ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

DOĞRUSAL OLMAYAN VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMİ İLE VERİLEN KONTROL SİSTEMİN YÖRÜNGELER KÜMESİNİN ÖZELLİKLERİ VE YAKLAŞIMI

Anar HÜSEYİN

Doktora Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Temmuz-2014

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Anar Hüseyin'in **"Doğrusal Olmayan Volterra İntegral Denklemi ile Verilen Kontrol Sistemin Yörüngeler Kümesinin Özellikleri ve Yaklaşımı"** başlıklı **Matematik** Anabilim Dalındaki, Doktora Tezi 11.07.2014 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim - Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	Adı-Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	**: Prof. Dr. KAMAL N. SOLTANOV**	....
Üye	**: Prof. Dr. ELÇİN YUSUFOĞLU**	....
Üye	**: Doç. Dr. BARIŞ ERBAŞ**	....
Üye	**: Doç. Dr. SERKAN ALİ DÜZCE**	....
Üye	**: Yard. Doç. Dr. HAKKI ULAŞ ÜNAL**	....

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

DOĞRUSAL OLMAYAN VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMİ İLE VERİLEN KONTROL SİSTEMİN YÖRÜNGELER KÜMESİNİN ÖZELLİKLERİ VE YAKLAŞIMI

Anar HÜSEYİN

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Kamal N. SOLTANOV
2014, 89 Sayfa

Tezde davranışı Volterra integral denklemi ile verilen kontrol sistem incelenmektedir. Sistemin faz ve kontrol vektörüne göre doğrusal olmadığı varsayılıyor. Mümkün kontrol fonksiyonları kümesi olarak L_p, $p > 1$, uzayının merkezi orijinde olan μ yarıçaplı kapalı yuvarı seçiliyor. Kontrol sistemin yörüngeler kümesinin özellikleri ve bu kümenin kesitlerinin yaklaşık yapılandırılması problemi araştırılıyor. Yörüngeler kümesinin sürekli fonksiyonlar uzayının prekompakt alt kümesi olduğu gösterilmiş ve yörüngeler kümesinin μ ve p parametrelerine bağlılığının sürekli olduğu kanıtlanmıştır. Mümkün kontrol fonksiyonları kümesi, integral kısıtlı, geometrik kısıtlı ve Lipschitz sabitleri aynı sabitle sınırlı yeni kompakt kontrol fonksiyonları kümesi ile değiştirilir. Bu kontrol fonksiyonların ürettiği yörüngeler kümesinin kompakt küme olduğu gösterilmiştir. Sistemin yörüngeler kümesinin kesitlerinin, karma kısıtlı ve Lipschitz sabitleri aynı sabitle sınırlı kontrol fonksiyonlarının ürettiği yörüngeler kümesinin kesitleri ile yaklaşımının mümkün olduğu kanıtlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Doğrusal Olmayan Volterra İntegral Denklemi, Kontrol Sistem, İntegral Kısıtlama, Yörüngeler Kümesi, Yaklaşım.

ABSTRACT

PhD Dissertation

THE PROPERTIES AND APPROXIMATION OF THE SET OF TRAJECTORIES OF THE CONTROL SYSTEM DESCRIBED BY NONLINEAR VOLTERRA INTEGRAL EQUATION

Anar HUSEYIN

Anadolu University
Graduate School of Sciences
Mathematics Program

Supervisor: Prof. Dr. Kamal N. SOLTANOV
2014, 89 Pages

In this dissertation the control system described by a nonlinear Volterra integral equation is studied. It is assumed that the system is nonlinear with respect to the state and control vectors. The closed ball centered at the origin with radius μ in the space L_p, $p > 1$, is chosen as the set of admissible control functions set. The properties of the set of trajectories of the control system and approximate construction of its sections are investigated. It is shown that the set of trajectories is a precompact subset of the space of continuous functions and it is proved that the set of trajectories depends on μ and p continuously. The set of admissible control functions is replaced by a new compact control functions set which consists of integral constrained, geometric constrained and Lipschitz continuous control functions, the Lipschitz constant of which is bounded. It is shown that the set of trajectories generated by these control functions is a compact set. It is proved that the sections of the set of trajectories can be approximated by the sections of the set of trajectories, generated by the mixed constrained and Lipschitz continuous control functions, the Lipschitz constant of which is bounded.

Keywords: Nonlinear Volterra Integral Equation, Control System, Integral Constraint, Set of Trajectories, Approximation.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanması sürecinde gösterdikleri ilgiden dolayı danışman hocam Prof. Dr. Kamal N. SOLTANOV 'a ve tez izleme komitesi üyelerine teşekkür ederim.

Anar HÜSEYİN

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}^n$	: n-boyutlu Euclidean uzay
$\|x\|$	: $x \in \mathbb{R}^n$ vektörünün Euclidean normu
$b(\mathbb{R}^n)$	: $\mathbb{R}^n$ uzayının boş kümeden farklı, sınırlı alt kümeler ailesi
$B_n(x_0, r)$	: $\mathbb{R}^n$ uzayında merkezi x_0 noktası, yarıçapı r olan kapalı yuvar
$B_n(r)$	: $\mathbb{R}^n$ uzayında merkezi orijin, yarıçapı r olan kapalı yuvar
B_n	: $\mathbb{R}^n$ uzayında kapalı birim yuvar
$d_n(x, E)$	: $\mathbb{R}^n$ uzayında x noktasından E kümesine olan uzaklık
$h_n(D, E)$	: $\mathbb{R}^n$ uzayında D ve E kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklık
$L_p\big([t_0, \theta]; \mathbb{R}^m\big)$	: L_p normu sonlu olan ölçülebilir $x(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonlar uzayı
$\|u(\cdot)\|_p$	: $u(\cdot) \in L_p\big([t_0, \theta]; \mathbb{R}^m\big)$ fonksiyonunun normu
$C\big([t_0, \theta]; \mathbb{R}^n\big)$	: sürekli $x(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonlar uzayı
$\|x(\cdot)\|_C$	: $x(\cdot) \in C\big([t_0, \theta]; \mathbb{R}^n\big)$ fonksiyonunun normu
$u_h(\cdot)$	: $h \in (0, 1)$ için $u(\cdot)$ fonksiyonunun Steklov fonksiyonu
$\mathbf{X}_{p,\mu_0}$	: sistemin yörüngeler kümesi
$\mathbf{X}_{p,\mu_0}(t)$	: $\mathbf{X}_{p,\mu_0}$ yörüngeler kümesinin t anındaki kesiti
U_{p,μ_0}	: mümkün kontrol fonksiyonları kümesi
$B_C(1)$	: $C\left([t_0, \theta]; \mathbb{R}^n\right)$ uzayının kapalı birim yuvarı
$h_C(U, V)$	: $C\left([t_0, \theta]; \mathbb{R}^n\right)$ uzayındaki U ve V kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklık
$\hbar_1(G, W)$	: $G \subset L_{p_1}\big([t_0, \theta]; \mathbb{R}^m\big)$ ve $W \subset L_{p_2}\big([t_0, \theta]; \mathbb{R}^m\big)$ kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklık
$B_{L_r}(\mu_0)$	: $L_r\left([t_0, \theta]; \mathbb{R}^m\right)$ uzayında merkezi orijin ve yarıçapı μ_0 olan kapalı yuvar
U^H_{p,μ_0}	: integral ve geometrik kısıtlı kontrol fonksiyonlar kümesi
$\mathbf{X}^H_{p,\mu_0}$	: sistemin U^H_{p,μ_0} kontrol fonksiyonları tarafından üretilen yörüngeler kümesi
$\mathbf{X}^H_{p,\mu_0}(t)$	: $\mathbf{X}^H_{p,\mu_0}$ yörüngeler kümesinin t anındaki kesiti

$U_{p,\mu_0}^{H,lip}$: integral ve geometrik kısıtlı olan Lipschitz sürekli kontrol fonksiyonlar kümesi

$\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip}$: sistemin $U_{p,\mu_0}^{H,lip}$ kontrol fonksiyonları tarafından üretilen yörüngeler kümesi

$\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip}(t)$: $\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip}$ yörüngeler kümesinin t anındaki kesiti

$U_{p,\mu_0}^{H,lip,R}$: integral ve geometrik kısıtlı olan ve Lipschitz sabiti R den büyük olmayan Lipschitz sürekli kontrol fonksiyonları kümesi

$\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R}$: sistemin $U_{p,\mu_0}^{H,lip,R}$ kontrol fonksiyonları tarafından üretilen yörüngeler kümesi

$\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R}(t)$: $\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R}$ yörüngeler kümesinin t anındaki kesiti

GİRİŞ

Tez konusunun güncelliği. Genelde, doğada meydana gelen olay ve süreçlerin matematiksel modelleri çeşitli denklemlerle ifade edilmektedir. İntegral denklemler fizikte, mekanikte, biyolojide, ekonomide ortaya çıkmaktadır. Doğrusal olmayan integral denklemler çağdaş matematikte birçok sürecin global davranışı incelenirken kendisini göstermektedir. Bundan dolayı doğrusal olmayan integral denklemlerin incelenmesi teori ve uygulamada çok önemlidir.

Matematiğin yoğun araştırma konularından biri olan integral denklemler teorisi fonksiyonel analizin bazı konuları üzerine yapılmış araştırmalar sonucu ortaya çıkmıştır. Bilindiği gibi, adi diferansiyel denklem için başlangıç değer probleminin çözümü, aynı zamanda belli bir Volterra integral denkleminin çözümü, adi diferansiyel denklem için sınır değer probleminin çözümü ise uygun Urysohn denkleminin çözümü olarak ele alınabilir.

Doğrusal olmayan integral denklemler ilk olarak [1] - [3] 'te ele alınmıştır ve [4], [5] 'te doğrusal olmayan integral denklemler analitik yöntemlerle incelenmiştir. Doğrusal olmayan integral denklemlerin çözümlerinin varlığının ve tekliğinin kanıtlanmasında, doğrusal olmayan dönüşümlerin sabit noktalarının varlığı ve tekliği önemli yer tutmaktadır. Doğal olarak, bu denklemlerin çözümlerinin varlığı ve tekliğinin kanıtında Schauder ve Banach sabit nokta teoremleri kullanılmaktadır (bkz., [6] - [9]). Ayrıca, doğrusal olmayan integral denklemlerin çözümlerinin varlığı ve tekliğinin kanıtında farklı topolojik ve varyasyon yöntemleri de kullanılmaktadır (bkz., [10] - [16]). Doğrusal olmayan integral denklemlerin çözümlerinin varlığı, tekliği, nümerik yöntemlerle hesaplanması ve diğer özellikleri [17] - [44] 'te ele alınmıştır.

Doğada meydana gelen bazı olaylarda çoğu zaman dışarıdan müdahale de söz konusudur. Eğer bu müdahale bizim kontrolümüz altında ise, yani başka deyişle müdahaleyi biz yapıyorsak bu olaya kontrolü olan olay denir. Eğer yapılan müdahale bizim yetkimiz dışında ise, başka deyişle müdahaleyi başka birileri yapıyorsa, o halde olaya belirsizlik içeren olay denir. Biz ele aldığımız olaylarda müdahale yetkisinin bizim elimizde olduğunu, yani olayın kontrolü olan bir olay olduğunu varsayacağız. Tezde, davranışı doğrusal olmayan integral denklem ile ifade edilen kontrol sistemler incelenmektedir. Davranışı doğrusal olmayan integral denklem ile ifade edilen kontrol sistemler fizikte, mekanikte ve bilimin başka dallarında görülmektedir.

Kontrol sistemler bazı özelliklerine göre sınıflandırılabilir. Eğer sistemin davranışını ifade eden denklem doğrusal ise, sisteme doğrusal kontrol sistem denir. Eğer kontrol sistemin davranışını ifade eden denklem doğrusal olmayan denklem ise, sisteme doğrusal olmayan kontrol sistem denir. Kontrol sistemlerin başka bir sınıflandırılması ise kontrol fonksiyonları üzerine konulan kısıtlamaya göre yapılmaktadır. Eğer kontrol fonksiyonu üzerine konulan kısıtlama geometrik kısıtlama ise, o halde kontrol sisteme geometrik kısıtlaması olan kontrol sistem denir. Eğer kontrol fonksiyonları üzerine konulan kısıtlama integral kısıtlama ise, o halde kontrol sisteme integral kısıtlaması olan kontrol sistem denir. Eğer kontrol fonksiyonları üzerine aynı zamanda geometrik ve integral kısıtlama konulmuşsa, o halde kontrol sisteme karmaşık kısıtlaması olan kontrol sistem denir.

Kontrol sistemlerin en önemli yapılarından biri, sistemin tüm mümkün kontrol fonksiyonları tarafından üretilen yörüngeler kümesidir. Kontrol sistemin yörüngeler kümesinin özelliklerini önceden bilmek ve bu kümeyi yaklaşık hesaplamak sistem hakkında önbilgiler elde etmeye imkan sağlıyor.

Davranışı adi diferansiyel denklemle verilen kontrol sistemler literatürde geniş bir biçimde incelenmiştir (bkz., [9], [45] - [69]).

Kontrol sistemler teorisinin en önemli sonuçlarından biri L.S.Pontryagin 'in maksimum prensibidir. Bu prensip, verilen değer fonksiyoneline maksimum değerini veren optimal sürecin sağlayacağı bir gerek koşuldur (bkz., [70]).

Davranışı adi diferansiyel denklem ile verilen kontrol sistemlerin tüm yörüngelerinin grafiklerinin oluşturduğu kümeye sistemin integral tüneli, integral tünelin zamana göre kesitlerine ise sistemin erişim kümeleri denir. Davranışı adi diferansiyel denklem ile verilen ve kontrol fonksiyonları geometrik kısıtlı olan kontrol sistemlerin integral tünelinin ve erişim kümelerinin farklı topolojik özellikleri ve sistemin parametrelerine bağlılığı [45] - [51] 'de incelenmiştir. [52] - [54] 'te ise davranışı adi diferansiyel denklem ile verilen ve kontrol fonksiyonları geometrik kısıtlı olan kontrol sistemlerin integral tünelinin ve erişim kümelerinin yaklaşık hesaplanması için hesaplama yöntemleri verilmektedir. Ayrıca, davranışı adi diferansiyel denklem ile verilen ve kontrol fonksiyonları geometrik kısıtlı olan kontrol sistemler diferansiyel içermeler teorisi kapsamında da incelenmektedir (bkz, [45] - [48], [51] - [53]).

Kontrol fonksiyonları üzerinde integral kısıtlaması, genelde enerji, yakıt ve finans kaynaklı kontrolü olan sistemlerde ortaya çıkmaktadır. Örneğin, kütlesi değişken olan uçan araçların hareketinin matematiksel modeli (kullanılan yakıt tükenirken, aracın kütlesi değişir), kontrol fonksiyonları integral kısıtlı olan kontrol sistem olarak verilmektedir (bkz., [55] - [57], [71], [72]). Davranışı adi diferansiyel denklem ile verilen ve kontrol fonksiyonları integral kısıtlı olan kontrol sistemlerin integral tünelinin ve erişim kümelerinin topolojik özellikleri ve sistemin parametrelerine bağımlılığı [61] - [69], [73] 'de, erişim kümelerinin yaklaşık yapılandırılması için hesaplama yöntemleri ve algoritmalar [58] - [60] 'da verilmiştir.

Tezde, davranışı doğrusal olmayan Volterra integral denklemi ile verilen ve kontrol fonksiyonları integral kısıtlı olan kontrol sistemlerin yörüngeler kümesi incelenmektedir.

Tezin amacı. Tezin amacı, davranışı doğrusal olmayan Volterra integral denklemi ile verilen ve kontrol fonksiyonları $L_p([t_0, \theta]; \mathbb{R}^m)$ uzayının merkezi orijinde, yarıçapı μ_0 kapalı yuvarı olan kontrol sistemlerin yörüngeler kümesinin topolojik özelliklerini ve yörüngeler kümesinin sistemin farklı parametrelerine bağlılığını incelemektir. Bunun yanı sıra, verilen mümkün kontrol fonksiyonlar kümesini daha basit yapısı olan kontrol fonksiyonlar kümesi ile değişerek, sistemin yörüngeler kümesi ile basit yapılı kontrol fonksiyonlara karşılık gelen yörüngeler kümesi arasındaki Hausdorff uzaklığını değerlendirmektir.

Araştırma yöntemleri. Tezde ele alınan problemlerin incelenmesinde fonksiyonel analizin, küme değerli analizin, reel analizin, diferansiyel denklemler teorisinin, integral denklemler teorisinin ve kontrol sistemler teorisinin yapı ve yöntemleri kullanılmaktadır.

Bilimsel yenilik. Tez kapsamında yapılan araştırmalarda aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

1. Mümkün kontrol fonksiyonların ürettiği yörüngeler kümesinin önce sürekli fonksiyonlar uzayında sınırlı ve daha sonra prekompakt küme olduğu kanıtlanmıştır. Yörüngeler kümesinin kapalı küme olmayabileceği örneklenmiştir.

2. Yörüngeler kümesinin, kontrol kaynağı kısıtlayan μ_0 parametresine göre Lipschitz sürekli, kontrol fonksiyonların seçildiği L_p uzayının p parametresine göre ise sürekli olduğu gösterilmiştir. Yörüngeler kümesinin kesitlerinin oluşturduğu küme değerli dönüşümün sürekli olduğu ispatlanmış ve yörüngeler kümesinin çapı için bir üst değerlendirme elde edilmiştir.

3. Mümkün kontrol fonksiyonları kümesi küçültülerek integral kısıtın yanı sıra, geometrik kısıtlı ve Lipschitz sabitleri aynı sayı ile sınırlı olan Lipschitz sürekli yeni kontrol fonksiyonlar kümesi tanımlanmıştır. Birkaç adımda, kontrol fonksiyonların geometrik kısıtını ayarlayan sabit ve Lipschitz sabitlerini kısıtlayan sayı belli bir

biçimde seçildiğinde, sistemin yörüngeler kümesi ile tanımlanan yeni kontrol fonksiyonların ürettiği yörüngeler kümesi arasındaki Hausdorff uzaklığın yeteri kadar küçük yapılabileceği kanıtlanmıştır.

Tezin teorik ve pratik değeri. Tez de elde edilmiş sonuçlar yenidir ve teorik olarak davranışı doğrusal olmayan Volterra integral denklemi ile verilen ve kontrol etkisi integral kısıtlı olan kontrol sistemler teorisine katkı sağlamaktadır. Yörüngeler kümesinin sistemin çeşitli parametrelerine sürekli bağlantılı olması, pratik uygulamalardaki matematiksel modelleme sürecinde bu parametrelerin ölçümünde oluşabilecek küçük hataların yörüngeler kümesini az etkileyeceğini göstermektedir. Sistemin yörüngeler kümesi ile yeni kontrol fonksiyonları kümesinin, yani integral kısıtla yanı sıra, geometrik kısıtlı olup Lipschitz sabitleri aynı sayı ile kısıtlı Lipschitz sürekli kontrol fonksiyonların ürettiği yörüngeler kümesi arasındaki Hausdorff uzaklığın yeteri kadar küçük yapılabilir olması, yörüngeler kümesinin yaklaşık yapılandırılmasında kullanılabilir.

Tezin yapısı. Tez Giriş kısmından ve 4 bölümden oluşmaktadır.

Giriş kısmında tezin karakterizasyonu verilmektedir.

1. bölüm iki alt bölümden oluşmaktadır ve bu anabölümde tezde kullanılan bazı tanım ve teoremler verilmektedir.

Alt bölüm 1.1 'de küme dizilerinin üst ve alt limitleri tanımlanmış ve özellikleri ifade edilmiştir.

Alt bölüm 1.2 'de ise ölçülebilir fonksiyonların Steklov ortalaması tanımlanmış ve özellikleri verilmiştir.

2. bölüm dört alt bölümden oluşmaktadır ve bu bölümde sistemin yörüngeler kümesi tanımlanarak, yörüngeler kümesinin temel topolojik özellikleri incelenmektedir.

Alt bölüm 2.1 'de sistemin sağlayacağı temel koşullar verilmiş ve sistemin mümkün kontrol fonksiyonları kümesi ile, bu kontrol fonksiyonların ürettiği yörüngeler kümesi tanımlanmıştır.

Alt bölüm 2.2 'de her mümkün kontrol fonksiyonun ürettiği yörüngenin var olduğu ve her mümkün kontrol fonksiyonun yalnız ve yalnız tek yörünge ürettiği kanıtlanmıştır.

Alt bölüm 2.3 'te yörüngeler kümesinin sürekli fonksiyonlar uzayında sınırlı küme olduğu ispatlanmıştır.

Alt bölüm 2.4 'te ise yörüngeler kümesinin sürekli fonksiyonlar uzayında prekompakt küme olduğu gösterilmiş ve bu kümenin kapalı olmadığı örneklenmiştir.

2. bölümde elde edilmiş sonuçlar [74] 'te yayınlanmıştır.

3. bölüm üç alt bölümden oluşmaktadır. Bu bölümde yörüngeler kümesinin sistemin parametrelerine bağlantısı araştırılmaktadır.

Alt bölüm 3.1 'de yörüngeler kümesinin kesitlerinin oluşturduğu küme değerli dönüşümün sürekli olduğu kanıtlanmış ve yörüngeler kümesinin çapı için üst değerlendirme elde edilmiştir.

Alt bölüm 3.2 'de yörüngeler kümesinin, sisteme verilen kontrol etkinin integral kısıtını gösteren μ_0 parametresine göre Lipschitz sürekli olduğu kanıtlanmıştır.

Alt bölüm 3.3 'te ise yörüngeler kümesinin, kontrol fonksiyonların seçildiği L_p uzayının p parametresine göre sürekli olduğu ispatlanmıştır.

3. bölümde elde edilmiş sonuçlar [75] 'te yayınlanmıştır.

4. bölüm beş alt bölümden oluşmaktadır. Bu bölümde mümkün kontrol fonksiyonları kümesi, sürekli fonksiyonlar uzayında kompakt olan yeni kontrol fonksiyonları kümesi ile değiştirilerek, yörüngeler kümesinin bir yaklaşımı elde edilmiştir.

Alt bölüm 4.1 'de kontrol fonksiyonları integral kısıtı olmakla birlikte, aynı zamanda geometrik kısıtlı da olan yeni kontrol fonksiyonları kümesi tanımlanmıştır. Sistemin yörüngeler kümesi ile yeni, yani integral ve geometrik kısıtlı kontrol fonksiyonların ürettiği yörüngeler kümesi arasındaki Hausdorff uzaklık için değerlendirme elde edilmiştir. Geometrik kısıtı ayarlayan sabit yeterince büyük iken sistemin yörüngeler kümesi ile integral ve geometrik kısıtlı kontrol fonksiyonların ürettiği yörüngeler kümesi arasındaki Hausdorff uzaklığın yeteri kadar küçük yapılabileceği kanıtlanmıştır.

Alt bölüm 4.2 'de integral ve geometrik kısıtlı kontrol fonksiyonları kümesi daraltılarak integral, geometrik kısıtlı ve Lipschitz sürekli kontrol fonksiyonları kümesi ele alınmıştır. İntegral ve geometrik kısıtlı kontrol fonksiyonların ürettiği yörüngeler kümesi ile, integral, geometrik kısıtlı ve Lipschitz sürekli kontrol fonksiyonların ürettiği yörüngeler kümesi arasındaki Hausdorff uzaklığın sıfır olduğu gösterilmiştir.

Alt bölüm 4.3 'te sürekli fonksiyonlar uzayında kompakt altküme olan yeni kontrol fonksiyonlar kümesi tanımlanmıştır. Bu küme, integral, geometrik kısıtlı olmak üzere Lipschitz sabitleri aynı sayı ile sınırlı olan Lipschitz sürekli fonksiyonlardan oluşmaktadır.

Alt bölüm 4.4 'te integral, geometrik kısıtlı ve Lipschitz sabitleri aynı sayı ile sınırlı olan Lipschitz sürekli kontrol fonksiyonların ürettiği yörüngeler kümesinin sürekli fonksiyonlar uzayında kompakt alt küme olduğu ispatlanmıştır. Bu bölümde, integral, geometrik kısıtlı ve Lipschitz sürekli kontrol fonksiyonların ürettiği yörüngeler kümesinin kesitleri ile integral, geometrik kısıtlı ve Lipschitz sabitleri aynı sayı ile sınırlı olan Lipschitz sürekli kontrol fonksiyonların ürettiği yörüngeler kümesinin kesitleri arasındaki Hausdorff uzaklığın yeteri kadar küçük yapılabileceği kanıtlanmıştır.

Alt bölüm 4.5 'te daha önce alt bölüm 4.1, alt bölüm 4.2 ve alt bölüm 4.4 'te elde edilmiş sonuçlar değerlendirilmiştir. Kontrol fonksiyonları integral, geometrik kısıtlı ve Lipschitz sabitleri aynı sayı ile sınırlı olan Lipschitz sürekli kontrol fonksiyonları kümesinin ürettiği yörüngeler kümesi için geometrik kısıtı ayarlayan sabit, Lipschitz sürekli fonksiyonların Lipschitz sabitlerini kısıtlayan sayı uygun biçimde seçildiğinde, sistemin yörüngeler kümesinin kesitleri ile her biri kompakt küme olan integral, geometrik kısıtlı ve Lipschitz sabitleri aynı sayı ile sınırlı olan Lipschitz sürekli kontrol fonksiyonların ürettiği yörüngeler kümesinin kesitleri arasındaki Hausdorff uzaklığın yeteri kadar küçük yapılabileceği ispatlanmıştır.

4. bölümde elde edilmiş sonuçlar [76] 'da yayınlanmıştır.

1 KÜME DİZİLERİ VE STEKLOV FONKSİYONU

1.1 Küme Dizisinin Alt Ve Üst Limiti

Bu bölümde, küme değerli analizde bilinen ve tezde kullanacağımız bazı temel tanım ve yapıları tanıtacağız. n boyutlu Euclidean uzayı $\mathbb{R}^n$ olarak göstereceğiz. $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ için $\|x\|$ ile verilen x vektörünün Euclidean normu gösterilir ve

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

olarak tanımlanır.

$x_* \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \geq 0$ için

$$B_n(x_*, \alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_*\| \leq \alpha\},$$

$$B_n(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq \alpha\}, \quad B_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$$

olarak gösterelim.

Böylece, $B_n(x_*, \alpha)$ merkezi x_* noktasında, yarıçapı α olan kapalı yuvarı, $B_n(\alpha)$ merkezi orijinde, yarıçapı α olan kapalı yuvarı, B_n ise kapalı birim yuvarı göstermektedir.

Verilen $D \subset \mathbb{R}^n$, $E \subset \mathbb{R}^n$ kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklık $h_n(D, E)$ olarak gösterilir ve

$$h_n(D, E) = \max\{\sup_{x \in D} d_n(x, E), \sup_{y \in E} d_n(y, D)\}$$

olarak tanımlanır (bkz., [77] - [79]).

Burada $d_n(x, E)$, $x \in \mathbb{R}^n$ noktası ile $E \subset \mathbb{R}^n$ kümesi arasındaki uzaklığı gösteriyor ve

$$d_n(x, E) = \inf\{\|x - y\| : y \in E\}$$

olarak tanımlıdır.

Eğer $E = \{x\}$, $D = \{y\}$ ise $h_n(E, D) = \|x - y\|$ olur.

Hausdorff uzaklığı için aşağıdaki önerme doğrudur.

Önerme 1.1.1 *Keyfi $D \subset \mathbb{R}^n$ ve $E \subset \mathbb{R}^n$ kümeleri için*

$$h_n(D, E) = \inf\{r > 0 : D \subset E + rB_n, E \subset D + rB_n\}$$

olur.

Benzer olarak, herhangi bir metrik uzayın alt kümeleri arasında Hausdorff uzaklığı tanımlanabilir (bkz., [77] - [79]).

$\mathbb{R}^n$ uzayının boştan farklı, kompakt alt kümeleri ailesini $comp\,(\mathbb{R}^n)$ ile gösterelim. O halde $\big(comp\,(\mathbb{R}^n), h_n(\cdot,\cdot)\big)$ uzayı bir tam metrik uzaydır. (bkz., [49], [77], [78]).

$\mathbb{R}^n$ uzayının boştan farklı, sınırlı alt kümeleri ailesini $b(\mathbb{R}^n)$ ile gösterelim. Bu durumda $h_n(\cdot,\cdot)$ fonksiyonu $b(\mathbb{R}^n)$ 'de bir yarı metrik olur.

Öğeleri kümelerden oluşan diziler için üst limit, alt limit ve limit kavramları verelim ve bu limitlerin bazı özelliklerini ifade edelim (bkz., [77], [78]).

Tanım 1.1.2 *[77], [78] Her $k = 1, 2, \ldots$ için $E_k \subset \mathbb{R}^n$ olsun. $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisinin üst limiti*

$$\limsup_{k\to\infty} E_k$$

ile gösterilir ve

$$\limsup_{k\to\infty} E_k = \{f \in \mathbb{R}^n : \liminf_{k\to\infty} d_n(f, E_k) = 0\}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 1.1.3 *[77], [78] Her $k = 1, 2, \ldots$ için $E_k \subset \mathbb{R}^n$ olsun. $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisinin alt limiti*

$$\liminf_{k\to\infty} E_k$$

ile gösterilir ve

$$\liminf_{k\to\infty} E_k = \{f \in \mathbb{R}^n : \lim_{k\to\infty} d_n(f, E_k) = 0\}$$

olarak tanımlanır.

Önerme 1.1.4 *Her $k = 1, 2, \ldots$ için $E_k \subset \mathbb{R}^n$ olsun. O halde,*

$$\liminf_{k\to\infty} E_k \subset \limsup_{k\to\infty} E_k$$

olur.

Şimdi $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisinin $k \to \infty$ iken limitini tanımlayalım.

Tanım 1.1.5 *[77], [78] Her $k = 1, 2, \ldots$ için $E_k \subset \mathbb{R}^n$ olsun. Eğer*

$$\limsup_{k\to\infty} E_k = \liminf_{k\to\infty} E_k = E_0$$

ise $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisinin $k \to \infty$ iken limiti vardır denir ve $E_0 = \lim\limits_{k\to\infty} E_k$ olarak gösterilir.

Küme dizilerinin üst ve alt limitlerini karakterize eden aşağıdaki önermeler de doğrudur.

Önerme 1.1.6 *$r > 0$, her $k = 1, 2, \dots$ için $E_k \subset B_n(r)$ ve*

$$\limsup_{k\to\infty} E_k = E^*$$

olsun. O halde $E^* \subset B_n(r)$ boş kümeden farklı, kapalı ve sınırlı kümedir.

Ayrıca, her $\varepsilon > 0$ için $k > K(\varepsilon)$ iken

$$E_k \subset E^* + \varepsilon B_n$$

olacak biçimde $K(\varepsilon) > 0$ vardır.

Önerme 1.1.7 *$r > 0$, her $k = 1, 2, \dots$ için $E_k \subset B_n(r)$ ve*

$$\liminf_{k\to\infty} E_k = E_*$$

olsun. O halde $E_* \subset B_n(r)$ kapalı ve sınırlı kümedir.

Ayrıca, her $\varepsilon > 0$ için $k > K(\varepsilon)$ iken

$$E_* \subset E_k + \varepsilon B_n$$

olacak biçimde $K(\varepsilon) > 0$ vardır.

Önerme 1.1.6 ve Önerme 1.1.7 'in sonucu olan ve kümeler dizisinin limitini karakterize eden aşağıdaki önerme elde edilir.

Önerme 1.1.8 *$r > 0$, her $k = 1, 2, \dots$ için $E_k \subset B_n(r)$ ve*

$$\lim_{k\to\infty} E_k = E_0$$

olsun. O halde $E_0 \subset B_n(r)$ boş kümeden farklı, kapalı ve sınırlı kümedir.

Ayrıca, her $\varepsilon > 0$ için $k > K(\varepsilon)$ iken

$$E_k \subset E_0 + \varepsilon B_n, \quad E_0 \subset E_k + \varepsilon B_n$$

olacak biçimde $K(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır.

Önerme 1.1.8 'den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 1.1.9 *$r > 0$, her $k = 1, 2, \dots$ için $E_k \subset B_n(r)$ ve*

$$\lim_{k\to\infty} E_k = E_0$$

olsun. O halde

$$\lim_{k\to\infty} h_n(E_k, E_0) = 0$$

olur.

