \in V$ için $F_2(0) \cap U \neq \emptyset$ bulunamayabilir. Gerçekten $U = (0,1)$ açığı için hangi V açığı alınırsa alınsın sıfırdan farklı bir $x \in V$ elemanı olacaktır. $F_2(x) = \{0\}$ olduğundan $U \cap F_2(0) = (0,1) \cap \{0\} = \emptyset$ olur. Dolayısıyla F_2, $x = 0$'da a.y.s değildir.

Tanım 3.1.9. *$F : X \to 2^Y$ bir küme değerli dönüşüm ve $x_0 \in X$ olsun.*

1. *$\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall x \in x_0 + \delta\mathbb{B}$ için*

$$F(x_0) \subset F(x) + \varepsilon\mathbb{B}$$

   olacak şekilde en az bir $\delta > 0$ sayısı var ise F'ye x_0'da Hausdorff alttan yarı sürekli denir.

2. *$\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ sayısı $\forall x \in x_0 + \delta\mathbb{B}$ için*

$$F(x) \subset F(x_0) + \varepsilon\mathbb{B}$$

   olacak şekilde bir $\delta > 0$ var ise F'ye x_0'da Hausdorff üstten yarı sürekli denir.

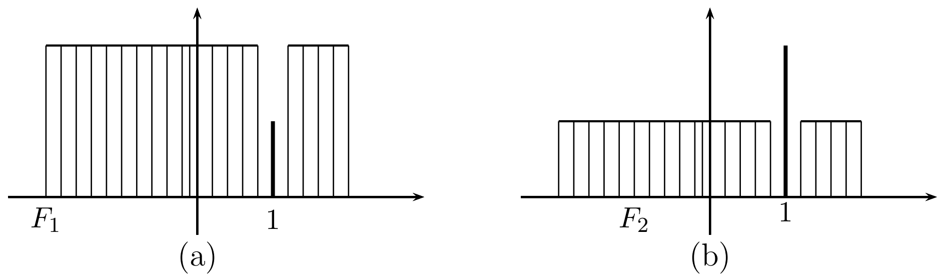
3. *F x_0'da hem Hausdorff alttan yarı sürekli hem de Hausdorff üstten yarı sürekli ise F dönüşümüne x_0'da Hausdorff süreklidir denir.*

Buradan sonra Hausdorff üstten yarı sürekli yerine H.ü.y.s. kısaltması ve Hausdorff alttan yarı sürekli yerine H.a.y.s. kısaltması kullanılacaktır.

Örnek 3.1.4. *$F_1 : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$, $F_2 : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$ küme değerli dönüşümleri $\forall x \in \mathbb{R}$ için*

$$F_1(x) = \begin{cases} [0,1] & x = 1 \\ [0,2] & x \neq 1 \end{cases} \quad \text{ve} \quad F_2(x) = \begin{cases} [0,2] & x = 1 \\ [0,1] & x \neq 1 \end{cases}$$

olarak tanımlansınlar. Bu durumda F_1, 1'de H.a.y.s. fakat H.ü.y.s değil iken F_2, 1'de H.ü.y.s. fakat H.a.y.s. değildir. Şekil 3.15'te F_1 ve F_2 dönüşümlerinin grafikleri gösterilmiştir.



Şekil 3.15. F_1 ve F_2 dönüşümlerinin grafikleri

Çözüm:

- Keyfi $\varepsilon > 0$ alınsın. $F_1(1) = [0, 1]$ olduğundan $\forall\delta > 0$ için $1 + \delta\mathbb{B} = (1 - \delta, 1 + \delta)$ kümesi 1'den farklı elemanlar içerdiğinden $1 \neq x \in 1 + \delta\mathbb{B}$ için $F_1(x) = [0, 2]$ olur. Bu durumda $\forall\varepsilon > 0$ ve $\forall\delta > 0$ için $F_1(1) \subset F_1(x) + \varepsilon\mathbb{B}$ sağlanır. Dolayısıyla F_1, 1'de H.a.y.s.'dir.

- Keyfi $\varepsilon > 0$ alınsın. $F_2(1) + \varepsilon\mathbb{B} = [0, 2] + (-\varepsilon, \varepsilon)$ olduğundan $\forall\delta > 0$ ve $\forall x \in 1 + \delta\mathbb{B} = (1 - \delta, 1 + \delta)$ için $F_2(x) = [0, 1]$ veya $F_2(x) = [0, 2]$ olduğundan $F_2(x) \subset F_2(1) + \varepsilon\mathbb{B}$ olur. Yani F_2 dönüşümü 1'de H.ü.y.s.'dir.

Buradan sonra Y'nin boş olmayan, kompakt alt kümelerinin ailesi $CS(Y)$ ile, Y'nin boş olmayan, kompakt ve konveks alt kümelerinin ailesi de $CCS(Y)$ ile gösterilecektir.

Önerme 3.1.5. *$F : X \to CS(Y)$ küme değerli dönüşümünün, $x_0 \in X$ noktasında Hausdorff sürekli olması için gerek yeter koşul*

$$\lim_{x \to x_0} \rho_H(F(x), F(x_0)) = 0$$

olmasıdır.

Tanım 3.1.10. *$F : X \to CS(Y)$ küme değerli dönüşümü için $x_0 \in X$ olmak üzere, $F(X_0) \subset Y_0$ olacak şekilde x_0'ın bir X_0 komşuluğu ve Y_0 kompakt kümesi var ise F dönüşümü x_0'da düzgün sınırlıdır denir.*
Düzgün sınırlılık, F'nin H.ü.y.s oluşunun bir sonucudur.

Önerme 3.1.6. *$F : X \to CS(Y)$ küme değerli dönüşüm olsun.*

(i) F dönüşümünün ü.y.s. olması için gerek ve yeter koşul F dönüşümünün H.ü.y.s. olmasıdır.

(ii) F dönüşümünün a.y.s. olması için gerek ve yeter koşul F dönüşümünün H.a.y.s. olmasıdır.

Kanıt. (i) ($\Longrightarrow$) F dönüşümü $\forall x_0 \in X$ için ü.y.s. olsun. Bu durumda $\forall \varepsilon > 0$ ve $x_0 \in X$ için x_0'ın bir açık U_ε komşuluğu

$$F^+(B_d(F(x_0), \varepsilon)) = U_\varepsilon$$

olacak şekilde vardır. U_ε açık olduğundan bunun içinde $\exists \delta > 0$ sayısı $U_\varepsilon = x_0 + \delta\mathbb{B}$ olacak şekilde vardır. Buradan $\forall x \in U_\varepsilon$ için $F(x) \subset B_d(F(x), \varepsilon)$ elde edilir. Böylece $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall x \in x_0 + \delta\mathbb{B}$ için

$$F(x) \subset F(x_0) + \varepsilon\mathbb{B}$$

olur. Dolayısıyla F dönüşümü $\forall x_0 \in X$'te H.ü.y.s.'dir.

($\Longleftarrow$) F, $\forall x_0 \in X$ için H.ü.y.s. olsun. F dönüşümünün ü.y.s. olduğunu göstermek için grF'nin kapalı olduğunu göstermek yeterlidir. O halde $grF \subset \overline{grF}$ olduğundan $\overline{grF} \subset grF$ olduğu gösterilmelidir.

$(x, y) \in \overline{grF}$ alınsın. Bu durumda $(x_i, y_i) \to (x, y)$ olacak şekilde $\exists((x_i, y_i))_{i\in\mathbb{N}} \subset grF$ dizisi vardır. Burada $(x_i, y_i) \to (x, y)$ olduğundan $x_i \to x$, $y_i \to y$'dir. Dahası $\forall i \in \mathbb{N}$ için $(x_i, y_i) \in grF$ olduğundan $y_i \in F(x_i)$'dir. Öte yandan F, H.ü.y.s. olduğundan $i \to \infty$ için

$$d(y_i, F(x)) \leq \rho_H(F(x_i), F(x)) \to 0\text{'dır.} \tag{3.20}$$

Ayrıca $F(x) \in CS(Y)$ olduğundan $\forall i \in \mathbb{N}$ için

$$d(y_i, F(x)) = \|y_i - z_i\|$$

olacak şekilde $\exists z_i \in F(x)$ vardır. $F(x)$ kompakt olduğundan

$z_j \to z \in F(x)$ olacak şekilde $\exists (z_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset F(x)$ alt dizisi vardır. Buradan (3.20) ile birlikte $d(y_i, F(x)) = \|y_i - z_j\| \to 0$ olup $y_i \to z$ elde edilir. Limit tek olduğundan $y = z$ olmalıdır. O halde $y \in F(x)$ elde edilir. Yani $(x, y) \in grF$ olur. grF kapalıdır. Dolayısıyla F dönüşümü ü.y.s.'dir.

(ii) $(\Longrightarrow)$ F a.y.s. olsun fakat H.a.y.s. olmasın. Bu durumda $\forall i \in \mathbb{N}$ için $x_i \to x$ ve

$$\rho_H(F(x), F(x_i)) \geq \varepsilon$$

olacak şekilde $\exists \varepsilon > 0$ sayısı ve $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset X$ dizisi vardır. Öte yandan F kompakt değerli olduğundan $\forall i \in \mathbb{N}$ için

$$d(y_i, F(x_i)) = \rho_H(F(x), F(x_i)) \geq \varepsilon$$

olacak şekilde bir $y_i \in F(x)$ vardır. $F(x)$ kompakt olduğundan
$y_j \to y \in F(x)$ olacak şekilde $\exists (y_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset F(x)$ alt dizisi vardır. F a.y.s. olduğundan $\forall j \geq j_0$ için $F(x_j) \cap B(y, \frac{\varepsilon}{2}) \neq \emptyset$ ve $y_j \in B(y, \frac{\varepsilon}{2})$ olacak şekilde $j_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan

$$\rho_H(F(x), F(x_j)) = d(y_j, F(x_j)) \leq d(y_j, y) + d(y, F(x_j)) < \|y_j - y\| + \frac{\varepsilon}{2}$$

elde edilir. Bu ifadede $j \to \infty$ için limit alındığında
$\rho_H(F(x), F(x_j)) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ olur. Bu da varsayımla çelişir. O halde F H.a.y.s.'dir.
$(\Longleftarrow)$ F, H.a.y.s. olsun. F dönüşümünün a.y.s. olduğunu göstermek için $C \subseteq Y$ olan C kapalı kümesi için $F^+(C)$ kümesinin X'te kapalı olduğu gösterilecektir. Bu nedenle $x_i \to x$ olacak şekilde $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq F^+(C)$ dizisi alınsın. Bu durumda $\forall i \in \mathbb{N}$ için $F(x_i) \subseteq C$ olur. F dönüşümü H.a.y.s. olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\forall i \geq i_0$ için

$$\rho_H(F(x), F(x_i)) < \varepsilon$$

olacak şekilde $i_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Yani $\forall i \geq i_0$ için

$$F(x) \subseteq B(F(x_i), \varepsilon) \subseteq B(C, \varepsilon)$$

olur. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $F(x) \subseteq C$ elde edilir. O halde $x \in F^+(C)$ olur. $F^+(C)$ kapalıdır. Dolayısıyla F dönüşümü a.y.s.'dir.

□

Önerme 3.1.7. *$F : X \to CS(Y)$ küme değerli dönüşümü $\forall x \in X$ noktasında H.ü.y.s. ve X_0, X'te kompakt bir küme olsun. O halde, $F(X_0)$, Y'de kompakt bir kümedir.*

Kanıt. Kabuller sağlansın. $\varepsilon > 0$ verilsin. F dönüşümü $\forall x \in X$ noktasında H.ü.y.s. olduğundan $\forall x \in X$ ve $\forall x' \in B(x, \delta_x)$ için

$$F(x') \subset F(x) + \varepsilon\mathbb{B}$$

olacak şekilde $\exists \delta_x > 0$ sayısı vardır. Buradan $F(B(x, \delta_x)) \subset F(x) + \varepsilon\mathbb{B}$ olur. Öte yandan $\{B(x, \delta_x) | x \in X_0\}$ kümesi X_0'ın bir açık örtüsüdür. X_0 kompakt olduğundan bu örtünün sonlu bir alt örtüsü vardır. Yani $X_0 \subset \bigcup\limits_{i=1}^{p} B(x_i, \delta_{x_i})$ olacak şekilde $x_1, \ldots, x_p \in X_0$ vardır. Buradan

$$F(X_0) \subset F(\bigcup_{i=1}^{p} B(x_i, \delta_{x_i})) \subset \bigcup_{i=1}^{p} F(B(x_i, \delta_{x_i})) \subset \bigcup_{i=1}^{p} (F(x_i) + \varepsilon\mathbb{B})$$

olur. $\bigcup\limits_{i=1}^{p} (F(x_i) + \varepsilon\mathbb{B})$ kompakt olduğundan sınırlıdır. Dolayısıyla $F(X_0)$ sınırlıdır.

$F(X_0) \subset \overline{F(X_0)}$ olduğu açıktır. O halde $\overline{F(X_0)} \subset F(X_0)$ olduğu gösterilsin. $y_0 \in \overline{F(X_0)}$ olsun. Bu durumda

$$y_k \to y_0$$

olacak şekilde $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset F(X_0)$ dizisi vardır. Bu durumda $\forall k \in \mathbb{N}$ için $y_k \in F(x_k)$ olacak şekilde $x_k \in X_0$ vardır. X_0 kompakt olduğundan $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$

dizisinin X_0 içinde yakınsak bir alt dizisi vardır. Genelliği bozmadan $x_k \to x_0 \in X_0$ olarak kabul edilsin. F, x_0'da ü.y.s. olduğundan

$$y_0 \in \limsup_{x \to x_0} F(x) \subset F(x_0) \subset F(X_0)$$

olur. O halde $\overline{F(X_0)} \subset F(X_0)$ olur. $\overline{F(X_0)} = F(X_0)$ olduğundan $F(X_0)$ kapalıdır. $F(X_0)$, $\mathbb{R}^m$'de kapalı ve sınırlı olduğundan kompakttır. □

Önerme 3.1.8. *$g : X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $F : X \to 2^{\mathbb{R}}$ küme değerli dönüşüm olmak üzere, her $x \in X$ için $F(x) = \{g(x)\}$ olarak tanımlı F dönüşümünün ü.y.s (a.y.s.)olması için gerek ve yeter koşul g'nin sürekli olmasıdır.*

Önerme 3.1.9. *$F : X \to 2^Y$, $U \subset Y$ ve her $x \in X$ için $F(x) = U$ sabit küme değerli dönüşüm olmak üzere U kapalı bir küme ise F dönüşümü a.y.s. ve ü.y.s.'dir, yani süreklidir.*

Kanıt. Kabuller sağlansın. $x_0 \in X$, $F(x_0) \cap V \neq \emptyset$ olacak şekilde bir V açığı ve x_0'ın herhangi bir G komşuluğu için keyfi bir $x \in G$ alınsın. $F(x) = U$ olduğundan $F(x) \cap V = U \cap V \neq \emptyset$ olur. Böylece
$F(x_0) \cap V \neq \emptyset$ olan V açığına karşılık x_0'ın bir G komşuluğu $\forall x \in G$ için $F(x) \cap V \neq \emptyset$ olacak şekilde elde edilir. O halde, F x_0'da a.y.s.'dir.
Şimdi de $F(x_0) \subset V$ olan her V açığına karşılık x_0'ı içeren keyfi bir G açığı alınsın. Bu durumda $\forall x \in G$ için $F(x) = U = F(x_0) \subset V$ olduğundan F, x_0'da ü.y.s.'dir. □

Önerme 3.1.10. *$h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $F : X \to 2^Y$ bir küme değerli dönüşüm olmak üzere h fonksiyonu sürekli ise $F(x) = \{y | h(x, y) = 0\}$ dönüşümü ü.y.s.'dir.*

Kanıt. Bir dönüşümün ü.y.s. olması ile kapalılığı denk olduğundan, F'nin yani grF'nin kapalılığı gösterilmelidir.
$grF \subset \overline{grF}$ olduğu açıktır. $\overline{grF} \subset grF$ olduğu gösterilsin.

