G_2 YAPILARIN BAZI Λ^3_7-DEFORMASYONLARI

Şirin AKTAY

Doktora Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Mayıs–2013

Bu çalışma Anadolu Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyonunca kabul edilen 111F170 no'lu proje kapsamında desteklenmiştir.

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Şirin Aktay'ın **"G_2 Yapıların Bazı Λ^3_7-Deformasyonları"** başlıklı **Matematik** Anabilim Dalındaki, Doktora tezi 27/03/2013 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

		Adı - Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	:	Doç. Dr. Nülifer ÖZDEMİR	....
Üye	:	Prof. Dr. Hüseyin AZCAN	....
Üye	:	Prof. Dr. Nedim DEĞİRMENCİ	....
Üye	:	Doç. Dr. Hakan CEBECİ	....
Üye	:	Doç. Dr. Cumali EKİCİ	....

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

ÖZET

Doktora Tezi

G_2 YAPILARIN BAZI Λ^3_7-DEFORMASYONLARI

ŞİRİN AKTAY

Anadolu Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Nülifer ÖZDEMİR

2013, 101 Sayfa

Bu tezde, G_2 yapıya sahip 7-boyutlu bir Riemann manifoldu üzerindeki temel 3-formun, herhangi bir vektör alanı ile deformasyonu ele alınarak; yeni G_2 yapının sınıf değişimleri incelenmiştir. Öncelikle, deformasyon ile elde edilmiş yeni manifoldun bazı kısıtlar altında Levi-Civita kovaryant türevi, spinor demeti üzerindeki kovaryant türevi ve Dirac operatörü hesaplanarak, eski ve yeni Dirac operatörlerinin çekirdeklerinin izomorf oldukları gösterilmiştir. Daha sonra ise bir kısıt olmaksızın yeni Levi-Civita kovaryant türevi hesaplanmıştır. Deformasyonda kullanılan vektör alanının birim uzunlukta bir Killing vektör alanı olarak seçilmesiyle, yeni Levi-Civita kovaryant türevinin sadeleştiği görülmüş ve bu nedenle, üzerinde G_2 yapısı ve birim uzunlukta Killing vektör alanları bulunduğu bilinen, 7-boyutlu 3-Sasaki manifoldlarının deformasyonları incelenmiştir. Ayrıca 7-boyutlu 3-Sasaki manifoldları üzerinde yeni G_2 yapılar inşa edilmiş ve bu yeni yapıların bazı deformasyonları çalışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: G_2 Yapı, Deformasyon, Levi-Civita Kovaryant Türevi, 3-Sasaki Manifoldu, Spinor Demeti, Dirac Operatörü

ABSTRACT

PhD Thesis

SOME Λ^3_7-DEFORMATIONS OF G_2 STRUCTURES

Şirin AKTAY

Anadolu University

Graduate School of Sciences

Mathematics Program

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Nülifer ÖZDEMİR

2013, 101 Pages

In this thesis, a 7-dimensional Riemannian manifold with G_2 structure is considered. The fundamental 3-form of such a manifold is deformed by using an arbitrary vector field and the class change of the new G_2 structure is investigated. First, under some restrictions, the Levi-Civita covariant derivative, the spinorial covariant derivative and the Dirac operator on the spinor bundle are computed and it is proved that kernels of the old and the new Dirac operators are isomorphic. Next, the new Levi-Civita covariant derivative is expressed without any restriction. It is observed that if the vector field used while deforming the fundamental 3-form is a Killing vector field of unit length, then the formula derived for the Levi-Civita covariant derivative simplifies. Thus deformations on 7-dimensional 3-Sasakian manifolds are studied because of the existence of G_2 structures and Killing vector fields of unit length on them. In addition, the new G_2 structures are constructed on 7-dimensional 3-Sasakian manifolds and then some deformations of these G_2 structures are considered.

Keywords: G_2 Structure, Deformation, Levi-Civita Covariant Derivative, 3-Sasakian Manifold, Spinor Bundle, Dirac Operator

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Doç. Dr. Nülifer ÖZDEMİR'e ve her zaman beni destekleyen annem ve babama en içten teşekkürlerimi sunarım.

Şirin AKTAY

Mayıs 2013

İÇİNDEKİLER

ÇİZELGELER DİZİNİ

1 GİRİŞ

G_2 Lie grubunun $\mathfrak{g}_2$ Lie cebri literatürde ilk kez Killing'in 1887'deki çalışmasında yer almıştır. O dönemde Lie grupları ile onlara karşılık gelen Lie cebirleri arasında açık bir ayrım yoktu. Kompleks basit Lie cebirlerinin sınıflandırılması Killing tarafından yapılmıştır.

Teorem 1.0.1 (Killing, 1887, [1])**.** *Herhangi bir kompleks basit Lie cebri* $\mathfrak{so}(n,\mathbb{C})$*,* $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$*,* $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$*,* $\mathfrak{g}_2$*,* $\mathfrak{f}_4$*,* $\mathfrak{e}_6$*,* $\mathfrak{e}_7$*,* $\mathfrak{e}_8$ *Lie cebirlerinden birine izomorftur.*

$\mathfrak{so}(n,\mathbb{C})$, $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$, $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$ cebirleri bilinmekle beraber, diğer beş cebir ilk kez bu teoremde verilmiştir.

Killing'in bu çok önemli sınıflandırma teoreminin ispatındaki yanlışları Cartan 1894 yılında doktora tezinde düzeltmiştir.

Kompleksifikasyonu $\mathfrak{g}_2$ kompleks Lie cebri olan iki tane $\mathfrak{g}_2$ ve $\mathfrak{g}_2^*$ reel Lie cebri vardır. Bunlara karşılık gelen Lie grupları da G_2 ve G_2 ile gösterilsin.

$\mathfrak{g}_2$ Lie cebrinin ilk kompleks 7-boyutlu temsilini Cartan yine doktora tezinde vermiştir. Bu temsil $\mathfrak{g}_2^*$ reel Lie cebrinin $\mathfrak{so}(4,3)$ üzerindeki temsili olarak da düşünülebilir. Bundan sonra "istisnai" (exceptional) olarak adlandırılan $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{f}_4$, $\mathfrak{e}_6$, $\mathfrak{e}_7$, $\mathfrak{e}_8$ Lie cebirlerinin doğrudan inşası araştırılmıştır.

1900 yılında Engel G_2 Lie grubunu ilk kez pozitif ($\Lambda^3(\mathbb{C}^7)^*$ vektör uzayında açık bir $GL(7,\mathbb{C})$-orbite sahip) bir 3-formun izotropi alt grubu olarak ifade etmiştir. $GL(7,\mathbb{C})$ üzerinde bütün pozitif kompleks 3-formların denk olduklarını gözlemlemiş ve aşağıdaki teoremi ispatlamıştır.

Teorem 1.0.2 (Engel, 1900, [1])**.** *Herhangi bir pozitif kompleks 3-formun tek bir* $GL(7,\mathbb{C})$*-orbiti vardır ve* $\{e^1,\dots,e^7\}$ *kümesi* $\mathbb{C}^7$ *kompleks vektör uzayının bir tabanı olmak üzere,*

$$\varphi_0 := (e^1\wedge e^4 + e^2\wedge e^5 + e^3\wedge e^6)\wedge e^7 - 2e^1\wedge e^2\wedge e^3 + 2e^4\wedge e^5\wedge e^6$$

olarak verilen 3-form pozitiftir. Her pozitif kompleks φ *3-formu için,*

1. G_φ *izotropi grubu* G_2 *Lie grubuna izomorftur.*

2. φ *3-formu non-dejenere simetrik bir* β_φ *bilineer formu belirler.*

Herhangi bir φ pozitif 3-formunun belirlediği β_φ bilineer formu, $V = \mathbb{C}^7$ olmak üzere,

$$\beta_\varphi : V \times V \longrightarrow \Lambda^7 V^*, \ \beta_\varphi(X,Y) := (X \lrcorner \varphi) \wedge (Y \lrcorner \varphi) \wedge \varphi$$

şeklinde ifade edilebilir [2].

φ 3-formunun pozitif olması için gerek ve yeter koşulun, β_φ'nin determinantının sıfırdan farklı olması gerektiği Engel tarafından gösterilmiştir.

Reichel 1907'de herhangi bir φ pozitif 3-formunun $\mathfrak{g}_\varphi$ izotropi cebrini ifade etmiştir. Engel ise sadece yukarıda bahsedilen φ_0 3-formunun izotropi cebrini hesaplamıştır. Reel sayılar üzerinde düşünüldüğünde pozitif 3-formlar iki tane $GL(7,\mathbb{R})$-orbite sahiptir. Bu durumda β_φ iç çarpımının bir orbitteki işareti (signature) (4,3) iken, diğer orbitteki ise (7,0)'dır. Birinci durumda $\mathfrak{g}_\varphi$ Lie cebri $\mathfrak{g}_2^* \subset \mathfrak{so}(4,3)$ Lie cebrine, ikinci durumda ise $\mathfrak{g}_2 \subset \mathfrak{so}(7)$ Lie cebrine izomorftur. Böylece G_2 Lie grubunun ilk doğrudan tanımı verilmiştir.

G_2 grubunun 8-boyutlu normlu reel Oktonyonlar cebrine izomorf olduğu 1908 'de Cartan tarafından kanıtlanmış, Freudenthal'ın 1951'deki çalışmasından sonra ise G_2 grubu, bu karakterizasyonu ile daha çok çalışılmıştır [1].

G_2 Lie grubunun, pozitif bir 3-formun izotropi alt grubu olarak ve oktonyonlar cebrinin otomorfizm grubu $Aut(\mathbb{O})$ olarak verilen iki karakterizasyonu denktir. Bu denklik 1987'de Bryant tarafından kanıtlanmıştır [2].

20. yüzyılın başında holonomi grubu kavramı ortaya çıkmış; 1955 yılında ise Berger simetrik olmayan, indirgenemez bir manifoldun olası holonomi gruplarını listelemiştir.

Teorem 1.0.3 (Berger, 1955, [3])**.** *M n-boyutlu, yönlendirilmiş, basit bağlantılı, simetrik olmayan, indirgenemez bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda bu manifoldun holonomi grubu aşağıdakilerden biridir:*

$$SO(n), U(n/2), SU(n/2), Sp(n/4)Sp(1), Sp(n/4), G_2, Spin(7), Spin(9).$$

Bundan sonra, holonomi grupları Berger'in listesindeki gruplardan biri olan manifoldların inşası önemli bir çalışma alanı haline gelmiştir.

1966'da Bonan, holonomisi G_2 olan bir manifoldun üzerinde Levi-Civita kovaryant türevine göre paralel ($\nabla\varphi = 0$ özelliğine sahip) global bir φ 3-formunun varlığını göstermiştir. Bu 3-form Engel ve Reichel'in tanımladığı şekilde izotropi grubu G_2 olan 3-formdur.

Gray'in, G_2 Lie grubu ve bu grubu belirleyen 3-form üzerinde yaptığı çalışmalar diferansiyel geometride büyük öneme sahiptir. 1960'lı yıllardan başlayarak Gray manifoldlar üzerinde katlı vektör çarpımlarını tanımlamış [4] ve geometrik özelliklerini incelemiştir. 1971'de ise zayıf holonomi kavramını ortaya atarak, holonomi kavramını manifoldları daha geniş biçimde kapsayacak şekilde genellemiştir. φ manifoldun temel 3-formu olmak üzere, holonomisi G_2 grubu olan manifoldlar $d\varphi = 0$ ve $d * \varphi = 0$ eşitlikleri ile karakterize edilirken, Gray'in tanımladığı hemen hemen paralel G_2-manifoldlar $d * \varphi = 0$ ve $\lambda \neq 0$ olmak üzere $d\varphi = \lambda * \varphi$ eşitliklerini sağlarlar. Bundan sonra holonomisi G_2 olan manifoldlardan başka, yapı grubu G_2 olan manifoldlar özellikle Fern*á*ndez ve Gray tarafından çalışılmıştır.

Yapı grubu G_2 olan Riemann manifoldları 1982'de Fern*á*ndez ve Gray tarafından sınıflandırılmıştır. Bunun için öncelikle manifold üzerindeki temel 3-formun Levi-Civita kovaryant türevinin elemanı olduğu bir $\mathcal{W}$ vektör uzayı belirlenmiştir. Daha sonra bu uzay G_2 grubunun 1, 7, 14 ve 27 boyutlu vektör uzayları üzerindeki indirgenemez etkileri kullanılarak

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$$

şeklinde dört indirgenemez G_2-invaryant alt uzayın direkt toplamı olarak yazılmıştır. Böylece yapı grubu G_2 olan Riemann manifoldları 16 farklı sınıfa ayrılmıştır [5]. Bu sınıflandırmanın $d\varphi$ ve $d * \varphi$ dönüşümleri kullanılarak, ayrıca özel bir 1-form ve bu 1-formun dış türevi kullanılarak karakterizasyonları da 1996'da Cabrera tarafından verilmiştir [6].

Fern*á*ndez ve Gray'in 1982'deki çalışmasının önemli bir sonucu da yapı grubu G_2 olan $S^7 = Spin(7)/G_2$, $SU(3)/S^1$(Aloff-Wallach uzayları) gibi ilk manifold örnekleridir [5].

1987'de Bryant holonomisi G_2 olan Riemann metrikleri inşa etmiştir. Fakat bu metrikler tam değildir [2]. 1989'da ise Bryant ve Salamon, holonomisi G_2 olan lokal tam metrikler inşa etmişlerdir [7].

Holonomisi G_2 olan 7-boyutlu kompakt Riemann manifoldu örnekleri 1996 yılında Joyce tarafından inşa edilmiş [8] ve bu tür manifoldlar Joyce manifoldları olarak adlandırılmıştır.

Günümüzde G_2 yapısına sahip 7-boyutlu bir Riemann manifoldunun Levi-Civita kovaryant türevinin yanısıra, anti-simetrik torsiyona sahip metrik uyumlu kovaryant türevleri de incelenmektedir. G_2 yapıların anti-simetrik torsiyona sahip metrik uyumlu kovaryant türevleri, matematik ve matematiksel fizikte (string teori) uygulama alanına sahiptir ve böyle bir kovaryant türevin olması için gerek ve yeter koşullar Friedrich ve Ivanov tarafından verilmiştir [9].

G_2 grubunun, $SO(7)$ grubunun evrensel örtüsü olan $Spin(7)$ grubuna kaldırılabildiği bilinmektedir. Bu nedenle 7-boyutlu bir Riemann manifoldunun spin yapıya sahip olması için gerek ve yeter koşul bu manifoldun yapı grubunun G_2 olmasıdır [8, 10].

Yapı grubu G_2 olan manifoldlar spin olduklarından, bu manifoldlar üzerinde spinor demeti inşa edilebilir. ∇, 7-boyutlu bir spin manifold üzerindeki Levi-Civita kovaryant türevi olmak üzere, $\nabla\psi = 0$ koşulunu sağlayan (paralel) bir ψ spinor alanının var olması için gerek ve yeter koşul ∇ kovaryant türevinin holonomisinin G_2 grubunda yer almasıdır. Buradan G_2 grubunun diğer tanımlarına denk olan

$$G_2 = \{A \in Spin(7) | A\psi = \psi\}$$

karakterizasyonu verilmiştir [9]. Bu denk tanım sayesinde G_2 grubu ile spin geometri arasında ilişki kurulmuştur. Örnek olarak Gray'in 1971'de tanımladığı hemen-hemen paralel manifoldlar, tam olarak reel Killing spinor alanına sahip 7-manifoldlardır [11].

Spinor demeti üzerindeki en önemli dönüşümlerden biri ise, geometri, topoloji ve matematiksel fizikte büyük uygulama alanına sahip olan Dirac operatörüdür. Dirac operatörü birinci dereceden eliptik bir diferansiyel operatördür.

1960 yılında Sasaki diferansiyellenebilir bir manifold üzerinde, daha sonra

Sasaki yapı olarak adlandırılacak bir geometrik yapı tanımlamıştır [12]. 1970'te ise Kuo [13] ve Udrişte [14] eş zamanlı olarak 3-Sasaki manifoldları tanımlayarak, bu manifoldların örneklerini vermişlerdir. Doksanlı yılların başından itibaren, Sasaki ve 3-Sasaki manifoldları yeniden popüler bir çalışma konusu haline gelmiştir. Boyer-Galicki [15] ve Friedrich-Kath [11] bu konuya önemli katkılar sağlamışlardır.

Bu tezin amacı, G_2 yapıya sahip 7-boyutlu bir Riemann manifoldu üzerindeki φ temel 3-formunun

$$\Lambda^3_7 \cong \{\omega \lrcorner * \varphi \mid \omega \in \Gamma(TM)\}$$

uzayından elemanlarla deformasyonu ile elde edilen yeni G_2 yapının nasıl değiştiğini araştırmaktır. Bunun için, öncelikle Bölüm (4)'te, ilk önce bazı kısıtlar altında, deforme edilmiş $(M, \widetilde{g}, \widetilde{\varphi})$ manifoldunda, $\widetilde{\nabla}$ Levi-Civita kovaryant türevi, S spinor demeti üzerindeki $\widetilde{\nabla}^S$ kovaryant türevi ve $\widetilde{D}$ Dirac operatörü hesaplanarak, D ve $\widetilde{D}$ Dirac operatörlerinin çekirdekleri karşılaştırılmıştır. Daha sonra ise herhangi bir kısıt olmaksızın, $\widetilde{\nabla}$ kovaryant türevi hesaplanmıştır. G_2 yapının Λ^3_7 uzayından keyfi bir vektör alanı yerine, birim uzunlukta bir Killing vektör alanı ile deforme edilmesiyle, $\widetilde{\nabla}$ kovaryant türevinin oldukça sadeleştiği görülmüştür. Bu nedenle Bölüm (5)'te, 7-boyutlu 3-Sasaki manifoldları üzerinde deformasyonlar incelenmiştir. Bölüm (6)'da ise, 7-boyutlu 3-Sasaki manifoldları üzerinde yeni G_2 yapılar elde edilmiş ve bu yeni G_2 yapıların deformasyonları incelenmiştir. Son olarak Bölüm (7)'de manifoldlar üzerinde G_2 yapıların denklikleri ifade edilmiş; G_2-denk manifoldların, Fern*á*ndez ve Gray'in sınıflandırmasına göre aynı sınıfa ait oldukları açık olarak hesaplanmıştır.