Şimdi özel bir küme dizisinin limitini karakterize eden bir önerme verelim.

Önerme 1.1.10 *$r > 0$, her $k = 1, 2, \ldots$ için $E_k \subset B_n(r)$, $E_k \subset E_{k+1}$ ve $E_* = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ olsun. O halde,*

$$clE_* = \lim_{k\to\infty} E_k$$

olur.

Kanıt. Önce,

$$\limsup_{k\to\infty} E_k = \liminf_{k\to\infty} E_k \tag{1.1.1}$$

olduğunu kanıtlayalım.

Önerme 1.1.4 gereği

$$\liminf_{k\to\infty} E_k \subset \limsup_{k\to\infty} E_k \tag{1.1.2}$$

olur. Şimdi,

$$\limsup_{k\to\infty} E_k \subset \liminf_{k\to\infty} E_k \tag{1.1.3}$$

olduğunu kanıtlayalım.

Keyfi $v_* \in \lim_{k\to\infty} \sup E_k$ alalım ve sabitleyelim. O halde tanım gereği,

$$\liminf_{k\to\infty} d_n(v_*, E_k) = 0$$

olur. Bu durumda $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisinin $i \to \infty$ iken

$$\lim_{i\to\infty} d_n(v_*, E_{k_i}) = 0 \tag{1.1.4}$$

olacak biçimde $\{E_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ alt küme dizisi vardır.

Her $k = 1, 2, \ldots$ için $\alpha_k = d_n(v_*, E_k)$ olsun. Keyfi $k = 1, 2, \ldots$ için $E_k \subset E_{k+1}$ olduğundan $0 \leq \alpha_{k+1} \leq \alpha_k$ olur. Yani $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi pozitif terimli azalan dizidir ve bundan dolayı yakınsaktır. (1.1.4) 'ten $i \to \infty$ iken $\alpha_{k_i} \to 0$ olur. O halde $k \to \infty$ iken $\alpha_k \to 0$, yani $\lim_{k\to\infty} d_n(v_*, E_k) = 0$ olur. Bu ise $v_* \in \liminf_{k\to\infty} E_k$ olması demektir. $v_* \in \limsup_{k\to\infty} E_k$ keyfi olarak seçildiğinden (1.1.3) 'ün doğru olduğu kanıtlanmış olur. (1.1.2) ve (1.1.3) kapsamalarından (1.1.1) eşitliğinin doğru olduğu elde edilir.

Ayrıca, (1.1.1) eşitliğinden, $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ küme dizisinin limitinin var olduğu elde edilir.

Şimdi

$$clE_* \subset \liminf_{k\to\infty} E_k \tag{1.1.5}$$

olduğunu gösterelim. Önce

$$E_* \subset \liminf_{k\to\infty} E_k \tag{1.1.6}$$

olduğunu görelim. Keyfi $v_* \in E_*$ alalım ve sabitleyelim. O halde $v_* \in \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ olduğundan $v_* \in E_{k_*}$ olacak şekilde $k_* > 0$ vardır. Her $k = 1, 2, \ldots$ için $E_k \subset E_{k+1}$ olduğundan her $k \geq k_*$ için $v_* \in E_k$ ve dolayısıyla keyfi $k \geq k_*$ için $d_n(v_*, E_k) = 0$ olur. Bu durumda

$$\lim_{k\to\infty} d_n(v_*, E_k) = 0$$

'dır ve tanım gereği $v_* \in \liminf_{k\to\infty} E_k$ olur. $v_* \in E_*$ keyfi seçildiğinden, (1.1.6) kapsamasının doğru olduğu elde edilir. $\liminf_{k\to\infty} E_k$ kümesi kapalı olduğundan, (1.1.6) 'dan, (1.1.5) kapsamasının doğru olduğu elde edilir.

Son olarak

$$\liminf_{k\to\infty} E_k \subset clE_* \tag{1.1.7}$$

olduğunu kanıtlayalım.

Herhangi bir $v_* \in \liminf_{k\to\infty} E_k$ alalım ve sabitleyelim. O halde tanım gereği

$$\lim_{k\to\infty} d_n(v_*, E_k) = 0 \tag{1.1.8}$$

olduğu elde edilir.

Keyfi $\varepsilon > 0$ alalım ve sabitleyelim. O halde (1.1.8) 'den her $k \geq k_*$ için $d_n(v_*, E_k) < \varepsilon$ olacak biçimde $k_* > 0$ vardır. $d_n(v_*, E_{k_*}) < \varepsilon$ olduğundan

$$v_* \in E_{k_*} + \varepsilon B_n$$

olur. Bu durumda, $f_* \in E_{k_*}$ ve $b_* \in B_n$ olmak üzere

$$v_* = f_* + \varepsilon b_* \tag{1.1.9}$$

olarak bulunur. $f_* \in E_{k_*}$ olduğundan $f_* \in \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ olur. Ayrıca $b_* \in B_n$ olduğundan, (1.1.9) 'dan

$$v_* \in \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k + \varepsilon B_n \tag{1.1.10}$$

olur. $\varepsilon > 0$ keyfi sabitlenmiş olduğundan (1.1.10) 'dan $v_* \in cl\Big(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k\Big)$ yani $v_* \in cl(E_*)$ olduğu elde edilir. $v_* \in \liminf\limits_{k\to\infty} E_k$ keyfi seçildiğinden (1.1.7) kapsamasının doğru olduğu elde edilir.

(1.1.1) eşitliğinden, (1.1.5) ve (1.1.7) kapsamalarından ise önermenin doğru olduğu kanıtlanır. ■

Önerme 1.1.10 'dan aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 1.1.11 *$r > 0$, her $k = 1, 2, \ldots$ için $E_k \subset B_n(r)$, $E_k \subset E_{k+1}$ ve $E_* = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ olsun. O halde, her $\varepsilon > 0$ için $k > k(\varepsilon)$ iken*

$$h_n(E_*, E_k) < \varepsilon$$

olacak biçimde $k(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır.

Kanıt. Önerme 1.1.10 gereği

$$clE_* = \lim_{k\to\infty} E_k$$

olur. O halde Sonuç 1.1.9 'dan

$$\lim_{k\to\infty} h_n(clE_*, E_k) = 0 \tag{1.1.11}$$

olarak bulunur.

$$h_n(E_*, E_k) \leq h_n(clE_*, E_*) + h_n(clE_*, E_k)$$

ve

$$h_n(clE_*, E_*) = 0$$

olduğundan, (1.1.11) 'den

$$\lim_{k\to\infty} h_n(E_*, E_k) = 0 \tag{1.1.12}$$

olur. (1.1.12) 'den sonuç kanıtlanır. ■

1.2 Steklov Fonksiyonu

$p \in [1, +\infty)$ için $L_p\left([t_0, \theta]; \mathbb{R}^m\right)$ uzayı $\|u(\cdot)\|_p < \infty$ olacak biçimde ölçülebilir $u(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonlar uzayıdır. Burada

$$\|u(\cdot)\|_p = \left(\int\limits_{t_0}^{\theta} \|u(t)\|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

olarak tanımlıdır.

$C\left([t_0,\theta];\mathbb{R}^m\right)$ ile sürekli $x(\cdot):[t_0,\theta]\to\mathbb{R}^m$ fonksiyonlar uzayını gösterelim. $x(\cdot)\in C\left([t_0,\theta];\mathbb{R}^m\right)$ fonksiyonunun normu

$$\|x(\cdot)\|_C=\max\left\{\ \|x(t)\|:t\in[t_0,\theta]\ \right\}$$

olarak tanımlanır.

$C\left([t_0,\theta];\mathbb{R}^m\right)$ uzayının merkezi orijinde ve yarıçapı ν olan kapalı yuvarını $B_C\left(\nu\right)$ olarak gösterelim. O halde

$$B_C\left(\nu\right)=\left\{x(\cdot)\in C\left([t_0,\theta];\mathbb{R}^m\right):\|x(\cdot)\|_C\leq\nu\right\}$$

olur.

$C\left([t_0,\theta];\mathbb{R}^m\right)$ uzayının kapalı birim yuvarını $B_C\left(1\right)$ olarak göstereceğiz, yani

$$B_C\left(1\right)=\left\{x(\cdot)\in C\left([t_0,\theta];\mathbb{R}^m\right):\|x(\cdot)\|_C\leq 1\right\}$$

olur.

$P\subset C\left([t_0,\theta];\mathbb{R}^m\right),\ Q\subset C\left([t_0,\theta];\mathbb{R}^m\right)$ kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığı

$$h_C(P,Q)=\max\{\sup_{x(\cdot)\in P}d_C(x(\cdot),Q),\ \sup_{y(\cdot)\in Q}d_C(y(\cdot),P)\}$$

olarak tanımlanır. Burada

$$d_C(x(\cdot),y(\cdot))=\|x(\cdot)-y(\cdot)\|_C$$

olmak üzere

$$d_C(x(\cdot),Q)=\inf\left\{d_C(x(\cdot),y(\cdot)):y(\cdot)\in Q\right\}$$

olarak tanımlıdır.

Önce, Lebesgue yakınsaklık teoremini ifade edelim.

Önerme 1.2.1 (Lebesgue Yakınsaklık Teoremi) *[9], [80] $p\geq 1$, keyfi $i=1,2,\ldots$ için $f_i(\cdot)\in L_p\big([t_0,\theta];\mathbb{R}^m\big)$ ve hemen hemen her $t\in[t_0,\theta]$ için $\lim_{i\to\infty}f_i(t)=f_*(t)$ olsun. Ayrıca $g(\cdot)\in L_p\big([t_0,\theta];[0,\infty)\big)$ olmak üzere, keyfi $i=1,2,\ldots$ ve hemen hemen her $t\in[t_0,\theta]$ için $\|f_i(t)\|\leq g(t)$ olsun. O halde*

$$\lim_{i\to\infty}\|f_i(\cdot)-f_*(\cdot)\|_p=0$$

olur.

Şimdi de verilen $h > 0$ sayısı için $u(\cdot) \in L_p\big([t_0, \theta]; \mathbb{R}^m\big)$ fonksiyonunun Steklov fonksiyonunu tanımlayalım.

Tanım 1.2.2 *[80] $p > 1$, $u(\cdot) \in L_p([t_0, \theta]; \mathbb{R}^m)$ olsun ve $u_*(\cdot) : [t_0 - 1, \theta + 1] \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu, $t \in [t_0 - 1, \theta + 1]$ için*

$$u_*(t) = \begin{cases} u(t) & , \ t \in [t_0, \theta] \\ 0 & , \ t \in [t_0 - 1, t_0) \bigcup (\theta, \theta + 1] \end{cases} \tag{1.2.1}$$

olarak tanımlansın.

$0 < h < 1$ ve $t \in [t_0, \theta]$ olmak üzere, $u(\cdot) \in L_p([t_0, \theta]; \mathbb{R}^m)$ fonksiyonunun $u_h(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^m$ Steklov fonksiyonu her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$u_h(t) = \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} u_*(\tau)\, d\tau \tag{1.2.2}$$

olarak tanımlanır.

Önerme 1.2.3 *[80] $p > 1$, $u(\cdot) \in L_p([t_0, \theta]; \mathbb{R}^m)$, $\|u(\cdot)\|_p \leq \mu_0$, her $t \in [t_0, \theta]$ için $\|u(t)\| \leq H$ ve $h \in (0, 1)$ olsun. O halde $\|u_h(\cdot)\|_p \leq \|u(\cdot)\|_p \leq \mu_0$, her $t \in [t_0, \theta]$ için $\|u_h(t)\| \leq H$ ve $u_h(\cdot)$ fonksiyonu $\dfrac{H}{h}$ sabiti ile Lipschitz süreklidir.*

Önerme 1.2.4 *[80] $p > 1$, $u(\cdot) \in L_p\big([t_0, \theta]; \mathbb{R}^m\big)$ ve $h \in (0, 1)$ için $u_h(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu $u(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonunun Steklov fonksiyonu olsun. O halde,*

$$\lim_{h \to 0^+} \|u_h(\cdot) - u(\cdot)\|_p = 0$$

olur.

2 KONTROL SİSTEMİN YÖRÜNGELER KÜMESİNİN TEMEL ÖZELLİKLERİ

2.1 Kontrol Sistemin Yörüngeler Kümesi, Temel Tanım ve Koşullar

Davranışı

$$x(t) = a(t, x(t)) + \lambda \int_{t_0}^{t} K(t, s, x(s), u(s))ds \tag{2.1.1}$$

integral denklemi ile verilen kontrol sistem ele alalım. Burada $x \in \mathbb{R}^n$ sistemin durum vektörü, $u \in \mathbb{R}^m$ kontrol vektörü, $\lambda \geq 0$ gerçel sayı, $t \in [t_0, \theta]$ 'dır.

$p > 1$ ve $\mu_0 > 0$ için

$$U_{p,\mu_0} = \left\{ u(\cdot) \in L_p\left([t_0, \theta]; \mathbb{R}^m\right) : \|u(\cdot)\|_p \leq \mu_0 \right\} \tag{2.1.2}$$

olsun. (2.1.2) ile tanımlanan $U_{p,\mu_0} \subset L_p\left([t_0, \theta]; \mathbb{R}^m\right)$ kümesine mümkün kontrol fonksiyonları kümesi denir. Açıktır ki U_{p,μ_0}, $L_p\left([t_0, \theta]; \mathbb{R}^m\right)$ uzayının merkezi orijinde olan μ_0 yarıçaplı kapalı yuvarıdır.

Her $u(\cdot) \in U_{p,\mu_0} \subset L_p\left([t_0, \theta]; \mathbb{R}^m\right)$ kontrol fonksiyonuna (2.1.1) sisteminin mümkün kontrol fonksiyonu denir.

(2.1.1) sisteminde verilen $\lambda \in [0, \infty)$ parametresinin, $a(\cdot) : [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ve $K(\cdot) : [t_0, \theta] \times [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonlarının aşağıdaki koşulları sağladığını varsayacağız:

2.1.A. $a(\cdot) : [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ve $K(\cdot) : [t_0, \theta] \times [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonları süreklidir;

2.1.B. Keyfi $(t_1, s, x_1, u_1) \in [t_0, \theta] \times [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $(t_2, s, x_2, u_2) \in [t_0, \theta] \times [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ için

$$\|a(t, x_1) - a(t, x_2)\| \leq L_0 \|x_1 - x_2\|,$$

$$\begin{aligned} \|K(t_1, s, x_1, u_1) - K(t_2, s, x_2, u_2)\| \;&\leq\; [L_1 + H_1 (\|u_1\| + \|u_2\|)] \, |t_1 - t_2| \\ &+\; [L_2 + H_2 (\|u_1\| + \|u_2\|)] \, \|x_1 - x_2\| \\ &+\; [L_3 + H_3 (\|x_1\| + \|x_2\|)] \, \|u_1 - u_2\| \end{aligned}$$

olacak biçimde $L_0 \in [0, 1)$, $L_1 \geq 0$, $H_1 \geq 0$, $L_2 \geq 0$, $H_2 \geq 0$, $L_3 \geq 0$ ve $H_3 \geq 0$ sabitleri vardır;

2.1.C. λ sayısı

$$0 \leq \lambda \left(L_2 \left(\theta - t_0\right) + 2H_2 (\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \mu_0 \right) < 1 - L_0$$

eşitsizliğini sağlıyor.

(2.1.1) sisteminin $u(\cdot) \in U_{p,\mu_0}$ mümkün kontrol fonksiyonu tarafından üretilen yörüngesini tanımlayalım.

Tanım 2.1.1 *$u_*(\cdot) \in U_{p,\mu_0}$ olsun. Her $t \in [t_0, \theta]$ için*

$$x_*(t) = a\left(t, x_*\left(t\right)\right) + \lambda \int_{t_0}^{t} K\left(t, s, x_*\left(s\right), u_*\left(s\right)\right) ds$$

integral denklemini sağlayan sürekli $x_*(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonuna, (2.1.1) sisteminin $u_*(\cdot) \in U_{p,\mu_0}$ mümkün kontrol fonksiyonu tarafından üretilen yörüngesi denir.

$x(\cdot; u(\cdot))$ ile (2.1.1) sisteminin $u(\cdot) \in U_{p,\mu_0}$ kontrol fonksiyonu tarafından üretilen yörüngesini gösterelim.

$\mathbf{X}_{p,\mu_0}$ ile (2.1.1) sisteminin tüm mümkün $u(\cdot) \in U_{p,\mu_0}$ kontrol fonksiyonu tarafından üretilen yörüngeler kümesi gösterilir, yani

$$\mathbf{X}_{p,\mu_0} = \left\{x(\cdot; u(\cdot)) : u(\cdot) \in U_{p,\mu_0}\right\}. \tag{2.1.3}$$

(2.1.3) ile tanımlı $\mathbf{X}_{p,\mu_0}$ kümesine (2.1.1) sisteminin yörüngeler kümesi denir.

Açıktır ki, $\mathbf{X}_{p,\mu_0} \subset C\left([t_0, \theta]; \mathbb{R}^n\right)$. Burada $C\left([t_0, \theta]; \mathbb{R}^n\right)$, sürekli $x(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonlar uzayıdır ve $x(\cdot) \in C\left([t_0, \theta]; \mathbb{R}^n\right)$ için

$$\left\|x(\cdot)\right\|_C = \max\left\{\|x(t)\| : t \in [t_0, \theta]\right\}.$$

olarak tanımlıdır.

Ayrıca her sabitlenmiş $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\mathbf{X}_{p,\mu_0}(t) = \left\{x(t) \in \mathbb{R}^n : x(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}\right\} \tag{2.1.4}$$

olarak gösterelim.

Açıktır ki $\mathbf{X}_{p,\mu_0}(t)$ kümesi, $\mathbf{X}_{p,\mu_0}$ kümesinde bulunan yörüngelerin t 'de aldığı değerlerden oluşur.

Koşul 2.1.B gereği, $L_0 \in [0, 1)$ olmak üzere her sabitlenmiş $t \in [t_0, \theta]$ ve keyfi $x_1 \in \mathbb{R}^n$, $x_2 \in \mathbb{R}^n$ için

$$\|a(t, x_1) - a(t, x_2)\| \leq L_0 \|x_1 - x_2\|$$

olur. O halde Banach sabit nokta teoreminden, her sabitlenmiş $t \in [t_0, \theta]$ için $a(t, \cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonunun tek sabit noktası var. Yani her sabitlenmiş $t \in [t_0, \theta]$ için

$$s_t = a(t, s_t) \tag{2.1.5}$$

olacak biçimde tek $s_t \in \mathbb{R}^n$ vardır. Bu durumda (2.1.1) ve (2.1.5) 'ten keyfi $x(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}$ için

$$x(t_0) = a(t_0, x(t_0)) = s_{t_0}$$

olduğu elde edilir. Böylece aşağıdaki önerme kanıtlanmış olur.

Önerme 2.1.2 $\mathbf{X}_{p,\mu_0}(t_0) = \{s_{t_0}\}$ *eşitliği doğrudur.*

Burada $s_{t_0} \in \mathbb{R}^n$ *(2.1.5) ile tanımlıdır.*

Eğer $K(\cdot) : [t_0, \theta] \times [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu Lipschitz sürekli ise, bu fonksiyon 2.1.A ve 2.1.B koşullarını sağlar.

Şimdi (2.1.1) biçiminde olmak üzere 2.1.A ve 2.1.B koşullarını sağlayan bir sistem örneği verelim.

Örnek 2.1.3 *Davranışı,*

$$x(t) = \frac{1}{2}\arctan x(t) + \lambda \int_0^t [t\cos(sx(s)u(s)) + \sin(tsu(s))]\, ds\,,\ \ t \in [0,2] \quad (2.1.6)$$

integral denklemi ile verilen kontrol sistemi ele alalım. Burada $x \in \mathbb{R}$ *ve* $u \in \mathbb{R}$ *'dir.*

Açıktır ki 2.1.A koşulu sağlanmaktadır.

Şimdi (2.1.6) integral denkleminin sağ tarafındaki fonksiyonların 2.1.B koşulunu sağladığını gösterelim.

Keyfi $x \in \mathbb{R}$ *için*

$$\frac{d\arctan(x)}{dx} = \frac{1}{1+x^2} \leq 1$$

olduğundan $x \to \dfrac{1}{2}\arctan(x)$ *fonksiyonu* $\dfrac{1}{2}$ *sabiti ile Lipschitz süreklidir.*

$(t, s, x, u) \in [0,2] \times [0,2] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *için*

$$K(t, s, x, u) = t\cos(sxu) + \sin(tsu) \quad (2.1.7)$$

olarak gösterelim.

$f_1(z) = \sin(z)$ *ve* $f_2(z) = \cos(z)$ *fonksiyonları için*

$$|f_1'(z)| = |\cos(z)| \leq 1, \quad |f_2'(z)| = |\sin(z)| \leq 1$$

olduğundan, bu fonksiyonlar $L = 1$ sabiti ile Lipschitz süreklidir. Buna göre keyfi $(t_1, s, x_1, u_1) \in [0,2] \times [0,2] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *ve* $(t_2, s, x_2, u_2) \in [0,2] \times [0,2] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *için*

$$\begin{aligned}
& \left|K(t_1, s, x_1, u_1) - K(t_2, s, x_2, u_2)\right| \\
= & \ |t_1 \cos(sx_1u_1) + \sin(t_1su_1) - t_2 \cos(sx_2u_2) - \sin(t_2su_2)| \\
\leq & \ |t_1 \cos(sx_1u_1) - t_2 \cos(sx_2u_2)| + |\sin(t_1su_1) - \sin(t_2su_2)| \\
\leq & \ |t_1 \cos(sx_1u_1) - t_2 \cos(sx_1u_1)| + |t_2 \cos(sx_1u_1) - t_2 \cos(sx_2u_2)| \\
& + |t_1su_1 - t_2su_2| \\
= & \ |\cos(sx_1u_1)| \cdot |t_1 - t_2| + t_2 \cdot |\cos(sx_1u_1) - \cos(sx_2u_2)| + s \cdot |t_1u_1 - t_2u_2| \\
\leq & \ |t_1 - t_2| + 2 \cdot |\cos(sx_1u_1) - \cos(sx_2u_2)| + 2 \cdot |t_1u_1 - t_2u_2| \\
\leq & \ |t_1 - t_2| + 2 \cdot |sx_1u_1 - sx_2u_2| + 2 \cdot |t_1u_1 - t_2u_2| \\
= & \ |t_1 - t_2| + 2s \cdot |x_1u_1 - x_2u_2| + 2 \cdot |t_1u_1 - t_2u_2| \\
\leq & \ |t_1 - t_2| + 4 \cdot |x_1u_1 - x_2u_2| + 2 \cdot |t_1u_1 - t_2u_2| \\
= & \ |t_1 - t_2| + 4 \cdot |x_1u_1 - x_1u_2 + x_1u_2 - x_2u_2| + 2 \cdot |t_1u_1 - t_1u_2 + t_1u_2 - t_2u_2| \\
\leq & \ |t_1 - t_2| + 4 \cdot |x_1u_1 - x_1u_2| + 4 \cdot |x_1u_2 - x_2u_2| \\
& +2 \cdot |t_1u_1 - t_1u_2| + 2 \cdot |t_1u_2 - t_2u_2| \\
= & \ |t_1 - t_2| + 4\,|x_1| \cdot |u_1 - u_2| + 4\,|u_2| \cdot |x_1 - x_2| + 2t_1 \cdot |u_1 - u_2| + 2\,|u_2| \cdot |t_1 - t_2| \\
\leq & \ |t_1 - t_2| + 4\,|x_1| \cdot |u_1 - u_2| + 4\,|u_2| \cdot |x_1 - x_2| + 4 \cdot |u_1 - u_2| + 2\,|u_2| \cdot |t_1 - t_2| \\
= & \ (1 + 2\,|u_2|) \cdot |t_1 - t_2| + 4\,|u_2| \cdot |x_1 - x_2| + (4 + 4\,|x_1|) \cdot |u_1 - u_2|
\end{aligned}$$

olduğu elde edilir. Böylece keyfi $(t_1, s, x_1, u_1) \in [0,2]\times[0,2]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ *ve* $(t_2, s, x_2, u_2) \in [0,2] \times [0,2] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *için*

$$\begin{aligned}
\left|K(t_1, s, x_1, u_1) \right. & - \left. K(t_2, s, x_2, u_2)\right| \leq (1 + 2\,|u_2|) \cdot |t_1 - t_2| \\
& + 4\,|u_2| \cdot |x_1 - x_2| + (4 + 4\,|x_1|) \cdot |u_1 - u_2|
\end{aligned}$$

olur. Bu ise (2.1.7) ile tanımlı $K(\cdot) : [0,2] \times [0,2] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonunun 2.1.B koşulunu sağlaması demektir.*

Dolayısıyla (2.1.6) denkleminin sağ tarafındaki fonksiyonlar için 2.1.B koşulu da sağlanmaktadır.

2.2 Yörüngelerin Varlığı ve Tekliği

2.1.A, 2.1.B ve 2.1.C koşulları sağlandığında her $u(\cdot) \in U_{p,\mu_0}$ için (2.1.1) sisteminin yörüngesinin var olduğunu ve bu yörüngenin tek olduğunu kanıtlayalım.

$$L(\lambda;p,\mu_0)=L_0+\lambda\left[L_2\left(\theta-t_0\right)+2H_2(\theta-t_0)^{\frac{p-1}{p}}\mu_0\right] \qquad (2.2.1)$$

olarak gösterelim. Bu durumda 2.1.C koşulu gereği $L(\lambda;p,\mu_0)<1$ olur.

Teorem 2.2.1 *$a(\cdot):[t_0,\theta]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ ve $K(\cdot):[t_0,\theta]\times[t_0,\theta]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ fonksiyonları ve $\lambda\in[0,\infty)$ parametresi 2.1.A, 2.1.B ve 2.1.C koşullarını sağlasın. O halde her $u_*(\cdot)\in U_{p,\mu_0}$ için (2.1.1) sisteminin $x(\cdot;u_*(\cdot))$ yörüngesi vardır ve bu yörünge tektir.*

Kanıt. Her $x(\cdot)\in C\left([t_0,\theta];\mathbb{R}^n\right)$ için

$$F\left(x(\cdot)\right)|(t)=a\left(t,x\left(t\right)\right)+\lambda\int_{t_0}^{t}K\left(t,s,x\left(s\right),u_*\left(s\right)\right)ds\ , \quad t\in[t_0,\theta] \qquad (2.2.2)$$

olmak üzere $x(\cdot)\to F\left(x(\cdot)\right)$ dönüşümü tanımlayalım. $u_*(\cdot)\in U_{p,\mu_0}$, $x(\cdot)\in C\left([t_0,\theta];\mathbb{R}^n\right)$ olduğundan, 2.1.A ve 2.1.B koşulları gereği $t\to F(x(\cdot))|(t)$, $t\in[t_0,\theta]$, fonksiyonu sürekli olur. Böylece (2.2.2) ile tanımlı $x(\cdot)\to F(x(\cdot))$ dönüşümü

$$F(\cdot):C\left([t_0,\theta];\mathbb{R}^n\right)\to C\left([t_0,\theta];\mathbb{R}^n\right)$$

biçiminde dönüşümdür.

(2.2.2) ile tanımlı $F(\cdot):C\left([t_0,\theta];\mathbb{R}^n\right)\to C\left([t_0,\theta];\mathbb{R}^n\right)$ dönüşümünün büzülen dönüşüm olduğunu kanıtlayalım.

Keyfi $x_1(\cdot)\in C\left([t_0,\theta];\mathbb{R}^n\right)$ ve $x_2(\cdot)\in C\left([t_0,\theta];\mathbb{R}^n\right)$ alalım ve sabitleyelim. O halde keyfi $t\in[t_0,\theta]$ için

$$\begin{aligned}
& \left\|F\left(x_2(\cdot)\right)|(t)-F\left(x_1(\cdot)\right)|(t)\right\| \\
= & \ \Big\|\ a\left(t,x_2\left(t\right)\right)+\lambda\int_{t_0}^{t}K\left(t,s,x_2\left(s\right),u_*\left(s\right)\right)ds \\
- & \ a\left(t,x_1\left(t\right)\right)-\lambda\int_{t_0}^{t}K\left(t,s,x_1\left(s\right),u_*\left(s\right)\right)ds\Big\| \\
\le & \ \left\|a\left(t,x_2\left(t\right)\right)-a\left(t,x_1\left(t\right)\right)\right\| \\
+ & \ \lambda\int_{t_0}^{t}\left\|K\left(t,s,x_2\left(s\right),u_*\left(s\right)\right)-K\left(t,s,x_1\left(s\right),u_*\left(s\right)\right)\right\|ds
\end{aligned} \qquad (2.2.3)$$

olduğu elde edilir.

2.1.B koşulundan ve (2.2.3) 'ten, keyfi $t\in[t_0,\theta]$ için

$$\begin{aligned}
\left\|F\left(x_2(\cdot)\right)|(t)\right. & - \left.F\left(x_1(\cdot)\right)|(t)\right\|\le L_0\left\|x_2\left(t\right)-x_1\left(t\right)\right\| \\
& + \ \lambda\int_{t_0}^{t}\left(L_2+2H_2\left\|u_*(s)\right\|\right)\left\|x_2\left(s\right)-x_1\left(s\right)\right\|ds
\end{aligned} \qquad (2.2.4)$$

olarak bulunur.

Keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\|x_2(t) - x_1(t)\| \leq \|x_2(\cdot) - x_1(\cdot)\|_C$$

olduğundan, (2.2.4) 'ten, keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned} & \left\| F(x_2(\cdot))\,|(t) - F(x_1(\cdot))\,|(t) \right\| \leq L_0 \|x_2(\cdot) - x_1(\cdot)\|_C \\ + & \ \lambda \int_{t_0}^{t} (L_2 + 2H_2 \|u_*(s)\|) \|x_2(\cdot) - x_1(\cdot)\|_C \, ds \\ \leq & \ \left(L_0 + \lambda L_2 (\theta - t_0) + 2\lambda H_2 \int_{t_0}^{t} \|u_*(s)\| \, ds \right) \|x_2(\cdot) - x_1(\cdot)\|_C \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

olur.

$u_*(\cdot) \in U_{p,\mu_0}$ olduğundan, Hölder eşitsizliği gereği

$$\int_{t_0}^{t} \|u_*(s)\| \, ds \leq (t - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{t_0}^{t} \|u_*(s)\|^p \, ds \right)^{\frac{1}{p}} \leq (\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \mu_0$$

olur. O zaman (2.2.1) ve (2.2.5) 'ten, keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned} & \left\| F(x_2(\cdot))\,|(t) - F(x_1(\cdot))\,|(t) \right\| \\ \leq & \ \left(L_0 + \lambda L_2 (\theta - t_0) + 2\lambda H_2 (\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \mu_0 \right) \|x_2(\cdot) - x_1(\cdot)\|_C \\ = & \ L(\lambda; p, \mu_0) \|x_2(\cdot) - x_1(\cdot)\|_C \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

olduğu elde edilir.

Son olarak (2.2.6) 'dan

$$\left\| F(x_2(\cdot))\,|(\cdot) - F(x_1(\cdot))\,|(\cdot) \right\|_C \leq L(\lambda; p, \mu_0) \|x_2(\cdot) - x_1(\cdot)\|_C \quad (2.2.7)$$

olarak bulunur.

2.1.C koşulundan, $L(\lambda; p, \mu_0) < 1$ olur. O halde (2.2.7) gereği, (2.2.2) ile tanımlı $F(\cdot) : C([t_0, \theta]; \mathbb{R}^n) \to C([t_0, \theta]; \mathbb{R}^n)$ dönüşümü büzülen dönüşümdür. $C([t_0, \theta]; \mathbb{R}^n)$ uzayı tam olduğundan, Banach sabit nokta teoremi gereği $F(\cdot)$ dönüşümünün $C([t_0, \theta]; \mathbb{R}^n)$ uzayında sabit noktası vardır ve bu sabit nokta tektir. Yani (2.2.2) ile tanımlı $F(\cdot) : C([t_0, \theta]; \mathbb{R}^n) \to C([t_0, \theta]; \mathbb{R}^n)$ dönüşümü için

$$F(x_*(\cdot)) = x_*(\cdot) \quad (2.2.8)$$

olacak biçimde tek bir $x_*(\cdot) \in C([t_0, \theta]; \mathbb{R}^n)$ vardır.