$(x_0, y_0) \in \overline{grF}$ alınsın. Bu durumda

$$(x_n, y_n) \longrightarrow (x_0, y_0)$$

olacak şekilde $\exists((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq grF$ vardır. Burada h sürekli olduğundan

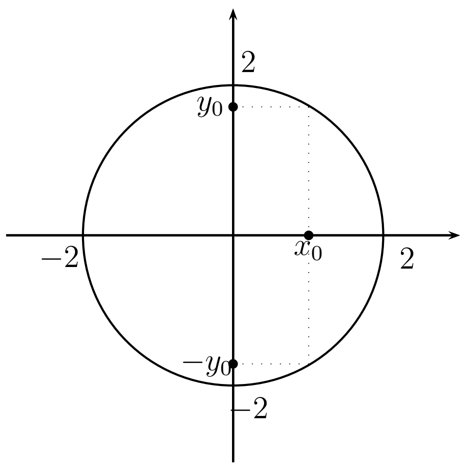
$$h(x_n, y_n) \longrightarrow h(x_0, y_0)$$

olur. Öte yandan $(x_n, y_n) \in grF$ olduğundan $h(x_n, y_n) = 0$ dır. O halde

$$0 = \lim_{n\to\infty} h(x_n, y_n) = h(x_0, y_0)$$

olur. Yani $(x_0, y_0) \in grF$. Buradan $\overline{grF} \subset grF$ elde edilir. grF kapalıdır. F ü.y.s.'dir. □

Örnek 3.1.5. $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x, y) = x^2 + y^2 - 4$ *sürekli fonksiyonuna karşılık* $F(x) = \{y \in \mathbb{R} | x^2 + y^2 - 4 = 0\}$ *dönüşümü tanımlansın. Şekil 3.16'te de gösterildiği gibi keyfi* x_0 *için* $y_0 = \sqrt{4 - x_0^2}$ *olmak üzere* $F(x_0) = \{y_0, -y_0\}$ *şeklinde olup* $\{y_0, -y_0\} \subset V$ *olan tüm* V *açıklarına karşılık* $\forall x \in U$ *için* $F(x) \subset V$ *olacak şekilde* $\exists U$ *açığı bulunur. Dolayısıyla* F *ü.y.s.'dir.*



Şekil 3.16. $F(x) = \{y \in \mathbb{R} | x^2 + y^2 - 4 = 0\}$ dönüşümünün grafiği

Önerme 3.1.11. *$h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ ve $F : X \to 2^Y$ olsun. h fonksiyonu ü.y.s. ise $F(x,y) = \{y | h(x,y) \leq 0\}$ dönüşümü ü.y.s.'dir.*

Kanıt. F'nin yani grF'in kapalı olduğu gösterilsin.
$grF \subset \overline{grF}$ olduğu açıktır.
$\overline{grF} \subset grF$ olduğu gösterilsin. Bunun için $(x_0, y_0) \in \overline{grF}$ alınsın. Bu durumda $(x_n, y_n) \longrightarrow (x_0, y_0)$ olacak şekilde $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}} \subset grF$ dizisi vardır. h sürekli olduğundan

$$h(x_n, y_n) \longrightarrow h(x_0, y_0) \tag{3.21}$$

olur. Öte yandan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $(x_n, y_n) \in grF$ yani $h(x_n, y_n) \leq 0$ olduğundan ve (3.21)'den $h(x_0, y_0) = \lim\limits_{n \to \infty} h(x_n, y_n) \leq 0$ olur.
Yani, $(x_0, y_0) \in grF$ olup $\overline{grF} \subset grF$ elde edilir. Buradan grF kapalı dolayısıyla F ü.y.s. bir dönüşümdür. $\square$

Örnek 3.1.6. *$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, h(x,y) = x^2 + y^2 - 4$ sürekli fonksiyonu için $F : \mathbb{R}^2 \to 2^{\mathbb{R}}$ dönüşümü*

$$F(x) = \{y \in \mathbb{R} | x^2 + y^2 - 4 \leq 0\}$$

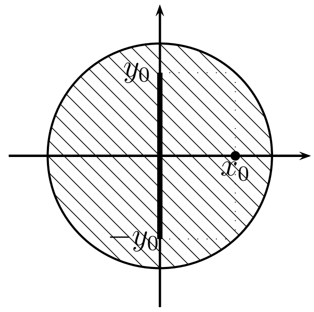
olarak tanımlansın Şekil 3.17'da de gösterildiği gibi keyfi x_0 için $F(x_0) = [-y_0, y_0]$ şeklinde olup $[-y_0, y_0] \subset V$ olan tüm V açıklarına karşılık $\forall x \in U$ için

$$F(x) \subset V$$

olacak şekilde en az bir U açığı bulunur. Dolayısıyla F ü.y.s.'dir.

Önerme 3.1.12. *$i = 1, 2 \ldots, r$ için $f_i : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonları sürekli ise $F(x) = conv\{f_1(x), \ldots, f_r(x)\}$ küme değerli dönüşümü alttan yarı süreklidir.*

Kanıt. Keyfi $x \in X$ ve $F(x) \cap V \neq \emptyset$ olacak şekilde herhangi bir V açığı alınsın. Bu durumda $\exists y \in F(x) \cap V$ vardır. $y \in F(x)$ olduğundan $\exists \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \geq 0$ sayıları $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ ve $y = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i y_i$ olacak şekilde vardır. Burada $\forall i = 1, 2, \ldots, n$ için $y_i = f_i(x)$' dir. V açık, $y \in V$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$ için $y_i \in V$



Şekil 3.17. $F(x) = \{y \in \mathbb{R} | x^2 + y^2 - 4 \leq 0\}$ dönüşümünün grafiği

olduğundan

$$B(y, \varepsilon) \subset V \text{ ve } B(y_i, \varepsilon) \subset V$$

olacak şekilde $\exists \varepsilon > 0$ sayısı vardır. Öte yandan $\forall i = 1, \ldots, n$ için f_i'ler sürekli olduklarından

$$f_i(U_i) \subset B(y_i, \lambda_i \varepsilon)$$

olacak şekilde x'in $\exists U_i$ komşuluğu vardır. $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$ olsun. Keyfi $z \in U$ alınsın. Böylece $V = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(z) \in F(z)$ olur. Aynı zamanda $\forall i = 1, \ldots, n$ için

$$\begin{aligned} d(f_i(z), y_i) &\leq \lambda_i \varepsilon \\ d(\lambda_i f_i(z), \lambda_i y_i) &\leq \lambda_i \varepsilon \leq \lambda_i \varepsilon \\ d(V, y) = d(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(z), \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i) &\leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varepsilon = \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Yani $\exists v \in B(y, \varepsilon) \subset V$ olur. Buradan U' dan alınan keyfi z elemanı için $F(z) \cap V \neq \emptyset$ olduğundan F dönüşümü a.y.s.' dir. □

Önerme 3.1.13. *$f : X \times U \to Y$ fonksiyonu verilsin. f sürekli ve U kompakt ise $F(x) = f(x, U)$ küme değerli dönüşümü H.ü.y.s.'dir.*

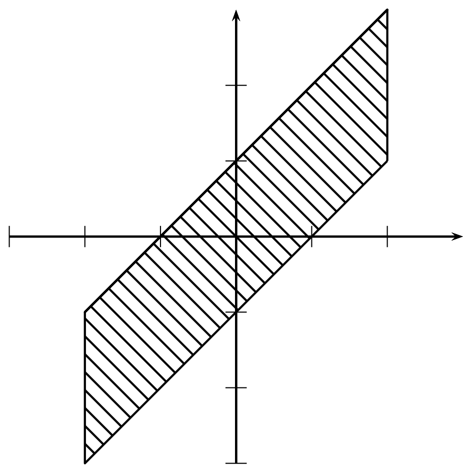
Kanıt. f sürekli, U kompakt olsun. F, H.ü.y.s. olmasın. Bu durumda $\exists z \in X$ için F, z noktasında H.ü.y.s. değildir. Bu durumda $z \in X$ için $(y_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq Y$, $(z_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq X$ dizileri ve $\forall k \in \mathbb{N}^+$ için

$\|z_k - z\| < \dfrac{1}{k}$, $\quad y_k \in F(z_k)$ iken $y_k \notin F(z) + \varepsilon_0\mathbb{B}$ olacak şekilde $\exists\varepsilon_0 > 0$ vardır. U kompakt olduğundan $(z_k, U) \longrightarrow (z, U)$ olur. Öte yandan f sürekli olduğundan $(z_k, U) \longrightarrow (z, U)$ dizisi için

$$f(z_k, U) \longrightarrow f(z, U)$$

olur. Buradan, ε_0 ve $\forall k \geq n_0$ için $F(z_k) \subset F(z) + \varepsilon\mathbb{B}$ olacak şekilde $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ve $\varepsilon > 0$ vardır. $\forall k \geq n$ ve $\forall y_k \in F(z_k)$ için $y_k \in F(z) + \varepsilon\mathbb{B}$ elde edilir. Bu da varsayım ile çelişir. Dolayısıyla F, H.ü.y.s.'dir. $\square$

Örnek 3.1.7. *$f : \mathbb{R} \times [-1, 1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x, y) = x + y$ olarak, $F : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$ küme değerli dönüşümü de $F(x) = f(x, [-1, 1]) = x+[-1, 1]$ olarak tanımlansın. f fonksiyonu sürekli ve $U = [-1, 1]$ kümesi kompakt olduğundan Önerme 3.1.13'ten F küme değerli dönüşümü H.ü.y.s.'dir. Şekil 3.18'de F küme değerli dönüşümünün grafiği verilmiştir.*



Şekil 3.18. $F(x) = x + [-1, 1]$ dönüşümünün grafiği

Önerme 3.1.14. *$F : X \to CS(Y)$ küme değerli dönüşümü verilsin. F ü.y.s. ise $\overline{conv}F$ dönüşümü ü.y.s.'dir.*

Kanıt. F dönüşümü ü.y.s. olsun. $C \subseteq Y$ keyfi bir kapalı küme olsun. $\overline{conv}F$'nin ü.y.s. olduğunu göstermek için $\overline{conv}F^{-}(C)$'nin X'te kapalı olduğunun gösterilmesi yeterlidir. Bu nedenle $convF^{-}(C) \subset \overline{\overline{conv}F^{-}(C)}$ olduğundan $\overline{\overline{conv}F^{-}(C)} \subset \overline{conv}F^{-}(C)$ olduğu gösterilmelidir. $x \in \overline{\overline{conv}F^{-}C}$ alınsın. Bu durumda $x_n \to x$ olacak şekilde $\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{conv}F^{-}(C)$ dizisi vardır. O halde $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in \overline{conv}F^{-}(C)$ olduğundan $\overline{conv}F(x_n) \cap C \neq \emptyset$ yani $\exists y_n \in \overline{conv}F(x_n) \cap C$ vardır. $\forall \varepsilon > 0$ seçilsin $x_n \to x$ olduğundan $\forall n \geq n_0$ için

$$x_n \in B(x,\varepsilon) \subset \overline{B(x,\varepsilon)}$$

olacak şekilde $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. O halde $K := \{x_1, x_2, \ldots, x_{n_0-1}\} \cup \overline{B(x,\varepsilon)}$ olmak üzere $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} \{x_i\} \subset K$ olur. K kompakt ve F kompakt değerli olduğundan $F(K)$ kompakttr.

$$A := \overline{\bigcup_{i\in\mathbb{N}} F(x_i)}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $A \subset F(K)$ olduğundan A kompakttır. O halde $\overline{conv}A$ kompakt konveks bir kümedir. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $y_n \in \overline{conv}A$ olduğundan $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin yakınsak bir alt dizisi vardır. $y_{n_k} \to y$ olsun. $\forall y^* \in Y^*$ için destek fonksiyonun tanımından

$$\langle y^*, y_{n_k}\rangle \leq S_{\overline{conv}F(x_{n_k})}(y^*) = S_{F(x_{n_k})}(y^*) \tag{3.22}$$

olur. F küme değerli dönüşümü ü.y.s. olduğundan Önerme 3.2.4' ten $\forall p$ için $S_{F(\cdot)}(p)$ destek fonksiyonu ü.y.s.' dir. Buradan (3.22) eşitsizliğinde $k \to \infty$ için $\limsup$ alınırsa

$$\langle y^*, y\rangle = \limsup_{k\to\infty} \langle y^*, y_{n_k}\rangle \leq \limsup_{k\to\infty} S_{\overline{conv}F(x_{n_k})}(y^*) \leq S_{F(x)}(y^*)$$

elde edilir. y^* keyfi bir eleman olduğundan $y \in \overline{conv}F(x)$ elde edilir. Aynı zamanda $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset C$, C kapalı ve $y_{n_k} \to y$ olduğundan $y \in C$' dir. Dolayısıyla $x \in \overline{conv}F^{-}(C)$ elde edilir. Buradan $\overline{\overline{conv}F^{-}(C)} \subset \overline{conv}F^{-}(C)$ yani $\overline{conv}F^{-}(C)$, X' te kapalıdır. O halde $\overline{conv}F$ dönüşümü ü.y.s. dir. □

Önerme 3.1.15. *$F : X \to 2^Y$ küme değerli dönüşümü verilsin. F dönüşümü a.y.s. ise $convF$ dönüşümü de a.y.s.'dir.*

Kanıt. F a.y.s. olsun. $convF$'in a.y.s. olduğunu göstermek yerine $\forall V \subseteq Y$ açığı için $convF^{-}(V)$ kümesinin X' te açık olduğu gösterilecektir. $y \in convF(x) \cap V$ olsun. Bu durumda

$$y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k \in V$$

olacak şekilde $n \geq 1$, $y_1, \ldots, y_n \in F(x)$ ve $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0,1]$ vardır. $B(y, \varepsilon) \subseteq V$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ alınsın. Bu durumda $k \in \{1, \ldots, n\}$ için $F(x) \cap B(y_k, \varepsilon) \neq \emptyset$ olur. Buradan F a.y.s. olduğundan $\forall x' \in U_k$ için

$$F(x') \cap B(y_k, \varepsilon) \neq \emptyset$$

olacak şekilde x'in bir U_k komşuluğu vardır. $U := \bigcap_{k=1}^{n} U_k$ olmak üzere $\forall x' \in U$ için $y_k' \in F(x') \cap B(y_k, \varepsilon)$ alınsın. $y' := \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k'$ olmak üzere

$$\|y' - y\| = \|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k' - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k\| \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \|y_k' - y_k\| < \varepsilon$$

elde edilir. Böylece $y' \in convF(x') \cap V$ olur. $F^{-}(V)$ açıktır. Dolayısıyla F a.y.s.' dir. □

Lipschitz sürekli küme değerli dönüşümler Hausdorff sürekli küme değerli dönüşümlerin önemli bir sınıfını oluşturmaktadır. Sıradaki tanımda Lipschitz sürekli küme değerli dönüşüm kavramı hatırlatılacaktır.

Tanım 3.1.11. $F : X \to 2^Y$ *küme değerli dönüşümü verilsin.*

a) F küme değerli dönüşümü, $D \subset X$ kümesi üzerinde boştan farklı değerler almak üzere, $\forall x_1, x_2 \in D$ için

$$F(x_1) \subset F(x_2) + l\|x_1 - x_2\|\mathbb{B} \tag{3.23}$$

koşulunu sağlayan $\exists l > 0$ sayısı var ise F'ye D üzerinde Lipschitz süreklidir denir.

b) $\forall x \in X$ için F'nin Lipschitz sürekli olduğu x'in bir komşuluğu var ise F'ye yerel Lipshitz süreklidir denir.

Uyarı 3.1.1. *$F : X \to CS(Y)$ dönüşümü için Tanım 3.1.11 Hausdorff metrik kullanılarak aşağıdaki gibi ifade edilir.*
$\forall x_1, x_2 \in D$ için

$$\rho_H(F(x_1), F(x_2)) \leq l\|x_1 - x_2\|$$

olacak şekilde $\exists l > 0$ sayısı var ise F'ye D üzerinde Lipschitz süreklidir denir.

Önerme 3.1.16. *$g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ yerel Lipschitz sürekli, $U \subset \mathbb{R}^p$ sınırlı, kapalı ve boştan farklı bir küme olsun. Bu durumda*

$$F(x) = g(x, U) = \{g(x, u) | u \in U\}$$

ile tanımlı F küme değerli dönüşümü yerel Lipschitz süreklidir.