2 G_2 GEOMETRİ

Bu bölümde G_2 Lie grubunun denk tanımları verilerek bazı özellikleri kısaca ifade edilmiştir. Buna ek olarak 7-boyutlu bir vektör uzayı üzerinde pozitif formlar tanımlanarak denk ifadeler verilmiştir.

2.1 G_2 Lie Grubu

$\{e_1, ..., e_7\}$ kümesi $\mathbb{R}^7$ uzayının standart tabanı ve $\{e^1, ..., e^7\}$ de bu tabana karşılık gelen dual taban olsun. $e^{ijk} = e^i \wedge e^j \wedge e^k$ olmak üzere,

$$\varphi = e^{123} + e^{145} + e^{167} + e^{246} - e^{257} - e^{347} - e^{356} \tag{2.1}$$

şeklinde verilen 3-forma $\mathbb{R}^7$ üzerinde temel 3-form denir.

$GL(7, \mathbb{R})$ genel lineer grubunun $G_2 = \{g \in GL(7, \mathbb{R}) \mid g^*\varphi = \varphi\}$ alt grubu 14-boyutlu, kompakt, bağlantılı ve basit bağlantılıdır [2].

G_2 grubu $GL(7, \mathbb{R})$ manifoldunun kapalı bir alt manifoldudur [16]. O halde G_2 de bir Lie grubudur [17].

$\forall\ x, y \in \mathbb{R}^7$ için,

$$\frac{1}{6}(x \lrcorner \varphi) \wedge (y \lrcorner \varphi) \wedge \varphi$$

7-formu ele alındığında; $x = \sum x_i e_i$ ve $y = \sum y_i e_i$ yazılırsa,

$$\frac{1}{6}(x \lrcorner \varphi) \wedge (y \lrcorner \varphi) \wedge \varphi = (x_1 y_1 + \ldots + x_7 y_7) e^{1234567}$$

eşitliği sağlanır. Buradan $\mathbb{R}^7$ üzerindeki standart iç çarpım $\langle x, y \rangle = \sum x_i y_i$ ve hacim formu $\Omega = e^{1234567}$ olarak elde edilir [2].

Herhangi bir $(V, \langle, \rangle)$ iç çarpım uzayı üzerinde $\forall\ x, y \in V$ için,

1) $\langle P(x, y), x \rangle = \langle P(x, y), y \rangle = 0$ ve

2) $\langle P(x, y), P(x, y) \rangle = \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle^2$

özelliklerine sahip bilineer bir $P : V \times V \longrightarrow V$ dönüşümü varsa bu dönüşüme V üzerinde 2-katlı bir vektör çarpımı denir. $\{e_1, \cdots, e_7\}$ kümesi V vektör uzayının herhangi bir ortonormal tabanı olmak üzere, $x \in V$ için

$$\begin{aligned} p : V &\longrightarrow \Lambda^2(V) \\ x &\longmapsto p(x) := -\frac{1}{2} \sum_i e_i \wedge P(e_i, x) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm, P 2-katlı vektör çarpımının adjoint dönüşümüdür ve $P(p(x)) = 3x$ özelliğine sahiptir [5].

$\mathbb{R}^7$ üzerinde verilen φ temel 3-formu kullanılarak

$$(P(x,y))^\sharp := y \lrcorner x \lrcorner \varphi$$

olarak tanımlanan P dönüşümü $\mathbb{R}^7$ üzerinde 2-katlı bir vektör çarpımıdır. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^7$ için

$$(P(x,y))^\sharp(z) = \langle P(x,y), z\rangle = (y \lrcorner x \lrcorner \varphi)(z) = \varphi(x,y,z)$$

yani $\langle P(x,y), z\rangle = \varphi(x,y,z)$ ilişkisi elde edilir [18].

G_2 Lie grubunun $G_2 = \{g \in GL(7,\mathbb{R}) \mid g^*\varphi = \varphi\}$ ifadesine denk başka tanımları da vardır. Bu tanımlar 8-boyutlu normlu Oktonyonlar cebri kullanılarak verilmiştir.

Tanım 2.1.1. *A, sonlu boyutlu, birimli reel bir cebir ve $\langle , \rangle$ de A cebri üzerinde bir iç çarpım olsun. Bu iç çarpım $\forall x, y \in A$ için*

$$\langle xy, xy\rangle = \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$$

şartını sağlıyorsa, A cebrine normlu cebir denir.

A cebrinin birimi 1_A ile gösterilsin. $ReA := span\{1_A\}$ ve $ImA := (ReA)^\perp$ olsun. $A = ReA \oplus ImA$ olduğundan, $\forall x \in A$ için, $x = Rex + Imx$ olacak şekilde tek türlü belirli $Rex \in ReA$, $Imx \in ImA$ vardır. $\bar{x} := Rex - Imx$ olarak tanımlı $\bar{x} \in A$ elemanına x elemanının eşleniği denir.

A, n-boyutlu normlu bir cebir olsun. $A \times A$ kümesi üzerinde her $(a,b), (c,d) \in A \times A$ için aşağıdaki ikili işlemler verilsin:

$$(a,b).(c,d) := (ac - \bar{d}b, da + b\bar{c}), \quad (a,b) \circ (c,d) := (ac + \bar{d}b, da + b\bar{c}).$$

Bu durumda $A(+) := (A \times A, .)$ ve $A(-) := (A \times A, \circ)$ ikilileri birimli cebir yapısına sahiptir ve $boyA(+) = boyA(-) = 2n$'dir. n-boyutlu bir A cebrinden bu şekilde 2n-boyutlu $A(+)$ ve $A(-)$ cebirlerinin üretilmesi metoduna Cayley-Dickson metodu denir [16].

Cayley-Dickson metoduyla üretilen bazı cebirler şunlardır:

$$\begin{aligned}
\mathbb{C} &= \mathbb{R}(+) && \text{Kompleks sayılar,}\\
\mathbb{H} &= \mathbb{C}(+) && \text{Kuaterniyonlar (Hamilton sayıları),}\\
\mathbb{O} &= \mathbb{H}(+) && \text{Oktonyonlar (Cayley sayıları),}\\
\mathbb{L} &= \mathbb{R}(-) && \text{Lorentz sayıları,}\\
M_2(\mathbb{R}) &= \mathbb{C}(-) && 2\times 2 \text{ tipinde reel matrisler,}\\
\widetilde{\mathbb{O}} &= \mathbb{H}(-) && \text{Split Oktonyonlar.}
\end{aligned}$$

Bu cebirlerden $\mathbb{C} = \mathbb{R}(+)$ ve $\mathbb{L} = \mathbb{R}(-)$ değişmeli, birleşmeli ve normlu cebirlerdir. $\mathbb{H} = \mathbb{C}(+)$ ve $M_2(\mathbb{R}) = \mathbb{C}(-)$ birleşmeli, normlu fakat değişmeli olmayan cebirlerdir. $\mathbb{O} = \mathbb{H}(+)$ ve $\widetilde{\mathbb{O}} = \mathbb{H}(-)$ ise normlu, fakat değişmeli veya birleşmeli olmayan cebirlerdir.

Teorem 2.1.2 (Hurwitz, [16])**.** *$\mathbb{R}$ üzerinde tanımlanabilen mümkün bütün normlu cebirler şunlardır:*

$$\mathbb{R},\ \mathbb{C},\ \mathbb{L},\ \mathbb{H},\ M_2(\mathbb{R}),\ \mathbb{O},\ \widetilde{\mathbb{O}}.$$

$\mathbb{R}^7$ üzerinde 2-katlı vektör çarpımı Oktonyonlar cebri kullanılarak tanımlanabilir. Oktonyonlar Cayley-Dickson metodu ile Kuaterniyonlar cebrinden üretilen 8 boyutlu normlu cebirdir. $\mathbf{1}$ bu cebrin birimi olmak üzere, $\forall\ x, y \in Im\mathbb{O}$ için, $P(x, y) := xy + \langle x, y\rangle\mathbf{1}$ dönüşümü $Im\mathbb{O} \cong \mathbb{R}^7$ üzerinde 2-katlı bir vektör çarpımıdır. $\forall\ x, y, z \in Im\mathbb{O}$ için, $\varphi(x, y, z) := \langle P(x, y), z\rangle$ olarak tanımlı 3-form da $Im\mathbb{O} \cong \mathbb{R}^7$ üzerindeki temel 3-formdur.

Oktonyonların otomorfizm grubu G_2 Lie grubudur [2]. Ayrıca buna denk olarak $G_2 = \{g \in GL(Im\mathbb{O}) \mid \forall\ x, y \in Im\mathbb{O} \text{ için, } g(P(x, y)) = P(g(x), g(y))\}$ de alınabilir [16].

2.2 Pozitif Formlar

φ, $\mathbb{R}^7$ üzerindeki temel 3-form olsun. $GL(7, \mathbb{R})$ genel lineer grubunun $\mathbb{R}^7$ üzerindeki 3-formların uzayı $\Lambda^3\mathbb{R}^{7*}$ üzerinde, $g \in GL(7, \mathbb{R})$, $\alpha \in \Lambda^3\mathbb{R}^{7*}$ olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
GL(7,\mathbb{R}) \times \Lambda^3\mathbb{R}^{7*} &\longrightarrow \Lambda^3\mathbb{R}^{7*} \\
(g,\alpha) &\longmapsto g.\alpha := g^*\alpha
\end{aligned}
$$

şeklinde bir etkisi vardır. $\mathbb{R}^7$ üzerinde tanımlı φ temel 3-formunun bu etki altındaki orbiti

$$\{g^*\varphi \mid g \in GL(7,\mathbb{R})\},$$

$\Lambda^3\mathbb{R}^{7*}$ uzayında açıktır [2]. Bu orbit $\Lambda^3_+(\mathbb{R}^{7*}) \subset \Lambda^3\mathbb{R}^{7*}$ ile gösterilir ve bu orbitin elemanlarına pozitif (definite, generic) 3-formlar denir. Tanım gereği bir α 3-formunun pozitif olması için gerek ve yeter koşul $\alpha = g^*\varphi$ olacak şekilde bir $g \in GL(7,\mathbb{R})$ olmasıdır.

V 7-boyutlu reel bir vektör uzayı ve $h : V \longrightarrow \mathbb{R}^7$ bir izomorfizm olsun. Bu durumda h izomorfizmi bir $h^* : \Lambda^3\mathbb{R}^{7*} \longrightarrow \Lambda^3 V^*$ izomorfizmi belirler. $h^*(\Lambda^3_+(\mathbb{R}^{7*})) \subset \Lambda^3 V^*$ kümesi $\Lambda^3_+(V^*)$ ile gösterilir. $\Lambda^3_+(V^*)$ kümesi $\Lambda^3 V^*$ uzayında açıktır ve h izomorfizminin seçiminden bağımsızdır [19]. $\Lambda^3_+(V^*)$ kümesinin elemanlarına V üzerinde tanımlı pozitif (temel, generic, definite) 3-formlar denir. Tanım gereği $\Lambda^3 V^*$ uzayından alınan bir α 3-formunun pozitif olması için gerek ve yeter koşul $\alpha = f^*\varphi$ olacak şekilde bir $f : V \longrightarrow \mathbb{R}^7$ izomorfizminin olmasıdır.

V üzerinde her $\alpha = f^*\varphi$ pozitif formu tek türlü belirli $\langle , \rangle_\alpha := f^*(\langle , \rangle)$ pozitif tanımlı iç çarpımını ve $\Omega_\alpha := f^*(e^{1234567})$ hacim formunu belirler. O halde $*_\alpha : \Lambda^p V^* \longrightarrow \Lambda^{7-p} V^*$ Hodge-star operatörü de iyi tanımlıdır.

G_2 Lie grubunun 1, 7, 14 ve 27 boyutlu bazı vektör uzayları üzerinde etkileri kullanılarak, bu grubun $\Lambda^k(V^*)$ vektör uzayı üzerindeki temsilleri, indirgenemez $\Lambda^k_l(V^*)$ alt uzaylarının direkt toplamı olarak yazılmıştır [2, 5, 18]:

$$\Lambda^1(V^*) \cong V^* \cong V,$$

$$\Lambda^2(V^*) \cong \Lambda^2_7(V^*) \oplus \Lambda^2_{14}(V^*),$$

$$\Lambda^3(V^*) \cong \Lambda^3_1(V^*) \oplus \Lambda^3_7(V^*) \oplus \Lambda^3_{27}(V^*).$$

Burada

$$\Lambda^2_7(V^*) \cong \{\alpha \in \Lambda^2(V^*) \mid *(\varphi \wedge \alpha) = 2\alpha\},$$

$$\Lambda^2_{14}(V^*) \cong \{\alpha \in \Lambda^2(V^*) \mid \; *(\varphi \wedge \alpha) = -\alpha\},$$

$$\Lambda^3_1(V^*) \cong \{a\varphi \mid a \in \mathbb{R}\},$$

$$\Lambda^3_7(V^*) \cong \{*(\varphi \wedge \alpha) \mid \alpha \in V^*\} \cong \{x \lrcorner * \varphi \mid x \in \mathbb{R}^7\},$$

$$\Lambda^3_{27}(V^*) \cong \{\alpha \in \Lambda^2(V^*) \mid \alpha \wedge \varphi = 0 \text{ ve } \alpha \wedge *\varphi = 0\}$$

olur.

3 G_2 MANİFOLDLAR

3.1 Yapı Grubu G_2 olan Riemann Manifoldları

(M, g) 7-boyutlu bir manifold ve TM bu manifoldun tanjant demeti olsun. $\mathbb{R}^7$ üzerinde tanımlı φ temel 3-formu lokal trivilizasyondan bağımsız olarak TM üzerine taşınabiliyorsa M manifolduna yapı grubu G_2 olan bir manifold, ya da G_2 yapısına sahip bir manifold denir. φ temel 3-formuna da M manifoldu üzerinde bir G_2 yapı denir.

Tanım 3.1.1. *[19] M 7-boyutlu bir manifold ve σ da M üzerinde tanımlı bir 3-form olsun. Eğer her $x \in M$ için*

$$\sigma_x \in \Lambda^3_+(T^*_x M) := \{g^*_x \varphi \mid g_x : T_x M \longrightarrow \mathbb{R}^7 \quad \textit{izomorfizmdir}\}$$

oluyorsa, σ 3-formuna bir pozitif (definite, generic, temel) 3-form denir.

M üzerindeki pozitif 3-formların kümesi $\Omega^3_+(M)$ ile gösterilsin.

Önerme 3.1.2. *M 7-boyutlu bir manifold olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:*

1. *$\mathbb{R}^7$ üzerinde tanımlı temel 3-form lokal trivilizasyondan bağımsız olarak TM üzerine taşınır.*

2. *Tanjant demetinin geçiş fonksiyonları G_2 grubunda değer alır.*

3. *Manifoldun $P(M, GL(7, \mathbb{R}))$ çatı demetinin $P'(M, G_2)$ gibi bir alt demeti vardır [20].*

4. *Her $x \in M$ için $\sigma_x \in \Lambda^3_+(T^*_x M)$ olacak şekilde bir $\sigma \in \Omega^3_+(M)$ pozitif 3-formu vardır [19].*

Kanıt. M 7-boyutlu bir manifold olsun.

$1 \Leftrightarrow 2$: TM bu manifoldun tanjant demeti olsun. Her $x \in M$ için $T_x M$ tanjant uzayı, $\mathbb{R}^7$ vektör uzayına izomorftur. φ, $\mathbb{R}^7$ üzerinde tanımlı temel 3-form olsun. Tanjant demetinin $\{(U_i, \Psi_i)\}_{i \in I}$ gibi bir lokal trivilizasyonu verilsin. Her $x \in U_i$ için $(\Psi_i|_{\pi^{-1}(x)})^* \varphi$ dönüşümü $T_x M$ vektör uzayı üzerinde bir

3-formdur. Bu şekilde her bir T_xM lifine taşınan temel 3-formun lokal trivilizasyondan bağımsız olarak TM üzerine taşınabilmesi için $i \neq j$ ve

$$(U_i, \Psi_i),\ (U_j, \Psi_j) \in \{(U_i, \Psi_i)\}_{i \in I}$$

olmak üzere, her $x \in U_i \cap U_j$ için, $(\Psi_i|_{\pi^{-1}(x)})^*\varphi = (\Psi_j|_{\pi^{-1}(x)})^*\varphi$ olmalıdır. Buradan $((\Psi_i|_{\pi^{-1}(x)}) \circ (\Psi_j|_{\pi^{-1}(x)})^{-1})^*\varphi = \varphi$ elde edilir. Bu eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$(\Psi_i|_{\pi^{-1}(x)}) \circ (\Psi_j|_{\pi^{-1}(x)})^{-1} \in G_2$$

olmasıdır.