Bu durumda (2.2.2) ve (2.2.8) 'den $F(\cdot)$ dönüşümünün $x_*(\cdot) \in C([t_0, \theta]; \mathbb{R}^n)$ tek sabit noktası için

$$x_*(t) = a(t, x_*(t)) + \lambda \int_{t_0}^{t} K(t, s, x_*(s), u_*(s)) \, ds \,, \quad t \in [t_0, \theta]$$

olur. Başka deyişle sürekli $x_*(\cdot):[t_0,\theta]\to\mathbb{R}^n$ fonksiyonu (2.1.1) sisteminin $u_*(\cdot)\in U_{p,\mu_0}$ mümkün kontrol fonksiyonu tarafından üretilen tek yörüngesidir. ■

2.3 Yörüngeler Kümesinin Sınırlılığı

Bu bölümde (2.1.2) kısıtı olan (2.1.1) sisteminin yörüngeler kümesinin, yani $\mathbf{X}_{p,\mu_0}\subset C([t_0,\theta];\mathbb{R}^n)$ kümesinin sınırlı olduğunu kanıtlayacağız. Önce bir yardımcı önerme verelim.

Önerme 2.3.1 *Her $u(\cdot)\in U_{p,\mu_0}$ ve $t\in[t_0,\theta]$ için*

$$\int_{t_0}^{t}\|u(\tau)\|\,d\tau\le(t-t_0)^{\frac{p-1}{p}}\mu_0\le(\theta-t_0)^{\frac{p-1}{p}}\mu_0$$

olur.

Kanıt. $u(\cdot)\in U_{p,\mu_0}$ için Hölder integral eşitsizliği kullanılırsa, her $t\in[t_0,\theta]$ için

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t}\|u(\tau)\|\,d\tau &\le \left(\int_{t_0}^{t}1^{\frac{p}{p-1}}d\tau\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_{t_0}^{t}\|u(\tau)\|^p\,d\tau\right)^{\frac{1}{p}}\\ &= (t-t_0)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_{t_0}^{t}\|u(\tau)\|^p\,d\tau\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\le (t-t_0)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_{t_0}^{\theta}\|u(\tau)\|^p\,d\tau\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (2.3.1)\end{aligned}$$

olur. $u(\cdot)\in U_{p,\mu_0}$ olduğundan (2.1.2) 'den

$$\left(\int_{t_0}^{\theta}\|u(\tau)\|^p\,d\tau\right)^{\frac{1}{p}}\le\mu_0 \qquad (2.3.2)$$

olur.

(2.3.1) ve (2.3.2) 'den

$$\int_{t_0}^{t}\|u(\tau)\|\,d\tau\le(t-t_0)^{\frac{p-1}{p}}\mu_0$$

olarak elde edilir. ■

Daha sonra kullanacağımız bir yardımcı önerme kanıtlayalım.

$a(\cdot,\cdot):[t_0,\theta]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ ve $K(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot):[t_0,\theta]\times[t_0,\theta]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ fonksiyonları 2.1.A koşulunu sağladığından dolayı, $a(\cdot,0):[t_0,\theta]\to\mathbb{R}^n$ ve $K(\cdot,\cdot,0,0):[t_0,\theta]\times[t_0,\theta]\to\mathbb{R}^n$ fonksiyonları süreklidir. O zaman

$$\gamma_0=\max\left\{\|a(t,0)\|:t\in[t_0,\theta]\right\}, \tag{2.3.3}$$

$$\gamma_1=\max\left\{\|K(t,s,0,0)\|:(t,s)\in[t_0,\theta]\times[t_0,\theta]\right\} \tag{2.3.4}$$

olarak tanımlayalım. Açıktır ki, $\gamma_0\geq 0$ ve $\gamma_1\geq 0$ olur.

Önerme 2.3.2 *$a(\cdot,\cdot):[t_0,\theta]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ ve $K(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot):[t_0,\theta]\times[t_0,\theta]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ fonksiyonları 2.1.A ve 2.1.B koşullarını sağlasın.*

O halde keyfi $(t,s,x,u)\in[t_0,\theta]\times[t_0,\theta]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ için

$$\|a(t,x)\|\leq L_0\|x\|+\gamma_0,$$
$$\|K(t,s,x,u)\|\leq[L_2+(H_2+H_3)\|u\|]\|x\|+L_3\|u\|+\gamma_1$$

olur.

Kanıt. Keyfi $(t,x)\in[t_0,\theta]\times\mathbb{R}^n$ alalım. O halde 2.1.B koşulu gereği

$$\|a(t,x)-a(t,0)\|\leq L_0\|x\| \tag{2.3.5}$$

olur.

(2.3.3) ve (2.3.5) 'ten

$$\|a(t,x)\|\leq L_0\|x\|+\|a(t,0)\|\leq L_0\|x\|+\gamma_0 \tag{2.3.6}$$

Şimdi, keyfi $(t,s,x,u)\in[t_0,\theta]\times[t_0,\theta]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ alalım. O halde 2.1.B koşulu gereği

$$\|K(t,s,x,u)-K(t,s,0,0)\|\leq[L_2+H_2\|u\|]\|x\|+[L_3+H_3\|x\|]\|u\| \tag{2.3.7}$$

olur.

(2.3.4) ve (2.3.7) 'den

$$\begin{aligned}\|K(t,s,x,u)\| &\leq [L_2+(H_2+H_3)\|u\|]\|x\|+L_3\|u\|+\|K(t,s,0,0)\|\\ &\leq [L_2+(H_2+H_3)\|u\|]\|x\|+L_3\|u\|+\gamma_1 \end{aligned}\tag{2.3.8}$$

olduğu elde edilir.

(2.3.6) ve (2.3.8) 'den önermenin kanıtı elde edilir. ■

Aşağıdaki önerme, (2.1.1) sisteminin $\mathbf{X}_{p,\mu_0}$ yörüngeler kümesinin $C([t_0,\theta];\mathbb{R}^n)$ uzayında sınırlı küme olduğunu göstermektedir.

$$\rho_* = \frac{\gamma_0 + \gamma_1(\theta - t_0)\lambda + \lambda L_3 (\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \mu_0}{1 - L_0}, \tag{2.3.9}$$

$$P(\lambda; p, \mu_0) = \lambda \left(L_2(\theta - t_0) + (H_2 + H_3)(\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \mu_0 \right), \tag{2.3.10}$$

$$r_* = \rho_* \cdot \exp\left[\frac{P(\lambda; p, \mu_0)}{1 - L_0}\right] \tag{2.3.11}$$

olarak gösterelim.

Teorem 2.3.3 *Keyfi $x(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}$ için*

$$\|x(\cdot)\|_C \le r_*$$

eşitsizliği doğrudur.

Kanıt. Keyfi $x(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}$ alalım. O halde keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için

$$x(t) = a(t, x(t)) + \lambda \int_{t_0}^{t} K(t, s, x(s), u(s))\, ds \tag{2.3.12}$$

olacak biçimde $u(\cdot) \in U_{p,\mu_0}$ mümkün kontrol fonksiyonu vardır. O halde (2.3.12) ve Önerme 2.3.2 'den her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\le \|a(t, x(t))\| + \lambda \int_{t_0}^{t} \|K(t, s, x(s), u(s))\|\, ds \\ &\le L_0 \|x(t)\| + \gamma_0 + \lambda \int_{t_0}^{t} \left[(L_2 + (H_2 + H_3)\|u(s)\|)\|x(s)\| + L_3\|u(s)\| + \gamma_1\right] ds \\ &\le L_0 \|x(t)\| + \gamma_0 + \gamma_1(\theta - t_0)\lambda + \lambda L_3 \int_{t_0}^{t} \|u(s)\|\, ds \\ &+ \int_{t_0}^{t} \left[L_2 + (H_2 + H_3)\|u(s)\|\right] \|x(s)\|\, ds \end{aligned} \tag{2.3.13}$$

olur. $u(\cdot) \in U_{p,\mu_0}$ olduğundan, Önerme 2.3.1 'den

$$\|u(s)\| \le (\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \mu_0 \tag{2.3.14}$$

olduğu elde edilir. O halde (2.3.13) ve (2.3.14) 'ten her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\le L_0 \|x(t)\| + \gamma_0 + \gamma_1(\theta - t_0)\lambda + \lambda L_3 (\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \mu_0 \\ &+ \lambda \int_{t_0}^{t} \left[L_2 + (H_2 + H_3)\|u(s)\|\right] \|x(s)\|\, ds \end{aligned}$$

olarak bulunur. $L_0 \in [0,1)$ olduğundan, son eşitsizlikten her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \frac{\gamma_0 + \gamma_1 (\theta - t_0) \lambda + \lambda L_3 (\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \mu_0}{1 - L_0} \\ &+ \frac{\lambda}{1 - L_0} \int_{t_0}^{t} [L_2 + (H_2 + H_3) \|u(s)\|) \|x(s)\| \, ds \end{aligned} \tag{2.3.15}$$

olduğu elde edilir. (2.3.9) ve (2.3.15) 'ten, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\|x(t)\| \leq \rho_* + \frac{\lambda}{1 - L_0} \int_{t_0}^{t} [L_2 + (H_2 + H_3) \|u(s)\|) \|x(s)\| \, ds \tag{2.3.16}$$

olur.

Gronwall eşitsizliğinden, Önerme 2.3.1 'den, (2.3.10), (2.3.11) ve (2.3.16) 'dan her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \rho_* \cdot \exp\left[\frac{\lambda}{1 - L_0} \int_{t_0}^{t} (L_2 + (H_2 + H_3) \|u(s)\|) \, ds\right] \\ &\leq \rho_* \cdot \exp\left[\frac{\lambda}{1 - L_0} \left(L_2(\theta - t_0) + (H_2 + H_3) \int_{t_0}^{\theta} \|u(s)\| \, ds\right)\right] \\ &\leq \rho_* \cdot \exp\left[\frac{\lambda}{1 - L_0} \left(L_2(\theta - t_0) + (H_2 + H_3)(\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \mu_0\right)\right] \\ &= \rho_* \cdot \exp\left[\frac{P(\lambda; p, \mu_0)}{1 - L_0}\right] = r_* \end{aligned} \tag{2.3.17}$$

olur.

(2.3.17) 'den $\|x(\cdot)\|_C \leq r_*$ olduğu elde edilir. ■

Teorem 2.3.3 'ten aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Teorem 2.3.4 *(2.1.2) integral kısıtı olan (2.1.1) sisteminin $\mathbf{X}_{p,\mu_0}$ yörüngeler kümesi düzgün sınırlıdır.*

Teorem 2.3.5 *Keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için $\mathbf{X}_{p,\mu_0}(t) \subset B_n(r_*)$ içermesi doğrudur. Burada $\mathbf{X}_{p,\mu_0}(t)$ kümesi (2.1.4) ile, $r_* > 0$ sayısı (2.3.11) ile tanımlıdır, $B_n(r_*) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq r_*\}$ 'dır.*

2.4 Yörüngeler Kümesinin Prekompaktlığı ve Kapalılığı

Bu bölümde, (2.1.2) integral kısıtı olan (2.1.1) sisteminin $\mathbf{X}_{p,\mu_0}$ yörüngeler kümesinin prekompaktlığı incelenmiş ve kapalı olmayabileceği örneklenmiştir.

r_* sayısı (2.3.11) ile tanımlanmak üzere

$$D_1 = [t_0, \theta] \times B_n(r_*), \tag{2.4.1}$$

$$\omega_0(\Delta) = \max\Big\{ \|a(t_2,x) - a(t_1,x)\| : |t_2 - t_1| \le \Delta, \\ (t_1,x) \in D_1,\ (t_2,x) \in D_1 \Big\}, \tag{2.4.2}$$

$$\varphi(\Delta) = \frac{1}{1-L_0}\Big\{\omega_0(\Delta) + \lambda\left[L_1(\theta - t_0) + 2H_1(\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}}\mu_0\right]\cdot\Delta \\ +\lambda(L_2 r_* + \gamma_1)\cdot\Delta + \lambda\mu_0\left[(H_2+H_3)r_* + L_3\right]\cdot\Delta^{\frac{p-1}{p}}\Big\} \tag{2.4.3}$$

olsun.

2.1.A koşulu gereği $a(\cdot)$ fonksiyonu süreklidir. O halde $\Delta \to 0^+$ iken $\omega_0(\Delta) \to 0^+$, $\varphi(\Delta) \to 0^+$ olur.

Teorem 2.4.1 *Keyfi $x(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}$ ve keyfi $t_1 \in [t_0,\theta]$, $t_2 \in [t_0,\theta]$ için*

$$\|x(t_2) - x(t_1)\| \le \varphi(|t_2 - t_1|)$$

eşitsizliği doğrudur.

Kanıt. Keyfi $x(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}$ alalım. Bu durumda,

$$x(t) = a(t,x(t)) + \lambda\int_{t_0}^{t} K(t,s,x(s),u(s))\,ds, \quad t \in [t_0,\theta]$$

olacak şekilde $u(\cdot) \in U_{p,\mu_0}$ vardır. Keyfi $t_1 \in [t_0,\theta]$, $t_2 \in [t_0,\theta]$ alalım ve genelliği bozmaksızın $t_1 \le t_2$ olduğunu kabul edelim. O halde,

$$\begin{aligned}
\|x(t_2) - x(t_1)\| &\le \|a(t_2,x(t_2)) - a(t_1,x(t_1))\| \\
&+ \left\|\lambda\int_{t_0}^{t_2} K(t_2,s,x(s),u(s))\,ds - \lambda\int_{t_0}^{t_1} K(t_1,s,x(s),u(s))\,ds\right\| \\
&\le \|a(t_2,x(t_2)) - a(t_1,x(t_2))\| + \|a(t_1,x(t_2)) - a(t_1,x(t_1))\| \\
&+ \lambda\left\|\int_{t_0}^{t_1} K(t_2,s,x(s),u(s))\,ds - \int_{t_0}^{t_1} K(t_1,s,x(s),u(s))\,ds\right\| \\
&+ \lambda\left\|\int_{t_1}^{t_2} K(t_2,s,x(s),u(s))\,ds\right\|
\end{aligned}$$

$$\leq \|a(t_2,x(t_2)) - a(t_1,x(t_2))\| + \|a(t_1,x(t_2)) - a(t_1,x(t_1))\|$$

$$+ \lambda \int_{t_0}^{t_1} \|K(t_2,s,x(s),u(s)) - K(t_1,s,x(s),u(s))\| \, ds$$

$$+ \lambda \int_{t_1}^{t_2} \|K(t_2,s,x(s),u(s))\| \, ds \tag{2.4.4}$$

olur. 2.1.B koşulunu ve Önerme 2.3.1 'i kullanırsak

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^{t_1} \left\| K(t_2,s,x(s),u(s)) - K(t_1,s,x(s),u(s)) \right\| ds \\
\leq & \int_{t_0}^{t_1} (L_1 + 2H_1 \|u(s)\|)(t_2 - t_1) \, ds \\
= & \; L_1(t_1 - t_0)(t_2 - t_1) + 2H_1(t_2 - t_1) \int_{t_0}^{t_1} \|u(s)\| \, ds \\
\leq & \; L_1(\theta - t_0)(t_2 - t_1) + 2H_1(t_2 - t_1)(\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \mu_0 \\
= & \left[L_1(\theta - t_0) + 2H_1 (\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \mu_0 \right] (t_2 - t_1)
\end{aligned} \tag{2.4.5}$$

olduğu bulunur.

Önerme 2.3.2 gereği

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1}^{t_2} \|K(t_2,s,x(s),u(s))\| \, ds \\
\leq & \int_{t_1}^{t_2} [(L_2 + (H_2 + H_3) \|u(s)\|) \|x(s)\| + L_3 \|u(s)\| + \gamma_1] \, ds
\end{aligned} \tag{2.4.6}$$

olur. $x(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}$ olduğundan, Teorem 2.3.3 'ten keyfi $t \in [t_0,\theta]$ için $\|x(t)\| \leq r_*$ olur. Burada r_* sayısı (2.3.11) ile tanımlıdır. O halde (2.4.6) 'dan ve Önerme 2.3.1 'den

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1}^{t_2} \|K(t_2,s,x(s),u(s))\| \, ds \\
\leq & \int_{t_1}^{t_2} [(L_2 + (H_2 + H_3) \|u(s)\|) \|x(s)\| + L_3 \|u(s)\| + \gamma_1] \, ds
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(L_2 + (H_2 + H_3)\left\|u(s)\right\|\right) r_* + L_3 \left\|u(s)\right\| + \gamma_1\right] ds \\
&= \left(L_2 r_* + \gamma_1\right)\left(t_2 - t_1\right) + \int_{t_1}^{t_2} \left[(H_2 + H_3) r_* + L_3\right] \left\|u(s)\right\| ds \\
&= \left(L_2 r_* + \gamma_1\right)\left(t_2 - t_1\right) + \left[(H_2 + H_3) r_* + L_3\right] \int_{t_1}^{t_2} \left\|u(s)\right\| ds \\
&\le \left(L_2 r_* + \gamma_1\right)\left(t_2 - t_1\right) + \mu_0 \left[(H_2 + H_3) r_* + L_3\right] \left(t_2 - t_1\right)^{\frac{p-1}{p}} \qquad (2.4.7)
\end{aligned}
$$

olduğu elde edilir.

2.1.B koşulundan

$$
\left\|a(t_1, x(t_2)) - a(t_1, x(t_1))\right\| \le L_0 \left\|x(t_2) - x(t_1)\right\| \qquad (2.4.8)
$$

olur.

Keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için $\|x(t)\| \le r_*$ olduğundan, (2.4.1) 'den her $t \in [t_0, \theta]$ için $(t, x(t)) \in D_1$ olur. O halde (2.4.2) 'den

$$
\left\|a(t_2, x(t_2)) - a(t_1, x(t_2))\right\| \le \omega_0\left(|t_2 - t_1|\right) \qquad (2.4.9)
$$

olur.

(2.4.4), (2.4.5), (2.4.7), (2.4.8) ve (2.4.9) 'dan

$$
\begin{aligned}
&\left\|x(t_2) - x(t_1)\right\| \le L_0 \left\|x(t_2) - x(t_1)\right\| + \omega_0\left(|t_2 - t_1|\right) \\
&+ \lambda \left[L_1(\theta - t_0) + 2H_1 \left(\theta - t_0\right)^{\frac{p-1}{p}} \mu_0\right]\left(t_2 - t_1\right) \\
&+ \lambda \left(L_2 r_* + \gamma_1\right)\left(t_2 - t_1\right) + \lambda \mu_0 \left[(H_2 + H_3) r_* + L_3\right]\left(t_2 - t_1\right)^{\frac{p-1}{p}} \qquad (2.4.10)
\end{aligned}
$$

olarak bulunur.

$L_0 \in [0, 1)$ olduğundan, (2.4.3) ve (2.4.10) 'dan

$$
\begin{aligned}
\left\|x(t_2) - x(t_1)\right\| &\le \frac{1}{1 - L_0}\Big\{\omega_0\left(|t_2 - t_1|\right) \\
&+ \lambda \left[L_1(\theta - t_0) + 2H_1 \left(\theta - t_0\right)^{\frac{p-1}{p}}\right]\left(t_2 - t_1\right) \\
&+ \lambda \left(L_2 r_* + \gamma_1\right)\left(t_2 - t_1\right) + \lambda \mu_0 \left[(H_2 + H_3) r_* + L_3\right]\left(t_2 - t_1\right)^{\frac{p-1}{p}}\Big\} \\
&= \varphi\left(|t_2 - t_1|\right).
\end{aligned}
$$

olur. ■

Teorem 2.4.2 *(2.1.2) kısıtı olan (2.1.1) sisteminin $\mathbf{X}_{p,\mu_0}$ yörüngeler kümesi eşsüreklidir.*

Kanıt. Keyfi $\varepsilon > 0$ ve $x(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}$ alalım.

(2.4.3) ile tanımlı $\varphi(\cdot) : [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonu için $\Delta \to 0^+$ iken $\varphi(\Delta) \to 0^+$ olduğundan $\varepsilon > 0$ için $\Delta < \delta(\varepsilon)$ iken $\varphi(\Delta) < \varepsilon$ olacak biçimde $\delta(\varepsilon) > 0$ vardır.

Şimdi $|t_2 - t_1| < \delta(\varepsilon)$ olacak biçimde keyfi $t_1 \in [t_0, \theta]$, $t_2 \in [t_0, \theta]$ alalım. O halde

$$\varphi\left(|t_2 - t_1|\right) < \varepsilon \tag{2.4.11}$$

olur. Bu durumda Teorem 2.4.1 ve (2.4.11) 'den

$$\|x(t_2) - x(t_1)\| \leq \varphi\left(|t_2 - t_1|\right) < \varepsilon$$

olduğu elde edilir.

Böylece verilen keyfi $\varepsilon > 0$ için $|t_2 - t_1| < \delta(\varepsilon)$ iken $\|x(t_2) - x(t_1)\| < \varepsilon$ olacak biçimde $\delta(\varepsilon) > 0$ vardır. $x(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}$ keyfi olarak seçildiğinden, $\mathbf{X}_{p,\mu_0}$ yörüngeler kümesi eş sürekli olur. ■

Teorem 2.3.4 ve Teorem 2.4.2 'den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 2.4.3 *(2.1.2) kısıtı olan (2.1.1) sisteminin $\mathbf{X}_{p,\mu_0}$ yörüngeler kümesi $C\big([t_0, \theta]; \mathbb{R}^n\big)$ uzayında prekompakt kümedir.*

Kanıt. $\mathbf{X}_{p,\mu_0}$ kümesi, düzgün sınırlı ve eşsürekli fonksiyonlar kümesi olduğundan, Arzela-Ascoli teoreminden $\mathbf{X}_{p,\mu_0}$ kümesi $C\big([t_0, \theta]; \mathbb{R}^n\big)$ uzayında prekompakt küme olur. ■

Kontrol fonksiyonları üzerinde (2.1.2) integral kısıtı olan (2.1.1) sisteminin yörüngeler kümesi $\mathbf{X}_{p,\mu_0}$ kapalı küme olmayabilir. Bu durumu doğrulayan bir örnek verelim. Kullanacağımız örnek, daha önce davranışı doğrusal olmayan diferansiyel denklem ile verilen ve kontrol fonksiyonları integral kısıtlı olan sistemlerin erişim kümelerinin kapalı olmayabileceği gösterilirken kullanılmıştır (bkz., [49], [63]).

Örnek 2.4.4 *Davranışı*

$$\begin{cases} x(t) &= \int\limits_0^t \left[-y^2(s) + u^2(s)\right] ds, \\ y(t) &= \int\limits_0^t u(s) ds \end{cases} \tag{2.4.12}$$

integral denklemler sistemi ile verilen kontrol sistemi ele alalım. Burada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *sistemin durum vektörü,* $u \in \mathbb{R}$ *kontrol vektörü,* $t \in [0,1]$ *'dir.* $u(\cdot)$ *kontrol fonksiyonu (2.1.2) 'de* $p=2$ *ve* $\mu_0 = 1$ *olmak üzere*

$$\int_0^1 u^2(t)\,dt \leq 1 \tag{2.4.13}$$

integral kısıtını sağlamaktadır. Mümkün kontrol fonksiyonları kümesini $\tilde{U}_{2,1}$ *ile gösterelim. O halde,*

$$\tilde{U}_{2,1} = \{u(\cdot) \in L_2([0,1];\mathbb{R}) : \|u(\cdot)\|_2 \leq 1\}$$

ve (2.4.12) sisteminin mümkün yörüngeler kümesi

$$\tilde{\mathbf{X}}_{2,1} = \left\{ \Big(x\big(\cdot; u(\cdot)\big), y\big(\cdot; u(\cdot)\big) \Big) : u(\cdot) \in \tilde{U}_{2,1} \right\}$$

olur.

İlk önce $\tilde{\mathbf{X}}_{2,1}$ *yörüngeler kümesinin sınırlı olduğunu kanıtlayalım. Keyfi* $(x(\cdot), y(\cdot)) \in \tilde{\mathbf{X}}_{2,1}$ *alalım ve sabitleyelim. Bu durumda*

$$\begin{cases} x(t) &= \displaystyle\int_0^t \left[-y^2(s) + u^2(s)\right] ds, \\ y(t) &= \displaystyle\int_0^t u(s) ds \end{cases}$$

olacak biçimde $u(\cdot) \in \tilde{U}_{2,1}$ *vardır. Böylece, keyfi* $t \in [0,1]$ *için*

$$x(t) = -\int_0^t y^2(s)\,ds + \int_0^t u^2(s)\,ds\ , \tag{2.4.14}$$

$$y(t) = \int_0^t u(s)\,ds \tag{2.4.15}$$

olur. Bu durumda (2.4.13), (2.4.15) ve Hölder eşitsizliğinden, keyfi $t \in [0,1]$ *için*

$$|y(t)| \leq \int_0^t |u(s)|\,ds \leq \left(\int_0^t 1^2\,ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t |u(s)|^2\,ds \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{t} \leq 1 \tag{2.4.16}$$

olduğu bulunur. Diğer taraftan (2.4.13), (2.4.14) ve (2.4.16) 'dan, keyfi $t \in [0,1]$ *için*

$$|x(t)| \leq \int_0^t |y(s)|^2\,ds + \int_0^t |u(s)|^2\,ds \leq \int_0^t s\,ds + 1 = 1 + \frac{t^2}{2} \leq \frac{3}{2} \tag{2.4.17}$$

olur.

(2.4.16) ve (2.4.17) 'den, her $t \in [0,1]$ *için*

$$|x(t)| \le \frac{3}{2}\ , \qquad |y(t)| \le 1$$

olur. O halde,

$$\|(x(\cdot), y(\cdot))\|_C = \max_{t\in[0,1]} \|(x(t), y(t))\| = \max_{t\in[0,1]} \sqrt{x^2(t)+y^2(t)} \le \sqrt{1+\frac{9}{4}} < 2$$

olur. $(x(\cdot), y(\cdot)) \in \tilde{\mathbf{X}}_{2,1}$ *keyfi seçildiğinden,* $\tilde{\mathbf{X}}_{2,1}$ *yörüngeler kümesi sınırlı kümedir.*

$[0,1]$ *aralığının* $\Delta = \left\{0, \frac{1}{2k}, \frac{2}{2k}, \dots, \frac{2k-1}{2k}, 1\right\}$ *şeklindeki düzgün bölüntüsünü alalım ve her* $k = 1, 2, \dots$ *için* $i = 0, 1, \dots, k-1$ *olmak üzere*

$$u_k(t) = \begin{cases} 1 & ,\ t \in [\frac{2i}{2k}, \frac{2i+1}{2k}) \\ -1 & ,\ t \in [\frac{2i+1}{2k}, \frac{2i+2}{2k}) \end{cases} \tag{2.4.18}$$

fonksiyon dizisini tanımlayalım.

Açıktır ki her k *ve her* $t \in [0,1]$ *için* $u_k^2(t) = 1$ *dir. Buradan* $\int\limits_0^1 u_k^2(t)\,dt = 1$ *olur. Böylece keyfi* $k = 1, 2, \dots$ *için* $u_k(\cdot) \in \tilde{U}_{2,1}$ *olur.*

Şimdi (2.4.12) sisteminin $u_k(\cdot) \in \tilde{U}_{2,1}$ *mümkün kontrol fonksiyonu tarafından üretilen yörüngesini* $(x_k(\cdot), y_k(\cdot)) \in \tilde{\mathbf{X}}_{2,1}$ *olarak gösterelim. O halde keyfi* $k = 1, 2, \dots$ *için* $(x_k(\cdot), y_k(\cdot)) \in \tilde{\mathbf{X}}_{2,1}$ *ve (2.4.12) 'den her* $t \in [0,1]$ *için*

$$\begin{cases} x_k(t) = -\int\limits_0^t y_k^2(s)ds + \int\limits_0^t u_k^2(s)ds \\ y_k(t) = \int\limits_0^t u_k(s)ds \end{cases} \tag{2.4.19}$$

olur. Her $t \in [0,1]$ *için* $y_k(t) = \int\limits_0^t u_k(s)\,ds$ *olduğundan, (2.4.18) 'den* $i = 0, 1, \dots, k-1$ *olmak üzere*

$$y_k(t) = \begin{cases} t - \frac{2i}{2k} & ,\ t \in [\frac{2i}{2k}, \frac{2i+1}{2k}) \\ -t + \frac{2i+2}{2k} & ,\ t \in [\frac{2i+1}{2k}, \frac{2i+2}{2k}) \end{cases} \tag{2.4.20}$$

olur.

O halde (2.4.20) 'den her $t \in [0,1]$ *için,*

$$0 \le y_k(t) \le \frac{1}{2k} \tag{2.4.21}$$

olur. (2.4.21) 'den her $t \in [0,1]$ *için,*

$$0 \leq y_k^2(t) \leq \frac{1}{4k^2} \tag{2.4.22}$$

olduğu elde edilir.

(2.4.18) 'den, her $t \in [0,1]$ *için,* $u_k^2(t) = 1$ *olur. O halde (2.4.19) 'dan her* $t \in [0,1]$ *için*

$$x_k(t) = -\int_0^t y_k^2(s)ds + t \tag{2.4.23}$$

olur. (2.4.22) 'den keyfi $t \in [0,1]$ *için,*

$$-\frac{1}{4k^2} \leq -y_k^2(t) \leq 0 \tag{2.4.24}$$

olduğu elde edilir. O halde (2.4.24) eşitsizliğinin her iki tarafının 0*'dan* t *'ye integralini alırsak, her* $t \in [0,1]$ *için*

$$-\frac{1}{4k^2}t \leq -\int_0^t y_k^2(s)ds \leq 0 \tag{2.4.25}$$

olduğu elde edilir.

O halde (2.4.23) ve (2.4.25) 'ten her $t \in [0,1]$ *için*

$$\left(1 - \frac{1}{4k^2}\right) t \leq x_k(t) \leq t \tag{2.4.26}$$

olarak bulunur.

Böylece (2.4.21) ve (2.4.26) 'dan keyfi $k = 1, 2, \ldots$ *ve keyfi* $t \in [0,1]$ *için*

$$\begin{gathered} 0 \leq y_k(t) \leq \frac{1}{2k}, \\ \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right) t \leq x_k(t) \leq t, \end{gathered} \tag{2.4.27}$$

olur.

Şimdi her $t \in [0,1]$ *için*

$$x_*(t) = t, \quad y_*(t) = 0 \tag{2.4.28}$$

olmak üzere $(x_*(\cdot), y_*(\cdot)) : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ *fonksiyonu tanımlayalım. (2.4.27) 'den her* $k = 1, 2, \ldots$ *için* $(x_k(\cdot), y_k(\cdot)) \in \tilde{\mathbf{X}}_{2,1}$ *olmak üzere*

$$k \to \infty \quad iken \quad (x_k(\cdot), y_k(\cdot)) \to (x_*(\cdot), y_*(\cdot))$$

olduğu elde edilir.

Şimdi

$$(x_*(\cdot), y_*(\cdot)) \notin \tilde{\mathbf{X}}_{2,1}$$

olduğunu kanıtlayalım.

Aksini varsayalım. $(x_*(\cdot), y_*(\cdot)) \in \tilde{\mathbf{X}}_{2,1}$ olsun. Bu durumda, her $t \in [0,1]$ için

$$x_*(t) = \int_0^t -y_*^2(s)\,ds + \int_0^t {u_*}^2(s)\,ds \ , \tag{2.4.29}$$

$$y_*(t) = \int_0^t u_*(s)\,ds \tag{2.4.30}$$

olacak biçimde $u_*(\cdot) \in \tilde{U}_{2,1}$ vardır.

(2.4.28), (2.4.29) ve (2.4.30) 'dan her $t \in [0,1]$ için

$$\int_0^t {u_*}^2(s)\,ds \ = t \tag{2.4.31}$$

ve

$$\int_0^t u_*(s)\,ds = 0 \tag{2.4.32}$$

olduğu elde edilir.

Her $t \in [0,1]$ için

$$\nu(t) = \int_0^t u_*(s)\,ds \tag{2.4.33}$$

olmak üzere $\nu(\cdot) : [0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu tanımlayalım. $u_*(\cdot) : [0,1] \to \mathbb{R}$ integrallenebilir fonksiyon olduğundan $\nu(\cdot) : [0,1] \to \mathbb{R}$ mutlak sürekli fonksiyondur ve hemen hemen her $t \in [0,1]$ için

$$\frac{d\nu(t)}{dt} = u_*(t) \tag{2.4.34}$$

olur.