Kanıt. g yerel Lipschitz sürekli, U kompakt ve boştan farklı olsun. $x \in \mathbb{R}^n$ keyfi sabitlenmiş bir eleman olmak üzere $\{x\} \times U$ kompakttır. g yerel Lipschitz sürekli olduğundan süreklidir. Dolayısıyla $g(x, U) = F(x)$ kompakttır. O halde $\forall x \in X$ ve $\forall x_1, x_2 \in U_x$ için

$$\rho_H(F(x_1), F(x_2)) \leq l\|x_1 - x_2\|$$

olacak şekilde $l > 0$ sayısı ve x'in bir U_x komşuluğunun varlığının gösterilmesi yeterli olacaktır. g yerel Lipschitz sürekli olduğundan $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ ve $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in V_{(x,y)}$ için

$$\|g(x_1, y_1) - g(x_2, y_2)\| \leq l\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\| \tag{3.24}$$

olacak şekilde (x, y)'nin bir $V_{(x,y)}$ komşuluğu ve $l > 0$ sayısı vardır.
$\{x\} \times U \subset \bigcup\limits_{y \in U} V_{(x,y)}$ olduğundan $\{V_{(x,y)} | y \in U\}$ kümesi $\{x\} \times U$'nun bir açık örtüsüdür. $\{x\} \times U$ kompakt olduğundan bu örtünün sonlu bir alt örtüsü

vardır. Yani $y_1, y_2, \ldots, y_m \in U$ için

$$\{x\} \times U \subset \bigcup_{i=1}^{m} V_{(x,y_i)}$$

olur. $\forall i = 1, \ldots, m$ için $V_(x, y_i) = V_i$ olsun. Bu durumda
$\forall (x_1, y_i), (x_2, y_i) \in V_{(x,y_i)} = V_i$ için (3.24)'ten

$$\|g(x_1, y_i) - g(x_2, y_i)\| \leq l_i \|(x_1, y_i) - (x_2, y_i)\|$$

olacak şekilde $\exists l_i > 0$ vardır.
$\forall i = 1, \ldots, m$ için $V_i \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ açık olduğundan $A_i \times B_i \subset V_i$ olacak şekilde $\exists A_i \subset \mathbb{R}^n$ ve $\exists B_i \subset \mathbb{R}^p$ açıkları vardır. $l = \max\{l_1, \ldots, l_n\}$ olsun. O halde $\forall x_1, x_2 \in \bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i = A$ açığı için

$$\rho_H(F(x_1), F(x_2)) \leq l\|(x_1, y_i) - (x_2, y_i)\| = l\|x_1 - x_2\|$$

olur. O halde F, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için yerel Lipschitz süreklidir. □

Önerme 3.1.17. $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad i = 1, \ldots, r$ *fonksiyonları yerel Lipschitz sürekli olsun. Bu durumda* $\forall x \in X$ *için* $F(x) = conv\{g_1(x), \ldots, g_r(x)\}$ *dönüşümü yerel Lipschitz süreklidir.*

Kanıt. F kompakt olduğundan, Hausdorff metrik kullanılarak yerel Lipschitz süreklilik araştırılabilir.
$\forall i = 1, \ldots, r$ için g_i'ler yerel Lipschitz sürekli olduğundan $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ve
$\forall x_1, x_2 \in V_{x,i}$ için

$$\|g_i(x_1) - g_i(x_2)\| \leq l_i \|x_1 - x_2\|$$

olacak şekilde $\exists l_i > 0$ sayısı ve x'in $\exists V_{x,i}$ komşuluğu vardır.
$l = \max\{l_1, \ldots, l_r\}$ ve $V_x = \bigcap\limits_{i=1}^{r} V_{x,i}$ olmak üzere $\forall i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ ve
$\forall x_1, x_2 \in V_{x,i}$ için

$$\|g_i(x_1) - g_i(x_2)\| \leq l\|x_1 - x_2\| \tag{3.25}$$

olur. Öte yandan F dönüşümünün tanımı gereği
$F(x_1) = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i g_i(x_1), \quad F(x_2) = \sum\limits_{i=1}^{p} \mu_i g_i(x_2)$ ve

$\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ ve $\sum\limits_{i=1}^{p} \mu_i = 1$ olacak şekilde $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \geq 0$ ve $\mu_1, \ldots, \mu_p \geq 0$ sayıları vardır. Böylece (3.25)'den $\rho_H(\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i g_i(x_1), \sum\limits_{i=1}^{p} \mu_i g_i(x_2)) = \rho_H(\lambda_1 g_1(x_1) + \lambda_2 g_2(x_1) + \cdots + \lambda_k g_k(x_1), \mu_1 g_1(x_2) + \mu_2 g_2(x_2) + \cdots + \mu_p g_p(x_2))$
$\leq \rho_H(\lambda_1 g_1(x_1) + \lambda_2 g_2(x_1) + \cdots + \lambda_k g_k(x_1), \mu_1 g_1(x_2)) + \rho_H(\lambda_1 g_1(x_1) + \lambda_2 g_2(x_1) + \cdots + \lambda_k g_k(x_1), \mu_2 g_2(x_2)) + \cdots + \rho_H(\lambda_1 g_1(x_1) + \lambda_2 g_2(x_1) + \cdots + \lambda_k g_k(x_1), \mu_p g_p(x_2))$
$\leq \rho_H(\lambda_1 g_1(x_1), \mu_1 g_1(x_2)) + \cdots + \rho_H(\lambda_k g_k(x_1), \mu_1 g_1(x_2)) + \rho_H(\lambda_1 g_1(x_1), \mu_2 g_2(x_2)) + \cdots + \rho_H(\lambda_k g_k(x_1), \mu_2 g_2(x_2)) + \cdots + \cdots + \rho_H(\lambda_1 g_1(x_1), \mu_p g_p(x_2)) + \cdots + \rho_H(\lambda_k g_k(x_1), \mu_p g_p(x_2))$
$\leq \underbrace{(\lambda_1 + \cdots + \lambda_k)}_{1} \mu_1 l\|x_1 - x_2\| + \underbrace{(\lambda_1 + \cdots + \lambda_k)}_{1} \mu_2 l\|x_1 - x_2\| + \cdots + \underbrace{(\lambda_1 + \cdots + \lambda_k)}_{1} \mu_p l\|x_1 - x_2\|$
$\leq \underbrace{(\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_p)}_{1} l\|x_1 - x_2\| \leq l\|x_1 - x_2\|$ olur.

Dolayısıyla F yerel Lipschitz süreklidir. $\square$

3.2 Marjinal Fonksiyonlar ve Süreklilikleri

Bu bölümde bir küme değerli dönüşümün sürekliliği ile bu küme değerli dönüşüm yardımıyla tanımlanan marjinal fonksiyonların süreklilikleri ve arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Tanım 3.2.1. *$F : X \to 2^Y$ bir küme değerli dönüşüm ve $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ fonksiyon olsun. $\varphi : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ve $\phi : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ olmak üzere*

$$\varphi(x) = \inf\{f(x, y) | y \in F(x)\}, \quad \phi(x) = \sup\{f(x, y) | y \in F(x)\}$$

fonksiyonlarına F dönüşümünün marjinal (optimal değer) fonksiyonları denir.

$$\omega(x) = \{y \in F(x) | f(x, y) = \varphi(x)\}, \quad \Omega(x) = \{y \in F(x) | f(x, y) = \phi(x)\}$$

dönüşümlerine de marjinal dönüşümler denir.

Marjinal fonksiyonlara basit örnekler olarak F küme değerli dönüşümünün uzaklık ve destek fonksiyonu verilebilir. $p \in Y$ olmak üzere

$$d_F(x, y) = \inf\{|y - v| | v \in F(x)\}, \quad S_F(x, p) = S_{F(x)}(p) = \sup\{\langle p, y\rangle | y \in F(x)\}$$

tanımlanan fonksiyonlar F dönüşümünün marjinal fonksiyonlarıdır.

Önerme 3.2.1. *$F : X \to 2^Y$ küme değerli dönüşümü ve $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $\varphi : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ve $\phi : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ fonksiyonları F dönüşümünün marjinal fonksiyonları ve $x_0 \in X$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.*

1. *F, x_0'da a.y.s. olsun. Bu durumda*
   (a) *f, x_0'da ü.y.s. ise φ, x_0'da ü.y.s.'dir.*
   (b) *f, x_0'da a.y.s. ise ϕ, x_0'da a.y.s.'dir.*
2. *F dönüşümü x_0'da ü.y.s. ve düzgün sınırlı olsun. Bu durumda*
   (a) *f, x_0'da a.y.s. ise φ, x_0'da a.y.s.'dir.*
   (b) *f, x_0'da ü.y.s. ise ϕ, x_0'da ü.y.s.'dir.*
3. *F, x_0'da sürekli, düzgün sınırlı ve f sürekli ise φ ve ϕ de x_0'da süreklidir.*
4. *F, $D \in X$ kümesinde (l_1 sabiti ile), f, $D \times F(D)$ üzerinde (l_2 sabiti ile) Lipschitz sürekli ise φ ve ϕ fonksiyonları D üzerinde ($l = l_1 + l_2$ sabiti ile) Lipschitz süreklidir.*

Kanıt. Kabuller sağlansın.

1. (a) F, x_0'da a.y.s. ve f ü.y.s. olsun.
   i. $\varphi(x_0) = \inf\{f(x_0, y) | y \in F(x_0)\} > -\infty$ olsun. Bu durumda $\forall\varepsilon > 0$'a karşılık

$$f(x_0, y_\varepsilon) - \varphi(x_0) \leq \varepsilon \tag{3.26}$$

olacak şekilde $\exists y_\varepsilon \in F(x_0)$ vardır.

F a.y.s. olduğundan, $\forall x_k \to x_0$'a karşılık

$$y_k \to y_\varepsilon, y_k \in F(x_k)$$

olacak şekilde $\exists(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi vardır. Buradan da φ'nin tanımı gereği

$$f(x_k, y_k) \geq \varphi(x_k) \tag{3.27}$$

olur. f ü.y.s. olduğundan

$$\limsup_{k\to\infty} f(x_k, y_k) \leq f(x_0, y_\varepsilon) \tag{3.28}$$

(3.26), (3.27) ve (3.28)'den

$$\limsup_{k\to\infty} \varphi(x_k) \leq \limsup_{k\to\infty} f(x_k, y_k) \leq f(x_0, y_\varepsilon) \leq \varphi(x_0) + \varepsilon$$

olur. $\varepsilon \to 0^+$ için limit alınırsa $\forall x_k \to x_0$ ve $\forall \varepsilon > 0$ için $\limsup_{k\to\infty} \varphi(x_k) \leq \varphi(x_0)$ olur. Dolayısıyla φ, x_0'da ü.y.s.'dir.

ii. $\varphi(x_0) = -\infty$ olsun. φ'nin tanımından
$\forall \mu > 0$ için

$$f(x_0, y_\mu) \leq -\mu \tag{3.29}$$

olacak şekilde bir $y_\mu \in F(x_0)$ noktası vardır.
F x_0'da a.y.s. olduğundan $y_\mu \in \liminf_{x\to x_0} F(x)$'dir. Yani $\forall x_k \to x_0$ için $y_k \to y_\mu$, $\forall k \in \mathbb{N}$ için $y_k \in F(x_k)$ olacak şekilde $\exists (y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi vardır. φ'nin tanımından $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$f(x_k, y_k) \geq \varphi(x_k) \tag{3.30}$$

olur. f ü.y.s. olduğundan

$$\limsup_{k\to\infty} f(x_k, y_k) \leq f(x_0, y_\mu) \tag{3.31}$$

olur. (3.29), 3.30) ve (3.31)'den $\forall \mu > 0$ için

$$\limsup_{k\to\infty} \varphi(x_k) \leq \limsup_{k\to\infty} f(x_k, y_k) \leq f(x_0, y_\mu) \leq -\mu$$

olduğundan $\mu \to +\infty$ için limit alınırsa
$\limsup_{k\to\infty} \varphi(x_k) \leq -\infty = \varphi(x_0)$ olur. Dolayısıyla φ, x_0'da ü.y.s.'dir.

(b) F küme değerli dönüşümü x_0'da a.y.s. ve f x_0'da a.y.s. olsun.

i. $\phi(x_0) = \sup\{f(x_0, y) | y \in F(x_0)\} < +\infty$ olsun.

Bu durumda $\forall \varepsilon > 0$'a karşılık

$$\phi(x_0) - f(x_0, y_\varepsilon) \leq \varepsilon \tag{3.32}$$

olacak şekilde $\exists y_\varepsilon \in F(x_0)$ vardır. F a.y.s. olduğundan,
$y_\varepsilon \in \liminf\limits_{x \to x_0} F(x)$ olur. Yani
$\forall x_k \to x_0$ olan $\forall (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisine karşılık $y_k \to y_\varepsilon$, $\forall k \in \mathbb{N}$ için $y_k \in F(x_k)$ olacak şekilde $\exists (y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi vardır.
Buradan ϕ'nin tanımı gereği

$$f(x_k, y_k) \leq \phi(x_k) \tag{3.33}$$

olur. f a.y.s. olduğundan

$$\liminf_{k\to\infty} f(x_k, y_k) \geq f(x_0, y_\varepsilon) \tag{3.34}$$

(3.32), (3.33) ve (3.34) eşitsizliklerinden

$$\liminf_{k\to\infty} \phi(x_k) \geq \liminf_{k\to\infty} f(x_k, y_k) \geq f(x_0, y_\varepsilon) \geq \phi(x_0) - \varepsilon$$

olur. Yani $x_k \to x_0$ olan $\forall (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi için $\varepsilon \to 0^+$ iken limit alınırsa $\liminf\limits_{k\to\infty} \phi(x_k) \geq \phi(x_0)$ olur. O halde ϕ x_0'da a.y.s.'dir.

ii. $\phi(x_0) = +\infty$ olsun. $\forall \mu > 0$ için

$$f(x_0, y_\mu) \geq \mu \tag{3.35}$$

olacak şekilde bir $y_\mu \in F(x_0)$ noktası vardır. F x_0'da a.y.s. olduğundan $y_\mu \in \liminf\limits_{x\to x_0} F(x)$ olur. Yani $x_k \to x_0$
olan $\forall (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi için $y_k \to y_\mu$ ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için $y_k \in F(x_k)$ olan bir $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi vardır. Bu durumda ϕ'nin tanımından

$$f(x_k, y_k) \leq \phi(x_k) \tag{3.36}$$

olur. f a.y.s. olduğundan

$$\liminf_{k\to\infty} f(x_k, y_k) \geq f(x_0, y_\mu) \tag{3.37}$$

(3.35), (3.36) ve (3.37)'den $\forall \mu > 0$ için

$$\liminf_{k\to\infty} \phi(x_k) \geq \liminf_{k\to\infty} f(x_k, y_k) \geq f(x_0, y_\mu) \geq \mu$$

olduğundan $\liminf_{k\to\infty} \phi(x_k) = +\infty = \phi(x_0)$ olur. ϕ, x_0'da a.y.s.'dir.

2. F, x_0'da ü.y.s. ve düzgün sınırlı olsun.

   (a) f a.y.s. olsun.

      i. $\varphi(x_0) = -\infty$ olsun. $x_k \to x_0$ olan $\forall (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi için

$$\liminf_{k\to\infty} \varphi(x_k) \geq -\infty$$

      olduğundan $\liminf_{k\to\infty} \varphi(x_k) \geq \varphi(x_0)$ yani φ, x_0'da a.y.s.'dir.

      ii. $\varphi(x_0) > -\infty$ olsun.

         A. $F(x_0) = \emptyset$ olsun. Bu durumda φ'nin tanımından,

$$\varphi(x_0) = +\infty$$

         olur. Önerme 3.1.6'den x_0'da ü.y.s. F dönüşümü, x_0'da H.ü.y.s.'dir. Dolayısıyla $F(x_0) \subset U$ olan her U açığına karşılık $\forall x \in V_{x_0}$ için

$$F(x) \subset U$$

         olacak şekilde x_0'ın $\exists V_{x_0}$ açık komşuluğu vardır.
         $U = \emptyset$ olsun. Bu durumda x_0'ın $\exists V_{x_0}$ açık komşuluğu vardır öyle ki $\forall x \in V_{x_0}$ için $F(x) = \emptyset$ olur. Buradan

$$+\infty = \varphi(x_0) \leq \liminf_{x\to x_0} \varphi(x) = +\infty$$

elde edilir. Dolayısıyla φ, x_0'da a.y.s.'dir.

B. $F(x_0) \neq \emptyset$ olsun. $x_k \to x_0$ olan herhangi bir $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi alınsın.

- $\forall k \in \mathbb{N}^+$ için $F(x_k) = \emptyset$ ise φ'nin tanımından $\varphi(x_k) = +\infty$ olur. O halde φ, x_0'da a.y.s. olur.
- $\forall k \in \mathbb{N}$ için $F(x_k) \neq \emptyset$ ve $\varphi(x_k) = -\infty$ olsun.

  Bu durumda φ'nin tanımından $\forall k \in \mathbb{N}$ ve $y_k \in F(x_k)$ için

$$f(x_k, y_k) < -k$$

  olacak şekilde $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi vardır.
  F, x_0'da düzgün sınırlı olduğundan bu dizi sınırlıdır. $\mathbb{R}^n$'de sınırlı her dizinin yakınsak bir alt dizisi olduğundan genelliği bozmadan $y_k \to y_0$ alınsın. F, x_0'da ü.y.s olduğundan $y_0 \in F(x_0)$ olur. f, a.y.s. olduğundan da

$$\liminf_{k\to\infty} -k \geq \liminf_{k\to\infty} f(x_k, y_k) \geq f(x_0, y_0)$$

$$-\infty = \liminf_{x\to x_0} \varphi(x_k) \geq \liminf_{k\to\infty} f(x_k, y_k) \geq f(x_0, y_0)$$

  olup φ'nin tanımından

$$\liminf_{k\to\infty} \varphi(x_k) \geq f(x_0, y_0) \geq \varphi(x_0)$$

  olur. Dolayısıyla φ, x_0'da a.y.s.'dir.