$2 \Leftrightarrow 3$: Genel olarak, herhangi bir $P(M, G)$ asli lif demetinin yapı grubu G nin, $G' \leq G$ Lie grubuna indirgenmesi için gerek ve yeter koşul, M manifoldunun geçiş fonksiyonları G' grubunda değer alacak şekilde bir lokal trivilizasyonunun olmasıdır. Kanıt için bkz [20] (Bölüm 1, Önerme 5.3).

$3 \Leftrightarrow 4$: $\sigma \in \Omega^3_+(M)$ olsun. Bu durumda

$$F_\sigma := \{u \in Hom(T_xM, V) \mid x \in M \text{ ve } u^*\varphi = \sigma_x\}$$

olmak üzere, $F_\sigma(M, G_2)$ asli demeti, manifoldun çatı demetinin, yapı grubu G_2 olan bir alt demetidir.

Tersine $Q(M, G_2)$ asli demeti, M manifoldunun çatı demetinin bir alt demeti olsun. Her $x \in M$ için, $u \in Q_x$ olmak üzere, $\sigma_x := u^*\varphi$ olarak tanımlanan σ 3-formu pozitiftir [19]. $\square$

M 7-boyutlu yönlendirilebilir bir manifold, φ de M üzerinde herhangi bir 3-form olsun. M yönlendirilebilir olduğundan, M üzerinde her yerde sıfırdan farklı bir ζ 7-formu vardır. φ 3-formunun pozitif olması için gerek ve yeter koşul, her $p \in M$ noktasında $x \in \Gamma(TM)$ olmak üzere,

$$(x \lrcorner \varphi) \wedge (x \lrcorner \varphi) \wedge \varphi = 6f(x, x)\zeta \tag{3.2}$$

eşitliğiyle tanımlanan f fonksiyonunun, her x vektörü için $f(x) \geq 0$ özelliğine sahip olmasıdır. $f = 0$ olması da ancak ve ancak $x = 0$ iken geçerlidir [18].

Manifold üzerinde verilmiş olan φ pozitif ise (3.2) eşitliği polarize edilerek, her $x, y \in \Gamma(TM)$ için,

$$(x \lrcorner \varphi) \wedge (y \lrcorner \varphi) \wedge \varphi = 6g(x,y)\zeta \tag{3.3}$$

bağıntısından, M manifoldu üzerinde g Riemann metriği elde edilir.

Yapı grubu G_2 olan Riemann manifoldları 1982'de Fernández ve Gray tarafından sınıflandırılmıştır. Bunun için öncelikle manifoldun tanjant demeti üzerindeki temel 3-formun Levi-Civita kovaryant türevinin elemanı olduğu bir $\mathcal{W}$ vektör uzayı belirlenmiştir. Daha sonra bu uzay G_2 grubunun 1, 7, 14 ve 27 boyutlu vektör uzayları üzerindeki indirgenemez etkileri kullanılarak

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$$

şeklinde dört indirgenemez G_2-invaryant alt uzayın direkt toplamı olarak yazılmıştır. Böylece yapı grubu G_2 olan Riemann manifoldları 16 farklı sınıfa ayrılmıştır. Her bir sınıfı tanımlayan bağıntılarda P ve p dönüşümlerinden de faydalanılmıştır [5]. Aynı sınıflandırma $d\varphi$ ve $d * \varphi$ formları ve

$$\mu = *d\varphi \wedge \varphi = - * d * \varphi \wedge *\varphi$$

olmak üzere $\theta = *\mu$ 1-formu kullanılarak da ifade edilmiştir [6, 18]. Bu karakterizasyonlar Çizelge (3.1) 'de verilmiştir.

Yapı grubu G_2 olan 7 boyutlu bir (M, g, φ) Riemann manifoldu verildiğinde, G_2 grubunun bazı indirgenemez temsilleri kullanılarak M üzerindeki 3-formların uzayı indirgenemez invaryant alt uzayların direkt toplamı olarak yazılmıştır:

$$\Lambda^3(M) \cong \Lambda^3_1 \oplus \Lambda^3_7 \oplus \Lambda^3_{27}.$$

Burada

$$\begin{aligned}
\Lambda^3_1 &\cong \{f\varphi \mid f \in C^\infty(M)\} \cong \{\eta \in \Lambda^3(M) \mid \varphi \wedge (*(*\varphi \wedge \eta)) = 7\eta\}, \\
\Lambda^3_7 &\cong \{w \lrcorner * \varphi \mid w \in \Gamma(TM)\} \\
&\cong \{*(\varphi \wedge \alpha) \mid \alpha \in \Lambda^1_7\} \cong \{\eta \in \Lambda^3(M) \mid \ * (\varphi \wedge *(\varphi \wedge \eta)) = -4\eta\}, \\
\Lambda^3_{27} &\cong \{\alpha \in \Lambda^3(M) \mid \alpha \wedge \varphi = 0 \text{ ve } \alpha \wedge *\varphi = 0\}\text{'dır}
\end{aligned}$$

ve Λ^k_l gösterimindeki alt indis uzayın boyutunu belirtmektedir [2, 18].

Çizelge 3.1. G_2 Yapıların Tanımlama Bağıntıları

$\mathcal{P}$	$d\varphi = 0$ ve $d * \varphi = 0$	$\theta = 0$
$\mathcal{W}_1$	$d\varphi = k * \varphi$ ve $d * \varphi = 0$	$\theta = 0$
$\mathcal{W}_2$	$d\varphi = 0$	$\theta = 0$
$\mathcal{W}_3$	$d * \varphi = 0$ ve $d\varphi \wedge \varphi = 0$	$\theta = 0$
$\mathcal{W}_4$	$d\varphi = \alpha \wedge \varphi$ ve $d * \varphi = \beta \wedge *\varphi$	$d\theta = 0$
$\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2$	$d\varphi = k * \varphi$ ve $*d * \varphi \wedge *\varphi = 0$	$\theta = 0$
$\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3$	$d * \varphi = 0$	$\theta = 0$
$\mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3$	$d\varphi \wedge \varphi = 0$ ve $(*d\varphi) \wedge \varphi = 0$	$\theta = 0$
$\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_4$	$d\varphi = \alpha \wedge \varphi + f * \varphi$ ve $d * \varphi = \beta \wedge *\varphi$	$d\theta = 0$
$\mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_4$	$d\varphi = \alpha \wedge \varphi$	$d\theta = 0$
$\mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$	$d\varphi \wedge \varphi = 0$ ve $d * \varphi = \beta \wedge *\varphi$	$\pi_7(d\theta) = 0$
$\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3$	$(*d\varphi) \wedge \varphi = 0$ veya $*d * \varphi \wedge *\varphi = 0$	$\theta = 0$
$\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_4$	$d\varphi = \alpha \wedge \varphi + f * \varphi$	$d\theta = ?$
$\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$	$d * \varphi = \beta \wedge *\varphi$	$\pi_7(d\theta) = 0$
$\mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$	$d\varphi \wedge \varphi = 0$	$d\theta = ?$
$\mathcal{W}$	ilişki yok	

3.2 Spin Geometri

$Spin(7)$ grubu $SO(7)$ grubunun çift katlı evrensel örtüsüdür. 7-boyutlu yönlendirilebilir bir M Riemann manifoldunun yapı grubu $SO(7)$ grubundan $Spin(7)$ grubuna kaldırılabiliyorsa, M manifolduna bir spin manifoldu denir. Ayrıca 7-boyutlu bir manifoldun G_2 yapıya sahip olması için gerek ve yeter koşul bu manifoldun bir spin manifoldu olmasıdır [10].

M manifoldu n boyutlu bir spin manifoldu olsun. $\Delta_n \cong \mathbb{C}^{2^n}$ olmak üzere, $\kappa : Spin(n) \to End(\Delta_n)$ temsili, $\kappa : Cl_n \to End(\Delta_n)$ temsilinin $Spin(n)$ üzerine kısıtlanmışını belirtsin.

$$S = P_{Spin(n)} \times_\kappa \Delta_n$$

asosiye vektör demetine M için bir spinor demeti denir.

$\Gamma(S)$ kümesi S spinor demetinin kesitlerinin kümesi olsun. M üzerindeki Levi-Civita kovaryant türevi, S vektör demeti üzerinde bir

$$\nabla^S : \Gamma(S) \to \Gamma(T^*M \otimes S)$$

kovaryant türevi belirler. Bu türev lokal olarak $v \in \Gamma(TM)$, $\sigma \in \Gamma(S)$ ve $\varepsilon = \{e_1, ..., e_n\}$ kümesi $P_{SO(n)}M$ asli lif demetinin bir lokal çatısı iken,

$$\nabla^S_v \sigma = d\sigma(v) + \frac{1}{4}\sum_{i,j} g(\nabla_v e_i, e_j)\kappa(e_i)\kappa(e_j)\sigma$$

formülü ile belirlidir.

$D : \Gamma(S) \to \Gamma(S)$ Dirac operatörü ise lokal olarak,

$$D\sigma = \sum_{j=1}^{n} \kappa(e_j)\nabla^S_{e_j}\sigma$$

şeklinde ifade edilebilir [10, 21].

3.3 G_2 Yapının Deformasyonları

Yapı grubu G_2 olan 7-boyutlu (M, g, φ) Riemann manifoldu verilsin. Manifoldun g metriğinin veya φ temel 3-formunun değiştirilmesi ile manifoldun G_2 yapısı değişir. φ temel 3-formunun değiştirilmesi ile oluşturulan yeni 3-formun manifold üzerinde yine bir G_2 yapı vermesi için, yeni 3-form pozitif olmalıdır.

M manifoldunun φ temel 3-formuna $\eta \in \Lambda^3_k(M)$ gibi bir 3-formun eklenmesiyle yeni bir $\widetilde{\varphi} = \varphi + \eta$ 3-formu elde edilir. Yeni $\widetilde{\varphi}$ 3-formunun hangi koşullar altında temel 3-form olduğu ve bu deformasyon altında manifoldun G_2 yapısının nasıl değiştiğiyle ilgili literatürde çeşitli çalışmalar mevcuttur [5, 18, 22, 23].

$\eta \in \Lambda^3_1$ ise, bu durum konformal deformasyon olarak bilinir. Yapı grubu G_2 olan manifoldlarda konformal deformasyonlar Fern*á*ndez ve Gray tarafından çalışılmıştır [5]. Fern*á*ndez ve Gray'in çalışmasında konformal deformasyon altında invaryant kalan sınıflar belirlenmiştir. Bunun için öncelikle yapı grubu G_2 olan 7-boyutlu bir M manifoldu üzerinde, $f \in C^\infty(M)$ olmak üzere,

$$\widetilde{g} = e^{2f} g$$

olacak şekilde g ve $\widetilde{g}$ metrikleri ele alınmıştır.

∇ ve $\widetilde{\nabla}$ sırasıyla g ve $\widetilde{g}$ metrikleri tarafından belirlenen Levi-Civita kovaryant türevleri olmak üzere, $\forall x, y \in \Gamma(TM)$ için,

$$\widetilde{\nabla}_x y = \nabla_x y + (xf)y + (yf)x - g(x,y) gradf$$

ilişkisi bilinmektedir [10].

$\widetilde{P}$ ve P sırasıyla $(M, \widetilde{g})$ ve (M, g) manifoldları üzerindeki 2-katlı vektör çarpımları olmak üzere $\widetilde{P} = e^f P$ ilişkisi vardır. Ayrıca $\widetilde{\varphi}$ ve φ sırasıyla $(M, \widetilde{g})$ ve (M, g) manifoldları üzerindeki temel 3-formlar; $\widetilde{p}$ ve p sırasıyla $\widetilde{P}$ ve P 2-katlı vektör çarpımlarının adjoint dönüşümleri ve $\widetilde{\delta}$ ile δ da $\widetilde{g}$ ve g metriklerinin iç türevleri olmak üzere, her $x, y, z, w \in \Gamma(TM)$ için,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi} &= e^{3f}\varphi, \\
\widetilde{p} &= e^{-f}p, \\
\widetilde{\nabla}_w(\widetilde{\varphi})(x,y,z) &= e^{3f}\{\nabla_w(\varphi)(x,y,z) \\
&\quad -\mathfrak{S}_{xyz}\big((xf)\varphi(w,y,z) - g(w,x)P(y,z)f\big)\}, \\
\widetilde{\delta}\widetilde{\varphi}(y,z) &= e^f\{\delta\varphi(y,z) - 4P(y,z)f\}, \\
\widetilde{p}\widetilde{\delta}\widetilde{\varphi} &= p\delta\varphi - 12df, \\
d\widetilde{\varphi} &= e^{3f}\{3df \wedge \varphi + d\varphi\}
\end{aligned}$$

eşitlikleri geçerlidir. Bundan sonra, manifold üzerinde $\forall w, x, y, z \in \Gamma(TM)$ için,

$$\upsilon(w,x,y,z) = \nabla_w(\varphi)(x,y,z) - \frac{1}{12}\mathfrak{S}_{xyz}\{p\delta\varphi(x)\varphi(w,y,z) - 3g(w,x)\delta\varphi(y,z)\}$$

tensör alanı tanımlanmış ve g metriğinin konformal deformasyonu ile elde edilen yeni $\widetilde{\upsilon}$ tensör alanı için

$$\widetilde{\upsilon} = e^{3f}\upsilon$$

olduğu gösterilmiştir. Ayrıca G_2 yapısına sahip manifoldların 16 sınıfı için verilen tanımlama bağıntıları υ cinsinden yazılmış ve konformal deformasyon altında invaryant kalan sınıfları belirleyen aşağıdaki teorem verilmiştir:

Teorem 3.3.1. *(M, g) manifoldu $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{W}$ sınıfına ve g metriğinin $\widetilde{g} = e^{2f}g$ şeklindeki deformasyonundan sonra $(M, \widetilde{g})$ manifoldu $\widetilde{\mathcal{U}} \subseteq \mathcal{W}$ sınıfına ait olsun. Bu durumda $\widetilde{\mathcal{U}} \subseteq \mathcal{W}_4 \oplus \mathcal{U}$'dur [5].*

O halde $\widetilde{\mathcal{U}} = \mathcal{U}$ olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{W}_4 \subseteq \mathcal{U}$ olmasıdır. Sonuç olarak konformal deformasyon altında değişmeyen sınıflar şunlardır [5]:

$$\mathcal{W}_4,\ \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_4,\ \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_4,\ \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_4,\ \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4,\ \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4,\ \mathcal{W}.$$

Karigiannis'in 2003 yılındaki çalışmasında, yapı grubu G_2 olan bir M manifoldu üzerinde $f \in C^\infty(M)$ için, $\widetilde{\varphi} = f^3\varphi$ konformal deformasyonu ele alınmış ve

$$\begin{aligned}
d\widetilde{\varphi} &= 3f^2 df \wedge \varphi + f^3 d\varphi, \\
d\widetilde{*}\widetilde{\varphi} &= 4f^3 df \wedge *\varphi + f^4 d * \varphi, \\
\widetilde{*}d\widetilde{\varphi} &= 3f * (df \wedge \varphi) + f^2 * d\varphi, \\
\widetilde{*}d\widetilde{*}\widetilde{\varphi} &= 4 * (df \wedge *\varphi) + f * (d * \varphi)
\end{aligned}$$

ilişkileri yazılmıştır. Buna ek olarak,

$$\mu = *d\varphi \wedge \varphi = - * d * \varphi \wedge *\varphi,\ \theta = *\mu,\ h = \frac{1}{7} * (\varphi \wedge d\varphi)$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}
d\widetilde{*}\widetilde{\varphi} + \tfrac{1}{3}\widetilde{\theta} \wedge \widetilde{*}\widetilde{\varphi} &= f^4(d * \varphi + \tfrac{1}{3}\theta \wedge *\varphi), \\
d\widetilde{\varphi} + \tfrac{1}{4}\widetilde{\theta} \wedge \widetilde{\varphi} &= f^3(d\varphi + \tfrac{1}{4}\theta \wedge \varphi), \\
d\widetilde{\varphi} \wedge \widetilde{\varphi} &= f^6(d\varphi \wedge \varphi), \\
d\widetilde{\varphi} + \tfrac{1}{4}\widetilde{\theta} \wedge \widetilde{\varphi} - \widetilde{h}\widetilde{*}\widetilde{\varphi} &= f^3(d\varphi + \tfrac{1}{4}\theta \wedge \varphi - h * \varphi), \\
\widetilde{\mu} &= -12f^4 * df + f^5\mu, \\
\widetilde{\theta} &= -12d(log(f)) + \theta
\end{aligned}$$

eşitlikleri verilmiş; konformal deformasyon altında invaryant kalan sınıfların Fern*á*ndez ve Gray'in notasyonuyla $\mathcal{W}_4$ uzayından bileşenler içeren sınıflar olduğu, Fern*á*ndez ve Gray'den farklı bir yöntemle gözlenmiştir. Ayrıca

$$\widetilde{\varphi} = f^3\varphi$$

konformal deformasyonu ile elde edilen $\widetilde{\varphi}$ temel 3-formunun kapalı ($d\widetilde{\varphi} = 0$) ve co-closed ($\widetilde{\delta}\widetilde{\varphi} = 0$) olması için gerek ve yeter koşullar verilmiştir. Buna göre $d\widetilde{\varphi} = 0$ olması için gerek ve yeter koşul, φ 3-formunun $\mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_4$ sınıfında olması ve $12dlog(f) = \theta$ olmasıdır. $d\widetilde{*}\widetilde{\varphi} = 0$ olması için gerek ve yeter koşul ise, φ 3-formunun $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$ sınıfında olması ve $12dlog(f) = \theta$ olmasıdır.