(2.4.32) ve (2.4.33) 'ten her $t \in [0,1]$ için $\nu(t) = 0$ ve buradan ise her $t \in [0,1]$ için $\dfrac{d\nu(t)}{dt} = 0$ olur. O halde (2.4.34) 'ten hemen hemen her $t \in [0,1]$ için

$$u_*(t) = 0$$

olduğu elde edilir. Bu durumda hemen hemen her $t \in [0,1]$ *için* ${u_*}^2(t) = 0$ *ve buradan da her* $t \in [0,1]$ *için*

$$\int_0^t {u_*}^2(s)\, ds \ = 0 \tag{2.4.35}$$

olduğu elde edilir.

(2.4.31) ve (2.4.35) çelişir. O halde varsayımımız doğru değil ve $(x_*(\cdot), y_*(\cdot)) \notin \tilde{\mathbf{X}}_{2,1}$ *olur. Böylece keyfi* $k = 1, 2, \ldots$ *için* $(x_k(\cdot), y_k(\cdot)) \in \tilde{\mathbf{X}}_{2,1}$, $k \to \infty$ *iken* $(x_k(\cdot), y_k(\cdot)) \to (x_*(\cdot), y_*(\cdot))$ *olmak üzere* $(x_*(\cdot), y_*(\cdot)) \notin \tilde{\mathbf{X}}_{2,1}$ *olduğunu gördük. Bu ise (2.4.13) kısıtlaması olan (2.4.12) sisteminin* $\tilde{\mathbf{X}}_{2,1}$ *yörüngeler kümesinin kapalı olmaması demektir.*

3 YÖRÜNGELER KÜMESİNİN KESİTLERİNİN SÜREKLİLİĞİ VE SİSTEMİN PARAMETRELERİNE BAĞLILIĞI

3.1 $t \to \mathbf{X}_{p,\mu_0}(t)$ Dönüşümünün Sürekliliği ve $\mathbf{X}_{p,\mu_0}$ Kümesinin Çapı

Şimdi $t \to \mathbf{X}_{p,\mu_0}(t)$, $t \in [t_0, \theta]$, dönüşümününün t 'ye göre Hausdorff yarı metriğinde sürekli olduğunu gösterelim. Hatırlatalım ki, $\mathbf{X}_{p,\mu_0}$ kümesi (2.1.2) kısıtı olan (2.1.1) sisteminin yörüngeler kümesi olmak üzere

$$\mathbf{X}_{p,\mu_0}(t) = \{x(t) \in \mathbb{R}^n : x(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}\}, \quad t \in [t_0, \theta]$$

olarak tanımlıdır.

Teorem 3.1.1 *Keyfi $t_1 \in [t_0, \theta]$, $t_2 \in [t_0, \theta]$ için*

$$h_n(\mathbf{X}_{p,\mu_0}(t_1), \mathbf{X}_{p,\mu_0}(t_2)) \leq \varphi\left(|t_1 - t_2|\right)$$

eşitsizliği doğrudur.

Burada $\varphi(\cdot)$ fonksiyonu (2.4.3) ile tanımlıdır.

Kanıt. Keyfi $t_1 \in [t_0, \theta]$, $t_2 \in [t_0, \theta]$ alalım. Genelliği bozmaksızın $t_1 < t_2$ olarak alalım. $y_1 \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}(t_1)$ keyfi bir nokta olsun. Bu durumda

$$y_1 = x_*(t_1) \tag{3.1.1}$$

olacak şekilde $x_*(\cdot) = x_*(\cdot; u(\cdot)) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}$ vardır.

$$y_2 = x_*(t_2) \tag{3.1.2}$$

olsun. Açıktır ki, $y_2 \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}(t_2)$ olur. (3.1.1), (3.1.2) ve Önerme 2.4.1 'den

$$\|y_1 - y_2\| = \|x_*(t_1) - x_*(t_2)\| \leq \varphi\left(|t_1 - t_2|\right) \tag{3.1.3}$$

olduğu elde edilir. Burada $\varphi(\cdot)$ fonksiyonu (2.4.3) ile tanımlıdır.

Böylece her $y_1 \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}(t_1)$ için (3.1.3) eşitsizliğini sağlayacak biçimde $y_2 \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}(t_2)$ olduğunu gördük. O halde

$$\mathbf{X}_{p,\mu_0}(t_1) \subset \mathbf{X}_{p,\mu_0}(t_2) + \varphi\left(|t_2 - t_1|\right) B_n \tag{3.1.4}$$

olduğu elde edilir.

Şimdi keyfi $y_2 \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}(t_2)$ alalım ve sabitleyelim. Bu durumda

$$y_2 = x_*(t_2)$$

olacak şekilde $x_*(\cdot) = x(\cdot; u(\cdot)) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}$ yörüngesi vardır.

$$y_1 = x_*(t_1)$$

olsun. Açıktır ki, $y_1 \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}(t_1)$ olur. y_1 ve y_2 noktaları arasındaki uzaklık benzer biçimde değerlendirilirse, Önerme 2.4.1 'den

$$\|y_2 - y_1\| = \|x_*(t_2) - x_*(t_1)\| \leq \varphi\left(|t_2 - t_1|\right) \tag{3.1.5}$$

olduğu elde edilir.

Böylece her $y_2 \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}(t_2)$ için (3.1.5) eşitsizliğini sağlayacak biçimde $y_1 \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}(t_1)$ olduğunu gördük. O halde

$$\mathbf{X}_{p,\mu_0}(t_2) \subset \mathbf{X}_{p,\mu_0}(t_1) + \varphi\left(|t_2 - t_1|\right) B_n \tag{3.1.6}$$

olduğu elde edilir.

(3.1.4), (3.1.6) ve Önerme 1.1.1 'den, Önerme 3.1.1 kanıtlanmış olur. ■

$\delta \to 0^+$ iken $\varphi(\delta) \to 0^+$ olduğundan, Önerme 3.1.1 'den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.2 $t \to \mathbf{X}_{p,\mu_0}(t)$, $t \in [t_0, \theta]$, *küme değerli dönüşümü t'ye göre süreklidir.*

Kanıt. Keyfi $t_* \in [t_0, \theta]$ alalım ve sabitleyelim. Şimde ise keyfi $\varepsilon > 0$ alalım. $\delta \to 0^+$ iken $\varphi(\delta) \to 0^+$ olduğundan, $\varepsilon > 0$ için $\delta \in (0, \delta_*(\varepsilon))$ iken $\varphi(\delta) < \varepsilon$ olacak biçimde $\delta_*(\varepsilon) > 0$ vardır. O halde Önerme 3.1.1 'den keyfi $t \in (t_* - \delta_*(\varepsilon), t_* + \delta_*(\varepsilon)) \bigcap [t_0, \theta]$ için

$$h_n(\mathbf{X}_{p,\mu_0}(t), \mathbf{X}_{p,\mu_0}(t_*)) \leq \varphi\left(|t - t_*|\right) < \varepsilon$$

olur. Bu ise $t \to \mathbf{X}_{p,\mu_0}(t)$, $t \in [t_0, \theta]$, küme değerli dönüşümünün t_* noktasında sürekli olması demektir. ■

Şimdi verilen kümenin çapını tanımlayalım.

Tanım 3.1.3 $A \subset \mathbb{R}^n$ *için A kümesinin çapı, diamA ile gösterilir ve*

$$diam\, A = \sup_{x,y \in A} \|x - y\|$$

olarak tanımlanır.

$t \in [t_0, \theta]$ için

$$r_0(t) = \frac{2\lambda}{1 - L_0} \left(L_3 + 2H_3 r_*\right) \mu_0 \left(t - t_0\right)^{\frac{p-1}{p}} \quad , \tag{3.1.7}$$

$$g(t) = r_0(t) \cdot \exp\left[\frac{\lambda}{1 - L_0}\left(L_2(t - t_0) + 2H_2\mu_0 \left(t - t_0\right)^{\frac{p-1}{p}}\right)\right] \tag{3.1.8}$$

olsun. Burada $r_* > 0$ sayısı (2.3.11) ile tanımlıdır.

Açıktır ki $t \to t_0^+$ iken $r_0(t) \to 0^+$ ve $g(t) \to 0^+$ olur.

Aşağıdaki önermede, sabitlenmiş $t \in [t_0, \theta]$ için $\mathbf{X}_{p,\mu_0}(t)$ kümesinin çapı üstten değerlendirilmektedir.

Teorem 3.1.4 *Her $t \in [t_0, \theta]$ için*

$$diam\, \mathbf{X}_{p,\mu_0}(t) \leq g(t)$$

eşitsizliği ve

$$diam\, \mathbf{X}_{p,\mu_0} \leq g(\theta)$$

eşitsizliği doğrudur. Burada $g(t)$ (3.1.8) ile tanımlıdır.

Kanıt. Keyfi $t \in [t_0, \theta]$ alalım ve sabitleyelim. $y_1 \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}(t)$, $y_2 \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}(t)$ keyfi öğeler olsun. Bu durumda,

$$y_1 = x_1(t) = a(t, x_1(t)) + \lambda \int_{t_0}^{t} K\left(t, s, x_1(s), u_1(s)\right) ds \tag{3.1.9}$$

olacak şekilde $x_1(\cdot) = x_1(\cdot; u_1(\cdot)) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}$ $(u_1(\cdot) \in U_{p,\mu_0})$ ve

$$y_2 = x_2(t) = a(t, x_2(t)) + \lambda \int_{t_0}^{t} K\left(t, s, x_2(s), u_2(s)\right) ds \tag{3.1.10}$$

olacak şekilde $x_2(\cdot) = x_2(\cdot; u_2(\cdot)) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}$ $(u_2(\cdot) \in U_{p,\mu_0})$ vardır.

(3.1.9), (3.1.10) ve 2.1.B koşulundan,

$$\|y_1 - y_2\| = \|x_1(t) - x_2(t)\| \ \leq \|a(t, x_1(t)) - a(t, x_2(t))\|$$

$$+ \ \ \lambda \left\| \int_{t_0}^{t} K\left(t, s, x_1(s), u_1(s)\right) ds - \int_{t_0}^{t} K\left(t, s, x_2(s), u_2(s)\right) ds \right\|$$

$$\leq \quad L_0 \left\| x_1(t) - x_2(t) \right\| + \lambda \int\limits_{t_0}^{t} \left\| K\left(t, s, x_1(s), u_1(s)\right) - K\left(t, s, x_2(s), u_2(s)\right) \right\| ds$$

$$\leq \quad L_0 \left\| x_1(t) - x_2(t) \right\| + \lambda \int_{t_0}^{t} \left[L_2 + H_2 \left(\|u_1(s)\| + \|u_2(s)\| \right) \right] \|x_1(s) - x_2(s)\| \, ds$$

$$+ \quad \lambda \int_{t_0}^{t} \left[L_3 + H_3 \left(\|x_1(s)\| + \|x_2(s)\| \right) \right] \|u_1(s) - u_2(s)\| \, ds \tag{3.1.11}$$

olur. $u_1(\cdot) \in U_{p,\mu_0}$, $u_2(\cdot) \in U_{p,\mu_0}$ olduğundan, Önerme 2.3.1 'den

$$\int\limits_{t_0}^{t} \|u_1(s)\| \; ds \leq \mu_0 (t - t_0)^{\frac{p-1}{p}}, \qquad \int\limits_{t_0}^{t} \|u_2(s)\| \; ds \leq \mu_0 (t - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \tag{3.1.12}$$

olduğu elde edilir.

$x_1(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}$, $x_2(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}$ olduğundan Teorem 2.3.3 'ten

$$\|x_1(\cdot)\|_C \leq r_* \ , \quad \|x_2(\cdot)\|_C \leq r_* \ . \tag{3.1.13}$$

olarak bulunur. Burada $r_* > 0$ sayısı (2.3.11) ile tanımlıdır.

(3.1.12) ve (3.1.13) 'ten

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t} \left[L_3 + H_3 \left(\|x_1(s)\| + \|x_2(s)\| \right) \right] \|u_1(s) - u_2(s)\| \, ds \\ &\qquad \leq \int_{t_0}^{t} \left(L_3 + 2H_3 r_* \right) \left(\|u_1(s)\| + \|u_2(s)\| \right) ds \\ &\qquad\qquad \leq 2 \left(L_3 + 2H_3 r_* \right) \mu_0 \left(t - t_0 \right)^{\frac{p-1}{p}} \end{aligned} \tag{3.1.14}$$

olduğu elde edilir.

(3.1.11) ve (3.1.14) 'ten

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| \leq L_0 \|x_1(t) - x_2(t)\| + 2\lambda \left(L_3 + 2H_3 r_* \right) \mu_0 \left(t - t_0 \right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$+ \quad \lambda \int_{t_0}^{t} \left[L_2 + H_2 \left(\|u_1(s)\| + \|u_2(s)\| \right) \right] \|x_1(s) - x_2(s)\| \, ds \tag{3.1.15}$$

olur.

$L_0 \in [0, 1)$ olduğundan, (3.1.7) ve (3.1.15) 'ten

$$\begin{aligned} &\left\| x_1(t) - x_2(t) \right\| \\ &\leq \frac{\lambda}{1 - L_0} \int_{t_0}^{t} \left[L_2 + H_2 \left(\|u_1(s)\| + \|u_2(s)\| \right) \right] \|x_1(s) - x_2(s)\| \, ds \\ &+ \frac{2\lambda}{1 - L_0} \left(L_3 + 2H_3 r_* \right) \mu_0 \left(t - t_0 \right)^{\frac{p-1}{p}} = r_0(t) \\ &+ \frac{\lambda}{1 - L_0} \int_{t_0}^{t} \left[L_2 + H_2 \left(\|u_1(s)\| + \|u_2(s)\| \right) \right] \|x_1(s) - x_2(s)\| \, ds \end{aligned} \tag{3.1.16}$$

olduğu elde edilir. $t \in [t_0, \theta]$ keyfi sabitlenmiş olduğundan, (3.1.16) eşitsizliği keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için doğrudur. O halde Gronwall eşitsizliği, (3.1.8), (3.1.12) ve (3.1.16) 'dan

$$\begin{aligned} \left\|x_1(t)\right. &- \left. x_2(t)\right\| \leq r_0(t) \exp\left[\frac{\lambda}{1-L_0}\int_{t_0}^{t}\left(L_2 + H_2\left(\|u_1(s)\| + \|u_2(s)\|\right)\right) ds\right] \\ &\leq r_0(t) \cdot \exp\left[\frac{\lambda}{1-L_0}\left(L_2(t-t_0) + 2H_2\mu_0\,(t-t_0)^{\frac{p-1}{p}}\right)\right] \\ &= g(t) \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

olduğu elde edilir.

Böylece keyfi $y_1 \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}(t)$, $y_2 \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}(t)$ için

$$\|y_1 - y_2\| \leq g(t) \quad (3.1.18)$$

olduğunu kanıtladık. Bu durumda (3.1.18) 'den

$$diam\, \mathbf{X}_{p,\mu_0}(t) = \sup\left\{\|y_1 - y_2\| : y_1 \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}(t), \quad y_2 \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}(t)\right\} \leq g(t) \quad (3.1.19)$$

olduğu elde edilir.

(3.1.19) eşitsizliği keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için dogru, $g(\cdot) : [t_0, \theta] \to [0, \infty)$ artan fonksiyon olduğundan, (3.1.19) 'dan keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için

$$diam\, \mathbf{X}_{p,\mu_0}(t) \leq g(\theta) \quad (3.1.20)$$

olur.

Teoremde verilen ikinci eşitsizliğin doğruluğunu kanıtlayalım. Önce keyfi $x_1(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}$ ve $x_2(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}$ alalım ve sabitleyelim. Şimdi ise keyfi $t \in [t_0, \theta]$ alalım. $x_1(t) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}(t)$ ve $x_2(t) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}(t)$ olduğundan, (3.1.20) 'den

$$\left\|x_1(t) - x_2(t)\right\| \leq g(\theta) \quad (3.1.21)$$

olduğu elde edilir. $t \in [t_0, \theta]$ keyfi seçildiğinden, (3.1.21) 'den

$$\left\|x_1(\cdot) - x_2(\cdot)\right\|_C \leq g(\theta) \quad (3.1.22)$$

olur. $x_1(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}$ ve $x_2(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}$ keyfi seçildiğinden, (3.1.22) 'den

$$diam\, \mathbf{X}_{p,\mu_0} = \sup\left\{\left\|x_1(\cdot) - x_2(\cdot)\right\|_C : x_1(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0},\ x_2(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}\right\} \leq g(\theta)$$

olarak bulunur. ■

Sonuç 3.1.5 *$t \to t_0^+$ iken $diam\, \mathbf{X}_{p,\mu_0}(t) \to 0$ olur.*

Kanıt. Önerme 3.1.4 'ten, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$diam\, \mathbf{X}_{p,\mu_0}(t) \leq g(t) \tag{3.1.23}$$

eşitsizliği doğrudur. Burada $g(t)$ (3.1.8) ile tanımlıdır. $t \to t_0^+$ iken $g(t) \to 0$ olduğundan, (3.1.23) 'ten, $t \to t_0^+$ iken $diam\, \mathbf{X}_{p,\mu_0}(t) \to 0$ olur. ■

3.2 Yörüngeler Kümesinin μ_0 'a Bağlılığı

Bu bölümde (2.1.2) kısıtı olan (2.1.1) sisteminin $\mathbf{X}_{p,\mu_0}$ yörüngeler kümesinin μ_0 kısıtına olan bağlılığı incelenecektir.

$\mu > 0$ olmak üzere,

$$U_{p,\mu} = \{u(\cdot) \in L_p([t_0, \theta]; \mathbb{R}^m) : \|u(\cdot)\|_p \leq \mu\}$$

olsun.

(2.1.1) sisteminde bulunan λ sayısı 2.1.C koşulunu sağlayacak biçimde, yani

$$0 \leq \lambda \left(L_2 \left(\theta - t_0\right) + 2H_2(\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \mu_0 \right) < 1 - L_0$$

eşitsizliğini sağlayacak biçimde seçilmektedir. λ sayısı bu eşitsizliği sağlayacak biçimde seçildiğinde, her $u(\cdot) \in U_{p,\mu_0}$ mümkün kontrol fonksiyonu (2.1.1) sisteminin tek yörüngesini üretir.

Açıktır ki, $\mu_0 - \sigma > 0$ olmak üzere keyfi $\mu \in [\mu_0 - \sigma, \mu_0 + \sigma]$ için

$$0 \leq \lambda \left(L_2 \left(\theta - t_0\right) + 2H_2(\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \mu \right) < 1 - L_0$$

olacak biçimde $\sigma > 0$ vardır. O halde Teorem 2.2.1 'e benzer olarak, her $u(\cdot) \in U_{p,\mu}$ kontrol fonksiyonu (2.1.1) sisteminin tek yörüngesini üretir.

$\mu \in [\mu_0 - \sigma, \mu_0 + \sigma]$ olmak üzere $\mathbf{X}_{p,\mu}$ ile (2.1.1) sisteminin tüm mümkün $u(\cdot) \in U_{p,\mu}$ kontrol fonksiyonları tarafından üretilen yörüngeler kümesini, yani

$$\mathbf{X}_{p,\mu} = \{x(\cdot; u(\cdot)) : u(\cdot) \in U_{p,\mu}\}, \tag{3.2.1}$$

her sabitlenmiş $t \in [t_0, \theta]$ için ise

$$\mathbf{X}_{p,\mu}(t) = \{x(t) \in \mathbb{R}^n : x(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu}\} \tag{3.2.2}$$

olarak gösterelim.

Ayrıca Teorem 2.3.3 'e benzer olarak $\mathbf{X}_{p,\mu}$, $\mu \in [\mu_0 - \sigma, \mu_0 + \sigma]$, yörüngeler kümelerinin sınırlı olduğu kanıtlanabilir. Yani, keyfi $\mu \in [\mu_0 - \sigma, \mu_0 + \sigma]$ ve $x(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu}$ için

$$\begin{aligned} \|x(\cdot)\|_C &\leq \frac{\gamma_0 + \gamma_1 (\theta - t_0) \lambda + \lambda L_3 (\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \mu}{1 - L_0} \\ &\cdot \quad \exp \left[\frac{\lambda \left(L_2(\theta - t_0) + (H_2 + H_3) (\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \mu \right)}{1 - L_0} \right] \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

olduğu kanıtlanabilir. Bu durumda (3.2.3) 'ten, keyfi $\mu \in [\mu_0 - \sigma, \mu_0 + \sigma]$ ve $x(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu}$ için

$$\begin{aligned} \|x(\cdot)\|_C &\leq \frac{\gamma_0 + \gamma_1 (\theta - t_0) \lambda + \lambda L_3 (\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} (\mu_0 + \sigma)}{1 - L_0} \\ &\cdot \quad \exp \left[\frac{\lambda \left(L_2(\theta - t_0) + (H_2 + H_3) (\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} (\mu_0 + \sigma) \right)}{1 - L_0} \right] \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

olduğu elde edilir.

$$\rho_0 = \frac{\gamma_0 + \gamma_1 (\theta - t_0) \lambda + \lambda L_3 (\mu_0 + \sigma) (\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}}}{1 - L_0} \,, \tag{3.2.5}$$

$$\tilde{P}(\lambda; p, \mu_0) = \lambda \left(L_2(\theta - t_0) + (H_2 + H_3) (\mu_0 + \sigma) (\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \right) \tag{3.2.6}$$

olmak üzere

$$r_1 = \rho_0 \cdot \exp \left[\frac{\tilde{P}(\lambda; p, \mu_0)}{1 - L_0} \right] \tag{3.2.7}$$

olarak tanımlayalım. O halde (3.2.4), (3.2.5), (3.2.6) ve (3.2.7) 'den, keyfi $\mu \in [\mu_0 - \sigma, \mu_0 + \sigma]$ ve $x(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu}$ için

$$\|x(\cdot)\|_C \leq r_1 \tag{3.2.8}$$

olur.

Şimdi

$$\rho_1 = (L_3 + 2 r_1 H_3) (\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \,, \tag{3.2.9}$$

$$P_1(\lambda; p, \mu_0) = \lambda \left[L_2(\theta - t_0) + 2 H_2 (\mu_0 + \sigma) (\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \right] \tag{3.2.10}$$

olmak üzere

$$R_* = \frac{\lambda \rho_1}{1 - L_0} \cdot \exp \left[\frac{P_1(\lambda; p, \mu_0)}{1 - L_0} \right] \tag{3.2.11}$$

olsun. Aşağıdaki önerme doğrudur.

Teorem 3.2.1 *Keyfi $\mu \in (\mu_0 - \sigma, \mu_0 + \sigma)$ için*

$$h_C(\mathbf{X}_{p,\mu}, \mathbf{X}_{p,\mu_0}) \leq R_* \left|\mu - \mu_0\right|$$

ve her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$h_n(\mathbf{X}_{p,\mu}(t), \mathbf{X}_{p,\mu_0}(t)) \leq R_* \left|\mu - \mu_0\right|$$

eşitsizlikleri doğrudur. Burada R_* sayısı (3.2.11) ile tanımlıdır.

Kanıt. Keyfi $\mu_* \in (\mu_0 - \sigma, \mu_0 + \sigma)$ alalım. Şimdi keyfi $x_0(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}$ yörüngesini alalım ve sabitleyelim. Bu durumda her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$x_0(t) = a(t, x_0(t)) + \lambda \int\limits_{t_0}^{t} K(t, s, x_0(s), u_0(s))\, ds \tag{3.2.12}$$

olacak şekilde $u_0(\cdot) \in U_{p,\mu_0}$ vardır. $u_0(\cdot) \in U_{p,\mu_0}$ mümkün kontrol fonksiyonu yardımıyla her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$u_*(t) = \frac{\mu_*}{\mu_0} u_0(t) \tag{3.2.13}$$

olmak üzere $u_*(\cdot)$ fonksiyonunu tanımlıyalım. $u_0(\cdot) \in U_{p,\mu_0}$ olduğundan,

$$\left\|u_*(\cdot)\right\|_p = \left(\int\limits_{t_0}^{\theta} \left\|u_*(\tau)\right\|^p \, d\tau \right)^{\frac{1}{p}} = \frac{\mu_*}{\mu_0} \left(\int\limits_{t_0}^{\theta} \left\|u_0(\tau)\right\|^p \, d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \leq \mu_*$$

olur. Dolayısıyla $u_*(\cdot) \in U_{p,\mu_*}$ olur.

(2.1.1) sisteminin (3.2.13) ile tanımlı $u_*(\cdot)$ kontrol fonksiyonu tarafından üretilen yörüngesini $x_*(\cdot)$ olarak gösterelim. O halde her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$x_*(t) = a(t, x_*(t)) + \lambda \int\limits_{t_0}^{t} K(t, s, x_*(s), u_*(s))\, ds \tag{3.2.14}$$

olur. Açıktır ki $x_*(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_*}$ olur. (3.2.12), (3.2.13), (3.2.14) ve 2.1.B koşulundan, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned}
&\left\|x_*(t) - x_0(t)\right\| \leq \left\|a(t, x_*(t)) - a(t, x_0(t))\right\| \\
+ \; & \lambda \left\| \int\limits_{t_0}^{t} K\left(t, s, x_*(s), u_*(s)\right)\, ds - \int\limits_{t_0}^{t} K\left(t, s, x_0(s), u_0(s)\right)\, ds \right\| \\
\leq \; & L_0 \left\|x_*(t) - x_0(t)\right\| + \lambda \int\limits_{t_0}^{t} \left\|K\left(t, s, x_*(s), u_*(s)\right) - K\left(t, s, x_0(s), u_0(s)\right)\right\| \, ds
\end{aligned}$$

$$\leq \; L_0 \left\| x_0(t) - x_*(t) \right\| + \lambda \int_{t_0}^{t} \left[L_2 + H_2 \left(\left\| u_0(s) \right\| + \left\| u_*(s) \right\| \right) \right] \left\| x_0(s) - x_*(s) \right\| ds$$

$$+ \; \lambda \int_{t_0}^{t} \left[L_3 + H_3 \left(\left\| x_0(s) \right\| + \left\| x_*(s) \right\| \right) \right] \left\| u_0(s) - u_*(s) \right\| ds \qquad (3.2.15)$$

olur.

$u_0(\cdot) \in U_{p,\mu_0}$ olduğundan, Önerme 2.3.1 'den keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\int_{t_0}^{t} \left\| u_0(s) \right\| \, ds \leq \mu_0 (\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \qquad (3.2.16)$$

olur. Ayrıca $u_*(\cdot) \in U_{p,\mu_*}$ olduğundan, Önerme 2.3.1 'e benzer olarak keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\int_{t_0}^{t} \left\| u_*(s) \right\| \, ds \leq \mu_* (\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \qquad (3.2.17)$$

olur.

$x_*(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_*}$, $x_0(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}$ olduğundan (3.2.8) 'den keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\left\| x_*(t) \right\| \leq r_1, \quad \left\| x_0(t) \right\| \leq r_1 \qquad (3.2.18)$$

olur. Bu durumda (3.2.9), (3.2.13), (3.2.16) ve (3.2.18) 'den her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^{t} \left[L_3 + H_3 \left(\left\| x_0(s) \right\| + \left\| x_*(s) \right\| \right) \right] \left\| u_0(s) - u_*(s) \right\| ds \\
\leq \; & \int_{t_0}^{t} (L_3 + 2r_1 H_3) \left\| u_0(s) - \frac{\mu_*}{\mu_0} u_0(s) \right\| ds \\
\leq \; & (L_3 + 2r_1 H_3) \frac{|\mu_0 - \mu_*|}{\mu_0} \int_{t_0}^{t} \left\| u_0(s) \right\| ds \\
\leq \; & (L_3 + 2r_1 H_3) \frac{|\mu_0 - \mu_*|}{\mu_0} \cdot \mu_0 (\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \\
= \; & (L_3 + 2r_1 H_3) (\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \left| \mu_* - \mu_0 \right| \\
= \; & \rho_1 \left| \mu_* - \mu_0 \right| \qquad (3.2.19)
\end{aligned}$$

olduğu elde edilir.

(3.2.15) ve (3.2.19) 'dan her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned}
\big\| x_*(t) \; - \; & x_0(t) \big\| \leq L_0 \left\| x_0(t) - x_*(t) \right\| + \lambda \rho_1 \left| \mu_* - \mu_0 \right| \\
& + \; \lambda \int_{t_0}^{t} \left[L_2 + H_2 \left(\left\| u_0(s) \right\| + \left\| u_*(s) \right\| \right) \right] \left\| x_0(s) - x_*(s) \right\| ds
\end{aligned}$$

olarak bulunur. $L_0 \in [0,1)$ olduğundan, son eşitsizlikten her $t \in [t_0,\theta]$ için

$$
\begin{aligned}
\left\| x_*(t) - x_0(t) \right\| &\leq \frac{\lambda \rho_1}{1-L_0} \left| \mu_* - \mu_0 \right| \\
+ \quad \frac{\lambda}{1-L_0} \int_{t_0}^{t} & \left[L_2 + H_2 \left(\|u_0(s)\| + \|u_*(s)\| \right) \right] \|x_0(s) - x_*(s)\| \, ds
\end{aligned} \tag{3.2.20}
$$

O halde (3.2.16), (3.2.17), (3.2.20) ve Gronwall eşitsizliğinden her $t \in [t_0,\theta]$ için

$$
\begin{aligned}
\left\| x_*(t) - x_0(t) \right\| &\leq \frac{\lambda \rho_1}{1-L_0} \left| \mu_* - \mu_0 \right| \\
&\cdot \quad \exp\left(\frac{\lambda}{1-L_0} \int\limits_{t_0}^{t} \left[L_2 + H_2 \left(\|u_0(s)\| + \|u_*(s)\| \right) \right] ds \right) \\
&\leq \quad \frac{\lambda \rho_1}{1-L_0} \left| \mu_* - \mu_0 \right| \\
&\cdot \quad \exp\left(\frac{\lambda}{1-L_0} \left[L_2(\theta - t_0) + H_2 \int\limits_{t_0}^{t} \|u_0(s)\| \, ds + H_2 \int\limits_{t_0}^{t} \|u_*(s)\| \, ds \right] \right) \\
&\leq \quad \frac{\lambda \rho_1}{1-L_0} \left| \mu_* - \mu_0 \right| \\
&\cdot \quad \exp\left(\frac{\lambda}{1-L_0} \left[L_2(\theta - t_0) + H_2(\mu_0 + \mu_*)(\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \right] \right)
\end{aligned} \tag{3.2.21}
$$

olduğu elde edilir.

$\mu_* \in (\mu_0 - \sigma, \mu_0 + \sigma)$ olduğundan (3.2.10), (3.2.11) ve (3.2.21) 'den her $t \in [t_0,\theta]$ için

$$
\begin{aligned}
\left\| x_*(t) - x_0(t) \right\| &\leq \frac{\lambda \rho_1}{1-L_0} \left| \mu_* - \mu_0 \right| \\
&\cdot \quad \exp\left(\frac{\lambda}{1-L_0} \left[L_2(\theta - t_0) + 2H_2 \left(\mu_0 + \sigma \right) \left(\theta - t_0 \right)^{\frac{p-1}{p}} \right] \right) \\
&= \quad \frac{\lambda \rho_1}{1-L_0} \left| \mu_* - \mu_0 \right| \cdot \exp\left[\frac{P_1(\lambda; p, \mu_0)}{1-L_0} \right] \\
&= \quad R_* \left| \mu_* - \mu_0 \right|
\end{aligned} \tag{3.2.22}
$$

olur.

Böylece (3.2.22) 'den keyfi $x_0(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}$ seçildiğinde, her $t \in [t_0,\theta]$ için

$$
\|x_0(t) - x_*(t)\| \leq R_* \left| \mu_* - \mu_0 \right|
$$

olacak biçimde $x_*(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_*}$ yörüngesinin var olduğu kanıtlanmış olur. O halde her $x_0(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}$ için

$$
\|x_0(\cdot) - x_*(\cdot)\|_C \leq R_* \left| \mu_* - \mu_0 \right|
$$

olacak biçimde $x_*(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_*}$ vardır. Bu ise

$$\mathbf{X}_{p,\mu_0} \subset \mathbf{X}_{p,\mu_*} + R_* \left|\mu_* - \mu_0\right| B_C(1) \tag{3.2.23}$$

olması demektir. Burada $B_C(1)$ kümesi, $C([t_0,\theta];\mathbb{R}^n)$ uzayında merkezi orijinde olan kapalı birim yuvardır.