- $\forall k \in \mathbb{N}$ için $F(x_k) \neq \emptyset$ ve $\varphi(x_k) > -\infty$ olsun.
  $\varepsilon > 0$ verilsin. $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi $\forall k \in \mathbb{N}$ için $y_k \in F(x_k)$ ve

$$\varphi(x_k) \geq f(x_k, y_k) - \varepsilon \tag{3.38}$$

olacak şekilde seçilsin. $x_k \to x_0$ ve F, x_0'da düzgün sınırlı olduğundan $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi sınırlıdır. O halde yakınsak bir alt dizisi vardır. Genelliği bozmadan $y_k \to y_0$ olduğu kabul edilsin. F, x_0 noktasında ü.y.s. olduğundan $y_0 \in F(x_0)$'dır. f, x_0'da a.y.s. olduğundan

$$\liminf_{k\to\infty} f(x_k, y_k) \geq f(x_0, y_0) \tag{3.39}$$

olur. (3.38) eşitsizliğinde $k \to \infty$ için $\liminf$ alınırsa (3.39) ve φ'nin tanımı ile birlikte $\forall\varepsilon > 0$ için

$$\liminf_{k\to\infty} \varphi(x_k) + \varepsilon \geq \liminf_{k\to\infty} f(x_k, y_k) \geq f(x_0, y_0) \geq \varphi(x_0)$$

elde edilir. Dolayısıyla φ, x_0'da a.y.s.'dir.

(b) f ü.y.s. olsun.

i. $\phi(x_0) = +\infty$ olsun. Bu durumda $x_k \to x_0$ olan $\forall(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi için

$$\limsup_{k\to\infty} \phi(x_k) \leq \phi(x_0) = +\infty$$

olur. ϕ, x_0'da ü.y.s.'dir.

ii. $\phi(x_0) \neq +\infty$ olsun.

A. $F(x_0) = \emptyset$ olsun. Bu durumda

$$\phi(x_0) = \sup\{f(x_0, y) | y \in F(x_0)\} = -\infty$$

olur.

F, x_0'da ü.y.s. olduğundan H.ü.y.s.'dir. Yani $F(x_0) \subset V$ olan $\forall V$ açığına karşılık $\forall x \in U_{x_0}$ için $F(x) \subset V$ olacak şekilde $\exists U_{x_0}$ vardır. $V = \emptyset$ alınsın. Bu durumda $\exists U_{x_0}$ açığı vardır ki $\forall x \in U_{x_0}$ için $F(x) = \emptyset$ olur. Böylece $\phi(x) = -\infty$

olur. $x_k \to x_0$ olan $\forall (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi için

$$-\infty = \limsup_{k\to\infty} \phi(x_k) \leq \phi(x_0) = -\infty$$

elde edilir. Dolayısıyla ϕ, x_0'da ü.y.s.'dir.

B. $F(x_0) \neq \emptyset$ olsun. $x_k \to x_0$ olan $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ alınsın.

- $\forall k \in \mathbb{N}$ için $F(x_k) = \emptyset$ ise $\phi(x_k) = -\infty$ olup ϕ, x_0'da ü.y.s. olur.

- $x_k \to x_0$ olan $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi için $F(x_k) \neq \emptyset$ ve $\phi(x_k) = +\infty$ olsun. Bu durumda ϕ'nin tanımından $\forall k \in \mathbb{N}$ için $f(x_k, y_k) > k$ ve $y_k \in F(x_k)$ olacak şekilde $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi vardır. F x_0'da düzgün sınırlı olduğundan bu dizi sınırlıdır. Bu durumda

$$\limsup_{k\to\infty} f(x_k, y_k) > \limsup_{k\to\infty} k = +\infty \tag{3.40}$$

elde edilir. f ü.y.s. olduğundan

$$f(x_0, y_0) \geq \limsup_{k\to\infty} f(x_k, y_k)$$

olur. Buradan (3.40) ile birlikte

$$f(x_0, y_0) \geq \limsup_{k\to\infty} f(x_k, y_k) \geq \limsup_{k\to\infty} k = +\infty = \phi(x_k)$$

$$\phi(x_0) = \limsup_{k\to\infty} f(x_0, y_0) \geq \limsup_{k\to\infty} \phi(x_k)$$

elde edilir. O halde ϕ, x_0'da ü.y.s.'dir.

- $\forall k \in \mathbb{N}$ için $F(x_k) \neq \emptyset$ ve $\phi(x_k) < +\infty$ olsun. $\varepsilon > 0$

verilsin. $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi $\forall k \in \mathbb{N}$ için $y_k \in F(x_k)$ ve

$$\phi(x_k) \leq f(x_k, y_k) + \varepsilon \tag{3.41}$$

olacak şekilde seçilsin. F x_0'da düzgün sınırlı olduğundan $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi sınırlıdır. O halde yakınsak bir alt dizisi vardır. Genelliği bozmadan $y_k \to y_0$ olduğu kabul edilsin. F, x_0'da ü.y.s. olduğundan $y_0 \in F(x_0)$'dır. f ü.y.s. olduğundan

$$\limsup_{k\to\infty} f(x_k, y_k) \leq f(x_0, y_0) \tag{3.42}$$

olur. (3.41) eşitsizliğinde $k \to \infty$ için *limsup* alınırsa (3.42) ile birlikte

$$\limsup_{k\to\infty}(\phi(x_k) - \varepsilon) \leq \limsup_{k\to\infty} f(x_k, y_k) \leq f(x_0, y_0) \leq \phi(x_0)$$

elde edilir. Dolayısıyla ϕ, x_0'da ü.y.s.'dir.

3. (1) ve (2)'den doğrudan çıkar.

4. Kabuller sağlansın. f, $D \times F(D)$ kümesi üzerinde Lipschitz sürekli olduğundan $\forall (x, y), (\overline{x}, \overline{y}) \in D \times F(D)$ için

$$\|f(\overline{x}, \overline{y}) - f(x, y)\| \leq l_2\|\overline{x} - x\| + l_2\|\overline{y} - y\| \tag{3.43}$$

olur. F D üzerinde Lipschitz sürekli olduğundan $\forall \overline{x}, x \in D$ için

$$\rho_H(F(\overline{x}), F(x)) \leq l_1\|\overline{x} - x\|$$

olacak şekilde $\exists l_1 > 0$ vardır. O halde $\forall \overline{y} \in F(\overline{x})$'ye karşılık

$$\|\overline{y} - y(\overline{y})\| \leq l_1\|\overline{x} - x\| \tag{3.44}$$

olacak şekilde $\exists y(\overline{y}) \in F(x)$ vardır. (3.43)'te $y = y(\overline{y})$ alınırsa

$$-l_2\|\overline{x}-x\|-l_2\|\overline{y}-y(\overline{y})\|+f(x,y(\overline{y})) \leq f(\overline{x},\overline{y}) \leq l_2\|\overline{x}-x\|+l_2\|\overline{y}-y(\overline{y})\|+f(x,y(\overline{y}))$$

elde edilir. Buradan (3.44) eşitsizliğinden

$$-l_2\|\overline{x}-x\|-l_2l_1\|\overline{x}-x\|+f(x,y(\overline{y})) \leq f(\overline{x},\overline{y}) \leq l_2\|\overline{x}-x\|+l_2l_1\|\overline{x}-x\|+f(x,y(\overline{y}))$$

olur. Burada her üç tarafta $y \in F(x)$ ve $\overline{y} \in F(\overline{x})$ üzerinden supremum alınırsa

$$-l_2(1+l_1)\|\overline{x}-x\| + \phi(x) \leq \phi(\overline{x}) \leq l_2(1+l_1)\|\overline{x}-x\| + \phi(x)$$

elde edilir. Buradan da

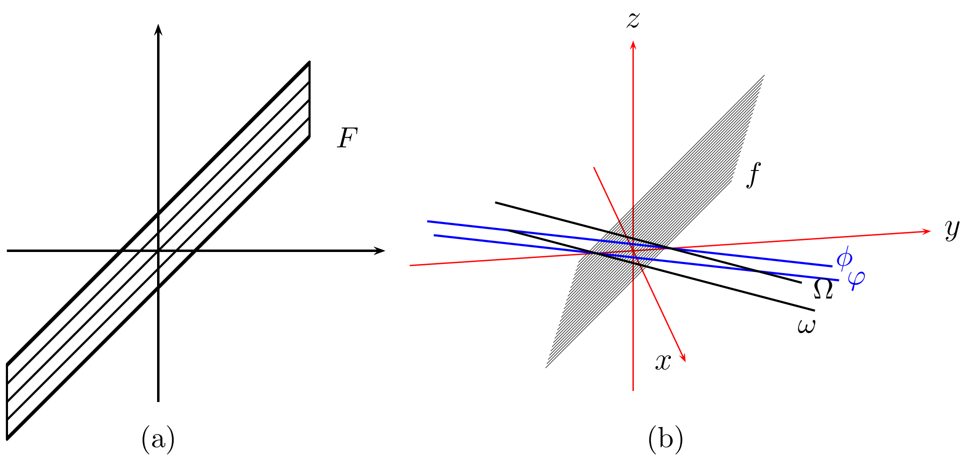
$$|\phi(\overline{x}) - \phi(x)| \leq l_2(1+l_1)\|\overline{x}-x\|$$

olur. Yani ϕ, D üzerinde $l_2(1+l_1)$ sabiti ile Lipschitz süreklidir. Benzer şekilde φ'nin de D üzerinde $l_2(1+l_1)$ sabiti ile Lipschitz sürekliliği gösterilebilir.

$\square$

Örnek 3.2.1. *$F : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$ küme değerli dönüşümü, $F(x) = [x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}]$ ve $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ fonksiyonu, $f(a,b) = a + b$ olarak tanımlansın. Bu durumda $\varphi(x) = \inf\{f(x,y)|y \in F(x)\} = \inf\{x + y|y \in [x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}]\}$ $\varphi(x) = 2x - \frac{1}{2}$, $\phi(x) = \sup\{f(x,y)|y \in F(x)\} = \sup\{x + y|y \in [x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}]\}$, $\phi(x) = 2x + \frac{1}{2}$, $\omega(x) = \{y \in F(x)|f(x,y) = \varphi(x)\} = \{x - \frac{1}{2}\}$, $\Omega(x) = \{y \in F(x)|f(x,y) = \phi(x)\} = \{x + \frac{1}{2}\}$ olur.*

Şekil 3.19'da F dönüşümü, f, φ ve ϕ marjinal fonksiyonları ile ω ve Ω marjinal dönüşümlerinin grafikleri verilmiştir.



Şekil 3.19. (a) F dönüşümünün grafiği, (b) f fonksiyonu ve F dönüşümüne ait marjinal fonksiyonlar ile marjinal dönüşümlerin grafikleri

Örnek 3.2.2. *$F : \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^m}$ küme değerli dönüşümü $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için $F(x) = \mathbb{B}$ ve $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ için $f(x, y) = \langle x, y \rangle$ olarak tanımlansın. Bu durumda $\phi(x) = \sup\{\langle x, y\rangle | y \in \mathbb{B}\} = \|x\|$ olur.*

Önerme 3.2.1, küme değerli dönüşümlerin uygun topolojik özellikleri ile marjinal fonksiyonların topolojik özelliklerine ulaşılması ile ilgildir. Bunun tersi de geçerlidir. Yani marjinal fonksiyonların uygun topolojik özellkleri ile küme değerli dönüşümlerin tüm topolojik özelliklerine ulaşmak da mümkündür.

Önerme 3.2.2. *$F : X \to 2^Y$ küme değerli dönüşümü kapalı-değerli olsun. Bu durumda*

1. *d_F, $\{x_0\} \times Y$'de a.y.s. ise F, x_0'da ü.y.s.'dir.*

2. *d_F, $\{x_0\} \times Y$'de ü.y.s. ise F, x_0'da a.y.s.'dir.*

3. *d_F, $\{x_0\} \times Y$'de sürekli ise F, x_0'da süreklidir.*

4. *d_F, $(D \times Y)$'de Lipschitz sürekli ise F, D üzerinde Lipschitz süreklidir.*

Kanıt. 1. F kapalı değerli ve d_F, $\{x_0\} \times Y$'de a.y.s. olsun.

F'nin ü.y.s. olduğunu görmek için kapalı olduğunu göstermek yeterlidir.

$grF \subseteq \overline{grF}$ olduğu açıktır.

$\overline{grF} \subseteq grF$ olduğu gösterilsin. $(x_0, y_0) \in \overline{grF}$ olsun. Bu durumdan

$$(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$$

olacak şekilde $\exists((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset grF$ dizisi vardır. Öte yandan d_F, $\{x_0\} \times Y$'de a.y.s. olduğundan

$$\liminf_{k\to\infty} d_F(x_k, y_k) \geq d_F(x_0, y_0)$$

olur. $(x_k, y_k) \in grF$ olduğundan $y_k \in F(x_k)$ olur. Buradan

$$0 = \liminf_{k\to\infty} d_F(x_k, y_k) \geq d_F(x_0, y_0)$$

elde edilir. $d_F(x_0, y_0) = 0$'dır. Yani $y_0 \in F(x_0)$'dır. Dolayısıyla $(x_0, y_0) \in grF$ olup $\overline{grF} \subset grF$ olur. grF kapalı olup F kapalıdır.

2. d_F, $\{x_0\} \times Y$'de ü.y.s. olsun. Fakat F dönüşümü x_0'da a.y.s olmasın. Bu durumda

$$F(x_0) \not\subset \liminf_{x\to x_0} F(x)$$

olur. Buradan $\exists y \in F(x_0)$ için

$$y \notin \liminf_{x\to x_0} F(x)$$

olur. O halde $x_k \to x_0$ olan $\exists(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi vardır öyle ki $y_k \in F(x_k)$ olan $\forall(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi y' ye yakınsamaz. Bu durumda $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$d_F(x_k, y) \geq \varepsilon$$

olacak şekilde $\exists\varepsilon > 0$ vardır.

Öte yandan d_F, $\{x_0\} \times Y$'de ü.y.s. olduğundan

$$\varepsilon \leq \limsup_{x\to x_0} d_F(x_k, y_k) \leq d_F(x_0, y)$$

olur. Yani $y \notin F(x_0)$ olur ki bu ise $y \in F(x_0)$ oluşu ile çelişir. O halde F x_0'da a.y.s.'dir.

3. (1) ve (2)'den doğrudan çıkar.

4. d_F, $D \times Y$'de Lipshitz sürekli olsun. Bu durumda $\forall x_1, x_2 \in D$ ve $\forall y \in Y$ için

$$|d_F(x_1, y) - d_F(x_2, y)| \leq l\|x_1 - x_2\| \tag{3.45}$$

olacak şekilde $\exists l > 0$ vardır. Öte yandan supremum özelliğinden $\forall \delta > 0$ sayısına karşılık

$$\sup_{y \in F(x_2)} d_F(x_1, y) \leq d_F(x_1, y_2(x_2)) + \delta$$

olacak şekilde $\exists y_2(x_2) \in F(x_2)$ vardır. $y_2(x_2) \in F(x_2)$ olduğundan $d_F(x_2, y_2(x_2)) = 0$'dır. Böylece (3.45)'ten

$$\sup_{y \in F(x_2)} d_F(x_1, y) \leq l\|x_1 - x_2\| + \delta \tag{3.46}$$

olur. Benzer şekilde $\forall \delta > 0$ sayısına karşılık

$$\sup_{y \in F(x_1)} \leq d_F(x_2, y_1(x_1)) + \delta$$

olacak şekilde $\exists y_1(x_1) \in F(x_1)$ var olup

$$\sup_{y \in F(x_1)} d_F(x_2, y) \leq l\|x_1 - x_2\| + \delta \tag{3.47}$$

olur. Tanım(2.4), (3.46) ve (3.47)'den $\forall \delta > 0$ için

$$\rho_H(F(x_1), F(x_2)) = \max\{\sup_{y \in F(x_1)} d_F(x_2, y), \sup_{y \in F(x_2)} d_F(x_1, y)\} \leq l\|x_1 - x_2\| + \delta$$

olur. Dolayısıyla F, D üzerinde Lipschitz süreklidir.