Aynı çalışmada $\eta \in \Lambda^3_7$ olmak üzere, $\widetilde{\varphi} = \varphi + \eta$ deformasyonu da çalışılmıştır.

$$\Lambda^3_7 \cong \{\omega \lrcorner * \varphi \mid \omega \in \Gamma(TM)\}$$

olduğundan, $t \in \mathbb{R}$ için $\eta = t(\omega \lrcorner * \varphi)$ yazılabilir. Her ω vektör alanı için $\widetilde{\varphi}$ 3-formundan elde edilen metrik pozitif tanımlı olduğundan [18], $\widetilde{\varphi}$ 3-formu pozitiftir. $\widetilde{\varphi} = \varphi + \omega * \lrcorner \varphi$ deformasyonu için aşağıdaki ilişkiler bulunmuştur: $x, y \in \Gamma(TM)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \widetilde{d}_{vol} &= (1 + g(\omega,\omega))^{2/3} d_{vol}, \\ \widetilde{g}(x,y) &= (1 + g(\omega,\omega))^{-2/3} \{g(x,y) + g(\omega,\omega)g(x,y) \\ &\quad - g(\omega,x)g(\omega,y)\} \\ &= (1 + g(\omega,\omega))^{-2/3}\{g(x,y) + g(\omega \times x, \omega \times y)\}, \end{aligned}$$

α ve β k-formlar olmak üzere,

$$\begin{aligned} \widetilde{g}(\alpha,\beta) &= (1 + g(\omega,\omega))^{-k/3}\{g(\alpha,\beta) + g(\omega \lrcorner \alpha, \omega \lrcorner \beta)\}, \\ \widetilde{*}\alpha &= (1 + g(\omega,\omega))^{(2-k)/3}\{*\alpha + (-1)^{k-1}\omega \lrcorner (*(\omega \lrcorner \alpha))\}, \\ \widetilde{g}(\widetilde{\varphi},\widetilde{\varphi}) &= g(\varphi,\varphi), \\ \widetilde{*}\widetilde{\varphi} &= (1 + g(\omega,\omega))^{-1/3}\{*\widetilde{\varphi} + \omega \lrcorner (*(\omega \lrcorner \widetilde{\varphi}))\} \\ &= (1 + g(\omega,\omega))^{-1/3}\{*\varphi + *(\omega \lrcorner * \varphi) + \omega \lrcorner * (\omega \lrcorner \varphi)\}. \end{aligned}$$

Ancak bu deformasyon altında manifoldun ait olduğu sınıfın nasıl değiştiği incelenmemiştir [18].

Spinor demeti üzerinde tanımlı Dirac operatörünün konformal değişimi ise Hijazi tarafından incelenmiştir [24]. (M, g) n-boyutlu bir Riemann spin manifoldu olsun. $f \in C^\infty(M)$ olmak üzere, g metriğinin $\widetilde{g} = e^{2f} g$ konformal deformasyonu ile oluşan manifold $\widetilde{M} = (M, \widetilde{g})$ ile gösterilsin. (M, g) manifoldu üzerindeki spin yapısı, $\widetilde{M}$ üzerinde bir spin yapı doğurur. M manifoldunun çatı demetinin her ortonormal $\varepsilon = \{e_1, e_2, \cdots, e_7\}$ kesitine $\widetilde{M}$ manifoldunun çatı demetinin $\psi_w(\varepsilon) = \{\widetilde{e}_1, \cdots, \widetilde{e}_7\}$ ortonormal kesiti karşılık getirilebilir. Burada her j için, $\widetilde{e}_j = e^{-f} e_j$ olur. Böylece $SO(7)$-equivariant bir

$$\psi_f : P_{SO}(M) \to P_{SO}(\widetilde{M})$$

dönüşümü elde edilir. Bu dönüşüm ise M ve $\widetilde{M}$ manifoldlarına karşılık gelen asli $Spin(7)$-demetler arasında yine aynı ψ_f simgesiyle gösterilecek olan

$Spin(7)-$equivariant bir

$$\psi_f : P_{Spin(7)}(M) \to P_{Spin(7)}(\widetilde{M})$$

dönüşümü verir.

$\kappa : Spin(7) \to Aut(\Delta_7)$ spinor temsili olsun. Spinor demetler arasında bir izomorfizm şöyle verilebilir.

$$\Psi_f : S = P_{Spin(7)}(M) \times_\kappa \Delta_7 \to \widetilde{S} = P_{Spin(7)}(\widetilde{M}) \times_\kappa \Delta_7,$$

$$\Psi_f([s, \rho]) = [\psi_f(s), \rho]$$

Spinor temsilleri arasındaki ilişki ise, $\sigma = [s, \rho]$ bir spinor alanı olmak üzere,

$$\widetilde{\kappa}\left(\widetilde{e}_i\right)\left(\Psi_f(\sigma)\right) = \Psi_f\left(\kappa(e_i)\sigma\right),$$

şeklindedir.

∇ ve $\widetilde{\nabla}$ sırasıyla S ve $\widetilde{S}$ spinor demetleri üzerinde tanımlı kovaryant türevler; D ve $\widetilde{D}$ da sırasıyla S ve $\widetilde{S}$ spinor demetleri üzerinde tanımlı Dirac operatörlerini belirtsin. Bu durumda aşağıdaki ilişkiler verilmiştir [24]:

$\sigma \in \Gamma(S)$, $x \in \Gamma(TM)$ olmak üzere,

$$\widetilde{\nabla}_x\big(\Psi_f(\sigma)\big) = \Psi_f\left\{\nabla_x\sigma - \frac{1}{2}\kappa(x.df)\sigma - \frac{1}{2}x(f)\sigma\right\},$$

$$\widetilde{D}\big(\Psi_f(\sigma)\big) = e^{-f}\Psi_f\left\{D\sigma + \frac{n-1}{2}\kappa(df)\sigma\right\}.$$

3.4 7-Boyutlu 3-Sasaki Manifoldları

Bu bölümdeki tanım ve özellikler için temel referanslar [15, 25]'tir.

Tanım 3.4.1. *(M, g) m boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. $r \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere, M üzerindeki $(C(M), \overline{g}) := (\mathbb{R}^+ \times M, dr^2 + r^2 g)$ metrik konisinin holonomi grubu, $U(\frac{m+1}{2})$ grubunun bir alt grubuna indirgeniyorsa, bu durumda (M, g) manifolduna Sasaki manifoldu denir. Özel olarak, $n \geq 1$ için, $m = 2n + 1$'dir ve $(C(M), \overline{g})$ bir Kähler manifoldudur.*

Önerme 3.4.2. *(M, g) Riemann manifoldu verilsin. g metriğinin Levi-Civita kovaryant türevi ∇ ve ∇'nın Riemann eğrilik tensörü*

$$R(X, Y) : \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM)$$

olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

1. *M üzerinde birim uzunlukta öyle bir ξ Killing vektör alanı vardır ki*

$$\Phi = \nabla\xi$$

olarak tanımlı $(1, 1)$ tipinde tensör alanı $\forall x, y \in \Gamma(TM)$ için

$$(\nabla_x\Phi)(y) = g(\xi, y)x - g(x, y)\xi$$

eşitliğini sağlar.

2. *M üzerinde birim uzunlukta öyle bir ξ Killing vektör alanı vardır ki Riemann eğrilik tensörü $\forall x, y \in \Gamma(TM)$ için*

$$R(x, \xi)y = g(\xi, y)x - g(x, y)\xi$$

özelliğine sahiptir.

3. *(M, g) Sasaki manifoldudur.*

η 1-formu ξ vektör alanının metrik dualini belirtsin. (ξ, η, Φ) üçlüsüne (M, g) üzerinde bir Sasaki yapısı, ξ Killing vektör alanına ve η 1-formuna da sırasıyla Sasaki yapısının karakteristik vektör alanı ve karakteristik 1-formu denir.

Önerme 3.4.3. *(M, g) bir Sasaki manifoldu, (ξ, η, Φ) bu manifoldun Sasaki yapısı ve $x, y \in \Gamma(TM)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler sağlanır:*

1. $\Phi \circ \Phi(y) = -y + \eta(y)\xi,$

2. $\Phi(\xi) = 0, \ \eta(\Phi(y)) = 0,$

3. $g(x, \Phi(y)) + g(\Phi(x), y) = 0,$

4. $g(\Phi(y), \Phi(x)) = g(y, x) - \eta(y)\eta(x)$,

5. $d\eta(x, y) = 2g(\Phi(x), y)$.

Tanım 3.4.4. *m boyutlu (M, g) Riemann manifoldu verilsin. $r \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere, M üzerindeki $(C(M), \overline{g}) := (\mathbb{R}^+ \times M, dr^2 + r^2 g)$ metrik konisinin holonomi grubu $Sp(\frac{m+1}{4})$ grubunun bir alt grubuna indirgeniyorsa, bu durumda (M, g) manifolduna 3-Sasaki manifoldu denir. Özel olarak, $n \geq 1$ için, $m = 4n + 3$'tür ve $(C(M), \overline{g})$ bir hyper-Kähler manifoldudur.*

Önerme 3.4.5. *(M, g) Riemann manifoldu verilsin. Bu manifoldun 3-Sasaki olması için gerek ve yeter koşul M üzerinde $g(\xi_i, \xi_j) = \delta_{ij}$ ve $[\xi_1, \xi_2] = 2\xi_3$, $[\xi_2, \xi_3] = 2\xi_1$, $[\xi_3, \xi_1] = 2\xi_2$ özelliklerine sahip üç tane $(\xi_i, \eta_i, \Phi_i)_{i=1,2,3}$ Sasaki yapısının bulunmasıdır.*

$(\xi_i, \eta_i, \Phi_i)_{i=1,2,3}$ üçlüsüne (M, g) üzerindeki 3-Sasaki yapısı denir.

Önerme 3.4.6. *(M, g) 3-Sasaki manifoldu verilsin ve $(\xi_i, \eta_i, \Phi_i)_{i=1,2,3}$ bu manifold üzerindeki 3-Sasaki yapısı olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler sağlanır:*

1. $\eta_i(\xi_j) = \delta_{ij}$,

2. $\Phi_i(\xi_j) = -\varepsilon_{ijk}\xi_k$,

3. $\Phi_i \circ \Phi_j - \xi_i \otimes \eta_j = -\varepsilon_{ijk}\Phi_k - \delta_{ij} Id$.

Her 3-Sasaki manifoldu bir spin manifoldudur [26].

(M, g) 7-boyutlu, kompakt, basit bağlantılı bir 3-Sasaki manifoldu ve $i \in \{1, 2, 3\}$ olmak üzere, (ξ_i, η_i, Φ_i) bu manifold üzerindeki 3-Sasaki yapısı olsun. (M, g) bir Riemann manifoldu olduğundan, manifoldun tanjant demeti $TM = T^v + T^h$ şeklinde iki alt demetin direkt toplamı olarak yazılabilir [20]. Burada T^v alt demeti $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ tarafından üretilen dikey alt demet ve T^h de dikey alt demetin dik tümleyeni olan yatay alt demettir. M manifoldunun bir açık kümesi üzerinde $e_1 = \xi_1$, $e_2 = \xi_2$, $e_3 = \xi_3$ olacak şekilde ve Φ_i endomorfizmleri T^h alt demetine

$$\Phi_1 := \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi_2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi_3 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisleriyle etki edecek şekilde $\{e_1, \cdots, e_7\}$ ortonormal çatısı vardır. Bu çatıya karşılık gelen 1-formların kümesi $\{\eta_1, \cdots, \eta_7\}$ olsun. Bu çatıya göre η_1, η_2 ve η_3 1-formlarının dış türevleri

$$d\eta_1 = -2(\eta_{23} + \eta_{45} + \eta_{67}), \quad d\eta_2 = 2(\eta_{13} - \eta_{46} + \eta_{57}), \quad d\eta_3 = -2(\eta_{12} + \eta_{47} + \eta_{56})$$

olarak hesaplanmıştır [27]. Bundan sonraki hesaplarda ortonormal 1-formların $\{\eta_1, \cdots, \eta_7\}$ kümesi kullanılacaktır. (M, g) 7-boyutlu bir 3-Sasaki manifoldu olsun.

$$F_1 := \eta_1 \wedge \eta_2 \wedge \eta_3, \quad F_2 := \frac{1}{2}(\eta_1 \wedge d\eta_1 + \eta_2 \wedge d\eta_2 + \eta_3 \wedge d\eta_3) + 3\eta_1 \wedge \eta_2 \wedge \eta_3$$

olmak üzere,

$$\varphi := F_1 + F_2 = \eta_{123} - \eta_{145} - \eta_{167} - \eta_{246} + \eta_{257} - \eta_{347} - \eta_{356}$$

şeklinde tanımlı φ 3-formu M üzerinde pozitif bir 3-formdur. Bu 3-forma (M, g) 7-boyutlu 3-Sasaki manifoldunun kanonik G_2 yapısı denir.

$$dF_1 = 2 * F_2, \quad dF_2 = 12 * F_1 + 2 * F_2, \quad d * F_1 = d * F_2 = 0$$

eşitliklerinden

$$d * \varphi = 0, \quad *d\varphi = 4(3F_1 + F_2)$$

ilişkisi verilerek kanonik G_2 yapısının $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3$ sınıfından olduğu gösterilmiştir [27].

7-boyutlu bir 3-Sasaki manifoldu üzerinde $\mathcal{W}_1$ sınıfından (hemen-hemen paralel) G_2 yapılar da vardır [22, 27]. Aşağıdaki 3-formlar, 7-boyutlu bir 3-Sasaki manifoldu üzerinde Killing spinorlar tarafından üretilen $\mathcal{W}_1$ sınıfından 3-formlardır [27]:

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\eta_1 \wedge d\eta_1 - \frac{1}{2}\eta_2 \wedge d\eta_2 - \frac{1}{2}\eta_3 \wedge d\eta_3,$$

$$\varphi_2 = -\frac{1}{2}\eta_1 \wedge d\eta_1 + \frac{1}{2}\eta_2 \wedge d\eta_2 - \frac{1}{2}\eta_3 \wedge d\eta_3,$$
$$\varphi_3 = -\frac{1}{2}\eta_1 \wedge d\eta_1 - \frac{1}{2}\eta_2 \wedge d\eta_2 + \frac{1}{2}\eta_3 \wedge d\eta_3.$$

Ayrıca 7-boyutlu bir 3-Sasaki manifoldu üzerinde verilen kanonik G_2 yapısının deformasyonuyla da $\mathcal{W}_1$ sınıfından bir 3-form yazılmıştır [22, 27]. $s > 0$ olmak üzere,

$$g^s(x,y) := \begin{cases} g(x,y) & x, y \in T^h \text{ ise} \\ s^2 g(x,y) & x, y \in T^v \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

Riemann metriği ele alınsın. $\{\xi_1/s, \xi_2/s, \xi_3/s, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ kümesi g^s metriğine göre ortonormal bir çatıdır.

$$F_1^s := s^3 F_1, \quad F_2^s := sF_2$$

olmak üzere,

$$\varphi^s := F_1^s + F_2^s = s^3 F_1 + sF_2$$

şeklinde tanımlı φ^s 3-formu (M, g^s) manifoldu üzerinde pozitif bir 3-formdur. $s = 1/\sqrt{5}$ için, φ^s 3-formu $\mathcal{W}_1$ sınıfındandır [22, 27].

4 TEMEL 3-FORMUN Λ^3_7 UZAYINDAN ELEMANLARLA DEFORMASYONU

(M, g, φ) G_2 yapısına sahip bir Riemann manifoldu olsun. Herhangi bir $\omega \in \Gamma(TM)$ vektör alanı için, $u \in \Gamma(TM)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} C_\omega : \Gamma(TM) &\longrightarrow \Gamma(TM) \\ u &\longmapsto C_\omega(u) := (1 + g(\omega, \omega))^{-1/3}(u + u \times \omega) \end{aligned}$$

dönüşümünü tanımlansın. Bu dönüşüm birebir ve C^∞-lineerdir. Bu dönüşümün tersi ise

$$C_\omega^{-1}(u) = (1 + g(\omega, \omega))^{-\frac{2}{3}}\{u - u \times \omega + g(\omega, u)\omega\}$$

olur.

C_ω dönüşümü yardımıyla [18]'de verilen

$$\widetilde{\varphi} = \varphi + \omega \lrcorner * \varphi$$

3-formunun ürettiği

$$\widetilde{g}(u, v) = \frac{1}{(1 + g(\omega, \omega))^{\frac{2}{3}}} \left(g(u, v) + g(u \times \omega, v \times \omega)\right)$$

metriği, her $u, v \in \Gamma(TM)$ için,

$$\widetilde{g}(u, v) = g(C_\omega(u), C_\omega(v))$$

olarak ifade edilebilir. Yeni G_2 yapıya sahip $(M, \widetilde{g})$ manifoldu $\widetilde{M}$ ile belirtilsin. M manifoldu G_2 yapısına sahip olduğundan bir spin manifoldudur [10] ve M üzerindeki spin yapısı, $\widetilde{M}$ üzerinde bir spin yapısı doğurur. M manifoldunun çatı demetinin her ortonormal $\varepsilon = \{e_1, e_2, \cdots, e_7\}$ kesitine $\widetilde{M}$ manifoldunun çatı demetinin $\psi_\omega(\varepsilon) = \{\widetilde{e}_1, \cdots, \widetilde{e}_7\}$ ortonormal kesiti karşılık getirilebilir. Burada her $j \in \{1, \cdots, 7\}$ için, $\widetilde{e}_j = C_\omega^{-1}(e_j)$'dir. Böylece $SO(7)$-equivariant bir $\psi_\omega : P_{SO}(M) \to P_{SO}(\widetilde{M})$ dönüşümü elde edilir. Bu dönüşüm ise M ve $\widetilde{M}$ manifoldlarına karşılık gelen asli $Spin(7)$-demetler arasında yine aynı ψ_ω simgesiyle gösterilecek $Spin(7)-$equivariant bir $\psi_\omega : P_{Spin(7)}(M) \to P_{Spin(7)}(\widetilde{M})$ dönüşümünü verir.