Benzer şekilde

$$\mathbf{X}_{p,\mu_*} \subset \mathbf{X}_{p,\mu_0} + R_* \left|\mu_* - \mu_0\right| B_C(1) \tag{3.2.24}$$

olduğu kanıtlanır. O halde (3.2.23), (3.2.24) ve Önerme 1.1.1 'den

$$h_C\left(\mathbf{X}_{p,\mu_0}, \mathbf{X}_{p,\mu_*}\right) \leq R_* \left|\mu_* - \mu_0\right| \tag{3.2.25}$$

olduğu elde edilir. Son olarak, (3.2.25) 'ten, her $t \in [t_0,\theta]$ için

$$h_n\left(\mathbf{X}_{p,\mu_0}(t), \mathbf{X}_{p,\mu_*}(t)\right) \leq R_* \left|\mu_* - \mu_0\right|$$

olur. ■

Aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem 3.2.2 *Keyfi $\mu_1 \in (\mu_0 - \sigma, \mu_0 + \sigma)$, $\mu_2 \in (\mu_0 - \sigma, \mu_0 + \sigma)$ için*

$$h_C(\mathbf{X}_{p,\mu_1}, \mathbf{X}_{p,\mu_2}) \leq R_* \left|\mu_1 - \mu_2\right|$$

ve her $t \in [t_0,\theta]$ için

$$h_n(\mathbf{X}_{p,\mu_1}(t), \mathbf{X}_{p,\mu_2}(t)) \leq R_* \left|\mu_1 - \mu_2\right|$$

eşitsizlikleri doğrudur. Burada R_* sayısı (3.2.11) ile tanımlıdır.

Teorem 3.2.2 'in kanıtı, Teorem 3.2.1 'e benzer olarak yapılır ($\mu_1 = \mu_*$, $\mu_2 = \mu_0$ dersek, Teorem 3.2.1 'in kanıtı aynen tekrarlanır).

Teorem 3.2.2 'den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.3 *$\mu \to \mathbf{X}_{p,\mu}$, $\mu \in (\mu_0 - \sigma, \mu_0 + \sigma)$, küme değerli dönüşümü $(\mu_0 - \sigma, \mu_0 + \sigma)$ açık aralığında R_* sabiti ile Lipschitz süreklidir.*

Her sabitlenmiş $t \in [t_0,\theta]$ için $\mu \to \mathbf{X}_{p,\mu}(t)$, $\mu \in (\mu_0 - \sigma, \mu_0 + \sigma)$, küme değerli dönüşümü $(\mu_0 - \sigma, \mu_0 + \sigma)$ açık aralığında R_* sabiti ile Lipschitz süreklidir.

Burada $\mathbf{X}_{p,\mu}$ ve $\mathbf{X}_{p,\mu}(t)$ kümeleri uygun olarak (3.2.1) ve (3.2.2) ile, R_* sayısı ise (3.2.11) ile tanımlıdır.

3.3 Yörüngeler Kümesinin p 'ye Bağlılığı

Yörüngeler kümesinin p 'ye olan bağlılığını incelemeden önce, $p_1 \geq 1$ ve $p_2 \geq 1$ olmak üzere $L_{p_1}\big([t_0,\theta];\mathbb{R}^m\big)$ ve $L_{p_2}\big([t_0,\theta];\mathbb{R}^m\big)$ uzaylarının alt kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığını tanımlayalım. Genelde, farklı metrik uzayların alt kümeleri arasındaki uzaklıkları tanımlamak için Hausdorff-Gromov uzaklığı kullanılır (bkz., [79]). Burada biz farklı bir yaklaşım uygulayacağız. Keyfi $p \in [1,\infty)$ için
$L_p\big([t_0,\theta];\mathbb{R}^m\big) \subset L_1\big([t_0,\theta];\mathbb{R}^m\big)$ olduğundan, farklı $L_p\big([t_0,\theta];\mathbb{R}^m\big)$ uzaylarının alt kümeleri arasında Hausdorff uzaklığını tanımlarken $L_1\big([t_0,\theta];\mathbb{R}^m\big)$ uzayının normunu kullanacağız.

$1 \leq p_1 < +\infty$ ve $1 \leq p_2 < +\infty$ için $G \subset L_{p_1}\big([t_0,\theta];\mathbb{R}^m\big)$ ve $W \subset L_{p_2}\big([t_0,\theta];\mathbb{R}^m\big)$ kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığı $\hbar_1(G,W)$ olarak gösterilir ve

$$\hbar_1\big(G,W\big) = \max\left\{\sup_{x(\cdot)\in G} d_{L_1}\big(x(\cdot),W\big),\ \sup_{y(\cdot)\in W} d_{L_1}\big(y(\cdot),G\big)\big)\right\}$$

olarak tanımlanır. Burada

$$d_{L_1}\big(x(\cdot),W\big) = \inf_{y(\cdot)\in W} \|x(\cdot)-y(\cdot)\|_1 \ , \quad \|x(\cdot)-y(\cdot)\|_1 = \int_{t_0}^{\theta} \|x(t)-y(t)\|\ dt$$

olarak tanımlıdır.

$L_p\big([t_0,\theta];\mathbb{R}^m\big)$, $(p \in [1,\infty))$ uzayının merkezi orijinde olan $\mu_0 > 0$ yarıçaplı kapalı yuvarını

$$B_{L_p}(\mu_0) = \big\{u(\cdot) \in L_p\big([t_0,\theta];\mathbb{R}^m\big) : \|u(\cdot)\|_p \leq \mu_0\big\}.$$

olarak gösterelim. Açıktır ki $B_{L_p}(\mu_0) = U_{p,\mu_0}$. Burada U_{p,μ_0} (2.1.1) sisteminin mümkün kontrol fonksiyonları kümesidir ve (2.1.2) ile tanımlanmaktadır.

$L_p\big([t_0,\theta];\mathbb{R}^m\big)$, $p \in (1,\infty)$, uzaylarının merkezi orijinde olan μ_0 yarıçaplı kapalı yuvarlarının p 'ye sürekli bağlı olduğunu gösteren aşağıdaki önerme doğrudur (bkz., [63]).

Teorem 3.3.1 *[63] $p > 1$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda her $r \in (p-\delta_*, p+\delta_*)$ için*

$$\hbar_1(B_{L_r}(\mu_0), B_{L_p}(\mu_0)) < \varepsilon$$

olacak biçimde bir $\delta_* = \delta_*(\varepsilon) \in (0, p-1)$ sayısı vardır.

(2.1.1) sisteminde bulunan λ sayısı 2.1.C koşulunu, yani

$$0 \leq \lambda \left(L_2 \left(\theta - t_0 \right) + 2H_2 (\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \mu_0 \right) < 1 - L_0$$

eşitsizliğini sağlıyor ve burada $p > 1$ olmaktadır. Bu durumda $p - \eta > 1$ olmak üzere, keyfi $r \in [p - \eta, p + \eta]$ için

$$0 \leq \lambda \left(L_2 \left(\theta - t_0 \right) + 2H_2 (\theta - t_0)^{\frac{r-1}{r}} \mu_0 \right) < 1 - L_0 \tag{3.3.1}$$

olacak biçimde $\eta > 0$ vardır.

$$U_{r,\mu_0} = \{ u(\cdot) \in L_r([t_0, \theta]; \mathbb{R}^m) : \| u(\cdot) \|_r \leq \mu_0 \}$$

olarak gösterelim. O halde $U_{r,\mu_0} = B_{L_r}(\mu_0)$ olur.

Her $r \in [p - \eta, p + \eta]$ için (2.1.1) denklemindeki λ sayısı (3.3.1) eşitsizliğini sağladığından, Teorem 2.2.1 'in kanıtının aynısı uygulanarak, her $u(\cdot) \in U_{r,\mu_0}$ kontrol fonksiyonun (2.1.1) sisteminin tek yörüngesini ürettiği kanıtlanabilir.

$r \in [p - \eta, p + \eta]$ olmak üzere $\mathbf{X}_{r,\mu_0}$ ile (2.1.1) sisteminin tüm mümkün $u(\cdot) \in U_{r,\mu_0}$ kontrol fonksiyonları tarafından üretilen yörüngeler kümesini, yani

$$\mathbf{X}_{r,\mu_0} = \{ x(\cdot; u(\cdot)) : u(\cdot) \in U_{r,\mu_0} \}, \tag{3.3.2}$$

her sabitlenmiş $t \in [t_0, \theta]$ için ise

$$\mathbf{X}_{r,\mu_0}(t) = \{ x(t) \in \mathbb{R}^n : x(\cdot) \in \mathbf{X}_{r,\mu_0} \} \tag{3.3.3}$$

olarak gösterelim.

Teorem 2.3.3 'e benzer olarak, her $r \in [p - \eta, p + \eta]$ ve keyfi $x(\cdot) \in \mathbf{X}_{r,\mu_0}$ için

$$\begin{aligned} \| x(\cdot) \|_C \quad &\leq \quad \frac{\gamma_0 + \gamma_1 \left(\theta - t_0 \right) \lambda + \lambda L_3 \left(\theta - t_0 \right)^{\frac{r-1}{r}} \mu_0}{1 - L_0} \\ &\cdot \quad \exp \left[\frac{\lambda \left(L_2 (\theta - t_0) + \left(H_2 + H_3 \right) \left(\theta - t_0 \right)^{\frac{r-1}{r}} \mu_0 \right)}{1 - L_0} \right] \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

eşitsizliğinin doğru olduğu kanıtlanabilir.

$$l_* = \max \{ 1, \ \theta - t_0 \} \tag{3.3.5}$$

olsun. O halde keyfi $r \geq 1$ için

$$(\theta - t_0)^{\frac{r-1}{r}} \leq l_* \tag{3.3.6}$$

olur. Bu durumda (3.3.4), (3.3.5) ve (3.3.6) 'dan, keyfi $r \in [p-\eta, p+\eta]$ ve keyfi $x(\cdot) \in \mathbf{X}_{r,\mu_0}$ için

$$\begin{aligned} \|x(\cdot)\|_C &\leq \frac{\gamma_0 + \gamma_1 (\theta - t_0) \lambda + \lambda L_3 l_* \mu_0}{1 - L_0} \\ &\cdot \quad \exp\left[\frac{\lambda (L_2(\theta - t_0) + (H_2 + H_3) l_* \mu_0)}{1 - L_0}\right] \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

olarak bulunur.

$$\rho_2 = \frac{\gamma_0 + \gamma_1 (\theta - t_0) \lambda + \lambda L_3 l_* \mu_0}{1 - L_0} \ , \tag{3.3.8}$$

$$P_2(\lambda; \mu_0) = \lambda (L_2(\theta - t_0) + (H_2 + H_3) l_* \mu_0) \, , \tag{3.3.9}$$

$$r_2 = \rho_2 \cdot \exp\left[\frac{P_2(\lambda; \mu_0)}{1 - L_0}\right] \tag{3.3.10}$$

dersek, (3.3.7), (3.3.8), (3.3.9) ve (3.3.10) 'dan, keyfi $r \in [p-\eta, p+\eta]$ ve keyfi $x(\cdot) \in \mathbf{X}_{r,\mu_0}$ için

$$\|x(\cdot)\|_C \leq r_2 \tag{3.3.11}$$

olduğu elde edilir.

Şimdi, Teorem 3.3.1 'i kullanarak, (2.1.2) kısıtı olan (2.1.1) sisteminin yörüngeler kümesinin p 'ye olan bağlılığını inceleyeceğiz.

$$\nu_* = \frac{\lambda (L_3 + 2H_3 r_2)}{(1 - L_0)} \cdot \exp\left[\frac{\lambda}{1 - L_0} (L_2(\theta - t_0) + 2H_2 \mu_0 l_*)\right] \tag{3.3.12}$$

olsun.

Teorem 3.3.2 *Keyfi $\varepsilon > 0$ için $r \in (p-\xi, p+\xi)$ iken*

$$h_C(\mathbf{X}_{r,\mu_0}, \mathbf{X}_{p,\mu_0}) \leq \varepsilon$$

ve her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$h_n(\mathbf{X}_{r,\mu_0}(t), \mathbf{X}_{p,\mu_0}(t)) \leq \varepsilon$$

olacak biçimde bir $\xi = \xi(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır.

Kanıt. Teorem 3.3.1 'den $\dfrac{\varepsilon}{\nu_*}$ için her $r \in (p-\xi, p+\xi)$ için

$$\hbar_1(B_{L_r}(\mu_0), B_{L_p}(\mu_0)) < \frac{\varepsilon}{\nu_*} \tag{3.3.13}$$

olacak biçimde $\xi = \xi(\varepsilon) \in (0, p-1)$ sayısı vardır. Genelliği bozmaksızın $\xi < \eta$ olduğunu varsayalım. O halde

$$(p-\xi, p+\xi) \subset (p-\eta, p+\eta) \tag{3.3.14}$$

olur.

(3.3.14) kapsamasındaki $\eta > 0$ sayısı her $r \in [p-\eta, p+\eta]$ için (2.1.1) denklemindeki λ sayısının (3.3.1) eşitsizliğini sağlayacağı biçimde seçilmiştir.

Keyfi $r \in (p-\xi, p+\xi)$ ve $x(\cdot) \in \mathbf{X}_{r,\mu_0}$ alalım ve sabitleyelim. Bu durumda, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$x(t) = a(t, x(t)) + \lambda \int_{t_0}^{t} K(t, s, x(s), u(s))\, ds \tag{3.3.15}$$

olacak şekilde $u(\cdot) \in U_{r,\mu_0} = B_{L_r}(\mu_0)$ vardır. (3.3.13) 'ten

$$\|u(\cdot) - u_*(\cdot)\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{\nu_*}$$

olacak biçimde, yani

$$\int_{t_0}^{\theta} \|u(s) - u_*(s)\|\, ds \leq \frac{\varepsilon}{\nu_*} \tag{3.3.16}$$

olacak biçimde bir $u_*(\cdot) \in U_{p,\mu_0} = B_{L_p}(\mu_0)$ fonksiyonu vardır.

$x_*(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu (2.1.1) sisteminin $u_*(\cdot) \in U_{p,\mu_0} = B_{L_p}(\mu_0)$ mümkün kontrol fonksiyonu tarafından üretilen yörüngesi olsun. Bu durumda $x_*(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}$ ve her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$x_*(t) = a(t, x_*(t)) + \lambda \int_{t_0}^{t} K(t, s, x_*(s), u_*(s))\, ds \tag{3.3.17}$$

olur. (3.3.15), (3.3.16), (3.3.17) ve 2.1.B koşulundan, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned}
&\big\|x(t) - x_*(t)\big\| \leq \|a(t, x(t)) - a(t, x_*(t))\| \\
+\ & \lambda \left\| \int_{t_0}^{t} K(t, s, x(s), u(s))\, ds - \int_{t_0}^{t} K(t, s, x_*(s), u_*(s))\, ds \right\| \\
\leq\ & L_0 \|x(t) - x_*(t)\| + \lambda \int_{t_0}^{t} \|K(t, s, x(s), u(s)) - K(t, s, x_*(s), u_*(s))\|\, ds \\
\leq\ & L_0 \|x(t) - x_*(t)\| + \lambda \int_{t_0}^{t} [L_2 + H_2(\|u(s)\| + \|u_*(s)\|)]\, \|x(s) - x_*(s)\|\, ds \\
+\ & \lambda \int_{t_0}^{t} [L_3 + H_3(\|x(s)\| + \|x_*(s)\|)]\, \|u(s) - u_*(s)\|\, ds
\end{aligned} \tag{3.3.18}$$

olduğu elde edilir. $x(\cdot) \in \mathbf{X}_{r,\mu_0}$, $x_*(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}$ olduğundan, (3.3.11) 'den keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\|x(t)\| \leq r_2\,, \quad \|x_*(t)\| \leq r_2 \tag{3.3.19}$$

olur. Burada r_2 sayısı (3.3.10) ile tanımlıdır. Bu durumda (3.3.16) ve (3.3.19) 'dan her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t} [L_3 + H_3 (\|x(s)\| + \|x_*(s)\|)] \, \|u(s) - u_*(s)\| \, ds \\ &\leq \int_{t_0}^{t} (L_3 + 2H_3 r_2) \, \|u(s) - u_*(s)\| \, ds \leq (L_3 + 2H_3 r_2) \, \frac{\varepsilon}{\nu_*} \end{aligned} \tag{3.3.20}$$

olur.

(3.3.18) ve (3.3.20) 'den her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned} \big\|x(t) \quad - \quad x_*(t)\big\| &\leq L_0 \, \|x(t) - x_*(t)\| + \lambda \, (L_3 + 2H_3 r_2) \, \frac{\varepsilon}{\nu_*} \\ &+ \quad \lambda \int_{t_0}^{t} [L_2 + H_2 (\|u(s)\| + \|u_*(s)\|)] \, \|x(s) - x_*(s)\| \, ds \end{aligned} \tag{3.3.21}$$

olarak bulunur.

$L_0 \in [0, 1)$ olduğundan, (3.3.21) 'den her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned} \|x(t) - x_*(t)\| \quad &\leq \quad \frac{\lambda}{1 - L_0} \int_{t_0}^{t} \; [L_2 + H_2 (\|u(s)\| + \|u_*(s)\|)] \, \|x(s) - x_*(s)\| \; ds \\ &+ \quad \frac{\lambda \, (L_3 + 2H_3 r_2)}{(1 - L_0)\nu_*} \; \varepsilon \end{aligned} \tag{3.3.22}$$

olur.

Gronwall eşitsizliği ve (3.3.22) 'den, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned} &\big\|x(t) - x_*(t)\big\| \leq \varepsilon \, \frac{\lambda \, (L_3 + 2H_3 r_2)}{(1 - L_0)\nu_*} \\ &\cdot \quad \exp\left(\frac{\lambda}{1 - L_0} \; \int_{t_0}^{t} [L_2 + H_2 (\|u(s)\| + \|u_*(s)\|)] \; ds \right) \\ &\leq \quad \exp\left[\frac{\lambda}{1 - L_0} \left(L_2(\theta - t_0) + H_2 \left(\int_{t_0}^{\theta} \|u(s)\|)ds + \int_{t_0}^{\theta} \|u_*(s)\|)ds \right) \right) \right] \\ &\cdot \quad \varepsilon \, \frac{\lambda \, (L_3 + 2H_3 r_2)}{(1 - L_0)\nu_*} \end{aligned} \tag{3.3.23}$$

olduğu elde edilir.

$u_*(\cdot) \in U_{p,\mu_0}$, $u(\cdot) \in U_{r,\mu_0}$ olduğundan, Önerme 2.3.1 'den

$$\int_{t_0}^{\theta} \|u_*(s)\| \; ds \leq \mu_0(\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \;, \qquad \int_{t_0}^{\theta} \|u(s)\| \; ds \leq \mu_0(\theta - t_0)^{\frac{r-1}{r}} \tag{3.3.24}$$

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

olur. (3.3.6) ve (3.3.24) 'ten her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\int_{t_0}^{\theta} \|u_*(s)\| \ ds \leq \mu_0 l_* \ , \quad \int_{t_0}^{\theta} \|u(s)\| \ ds \leq \mu_0 l_* \tag{3.3.25}$$

olur. Burada $l_* > 0$ sayısı (3.3.5) ile tanımlıdır. Bu durumda (3.3.12), (3.3.23) ve (3.3.25) 'ten her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned} \left\| x(t) - x_*(t) \right\| &\leq \varepsilon \frac{\lambda \left(L_3 + 2H_3 r_2 \right)}{(1 - L_0)\nu_*} \\ \cdot & \quad \exp \left[\frac{\lambda}{1 - L_0} \left(L_2(\theta - t_0) + H_2 \left(\ \mu_0 l_* + \mu_0 l_* \right) \right) \right] \\ = & \quad \varepsilon \frac{\lambda \left(L_3 + 2H_3 r_2 \right)}{(1 - L_0)\nu_*} \cdot \exp \left[\frac{\lambda}{1 - L_0} \left(L_2(\theta - t_0) + 2H_2 \mu_0 l_* \right) \right] \\ = & \quad \varepsilon \end{aligned} \tag{3.3.26}$$

olarak bulunur. (3.3.26) eşitsizliği keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için sağlandığından

$$\|x(\cdot) - x_*(\cdot)\|_C \leq \varepsilon \tag{3.3.27}$$

olur.

Böylece $r \in (p-\xi, p+\xi)$ iken keyfi seçilmiş $x(\cdot) \in \mathbf{X}_{r,\mu_0}$ için (3.3.27) eşitsizliğini sağlayacak biçimde $x_*(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}$ olduğu kanıtlandı. Bu ise $r \in (p - \xi, p + \xi)$ iken

$$\mathbf{X}_{r,\mu_0} \subset \mathbf{X}_{p,\mu_0} + \varepsilon B_C(1) \tag{3.3.28}$$

olması demektir. Burada $B_C(1)$ kümesi $C\left([t_0, \theta]; \mathbb{R}^n\right)$ uzayının merkezi orijinde olan kapalı birim yuvarıdır.

$r \in (p - \xi, p + \xi)$ için, önce keyfi $x_*(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}$ yörüngesi seçilip sabitlenirse, benzer olarak

$$\|x_*(\cdot) - x(\cdot)\|_C \leq \varepsilon$$

olacak biçimde $x(\cdot) \in \mathbf{X}_{r,\mu_0}$ yörüngesinin var olduğu kanıtlanabilir. Bu ise keyfi $r \in (p - \xi, p + \xi)$ için

$$\mathbf{X}_{p,\mu_0} \subset \mathbf{X}_{r,\mu_0} + \varepsilon B_C(1) \tag{3.3.29}$$

kapsamasının doğru olması demektir.

Böylece (3.3.28) ve (3.3.29) içermelerinden keyfi $r \in (p - \xi, p + \xi)$ için

$$h_C \left(\mathbf{X}_{p,\mu_0}, \mathbf{X}_{r,\mu_0} \right) \leq \varepsilon$$

olduğu ve son eşitsizlikten ise keyfi $r \in (p-\xi, p+\xi)$ ve keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için

$$h_C\left(\mathbf{X}_{p,\mu_0}(t), \mathbf{X}_{r,\mu_0}(t)\right) \leq \varepsilon$$

olduğu elde edilir. ■

Teorem 3.3.2 'den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 3.3.3 *$r \to p$ iken*

$$h_C(\mathbf{X}_{r,\mu_0}, \mathbf{X}_{p,\mu_0}) \to 0$$

ve $[t_0, \theta]$ aralığında düzgün olarak

$$h_n(\mathbf{X}_{r,\mu_0}(t), \mathbf{X}_{p,\mu_0}(t)) \to 0, \quad t \in [t_0, \theta]$$

olur.

Burada $\mathbf{X}_{r,\mu_0}$ ve $\mathbf{X}_{r,\mu_0}(t)$ kümeleri uygun olarak (3.3.2) ve (3.3.3) ile tanımlıdır.

Teorem 3.3.2 ve Teorem 3.3.3 'ün kanıtına benzer olarak aşağıdaki teoremin doğruluğu kanıtlanabilir.

Teorem 3.3.4 *Keyfi $\tilde{r} \in (p-\eta, p+\eta)$ için $r \to \tilde{r}$ iken*

$$h_C(\mathbf{X}_{r,\mu_0}, \mathbf{X}_{\tilde{r},\mu_0}) \to 0$$

ve $[t_0, \theta]$ aralığında düzgün olarak

$$h_n(\mathbf{X}_{r,\mu_0}(t), \mathbf{X}_{\tilde{r},\mu_0}(t)) \to 0, \quad t \in [t_0, \theta]$$

olur.

Burada $\eta > 0$ sayısı, her $r \in [p-\eta, p+\eta]$ için (2.1.1) denklemindeki λ sayısının (3.3.1) eşitsizliğini sağlayacağı biçimde tanımlanmıştır.

Teorem 3.3.4 'ten sıradaki teoremin doğruluğu elde edilir.

Teorem 3.3.5 *$r \to \mathbf{X}_{r,\mu_0}$, $r \in (p-\eta, p+\eta)$, küme değerli dönüşümü $(p-\eta, p+\eta)$ aralığında süreklidir.*

Her sabitlenmiş $t \in [t_0, \theta]$ için $r \to \mathbf{X}_{r,\mu_0}(t)$, $r \in (p-\eta, p+\eta)$, küme değerli dönüşümü $(p-\eta, p+\eta)$ aralığında süreklidir.

4 YÖRÜNGELER KÜMESİNİN YAKLAŞIMI

Bu bölümde kompakt olmayan U_{p,μ_0} mümkün kontrol fonksiyonları kümesi, bir kompakt küme (integral kısıtlı, geometrik kısıtlı ve Lipschitz sabitleri aynı sabitle sınırlı kontrol fonksiyonları kümesi) ile değiştiriliyor. Daha sonra $\mathbf{X}_{p,\mu_0}(t)$, $(t \in [t_0, \theta])$ kümeleri ile, integral kısıtlı, geometrik kısıtlı ve Lipschitz sabitleri aynı sabitle sınırlı kontrol fonksiyonların ürettiği yörüngeler kümesinin t 'ye göre kesitleri arasındaki Hausdorff uzaklığı değerlendiriliyor.

4.1 Karmaşık Kısıtlı Kontrol Fonksiyonların Ürettiği Yörüngeler Kümesi

$H \in (0, \infty)$ olsun. U^H_{p,μ_0} ile her $t \in [t_0, \theta]$ için $\|u(t)\| \leq H$ geometrik kısıtını sağlayan $u(\cdot) \in U_{p,\mu_0}$ biçimindeki mümkün kontrol fonksiyonları kümesini gösterelim. Yani,

$$U^H_{p,\mu_0} = \{u(\cdot) \in U_{p,\mu_0} : \forall t \in [t_0, \theta] \text{ için } \|u(t)\| \leq H\}$$

olsun. Açıktır ki $U^H_{p,\mu_0} \subset U_{p,\mu_0}$ 'dır.

(2.1.1) sisteminin tüm mümkün $u(\cdot) \in U^H_{p,\mu_0}$ kontrol fonksiyonları tarafından üretilen yörüngeler kümesini $\mathbf{X}^H_{p,\mu_0}$, yani

$$\mathbf{X}^H_{p,\mu_0} = \left\{x(\cdot, u(\cdot)) : u(\cdot) \in U^H_{p,\mu_0}\right\} \tag{4.1.1}$$

olarak gösterelim. $t \in [t_0, \theta]$ için ise

$$\mathbf{X}^H_{p,\mu_0}(t) = \left\{x(t) \in \mathbb{R}^n : x(\cdot) \in \mathbf{X}^H_{p,\mu_0}\right\} \tag{4.1.2}$$

olsun.

$$k_* = \frac{2\lambda\left(L_3 + 2H_3 r_*\right)\mu_0^p}{1 - L_0} \cdot \exp\left(\frac{\lambda}{1 - L_0}\left[L_2(\theta - t_0) + 2H_2\mu_0(\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}}\right]\right) \tag{4.1.3}$$

olarak gösterelim. Burada $r_* > 0$ sayısı (2.3.11) ile tanımlıdır.

$\mathbf{X}_{p,\mu_0}$ ve $\mathbf{X}^H_{p,\mu_0}$ kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığı karakterize eden aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem 4.1.1

$$h_C(\mathbf{X}_{p,\mu_0}, \mathbf{X}^H_{p,\mu_0}) \leq \frac{k_*}{H^{p-1}}$$

ve $t \in [t_0, \theta]$ *için*

$$h_n(\mathbf{X}_{p,\mu_0}(t), \mathbf{X}^H_{p,\mu_0}(t)) \leq \frac{k_*}{H^{p-1}}$$

eşitsizlikleri doğrudur. Burada k_* *sayısı (4.1.3) ile tanımlıdır.*

Kanıt. $U^H_{p,\mu_0} \subset U_{p,\mu_0}$ olduğundan,

$$\mathbf{X}^H_{p,\mu_0} \subset \mathbf{X}_{p,\mu_0} \tag{4.1.4}$$

olduğu elde edilir.

Şimdi keyfi $x(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}$ yörüngesi alalım ve sabitleyelim. Bu durumda keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için

$$x(t) = a(t, x(t)) + \lambda \int_{t_0}^{t} K(t, s, x(s), u(s))\, ds \tag{4.1.5}$$

olacak biçimde $u(\cdot) \in U_{p,\mu_0}$ vardır. $u(\cdot) \in U_{p,\mu_0}$ mümkün kontrol fonksiyonunu kullanarak her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$u_0(t) = \begin{cases} u(t) & , \ \|u(t)\| \leq H \\ \dfrac{u(t)}{\|u(t)\|} H & , \ \|u(t)\| > H \end{cases} \tag{4.1.6}$$

olmak üzere $u_0(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^m$ yeni kontrol fonksiyonu tanımlayalım.

$t \in [t_0, \theta]$ için $\|u(t)\| \leq H$ iken, $u_0(t) = u(t)$ ve

$$\|u_0(t)\| = \|u(t)\| \leq H$$

olur. $t \in [t_0, \theta]$ için $\|u(t)\| > H$ iken, $u_0(t) = \dfrac{u(t)}{\|u(t)\|} H$ ve buradan $\|u_0(t)\| = H$ olarak bulunur. Böylece her $t \in [t_0, \theta]$ için,

$$\|u_0(t)\| \leq H \tag{4.1.7}$$

olduğu elde edilir. Ayrıca (4.1.6) 'dan keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için, $\|u_0(t)\| \leq \|u(t)\|$ olduğundan her $t \in [t_0, \theta]$ için, $\|u_0(t)\|^p \leq \|u(t)\|^p$ ve

$$\|u_0(\cdot)\|_p = \left(\int_{t_0}^{\theta} \|u_0(t)\|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{t_0}^{\theta} \|u(t)\|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} = \|u(\cdot)\|_p \tag{4.1.8}$$

olarak bulunur. $u(\cdot) \in U_{p,\mu_0}$ olduğundan $\|u(\cdot)\|_p \leq \mu_0$ ve (4.1.8) 'den

$$\|u_0(\cdot)\|_p \leq \mu_0 \tag{4.1.9}$$

olduğu elde edilir. (4.1.7) ve (4.1.9) 'dan $u_0(\cdot) \in U^H_{p,\mu_0}$ olur.

(2.1.1) sisteminin (4.1.6) ile tanımlı $u_0(\cdot) \in U^H_{p,\mu_0}$ kontrol fonksiyonu tarafından üretilen yörüngesini $x_0(\cdot)$ ile gösterirsek, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$x_0(t) = a(t, x_0(t)) + \lambda \int_{t_0}^{t} K(t, s, x_0(s), u_0(s))\, ds \tag{4.1.10}$$

olur. Bu durumda $x_0(\cdot) \in \mathbf{X}^H_{p,\mu_0}$ olur. (4.1.5), (4.1.10) ve 2.1.B koşulundan, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned}\big\|x(t) &- x_0(t)\big\| \leq \|a(t, x(t)) - a(t, x_0(t))\| \\ &+ \lambda \left\| \int_{t_0}^{t} K\left(t, s, x(s), u(s)\right)\, ds - \int_{t_0}^{t} K\left(t, s, x_0(s), u_0(s)\right)\, ds \right\| \\ &\leq L_0 \left\|x(t) - x_0(t)\right\| + \lambda \int_{t_0}^{t} \left\|K\left(t, s, x(s), u(s)\right) - K\left(t, s, x_0(s), u_0(s)\right)\right\|\, ds \\ &\leq L_0 \left\|x(t) - x_0(t)\right\| + \lambda \int_{t_0}^{t} \left[L_2 + H_2\left(\|u(s)\| + \|u_0(s)\|\right)\right] \|x(s) - x_0(s)\|\, ds \\ &+ \lambda \int_{t_0}^{t} \left[L_3 + H_3\left(\|x(s)\| + \|x_0(s)\|\right)\right] \|u(s) - u_0(s)\|\, ds \end{aligned} \tag{4.1.11}$$

olduğu elde edilir. $L_0 \in [0, 1)$ olduğundan, (4.1.11) 'den her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned}\big\|x(t) &- x_0(t)\big\| \leq \frac{\lambda}{1 - L_0} \int_{t_0}^{t} \left[L_2 + H_2\left(\|u(s)\| + \|u_0(s)\|\right)\right] \|x(s) - x_0(s)\|\, ds \\ &+ \frac{\lambda}{1 - L_0} \int_{t_0}^{t} \left[L_3 + H_3\left(\|x(s)\| + \|x_0(s)\|\right)\right] \|u(s) - u_0(s)\|\, ds \end{aligned} \tag{4.1.12}$$

olarak bulunur.