□

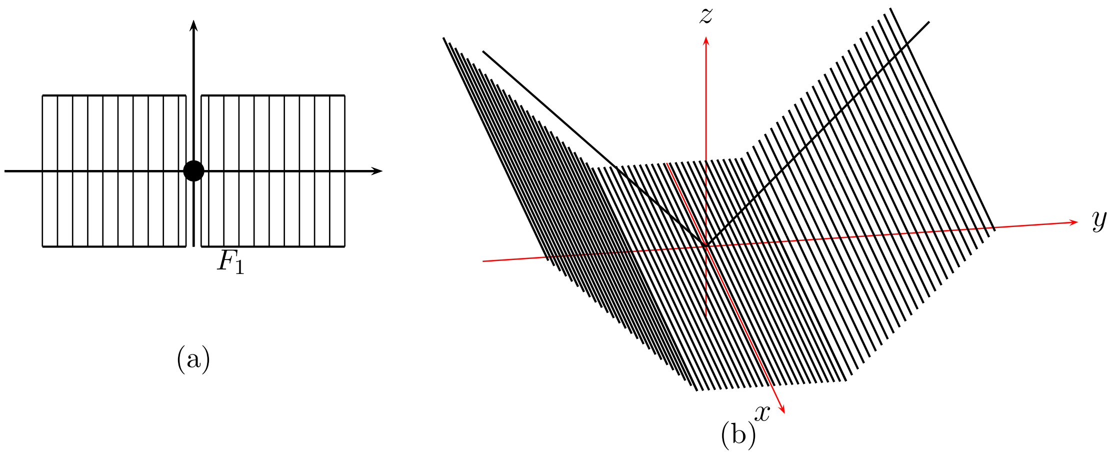
Örnek 3.2.3. $F_1 : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$ *küme değerli dönüşümü* $\forall x \in \mathbb{R}$ *için*

$$F_1(x) = \begin{cases} \{0\} & x = 0 \\ [-1,1] & x \neq 0 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda d_{F_1} *fonksiyonu*

$$d_{F_1}(x,y) = \begin{cases} |y| & x = 0, y \in \mathbb{R} \\ 0 & x \neq 0, y \in [-1,1] \\ y-1 & x \neq 0, y > 1 \\ -y-1 & x \neq 0, y < -1 \end{cases}$$

olur. Şekil 3.20'da F_1 *dönüşümü ve* d_{F_1}*'in grafikleri verilmiştir.*



Şekil 3.20. (a) F_1 dönüşümünün grafiği, (b) d_{F_1} fonksiyonunun grafiği

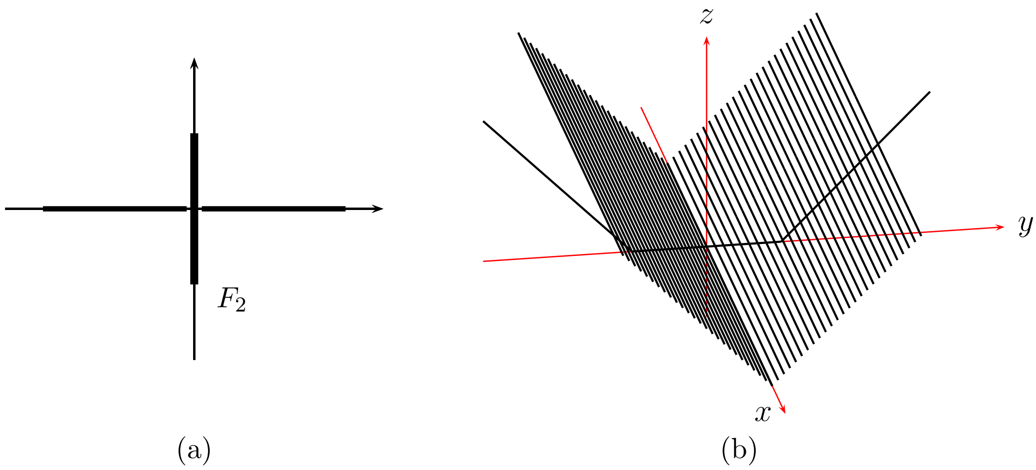
$F_2 : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$ *küme değerli dönüşümü* $\forall x \in \mathbb{R}$ *için*

$$F_2(x) = \begin{cases} [-1,1] & x = 0 \\ \{0\} & x \neq 0 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda d_{F_2}

$$d_{F_2}(x,y) = \begin{cases} |y| & x \neq 0, y \in \mathbb{R} \\ 0 & x = 0, y \in [-1,1] \\ y-1 & x = 0, y > 1 \\ -y-1 & x = 0, y < -1 \end{cases}$$

olur. Şekil 3.21'de F_2 *dönüşümü ve* d_{F_2}*'in grafikleri verilmiştir.*



Şekil 3.21. (a) F_2 dönüşümünün grafiği, (b) d_{F_2} fonksiyonun grafiği

F_1 *kapalı değerli fakat* x_0*'da ü.y.s değildir. Dolayısıyla* d_{F_1} *de* $\{0\} \times Y$*'de a.y.s. değildir.* F_2 *de kapalı değerli fakat* x_0*'da a.y.s olmadığından* d_{F_2} *de* $\{0\} \times Y$*'de ü.y.s. değildir. Ayrıca* $\varepsilon \in [-1,1]$ *iken* $x_k = 0$ *sabit dizisi ve* $y_k \to \varepsilon$ *için* $\lim_{k\to\infty} d_{F_2}(x_k, y_k) = 0$ *olur.* $|\varepsilon| > 1$ *iken* $x_k = 0$ *sabit dizisi ve* $y_k \to \varepsilon$ *dizisi için de* $\lim_{k\to\infty} d_{F_2}(x_k, y_k) = |\varepsilon| - 1$ *olur.*

$$d_{F_2}(0,\varepsilon) = \begin{cases} |\varepsilon| & \varepsilon \notin [-1,1] \\ 0 & \varepsilon \in [-1,1] \end{cases}$$

olduğundan d_{F_2} $\{0\} \times Y$*'de ne a.y.s. ne de ü.y.s.'dir.*

Uyarı 3.2.1. *Önerme 3.2.2(4)'te, Y_0'ın Y içinde kompakt olduğu durumda $F(D) \subset Y_0$ oluyorsa Y_0 ile Y yer değiştirebilir.*

Önerme 3.2.2'den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Önerme 3.2.3. *$F : X \to CS(Y)$ olsun F'nin $D \subset X$'te Lipschitz sürekli olması için gerek ve yeter koşul d_F'nin $D \times Y$ üzerinde Lipschitz sürekli olmasıdır.*

Kanıt. ($\Longleftarrow$) Önerme 3.2.2'de kanıtlandı.
($\Longrightarrow$) F, D üzerinde Lipschitz sürekli olduğundan ve F kompakt değerli olduğundan $\forall x_1, x_2 \in D$ için

$$\rho_H(F(x_1), F(x_2)) \leq l\|x_1 - x_2\|$$

olacak şekilde $\exists l > 0$ vardır. Buradan

$$\rho_H(F(x_1), F(x_2)) = \max\{\sup_{y \in F(x_1)} d_F(x_2, y), \sup_{y \in F(x_2)} d_F(x_1, y)\} \leq l\|x_1 - x_2\|$$

olduğundan

$\sup\limits_{y \in F(x_1)} d_F(x_2, y) \leq l\|x_1 - x_2\|$ ve $\sup\limits_{y \in F(x_2)} d_F(x_1, y) \leq l\|x_1 - x_2\|$ olur. Dolayısıyla

$$0 \leq d_F(x_1, y) \leq \sup_{y \in F(x_2)} d_F(x_1, y) \leq l\|x_1 - x_2\|, \quad y \in F(x_2) \tag{3.48}$$

$$0 \leq d_F(x_2, y) \leq \sup_{y \in F(x_1)} d_F(x_2, y) \leq l\|x_1 - x_2\|, \quad y \in F(x_1) \tag{3.49}$$

elde edilir. (3.48) eşitsizliğinin her tarafına $-d_F(x_2, y)$ eklenirse

$$-d_F(x_2, y) \leq d_F(x_1, y) - d_F(x_2, y) \leq l\|x_1 - x_2\| - d_F(x_2, y)$$

olur. (3.49)'dan $-l\|x_1 - x_2\| \leq -d_F(x_2, y)$ olduğundan

$$-l\|x_1 - x_2\| \leq -d_F(x_2, y) \leq d_F(x_1, y) - d_F(x_2, y) \leq l\|x_1 - x_2\| - d_F(x_2, y) \leq l\|x_1 - x_2\|$$

olur. Buradan

$$-l\|x_1 - x_2\| \leq d_F(x_1, y) - d_F(x_2, y) \leq l\|x_1 - x_2\|$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$|d_F(x_1, y) - d_F(x_2, y)| \leq l\|x_1 - x_2\|$$

olur. Buradan d_F, $D \times Y$'de Lipschitz süreklidir. □

Uyarı 3.2.2. *Önerme 3.2.3'te l, F dönüşümünün Lipschitz sabiti olmak üzere $x, \overline{x} \in D$ ve $y, \overline{y} \in Y$ için d_F*

$$|d_F(x, y) - d_F(\overline{x}, \overline{y})| \leq l\|x - \overline{x}\| + \|y - \overline{y}\|$$

şeklindeki Lipschitz koşulunu sağlar.

Yukarıdakilere benzer durumlar, konveks değerli dönüşümlerin destek fonksiyonları için de verilir.

Önerme 3.2.4. *$F : X \to CCS(Y)$ ve F x_0'da düzgün sınırlı olsun. Bu durumda*

1. *F'nin x_0'da a.y.s. olması için gerek ve yeter koşul $S_F(\cdot, p)$'nin x_0'da a.y.s. olmasıdır.*

2. *F'nin x_0'da ü.y.s. olması için gerek ve yeter koşul $S_F(\cdot, p)$'nin x_0'da ü.y.s. olmasıdır.*

3. *F'nin x_0'da sürekli olması için gerek ve yeter koşul $S_F(\cdot, p)$'nin x_0'da sürekli olmasıdır.*

4. *F'nin $D \subset X$ üzerinde Lipschitz sürekli olması için gerek ve yeter koşul $S_F(\cdot, p)$'nin $\forall p \in Y$ için D üzerinde Lipschitz sürekli olmasıdır.*

Kanıt. 1. $(\Longrightarrow)F$, x_0'da a.y.s. olsun fakat $S_F(\cdot, p)$, x_0'da a.y.s. olmasın. Bu durumda, $\exists x_k \to x_0$ dizisi için

$$\liminf_{k\to\infty} S_F(x_k, p) < S_F(x_0, p) \tag{3.50}$$

olur. Öte yandan $F(x_0)$ kompakt olduğundan $\forall (y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in F(x_0)$ dizisi için

$$y_{k_i} \to y, \quad y \in F(x_0)$$

olacak şekilde bir $\{y_{k_i}\}_{k_i\in\mathbb{N}}$ yakınsak alt dizisi vardır. Bu durumda

$$S_F(x_k,p) = \sup\{\langle p, y_k\rangle | y_k \in F(x_k)\}$$

olduğundan supremum özelliğinden $\forall y_k \in F(x_k)$ için

$$S_F(x_k,p) \geq \langle p, y_k\rangle$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} \liminf_{k\to\infty} S_F(x_k,p) &\geq \liminf_{k\to\infty} \langle p, y_k\rangle = \langle p, y\rangle \\ \sup_{y\in F(x_0)} (\liminf_{k\to\infty} S_F(x_k,p)) &\geq \sup_{y\in F(x_0)} \langle p, y\rangle \\ \liminf_{k\to\infty} S_F(x_k,p) &\geq S_F(x_0,p) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da (3.50) ile çelişir. O halde $S_F(\cdot,p)$ x_0'da a.y.s.'dir.

($\Longleftarrow$) $S_F(\cdot,p)$, x_0'da a.y.s. olsun. Bu durumda $x_k \to x_0$ olan $\forall (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi için

$$\liminf_{k\to\infty} S_F(x_k,p) \geq S_F(x_0,p)$$

olur. Buradan

$$\liminf_{k\to\infty} \sup_{y\in F(x_k)} \langle y, p\rangle \geq \sup_{y\in F(x_0)} \langle y, p\rangle \tag{3.51}$$

olur. $F(x_0)$ kompakt olduğundan

$$\sup_{y\in F(x_0)} \langle y, p\rangle = \langle y_0, p\rangle$$

olacak şekilde $y_0 \in F(x_0)$ vardır. Öte yandan $\forall k \in \mathbb{N}$ için $F(x_k)$ kompakt olduğundan

$$\sup_{y\in F(x_k)} \langle y, p\rangle = \langle y_k, p\rangle$$

olacak şekilde $\exists y_k \in F(x_k)$ vardır. Hatta

$$y_{k_i} \to y^*$$

olacak şekilde $(y_{k_i})_{k_i \in \mathbb{N}}$ yakınsak alt dizisi vardır.

$y_0 \neq y^*$ kabul edilsin. Genelliği bozmadan (3.51) eşitsizliğinden

$$\liminf_{k\to\infty} \langle y_k, p\rangle = \lim_{k\to\infty} \sup_{y\in F(x_k)} \langle y, p\rangle \geq \sup_{y\in F(x_0)} \langle y, p\rangle = \langle y_0, p\rangle$$

elde edilir. Burada $k > k_0$ iken $\langle y_k, p\rangle = \langle y_0, p\rangle$ olacak şekilde $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda

$$\langle y^*, p\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle y_k, p\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle y_0, p\rangle$$

olur. Böylece $\langle y^* - y_0, p\rangle = 0$ elde edilir. Bu da varsayımla çelişir. O halde $y^* = y_0$ olup alınan $y_0 \in F(x_0)$ için $y_0 \in \liminf_{x\to x_0} F(x)$'dir. Yani F x_0'da a.y.s.'dir.

2. $(\Longrightarrow) F$, x_0'da ü.y.s. olsun. Bu durumda $\limsup_{x\to x_0} F(x) \subseteq F(x_0)$ olur. O halde keyfi $y \in \limsup_{x\to x_0} F(x)$ alınsın. Bu durumda $y \in F(x_0)$ olur. $y \in \limsup_{x\to x_0} F(x)$ olduğundan $x_k \to x_0$ olan $\exists (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi için $\exists (y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi $\forall k \in \mathbb{N}$ için $y_k \in F(x_k)$ ve $y_k \to y_0$ olacak şekilde vardır. O halde keyfi bir p vektörü için

$$\langle y_k, p\rangle \to \langle y, p\rangle$$

olur. Aynı zamanda

$$\langle y, p\rangle \leq \sup_{y_0\in F(x_0)} \langle y_0, p\rangle$$

olur. Ayrıca $\forall k \in \mathbb{N}$ için $F(x_k)$ kompakt olduğundan

$$\sup_{y\in F(x_k)} \langle y, p\rangle = \langle y_k, p\rangle$$

olacak şekilde $\exists y_k \in F(x_k)$ vardır. Buradan

$$\limsup_{k\to\infty}(\sup_{y\in F(x_k)}\langle y,p\rangle) = \limsup_{k\to\infty}\langle y_k,p\rangle = \langle y,p\rangle \leq \sup_{y\in F(x_0)}\langle y,p\rangle$$

olup

$$\limsup_{k\to\infty} S_F(x_k,p) \leq S_F(x_0,p)$$

elde edilir. Yani $S_F(.,p)$, x_0'da ü.y.s.'dir.

$(\Longleftarrow)$ S_F, x_0'da ü.y.s. olsun. Fakat F x_0'da ü.y.s. olmasın. Bu durumda $\limsup_{x\to x_0} F(x) \not\subset F(x_0)$ olur. O halde $y^* \in \limsup_{x\to x_0} F(x)$ için $y^* \notin F(x_0)$'dır. $y^* \in \limsup_{x\to x_0} F(x)$ olduğundan $x_k \to x_0$ olan $\exists (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisine karşılık $\forall k \in \mathbb{N}$ için $y_k \in F(x_k)$ ve $y_k \to y^*$ olacak şekilde $\exists (y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi vardır. $y^* \notin F(x_0)$ ve $F(x_0)$ konveks olduğundan ayırma teoremi gereği $\forall y \in F(x_0)$ için

$$\langle y^* - y, p\rangle > 0 \tag{3.52}$$

olacak şekilde $p \in \mathbb{R}^n$ vardır. S_F'nin tanımından $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$\langle y_k, p\rangle \leq S_F(x_k,p)$$

olur. Buradan S_F, x_0'da ü.y.s. olduğundan

$$\langle y^*, p\rangle \leq \limsup_{k\to\infty}\langle y_k,p\rangle \leq \limsup_{k\to\infty} S_F(x_k,p) \leq S_F(x_0,p) \tag{3.53}$$

elde edilir. $F(x_0)$ kompakt ve konveks olduğundan

$$S_F(x_0,p) = \sup_{y\in F(x_0)}\langle y,p\rangle = \langle y_0,p\rangle$$

olacak şekilde tek bir $y_0 \in F(x_0)$ vardır. Bu durumda (3.53) eşitsizliğinden

$$\langle y^*, p\rangle \leq S_F(x_0,p) = \langle y_0,p\rangle$$

olur. Buradan

$$\langle y^* - y_0, p \rangle \leq 0$$

elde edilir. Bu ise (3.52) eşitsizliği ile çelişir. O halde F, x_0'da ü.y.s.'dir.

3. 1 ve 2 şıklarından doğrudan elde edilir.

4. ($\Longrightarrow$) F, D üzerinde Lipschitz sürekli olsun.

   F kompakt değerli olduğundan $\forall x_1, x_2 \in D$ için

$$\rho_H(F(x_1), F(x_2)) \leq l\|x_1 - x_2\|$$

olacak şekilde $\exists l > 0$ vardır. Öte yandan $F(x_1)$ ve $F(x_2)$ konveks olduklarından (2.5) eşitliğinden

$$\rho_H(F(x_1), F(x_2)) = \sup_{\|p\| \leq 1} |S_{F(x_1)}(p) - S_{F(x_2)}(p)|$$

Bu durumda $\forall p' \in \mathbb{B}$ vektörü için

$$|S_{F(x_1)}(p') - S_{F(x_2)}(p')| \leq \sup_{\|p\| \leq 1} |S_{F(x_1)}(p) - S_{F(x_2)}(p)|$$

olduğundan

$$|S_{F(x_1)}(p) - S_{F(x_2)}(p)| \leq l\|x_1 - x_2\|$$

olur. Dolayısıyla $S_F(., p)$, $\forall p \in Y$ için D üzerinde Lipschitz süreklidir.