$\kappa : Spin(7) \to Aut(\Delta_7)$ spinor temsili olmak üzere, S ve $\widetilde{S}$ spinor demetleri arasında Ψ_ω ile gösterilecek bir izomorfizm şöyle verilebilir:

$$\Psi_\omega : S = P_{Spin(7)}(M) \times_\kappa \Delta_7 \longrightarrow \widetilde{S} = P_{Spin(7)}(\widetilde{M}) \times_\kappa \Delta_7$$

$$[s,\rho] \longmapsto \Psi_\omega([s,\rho]) := [\psi_\omega(s),\rho].$$

Spinor temsilleri arasındaki ilişki ise, $\sigma = [s,\rho]$ bir spinor alanı olmak üzere,

$$\widetilde{\kappa}\left(\widetilde{e}_i\right)\left(\Psi_\omega(\sigma)\right) = \Psi_\omega\left(\kappa(e_i)\sigma\right)$$

şeklindedir.

4.1 Deforme Edilmiş Metriğin Bazı Kısıtlar Altında Kovaryant Türevi

∇ ve $\widetilde{\nabla}$ sırasıyla M ve $\widetilde{M}$ manifoldları üzerinde, g ve $\widetilde{g}$ metriklerine karşılık gelen Levi-Civita kovaryant türevlerini belirtsin. $\nabla C_\omega = 0$ olsun.

Kozsul formülünden,

$$\begin{aligned} 2g\left(C_\omega\left(\widetilde{\nabla}_x y\right), C_\omega(z)\right) &= g\left(\left(\nabla_y C_\omega\right)(z) - \left(\nabla_z C_\omega\right)(y), C_\omega(x)\right) \\ &\quad + g\left(\left(\nabla_x C_\omega\right)(z) - \left(\nabla_z C_\omega\right)(x), C_\omega(y)\right) \\ &\quad + g\left(\left(\nabla_y C_\omega\right)(x), C_\omega(z)\right) \\ &\quad + g\left(C_\omega\left(\nabla_x y\right), C_\omega(z)\right) + g\left(\nabla_x\left(C_\omega(y)\right), C_\omega(z)\right) \end{aligned}$$

bulunur.

$\nabla C_\omega = 0$ kabulünden,

$$\widetilde{\nabla} = \nabla$$

elde edilir.

M manifoldunun G_2 yapısı paralel alındığında ($\nabla\varphi = 0$ iken), keyfi x, y, z vektör alanları için,

$$\nabla_x(y \times z) = (\nabla_x y) \times z + y \times (\nabla_x z),$$

ilişkisi geçerlidir. Buradan da $b = 1 + g(\omega,\omega)$ olmak üzere,

$$0 = \nabla_x(C_\omega)(y) = x[b^{-1/3}](y + y \times \omega) + b^{-1/3} y \times (\nabla_x \omega) \tag{4.1}$$

olur. (4.1) eşitliğinde her iki taraf y ile iç çarpılırsa, $x[b^{-1/3}] = 0$ bulunur. O halde $\nabla_x \omega = 0$'dır, yani ω paralel bir vektör alanıdır. Tersine, $\nabla \omega = 0$ ise, kolaylıkla görülebilir ki $\nabla C_\omega = 0$'dır. O halde, M manifoldunun G_2 yapısı paralel iken; $\nabla C_\omega = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\nabla \omega = 0$ olmasıdır. Paralel G_2 yapıya sahip 7-boyutlu Riemann manifoldları üzerinde sıfırdan farklı paralel vektör alanlarının varlığı bilinmektedir [7].

G_2 yapısının nasıl değiştiğine bakılacak olursa; her $u, x, y, z \in \Gamma(TM)$ için, $\nabla \varphi = 0$ iken,

$$\widetilde{\nabla}_u \widetilde{\varphi}(x, y, z) = \nabla_u \widetilde{\varphi}(x, y, z) = (*\varphi)(\nabla_u \omega, x, y, z)$$

ve $\nabla \omega = 0$ olduğundan, $\widetilde{\nabla} \widetilde{\varphi} = 0$ elde edilir. Yani $\widetilde{M}$ manifoldunun G_2 yapısı da paraleldir.

$\nabla \varphi = 0$ koşuluna bakılmaksızın $\nabla C_\omega = 0$ alındığında, S ve $\widetilde{S}$ spinor demetleri üzerindeki kovaryant türevlerin arasındaki ilişki şu şekildedir:

Öncelikle $\nabla C_\omega = 0$ olduğundan,

$$\nabla_x (y \times \omega) - (\nabla_x y) \times \omega = \frac{2}{3} b^{-2/3} g(\nabla_x \omega, \omega) C_\omega(y)$$

ve

$$(\nabla_x \omega) \times \omega = -\frac{2}{3} b^{-1} g(\nabla_x \omega, \omega) \omega$$

bağıntıları geçerlidir. Buradan

$$\begin{aligned}
\nabla_v \widetilde{e}_i &= \nabla_v (C_\omega^{-1}(e_i)) \\
&= b^{-2/3} \{\nabla_v e_i - \nabla_v (e_i \times \omega) + \nabla_v \left(g(\omega, e_i)\omega\right)\} + b^{2/3} v[b^{-2/3}] C_\omega^{-1}(e_i),
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
C_\omega \left(\nabla_v (C_\omega^{-1}(e_i))\right) &= b^{-2/3} C_\omega \left(\nabla_v e_i\right) - b^{-2/3} C_\omega \left(\nabla_v (e_i \times \omega)\right) \\
&\quad + b^{-2/3} g(\omega, e_i) C_\omega \left(\nabla_v \omega\right) + b^{-1} v[g(\omega, e_i)]\omega \\
&\quad + b^{2/3} v[b^{-2/3}] e_i \\
&= b^{-1} \nabla_v e_i - \tfrac{2}{3} b^{-5/3} g(\nabla_v \omega, \omega) C_\omega(e_i) \\
&\quad - b^{-1} (\nabla_v (e_i \times \omega)) \times \omega + b^{-1} g(\omega, e_i) \nabla_v \omega \\
&\quad - \tfrac{2}{3} b^{-2} g(\nabla_v \omega, \omega) g(\omega, e_i) \omega + b^{-1} g(\nabla_v \omega, e_i) \omega \\
&\quad + b^{-1} g(\nabla_v e_i, \omega) \omega + b^{2/3} v[b^{-2/3}] e_i
\end{aligned}$$

olduğundan, spinor demeti üzerindeki kovaryant türevin lokal ifadesindeki

$$\widetilde{w}_{ij}(v) = \widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_v \widetilde{e}_i, \widetilde{e}_j)$$

aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$\begin{aligned}
\widetilde{w}_{ij}(v) &= \widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_v \widetilde{e}_i, \widetilde{e}_j) \\
&= g\left(C_\omega\left(\nabla_v(C_\omega^{-1}(e_i))\right), e_j\right) \\
&= g\left(\nabla_v e_i, e_j\right) - \tfrac{2}{3}b^{-2}g(\nabla_v\omega,\omega)g\left(e_i,e_j\right) \\
&\quad + \tfrac{2}{3}b^{-2}g(\nabla_v\omega,\omega)g(\omega,\omega)g\left(e_i,e_j\right) + b^{2/3}v[b^{-2/3}]g(e_i,e_j) \\
&\quad - \tfrac{4}{3}b^{-2}g(\nabla_v\omega,\omega)g(e_i\times\omega,e_j) - \tfrac{4}{3}b^{-2}g\left(\nabla_v\omega,\omega\right)g(\omega,e_i)g(\omega,e_j) \\
&\quad + b^{-1}g(\omega,e_i)g\left(\nabla_v\omega,e_j\right) + b^{-1}g(\nabla_v\omega,e_i)g\left(\omega,e_j\right).
\end{aligned}$$

M manifoldunun bir açık kümesi üzerinde bir $\varepsilon = \{e_1, \cdots, e_7\}$ lokal kesiti, S spinor demeti üzerinde bir $\sigma = \{\sigma_1, \cdots, \sigma_7\}$ lokal kesitini belirler. Benzer şekilde, $\widetilde{\varepsilon} = \{\widetilde{e}_1, \cdots, \widetilde{e}_7\}$ lokal kesiti de, her $1 \leq i \leq 7$ için $\widetilde{\sigma}_i = \Psi_\omega(\sigma_i)$ olmak üzere, $\widetilde{S}$ spinor demeti üzerinde bir $\widetilde{\sigma} = \{\widetilde{\sigma}_1, \cdots, \widetilde{\sigma}_7\}$ lokal kesitini belirler.

Clifford cebrinin birimi 1 olmak üzere, her v, w vektör alanı için

$$v \cdot w + w \cdot v = -2g(v,w)1$$

özelliği de kullanılırsa, $\widetilde{S}$ spinor demeti üzerindeki $\widetilde{\nabla}$ Levi-Civita kovaryant türevinin lokal ifadesi aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\begin{aligned}
\nabla_v^{\widetilde{S}}\widetilde{\sigma}_\alpha &= \tfrac{1}{4}\sum_{i,j}\widetilde{w}_{ij}(v)\widetilde{\kappa}(\widetilde{e}_i)\widetilde{\kappa}(\widetilde{e}_j)\widetilde{\sigma}_\alpha \\
&= \tfrac{1}{4}\Psi_\omega\left\{\sum_{i,j}\widetilde{w}_{ij}(v)\kappa(e_i)\kappa(e_j)\sigma_\alpha\right\} \\
&= \tfrac{1}{4}\Psi_\omega\left\{\sum_{i,j}g(\nabla_v e_i,e_j)\kappa(e_i)\kappa(e_j)\sigma_\alpha + \tfrac{14}{3}b^{-2}g(\nabla_v\omega,\omega)\left(3+g(\omega,\omega)\right)\sigma_\alpha\right. \\
&\quad + b^{-1}\left(\omega\cdot\nabla_v\omega + \nabla_v\omega\cdot\omega\right)\sigma_\alpha - \tfrac{4}{3}b^{-2}g(\nabla_v\omega,\omega)\left(\omega\cdot\omega\right)\sigma_\alpha \\
&\quad \left. + \tfrac{4}{3}b^{-2}g(\nabla_v\omega,\omega)\kappa\left(\sum_{k=1}^{7}\left(e_k\times\omega\right)\cdot e_k\right)\sigma_\alpha\right\} \\
&= \Psi_\omega\left\{\nabla_v^S\sigma_\alpha + b^{-2}g(\nabla_v\omega,\omega)\left(3+g(\omega,\omega)\right)\sigma_\alpha\right. \\
&\quad \left. + \tfrac{1}{3}b^{-2}g(\nabla_v\omega,\omega)\kappa\left(\sum_{k=1}^{7}\left(e_k\times\omega\right)\cdot e_k\right)\sigma_\alpha\right\}.
\end{aligned}$$

O halde aşağıdaki yardımcı teorem elde edilmiş olur:

Yardımcı Teorem 4.1.1. *∇^S ve $\nabla^{\widetilde{S}}$ sırasıyla S ve $\widetilde{S}$ spinor demetleri üzerindeki kovaryant türevleri belirtsin. $\nabla C_\omega = 0$ olduğu var sayılsın. Bu durumda $\Psi_\omega(\sigma) = \widetilde{\sigma} \in \Gamma(\widetilde{S})$ ve $v \in \Gamma(T(M))$ olmak üzere,*

$$\begin{aligned}\nabla_v^{\widetilde{S}}\widetilde{\sigma} &= \Psi_\omega\left\{\nabla_v^S\sigma + b^{-2}g(\nabla_v\omega,\omega)\,(3+g(\omega,\omega))\,\sigma\right.\\ &\left.\quad +\tfrac{1}{3}b^{-2}g(\nabla_v\omega,\omega)\kappa\left(\sum_{k=1}^{7}(e_k\times\omega)\cdot e_k\right)\sigma\right\}\end{aligned}$$

olur.

Özel olarak, $\nabla\varphi = 0$ olsun. Bu durumda, $\nabla C_\omega = 0$ koşulu, $\nabla\omega = 0$ koşuluna denktir. O halde $\widetilde{S}$ üzerindeki kovaryant türev

$$\nabla_v^{\widetilde{S}}\widetilde{\sigma} = \Psi_\omega(\nabla_v^S\sigma)$$

olarak elde edilir.

Bu adımda ise; $\nabla C_\omega = 0$ koşulu altında $\widetilde{S}$ spinor demeti üzerindeki $\widetilde{D}$ Dirac operatörü, S spinor demeti üzerindeki D Dirac operatörü cinsinden ifade edilecektir. Herhangi bir $\Psi_\omega(\sigma) = \widetilde{\sigma}$ spinoru için, $u = grad(g(\omega,\omega))$ ve $\widetilde{\omega} = \sum_{k=1}^{7}(e_k\times\omega).e_k$ olmak üzere, $\widetilde{D}$ Dirac operatörü

$$\begin{aligned}\widetilde{D}\widetilde{\sigma} &= \sum_{i=1}^{7}\widetilde{\kappa}(\widetilde{e}_i)\left(\nabla_{\widetilde{e}_i}^{\widetilde{S}}\widetilde{\sigma}\right)\\ &= \sum_{i=1}^{7}\widetilde{\kappa}(\widetilde{e}_i)\circ\Psi_\omega\left\{\nabla_{\widetilde{e}_i}^{S}\sigma + b^{-2}g(\nabla_{\widetilde{e}_i}\omega,\omega)\,(3+g(\omega,\omega))\,\sigma\right.\\ &\quad\left.+\ \tfrac{1}{3}b^{-2}g(\nabla_{\widetilde{e}_i}\omega,\omega)\kappa\left(\sum_{k=1}^{7}(e_k\times\omega)\cdot e_k\right)\sigma\right\}\\ &= \sum_{i=1}^{7}\Psi_\omega\circ\kappa(e_i)\left\{\nabla_{\widetilde{e}_i}^{S}\sigma + b^{-2}g(\nabla_{\widetilde{e}_i}\omega,\omega)\,(3+g(\omega,\omega))\,\sigma\right.\\ &\quad\left.+\ \tfrac{1}{3}b^{-2}g(\nabla_{\widetilde{e}_i}\omega,\omega)\kappa\left(\sum_{k=1}^{7}(e_k\times\omega)\cdot e_k\right)\sigma\right\}\\ &= \Psi_\omega\left\{b^{-2/3}D\sigma + b^{-2/3}\kappa(\omega)\left(\nabla_\omega^S\sigma\right) - b^{-2/3}\left\{\sum_{i=1}^{7}\kappa(e_i)\left(\nabla_{(e_i\times\omega)}^{S}\sigma\right)\right\}\right\}\\ &\quad+\tfrac{1}{2}b^{-1/3}\Psi_\omega\left\{\kappa\left(C_\omega(u)\right)\left\{b^{-2}\left(3+g(\omega,\omega)\right)\sigma+\kappa\left(\widetilde{\omega}\right)\sigma\right\}\right\}\\ &\quad+b^{-2/3}\Psi_\omega\left\{g\left(\nabla_\omega\omega,\omega\right)\kappa(\omega)\left\{b^{-2}\left(3+g(\omega,\omega)\right)\sigma+\kappa\left(\widetilde{\omega}\right)\sigma\right\}\right\}\end{aligned}$$

olarak hesaplanır ve böylece aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 4.1.2. *∇^S ve $\widetilde{\nabla}^{\widetilde{S}}$ sırasıyla S ve $\widetilde{S}$ spinor demetleri üzerindeki Levi-Civita kovaryant türevler ve $\nabla C_\omega = 0$ ise, bu durumda herhangi bir*

$\widetilde{\sigma} = \Psi_\omega(\sigma) \in \Gamma(\widetilde{S})$ *elemanı için,*

$$u = grad(g(\omega,\omega)) \quad ve \quad \widetilde{\omega} = \sum_{k=1}^{7} (e_k \times \omega).e_k$$

olmak üzere, $\widetilde{S}$ *spinor demeti üzerinde tanımlı* $\widetilde{D}$ *Dirac operatörü*

$$\begin{aligned} \widetilde{D}\widetilde{\sigma} \;\; = \;\; & \Psi_\omega \left\{ b^{-2/3} D\sigma + b^{-2/3}\kappa(\omega)\left(\nabla^S_\omega \sigma\right) - b^{-2/3}\left\{ \sum_{i=1}^{7} \kappa(e_i)\left(\nabla^S_{(e_i\times\omega)}\sigma\right)\right\}\right\} \\ & + \tfrac{1}{2} b^{-1/3}\Psi_\omega\left\{\kappa\left(C_\omega(u)\right)\left\{b^{-2}\left(3+g(\omega,\omega)\right)\sigma + \kappa\left(\widetilde{\omega}\right)\sigma\right\}\right\} \\ & + b^{-2/3}\Psi_\omega\left\{g\left(\nabla_\omega \omega,\omega\right)\kappa(\omega)\left\{b^{-2}\left(3+g(\omega,\omega)\right)\sigma + \kappa\left(\widetilde{\omega}\right)\sigma\right\}\right\} \end{aligned}$$

şeklindedir.