$x(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}$, $x_0(\cdot) \in \mathbf{X}^H_{p,\mu_0} \subset \mathbf{X}_{p,\mu_0}$ olduğundan Teorem 2.3.3 'ten keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\|x(t)\| \leq r_* \ , \quad \|x_0(t)\| \leq r_* \tag{4.1.13}$$

olur. Burada $r_* > 0$ sayısı (2.3.11) ile tanımlıdır.

(4.1.12) ve (4.1.13) 'ten her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$
\begin{aligned}
\|x(t) &- x_0(t)\| \leq \frac{\lambda}{1-L_0}\int\limits_{t_0}^{t}\left[L_2+H_2\left(\|u(s)\|+\|u_0(s)\|\right)\right]\|x(s)-x_0(s)\|\,ds \\
&+ \frac{\lambda}{1-L_0}\int\limits_{t_0}^{t}\left(L_3+2H_3r_*\right)\|u(s)-u_0(s)\|\,ds \\
&= \frac{\lambda}{1-L_0}\int\limits_{t_0}^{t}\left[L_2+H_2\left(\|u(s)\|+\|u_0(s)\|\right)\right]\|x(s)-x_0(s)\|\,ds \\
&+ \frac{\lambda\left(L_3+2H_3r_*\right)}{1-L_0}\int\limits_{t_0}^{t}\|u(s)-u_0(s)\|\,ds \qquad (4.1.14)
\end{aligned}
$$

olarak bulunur.

$t\in[t_0,\theta]$ için

$$G_t=\{s\in[t_0,t]:\|u(s)\|>H\}$$

kümesini tanımlayalım. Bu durumda

$$[t_0,t]\backslash G_t=\{s\in[t_0,t]:\|u(s)\|\leq H\}$$

olur. (4.1.6) 'dan, her $s\in[t_0,t]\backslash G_t$ için

$$\|u(s)-u_0(s)\|=0$$

eşitliği sağlanır. O halde (4.1.14) 'ten her $t\in[t_0,\theta]$ için

$$
\begin{aligned}
\|x(t) &- x_0(t)\| \leq \frac{\lambda}{1-L_0}\int_{t_0}^{t}\left[L_2+H_2\left(\|u(s)\|+\|u_0(s)\|\right)\right]\|x(s)-x_0(s)\|\,ds \\
&+ \frac{\lambda\left(L_3+2H_3r_*\right)}{1-L_0}\int_{G_t}\|u(s)-u_0(s)\|\,ds \qquad (4.1.15)
\end{aligned}
$$

olduğu elde edilir.

Hölder ve Minkowski eşitsizliklerini kullanırsak

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{G_t}\|u(s)-u_0(s)\|\,ds &\leq \left(\int\limits_{G_t}1^{\frac{p}{p-1}}\,ds\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int\limits_{G_t}\|u(s)-u_0(s)\|^p\,ds\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= [\nu(G_t)]^{\frac{p-1}{p}}\left(\int\limits_{G_t}\|u(s)-u_0(s)\|^p\,ds\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq [\nu(G_t)]^{\frac{p-1}{p}}\left[\left(\int\limits_{G_t}\|u(s)\|^p\,ds\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int\limits_{G_t}\|u_0(s)\|^p\,ds\right)^{\frac{1}{p}}\right] \qquad (4.1.16)
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. Burada $\nu(G_t)$ sayısı, G_t kümesinin Lebesgue ölçümünü göstermektedir.

$u(\cdot) \in U_{p,\mu_0}$ ve $u_0(\cdot) \in U^H_{p,\mu_0} \subset U_{p,\mu_0}$ olduğundan $\|u(\cdot)\|_p \leq \mu_0$ ve $\|u_0(\cdot)\|_p \leq \mu_0$ olur. $G_t \subset [t_0, \theta]$ olduğundan, (4.1.16) 'dan

$$\begin{aligned} & \int\limits_{G_t} \|u(s) - u_0(s)\| \; ds \\ \leq \;& [\nu(G_t)]^{\frac{p-1}{p}} \left[\left(\int\limits_{G_t} \|u(s)\|^p \; ds \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_{G_t} \|u_0(s)\|^p \; ds \right)^{\frac{1}{p}} \right] \\ \leq \;& [\nu(G_t)]^{\frac{p-1}{p}} \left[\left(\int\limits_{t_0}^{\theta} \|u(s)\|^p \; ds \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_{t_0}^{\theta} \|u_0(s)\|^p \; ds \right)^{\frac{1}{p}} \right] \\ \leq \;& 2\mu_0 \left[\nu(G_t)\right]^{\frac{p-1}{p}} \end{aligned} \tag{4.1.17}$$

olarak bulunur.

Öte yandan her $s \in G_t$ için $\|u(s)\| > H$, $G_t \subset [t_0, \theta]$ ve $u(\cdot) \in U_{p,\mu_0}$ olduğundan

$$H^p \cdot \nu(G_t) \leq \int\limits_{G_t} \|u(s)\|^p \; ds \leq \int\limits_{t_0}^{\theta} \|u(s)\|^p \; ds \leq \mu_0^p$$

olur. O halde,

$$\nu(G_t) \leq \frac{\mu_0^p}{H^p} \tag{4.1.18}$$

olarak bulunur. (4.1.17) ve (4.1.18) 'den,

$$\int\limits_{G_t} \|u(s) - u_0(s)\| \; ds \leq \frac{2\mu_0^p}{H^{p-1}} \tag{4.1.19}$$

eşitsizliğinin doğru olduğu bulunur.

(4.1.15) ve (4.1.19) 'dan, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned} \left\|x(t) \;-\; x_0(t)\right\| \leq & \frac{\lambda}{1 - L_0} \int_{t_0}^{t} \left[L_2 + H_2 \left(\|u(s)\| + \|u_0(s)\|\right)\right] \|x(s) - x_0(s)\| \, ds \\ + & \frac{2\lambda \left(L_3 + 2H_3 r_*\right) \mu_0^p}{(1 - L_0) H^{p-1}} \end{aligned} \tag{4.1.20}$$

olduğu elde edilir.

(4.1.20) ve Gronwall eşitsizliğinden, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\|x(t)-x_0(t)\| \le \frac{2\lambda\left(L_3+2H_3r_*\right)\mu_0^p}{(1-L_0)H^{p-1}}$$

$$\cdot \quad \exp\left(\frac{\lambda}{1-L_0}\int_{t_0}^{t}\left[L_2+H_2\left(\|u(s)\|+\|u_0(s)\|\right)\right]ds\right) \tag{4.1.21}$$

olarak bulunur. $u(\cdot)\in U_{p,\mu_0}$ ve $u_0(\cdot)\in U^H_{p,\mu_0}\subset U_{p,\mu_0}$ olduğundan Önerme 2.3.1 'den her $t\in[t_0,\theta]$ için

$$\int_{t_0}^{t}\|u(s)\|\,ds \le \mu_0(\theta-t_0)^{\frac{p-1}{p}}, \quad \int_{t_0}^{t}\|u_0(s)\|\,ds \le \mu_0(\theta-t_0)^{\frac{p-1}{p}} \tag{4.1.22}$$

olur. Bu durumda (4.1.3), (4.1.21) ve (4.1.22) 'den, her $t\in[t_0,\theta]$ için

$$\begin{aligned}\|x(t)-x_0(t)\| \;&\le\; \frac{2\lambda\left(L_3+2H_3r_*\right)\mu_0^p}{(1-L_0)H^{p-1}}\\ &\cdot\quad \exp\left(\frac{\lambda}{1-L_0}\left[L_2(\theta-t_0)+2H_2\mu_0(\theta-t_0)^{\frac{p-1}{p}}\right]\right)=\frac{k_*}{H^{p-1}}\end{aligned}$$

olarak bulunur. Son eşitsizlikten ise

$$\|x(\cdot)-x_0(\cdot)\|_C \le \frac{k_*}{H^{p-1}}$$

olduğu elde edilir. Böylece, her $x(\cdot)\in\mathbf{X}_p$ için

$$\|x(\cdot)-x_0(\cdot)\|_C \le \frac{k_*}{H^{p-1}}$$

olacak biçimde bir $x_0(\cdot)\in\mathbf{X}^H_{p,\mu_0}$ olduğu kanıtlanmış olur. Bu ise,

$$\mathbf{X}_{p,\mu_0}\subset\mathbf{X}^H_{p,\mu_0}+\frac{k_*}{H^{p-1}}B_C(1) \tag{4.1.23}$$

kapsamasının doğru olması demektir. Burada $B_C(1)$ kümesi, $C\big([t_0,\theta];\mathbb{R}^n\big)$ sürekli fonksiyonlar uzayındaki kapalı birim yuvarı göstermektedir.

(4.1.4) 'ten

$$\mathbf{X}^H_{p,\mu_0}\subset\mathbf{X}_{p,\mu_0}\subset\mathbf{X}_{p,\mu_0}+\frac{k_*}{H^{p-1}}B_C(1) \tag{4.1.24}$$

kapsamasının doğru olduğu görülür. O halde (4.1.23) ve (4.1.24) kapsamalarından

$$h_C(\mathbf{X}_{p,\mu_0},\mathbf{X}^H_{p,\mu_0}) \le \frac{k_*}{H^{p-1}} \tag{4.1.25}$$

olarak bulunur. Son olarak, (4.1.25) 'ten her $t\in[t_0,\theta]$ için

$$h_n(\mathbf{X}_{p,\mu_0}(t),\mathbf{X}^H_{p,\mu_0}(t)) \le \frac{k_*}{H^{p-1}}$$

olduğu elde edilir. ■

Teorem 4.1.1 'den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.2 *$H \to \infty$ iken*

$$h_C(\mathbf{X}_{p,\mu_0}, \mathbf{X}^H_{p,\mu_0}) \to 0$$

ve ayrıca $H \to \infty$ iken $[t_0, \theta]$ aralığında düzgün olarak

$$h_n(\mathbf{X}_{p,\mu_0}(t), \mathbf{X}^H_{p,\mu_0}(t)) \to 0$$

olur.

Burada $\mathbf{X}^H_{p,\mu_0}$ ve $\mathbf{X}^H_{p,\mu_0}(t)$ kümeleri uygun olarak (4.1.1) ve (4.1.2) ile tanımlıdır.

4.2 Karmaşık Kısıtlı ve Lipschitz Sürekli Kontrol Fonksiyonların Ürettiği Yörüngeler Kümesi

Yeni mümkün kontrol fonksiyonları kümesi tanımlayalım.

$$U^{H,lip}_{p,\mu_0} = \{u(\cdot) \in U^H_{p,\mu_0} : u(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^m \text{ Lipschitz süreklidir}\}$$

olsun. Açıktır ki, $U^{H,lip}_{p,\mu_0} \subset U^H_{p,\mu_0}$ 'dır.

(2.1.1) sisteminin tüm mümkün $u(\cdot) \in U^{H,lip}_{p,\mu_0}$ kontrol fonksiyonları tarafından üretilen yörüngeler kümesini $\mathbf{X}^{H,lip}_{p,\mu_0}$ ile gösterelim. O halde

$$\mathbf{X}^{H,lip}_{p,\mu_0} = \left\{x(\cdot, u(\cdot)) : u(\cdot) \in U^{H,lip}_{p,\mu_0}\right\} \tag{4.2.1}$$

olur. $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\mathbf{X}^{H,lip}_{p,\mu_0}(t) = \left\{x(t) \in \mathbb{R}^n : x(\cdot) \in \mathbf{X}^{H,lip}_{p,\mu_0}\right\} \tag{4.2.2}$$

olsun.

$$g_0 = \frac{\lambda \left(L_3 + 2H_3 r_*\right) (\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}}}{1 - L_0} \cdot \exp\left[\frac{L(\lambda; p, \mu_0) - L_0}{1 - L_0}\right] \tag{4.2.3}$$

olarak tanımlayalım. Burada $L(\lambda; p, \mu_0)$ (2.2.1) ile, $r_* > 0$ sayısı ise (2.3.11) ile tanımlıdır.

Bu durumda $\mathbf{X}^H_{p,\mu_0}$ ve $\mathbf{X}^{H,lip}_{p,\mu_0}$ kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığı karakterize eden aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem 4.2.1 *$H > 0$ herhangi bir sabitlenmiş sayı olsun. O halde keyfi $\varepsilon > 0$ için*

$$h_C\left(\mathbf{X}^H_{p,\mu_0}, \mathbf{X}^{H,lip}_{p,\mu_0}\right) \leq \varepsilon$$

ve her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$h_n(\mathbf{X}^H_{p,\mu_0}(t), \mathbf{X}^{H,lip}_{p,\mu_0}(t)) \leq \varepsilon$$

eşitsizlikleri doğrudur.

Kanıt. Keyfi $\varepsilon > 0$ alalım ve sabitleyelim. $U^{H,lip}_{p,\mu_0} \subset U^H_{p,\mu_0}$ olduğundan

$$\mathbf{X}^{H,lip}_{p,\mu_0} \subset \mathbf{X}^H_{p,\mu_0} \subset \mathbf{X}^H_{p,\mu_0} + \varepsilon B_C(1) \tag{4.2.4}$$

olduğu açıktır.

Şimdi keyfi $x(\cdot) \in \mathbf{X}^H_{p,\mu_0}$ alalım ve sabitleyelim. O halde her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$x(t) = a(t, x(t)) + \lambda \int_{t_0}^{t} K(t, s, x(s), u(s))\, ds \tag{4.2.5}$$

olacak biçimde $u(\cdot) \in U^H_{p,\mu_0}$ vardır.

$h \in (0, 1)$ için $u_h(\cdot)$ ile $u(\cdot) \in U^H_{p,\mu_0}$ mümkün kontrol fonksiyonunun Steklov fonksiyonunu gösterelim. Bu durumda

$$u_h(t) = \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} \widetilde{u}(\tau)\, d\tau\ , \quad t \in [t_0, \theta]$$

olur. Burada

$$\widetilde{u}(\tau) = \begin{cases} u(\tau) & , \tau \in [t_0, \theta] \\ 0 & , \tau \in [t_0 - 1, t_0) \bigcup (\theta, \theta + 1] \end{cases}$$

olarak tanımlıdır.

$u(\cdot) \in U^H_{p,\mu_0}$ olduğundan $\|u(\cdot)\|_p \leq \mu_0$ ve keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için $\|u(t)\| \leq H$ olur. O halde Önerme 1.2.3 'ten her sabitlenmiş $h \in (0, 1)$ için, $\|u_h(\cdot)\|_p \leq \mu_0$, her $t \in [t_0, \theta]$ için $\|u_h(t)\| \leq H$ ve $u_h(\cdot)$ fonksiyonu $[t_0, \theta]$ aralığında $\dfrac{H}{h}$ sabiti ile Lipschitz süreklidir. Bu durumda $u_h(\cdot) \in U^{H,lip}_{p,\mu_0}$ olarak bulunur. Ayrıca, Önerme 1.2.4 'ten

$$\lim_{h \to 0^+} \|u_h(\cdot) - u(\cdot)\|_p = 0$$

olduğu, yani

$$h \to 0^+ \ \text{ iken } \ \left(\int_{t_0}^{\theta} \|u_h(s) - u(s)\|^p\, ds \right)^{\frac{1}{p}} \to 0 \tag{4.2.6}$$

olduğu elde edilir.

O halde (4.2.6) 'dan, $\dfrac{\varepsilon}{g_0} > 0$ için

$$\left(\int_{t_0}^{\theta} \|u_{h_0}(s) - u(s)\|^p \, ds \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\varepsilon}{g_0} \tag{4.2.7}$$

olacak biçimde $h_0 \in (0,1)$ vardır. Burada $g_0 > 0$ sayısı (4.2.3) ile tanımlıdır.

Kısaca, $u_0(\cdot) = u_{h_0}(\cdot)$ olarak gösterelim. O halde $\|u_0(\cdot)\|_p \leq \mu_0$, keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için, $\|u_0(t)\| \leq H$ ve $u_0(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu $\dfrac{H}{h_0}$ sabiti ile Lipschitz sürekli olur. Böylece, $u_0(\cdot) \in U_{p,\mu_0}^{H,lip}$ olur. Ayrıca (4.2.7) gereği

$$\left(\int_{t_0}^{\theta} \|u_0(s) - u(s)\|^p \, ds \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\varepsilon}{g_0} \tag{4.2.8}$$

olur.

(2.1.1) sisteminin $u_0(\cdot) \in U_{p,\mu_0}^{H,lip}$ kontrol fonksiyonu tarafından üretilen yörüngesini $x_0(\cdot)$ ile gösterirsek, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$x_0(t) = a(t, x_0(t)) + \lambda \int_{t_0}^{t} K(t, s, x_0(s), u_0(s)) \, ds \tag{4.2.9}$$

olur. Açıktır ki, $x_0(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip}$ 'tir.

(4.2.5), (4.2.9) ve 2.1.B koşulundan, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned}
\|x(t) - x_0(t)\| &\leq \|a(t, x(t)) - a(t, x_0(t))\| \\
&+ \lambda \left\| \int_{t_0}^{t} K(t, s, x(s), u(s)) \, ds - \int_{t_0}^{t} K(t, s, x_0(s), u_0(s)) \, ds \right\| \\
&\leq L_0 \|x(t) - x_0(t)\| + \lambda \int_{t_0}^{t} \|K(t, s, x(s), u(s)) - K(t, s, x_0(s), u_0(s))\| \, ds \\
&\leq L_0 \|x(t) - x_0(t)\| + \lambda \int_{t_0}^{t} [L_2 + H_2 (\|u(s)\| + \|u_0(s)\|)] \, \|x(s) - x_0(s)\| \, ds \\
&+ \lambda \int_{t_0}^{t} [L_3 + H_3 (\|x(s)\| + \|x_0(s)\|)] \, \|u(s) - u_0(s)\| \, ds
\end{aligned} \tag{4.2.10}$$

olarak bulunur.

$L_0 \in [0,1)$ olduğundan, (4.2.10) 'dan her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\|x(t) - x_0(t)\| \le \frac{\lambda}{1-L_0}\int_{t_0}^{t}\left[L_2 + H_2\left(\|u(s)\| + \|u_0(s)\|\right)\right]\|x(s)-x_0(s)\|\,ds$$

$$+ \frac{\lambda}{1-L_0}\int_{t_0}^{t}\left[L_3 + H_3\left(\|x(s)\| + \|x_0(s)\|\right)\right]\|u(s)-u_0(s)\|\,ds \qquad (4.2.11)$$

eşitsizliği elde edilir.

Hölder eşitsizliği gereği, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\int_{t_0}^{t}\|u(\tau)-u_0(\tau)\|\,d\tau \le \left(\int_{t_0}^{t} 1^{\frac{p}{p-1}}\,d\tau\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_{t_0}^{t}\|u(\tau)-u_0(\tau)\|^p\,d\tau\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le (\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_{t_0}^{t}\|u(\tau)-u_0(\tau)\|^p\,d\tau\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le (\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_{t_0}^{\theta}\|u(\tau)-u_0(\tau)\|^p\,d\tau\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (4.2.12)$$

olur. Bu durumda, (4.2.8) ve (4.2.12) eşitsizliklerinden, keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\int_{t_0}^{t}\|u(\tau)-u_0(\tau)\|\,d\tau \le (\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}}\cdot\frac{\varepsilon}{g_0} \qquad (4.2.13)$$

olduğu elde edilir.

$x(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H} \subset \mathbf{X}_{p,\mu_0}$ ve $x_0(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip} \subset \mathbf{X}_{p,\mu_0}$ olduğundan Teorem 2.3.3 gereği keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\|x(t)\| \le r_*\,, \quad \|x_0(t)\| \le r_* \qquad (4.2.14)$$

olur. Burada r_* sayısı (2.3.11) ile tanımlıdır.

(4.2.13) ve (4.2.14) eşitsizliklerinden, keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\int_{t_0}^{t}\left[L_3 + H_3\left(\|x(s)\| + \|x_0(s)\|\right)\right]\|u(s)-u_0(s)\|\,ds$$

$$\le \int_{t_0}^{t}\left(L_3 + 2H_3 r_*\right)\|u(s)-u_0(s)\|\,ds$$

$$\le \frac{L_3 + 2H_3 r_*}{g_0}(\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}}\cdot\varepsilon \qquad (4.2.15)$$

olarak bulunur.

(4.2.12) ve (4.2.15) eşitsizliklerinden her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned} \left\|x(t) - x_0(t)\right\| &\leq \frac{\lambda}{1 - L_0} \int\limits_{t_0}^{t} \left[L_2 + H_2 \left(\|u(s)\| + \|u_0(s)\|\right)\right] \|x(s) - x_0(s)\| \, ds \\ &+ \frac{\lambda \left(L_3 + 2H_3 r_*\right) \left(\theta - t_0\right)^{\frac{p-1}{p}}}{(1 - L_0) g_0} \cdot \varepsilon \end{aligned} \tag{4.2.16}$$

olduğu elde edilir. Şimdi (4.2.16) ve Gronwall eşitsizliğinden, keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned} \|x(t) - x_0(t)\| \leq \varepsilon & \frac{\lambda \left(L_3 + 2H_3 r_*\right) \left(\theta - t_0\right)^{\frac{p-1}{p}}}{(1 - L_0) g_0} \\ \cdot \ \exp & \left(\frac{\lambda}{1 - L_0} \int\limits_{t_0}^{t} \left[L_2 + H_2 \left(\|u(s)\| + \|u_0(s)\|\right)\right] ds \right) \end{aligned} \tag{4.2.17}$$

olur.

$u(\cdot) \in U^H_{p,\mu_0} \subset U_{p,\mu_0}$ ve $u_0(\cdot) \in U^{H,lip}_{p,\mu_0} \subset U_{p,\mu_0}$ olduğundan Önerme 2.3.1 'den her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\int\limits_{t_0}^{t} \|u(s)\| \, ds \leq \mu_0 (\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}}, \quad \int\limits_{t_0}^{t} \|u_0(s)\| \, ds \leq \mu_0 (\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \tag{4.2.18}$$

olur.

O halde (2.2.1), (4.2.3), (4.2.17) ve (4.2.18) 'den, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned} \|x(t) - x_0(t)\| \leq \varepsilon & \frac{\lambda \left(L_3 + 2H_3 r_*\right) \left(\theta - t_0\right)^{\frac{p-1}{p}}}{(1 - L_0) g_0} \\ \cdot \ \exp & \left[\frac{\lambda}{1 - L_0} \left[L_2 (\theta - t_0) + 2 H_2 \mu_0 (\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \right] \right] \\ = \ \varepsilon & \frac{\lambda \left(L_3 + 2H_3 r_*\right) \left(\theta - t_0\right)^{\frac{p-1}{p}}}{(1 - L_0) g_0} \cdot \exp \left[\frac{L(\lambda; p, \mu_0) - L_0}{1 - L_0} \right] = \varepsilon \end{aligned}$$

olur. Son olarak, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\|x(t) - x_0(t)\| \leq \varepsilon$$

olduğu ve buradan

$$\|x(\cdot) - x_0(\cdot)\|_C \leq \varepsilon \tag{4.2.19}$$

olduğu elde edilir.

Böylece her sabitlenmiş $x(\cdot) \in \mathbf{X}^H_{p,\mu_0}$ için (4.2.19) eşitsizliğini sağlayacak biçimde $x_0(\cdot) \in \mathbf{X}^{H,lip}_{p,\mu_0}$ olduğu kanıtlanmış olur. Bu ise,

$$\mathbf{X}^H_{p,\mu_0} \subset \mathbf{X}^{H,lip}_{p,\mu_0} + \varepsilon B_C(1) \tag{4.2.20}$$

olması demektir.

O halde (4.2.4) ve (4.2.20) kapsamalarından,

$$h_C(\mathbf{X}^{H}_{p,\mu_0}, \mathbf{X}^{H,lip}_{p,\mu_0}) \le \varepsilon \tag{4.2.21}$$

olur.

(4.2.21) eşitsizliğinden ise keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için

$$h_n(\mathbf{X}^{H}_{p,\mu_0}(t), \mathbf{X}^{H,lip}_{p,\mu_0}(t)) \le \varepsilon$$

olur. ■

Teorem 4.2.1 'den aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Teorem 4.2.2 *$H > 0$ herhangi bir sabitlenmiş sayı olsun. O halde*

$$h_C(\mathbf{X}^{H}_{p,\mu_0}, \mathbf{X}^{H,lip}_{p,\mu_0}) = 0$$

ve her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$h_n(\mathbf{X}^{H}_{p,\mu_0}(t), \mathbf{X}^{H,lip}_{p,\mu_0}(t)) = 0$$

eşitlikleri doğrudur.

Burada $\mathbf{X}^{H,lip}_{p,\mu_0}$ ve $\mathbf{X}^{H,lip}_{p,\mu_0}(t)$ kümeleri uygun olarak (4.2.1) ve (4.2.2) ile tanımlıdır.

Örnek 2.4.4 'te $\mathbf{X}_{p,\mu_0}$ ve $\mathbf{X}_{p,\mu_0}(t)$ kümelerinin her zaman kapalı olmadıklarını gördük. Genelde $\mathbf{X}^{H}_{p,\mu_0}$, $\mathbf{X}^{H,lip}_{p,\mu_0}$, $\mathbf{X}^{H}_{p,\mu_0}(t)$, $\mathbf{X}^{H,lip}_{p,\mu_0}(t)$ kümeleri de kapalı değildir. Bu durumdan dolayı, Teorem 4.2.2 'den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.2.3 *$H > 0$ herhangi bir sabitlenmiş sayı olsun. O halde*

$$cl(\mathbf{X}^{H}_{p,\mu_0}) = cl(\mathbf{X}^{H,lip}_{p,\mu_0})$$

ve her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$cl(\mathbf{X}^{H}_{p,\mu_0}(t)) = cl(\mathbf{X}^{H,lip}_{p,\mu_0}(t))$$

eşitlikleri doğrudur.

Burada $cl(E)$, E kümesinin kapanışını göstermektedir.

4.3 Kompakt Kontrol Fonksiyonlar Kümesi

$R > 0$ için $U^{H,lip,R}_{p,\mu_0}$ ile Lipschitz sabiti R 'den büyük olmayan Lipschitz sürekli $u(\cdot) \in U^{H,lip}_{p,\mu_0}$ kontrol fonksiyonları kümesini gösterelim. Yani,

$$\begin{aligned} U^{H,lip,R}_{p,\mu_0} &= \{u(\cdot) \in U^{H,lip}_{p,\mu_0} : u(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^m \text{ fonksiyonunun Lipschitz sabiti} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad R \text{ 'den küçük veya eşittir}\} \end{aligned}$$

olsun.

$U^{H,lip,R}_{p,\mu_0}$ kontrol fonksiyonlar kümesinin sürekli fonksiyonlar uzayında kompakt küme olduğunu göstereceğiz.

Tanım gereği, $R_1 \le R_2$ iken

$$U^{H,lip,R_1}_{p,\mu_0} \subset U^{H,lip,R_2}_{p,\mu_0}$$

olduğu açıktır.

Önerme 4.3.1 *Her sabitlenmiş $H > 0$ sayısı için*

$$U^{H,lip}_{p,\mu_0} = \bigcup_{R=1}^{\infty} U^{H,lip,R}_{p,\mu_0}$$

eşitliği doğrudur.

Burada $R = 1, 2, \ldots$ doğal sayılardır.

Kanıt. Her $R = 1, 2 \ldots$ için

$$U^{H,lip,R}_{p,\mu_0} \subset U^{H,lip}_{p,\mu_0}$$

olduğundan

$$\bigcup_{R=1}^{\infty} U^{H,lip,R}_{p,\mu_0} \subset U^{H,lip}_{p,\mu_0} \tag{4.3.1}$$

olur. Şimdi

$$U^{H,lip}_{p,\mu_0} \subset \bigcup_{R=1}^{\infty} U^{H,lip,R}_{p,\mu_0} \tag{4.3.2}$$

olduğunu kanıtlayalım.

Herhangi $u(\cdot) \in U^{H,lip}_{p,\mu_0}$ alalım ve sabitleyelim. O halde $u(\cdot) \in U^{H}_{p,\mu_0}$ ve $u(\cdot)$ fonksiyonu bir $K_* > 0$ sabiti ile Lipschitz süreklidir. $R_* > K_*$ olacak biçimde R_*

doğal sayısı alalım. O halde $u(\cdot)$ fonksiyonu R_* sabiti ile de Lipschitz sürekli olur ve böylece $u(\cdot) \in U_{p,\mu_0}^{H,lip,R_*}$ olduğu elde edilir. Buradan

$$u(\cdot) \in \bigcup_{R=1}^{\infty} U_{p,\mu_0}^{H,lip,R}$$

olduğu görülür. $u(\cdot) \in U_{p,\mu_0}^{H,lip}$ keyfi seçildiğinden, (4.3.2) kapsaması doğrudur. (4.3.1) ve (4.3.2) 'den önermenin doğru olduğu elde edilir. ■

Her sabitlenmiş $R > 0$ için $U_{p,\mu_0}^{H,lip,R}$ kümesinin $C\big([t_0,\theta];\mathbb{R}^m\big)$ uzayında kompakt alt küme olduğunu gösteren aşağıdaki önerme doğrudur.

Önerme 4.3.2 *Her sabitlenmiş $H > 0$ ve $R > 0$ sayıları için $U_{p,\mu_0}^{H,lip,R}$ kümesi, $C\big([t_0,\theta];\mathbb{R}^m\big)$ uzayında kompakt alt kümedir.*

Kanıt. Herhangi bir $R > 0$ alalım ve sabitleyelim. Her Lipschitz sürekli fonksiyon aynı zamanda sürekli olduğundan $U_{p,\mu_0}^{H,lip,R} \subset C\big([t_0,\theta];\mathbb{R}^m\big)$ olur.

Keyfi $u(\cdot) \in U_{p,\mu_0}^{H,lip,R}$ alalım. Her $t \in [t_0,\theta]$ için $\|u(t)\| \le H$ olduğundan

$$\|u(\cdot)\|_C \le H \tag{4.3.3}$$

olduğu elde edilir. $u(\cdot) \in U_{p,\mu_0}^{H,lip,R}$ keyfi seçilmiş eleman olduğundan (4.3.3) 'ten $U_{p,\mu_0}^{H,lip,R}$ kümesinin $C\big([t_0,\theta];\mathbb{R}^m\big)$ uzayında düzgün sınırlı küme olduğu elde edilir.

Şimdi $U_{p,\mu_0}^{H,lip,R}$ kümesinin eşsürekli fonksiyonlar kümesi olduğunu gösterelim. $\varepsilon > 0$ için $\delta_*(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{R}$ olsun. Herhangi bir $u(\cdot) \in U_{p,\mu_0}^{H,lip,R}$ fonksiyonu alalım. $u(\cdot)$ fonksiyonu $R > 0$ sabiti ile Lipschitz sürekli olduğundan, $\varepsilon > 0$ için $|t_1 - t_2| < \delta_*(\varepsilon)$ $(t_1 \in [t_0,\theta]\,,\ t_2 \in [t_0,\theta])$ iken

$$\|u(t_1) - u(t_2)\| \le R\,|t_1 - t_2| < R\delta_*(\varepsilon) = R\frac{\varepsilon}{R} = \varepsilon$$

olur. Böylece $U_{p,\mu_0}^{H,lip,R}$ kümesi eşsürekli fonksiyonlar kümesi olur.

$U_{p,\mu_0}^{H,lip,R} \subset C\big([t_0,\theta];\mathbb{R}^m\big)$ kümesi düzgün sınırlı ve eşsürekli fonksiyonlar kümesi olduğundan Arzela-Ascoli teoremi gereği (bkz., [9], [80]), $U_{p,\mu_0}^{H,lip,R}$ kümesi $C\big([t_0,\theta];\mathbb{R}^m\big)$ uzayında prekompakt küme olur.

Şimdi $U_{p,\mu_0}^{H,lip,R}$ kümesinin kapalı olduğunu gösterelim.

Her $k = 1, 2\ldots$ için $u_k(\cdot) \in U_{p,\mu_0}^{H,lip,R}$ ve $k \to \infty$ iken $u_k(\cdot) \to u_0(\cdot)$ olsun. $u_0(\cdot) \in U_{p,\mu_0}^{H,lip,R}$ olduğunu kanıtlayalım.