($\Longleftarrow$) $S_F(., p)$, $\forall p \in Y$ için D üzerinde Lipschitz sürekli olsun. Yani $\forall x_1, x_2 \in D$ için

$$|S_{F(x_1)}(p) - S_{F(x_2)}(p)| \leq l\|x_1 - x_2\|$$

olsun. Dolayısıyla

$$\sup_{\|p\| \leq 1} |S_{F(x_1)}(p) - S_{F(x_2)}(p)| \leq \sup_{\|p\| \leq 1} l\|x_1 - x_2\|$$

olur. Yani $\forall x_1, x_2 \in D$ için

$$\rho_H(F(x_1), F(x_2)) \leq l\|x_1 - x_2\|$$

elde edilir. O halde F, D üzerinde Lipschitz süreklidir.

$\square$

Önerme 3.2.5. *$F : X \to 2^Y$, F dönüşümü x_0'da sürekli, düzgün sınırlı ve f x_0'da sürekli olsun. Bu durumda ω ve Ω fonksiyonları da x_0'da ü.y.s.'dir.*

Kanıt. Kabuller sağlansın.

- ω'nın ü.y.s. olduğunu göstermek yerine $gr\omega$'nın kapalılığı gösterilecektir..
  $gr\omega \subset \overline{gr\omega}$ olduğu açıktır.
  $(x_0, y_0) \in \overline{gr\omega}$ olsun. Bu durumda

$$(x_k, y_k) \to (x_0, y_0)$$

olacak şekilde $\exists((x_k, y_k))_{k\in\mathbb{N}} \subset gr\omega$ vardır. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $(x_k, y_k) \in gr\omega$ olduğundan

$$y_k \in F(x_k) \qquad ve \qquad f(x_k, y_k) = \varphi(x_k)$$

olur. Önerme 3.2.1(3)'ten φ x_0'da ü.y.s.'dir. f ve F de x_0'da sürekli olduklarından $k \to \infty$ için.

$$y_0 \in F(x_0) \qquad ve \qquad f(x_0, y_0) = \varphi(x_0)$$

olur. O halde $(x_0, y_0) \in gr\omega$ olup $gr\omega$ kapalıdır. Yani ω x_0'da ü.y.s.'dir.

- Benzer şekilde $gr\Omega$'nın kapalılığı gösterilecektir.
  $gr\Omega \subset \overline{gr\Omega}$ olduğu açıktır. O halde
  $(x_0, y_0) \in \overline{gr\Omega}$ olsun. Bu durumda

$$(x_k, y_k) \to (x_0, y_0)$$

olacak şekilde $\exists((x_k, y_k))_{k\in\mathbb{N}} \in gr\Omega$ vardır. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $(x_k, y_k) \in gr\Omega$ olduğundan

$$y_k \in F(x_k) \qquad ve \qquad f(x_k, y_k) = \phi(x_k)$$

olur. Önerme 3.2.1(3)'ten ϕ x_0'da ü.y.s.'dir. f ve F de x_0'da sürekli olduklarından $k \to \infty$ için

$$y_0 \in F(x_0) \qquad ve \qquad f(x_0, y_0) = \phi(x_0)$$

olur.

O halde $(x_0, y_0) \in gr\Omega$ olup $gr\Omega$ kapalıdır yani Ω x_0'da ü.y.s.'dir.

□

Önerme 3.2.6. *$F : X \to 2^Y$ dönüşümü x_0'da ü.y.s., φ, x_0'da ü.y.s. (ϕ, x_0'da a.y.s.) ve f, x_0'da a.y.s. (f, x_0'da ü.y.s.) olsun. Bu durumda ω ve Ω dönüşümleri x_0'da ü.y.s.'dir.*

Kanıt. Kabuller sağlansın.

- ω'nın x_0'da ü.y.s. olduğunu göstermek yerine $gr\omega$'nın kapalılığı gösterilecektir.
  $gr\omega \subset \overline{gr\omega}$ olduğu açıktır.
  $(x_0, y_0) \in \overline{gr\omega}$ olsun. Bu durumda

$$(x_k, y_k) \to (x_0, y_0)$$

olacak şekilde $\exists((x_k, y_k))_{k\in\mathbb{N}} \in gr\omega$ vardır. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $(x_k, y_k) \in gr\omega$ olduğundan

$$y_k \in F(x_k) \qquad ve \qquad f(x_k, y_k) = \varphi(x_k)$$

olur. f x_0'da a.y.s. ve φ , x_0'da ü.y.s. olduğundan

$$f(x_0, y_0) \le \liminf_{k\to\infty} f(x_k, y_k) = \liminf_{k\to\infty} \varphi(x_k) \le \limsup_{k\to\infty} \varphi(x_k) \le \varphi(x_0)$$

olur. Buradan φ'nin tanımından

$f(x_0, y_0) \leq \varphi(x_0) = \inf\{f(x_0, y) | y \in F(x_0)\} \leq f(x_0, y_0)$ olduğundan

$$f(x_0, y_0) = \varphi(x_0) \tag{3.54}$$

elde edilir. F, x_0'da ü.y.s. olduğundan grF kapalıdır. Bu durumda

$$(x_k, y_k) \to (x_0, y_0)$$

olacak şekilde $\forall ((x_k, y_k))_{k\in\mathbb{N}} \subset grF$ yakınsak dizisi için $(x_0, y_0) \in grF$'dir. Yani $y_0 \in F(x_0)$'dır. Böylece (3.54)'ten

$$(x_0, y_0) \in gr\omega$$

olup $gr\omega$ kapalıdır. Dolayısıyla ω, x_0'da ü.y.s.'dir.

- Ω'nın x_0'da ü.y.s. olduğunu göstermek yerine $gr\Omega$'nın kapalılığı gösterilecektir. $gr\Omega \subset \overline{gr\Omega}$ olduğu açıktır.
$(x_0, y_0) \in \overline{gr\Omega}$ olsun. Bu durumda

$$(x_k, y_k) \to (x_0, y_0)$$

olacak şekilde $\exists ((x_k, y_k))_{k\in\mathbb{N}} \in gr\Omega$ vardır. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $(x_k, y_k) \in gr\Omega$ olduğundan

$$y_k \in F(x_k) \qquad ve \qquad f(x_k, y_k) = \phi(x_k)$$

olur. f x_0'da ü.y.s. ve ϕ x_0'da a.y.s. olduğundan

$$f(x_0, y_0) \geq \limsup_{k\to\infty} f(x_k, y_k) = \limsup_{k\to\infty} \phi(x_k) \geq \liminf_{k\to\infty} \phi(x_k) \geq \phi(x_0)$$

olur. Buradan ϕ'nin tanımından ve

$f(x_0, y_0) \geq \phi(x_0) = \sup\{f(x_0, y_0)|y_0 \in F(x_0)\}$ olduğundan

$$f(x_0, y_0) = \phi(x_0) \tag{3.55}$$

elde edilir. F, x_0'da ü.y.s. olduğundan grF kapalıdır. Bu durumda

$$(x_k, y_k) \to (x_0, y_0)$$

olacak şekilde $\forall((x_k, y_k))_{k\in\mathbb{N}} \subset grF$ yakınsak dizisi için $(x_0, y_0) \in grF$'dir. Yani $y_0 \in F(x_0)$'dır. Böylece (3.55)'ten $(x_0, y_0) \in gr(\Omega)$ olup $gr(\Omega)$ kapalıdır. Dolayısıyla Ω, x_0'da ü.y.s.'dir.

□

3.3 Küme Değerli Dönüşümlerin Pseudo Lipschitz ve Pseudo Hölder Süreklilikleri

Bazı problemlerde Lipschitz sürekli olmayan küme değerli dönüşümlerle karşılaşabiliriz. Böyle durumlar için,Lipschitz süreklilik tanımını zayıflatma ihtiyacı duyulmuştur.

Tanım 3.3.1. *$F : X \to 2^Y$ olsun. $\forall x_1, x_2 \in V(x_0) \cap M$ için*

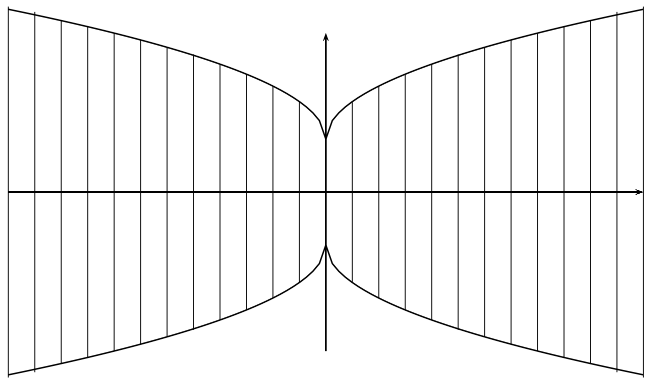
$$F(x_1) \cap V(y_0) \subset F(x_2) + l\|x_1 - x_2\|\mathbb{B} \tag{3.56}$$

olacak şekilde x_0 ve y_0'ın $V(x_0)$ ve $V(y_0)$ komşulukları ile $l > 0$ sabiti var ise F'ye , $M \subset X$'e göre $z_0 = (x_0, y_0) \in grF$ noktasında pseudo Lipschitz sürekli denir. $M = X$ ise F dönüşümüne pseudo Lipschitz sürekli denir.

Burada tanımdan da anlaşılacağı üzere daha az kısıtlı bir duırum söz konusudur. Çünkü; $F(x_1)\cap V(y_0)$ kümesi $F(x_1)$ kümesinden daha küçük bir küme olduğundan
$F(x_1) \cap V(y_0) \subset F(x_2) + l\|x_1 - x_2\|\mathbb{B}$'nin sağlanması
$F(x_1) \subset F(x_2) + l\|x_1 - x_2\|\mathbb{B}$'nin sağlanmasından daha kolaydır.

Örnek 3.3.1. *$F : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$, Şekil 3.22'de grafiği verilen*
$F(x) = (-1 - \sqrt{|x|}, 1 + \sqrt{|x|})$ ile tanımlı F küme değerli dönüşümü göz önüne

alınsın. Bu durumda F, $(0, y_0) \in grF$ noktasında pseudo Lipschitz sürekli iken $x = 0$ noktasında yerel Lipschitz sürekli değildir.



Şekil 3.22. $F(x) = (-1 - \sqrt{|x|}, 1 + \sqrt{|x|})$ dönüşümünün grafiği

Gerçekten, 0'ın keyfi bir $V(0)$ komşuluğu ve bu komşuluğa karşılık $y_0 \in F(0)$'ın $x \neq 0$ olan $\forall x \in V(0)$ için $V(y_0) \subset F(x)$ olacak şekilde $V(y_0)$ komşuluğu ve $l = 1$ alınsın. Bu durumda $\forall x \in V(0)$ için $F(x) \cap V(y_0) = V(y_0)$ olduğundan

$$F(x_1) \cap V(y_0) \subset F(x_2) + l\|x_1 - x_2\|\mathbb{B}$$

elde edilir. O halde F $(0, y_0) \in grF$'de pseudo Lipschitz süreklidir.
Öte yandan $V(0)$, 0'ın keyfi bir komşuluğu olmak üzere $\forall l > 0$ sayısına karşılık $\rho_H(F(x), F(0)) = \sqrt{\|x\|} > l\|x\|$ olacak şekilde $x \neq 0$ olan bir $x \in V(0)$ elemanı var olduğundan F, $x = 0$'da yerel Lipschitz sürekli değildir.

Yardımcı Teorem 3.3.1. *$F : X \to 2^Y$ olsun. F, $(x_0, y_0) \in grF$'de pseudo Lipschitz sürekli ve $\delta, \delta_0 > 0$ olmak üzere*

$$V(x_0) = x_0 + \delta_0\mathbb{B}, \qquad V(y_0) = y_0 + \delta\mathbb{B}$$

sırası ile x_0'ın ve y_0'ın komşulukları olsun. Bu durumda $\forall x \in V(x_0)$ için $\delta \geq l\delta_0$ ise $F(x) \cap V(y_0) \neq \emptyset$'dir.

Kanıt. $\exists \overline{x} \in V(x_0)$ için $F(\overline{x}) \cap V(y_0) = \emptyset$ olduğu kabul edilsin.
Bu durumda $d(y_0, F(\overline{x})) > \delta$ olur. F pseudo Lipschitz sürekli olduğundan

(3.56)' dan $y_0 \in F(x_0) \cap V(y_0)$ olup $y_0 \in F(\overline{x}) + l\|\overline{x} - x_0\|\mathbb{B}$ olur. Dolayısıyla

$$\delta < d(y_0, F(\overline{x})) \leq l\|\overline{x} - x_0\| \leq l\delta_0$$

elde edilir. Bu da $\delta \geq \delta_0$ oluşuyla çelişir. O halde $\forall \overline{x} \in V(x_0)$ için $F(x) \cap V(y_0) \neq \emptyset$'dir. □

Önerme 3.3.1. $F : X \to 2^Y$ *küme değerli dönüşümü kapalı değerli olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:*

1. *F, $z_0 = (x_0, y_0) \in grF$'de M'ye göre pseudo Lipschitz süreklidir.*

2. *d_F, $(V(x_0) \cap M) \times V(y_0)$ üzerinde Lipschitz süreklidir.*

Kanıt. ($1 \Longrightarrow 2$) F kapalı değerli ve $z_0 = (x_0, y_0) \in grF$'de M'ye göre pseudo Lipschitz sürekli olsun. Genelliği bozmadan

$$V(x_0) = x_0 + \delta_0\mathbb{B} \qquad ve \qquad V_\delta(y_0) = y_0 + \delta\mathbb{B} \qquad ve \qquad \delta \geq 2l\delta_0$$

alınsın. F, $(x_0, y_0) \in grF$'de M pseudo Lipschitz sürekli olduğundan ve Yardımcı Teorem 3.3.1'den $\forall x, \overline{x} \in V(x_0) \cap M$ için

$$F(\overline{x}) \cap V_{\delta/2}(y_0) \neq \emptyset \qquad ve \qquad F(\overline{x}) \cap V_\delta/2(y_0) \subset F(x) + l\|x - \overline{x}\|\mathbb{B}$$

olur. Dahası $\forall x, \overline{x} \in V(x_0) \cap M$ ve keyfi $\overline{v} \in F(\overline{x}) \cap V_{\delta/2}(y_0)$ için

$$\|v(\overline{v}) - \overline{v}\| \leq l\|\overline{x} - x\| \tag{3.57}$$

olacak şekilde bir $v(\overline{v}) \in F(x)$ vardır. $\forall y, \overline{y} \in V_{\delta/2}(y_0)$ ve keyfi $\overline{v} \in F(\overline{x}) \cap V_{\delta/2}(y_0)$ için üçgen eşitsizliğinden

$$\|\overline{y} - \overline{v}\| + \|\overline{y} - y\| \geq \|\overline{v} - y\|$$

ile

$$\|\overline{v} - y\| + \|\overline{v} - \overline{v}(\overline{v})\| \geq \|y - v(\overline{v})\|$$

dolayısıyla

$$\|\overline{v}-y\| \geq \|y-v(\overline{v})\| - \|\overline{v}-v(\overline{v})\|$$

elde edilir. Buradan da

$$\|\overline{y}-\overline{v}\| + \|\overline{y}-y\| \geq \|y-v(\overline{v})\| - \|\overline{v}-v(\overline{v})\|$$

$$\|\overline{y}-\overline{v}\| \geq \|y-v(\overline{v})\| - \|\overline{v}-v(\overline{v})\| - \|\overline{y}-y\| \tag{3.58}$$

olur. Öte yandan $\overline{y} \in V_{\delta/2}(y_0)$ ve $\overline{v} \in F(\overline{x}) \cap V_{\delta/2}(y_0)$ olduğundan

$$d_F(\overline{x},\overline{y}) = \inf\{\|\overline{y}-\overline{v}\| | \overline{v} \in F(\overline{x}) \cap V_\delta(y_0)\} = \inf\{\|\overline{y}-v\| | v \in F(\overline{x})\}$$

olur. (3.57) ve (3.58)'den de $d_F(\overline{x},\overline{y}) > d_F(x,y) - l\|\overline{x}-x\| - \|\overline{y}-y\|$ olur. $\overline{x}$ ile x ve $\overline{y}$ ile y yer değiştirebilir. Bu durumda

$$|d_F(\overline{x},\overline{y}) - d_F(x,y)| \leq l\|\overline{x}-x\| + \|\overline{y}-y\| \tag{3.59}$$

olur. Bu eşitsizlik $\forall x, \overline{x} \in V(x_0) \cap M$ ve $\forall y, \overline{y} \in V_{\delta/2}(y_0)$ için sağlandığından d_F, $V(x_0) \cap M \times V_{\delta/2}(y_0)$ üzerinde Lipschitz süreklidir.