Özel olarak $\nabla\varphi = 0$ alınırsa,

$$\nabla C_\omega = 0 \iff \nabla\omega = 0$$

olduğundan, $\widetilde{D}$ Dirac operatörü

$$\widetilde{D}\widetilde{\sigma} = b^{-2/3}\Psi_\omega\left\{ D\sigma + \kappa(\omega)\left(\nabla^S_\omega\sigma\right) - \left\{\sum_{i=1}^{7}\kappa(e_i)\left(\nabla^S_{(e_i\times\omega)}\sigma\right)\right\}\right\}$$

olur. Eğer λ sabiti D Dirac operatörünün σ spinoruna karşılık gelen özdeğeri ise,

$$\widetilde{D}\widetilde{\sigma} = b^{-2/3}\Psi_\omega\left\{ \lambda\sigma + \kappa(\omega)\left(\nabla^S_\omega\sigma\right) - \left\{\sum_{i=1}^{7}\kappa(e_i)\left(\nabla^S_{(e_i\times\omega)}\sigma\right)\right\}\right\}$$

olacağından, $\Psi_\omega(\sigma) = \widetilde{\sigma}$ bir özspinor olmayabilir. O halde D ve $\widetilde{D}$ operatörlerinin özdeğerleri arasında açıkça verilebilen bir ilişki yoktur. Yine de, bazı kısıtlamalar altında aşağıdaki çıkarsamalar yapılabilir:

$\nabla\varphi = 0$ ve $\nabla\omega = 0$ olsun. λ sabiti $\widetilde{D}$ operatörünün $\widetilde{\sigma} = \Psi_\omega(\sigma)$ spinoruna karşılık gelen özdeğeri olsun.

$$\widetilde{D}(\Psi_\omega\sigma) = b^{-2/3}\Psi_\omega\left\{ D\sigma + \kappa(\omega)\left(\nabla^S_\omega\sigma\right) - \left\{\sum_{i=1}^{7}\kappa(e_i)\left(\nabla^S_{(e_i\times\omega)}\sigma\right)\right\}\right\}$$

eşitliğinden,

$$\lambda\sigma = b^{-2/3}\left\{ D\sigma + \kappa(\omega)\left(\nabla^S_\omega\sigma\right) - \left\{\sum_{i=1}^{7}\kappa(e_i)\left(\nabla^S_{(e_i\times\omega)}\sigma\right)\right\}\right\}$$

olur. Şimdi

$$\sum_{i=1}^{7}\kappa(e_i)\left(\nabla^S_{e_i\times\omega}\sigma\right) = -\sum_{i=1}^{7}\kappa(e_i\times\omega)\nabla^S_{e_i}\sigma$$

eşitliği kullanılırsa, aşağıdaki sonuç elde edilmiş olur:

$$\lambda\sigma b^{2/3} - \kappa(\omega)(\nabla^S_\omega\sigma) = b^{1/3}\sum_{i=1}^{7}\kappa(C_\omega(e_i))\nabla^S_{e_i}\sigma.$$

O halde aşağıdaki yardımcı teorem ifade edilebilir:

Yardımcı Teorem 4.1.3. $\nabla\varphi = 0$ *ve* $\nabla\omega = 0$ *şartları altında*

$$\sum_{i=1}^{7} b^{1/3}\kappa\left(C_\omega(e_i)\right)\nabla^S_{e_i}\sigma = \lambda b^{2/3}\sigma - \kappa(\omega)\left(\nabla^S_\omega\sigma\right)$$

ifadesini sağlayan bir λ *skaleri ve bir* $\sigma \in \Gamma(S)$ *spinoru olduğu var sayılsın. Bu durumda* λ *skaleri* $\widetilde{D}$ *operatörünün* $\widetilde{\sigma} = \Psi_\omega(\sigma)$ *spinoruna karşılık gelen özdeğeridir.*

S ve $\widetilde{S}$ spinor demetleri üzerindeki D ve $\widetilde{D}$ Dirac operatörleri için aşağıdaki gözlemler yapılabilir:

G_2 yapısı paralel iken, $\Gamma(S)$'te sıfırdan farklı paralel spinorların varlığı bilinmektedir [8]. $\sigma \in \Gamma(S)$ sıfırdan farklı bir paralel spinor olsun. Öncelikle, Ψ_ω bir izomorfizm olduğundan, $\widetilde{\sigma} = \Psi_\omega(\sigma) \in \Gamma(\widetilde{S})$ spinoru da sıfırdan farklıdır. $\nabla\omega = 0$ iken, her v vektör alanı için $\nabla^{\widetilde{S}}_v\widetilde{\sigma} = \Psi_\omega(\nabla^S_v\sigma)$ olduğu gösterildiğinden, $\nabla^S_v\sigma = 0$ olması için gerek ve yeter koşul, $\nabla^{\widetilde{S}}_v\widetilde{\sigma} = 0$ olmasıdır. Yani S üzerindeki sıfırdan farklı paralel spinorlar ile $\widetilde{S}$ üzerindeki sıfırdan farklı paralel spinorlar arasında birebir bir eşleme vardır.

$\sigma \in \Gamma(S)$ spinoru için, $D\sigma = 0$ ise ya da bir başka deyişle $\sigma \in Ker(D)$ ise, σ spinoruna bir harmonik spinor denir.

(M, g) kompakt bir manifold olmak üzere, sıfırdan farklı harmonik spinorların varlığı, metriğin skaler eğriliğinin pozitif ya da negatif olmasıyla belirlenir. g metriğinin skaler eğriliği s sıfır ise, M üzerindeki her harmonik spinor paraleldir. Skaler eğrilik pozitif ise, bu durumda sıfırdan farklı harmonik spinor yoktur [8]. $\nabla\varphi = 0$ olduğunda, g Ricci-flattir [8]. Buradan skaler eğrilik $s = 0$'dır. Benzer şekilde $\widetilde{\nabla}\widetilde{\varphi} = 0$ olduğundan, $\widetilde{g}$ metriğinin skaler eğriliği $\widetilde{s}$

da 0'dır. O halde $\Gamma(S)$ ve $\Gamma(\widetilde{S})$ uzaylarında sıfırdan farklı harmonik spinorlar mevcuttur. Üstelik her harmonik spinor paraleldir.

Tersine açık olarak her paralel spinor harmoniktir. $\widetilde{\sigma} = \Psi_\omega(\sigma) \in \Gamma(\widetilde{S})$ sıfırdan farklı bir harmonik spinor olsun, yani, $\widetilde{D}\widetilde{\sigma} = 0$ olsun. Bu durumda, $\widetilde{\nabla}\widetilde{\sigma} = 0$ olur ki, bu da ancak ve ancak $\nabla\sigma = 0$ iken mümkündür.

$$D\sigma = \sum_{j=1}^{7} \kappa(e_j)\nabla_{e_j}\sigma$$

olduğundan, $D\sigma = 0$ elde edilir. O halde $\widetilde{D}\widetilde{\sigma} = 0$ olması için gerek ve yeter koşul, $D\sigma = 0$ olmasıdır. Buradan

$$\Psi_\omega(KerD) = Ker(\widetilde{D})$$

sonucu elde edilir. Yani M kompakt manifoldunun φ temel 3-formuna

$$\widetilde{\varphi} = \varphi + \omega \lrcorner * \varphi$$

deformasyonu uygulanırsa, karşılık gelen S ve $\widetilde{S}$ spinor demetleri üzerinde tanımlı D ve $\widetilde{D}$ Dirac operatörlerinin çekirdekleri izomorftur.

4.2 Genel Durumda Kovaryant Türev

$\widetilde{M}$ manifoldu üzerindeki yeni $\widetilde{\times}$ 2-katlı vektör çarpımını yazmak için

$$\{\widetilde{e}_1, \cdots, \widetilde{e}_7\}$$

ortonormal çatısı kullanıldığında, keyfi x, y vektör alanları için

$$x\widetilde{\times}y = \sum_{i=1}^{7} \widetilde{g}\left(x\widetilde{\times}y, \widetilde{e}_i\right)\widetilde{e}_i$$

olduğundan, $\widetilde{g}$ ve $\widetilde{e}_i$ ifadeleri g ve e_i cinsinden yazıldığında, $b = 1 + g(\omega, \omega)$ iken,

$$x\widetilde{\times}y = b^{1/3}C_\omega^{-1}(x \times y) + b^{-1/3}g(x,\omega)y - b^{-1/3}g(y,\omega)x$$

olarak bulunur. $\widetilde{g}$ metriğine karşılık gelen $\widetilde{\nabla}$ Levi-Civita kovaryant türevi ise

$$\widetilde{\nabla}_x y = \sum_{i=1}^{7} \widetilde{g}\left(\widetilde{\nabla}_x y, \widetilde{e}_i\right)\widetilde{e}_i$$

olduğundan,

$$\sum_{i=1}^{7} g\left(\nabla_{e_i\times y}x, z\right) e_i = -\sum_{i=1}^{7} g\left(\nabla_{e_i}x, z\right) e_i \times y$$

eşitliği de kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\widetilde{\nabla}_x y = \nabla_x y + \frac{1}{2}A(x,y).$$

Burada A tensörü (2,1) tipinde

$$\begin{aligned} bA(x,y) \quad = \quad & \frac{2}{3}g(\nabla_y\omega,\omega)x + \frac{2}{3}g(\nabla_x\omega,\omega)y - g(\omega,y)\nabla_x\omega - g(\omega,x)\nabla_y\omega \\ & -\frac{1}{3}\left\{g(x,y) + 2b^{-1}g(x,\omega)g(y,\omega)\right\} gradb \\ & -\frac{1}{3}\left\{g(x,y) + 2b^{-1}g(x,\omega)g(y,\omega)\right\} g(gradb,\omega)\omega \\ & +g(\omega,x)\sum_{i=1}^{7} g(\nabla_{e_i}\omega,y)e_i + g(\omega,y)\sum_{i=1}^{7} g(\nabla_{e_i}\omega,x)e_i \\ & +\left\{g(\omega,x)g(\nabla_y\omega,\omega) + g(\omega,y)g(\nabla_x\omega,\omega)\right\}\omega \\ & +\left\{g(\nabla_\omega\omega,x)g(\omega,y) + g(\nabla_\omega\omega,y)g(\omega,x)\right\}\omega \\ & -\left\{g(\nabla_y\omega,x) + g(\nabla_x\omega,y)\right\}\omega \end{aligned}$$

şeklinde verilen simetrik tensördür.

$\widetilde{g}$ metriğinin $\widetilde{\nabla}$ kovaryant türevinin ifadesine bakıldığında, ω birim uzunlukta bir Killing vektör alanı olarak alınırsa, A tensörü

$$2A(x,y) = -g(\omega,y)\nabla_x\omega - g(\omega,x)\nabla_y\omega$$

olacağından, $\widetilde{\nabla}$ kovaryant türevi

$$\widetilde{\nabla}_x y = \nabla_x y - \frac{1}{2}\{g(y,\omega)\nabla_x\omega - g(x,\omega)\nabla_y\omega\}$$

olarak yazılır. G_2 yapısına sahip herhangi bir 7-boyutlu Riemann manifoldu üzerinde birim uzunlukta bir Killing vektör alanının olup olmadığı bilinmemektedir. Ancak bazı özel manifoldlar üzerinde (7-boyutlu 3-Sasaki manifoldları) bu tip vektör alanları vardır [15]. Ayrıca

$$\begin{aligned} \widetilde{g}(x,\widetilde{\nabla}_y\omega) \quad &= \quad g(C_\omega(x), C_\omega(\widetilde{\nabla}_y\omega)) \\ &= \quad 2^{-2/3}\{2g(x,\widetilde{\nabla}_y\omega) - g(\omega,x)g(\omega,\widetilde{\nabla}_y\omega)\} \\ &= \quad 2^{-2/3}g(x,\nabla_y\omega) \\ &= \quad -\widetilde{g}(y,\widetilde{\nabla}_x\omega), \end{aligned}$$

olduğundan, ω vektör alanı $\widetilde{g}$ metriğine göre de Killing vektör alanıdır.

5 3-SASAKİ MANİFOLDLARIN DEFORMASYONLARI

Bu bölümde 7-boyutlu 3-Sasaki manifoldları üzerinde [27]'de verilen kanonik ve hemen-hemen paralel G_2 yapıların deformasyonları incelenecektir.

5.1 Kanonik G_2 Yapısının Λ^3_7 Uzayından Elemanlarla Deformasyonları

(M, g) 7-boyutlu, $(\xi_i, \eta_i, \phi_i)_{i=1,2,3}$ 3-Sasaki yapısıyla donatılmış bir 3-Sasaki manifoldu ve

$$F_1 = \eta_1 \wedge \eta_2 \wedge \eta_3, \quad F_2 = \frac{1}{2}(\eta_1 \wedge d\eta_1 + \eta_2 \wedge d\eta_2 + \eta_3 \wedge d\eta_3) + 3\eta_1 \wedge \eta_2 \wedge \eta_3$$

olmak üzere,

$$\varphi = F_1 + F_2 = \eta_{123} - \eta_{145} - \eta_{167} - \eta_{246} + \eta_{257} - \eta_{347} - \eta_{356}$$

de bu manifold üzerindeki kanonik G_2 yapısı olsun. M manifoldunun bir açık kümesi üzerinde [27]'de verilen lokal ortonormal $\{e_1, \cdots, e_7\}$ çatısı seçilsin. Bu çatıya karşılık gelen 1-formların kümesi $\{\eta_1, \cdots, \eta_7\}$ olsun. Bu bölümde φ temel 3-formu ξ_1 karakteristik vektör alanı ile deforme edilerek sınıf değişimleri incelenecektir.

Teorem 5.1.1. *(M, g) 7-boyutlu bir 3-Sasaki manifoldu, $i = 1, 2, 3$ olmak üzere (ξ_i, η_i, ϕ_i) üçlüleri bu manifoldun 3-Sasaki yapısı ve φ de bu manifold üzerindeki kanonik G_2 yapısı olsun. φ temel 3-formu ξ_1 ile $\widetilde{\varphi} = \varphi + \xi_1 \lrcorner * \varphi$ şeklinde deforme edilsin. Bu durumda yeni $\widetilde{\varphi}$ G_2 yapısı en geniş sınıf olan $\mathcal{W}$ sınıfına aittir.*

Kanıt. Deforme edilmiş yeni $\widetilde{\varphi} = \varphi + \xi_1 \lrcorner * \varphi$ 3-formu

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi} &= \tfrac{1}{2}\eta_1 \wedge d\eta_1 + \tfrac{1}{2}\eta_2 \wedge d\eta_2 + \tfrac{1}{2}\eta_3 \wedge d\eta_3 + 4\eta_{123} \\ &\quad -\tfrac{1}{2}\eta_3 \wedge d\eta_2 + \tfrac{1}{2}\eta_2 \wedge d\eta_3 \end{aligned}$$

olarak bulunur. [27]'de verilen 1-formların $\{\eta_1, \cdots, \eta_7\}$ kümesi kullanıldığında

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi} &= \eta_{123} - \eta_{145} - \eta_{167} - \eta_{246} + \eta_{257} - \eta_{347} \\ &\quad -\eta_{356} - \eta_{357} + \eta_{346} - \eta_{256} - \eta_{247}. \end{aligned}$$

Öncelikle $(M, \widetilde{g})$ manifoldunun ait olduğu sınıf belirlenecektir:

$$d\widetilde{\varphi} = d\varphi - d(*(\eta_1 \wedge \varphi))$$

ve

$$*(\eta_1 \wedge \varphi) = \frac{1}{2}\eta_3 \wedge d\eta_2 - \frac{1}{2}\eta_2 \wedge d\eta_3$$

olduğundan, $d * (\eta_1 \wedge \varphi) = 0$ 'dır ve böylece

$$d\widetilde{\varphi} = d\varphi = dF_1 + dF_2 = 12 * F_1 + 4 * F_2.$$

$\widetilde{\varphi}$ 3-formunun dış türevi

$$d\widetilde{\varphi} = -4\eta_{1247} - 4\eta_{1256} + 4\eta_{1346} - 4\eta_{1357} - 4\eta_{2345} - 4\eta_{2367} + 12\eta_{4567}$$

olduğundan, $d\widetilde{\varphi} \neq 0$'dır. Çizelge (3.1)'deki tanımlama bağıntılarına bakıldığında, $\widetilde{M} \notin \mathcal{P}$ ve $\widetilde{M} \notin \mathcal{W}_2$ olduğu görülür.