Keyfi $k = 1, 2\ldots$ için $u_k(\cdot) \in U_{p,\mu_0}^{H,lip,R}$ olduğundan, her $k = 1, 2\ldots$ ve her $t \in [t_0,\theta]$ için

$$\|u_k(t)\| \le H \tag{4.3.4}$$

olur. $k \to \infty$ iken $u_k(\cdot) \to u_0(\cdot)$ olduğundan, her sabitlenmiş $t \in [t_0, \theta]$ için de $k \to \infty$ iken $u_k(t) \to u_0(t)$ olur. O halde (4.3.4) 'ten her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\|u_0(t)\| \le H \tag{4.3.5}$$

olarak bulunur.

$u_k(\cdot) \in U_{p,\mu_0}^{H,lip,R}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ olduğundan, her $k = 1, 2 \ldots$ için $\|u_k(\cdot)\|_p \le \mu_0$ ve dolayısıyla keyfi $k = 1, 2 \ldots$ için

$$\int_{t_0}^{\theta} \|u_k(t)\|^p \, dt \le {\mu_0}^p \tag{4.3.6}$$

olur. Her $k = 1, 2 \ldots$ ve her $t \in [t_0, \theta]$ için $\|u_k(t)\| \le H$ ve $k \to \infty$ iken $u_k(\cdot) \to u_0(\cdot)$ olduğundan, Lebesgue yakınsaklık teoreminden ve (4.3.6) 'dan

$$\int_{t_0}^{\theta} \|u_0(t)\|^p \, dt = \int_{t_0}^{\theta} \lim_{k\to\infty} \|u_k(t)\|^p \, dt = \lim_{k\to\infty} \int_{t_0}^{\theta} \|u_k(t)\|^p \, dt \le {\mu_0}^p$$

yani,

$$\|u_0(\cdot)\|_p \le \mu_0 \tag{4.3.7}$$

olarak bulunur.

Ayrıca, keyfi $k = 1, 2 \ldots$ için $u_k(\cdot) \in U_{p,\mu_0}^{H,lip,R}$ olduğundan, $u_k(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonları aynı $R > 0$ sabiti ile Lipschitz süreklidir. O halde keyfi $k = 1, 2 \ldots$ ve keyfi $t_1 \in [t_0, \theta]$, $t_2 \in [t_0, \theta]$ için

$$\|u_k(t_1) - u_k(t_2)\| \le R\,|t_1 - t_2| \tag{4.3.8}$$

olur. $k \to \infty$ iken $u_k(\cdot) \to u_0(\cdot)$ olduğundan (4.3.8) eşitsizliğinin her tarafının $k \to \infty$ iken limitini alırsak

$$\|u_0(t_1) - u_0(t_2)\| \le R\,|t_1 - t_2| \tag{4.3.9}$$

olduğu, yani $u_0(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonunun $R > 0$ sabiti ile Lipschitz sürekli olduğu elde edilir.

Böylece (4.3.5), (4.3.7) ve (4.3.9) 'dan $u_0(\cdot) \in U_{p,\mu_0}^{H,lip,R}$ olarak bulunur. Bu ise $U_{p,\mu_0}^{H,lip,R} \subset C\big([t_0, \theta]; \mathbb{R}^m\big)$ kümesinin kapalı olması demektir.

$U_{p,\mu_0}^{H,lip,R}$ kümesi prekompakt ve kapalı olduğundan, bu küme kompakt küme olur. ■

4.4 Kompakt Yörüngeler Kümesi

(2.1.1) sisteminin tüm mümkün $u(\cdot) \in U_{p,\mu_0}^{H,lip,R}$ kontrol fonksiyonları tarafından üretilen yörüngeler kümesini $\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R}$ olarak, yani

$$\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R} = \left\{ x(\cdot, u(\cdot)) : u(\cdot) \in U_{p,\mu_0}^{H,lip,R} \right\} \tag{4.4.1}$$

olarak gösterelim. Her $t \in [t_0, \theta]$ için ise

$$\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R}(t) = \left\{ x(t) \in \mathbb{R}^n : x(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R} \right\} \tag{4.4.2}$$

olsun.

Kompakt $U_{p,\mu_0}^{H,lip,R}$ kontrol fonksiyonlar kümesinin ürettiği $\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R}$ yörüngeler kümesinin sürekli fonksiyonlar uzayında kompakt küme olduğunu kanıtlayacağız.

$$\begin{aligned} b_* \;&=\; \frac{\lambda \left(L_3 + 2r_* H_3 \right) (\theta - t_0)}{1 - L_0} \\ &\cdot \;\; \exp\left[\frac{\lambda}{1 - L_0} \left(L_2(\theta - t_0) + 2H_2 \; \mu_0 (\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \right) \right] \end{aligned} \tag{4.4.3}$$

olarak gösterelim.

Teorem 4.4.1 *$H > 0$ ve $R > 0$ sayıları sabitlenmiş olsun. O halde $\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R}$ kümesi $C\big([t_0, \theta]; \mathbb{R}^n\big)$ uzayında, her sabitlenmiş $t \in [t_0, \theta]$ için ise $\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R}(t)$ kümesi $\mathbb{R}^n$ uzayında kompakt kümelerdir.*

Kanıt. $U_{p,\mu_0}^{H,lip,R} \subset U_{p,\mu_0}$ olduğundan

$$\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R} \subset \mathbf{X}_{p,\mu_0} \tag{4.4.4}$$

olur.

Teorem 2.3.3 'ten keyfi $x(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}$ için

$$\|x(\cdot)\|_C \leq r_* \tag{4.4.5}$$

eşitsizliği doğrudur. Burada r_* sabiti (2.3.11) ile tanımlıdır. O halde (4.4.4) ve (4.4.5) 'ten, keyfi $x(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R}$ için

$$\|x(\cdot)\|_C \leq r_*$$

olur. Bu ise $\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R}$ yörüngeler kümesinin $C\big([t_0, \theta]; \mathbb{R}^n\big)$ uzayında düzgün sınırlı olması demektir.

Önerme 2.4.1 gereği, keyfi $x(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}$ ve keyfi $t_1 \in [t_0, \theta]$, $t_2 \in [t_0, \theta]$ için

$$\|x(t_2) - x(t_1)\| \leq \varphi\left(|t_2 - t_1|\right) \tag{4.4.6}$$

eşitsizliği doğrudur. Burada $\varphi(\cdot)$ (2.4.3) ile tanımlıdır. O halde (4.4.4) ve (4.4.6) 'dan, keyfi $x(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R}$ için

$$\|x(t_2) - x(t_1)\| \leq \varphi\left(|t_2 - t_1|\right) \tag{4.4.7}$$

olur.

(2.4.3) 'ten, $\Delta \to 0^+$ iken $\varphi(\Delta) \to 0^+$ olur. O halde $\varepsilon > 0$ için $\Delta \in (0, \Delta(\varepsilon))$ iken

$$0 < \varphi(\Delta) < \varepsilon \tag{4.4.8}$$

olacak biçimde $\Delta(\varepsilon) > 0$ vardır. O halde (4.4.7) ve (4.4.8) 'den, keyfi $\varepsilon > 0$, $x(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R}$ ve keyfi $t_1 \in [t_0, \theta]$, $t_2 \in [t_0, \theta]$ için $|t_2 - t_1| < \Delta(\varepsilon)$ iken

$$\|x(t_2) - x(t_1)\| < \varepsilon$$

eşitsizliği doğrudur. Bu ise $\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R}$ yörüngeler kümesinin $C\big([t_0, \theta]; \mathbb{R}^n\big)$ uzayında eşsürekli fonksiyonlar kümesi olması demektir.

Böylece, $\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R}$ yörüngeler kümesi $C\big([t_0, \theta]; \mathbb{R}^n\big)$ uzayında eşsürekli ve düzgün sınırlı fonksiyonlar kümesi olur. O halde Arzela-Ascoli teoreminden, $\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R}$ yörüngeler kümesinin $C\big([t_0, \theta]; \mathbb{R}^n\big)$ uzayında prekompakt küme olduğu elde edilir.

$\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R}$ yörüngeler kümesinin $C\big([t_0, \theta]; \mathbb{R}^n\big)$ uzayında kapalı olduğunu kanıtlarsak, teorem kanıtlanmış olur.

Her $k = 1, 2, \ldots$ için, $x_k(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R}$ olmak üzere $\{x_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ yörüngeler dizisi alalım ve $k \to \infty$ iken $x_k(\cdot) \to x_0(\cdot)$ olsun. $x_0(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R}$ olduğunu gösterelim.

Her $k = 1, 2, \ldots$ için, $x_k(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R}$ olduğundan, her $k = 1, 2, \ldots$ için

$$x_k(t) = a\left(t, x_k\left(t\right)\right) + \lambda \int_{t_0}^{t} K\left(t, s, x_k\left(s\right), u_k\left(s\right)\right) ds\ , \quad t \in [t_0, \theta] \tag{4.4.9}$$

olacak biçimde $u_k(\cdot) \in U_{p,\mu_0}^{H,lip,R}$ kontrol fonksiyonu vardır. Önerme 4.3.2 gereği $U_{p,\mu_0}^{H,lip,R} \subset C\big([t_0, \theta]; \mathbb{R}^m\big)$ kompakt küme olduğundan, genelliği bozmaksızın

$$u_*(\cdot) \in U_{p,\mu_0}^{H,lip,R} \tag{4.4.10}$$

olmak üzere $k \to \infty$ iken

$$u_k(\cdot) \to u_*(\cdot)$$

olduğunu varsayabiliriz.

$x_*(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonunu

$$x_*(t) = a\left(t, x_*\left(t\right)\right) + \lambda \int_{t_0}^{t} K\left(t, s, x_*\left(s\right), u_*\left(s\right)\right) ds \ , \quad t \in [t_0, \theta] \qquad (4.4.11)$$

olarak tanımlayalım. (4.4.10) 'dan $x_*(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R}$ olur.

(4.4.9), (4.4.11) ve 2.1.B koşulundan, keyfi $k = 1, 2, \ldots$ ve $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned}
\left\|x_k(t) - x_*(t)\right\| &\leq \|a(t, x_k(t)) - a(t, x_*(t))\| \\
&+ \lambda \left\| \int_{t_0}^{t} K\left(t, s, x_k(s), u_k(s)\right) \, ds - \int_{t_0}^{t} K\left(t, s, x_*(s), u_*(s)\right) \, ds \right\| \\
&\leq L_0 \left\|x_k(t) - x_*(t)\right\| + \lambda \int_{t_0}^{t} \left\|K\left(t, s, x_k(s), u_k(s)\right) - K\left(t, s, x_*(s), u_*(s)\right)\right\| \, ds \\
&\leq L_0 \left\|x_k(t) - x_*(t)\right\| + \lambda \int_{t_0}^{t} \left[L_2 + H_2\left(\|u_k(s)\| + \|u_*(s)\|\right)\right] \|x_k(s) - x_*(s)\| \, ds \\
&+ \lambda \int_{t_0}^{t} \left[L_3 + H_3\left(\|x_k(s)\| + \|x_*(s)\|\right)\right] \|u_k(s) - u_*(s)\| \, ds \qquad (4.4.12)
\end{aligned}$$

olarak bulunur. $L_0 \in [0, 1)$ olduğundan, (4.4.12) 'den her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned}
\|x_k(t) - x_*(t)\| &\leq \frac{\lambda}{1 - L_0} \int_{t_0}^{t} \left[L_2 + H_2\left(\|u_k(s)\| + \|u_*(s)\|\right)\right] \|x_k(s) - x_*(s)\| \, ds \\
&+ \frac{\lambda}{1 - L_0} \int_{t_0}^{t} \left[L_3 + H_3\left(\|x_k(s)\| + \|x_*(s)\|\right)\right] \|u_k(s) - u_*(s)\| \, ds \qquad (4.4.13)
\end{aligned}$$

olduğu elde edilir.

$k \to \infty$ iken $u_k(\cdot) \to u_*(\cdot)$ olduğundan, keyfi $\varepsilon > 0$ verildiğinde, her $k > k_*$ ve $t \in [t_0, \theta]$ iken

$$\|u_k(t) - u_*(t)\| < \frac{\varepsilon}{b_*} \qquad (4.4.14)$$

olacak biçimde $k_* > 0$ vardır. Burada $b_* > 0$ sayısı (4.4.3) ile tanımlıdır.

Her $k = 1, 2, \ldots$ için $x_k(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R} \subset \mathbf{X}_{p,\mu_0}$ ve $x_*(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R} \subset \mathbf{X}_{p,\mu_0}$ olduğundan, Teorem 2.3.3 'ten keyfi $k = 1, 2, \ldots$ ve keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\|x_k(t)\| \leq r_* \ , \quad \|x_*(t)\| \leq r_* \qquad (4.4.15)$$

olur. Burada $r_* > 0$ sayısı (2.3.11) ile tanımlıdır.

O halde (4.4.14) ve (4.4.15) 'ten, keyfi $k > k_*$ ve $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t} [L_3 + H_3 (\|x_k(s)\| + \|x_*(s)\|)] \|u_k(s) - u_*(s)\| \, ds \\ \leq & \int_{t_0}^{t} (L_3 + 2r_* H_3) \frac{\varepsilon}{b_*} ds \leq \frac{(L_3 + 2r_* H_3)(\theta - t_0)}{b_*} \cdot \varepsilon \end{aligned} \tag{4.4.16}$$

olur. (4.4.13) ve (4.4.16) 'dan, keyfi $k > k_*$ ve $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned} \|x_k(t) - x_*(t)\| \leq & \frac{\lambda}{1 - L_0} \int_{t_0}^{t} [L_2 + H_2 (\|u_k(s)\| + \|u_*(s)\|)] \|x_k(s) - x_*(s)\| \, ds \\ + & \varepsilon \cdot \frac{\lambda (L_3 + 2r_* H_3)(\theta - t_0)}{(1 - L_0) b_*} \end{aligned} \tag{4.4.17}$$

olur.

Gronwall eşitsizliği ve (4.4.17) 'den, her $k > k_*$ ve $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned} & \|x_k(t) - x_*(t)\| \leq \varepsilon \frac{\lambda (L_3 + 2r_* H_3)(\theta - t_0)}{(1 - L_0) b_*} \\ \cdot & \exp\left(\frac{\lambda}{1 - L_0} \int_{t_0}^{t} [L_2 + H_2 (\|u_k(s)\| + \|u_*(s)\|)] \, ds \right) \\ \leq & \exp\left[\frac{\lambda}{1 - L_0} \left(L_2(\theta - t_0) + H_2 \left(\int_{t_0}^{\theta} \|u_k(s)\| \, ds + \int_{t_0}^{\theta} \|u_*(s)\| \, ds \right) \right) \right] \\ \cdot & \varepsilon \frac{\lambda (L_3 + 2r_* H_3)(\theta - t_0)}{(1 - L_0) b_*} \end{aligned} \tag{4.4.18}$$

olduğu elde edilir.

Her $k = 1, 2, \ldots$ için $u_k(\cdot) \in U_{p,\mu_0}^{H,lip,R} \subset U_{p,\mu_0}$ ve $u_*(\cdot) \in U_{p,\mu_0}^{H,lip,R} \subset U_{p,\mu_0}$ olduğundan, Önerme 2.3.1 'den

$$\int_{t_0}^{t} \|u_k(s)\| \, ds \leq \mu_0(\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}}, \quad \int_{t_0}^{t} \|u_*(s)\| \, ds \leq \mu_0(\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \tag{4.4.19}$$

olur. Son olarak (4.4.3), (4.4.18) ve (4.4.19) 'dan her $t \in [t_0, \theta]$ ve $k > k_*$ için

$$\begin{aligned} & \|x_k(t) - x_*(t)\| \leq \varepsilon \frac{\lambda (L_3 + 2r_* H_3)(\theta - t_0)}{(1 - L_0) b_*} \\ \cdot & \exp\left[\frac{1}{1 - L_0} \lambda \left(L_2(\theta - t_0) + H_2 \left(\mu_0(\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} + \mu_0(\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \right) \right) \right] \\ = & \varepsilon \frac{\lambda (L_3 + 2r_* H_3)(\theta - t_0)}{(1 - L_0) b_*} \cdot \exp\left[\frac{\lambda}{1 - L_0} \left(L_2(\theta - t_0) + 2H_2 \, \mu_0(\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \right) \right] \\ = & \varepsilon \end{aligned} \tag{4.4.20}$$

olarak bulunur. (4.4.20) 'den ise her $k > k_*$ için

$$\|x_k(\cdot) - x_*(\cdot)\|_C \leq \varepsilon \tag{4.4.21}$$

olduğu elde edilir.

Böylece (4.4.21) gereği, keyfi $\varepsilon > 0$ verildiğinde her $k > k_*$ için

$$\|x_k(\cdot) - x_*(\cdot)\|_C \leq \varepsilon \tag{4.4.22}$$

olacak biçimde $k_* > 0$ sayısının var olduğu elde edilir. Bu ise $k \to \infty$ iken $x_k(\cdot) \to x_*(\cdot)$ olması demektir.

$k \to \infty$ iken $x_k(\cdot) \to x_0(\cdot)$ ve $x_k(\cdot) \to x_*(\cdot)$ 'dır. Limitin tekliğinden $x_0(\cdot) = x_*(\cdot)$ olduğu elde edilir. $x_*(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R}$ olduğundan $x_0(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R}$ olur. Böylece $\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R}$ kümesinin kapalı olduğu kanıtlanmış olur.

$\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R} \subset C\big([t_0,\theta];\mathbb{R}^n\big)$ kümesi prekompakt ve kapalı olduğundan, bu küme kompakttır.

Son olarak, her $t \in [t_0,\theta]$ için $\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R}(t) \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin kompakt olduğunu kanıtlayalım.

$\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R} \subset C\big([t_0,\theta];\mathbb{R}^n\big)$ kümesi düzgün sınırlı olduğundan, keyfi sabitlenmiş $t \in [t_0,\theta]$ için $\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R}(t) \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı kümedir.

Ayrıca, $\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R} \subset C\big([t_0,\theta];\mathbb{R}^n\big)$ kümesi kapalı olduğundan, keyfi sabitlenmiş $t \in [t_0,\theta]$ için $\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R}(t) \subset \mathbb{R}^n$ kümesi kapalı kümedir. Böylece her $t \in [t_0,\theta]$ için $\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R}(t) \subset \mathbb{R}^n$ kapalı ve sınırlı küme olduğundan $\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R}(t) \subset \mathbb{R}^n$ bir kompakt küme olur. ■

Önerme 4.3.1 'den aşağıdaki önerme elde edilir.

Önerme 4.4.2 *$H > 0$ sabitlenmiş olsun. O halde $\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip} = \bigcup\limits_{R=1}^{\infty} \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R}$ eşitliği doğrudur. Ayrıca, her sabitlenmiş $t \in [t_0,\theta]$ için $\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip}(t) = \bigcup\limits_{R=1}^{\infty} \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R}(t)$ olur.*

Burada $\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip}$ ve $\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip}(t)$ kümeleri sırasıyla (4.2.1) ve (4.2.2) ile, $\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R}$ ve $\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R}(t)$ kümeleri ise sırasıyla (4.4.1) ve (4.4.2) ile tanımlıdır.

Kanıt. Her $R = 1,2,\ldots$ için $U_{p,\mu_0}^{H,lip,R} \subset U_{p,\mu_0}^{H,lip}$ olduğundan, her $R = 1,2,\ldots$ için $\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R} \subset \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip}$ ve buradan

$$\bigcup_{R=1}^{\infty} \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R} \subset \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip} \tag{4.4.23}$$

olduğu elde edilir.

Şimdi

$$\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip} \subset \bigcup_{R=1}^{\infty} \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R} \tag{4.4.24}$$

olduğunu kanıtlayalım.

Herhangi bir $x(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip}$ alalım ve sabitleyelim. O halde her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$x(t) = a(t, x(t)) + \lambda \int_{t_0}^{t} K(t, s, x(s), u(s))\, ds \tag{4.4.25}$$

olacak biçimde $u(\cdot) \in U_{p,\mu_0}^{H,lip}$ vardır. $u(\cdot) \in U_{p,\mu_0}^{H,lip}$ olduğundan Önerme 4.3.1 'den $u(\cdot) \in U_{p,\mu_0}^{H,lip,c_*}$ olacak biçimde $c_* \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. $u(\cdot) \in U_{p,\mu_0}^{H,lip,c_*}$ olduğundan, (4.4.25) gereği $x(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,c_*}$ olur. O halde, $x(\cdot) \in \bigcup_{R=1}^{\infty} \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R}$ olduğu elde edilir. $x(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip}$ keyfi seçildiğinden, (4.4.24) 'ün doğru olduğu kanıtlanmış olur.

(4.4.23) ve (4.4.24) 'ten

$$\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip} = \bigcup_{R=1}^{\infty} \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R} \tag{4.4.26}$$

eşitliği elde edilir.

Şimdi her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip}(t) = \bigcup_{R=1}^{\infty} \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R}(t) \tag{4.4.27}$$

eşitliğinin sağlandığını kanıtlayalım.

Herhangi bir $t_* \in [t_0, \theta]$ alalım ve sabitleyelim. Keyfi $R = 1, 2, \ldots$ için $\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R} \subset \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip}$ olduğundan, tanım gereği keyfi $R = 1, 2, \ldots$ için $\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R}(t_*) \subset \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip}(t_*)$ olur. O halde

$$\bigcup_{R=1}^{\infty} \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R}(t_*) \subset \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip}(t_*) \tag{4.4.28}$$

olduğu elde edilir.

Şimdi

$$\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip}(t_*) \subset \bigcup_{R=1}^{\infty} \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R}(t_*) \tag{4.4.29}$$

olduğunu kanıtlayalım. Keyfi $x_* \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip}(t_*)$ alalım. Bu durumda

$$x_* = x_*(t_*) = a(t_*, x_*(t_*)) + \lambda \int_{t_0}^{t_*} K(t_*, s, x_*(s), u_*(s))\, ds$$

olacak şekilde $x_*(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip}$ vardır. (4.4.26) 'dan, $x_*(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R_*}$ olacak biçimde $R_* \in \mathbb{N}$ vardır. O halde, $x_* = x_*(t_*) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R_*}(t_*)$ ve buradan

$$x_* = x_*(t_*) \in \bigcup_{R=1}^{\infty} \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R}(t_*) \tag{4.4.30}$$

olur. $x_* \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip}(t_*)$ keyfi seçildiğinden (4.4.30) 'dan (4.4.29) kapsamasının doğru olduğu elde edilir.

(4.4.28) ve (4.4.29) kapsamalarından ise

$$\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip}(t_*) = \bigcup_{R=1}^{\infty} \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R}(t_*) \tag{4.4.31}$$

eşitliği elde edilir. $t_* \in [t_0, \theta]$ keyfi seçildiğinden, (4.4.31) 'den (4.4.27) eşitliğinin doğru olduğu görülür. ■

4.5 Yörüngeler Kümesinin Kesitlerine Kompakt Kümelerle Yaklaşım

Keyfi $H > 0$, $R = 1, 2, \ldots$ için $\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R} \subset \mathbf{X}_{p,\mu_0}$ olduğundan, Teorem 2.3.3 gereği, keyfi $x(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R}$ için $\|x(\cdot)\|_C \leq r_*$ olur. Burada $r_* > 0$ sayısı (2.3.11) ile tanımlıdır. O halde her sabitlenmiş $t \in [t_0, \theta]$ ve keyfi $R = 1, 2, \ldots$ için

$$\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R}(t) \subset B_n(r_*)$$

olur. Burada $B_n(r_*)$ kümesi $\mathbb{R}^n$ uzayının merkezi orijinde, yarıçapı r_* olan kapalı birim yuvarıdır.

Her $R = 1, 2, \ldots$ ve her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R}(t) \subset \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R+1}(t) \subset B_n(r_*)$$

olduğundan dolayı, Önerme 1.1.10 ve Önerme 4.4.2 'den aşağıdaki önerme elde edilir.

Önerme 4.5.1 *$H > 0$ sabitlenmiş olsun. O halde her $t \in [t_0, \theta]$ için*

$$\lim_{R \to \infty} \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R}(t) = cl\Big(\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip}(t)\Big)$$

eşitliği doğrudur.

Sonuç 1.1.11 ve Önerme 4.5.1 'den aşağıdaki önerme elde edilir.

Önerme 4.5.2 *$H > 0$ ve $t \in [t_0, \theta]$ sabitlenmiş olsun. O halde her $\varepsilon > 0$ için $R \geq R_*(t, \varepsilon, H)$ iken,*

$$h_n\left(\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip}(t), \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R}(t)\right) < \varepsilon \tag{4.5.1}$$

olacak biçimde $R_*(t, \varepsilon, H) > 0$ doğal sayısı vardır.

Böylece her sabitlenmiş $H \in (0, \infty)$ ve $t \in [t_0, \theta]$ için R Lipschitz sabiti yeterince büyük seçildiğinde, $\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip}$ yörüngeler kümesinin t 'deki $\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip}(t)$ kesiti ile, $\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R}$ yörüngeler kümesinin t 'deki $\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R}(t)$ kesiti arasındaki Hausdorff uzaklığı yeterince küçük olur. Yani her sabitlenmiş $t \in [t_0, \theta]$ ve $H \in (0, \infty)$ için

$$\lim_{R \to \infty} h_n\left(\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip}(t), \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R}(t)\right) = 0$$

olur.

$\varepsilon > 0$ verildiğinde, Önerme 4.5.2 'de (4.5.1) eşitsizliğinin sağlanmasını garantileyen $R_*(t, \varepsilon, H) > 0$ sayısı, ε ve H sayılarının yanısıra, sabitlenmiş $t \in [t_0, \theta]$ 'ya da bağlıdır. Bu durumda aşağıdaki problem ortaya çıkar:

Yeterince küçük $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde, (4.5.1) eşitsizliğinin sağlanmasını garantileyen $R_*(t, \varepsilon, H) > 0$ sayısı, t 'den bağımsız seçilebilir mi? Başka deyişle, yeterince küçük $\varepsilon > 0$ verildiğinde, her $t \in [t_0, \theta]$ için (4.5.1) eşitsizliğinin sağlanmasını garantileyen $R_*(\varepsilon, H) > 0$ sayısı var mı?

Biraz daha öne gidersek, bu sorunun cevabının olumlu olduğunu görebiliriz. Bu soruyu yanıtlayan önermeyi vermeden önce, bazı yardımcı önermeleri ifade edelim.

Önerme 4.5.3 *Her sabitlenmiş $H > 0$ ve keyfi seçilmiş $t_1 \in [t_0, \theta]$, $t_2 \in [t_0, \theta]$ için*

$$h_n\left(\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip}(t_1), \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip}(t_2)\right) \leq \varphi\left(|t_1 - t_2|\right),$$

eşitsizliği doğrudur.

Burada $\varphi(\cdot) : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ fonksiyonu (2.4.3) ile tanımlıdır.

Önerme 4.5.4 *Her sabitlenmiş $H > 0$, $R > 0$ doğal sayısı ve keyfi seçilmiş $t_1 \in [t_0, \theta]$, $t_2 \in [t_0, \theta]$ için*

$$h_n\left(\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R}(t_1), \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R}(t_2)\right) \leq \varphi\left(|t_1 - t_2|\right)$$

eşitsizliği doğrudur.

Burada $\varphi(\cdot) : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ fonksiyonu (2.4.3) ile tanımlıdır.

Önerme 4.5.3 ve 4.5.4 'ün kısa kanıtını verelim. Önerme 2.4.1 'den, keyfi $x(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}$ ve keyfi $t_1 \in [t_0, \theta]$, $t_2 \in [t_0, \theta]$ için

$$\|x(t_2) - x(t_1)\| \leq \varphi\left(|t_2 - t_1|\right)$$

eşitsizliği doğrudur. $H \in (0, \infty)$ ve $R > 0$ doğal sayısı için

$$\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip} \subset \mathbf{X}_{p,\mu_0}, \quad \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R} \subset \mathbf{X}_{p,\mu_0}$$

olduğundan, keyfi $x(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip}$ veya keyfi $x(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R}$ için de

$$\|x(t_2) - x(t_1)\| \leq \varphi\left(|t_2 - t_1|\right)$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

Bundan sonra, Önerme 4.5.3 ve Önerme 4.5.4 'ü kanıtlamak için Önerme 3.1.1 'in kanıtının aynısı tekrarlanır.

Önerme 4.5.3 ve Önerme 4.5.4 'ten, her sabitlenmiş $H > 0$ ve $R > 0$ sayıları için

$$t \to \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip}(t) \ , \ t \in [t_0, \theta]$$

ve

$$t \to \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R}(t) \ , \ t \in [t_0, \theta]$$

küme değerli dönüşümlerinin $[t_0, \theta]$ aralığında, sırasıyla Hausdorff yarımetriğine ve Hausdorff metriğine göre düzgün sürekli oldukları elde edilir.

Önerme 4.5.2, Önerme 4.5.3 ve Önerme 4.5.4 'ten aşağıdaki önerme elde edilir.

Teorem 4.5.5 *$H > 0$ sabitlenmiş olsun. Keyfi $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde, her $R \geq R_*(\varepsilon, H)$ ve keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için*

$$h_n\big(\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R}(t), \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip}(t)\big) < \varepsilon$$

olacak biçimde $R_*(\varepsilon, H) > 0$ sayısı vardır.

Kanıt. Önermeyi kanıtlamak için aksini varsayalım. Bu durumda, $k \to \infty$ iken $R_k \to \infty$ olmak üzere

$$h_n\big(\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R_k}(t_k), \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip}(t_k)\big) \geq \varepsilon_* \tag{4.5.2}$$

olacak biçimde $\varepsilon_* > 0$, $t_k \in [t_0, \theta]$ ve $R_k > 0$ $(k = 1, 2, \dots)$ sayıları vardır (burada R_k 'lar doğal sayılardır).

Keyfi $k = 1, 2, \dots$ için $t_k \in [t_0, \theta]$, $[t_0, \theta] \subset \mathbb{R}$ kompakt küme olduğundan, genelliği bozmaksızın $t_* \in [t_0, \theta]$ olmak üzere $k \to \infty$ iken $t_k \to t_*$ olduğunu kabul edebiliriz. $h_n(\cdot,\cdot)$ fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ uzayının boştan farklı sınırlı alt kümeleri ailesinde, yani $b(\mathbb{R}^n)$ ailesinde yarımetrik olduğundan

$$\begin{aligned} h_n\big(\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R_k}(t_k),\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip}(t_k)\big) &\le h_n\big(\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R_k}(t_k),\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R_k}(t_*)\big) \\ &+ h_n\big(\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,,lip,R_k}(t_*),\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip}(t_*)\big) \\ &+ h_n\big(\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip}(t_*),\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip}(t_k)\big) \end{aligned} \tag{4.5.3}$$

olarak bulunur.

Önerme 4.5.3 ve Önerme 4.5.4 'ten her $k=1,2,\ldots$ için

$$\begin{gathered} h_n\big(\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R_k}(t_k),\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R_k}(t_*)\big) \le \varphi\left(|t_k-t_*|\right), \\ h_n\big(\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip}(t_*),\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip}(t_k)\big) \le \varphi\left(|t_k-t_*|\right) \end{gathered} \tag{4.5.4}$$

olduğu elde edilir. Burada $\varphi(\cdot)$ dönüşümü (2.4.3) ile tanımlıdır.

Bu durumda (4.5.3) ve (4.5.4) 'ten, keyfi $k=1,2,\ldots$ için

$$\begin{aligned} h_n\big(\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R_k}(t_k),\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip}(t_k)\big) &\le h_n\big(\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R_k}(t_*),\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip}(t_*)\big) \\ &+ 2\cdot\varphi\left(|t_k-t_*|\right) \end{aligned} \tag{4.5.5}$$

olduğu elde edilir.

$k\to\infty$ iken $t_k\to t_*$ olduğundan, (2.4.3) 'ten $k\to\infty$ iken $\varphi\left(|t_k-t_*|\right)\to 0$ olur. O halde her $k>k_1$ için

$$\varphi\left(|t_k-t_*|\right)<\frac{\varepsilon_*}{6} \tag{4.5.6}$$

olacak biçimde $k_1>0$ vardır.