$(2 \Longrightarrow 1)$ F kapalı değerli bir dönüşüm ve d_F, $V(x_0) \cap M \times V_{\delta/2}(y_0)$ üzerinde Lipschitz sürekli olsun.
Yani (3.59) sağlansın. Bu durumda $\forall y, \overline{y} \in V_{\delta/2}(y_0)$ için ve özel olarak $y = \overline{y}$ olmak üzere

$$d(y, F(x)) \leq l\|\overline{x}-x\|$$

olur. Bu $\forall x, \overline{x} \in V(x_0)$ için geçerli olduğundan

$$F(\overline{x}) \cap V_{\delta/2}(y_0) \subset F(x) + l\|\overline{x}-x\|\mathbb{B}$$

olur. Dolayısıyla F (x_0, y_0)'da M - pseudo Lipschitz süreklidir. □

Tanım 3.3.2. *$F : X \to 2^Y$ olsun. $\forall x_1, x_2 \in V(x_0)$ için v pozitif sabit olmak* *üzere*

$$F(x_1) \cap V(y_0) \subset F(x_2) + l\|x_1 - x_2\|^v \mathbb{B}$$

olacak şekilde bir $l > 0$ *sabiti ile* x_0, y_0 *noktalarının* $V(x_0), V(y_0)$ *açık komşulukları var ise* F *küme değerli dönüşümüne* $z_0 = (x_0, y_0) \in grF$ *noktasında* v. *mertebeden pseudo Hölder sürekli denir.*

Yardımcı Teorem 3.3.2. $F : X \to 2^Y$ *olsun.* F, $z_0 = (x_0, y_0) \in grF$*'te* v *mertebeden pseudo Hölder sürekli ve*

$$V(x_0) = x_0 + \delta_0 \mathbb{B} \qquad ve \qquad V(y_0) = y_0 + \delta \mathbb{B}$$

sırası ile x_0 *ve* y_0*'ın komşulukları olsun. Bu durumda* $\delta \geq l\delta_0^v$ *ise*
$\forall x \in V(x_0)$ *için* $F(x) \cap V(y_0) \neq \emptyset$ *olur.*

Kanıt. $\exists \overline{x} \in V(x_0)$ için $F(\overline{x}) \cap V(y_0) = \emptyset$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda

$$d(y_0, F(\overline{x})) > \delta$$

olur. Pseudo Hölder süreklilikten $y_0 \in F(x_0) \cap V(y_0)$ olduğundan

$$y_0 \in F(\overline{x}) + l\|\overline{x} - x\|^v \mathbb{B}$$

olur. Buradan

$$\delta < d(y_0, F(\overline{x})) \leq l\|\overline{x} - x_0\|^v \leq l.\delta_0^v$$

elde edilir. Bu da $\delta \geq l\delta_0^v$ kabulüyle çelişir. O halde $\forall x \in V(x_0)$ için
$F(x) \cap V(y_0) \neq \emptyset$'dir. □

Önerme 3.3.2. $F : X \to 2^Y$ *küme değerli dönüşümü kapalı değerli olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:*

1. F, $(x_0, y_0) \in grF$ *noktasında* v. *mertebeden pseudo Hölder süreklidir.*

2. $\forall x, \overline{x} \in V(x_0)$ *ve* $\forall y, \overline{y} \in V_{\delta/2}(y_0)$ *için*

$$|d_F(x, y) - d_F(\overline{x}, \overline{y})| \leq l\|x - \overline{x}\|^v + \|y - \overline{y}\| \qquad (3.60)$$

Kanıt. $(1 \Longrightarrow 2)$ $F : X \to 2^Y$ olsun. F kapalı değerli bir dönüşüm ve $z_0 = (x_0, y_0) \in grF$'de M - pseudo Hölder sürekli olsun. Genelliği bozmadan

$$V(x_0) = x_0 + \delta_0\mathbb{B} \qquad , \qquad V_\delta(y_0) = y_0 + \delta\mathbb{B} \qquad ve \qquad \delta \geq 2l\delta_0^v$$

alınsın. F, $(x_0, y_0) \in grF$'de M - pseudo Hölder sürekli olduğundan ve Yardımcı Teorem 3.3.2'den $\forall x, \overline{x} \in V(x_0) \cap M$ için

$$F(\overline{x}) \cap V_{\delta/2}(y_0) \neq \emptyset \qquad ve \qquad F(\overline{x}) \cap V_{\delta/2}(y_0) \subset F(x) + l\|x - \overline{x}\|^v\mathbb{B}$$

olur. Dahası $\forall x, \overline{x} \in V(x_0) \cap M$ ve keyfi $\overline{v} \in F(\overline{x}) \cap V_{\delta/2}(y_0)$ için

$$\|v(\overline{v}) - \overline{v}\| \leq l\|\overline{x} - x\|^v \tag{3.61}$$

olacak şekilde bir $v(\overline{v}) \in F(x)$ vardır. $\forall y, \overline{y} \in V_{\delta/2}(y_0)$ ve keyfi $\overline{v} \in F(\overline{x}) \cap V_{\delta/2}(y_0)$ için üçgen eşitsizlliğinden

$$\|\overline{y} - \overline{v}\| + \|\overline{y} - y\| \geq \|\overline{v} - y\|$$

ve

$$\|\overline{v} - y\| + \|\overline{v} - \overline{v}(\overline{v})\| \geq \|y - v(\overline{v})\|$$

dolayısıyla

$$\|\overline{v} - y\| \geq \|y - v(\overline{v})\| - \|\overline{v} - v(\overline{v})\|$$

elde edilir. Buradan da

$$\|\overline{y} - \overline{v}\| + \|\overline{y} - y\| \geq \|y - v(\overline{v})\| - \|\overline{v} - v(\overline{v})\|$$

$$\|\overline{y} - \overline{v}\| \geq \|y - v(\overline{v})\| - \|\overline{v} - v(\overline{v})\| - \|\overline{y} - y\| \tag{3.62}$$

olur. Öte yandan $\overline{y} \in V_{\delta/2}(y_0)$ ve $\overline{v} \in F(\overline{x}) \cap V_{\delta/2}(y_0)$ olduğundan

$$d_F(\overline{x}, \overline{y}) = \inf\{\|\overline{y} - \overline{v}\| | \overline{v} \in F(\overline{x}) \cap V_\delta(y_0)\} = \inf\{\|\overline{y} - v\| | v \in F(\overline{x})\}$$

olur. (3.61) ve (3.62)'den de $d_F(\overline{x},\overline{y}) > d_F(x,y) - l\|\overline{x}-x\|^v - \|\overline{y}-y\|$ olur. $\overline{x}$ ile x ve $\overline{y}$ ile y yer değiştirebilir. Bu durumda

$$|d_F(\overline{x},\overline{y}) - d_F(x,y)| \leq l\|\overline{x}-x\|^v + \|\overline{y}-y\|$$

olur.

$(2 \Longrightarrow 1)$ F kapalı değerli bir dönüşüm ve $\forall x,\overline{x} \in V(x_0)$ ve $\forall y,\overline{y} \in V_{\delta/2}(y_0)$ için (3.60) sağlansın. Bu durumda $\forall y,\overline{y} \in V_{\delta/2}(y_0)$ için ve özel olarak $y = \overline{y}$ olmak üzere

$$d(y, F(x)) \leq l\|\overline{x}-x\|^v$$

olur. Bu $\forall x,\overline{x} \in V(x_0)$ için geçerli olduğundan

$$F(\overline{x}) \cap V_{\delta/2}(y_0) \subset F(x) + l\|\overline{x}-x\|^v\mathbb{B}$$

olur. O halde F (x_0, y_0) noktasında v. mertebeden pseudo Hölder süreklidir.

□

3.4 Konveks Küme Değerli Dönüşümlerin Özellikleri

Bu bölümde konveks dönüşümlerle ilgili bazı tanım ve özellikler verilecektir.

Önerme 3.4.1. *$F : X \to 2^Y$ olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.*

1. *F konveks bir dönüşümdür.*
2. *$\forall x_1, x_2 \in X$ için $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ ve $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ olmak üzere $F(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \supset \lambda_1 F(x_1) + \lambda_2 F(x_2)$'dir.*

Kanıt. $(1 \Longrightarrow 2)$ F konveks yani grF konveks olsun.
Bu durumda keyfi $y_1 \in F(x_1)$, $y_2 \in F(x_2)$ elemanları ile $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ olacak şekilde λ_1, λ_2 sayıları alınsın. Bu durumda $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in grF$ olur. Buna ek olarak $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$ olur. F konveks olduğundan grF konvekstir. O halde $\lambda_1(x_1, y_1) + \lambda_2(x_2, y_2) \in grF$'dir. Bu durumda $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in F(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$

olur. Bu y_1 ve y_2 elemanları keyfi olduklarından

$$\lambda_1 F(x_1) + \lambda_2 F(x_2) \subset F(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$$

elde edilir.

$(2 \implies 1)$ Keyfi $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in grF$ elemanları ve keyfi $\lambda \in [0,1]$ alınsın. Bu durumda $y_1 \in F(x_1)$ ve $y_2 \in F(x_2)$ olur. Hipotezden

$$\lambda F(x_1) + (1-\lambda)F(x_2) \subset F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$$

olur. Buradan $y_1 \in F(x_1)$ ve $y_2 \in F(x_2)$ olduğundan

$$\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \in \lambda F(x_1) + (1-\lambda)F(x_2)$$

$$\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \subset F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$$

elde edilir. Dolayısıyla $(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) \in grF$'dir. Yani grF konvekstir. O halde F konvekstir. □

Yardımcı Teorem 3.4.1. *$A, C \subseteq X$, A ve C boştan farklı konveks ve kapalı kümeler olmak üzere*

1. *$A \subset C$ olması için gerek yeter koşul $S_A(.) \leq S_C(.)$ olmasıdır.*
2. *$S_{A+C}(.) = S_A(.) + S_C(.)$'dir.*

Önerme 3.4.2. *$F : X \to 2^Y$, $x \in X$ ve F kapalı değerli olsun.*

1. *F küme değerli dönüşümü konveks ise destek fonksiyonu $S_{F(x)}(p)$ de x'e göre $\forall p \in Y$ için konkavdır.*
2. *$S_{F(x)}(p)$, $\forall p \in Y$ için x'e göre konkav ise F konvekstir.*

Kanıt. $F : X \to 2^Y$, $x \in X$ ve F kapalı değerli olsun.

1. F küme değerli dönüşümü konveks olsun. Yardımcı Teorem 3.4.1(2)'den

$\forall p \in Y$ için

$$S_{\lambda_1 F(x_1)+\lambda_2 F(x_2)}(p) = S_{\lambda_1 F(x_1)}(p) + S_{\lambda_2 F(x_2)}(p) = \lambda_1 S_{F(x_1)}(p) + \lambda_2 S_{F(x_2)}(p) \tag{3.63}$$

olur. F konveks olduğundan $\forall x_1, x_2 \in X$ ve $\lambda_1 \geq$, $\lambda_2 \geq 0$ ve $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ için $F(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \supset \lambda_1 F(x_1) + \lambda_2 F(x_2)$'dır. Buradan Yardımcı Teorem 3.4.1(1)'den

$$S_{F(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)}(p) \geq S_{\lambda_1 F(x_1)+\lambda_2 F(x_2)}(p) \tag{3.64}$$

elde edilir. (3.63) ve (3.64)'ten $S_{F(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)}(p) \geq \lambda_1 S_{F(x_1)}(p) + \lambda_2 S_{F(x_2)}(p)$ olduğundan $S_{F(x)}(p)$ konkavdır.

2. $F : X \to 2^Y$, $x \in X$, $S_{F(x)}(p)$, $\forall p \in Y$ için x'e göre konkav olsun. Yani $\forall x_1, x_2 \in X$ ve $\lambda_1 \geq$, $\lambda_2 \geq 0$ ve $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ için $S_{F(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)}(p) \geq \lambda_1 S_{F(x_1)}(p) + \lambda_2 S_{F(x_2)}(p)$ olsun. Yardımcı Teorem 3.4.1'den

$$F(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \supset \lambda_1 F(x_1) + \lambda_2 F(x_2)$$

elde edilir. O halde F konvekstir.

□

Önerme 3.4.3. *$C \subset X$ için $F : X \to 2^Y$ küme değerli dönüşüm $x \in X$ için $F(x) = C$ olarak tanımlansın. $C \subseteq X$ kümesi konveks ise F sabit dönüşümü de konvekstir.*

Önerme 3.4.4. *$h_i : X \times Y \to \mathbb{R}$, $\quad i = 1, \ldots, r$ fonksiyonları konveks ise $\forall x \in X$ için $F(x) = \{y \in Y | h_i(x, y) \leq 0, i = 1, \ldots, r\}$ olarak tanımlanan $F : X \to 2^Y$ küme değerli dönüşümü de konvekstir.*

Kanıt. Keyfi $x_1, x_2 \in X$ ve $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$ ve $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ için $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in \lambda_1 F(x_1) + \lambda_2 F(x_2)$ olacak şekilde $\forall y_1 \in F(x_1)$ ve $\forall y_2 \in F(x_2)$ alınsın.

F'nin tanımından $h_i(x_1, y_1) \leq 0$ ve $h_i(x_2, y_2) \leq 0$'dır. Dahası

$$\lambda_1 h_i(x_1, y_1) + \lambda_2 h_i(x_2, y_2) \leq 0$$

olur. Buradan h_i konveks olduğundan

$$\begin{aligned} h_i(\lambda_1(x_1, y_1) + \lambda_2(x_2, y_2)) &\leq \lambda_1 h_i(x_1, y_1) + \lambda_2 h_i(x_2, y_2) \leq 0 \\ h_i(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) &\leq 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Yani $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in F(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$ olur. Dolayısıyla

$$\lambda_1 F(x_1) + \lambda_2 F(x_2) \subset F(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$$

olduğundan Önerme 3.4.1'den F konvekstir. □

Önerme 3.4.5. *$f : X \times Y \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon ve $F : X \to 2^Y$ bir konveks küme değerli dönüşüm olsun.Bu durumda φ marjinal fonksiyonu konvekstir.*

Kanıt. $x_1, x_2 \in X$, $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ ve $z_1 = (x_1, y_1) \in grF$
$z_2 = (x_2, y_2) \in grF$ olsun. Bu durumda
$\varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \inf\{f(\lambda_1 z_1, \lambda_2 z_2) | \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in F(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 y_2)\}$ olur. F ve f konveks olduğundan

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) &\leq \inf\{f(\lambda_1 z_1, \lambda_2 z_2) | \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in \lambda_1 F(x_1) + \lambda_2 F(y_2)\} \\ &= \inf\{f(\lambda_1 z_1, \lambda_2 z_2) | y_1 \in F(x_1), y_2 \in F(y_2)\} \\ &\leq \inf\{\lambda_1 f(z_1) + \lambda_2 f(z_2) | y_1 \in F(x_1), y_2 \in F(y_2)\} \\ &= \lambda_1 \varphi(x_1) + \lambda_2 \varphi(x_2) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla φ konvekstir. □

Sonuç 3.4.1. *Önerme 3.4.5'in şartları sağlansın. Bu durumda $domf = X \times Y$ ise $dom\varphi = domF$'tir.*

Kanıt. $x \in dom\varphi$ olsun. Bu durumda $\varphi(x) < +\infty$'dir. $x \notin domF$ kabul edilsin.
O halde $F(x) = \emptyset$ olur. Dolayısıyla φ'nin tanımından $\varphi(x) = +\infty$ olur ki bu da bir çelişkidir. Yani $x \in domF$ olup $dom\varphi \subset domF$ olur.
$x \in domF$ olsun. O halde $\exists y_0 \in F(x)$ vardır. Buradan
$\varphi(x) = \inf\{f(x,y)|y \in F(x)\} \leq f(x,y_0) < +\infty$ olur. Yani $x \in dom\varphi$ olup $domF \subset dom\varphi$'dir.
Dolayısıyla $domF = dom\varphi$ olur. □

Sonuç 3.4.2. *V, $\mathbb{R}^r$'de konveks bir küme $f : X \times Y \times V \to \mathbb{R}$ sonlu ve konveks, $F : X \to 2^Y$ konveks bir dönüşüm olsun. Bu durumda*
$\varphi(x,v) = \inf\{f(x,y,v)|y \in F(x)\}$ fonksiyonu konvekstir ve
$dom\varphi = domF \times V$'dir.

Kanıt. $\overline{x} = (x,v)$, $\overline{y} = (y,v)$ ve $\tilde{F}(x) = F(x) \times \{v\}$ olsun. F konveks olduğundan $\tilde{F}$ konvekstir. $f : X \times Y \times V \to \mathbb{R}$ konveks olduğundan Önerme 3.4.5 gereği φ konvekstir. Sonuç 3.4.1'den $domF \times V = dom\varphi$ olur. □

Yardımcı Teorem 3.4.2. *$f : X \to Y$ has, konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:*

1. *x'in bir komşuluğunda f üstten sınırlıdır,*

2. *f, x'te süreklidir,*

3. *f, x'in bir komşuluğunda Lipschitz süreklidir.*

Önerme 3.4.6. *$F : X \to 2^Y$ kapalı değerli bir konveks dönüşüm ve*
$x_0 \in ridomF$ olsun. Bu durumda F, $\forall(x_0,y_0)$, $y_0 \in F(x_0)$ noktasında $ridomF$'ye göre pseudo-Lipschitz süreklidir.