α 1-formu M manifoldu üzerinde $d\widetilde{\varphi} = \alpha \wedge \widetilde{\varphi}$ koşulunu sağlayan bir 1-form olsun. Lokal olarak $\alpha_i \in C^\infty(M)$ olmak üzere, $\alpha = \sum \alpha_i \eta_i$ şeklinde yazılabildiğinden,

$$\begin{aligned}
\alpha \wedge \widetilde{\varphi} \;=\; & -\alpha_4\eta_{1234} - \alpha_5\eta_{1235} - \alpha_6\eta_{1236} - \alpha_7\eta_{1237} + \alpha_2\eta_{1245} - \alpha_1\eta_{1246} \\
& - \alpha_1\eta_{1247} - \alpha_1\eta_{1256} + \alpha_1\eta_{1257} + \alpha_2\eta_{1267} + \alpha_3\eta_{1345} + \alpha_1\eta_{1346} \\
& - \alpha_1\eta_{1347} - \alpha_1\eta_{1356} - \alpha_1\eta_{1357} + \alpha_3\eta_{1367} + \alpha_6\eta_{1456} + \alpha_7\eta_{1457} \\
& + \alpha_4\eta_{1467} + \alpha_5\eta_{1567} + (\alpha_2 + \alpha_3)\eta_{2346} + (\alpha_3 - \alpha_2)\eta_{2347} \\
& + (\alpha_3 - \alpha_2)\eta_{2356} - (\alpha_2 + \alpha_3)\eta_{2357} + (\alpha_4 - \alpha_5)\eta_{2456} - (\alpha_4 + \alpha_5)\eta_{2457} \\
& + (\alpha_7 - \alpha_6)\eta_{2467} + (\alpha_6 + \alpha_7)\eta_{2567} + (\alpha_4 + \alpha_5)\eta_{3456} + (\alpha_4 - \alpha_5)\eta_{3457} \\
& - (\alpha_6 + \alpha_7)\eta_{3467} + (\alpha_7 - \alpha_6)\eta_{3567}
\end{aligned}$$

olur. $d\widetilde{\varphi}$ ve $\alpha \wedge \widetilde{\varphi}$ 4-formlarının η_{1246} ve η_{1247} terimlerinin katsayıları karşılaştırılırsa, $d\widetilde{\varphi}$ 4-formunda η_{1246} teriminin katsayısı 0 iken, $\alpha \wedge \widetilde{\varphi}$ 4-formunda aynı terimin katsayısı $-\alpha_1$'dir. $d\widetilde{\varphi} = \alpha \wedge \widetilde{\varphi}$ olması için, $\alpha_1 = 0$ olmalıdır. Fakat $d\widetilde{\varphi}$ 4-formunda η_{1247} teriminin katsayısı -4 iken, $\alpha \wedge \widetilde{\varphi}$ 'da aynı terimin katsayısı $-\alpha_1$'dir. Buradan ise $\alpha_1 = 4$ bulunur, ancak bu ifade $\alpha_1 = 0$ olmasıyla çelişir. O halde $d\widetilde{\varphi} = \alpha \wedge \widetilde{\varphi}$ koşulunu sağlayan α 1-formu lokal olarak bile yoktur. Bu nedenle $\widetilde{M} \notin \mathcal{W}_4$ ve $\widetilde{M} \notin \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_4$'tür.

$d\widetilde{\varphi}\wedge\widetilde{\varphi} = 36\eta_{1234567} \neq 0$ eşitliğinden $\widetilde{M} \notin \mathcal{W}_3$, $\widetilde{M} \notin \mathcal{W}_2\oplus\mathcal{W}_3$, $\widetilde{M} \notin \mathcal{W}_3\oplus\mathcal{W}_4$ ve $\widetilde{M} \notin \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$ olur.

$\widetilde{\varphi}$ 3-formunun Hodge-star operatörü

$$\begin{aligned}
\widetilde{*}\widetilde{\varphi} &= 2^{-1/3}\{*\varphi + *(\xi_1 \lrcorner * \varphi) + \xi_1 \lrcorner * (\xi_1 \lrcorner \varphi)\} \\
&= 2^{-1/3}\{*\varphi - \eta_1 \wedge \varphi + *(\eta_1 \wedge *(\eta_1 \wedge *\varphi))\} \\
&= 2^{-1/3}\{\tfrac{1}{24}d\eta_1 \wedge d\eta_1 + \tfrac{1}{24}d\eta_2 \wedge d\eta_2 + \tfrac{1}{24}d\eta_3 \wedge d\eta_3 \\
&\quad +\tfrac{7}{6}\eta_{23} \wedge d\eta_1 - \tfrac{2}{3}\eta_{13} \wedge d\eta_2 + \tfrac{2}{3}\eta_{12} \wedge d\eta_3 \\
&\quad -\tfrac{1}{2}\eta_{12} \wedge d\eta_2 - \tfrac{1}{2}\eta_{13} \wedge d\eta_3 + *F_1
\end{aligned}$$

yerel olarak

$$\begin{aligned}
\widetilde{*}\widetilde{\varphi} &= 2^{-1/3}\{\eta_{1246} - \eta_{1247} - \eta_{1256} - \eta_{1257} + \eta_{1346} + \eta_{1347} \\
&\quad -\eta_{1356} - \eta_{1357} - 2\eta_{2345} - 2\eta_{2367} + 2\eta_{4567}\}
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Sıfırdan farklı bir k sabiti için $d\widetilde{\varphi} = k\widetilde{*}\widetilde{\varphi}$ olduğu varsayılırsa, $d\widetilde{\varphi}$ ve $\widetilde{*}\widetilde{\varphi}$ 4-formlarındaki η_{1246} teriminin katsayılarından $0 = 2^{-1/3}$ çelişkisi elde edilir. Bu çelişkiden $\widetilde{\varphi}$ G_2 yapısı $\mathcal{W}_1$ ve $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2$ sınıflarında olamaz.

$\widetilde{*}\widetilde{\varphi}$ 4-formunun dış türevinin lokal ifadesi

$$d\widetilde{*}\widetilde{\varphi} = 2^{8/3}\eta_{14567} - 2^{5/3}\eta_{12345} - 2^{8/3}\eta_{12367} \neq 0$$

olduğundan, $\widetilde{M}$ manifoldu $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3$ sınıfında da olamaz.

M üzerinde $d\widetilde{*}\widetilde{\varphi} = \beta \wedge \widetilde{*}\widetilde{\varphi}$ olacak şekilde bir β 1-formu varsa, $\beta_i \in C^\infty(M)$ olmak üzere, $\beta = \sum \beta_i\eta_i$ şeklinde yazılıp, $\beta \wedge \widetilde{*}\widetilde{\varphi}$ 5-formu lokal olarak hesaplandığında, $d\widetilde{*}\widetilde{\varphi} = \beta\wedge\widetilde{*}\widetilde{\varphi}$ eşitliği göz önüne alınarak, η_{12345} ve η_{14567} terimlerinin katsayılarından $\beta_1 = 2$ ve $\beta_1 = 4$ çelişkisine varılır. Buradan $\widetilde{M} \notin \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_4$ ve $\widetilde{M} \notin \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$ bulunur.

M üzerinde $d\widetilde{\varphi} = \alpha \wedge \widetilde{\varphi} + f\widetilde{*}\widetilde{\varphi}$ olacak şekilde bir α 1-formunun ve f fonksiyonunun olduğu kabul edilsin. α lokal koordinatlarda $\alpha_i \in C^\infty(M)$ için, $\alpha = \sum \alpha_i\eta_i$ olarak yazılır ve $d\widetilde{\varphi}$ ile $\alpha \wedge \widetilde{\varphi} + f\widetilde{*}\widetilde{\varphi}$ 4-formlarında η_{1246} ve η_{1247} terimlerinin katsayıları karşılaştırılırsa,

$$0 = -\alpha_1 + 2^{-1/3}f \text{ ve } -4 = -\alpha_1 - 2^{-1/3}f$$

bulunur. Buradan $\alpha_1 = 2$ ve $f = 2^{4/3}$ olur. η_{4567} teriminin katsayıları karşılaştırıldığında ise $f \neq 2^{4/3}$ olur. O halde $\widetilde{M} \notin \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_4$'tür.

Ayrıca

$$\widetilde{*} d\widetilde{\varphi} \wedge \widetilde{\varphi} = -2^{13/3}\eta_{234567}$$

ifadesi sıfırdan farklı olduğundan, $\widetilde{M}$ manifoldu $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3$ sınıfına da dahil olamaz.

Sonuç olarak $(M, \widetilde{g})$ manifoldu G_2 sınıflarının tanımlama bağıntılarını lokal olarak bile sağlamadığından, bu manifold $\mathcal{W}$ sınıfındandır. □

Ayrıca ξ_1 vektör alanı $\widetilde{g}$ metriğine göre de Killing vektör alanı olduğundan, $\widetilde{\varphi} = \varphi + \xi_1 \lrcorner * \varphi$ deformasyonu G_2 yapısına sahip 7-boyutlu, trivial olmayan bir Killing vektör alanına sahip bir manifold örneği oluşturmaktadır. Ek olarak, $\widetilde{\varphi} = \varphi + \xi_2 \lrcorner * \varphi$ ve $\widetilde{\varphi} = \varphi + \xi_3 \lrcorner * \varphi$ deformasyonları ile de benzer şekilde en geniş sınıfa ait manifold örnekleri verilebilir.

Bu adımda

$$\widetilde{\varphi} = \varphi + \xi_1 \lrcorner * \varphi$$

deformasyonu ile elde edilen $(M, \widetilde{g})$ manifoldunun spinor demeti üzerindeki Dirac operatörü $\widetilde{D}$ ile, (M, g) manifoldunun spinor demeti üzerindeki D Dirac operatörü arasındaki ilişki incelenecektir. Bunun için, öncelikle dış türevin tanımı kullanılarak [27]'de verilen $\{e_1, \cdots, e_7\}$ ortonormal çatısı için aşağıdaki eşitlikler lokal olarak ifade edilebilir:

$$i = 1, 2, 3 \text{ ve } j = 4, 5, 6, 7 \text{ için, } [e_i, e_j] = 0,$$

$$[e_1, e_2] = 2e_3, \ [e_1, e_3] = -2e_2, \ [e_2, e_3] = 2e_1,$$

$$[e_4, e_5] = 2e_1, \ [e_4, e_6] = 2e_2, \ [e_4, e_7] = 2e_3,$$

$$[e_5, e_6] = 2e_3, \ [e_5, e_7] = -2e_2, \ [e_6, e_7] = 2e_1.$$

Kozsul formülünden ise lokal olarak

$$\nabla_{e_i} e_j = -\nabla_{e_j} e_i,$$

$$\nabla_{e_1} e_2 = e_3, \nabla_{e_1} e_3 = -e_2, \nabla_{e_1} e_4 = e_5, \nabla_{e_1} e_5 = -e_4, \nabla_{e_1} e_6 = e_7, \nabla_{e_1} e_7 = -e_6,$$

$$\nabla_{e_2} e_3 = e_1, \nabla_{e_2} e_4 = e_6, \nabla_{e_2} e_5 = -e_7, \nabla_{e_2} e_6 = -e_4, \nabla_{e_2} e_7 = e_5,$$

$$\nabla_{e_3} e_4 = e_7, \nabla_{e_3} e_5 = e_6, \nabla_{e_3} e_6 = -e_5, \nabla_{e_3} e_7 = -e_4,$$

$$\nabla_{e_4}e_5 = e_1, \nabla_{e_4}e_6 = e_2, \nabla_{e_4}e_7 = e_3,$$

$$\nabla_{e_5}e_6 = e_3, \nabla_{e_5}e_7 = -e_2, \nabla_{e_6}e_7 = e_1$$

bulunur. $\widetilde{\varphi} = \varphi + \xi_1 \lrcorner * \varphi$ deformasyonu ile elde edilen $\widetilde{g}$ metriğinin $\widetilde{\nabla}$ Levi-Civita kovaryant türevinin, herhangi bir v vektör alanı ve $\widetilde{e}_i$ çatı elemanı için, lokal ifadesi

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_v\widetilde{e}_i &= \nabla_v\widetilde{e}_i - \tfrac{1}{2}\{g(v,e_1)\nabla_{\widetilde{e}_i}e_1 + g(\widetilde{e}_i,e_1)\nabla_v e_1\} \\
&= 2^{-2/3}\nabla_v e_i - 2^{-2/3}\nabla_v(e_i \times e_1) \\
&\quad -2^{-5/3}g(v,e_1)\nabla_{e_i}e_1 + 2^{-5/3}g(v,e_1)\nabla_{e_i\times e_1}e_1
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
C_{e_1}\left(\widetilde{\nabla}_v\widetilde{e}_i\right) &= 2^{-1}\nabla_v e_i - 2^{-1}\nabla_v(e_i \times e_1) - 2^{-2}g(v,e_1)\nabla_{e_i}e_1 \\
&\quad +2^{-2}g(v,e_1)\nabla_{e_i\times e_1}e_1 + 2^{-1}(\nabla_v e_i)\times e_1 - 2^{-1}(\nabla_v(e_i\times e_1))\times e_1 \\
&\quad -2^{-2}g(v,e_1)(\nabla_{e_i}e_1)\times e_1 + 2^{-2}g(v,e_1)(\nabla_{e_i\times e_1}e_1)\times e_1
\end{aligned}$$

olduğundan, spinor demeti üzerindeki kovaryant türevin lokal ifadesindeki

$$\widetilde{w}_{ij}(v) = \widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_v\widetilde{e}_i, \widetilde{e}_j)$$

terimi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
\widetilde{w}_{ij}(v) &= 2^{-1}g(\nabla_v e_i, e_j) - 2^{-1}g(\nabla_v(e_i\times e_1), e_j) - 2^{-2}g(v,e_1)g(\nabla_{e_i}e_1, e_j) \\
&\quad +2^{-2}g(v,e_1)g(\nabla_{e_i\times e_1}e_1, e_j) + 2^{-1}g((\nabla_v e_i)\times e_1, e_j) \\
&\quad -2^{-1}g((\nabla_v(e_i\times e_1))\times e_1, e_j) - 2^{-2}g(v,e_1)g((\nabla_{e_i}e_1)\times e_1, e_j) \\
&\quad 2^{-2}g(v,e_1)g((\nabla_{e_i\times e_1}e_1)\times e_1, e_j).
\end{aligned}$$

$\widetilde{S}$ spinor demeti üzerindeki $\widetilde{D}$ Dirac operatörünü hesaplamak için, taban elemanlarının 2-katlı vektör çarpımı değerleri de kullanılacaktır:

$$e_1\times e_2 = e_3, e_1\times e_3 = -e_2, e_1\times e_4 = -e_5, e_1\times e_5 = e_4, e_1\times e_6 = -e_7, e_1\times e_7 = e_6,$$

$$e_2 \times e_3 = e_1, e_2 \times e_4 = -e_6, e_2 \times e_5 = e_7, e_2 \times e_6 = e_4, e_2 \times e_7 = -e_5,$$

$$e_3 \times e_4 = -e_7, e_3 \times e_5 = -e_6, e_3 \times e_6 = e_5, e_3 \times e_7 = e_4,$$

$$e_4 \times e_5 = -e_1, e_4 \times e_6 = -e_2, e_4 \times e_7 = -e_3,$$

$$e_5 \times e_6 = -e_3, e_5 \times e_7 = e_2,$$

$$e_6 \times e_7 = -e_1.$$

Herhangi bir $\Psi_\omega(\sigma) = \widetilde{\sigma}$ spinoru için $\widetilde{D}$ Dirac operatörü

$$\begin{aligned}
\widetilde{D}\widetilde{\sigma} &= \sum_{i=1}^{7} \widetilde{\kappa}(\widetilde{e}_i)\left(\nabla^{\widetilde{S}}_{\widetilde{e}_i}\widetilde{\sigma}\right) \\
&= 2^{-11/3}\Psi_{e_1}\left\{\sum_{i,j,k} g(\nabla_{e_k}e_i, e_j)\kappa(e_k.e_i.e_j)\sigma\right\} \\
&\quad +2^{-11/3}\sum_{i,k}\Psi_{e_1}\{\kappa\,(e_i.e_k.(\nabla_{e_k\times e_1}e_i) + e_i.e_k.(\nabla_{e_k}(e_i\times e_1)) \\
&\quad -e_i.e_k.(\nabla_{e_k\times e_1}(e_i\times e_1)) - e_i.e_k.(\nabla_{e_k}e_i)\times e_1 \\
&\quad +e_i.e_k.(\nabla_{e_k\times e_1}e_i)\times e_1 + e_i.e_k.(\nabla_{e_k}(e_i\times e_1))\times e_1 \\
&\quad -e_i.e_k.(\nabla_{e_k\times e_1}(e_i\times e_1))\times e_1)\,\sigma\} \\
&\quad +2^{-11/3}\sum_{i}\Psi_{e_1}\{\kappa\,(e_1.e_i.(\nabla_{e_1}e_i) - e_1.e_i.(\nabla_{e_1}(e_i\times e_1)) \\
&\quad -e_1.e_i.(\nabla_{e_i}e_1) + e_1.e_i.(\nabla_{e_i\times e_1}e_1) + e_1.e_i.(\nabla_{e_1}e_i)\times e_1 \\
&\quad -e_1.e_i.(\nabla_{e_1}(e_i\times e_1))\times e_1 - e_1.e_i.(\nabla_{e_i}e_1)\times e_1 \\
&\quad +e_1.e_i.(\nabla_{e_i\times e_1}e_1)\times e_1)\,\sigma\}
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Daha önce verilen taban elemanlarının kovaryant türevleri ve 2-katlı vektör çarpımları kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\widetilde{D}\widetilde{\sigma} &= 2^{-11/3}\Psi_{e_1}\left\{\sum_{i,j,k} g(\nabla_{e_k}e_i, e_j)\kappa(e_k.e_i.e_j)\sigma\right\} \\
&\quad +2^{-11/3}\Psi_{e_1}\{14\kappa(e_1.e_2.e_3)\sigma + 14\kappa(e_1.e_4.e_5)\sigma + 14\kappa(e_1.e_6.e_7)\sigma \\
&\quad -14\kappa(e_2.e_4.e_6)\sigma + 12\kappa(e_2.e_4.e_7)\sigma + 12\kappa(e_2.e_5.e_6)\sigma \\
&\quad +14\kappa(e_2.e_5.e_7)\sigma - 12\kappa(e_3.e_4.e_6)\sigma - 14\kappa(e_3.e_4.e_7)\sigma \\
&\quad +12\kappa(e_3.e_5.e_7)\sigma - 14\kappa(e_3.e_5.e_6)\sigma\}
\end{aligned}$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
4D\sigma &= \sum_{i,j,k} g(\nabla_{e_k}e_i, e_j)\kappa(e_k.e_i.e_j)\sigma \\
&= 6\{e_1.e_2.e_3 + e_1.e_4.e_5 + e_1.e_6.e_7 + e_2.e_4.e_6 \\
&\quad -e_2.e_5.e_7 + e_3.e_4.e_7 + e_3.e_5.e_6\}
\end{aligned}$$

olduğundan, $\widetilde{D}$ Dirac operatörü global olarak

$$\begin{aligned}
\widetilde{D}\widetilde{\sigma} &= 2^{-5/3}\Psi_{e_1}\{\tfrac{10}{3}D\sigma + \tfrac{7}{2}\kappa\,(\eta_2\wedge d\eta_2 + \eta_3\wedge d\eta_3 \\
&\quad +4\eta_1\wedge\eta_2\wedge\eta_3) + \tfrac{3}{2}d(\eta_2\wedge\eta_3)\sigma\} \\
&= (2^{-2/3}.\tfrac{5}{3})\Psi_{e_1}\{D\sigma\} + (2^{-5/3}.7)\Psi_{e_1}\{\kappa\,(\varphi - 2\eta_{123})\,\sigma\} \\
&\quad +(2^{-8/3}.3)\Psi_{e_1}\{\kappa\,(d(\eta_2\wedge\eta_3))\,\sigma\}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

5.2 Hemen-Hemen Paralel G_2 Yapısının Λ^3_7 Uzayından Elemanlarla Deformasyonu

(M,g) 7-boyutlu, $(\xi_i,\eta_i,\phi_i)_{i=1,2,3}$ 3-Sasaki yapısıyla donatılmış ve Bölüm (3.4)'te verilen φ_1 hemen-hemen paralel G_2 yapısına sahip bir 3-Sasaki manifoldu olsun. M manifoldunun bir açık kümesi üzerinde [27]'deki özelliklere sahip $\{e_1,\cdots,e_7\}$ ortonormal çatısı seçilsin ve bu çatıya karşılık gelen 1-formlar kümesi $\{\eta_1,\cdots,\eta_7\}$ olsun. Çalışmanın bu kısmında hemen-hemen paralel

$$\varphi_1=\frac{1}{2}\eta_1\wedge d\eta_1-\frac{1}{2}\eta_2\wedge d\eta_2-\frac{1}{2}\eta_3\wedge d\eta_3$$

temel 3-formu ξ_1, ξ_2, ξ_3 Killing vektör alanları ile deforme edilerek G_2 yapıların nasıl değiştiği incelenecektir.