Ayrıca, $k\to\infty$ iken $R_k\to\infty$ olduğundan, Önerme 4.5.2 'den

$$\lim_{k\to\infty} h_n\big(\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R_k}(t_*),\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip}(t_*)\big)=0$$

olur ve dolayısıyla her $k>k_2$ için

$$h_n\big(\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R_k}(t_*),\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip}(t_*)\big)<\frac{\varepsilon_*}{3} \tag{4.5.7}$$

olacak biçimde $k_2>0$ sayısı vardır. $k_*=\max\{k_1,k_2\}$ dersek, (4.5.5), (4.5.6) ve (4.5.7) 'den, keyfi $k>k_*$ için,

$$h_n\big(\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R_k}(t_k),\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip}(t_k)\big)<2\cdot\frac{\varepsilon_*}{6}+\frac{\varepsilon_*}{3}=\frac{2\varepsilon_*}{3} \tag{4.5.8}$$

olur.

(4.5.2) ve (4.5.8) eşitsizlikleri çelişir. O halde, varsayım doğru değildir ve önermenin doğru olduğu kanıtlanmış olur. ■

Verilen $\varepsilon > 0$ için

$$H\left(\varepsilon\right) = \left(\frac{2k_*}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{p-1}} \tag{4.5.9}$$

olsun. Burada k_* sayısı (4.1.3) ile tanımlıdır.

$\mathbf{X}_{p,\mu_0}(t)$ ve $\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R}(t)$ kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığı karakterize eden aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem 4.5.6 *Her $\varepsilon > 0$ için $t \in [t_0, \theta]$ iken*

$$h_n\big(\mathbf{X}_{p,\mu_0}(t), \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H(\varepsilon),lip,R(\varepsilon)}(t)\big) < \varepsilon$$

olacak biçimde $H\left(\varepsilon\right) > 0$ ve $R\left(\varepsilon\right) > 0$ sayıları vardır.

Burada $\mathbf{X}_{p,\mu_0}(t)$ ve $\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H(\varepsilon),lip,R(\varepsilon)}(t)$ kümeleri sırasıyla (2.1.4) ve (4.4.2) ile tanımlıdır.

Kanıt. Verilen $\varepsilon > 0$ için $H(\varepsilon)$ sayısı (4.5.9) ile tanımlanmış olsun.

(4.5.9) ve Teorem 4.1.1 'den, keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için

$$h_n\big(\mathbf{X}_{p,\mu_0}(t), \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H(\varepsilon)}(t)\big) \leq \frac{k_*}{H(\varepsilon)^{p-1}} = \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.5.10}$$

olarak bulunur. Burada $k_* > 0$ sayısı (4.1.3) ile tanımlıdır.

Teorem 4.2.2 gereği, $H(\varepsilon) > 0$ sayısını sabitlersek, keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için

$$h_n\big(\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H(\varepsilon)}(t), \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H(\varepsilon),lip}(t)\big) = 0 \tag{4.5.11}$$

olur.

Şimdi, $R(\varepsilon) = R_*(\varepsilon, H(\varepsilon))$ olarak alalım. Burada $R_*(\varepsilon, H(\varepsilon))$ sayısı, Teorem 4.5.5 'te $H = H(\varepsilon)$ iken

$$h_n\big(\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H(\varepsilon),lip}(t), \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H(\varepsilon),lip,R_*(\varepsilon,H(\varepsilon))}(t)\big) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.5.12}$$

olacak biçimdeki sayıdır.

O halde, (4.5.10), (4.5.11) ve (4.5.12) 'den ve Hausdorff yarıuzaklığının üçgen eşitsizliğini sağlaması özelliğinden, keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için

$$
\begin{aligned}
h_n\left(\mathbf{X}_{p,\mu_0}(t), \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H(\varepsilon),lip,R(\varepsilon)}(t)\right) &\le h_n\big(\mathbf{X}_{p,\mu_0}(t), \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H(\varepsilon)}(t)\big) \\
&+ h_n\big(\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H(\varepsilon)}(t), \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H(\varepsilon),lip}(t)\big) \\
&+ h_n\big(\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H(\varepsilon),lip}(t), \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H(\varepsilon),lip,R(\varepsilon)}(t)\big) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + 0 + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. ■

Bazı uygulamalarda $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde, kontrol fonksiyonları üzerinde (2.1.2) kısıtlaması olan (2.1.1) sisteminin $\mathbf{X}_{p,\mu_0}$ yörüngeler kümesinin $t \in [t_0, \theta]$ 'daki $\mathbf{X}_{p,\mu_0}(t)$ kesiti yerine, $H(\varepsilon) > 0$ ve $R(\varepsilon) > 0$ parametrelerini uygun biçimde seçtikten sonra, $\mathbf{X}_{p,\mu_0}(t)$ kümesinden Hausdorff uzaklığı ε 'dan büyük olmayan kompakt $\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H(\varepsilon),lip,R(\varepsilon)}(t)$ kümesini hesaplamak işe yarar.

$t \to \mathbf{X}_{p,\mu_0}(t),\ t \in [t_0, \theta]$, küme değerli dönüşümünün grafiği $gr\,\mathbf{X}_{p,\mu_0}(\cdot)$ olarak gösterilir ve

$$
gr\,\mathbf{X}_{p,\mu_0}(\cdot) = \{(t,x) \in [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n : x \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}(t)\} \tag{4.5.13}
$$

olarak tanımlanır. Bu durumda $gr\,\mathbf{X}_{p,\mu_0}(\cdot) \subset [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n$ olur.

$\Gamma = \{t_0 < t_1 < \ldots < t_N = \theta\}$ $[t_0,\theta]$ aralığının herhangi bir bölüntüsü olsun. Γ bölüntüsünün çapı $diam\,(\Gamma)$ olarak gösterilir ve

$$
diam\,(\Gamma) = \max\{t_{i+1} - t_i : i = 0, 1, \ldots, N-1\}
$$

olarak tanımlanır.

$[t_0,\theta]$ aralığının $\Gamma = \{t_0 < t_1 < \ldots < t_N = \theta\}$ bölüntüsü için

$$
\mathbf{Z}_{p,\mu_0}^{H,lip,R,\Gamma} = \bigcup_{i=0}^{N} \big(t_i, \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R}(t_i)\big) \tag{4.5.14}
$$

olarak gösterelim. Açıktır ki $\mathbf{Z}_{p,\mu_0}^{H,lip,R,\Gamma} \subset [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n$ olur. $gr\,\mathbf{X}_{p,\mu_0}(\cdot)$ ve $\mathbf{Z}_{p,\mu_0}^{H,lip,R,\Gamma}$ kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığı karakterize eden aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem 4.5.7 *Her $\varepsilon > 0$ için diam $(\Gamma) < \Delta(\varepsilon)$ iken*

$$h_{n+1}\left(gr\,\mathbf{X}_{p,\mu_0}(\cdot), \mathbf{Z}_{p,\mu_0}^{H(\varepsilon),lip,R(\varepsilon),\Gamma}\right) < \varepsilon$$

olacak biçimde $H(\varepsilon) > 0$, $R(\varepsilon) > 0$ ve $\Delta(\varepsilon) > 0$ sayıları vardır.

Burada $h_{n+1}, (\cdot,\cdot)$ $\mathbb{R}^{n+1}$ uzayında verilen kümeler arasındaki Hausdorff uzaklığını göstermektedir.

Kanıt. Her sabitlenmiş $H > 0$, $R > 0$ ve keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için $\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R}(t) \subset \mathbf{X}_{p,\mu_0}(t)$ olduğundan, (4.5.13) ve (4.5.14) 'ten her sabitlenmiş $H > 0$, $R > 0$ ve $[t_0, \theta]$ aralığının keyfi $\Gamma = \{t_0 < t_1 < \ldots < t_N = \theta\}$ bölüntüsü için

$$\mathbf{Z}_{p,\mu_0}^{H,lip,R,\Gamma} \subset gr\,\mathbf{X}_{p,\mu_0}(\cdot) \tag{4.5.15}$$

olur.

Teorem 4.5.6 gereği, her $\dfrac{\varepsilon}{3} > 0$ için $t \in [t_0, \theta]$ iken

$$h_n\left(\mathbf{X}_{p,\mu_0}(t), \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H(\varepsilon),lip,R(\varepsilon)}(t)\right) < \frac{\varepsilon}{3} \tag{4.5.16}$$

olacak biçimde $H(\varepsilon) > 0$ ve $R(\varepsilon) > 0$ sayıları vardır.

Teorem 3.1.1 gereği ise keyfi $t_* \in [t_0, \theta]$, $t^* \in [t_0, \theta]$ için

$$h_n(\mathbf{X}_{p,\mu_0}(t^*), \mathbf{X}_{p,\mu_0}(t_*)) \leq \varphi\left(|t^* - t_*|\right) \tag{4.5.17}$$

eşitsizliği doğrudur. Burada $\varphi(\cdot)$ fonksiyonu (2.4.3) ile tanımlıdır.

$\Delta \to 0^+$ iken $\varphi(\Delta) \to 0^+$ olduğundan, $\dfrac{\varepsilon}{3} > 0$ için $\Delta < \Delta(\varepsilon)$ iken

$$\varphi(\Delta) < \frac{\varepsilon}{3} \tag{4.5.18}$$

olacak biçimde $\Delta(\varepsilon) > 0$ vardır. Genelliği bozmaksızın,

$$\Delta(\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{3} \tag{4.5.19}$$

olduğunu varsayalım.

Şimdi $[t_0, \theta]$ aralığının

$$diam\,(\Gamma) < \Delta(\varepsilon) \tag{4.5.20}$$

olacak biçimde keyfi $\Gamma = \{t_0 < t_1 < \ldots < t_N = \theta\}$ bölüntüsünü alalım.

Keyfi $(t_*, x_*) \in gr\,\mathbf{X}_{p,\mu_0}(\cdot)$ alalım. O halde $x_* \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}(t_*)$ olur.

Eğer herhangi bir $i_0 = 0, 1, \ldots, N$ için $t_* = t_{i_0}$ ise, yani t_* noktası Γ bölüntüsünün bölüntü noktası ise, $x_* \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}(t_{i_0})$ olur. (4.5.16) gereği

$$h_n\left(\mathbf{X}_{p,\mu_0}(t_{i_0}), \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H(\varepsilon),lip,R(\varepsilon)}(t_{i_0})\right) < \frac{\varepsilon}{3}$$

olduğundan,

$$\|y_* - x_*\| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{4.5.21}$$

olacak biçimde $y_* \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H(\varepsilon),lip,R(\varepsilon)}(t_{i_0})$ vardır.

Ayrıca $y_* \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H(\varepsilon),lip,R(\varepsilon)}(t_{i_0})$ $(t_{i_0} = t_*)$ olduğundan, (4.5.14) 'ten $(t_*, y_*) = (t_{i_0}, y_*) \in \mathbf{Z}_{p,\mu_0}^{H(\varepsilon),lip,R(\varepsilon),\Gamma}$ olur.

Böylece (4.5.21) 'den, keyfi seçilmiş $(t_*, x_*) \in gr\, \mathbf{X}_{p,\mu_0}(\cdot)$ için $t_* = t_{i_0}$ iken, yani t_* noktası Γ bölüntüsünün bölüntü noktası iken

$$\|(t_{i_0}, y_*) - (t_*, x_*)\| = \|y_* - x_*\| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{4.5.22}$$

olacak biçimde $(t_{i_0}, y_*) \in \mathbf{Z}_{p,\mu_0}^{H(\varepsilon),lip,R(\varepsilon),\Gamma}$ vardır.

Şimdi keyfi $i = 0, 1, \ldots, N$ için $t_* \neq t_i$ olsun. O halde $t_* \in [t_0, \theta]$ olduğundan $t_* \in (t_{i_*}, t_{i_*+1})$ olacak biçimde $i_* \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ vardır. O halde (4.5.19) 'dan,

$$0 < |t_{i_*} - t_*| < diam\,(\Gamma) < \Delta(\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{3} \tag{4.5.23}$$

olur.

Bu durumda (4.5.17), (4.5.18) ve (4.5.20) 'den

$$h_n(\mathbf{X}_{p,\mu_0}(t_*), \mathbf{X}_{p,\mu_0}(t_{i_*})) \leq \varphi\left(|t_* - t_{i_*}|\right) < \frac{\varepsilon}{3} \tag{4.5.24}$$

eşitsizliği doğrudur.

$x_* \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}(t_*)$ olduğundan, (4.5.24) 'ten

$$\|z_* - x_*\| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{4.5.25}$$

olacak biçimde $z_* \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}(t_{i_*})$ vardır.

(4.5.16) gereği

$$h_n\left(\mathbf{X}_{p,\mu_0}(t_{i_*}), \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H(\varepsilon),lip,R(\varepsilon)}(t_{i_*})\right) < \frac{\varepsilon}{3}$$

olduğundan, $z_* \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}(t_{i_*})$ için

$$\|w_* - z_*\| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{4.5.26}$$

olacak biçimde $w_* \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H(\varepsilon),lip,R(\varepsilon)}(t_{i_*})$ vardır.

$w_* \in \mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H(\varepsilon),lip,R(\varepsilon)}(t_{i_*})$ olduğundan, $(t_{i_*}, w_*) \in \mathbf{Z}_{p,\mu_0}^{H(\varepsilon),lip,R(\varepsilon),\Gamma}$ olur.

(4.5.23), (4.5.25) ve (4.5.26) 'dan

$$\begin{aligned}
\|(t_*, x_*) - (t_{i_*}, w_*)\| &\leq |t_* - t_{i_*}| + \|x_* - w_*\| \\
&\leq |t_* - t_{i_*}| + \|x_* - z_*\| + \|z_* - w_*\| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece keyfi seçilmiş $(t_*, x_*) \in gr\,\mathbf{X}_{p,\mu_0}(\cdot)$ için $t_* \neq t_i$ iken, yani t_* noktası Γ bölüntüsünün bölüntü noktası değilken

$$\|(t_*, x_*) - (t_{i_*}, w_*)\| < \varepsilon \tag{4.5.27}$$

olacak biçimde $(t_{i_*}, w_*) \in \mathbf{Z}_{p,\mu_0}^{H(\varepsilon),lip,R(\varepsilon),\Gamma}$ vardır.

(4.5.22) ve (4.5.27) 'den, keyfi seçilmiş $(t_*, x_*) \in gr\,\mathbf{X}_{p,\mu_0}(\cdot)$ için

$$\|(t_*, x_*) - (t_{i_*}, w_*)\| < \varepsilon$$

olacak biçimde $(t_{i_*}, w_*) \in \mathbf{Z}_{p,\mu_0}^{H(\varepsilon),lip,R(\varepsilon),\Gamma}$ vardır. Bu ise

$$gr\,\mathbf{X}_{p,\mu_0}(\cdot) \subset \mathbf{Z}_{p,\mu_0}^{H(\varepsilon),lip,R(\varepsilon),\Gamma} + \varepsilon B_{n+1} \tag{4.5.28}$$

olması demektir. Burada B_{n+1} kümesi $\mathbb{R}^{n+1}$ uzayının kapalı birim yuvarıdır.

(4.5.15) kapsaması keyfi sabitlenmiş $H > 0$, $R > 0$ ve $[t_0, \theta]$ aralığının keyfi $\Gamma = \{t_0 < t_1 < \ldots < t_N = \theta\}$ bölüntüsü için sağlandığından, (4.5.15) ve (4.5.28) 'den teoremin kanıtı elde edilir. ■

Kontrol fonksiyonları üzerinde (2.1.2) kısıtlaması olan (2.1.1) sisteminin yörüngelerinin grafiklerinin oluşturduğu kümeyi bulurken, $H > 0$ ve $R > 0$ parametrelerini ve $[t_0, \theta]$ aralığının $\Gamma = \{t_0 < t_1 < \ldots < t_N = \theta\}$ bölüntüsünü uygun biçimde seçtikten sonra, her biri kompakt kümeden oluşan $\mathbf{X}_{p,\mu_0}^{H,lip,R}(t_i)$ kesitlerini bulmak yeterlidir. Bu kesitler yardımıyla oluşturulan $\mathbf{Z}_{p,\mu_0}^{H,lip,R,\Gamma}$ kümesiyle, sistemin yörüngelerinin grafiklerinden oluşan küme arasındaki Hausdorff uzaklık her zaman yeterince küçük yapılabilir. Bu durum bazı pratik uygulamalarda (2.1.1) sisteminin yörüngelerinin grafiklerinin oluşturduğu küme yerine (başka deyişle, yörüngeler kümesinin ayarladığı $t \to \mathbf{X}_{p,\mu_0}(t)$, $t \in [t_0, \theta]$, küme değerli dönüşümün grafiği yerine), $\mathbf{Z}_{p,\mu_0}^{H,lip,R,\Gamma}$ kümesinin kullanılmasını mümkün kılar.

5 TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER

Mekanikte, fizikte incelenen bazı süreçlerin matematiksel modelleri doğrusal olmayan Volterra integral denklemi ile ifade edilmektedir. Bu süreçler bazı durumlarda dışarıdan yapılan etkilerle belli bir biçimde kontrol edilebilir. Dış etkiler kullanırken tükenen bir kaynağa sahip ise, örneğin bu bir yakıt, enerji veya finans ise, bu kontrol etki genelde integral kısıtı olan kontrol etki olur. Örneğin, kütlesi değişen uçan objelerin davranışı, integral kısıtı olan kontrol sistem olarak ifade edilebilir. Bundan dolayı, davranışı doğrusal olmayan Volterra integral denklemi ile verilen ve kontrol fonksiyonları integral kısıtlı olan kontrol sistemlerin incelenmesi önemlidir. Kontrol sistemin en önemli yapılarından biri yörüngeler kümesidir. Yörüngeler kümesi tüm mümkün kontrol fonksiyonları tarafından üretilen yörüngelerden oluşmaktadır. Yörüngeler kümesinin özelliklerinin önceden bilinmesi ve bu kümenin yaklaşık yapılandırılması, kontrol sistem hakkında bir çok öngörülere imkan sağlar ve istenen özelliği taşıyan kontrol etkinin tasarlanmasına yardımcı olur.

Tezde davranışı doğrusal olmayan Volterra integral denklemi ile verilen ve kontrol fonksiyonları integral kısıtlı olan kontrol sistemlerin yörüngeler kümesinin özellikleri ve yaklaşımı incelenmiştir. Yörüngeler kümesinin sistemin bazı parametrelerine bağlılığının sürekli olması, matematiksel modelleme sürecinde bu parametrelerin ölçümünde oluşabilecek küçük hataların, sistemin yörüngeler kümesini az etkileyeceğini göstermektedir. Verilen sistemin yörüngeler kümesinin kesitlerinin daha basit kontrol fonksiyonları olan aynı sistemin yörüngeler kümesinin kesitleri ile yaklaşımı, yörüngeler kümesinin nümerik yöntemlerle yapılandırılmasında kullanılabilir. Tüm bu sonuçlar, matematiksel modelleri doğrusal olmayan Volterra integral denklemi ile verilen sistemlerin incelenmesinde önemli bir yer bulabilir.

KAYNAKLAR

[1] Lichtenstein, L., *Vorlesungen über einige klassen nichtlinerer integralgleichungen und inntegro-differentialgleichungen nebst anwendungen*, Berlin, 1931.

[2] Lyapunov, A.M., "Sur les figures d'equilibre peu differentes des ellipoides d'une masse liquide homogene douee d'un mouvement de rotation," Premiere partle. Etude generale du probleme, *Zapiski Akademii Nauk, St.Petersburg*, 1-25, 1925.

[3] Schmidt, E., "Zur teorie der linearen und nichtlinearen integralgleichungen, III Teil, Über die auflösing der nichtlinearen integralgleichungen und die verzweigung iherer lösungen," *Math. Ann.*, **65**, 370-399, 1908.

[4] Hammerstein, A., "Nichtlineare integralgleichungen nebst anwendungen," *Acta Mathematica*, **54**, 1929.

[5] Uryson, P.S., Works on topology and other fields of mathematics. I, *Gosudarstv. Izdat. Tehn.-Teoret. Lit.*, 1951. (In Russian)

[6] Guseinov A.I., "Teoremi sushestvovaniya i edinstvennosti dlya nelineynikh integralnikh singulyarnikh uravneniy," *Matem. sbornik*, **20**, 1947. (In Russian)

[7] Nemytskiy, V.V., "Ob odnom klassw nelineynikh integralnikh uravneniy," *Matem. sbornik,* **41**, 1934.

[8] Nemytskiy, V.V., "Sur les equations integrales non linearires," *C.R. Acad. Sci.*, **196**, 1933.

[9] Warga, J., *Optimal Control of Differential and Functional Equations*, Academic Press, New York, 1972.

[10] Golomb, M., "Zur theorie der nichtlinearen integralgleichungen. Integralgleichungs systeme und allgemeinen funktionalgleichungen," *Math. Zeitschrift*, **39**, 1934.

[11] Rotte, E., "Über den abbildungsgrad bei abbildungen von guugeln des hilbertischen raumes," *Composito Math.*, **5**, 1937.

[12] Rotte, E., "Topological proofs of uniqueness theorems in the theory of differential and integral equations," *Bulletin of the Math. Soc.*, **45**, no.8, 1939.

[13] Rotte, E., ”Completely continuous scalars and variational methods,” *Ann. of Math.*, **49**, no.2, 1948.

[14] Soltanov, K.N., *Some Applications of Nonlinear Analysis to Differential Equations*, Elm, Baku, 2002.

[15] Soltanov, K.N., ”Remarks on separation of convex sets, fixed-point theorem, and applications in theory of linear operators,” *Fixed Point Theory Appl.*, Art. ID 80987, 14 pp, 2007.

[16] Soltanov, K.N., ”Perturbation of the mapping and solvability theorems in Banach space,” *Nonlinear Anal.*, **72**, 164-175, 2010.

[17] Banas, J. ve Chlebowicz, A., ”On integrable solutions of a nonlinear Volterra integral equation under Carathéodory conditions,” *Bull. Lond. Math. Soc.*, **41**, 1073-1084, 2009.

[18] Brauer, F., ”On a nonlinear integral equation for population growth problems,” *SIAM J. Math. Anal.*, **6**, 312-317, 1975.

[19] Bugajewska, D., Bugajewski, D. ve Lewicki, G., ”On nonlinear integral equations in the space of functions of bounded generalized ϕ-variation,” *J. Integral Equations Appl.*, **21**, 1-20, 2009.

[20] Burton, T.A. ve Haddock, J.R., ”Qualitative properties of solutions of integral equations,” *Nonlinear Anal. Tneory Meth. Appl.*, **71**, 5712-5723, 2009.

[21] Cabrera, I.J. ve Sadarangani, K.B., ”Existence of solutions of a nonlinear integral equation on an unbounded interval,” *Dynam. Systems Appl.*, **18**, 551-569, 2009.

[22] Chen, Y. ve Tang, T., ”Spectral methods for weakly singular Volterra integral equations with smooth solutions,” *J. Comput. Appl. Math.*, **233**, 938-950, 2009.

[23] Ghoreishi, F. ve Hadizadeh, M., ”Numerical computation of the tau approximation for the Volterra-Hammerstein integral equations,” *Numer. Algorithms*, **52**, 541-559, 2009.

[24] Gohberg, I.G. ve Krein, M.G., *Theory and Applications of Volterra Operators in Hilbert Space*, Amer. Math. Soc., Providence, 1970.

[25] Guseinov, A.I. ve Mukhtarov, Sh.I., *Singular Integral Equations*, Nauka, Moscow, 1980.

[26] Heisenberg, W., *Physics and Philosophy. The Revolution in Modern Science,* Harper and Row, New York, 1958.

[27] Katani, R. ve Shahmorad, S., "Block by block method for the systems of nonlinear Volterra integral equations," *Appl. Math. Model.*, **34**, 400-406, 2010.

[28] Krasnoselskii, M.A. ve Krein S.G., "On the principle of avaraging in nonlinear mechanics," *Uspekhi Mat. Nauk*, **10**, 147-153, 1955. (in Russian)

[29] Krasnov, M.L., *Integral Equations*, Nauka, Moscow, 1975. (In Russian)

[30] Lakshmikantham, V., "Existence and comparison results for Volterra integral equations in a Banach space," *Lect. Notes Math.*, **437**, 120-126, 1979.

[31] Lan, K.Q., "Eigenvalues of semi-positone Hammerstein integral equations and applications to boundary value problems," *Nonlinear Anal. Theory Meth. Appl.*, **71**, 5979-5993, 2009.

[32] Liu, Xi-Lan., "On a nonlinear Hammerstein integral equation with a parameter," *Nonlinear Anal.*, **70**, 3887-3893, 2009.

[33] Lungu, N. ve Rus, I.A., "On a functional Volterra-Fredholm integral equation, via Picard operators," *J. Math. Inequal.*, **3**, 519-527, 2009.

[34] Miller, R.K., *Nonlinear Volterra Integral Equations*, W. A. Benjamin, Menlo Park, California, 1971.

[35] Olszowy, L., "Solvability of some functional integral equation," *Dynam. Systems Appl.*, **18**, 667-676, 2009.

[36] Petrovskii, I.G., *Lectures on the Theory of Integral Equations*, Moskov. Gos. Univ., Moscow, 1984.

[37] Polyanin, A.D. ve Manzhurov, A.V., *Handbook of Integral Equation*, CRC Press, 1988.

[38] Precub, R., *Methods in Nonlinear Integral Equations*, Kluwer, Dordrecht, 2002.

[39] Sidorov, N.A. ve Sidorov, D.N., ”On the solution of the Hammerstein integral equation in the irregular case by the method of successive approximations,” *Sibirsk. Mat. Zh.*, **51**, 405-409, 2010.

[40] Trif, T., ”Convex solutions of a nonlinear integral equation of Urysohn type,” *Fixed Point Theory Appl.*, Art. ID 917614, 13 pp, 2009.

[41] Trikomi, F., *Integral equations,* Dover Publications, New York, 1985.

[42] Yuan, X.H. ve Jiang, Q.Y., ”Existence of nontrivial global solutions for a class of nonlinear Volterra integral equations in a Banach space,” *Acta Anal. Funct. Appl.*, **12**, 60-64, 2010. (Chinese)

[43] Vainikko, G., ”Cordial Volterra integral equations. I,” *Numer. Funct. Anal. Optim.*, **30**, 1145-1172, 2009.

[44] Väth, M., *Volterra and Integral Equations of Vector Functions*, M. Deccer. Inc., New York, 2000.

[45] Aubin, J.P. ve Cellina, A., *Differential Inclusions. Set Valued Maps and Viability Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[46] Blagodatskikh, V.I. ve Filippov, A.F., ”Differential inclusions and optimal control,” *Proc. of the Steklov Inst. of Math.*, **169.** 199-256, 1986.

[47] Clarke, F.H., Ledyaev Yu.S., Stern, R.J. ve Wolenski, P.R., *Nonsmooth Analysis and Control Theory*, Springer, New York, 1998.

[48] Deimling, K., *Multivalued Differential Equations*, D.Gruyter, Berlin, 1992.

[49] Filippov, A.F., *Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Sides*, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1998.

[50] Kalman, R.E., Ho, Y.C. ve Narendra, K.S., ”Controllability of linear dynamical systems,” *Contributions to Differential Equations*, **1**, 189-213, 1963.

[51] Krasovskii, N.N. ve Subbotin A.I., *Game-Theoretical Control Problems,* Springer, New York, 1988.

[52] Kurzhanskii, A.B. ve Valyi, L., *Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control*, Birkhauser, Boston, 1996.

[53] Guseinov, Kh.G., Moiseyev, A.N. ve Ushakov, V.N., "On the approximation of reachable domains of control systems," *J. Appl. Math. Mech.*, **62**, 169-175, 1998.

[54] Chernousko, F.L., *State Estimation of Dynamic Systems*, SRC Press, Florida, 1994.

[55] Conti, R., *Problemi di Controllo e di Controllo Ottimale*, UTET, Torino, 1974.

[56] Krasovskii, N.N., *Theory of Control of Motion: Linear Systems*, Nauka, Moscow, 1968. (In Russian)

[57] Ukhobotov, V.I., *One Dimensional Projection Method in Linear Differential Games with Integral Constraints*, Chelyabinsk State University press, Chelyabinsk, 2005. (In Russian)

[58] Guseinov, Kh.G., Neznakhin, A.A. ve Ushakov, V.N., "Approximate construction of reachable sets of control systems with integral constraints on the controls," *J. Appl. Math. Mech.*, **63**, 557-567, 1999.

[59] Guseinov, Kh.G., Ozer, O., Akyar, E. ve Ushakov, V.N., "The approximation of reachable sets of control systems with integral constraint on controls," *Nonlinear Different. Equat. Appl. (NoDEA)*, **14**, 57-73, 2007.

[60] Guseinov, Kh.G., "Approximation of the attainable sets of the nonlinear control systems with integral constraint on controls," *Nonlinear Anal. Theory Meth. Appl.*, **71**, 622-645, 2009.

[61] Chentsov, A.G., "Asymptotic attainability with perturbation of integral constraints," *Cybernet. Sistems Anal.*, **31**, 75-84, 1995.

[62] Gozzi, F. ve Loretti, P., "Regularity of the minimum time function and minimum energy problems: the linear case," *SIAM J. Control Optim.*, **37**, 1195-1221, 1999.

[63] Guseinov, Kh.G. ve Nazlipinar, A.S., "On the continuity properties of the attainable sets of nonlinear control systems with integral constraint on controls," *Abstr. Appl. Anal.*, Art. ID 295817, 14 pp, 2008.

[64] Guseinov, Kh.G. ve Nazlipinar, A.S., "On the Continuity Property of L_p Balls and an Application," *J. Math. Anal. Appl.* **335**, 1347-1359, 2007.

[65] Lou, H.W., "On the attainable sets of control systems with p-integrable controls," *J. Optim. Theory Appl.*, **123**, 123-147, 2004.

[66] Motta, M. ve Sartori, C., "Minimum time with bounded energy, minimum energy with bounded time," *SIAM J. Control Optim.*, **42.** 789-809, 2003.

[67] Sirotin, A.N. ve Formalskii, A.M., "Reachability and Controllability of Discrete-Time Systems under Control Actions Bounded in Magnitude and Norm," *Autom. Rem. Contr.*, **64**, 1844-1857, 2003.

[68] Subbotin, A.I. ve Ushakov, V.N., "Alternative for an encounter-evasion differential game with integral constraints on the players controls," *J. Appl. Math. Mech.*, **39**, 367-375, 1975.

[69] Ushakov, V.N., "Extremal strategies in differential games with integral constraints," *J. Appl. Math. Mech.*, **36**, 12-19, 1972.

[70] Pontryagin, L.S., Boltyanskii, V.G., Gamkrelidze, R.V. ve Mishenko, E.F., *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, Interscience Publishers John Wiley and Sons, New York-London, 1962.

[71] Beletskii, V.V., *Studies of Motions of Celestial Bodies*, Nauka, Moscow, 1972. (In Russian)

[72] Lawden, D.F., *Optimal Trajectories for Space Navigation*, Butterworth, London, 1963.

[73] Formalskii, A.M., *Controllability and Stability of Systems with Limited Resources. Theoretical Foundations of Engineering Cybernetics Series*, Nauka, Moscow, 1974.

[74] Huseyin, A. ve Huseyin, N., "Precompactness of the set of trajectories of the controllable system described by a nonlinear Volterra integral equation," *Math. Model. Anal.*, **17**, 686-695, 2012.

[75] Huseyin, A. ve Huseyin, N., "Dependence on the parameters of the set of trajectories of the control system described by a nonlinear Volterra integral equation," *Applications of Mathematics*, **59**, 303-317, 2014.

[76] Huseyin, A., "On the approximation of the set of trajectories of control system described by a Volterra integral equation," *Nonlin. Anal. Model. Contr.*, **19**, 199-208, 2014.

[77] Aubin, J.P. ve Frankowska, H., *Set Valued Analysis,* Birkhauser, Boston, 1990.

[78] Hu, Sh. ve Papageorgiou, N.S., *Handbook of Multivalued Analysis. Vol.1. Theory*, Kluwer, Dordrecht, 1997.

[79] Burago, D., Burago, Yu. ve Ivanov, S., *A Course in Metric Geometry. Graduate Studies in Mathematics, 33,* American Mathematical Society, Providence, 2001.

[80] Lusternik, L.A. ve Sobolev, V.J., *Elements of functional analysis*, John Wiley and Sons, New York, 1974.