Kanıt. F'nin pseudo Lipschitz sürekliliği Önerme 3.3.1'den d_F'in Lipschitz sürekliliği gösterilerek kanıtlanabilir.
$d_F(x,y) = \inf\{|y-v||v \in F(x)\}$ olduğundan Sonuç 3.4.2 gereği ($|y - \cdot|$ konveks olduğundan) d_F konvekstir. Dahası $V(x_0)$, x_0'ın bir komşuluğu olmak üzere $domF = (V(x_0) \cap domF) \times Y$'dir. d_F konveks ve has fonksiyondur.

d_F x_0'ın bir komşuluğunda üstten sınırlı olduğundan Yardımcı Teorem 3.4.2 gereği d_F, $\{V'(x_0) \cap ridomF\} \times V(y_0)$'da Lipschitz süreklidir. Dolayısıyla Önerme 3.3.1'den F (x_0, y_0), $y_0 \in F(x_0)$'da $ridomF$'ye göre pseudo Lipschitz süreklidir. □

3.5 Konveks İşlem

Tanım 3.5.1. *$K : X \to 2^Y$ olsun. grK, $X \times Y$'de konveks bir koni ise K dönüşümüne konveks işlem(convex process) denir. grK, K ile gösterilsin. $coneK$, konveks ve kapalı ise K dönüşümüne kapalı konveks işlem denir.*

K konveks işlem ve $N := -K^+$ olsun. Bu durumda K ile birlikte N eşlenik işlemini (adjoint process) düşünmek anlamlıdır. N eşlenik işlemi

$$N(y^*) := \{x^* | (x^*, y^*) \in N\}$$

olarak tanımlanır.

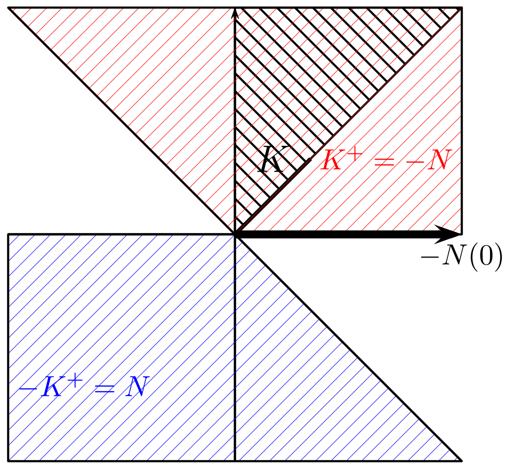
Önerme 3.5.1. *$K : X \to 2^Y$ konveks işlem olsun. Bu durumda*
$[domK]^+ = -N(0)$

Kanıt. $domK$, X içinde 0'ı içeren konveks konidir.

$$\begin{aligned}
[domK]^+ &= \{x^* | \langle x^*, x\rangle \geq 0, \forall x \in domK\} \\
&= \{x^* | \langle (x^*, 0), (x, y)\rangle \geq 0, \forall (x, y) \in K\} \\
&= \{(x^*, y^*) | \langle (x^*, y^*), (x, y)\rangle \geq 0, \forall (x, y) \in K\} \cap \{(x^*, y^*) | y^* = 0\} \\
&= K^+ \cap \{(x^*, y^*) | y^* = 0\} = \{x^* | (x^*, 0) \in K^+\} = \{x^* | (x^*, 0) \in -N\} \\
&= -\{x^* | (x^*, 0) \in N\} = -N(0)
\end{aligned}$$

□

Örnek 3.5.1. *Şekil 3.23'te $K : \mathbb{R}^+ \to 2^{\mathbb{R}^+}$ $K = [x, \infty)$ ile tanımlı kapalı, konveks işleminin garfiği verilmiştir. Bu grafiğe göre $domK = [0, \infty)$, $[domK]^+ = [0, \infty)$ ve $-N(0) = \{x^* | (x^*, 0) \in -N\} = [0, \infty)$ olur.*



Şekil 3.23. K işleminin etkin tanım kümesinin pozitif polar konisi

Yardımcı Teorem 3.5.1. *$C \subseteq X$, kapalı, konveks ve boştan farklı olsun. Bu durumda*

1. *0^+C recession konisi kapalıdır.*

2. *0^+C recession konisi , $x_k \in C$ ve $\lambda_k \to 0^+$ olacak şekilde tüm $(\lambda_k x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizilerinin limitlerinin kümesidir.*

Önerme 3.5.2. *$K : X \to 2^Y$, K kapalı konveks işlem olsun.*
$\forall x \in domK$ için $0^+K(x) = K(0)$'dır.

Kanıt. $0^+K(x) \subset K(0)$ olduğu gösterilsin.
O halde $\overline{y} \in 0^+K(x)$ alınsın. K konveks, boştan farklı ve kapalı olduğundan Yardımcı Teorem 3.5.1'den $\forall k \in \mathbb{N}$ için $y_k \in K(x)$ ve $\lambda_k \to 0^+$ ve $\overline{y} = \lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k y_k$ olacak şekilde $(\lambda_k y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi vardır. Buradan açıkça görülür ki
$(x, y_k) \in K$'dır. K konveks koni olduğundan $(\lambda_k x, \lambda_k y_k) \in K$ elde edilir. K kapalı olduğundan $\lambda_k \to 0^+$ için
$(\lambda_k x, \lambda_k y_k) \to (0, \overline{y}) \in K$ dolayısıyla $\overline{y} \in K(0)$ olur. Buradan

$$0^+K(x) \subset K(0)$$

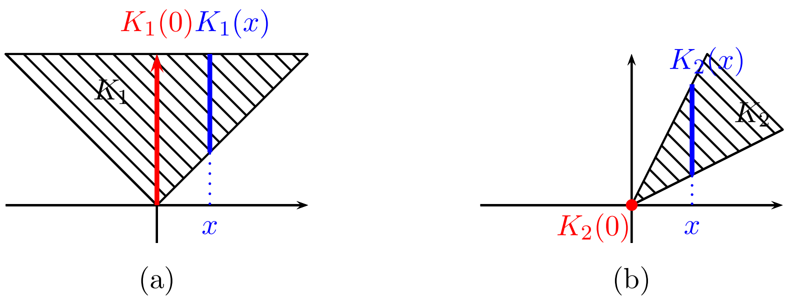
elde edilir.
$K(0) \subset 0^+K(x)$ olduğu gösterilsin. $\overline{y} \in K(0)$ alınsın. $\overline{y} + K(x) \subset K(x)$ olduğu

gösterilmelidir. Keyfi $z \in K$ alınsın. Bu durumda $(x, z) \in K$ olur. $\overline{y} \in K(0)$ olduğundan $(0, \overline{y}) \in K$'dır. K konveks olduğundan

$$(0, \overline{y}) + (x, z) = (x, \overline{y} + z) \in K$$

yani $\overline{y} + z \in K(x)$'dir. $z \in K(x)$ keyfi bir eleman olduğundan $\overline{y} + K(x) \subset K(x)$ olur. Dolayısıyla $\overline{y} \in 0^+K(x)$ olur. Yani $K(0) \subset 0^+K(x)$'dir. olur. Bu durumda $0^+K(x) = K(0)$'dır. □

Örnek 3.5.2. *$K_1 : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}^+}$, $K_1(x) = [|x|, \infty)$ ile tanımlı kapalı konveks işlemi için $0^+K_1(x) = K_1(0) = [0, \infty)$ olur.$K_2 : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}^+}$, $K_2(x) = [\frac{1}{2}x, 2x]$ ile tanımlı kapalı konveks işlemi için $0^+K_2(x) = K_2(0) = \{0\}$ olur. Şekil 3.24'te K_1 ve K_2 dönüşümlerinin grafikleri ile recession konilerinin grafikleri verilmiştir.*



Şekil 3.24. (a) K_1 kümesinin recession konisi, (b) K_2 kümesinin recession konisi

Yardımcı Teorem 3.5.2. *$C \subseteq X$, kapalı, konveks ve boştan farklı olsun. Bu durumda C kümesinin sınırlı olması için gerek ve yeter koşul $0^+C = \{0\}$ olmasıdır.*

Önerme 3.5.3. *$K : X \to 2^Y$ kapalı, konveks işlem olsun. K dönüşümünün kompakt değerli olması için gerek ve yeter koşul $K(0) = \{0\}$ olmasıdır.*

Kanıt. $K : X \to 2^Y$ kapalı, konveks işlem olsun.
($\Longrightarrow$) K dönüşümü kompakt değerli olsun. Bu durumda $\forall x \in X$ için $K(x)$ sınırlıdır. Yardımcı Teorem 3.5.2'den $0^+K(x) = \{0\}$'dır. Önerme 3.5.2'den

$0^+K(x) = K(0)$ olduğundan $K(0) = \{0\}$ olur.

($\Longleftarrow$) $K(0) = \{0\}$ olsun. Önerme 3.5.2'den $0^+K(x) = K(0)$ olduğundan $0^+K(x) = \{0\}$ olur. Yardımcı Teorem 3.5.2'den $K(x)$ sınırlıdır. $K(x)$ kapalı olduğundan kompakttır. □

Önerme 3.5.4. *$K : X \to 2^Y$ kapalı konveks işlem, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ konveks, pozitif homojen fonksiyon, φ, K dönüşümünün marjinal fonksiyonu ve $\Lambda_0 = \{x^* \in X | (x^*, 0) \in \partial f(0) + N\}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

1. *φ konveks ve pozitif homojen fonksiyondur.*

2. *$dom\varphi = domK$'dır.*

3. *$\varphi^*(x^*) = i_{\Lambda_0}(x^*)$'dır.*

4. *$cl\varphi(x) = i^*_{\Lambda_0}(x^*)$'dır.*

Kanıt. 1. f konveks ve K konveks olduğundan Önerme 3.4.5 'ten φ konvekstir. $\forall \lambda > 0$ için

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda x) &= \inf\{f(\lambda x, y) | y \in K(\lambda x)\} \\ &= \inf\{f(\lambda x, y) | y \in \lambda K(x)\} \end{aligned}$$

olur. K, $X \times Y$'de konveks koni olduğundan $y \in \lambda K(x)$ ise $\lambda y \in \lambda K(x)$ ve dahası $y \in K(x)$ olur. Böylece

$$\varphi(\lambda x) = \inf\{f(\lambda x, \lambda y) | y \in K(x)\}$$

f pozitif homojen olduğundan $\lambda f(x, y) = f(\lambda x, \lambda y)$ olur. Dolayısıyla

$$\varphi(\lambda x) = \inf\{\lambda f(x, y) | y \in K(x)\} = \lambda\{f(x, y) | y \in K(x)\} = \lambda\varphi(x)$$

elde edilir. O halde φ pozitif homojendir.

2. f konveks, K konveks ve $domf = X \times Y$ olduğundan Sonuç 3.4.1'den $dom\varphi = domK$ olur.

3. $z=(x,y)$ olsun.

$$\begin{aligned}
\varphi^*(x^*) &= \sup_{x\in X}\{\langle x^*,x\rangle-\varphi(x)\}\\
&= \sup_{x\in X}\{\langle x^*,x\rangle-\inf_{y\in K(x)} f(x,y)\}\\
&= \sup_{x\in X}\sup_{y\in K(x)}\{\langle x^*,x\rangle-f(x,y)\}\\
&= \sup_{(x,y)\in K}\{\langle x^*,x\rangle-f(x,y)\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada f fonksiyonu alt toplamsal olduğundan ve her alt toplamsal fonksiyon 0'daki subdiferansiyelinin destek fonksiyonu olarak yazılabildiğinden

$$f(z)=\sup_{\xi\in\partial f(0)}\langle\xi,z\rangle$$

olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\varphi^*(x^*) &= \sup_{z\in K}\{\langle(x^*,0),z\rangle-\sup_{\xi\in\partial f(0)}\langle\xi,z\rangle\}\\
&= \sup_{z\in K}\inf_{\xi\in\partial f(0)}\{\langle(x^*,0),z\rangle-\langle\xi,z\rangle\}
\end{aligned}$$

olur. $\partial f(0)$ kompakt olduğundan Min.-Maks. teoreminden

$$\begin{aligned}
\varphi^*(x^*) &= \inf_{\xi\in\partial f(0)}\sup_{z\in K}\{\langle(x^*,0),z\rangle-\langle\xi,z\rangle\}\\
&= \inf_{\xi\in\partial f(0)}\sup_{z\in K}\{\langle(x^*,0)-\xi,z\rangle\}\\
&= \inf_{\xi\in\partial f(0)} i_K^*((x^*,0)-\xi)\\
&= \inf_{\xi\in\partial f(0)}\begin{cases}0, & (x^*,0)\in\xi-K^+\\ +\infty & (x^*,0)\notin\xi-K^+\end{cases}\\
&= i_{\Lambda_0}(x^*)
\end{aligned}$$

elde edilir.

4. φ has ve konveks fonksiyon olduğundan Fenchel-Moreau teoreminden $cl\varphi(x)=\varphi^{**}(x)$ olur. Öte yandan (3)'ten $\varphi^{**}(x)=i^*_{\Lambda_0}(x)$ olduğundan $cl\varphi(x)=i^*_{\Lambda_0}(x^*)$ elde edilir.

□

KAYNAKLAR

[1] Atasever, İ., *Küme Değerli Dönüşümlerin Teğet Konileri ve Diferansiyellenebilmeleri Üzerine*, Yüksek Lisans Tezi, Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir, 2006.

[2] Aubin, J.P. ve Frankowska, H., *Set-Valued Analysis*, Birkhauser, Boston, 1990.

[3] Choquet, G., *Convergences*, Annales de l'Université de Grenoble **23**, 55-112, (1947-1948).

[4] Clarke, F.H., Ledyaev, Y.S., Stern, R.J., Wolenski, P.R. *Nonsmooth Analysis and Control Theory*, Springer, Newyork, 1998.

[5] Düzce, S.A., *Küme Değerli Fonksiyonlar İçin Diferansiyel Hesap*, Yüksek Lisans Tezi, Anadolu Universitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir, 2000.

[6] Fusek, P., Klatte, D., Kummer, B. "Examples and Counterexamples in Lipschitz Analysis", *Control and Cybernetics*, **31(3)**, 472-492, 2002.

[7] Hahn, H., *Reele Funktionen*, Akademische Verlagsgesellschaft, Leibzig, 1932.

[8] Hu, S. ve Papageoergiou, N.S, *Handbook of Multivalued Analysis Volume I: Theory*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1997.

[9] Jahn, J., *Introduction to the Theory of Nonlinear Optimization*, Springer, Newyork, 2006.

[10] Kruse, A. H., *Introduction to the Theory of Block Assemblages and Related Topics in Topology*, University of Kansas, NSF- sponsored Technical Report, 1956.

[11] Luderer, B., Minchenko, L., Satsura, T., "Basic Notation", *Multivalued Analysis and Nonlineer Programming Problems with Perturbations*(Ed: Pardolos, P.), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1-5, 2002.

[12] Luderer, B., Minchenko, L., Satsura, T., "Basic Problems of Multivalued Mappings", *Multivalued Analysis and Nonlineer Programming Problems with Perturbations*(Ed: Pardolos, P.), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 5-27, 2002.

[13] Luderer, B., Minchenko, L., Satsura, T., "Proporties of Multivalued Mappings", *Multivalued Analysis and Nonlineer Programming Problems with Perturbations*(Ed: Pardolos, P.), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 27-43, 2002.

[14] Micheal, E. A., *Continuous Selections I*, Ann. of Math. **63**, 361-382, 1956.

[15] Micheal, E. A., *Continuous Selections II*, Ann. of Math. **64**, 562-580, 1956.

[16] Minchenko, L. I., "Multivalued Analysis and Differential Proporties of Multivalued Mappings and Marginal Functions", *Journal of Mathematical Sciences*, **116(3)**, 3266-3302, 2003.

[17] Ponomarev, V. I., *A New Space of Closed Sets and Multivalued Continuous Mappings of Bicompacta*, Amer. Math. Soc. Transl. **38(2)**, 95-118, 1964.

[18] Ponomarev, V. I., *Proporties of Topological Spaces Preserved Under Multivalued Continuous Mappings*, Amer. Math. Soc. Transl. **38(2)**, 110-140, 1964.

[19] Ponomarev, V. I., *On The Extension of Multivalued Mappings of Topological Spaces to Their Compactifications*, Amer. Math. Soc. Transl. **38(2)**, 141-158, 1964.

[20] Smithson, R. E., *Some General Proporties of Multivalued Functions*, Pasific J. Math., 681-703, 1965.

[21] Strother, W., *Continuous Multivalued Functions*, Boletin da Sociedade de S. Paulo **10**, 87-120, 1958.

[22] Strother, W., *On An Open Question Concerning Fixed Points*, Proc. Amer. Math. Soc. **4**, 988-993, 1953.

[23] Tokaslan, D., *Konveks Analizde Eşleniklik*, Yüksek Lisans Tezi, Anadolu Universitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir, 2009.