Teorem 5.2.1. *(M,g) 7-boyutlu, $i=1,2,3$ olmak üzere (ξ_i,η_i,ϕ_i) 3-Sasaki yapısına sahip bir 3-Sasaki manifoldu ve φ_1 de bu manifold üzerindeki hemen-hemen paralel G_2 yapısı olsun. φ_1 temel 3-formu ξ_1 ile $\widetilde{\varphi}_1=\varphi_1+\xi_1\lrcorner*\varphi_1$ şeklinde deforme edilsin. Bu durumda yeni $\widetilde{\varphi}_1$ G_2 yapısının sınıfı $\mathcal{W}_1\oplus\mathcal{W}_2\oplus\mathcal{W}_4$ olur. Eğer φ_1 3-formu ξ_2 veya ξ_3 ile deforme edilirse, yeni G_2 yapılar $\mathcal{W}_1\oplus\mathcal{W}_3$ sınıfındandır.*

Kanıt. İlk olarak φ_1 temel 3-formunun ξ_1 ile deformasyonu ele alınacaktır. Yeni $\widetilde{\varphi}_1=\varphi_1+\xi_1\lrcorner*\varphi_1$ 3-formu

$$\widetilde{\varphi}_1=\frac{1}{2}\eta_1\wedge d\eta_1-\frac{1}{2}\eta_2\wedge d\eta_2-\frac{1}{2}\eta_3\wedge d\eta_3+\frac{1}{2}\eta_3\wedge d\eta_2-\frac{1}{2}\eta_2\wedge d\eta_3,$$

olduğundan, [27]'de verilen lokal çatıya göre

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}_1 &= \eta_{123}-\eta_{145}-\eta_{167}+\eta_{246}-\eta_{257}+\eta_{347}\\ &\quad+\eta_{356}+\eta_{357}-\eta_{346}+\eta_{256}+\eta_{247}.\end{aligned}$$

$\widetilde{M}:=(M,\widetilde{g})$ manifoldunun ait olduğu sınıf incelenecek olursa,

$$d\widetilde{\varphi}_1=d\varphi_1-d(*(\eta_1\wedge\varphi_1))$$

ve

$$*(\eta_1 \wedge \varphi_1) = -\frac{1}{2}\eta_3 \wedge d\eta_2 + \frac{1}{2}\eta_2 \wedge d\eta_3,\ d(*(\eta_1 \wedge \varphi)) = 0$$

olduğundan, $d\widetilde{\varphi}_1 = d\varphi_1$'dir. $d\widetilde{\varphi}_1$ 4-formu lokal koordinatlarda

$$d\widetilde{\varphi}_1 = 4\{-\eta_{1247} - \eta_{1256} + \eta_{1346} - \eta_{1357} + \eta_{2345} + \eta_{2367} - \eta_{4567}\}.$$

$d\widetilde{\varphi}_1 \neq 0$ olduğundan, $\widetilde{M}$ manifoldu $\mathcal{P}$ ve $\mathcal{W}_2$ sınıflarına ait değildir.

M manifoldu üzerinde $d\widetilde{\varphi}_1 = \alpha \wedge \widetilde{\varphi}_1$ eşitliğini sağlayan bir α 1-formunun olduğu varsayıldığında, $\alpha_i \in C^\infty(M)$ için, lokal koordinatlarda $\alpha = \sum \alpha_i \eta_i$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\alpha \wedge \widetilde{\varphi}_1 = & -\alpha_4\eta_{1234} - \alpha_5\eta_{1235} - \alpha_6\eta_{1236} - \alpha_7\eta_{1237} + \alpha_2\eta_{1245} + \alpha_1\eta_{1246} \\
& +\alpha_1\eta_{1247} + \alpha_1\eta_{1256} - \alpha_1\eta_{1257} + \alpha_2\eta_{1267} + \alpha_3\eta_{1345} - \alpha_1\eta_{1346} \\
& +\alpha_1\eta_{1347} + \alpha_1\eta_{1356} + \alpha_1\eta_{1357} + \alpha_3\eta_{1367} + \alpha_6\eta_{1456} + \alpha_7\eta_{1457} \\
& +\alpha_4\eta_{1467} + \alpha_5\eta_{1567} - (\alpha_2 + \alpha_3)\eta_{2346} + (\alpha_2 - \alpha_3)\eta_{2347} \\
& +(\alpha_2 - \alpha_3)\eta_{2356} + (\alpha_2 + \alpha_3)\eta_{2357} + (\alpha_5 - \alpha_4)\eta_{2456} + (\alpha_4 + \alpha_5)\eta_{2457} \\
& +(\alpha_6 - \alpha_7)\eta_{2467} - (\alpha_6 + \alpha_7)\eta_{2567} - (\alpha_4 + \alpha_5)\eta_{3456} + (\alpha_5 - \alpha_4)\eta_{3457} \\
& +(\alpha_6 + \alpha_7)\eta_{3467} + (\alpha_6 - \alpha_7)\eta_{3567}
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. $d\widetilde{\varphi}_1$ ve $\alpha \wedge \widetilde{\varphi}_1$ 4-formlarının η_{2345} teriminin katsayıları karşılaştırıldığında $4 = 0$ çelişkisinden $\widetilde{M} \notin \mathcal{W}_4$ ve $\widetilde{M} \notin \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_4$ olur.

$\widetilde{\varphi}_1$ 4-formunun $\widetilde{g}$ metriğine göre $\widetilde{*}$ Hodge-star operatörü

$$\begin{aligned}
\widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1 &= 2^{-1/3}\{*\varphi_1 + *(\xi_1 \lrcorner * \varphi_1) + \xi_1 \lrcorner * (\xi_1 \lrcorner \varphi_1)\} \\
&= 2^{-1/3}\{*\varphi - \eta_1 \wedge \varphi_1 + *(\eta_1 \wedge *(\eta_1 \wedge *\varphi_1))\} \\
&= 2^{-1/3}\{-\tfrac{1}{4}d\eta_1 \wedge d\eta_1 + \tfrac{1}{8}d\eta_2 \wedge d\eta_2 + \tfrac{1}{8}d\eta_3 \wedge d\eta_3 \\
&\quad +2 * \eta_{123} + \tfrac{1}{2}\eta_{12} \wedge d\eta_2 + \tfrac{1}{2}\eta_{13} \wedge d\eta_3\}
\end{aligned}$$

olur. Bu formun lokal koordinatlardaki ifadesi ise

$$\begin{aligned}
\widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1 &= 2^{-1/3}\{-\eta_{1246} + \eta_{1247} + \eta_{1256} + \eta_{1257} - \eta_{1346} - \eta_{1347} \\
&\quad -\eta_{1356} + \eta_{1357} - 2\eta_{2345} - 2\eta_{2367} + 2\eta_{4567}\}.
\end{aligned}$$

Sıfırdan farklı bir k sabiti için $d\widetilde{\varphi}_1 = k\widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1$ olsun. $d\widetilde{\varphi}_1$ ve $k\widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1$ 4-formlarının η_{1256} ve η_{4567} terimlerinin katsayıları karşılaştırılırsa, sırasıyla

$$-4 = 2^{-1/3}k \text{ ve } -4 = 2^{2/3}k$$

olur ki bu bir çelişkidir. Böylece $\mathcal{W}_1$ ve $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2$ sınıfları da elenmiş olur.

$\widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1$ 4-formunun dış türevi

$$\begin{aligned} d\widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1 &= 2^{-1/3}\{\tfrac{1}{2}\eta_2 \wedge d\eta_1 \wedge d\eta_2 - \tfrac{1}{2}\eta_1 \wedge d\eta_2 \wedge d\eta_2 \\ &\quad +\tfrac{1}{2}\eta_3 \wedge d\eta_1 \wedge d\eta_3 - \tfrac{1}{2}\eta_1 \wedge d\eta_3 \wedge d\eta_3\} \end{aligned}$$

olup, lokal koordinatlarda

$$d\widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1 = 2^{5/3}\eta_{12345} + 2^{5/3}\eta_{12367} - 2^{8/3}\eta_{14567}$$

ifadesi sıfırdan farklıdır.

β, M manifoldu üzerinde $d\widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1 = \beta \wedge \widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1$ eşitliğini sağlayan bir 1-form ise, $\beta = \sum \beta_i \eta_i$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} 2^{1/3}\beta \wedge \widetilde{*}\widetilde{\varphi} = &-2\beta_1\eta_{12345} + (\beta_2 - \beta_3)\eta_{12346} + (\beta_2 + \beta_3)\eta_{12347} + (\beta_2 + \beta_3)\eta_{12356} \\ &+(\beta_3 - \beta_2)\eta_{12357} - 2\beta_1\eta_{12367} + (\beta_4 + \beta_5)\eta_{12456} + (\beta_4 - \beta_5)\eta_{12457} \\ &-(\beta_6 + \beta_7)\eta_{12467} + (\beta_7 - \beta_6)\eta_{12567} + (\beta_5 - \beta_4)\eta_{13456} + (\beta_4 + \beta_5)\eta_{13457} \\ &+(\beta_6 - \beta_7)\eta_{13467} - (\beta_6 + \beta_7)\eta_{13567} + 2\beta_1\eta_{14567} - 2\beta_6\eta_{23456} \\ &-2\beta_7\eta_{23457} - 2\beta_4\eta_{23467} - 2\beta_5\eta_{23567} + 2\beta_2\eta_{24567} + 2\beta_3\eta_{34567} \end{aligned}$$

olduğundan, $2^{1/3}d\widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1$ ve $2^{1/3}\beta \wedge \widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1$ 5-formlarının η_{12345} ve η_{14567} terimlerinin katsayıları karşılaştırılırsa $\beta_1 = -2$ ve $\beta_1 = -4$ çelişkisi elde edilir. Bundan dolayı $d\widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1 = \beta \wedge \widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1$ eşitliğini sağlayan bir β 1-formu bulunamaz. O halde $\widetilde{M} \notin \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_4$'tür.

$\alpha = -2\eta_1$ ve $f = -2^{4/3}$ alınırsa, $d\widetilde{\varphi}_1 = \alpha \wedge \widetilde{\varphi}_1 + f\widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1$ eşitliğinin sağlandığı görülür. O halde $\widetilde{M}$ manifoldunun ait olduğu sınıf $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_4$'tür.

φ_1 temel 3-formu ξ_2 Killing vektörü ile deforme edildiğinde ise, yeni

$$\widetilde{\varphi}_1 = \varphi_1 + \xi_2 \lrcorner * \varphi_1$$

3-formu

$$\widetilde{\varphi}_1 = \frac{1}{2}\eta_1 \wedge d\eta_1 - \frac{1}{2}\eta_2 \wedge d\eta_2 - \frac{1}{2}\eta_3 \wedge d\eta_3 + \frac{1}{2}\eta_3 \wedge d\eta_1 + \frac{1}{2}\eta_1 \wedge d\eta_3,$$

lokal koordinatlarda

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}_1 &= \eta_{123} - \eta_{145} - \eta_{167} + \eta_{246} - \eta_{257} + \eta_{347} \\ &\quad +\eta_{356} - \eta_{345} - \eta_{367} - \eta_{147} - \eta_{156} \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. $\widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1$ 4-formu da

$$\begin{aligned}\widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1 &= 2^{-1/3}\{*\varphi_1 + *(\xi_2\lrcorner * \varphi_1) + \xi_2\lrcorner * (\xi_2\lrcorner\varphi_1)\} \\ &= 2^{-1/3}\{*\varphi - \eta_2 \wedge \varphi_1 + *(\eta_2 \wedge *(\eta_2 \wedge *\varphi_1))\}\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir.

$$*\varphi_1 = -\frac{1}{8}d\eta_1 \wedge d\eta_1 + \frac{1}{8}d\eta_2 \wedge d\eta_2 + \frac{1}{8}d\eta_3 \wedge d\eta_3,$$

$$\eta_2 \wedge \varphi_1 = \frac{1}{4}d\eta_1 \wedge d\eta_3$$

ve

$$*(\eta_1 \wedge *(\eta_1 \wedge *\varphi_1)) = \frac{1}{8}d\eta_2 \wedge d\eta_2$$

eşitliklerinden, $d\widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1 = 0$'dır. O halde yeni G_2 yapısı $\mathcal{P}$, $\mathcal{W}_1$, $\mathcal{W}_3$ veya $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3$ sınıfındandır. $\widetilde{\varphi}_1$ 4-formunun dış türevi

$$d\widetilde{\varphi}_1 = \frac{1}{2}d\eta_1 \wedge d\eta_1 - \frac{1}{2}d\eta_2 \wedge d\eta_2 - \frac{1}{2}d\eta_3 \wedge d\eta_3 + d\eta_1 \wedge d\eta_3.$$

Lokal koordinatlarda

$$\begin{aligned}d\widetilde{\varphi}_1 &= 4\{\eta_{1245} - \eta_{1247} + \eta_{1267} - \eta_{1256} + \eta_{1346} - \eta_{1357} \\ &\quad +\eta_{2345} + \eta_{2347} + \eta_{2356} + \eta_{2367} - \eta_{4567}\}.\end{aligned}$$

$d\widetilde{\varphi}_1 \neq 0$ olduğundan $\mathcal{P}$ sınıfı elenir.

Sıfırdan farklı bir k sabiti için $d\widetilde{\varphi}_1 = k\widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1$ olsun. $\widetilde{\varphi}_1$ 3-formunun Hodge-starı

$$\begin{aligned}\widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1 &= 2^{-1/3}\{-\tfrac{1}{8}d\eta_1 \wedge d\eta_1 + \tfrac{1}{8}d\eta_2 \wedge d\eta_2 + \tfrac{1}{8}d\eta_3 \wedge d\eta_3 \\ &\quad -\tfrac{1}{4}d\eta_1 \wedge d\eta_3 + \tfrac{1}{8}d\eta_2 \wedge d\eta_2\},\end{aligned}$$

lokal kartlarda

$$\begin{aligned}\widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1 &= 2^{-1/3}\{-\eta_{1245} + \eta_{1247} + \eta_{1256} - \eta_{1267} - 2\eta_{1346} + 2\eta_{1357} \\ &\quad -\eta_{2345} - \eta_{2347} - \eta_{2356} - \eta_{2367} + 2\eta_{4567}\}\end{aligned}$$

olduğundan, $d\widetilde{\varphi}_1$ ve $k\widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1$ 4-formlarının η_{1245} ve η_{1346} terimlerinin katsayıları karşılaştırılırsa, sırasıyla

$$4 = -2^{-1/3}k \text{ ve } 4 = -2^{2/3}k$$

elde edilir ve böylelikle $\mathcal{W}_1$ sınıfı da elenir.

$d\widetilde{\varphi}_1 \wedge \widetilde{\varphi}_1 = -44\ \eta_{1234567} \neq 0$ olduğundan, $M \notin \mathcal{W}_3$'tür. O halde $\widetilde{M}$ manifoldu $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3$ sınıfının elemanıdır.

Son olarak φ_1 temel 3-formu ξ_3 ile deforme edilsin. Yeni

$$\widetilde{\varphi}_1 = \varphi_1 + \xi_3 \lrcorner * \varphi_1$$

3-formu

$$\widetilde{\varphi}_1 = \frac{1}{2}\eta_1 \wedge d\eta_1 - \frac{1}{2}\eta_2 \wedge d\eta_2 - \frac{1}{2}\eta_3 \wedge d\eta_3 - \frac{1}{2}\eta_2 \wedge d\eta_1 - \frac{1}{2}\eta_1 \wedge d\eta_2,$$

lokal koordinatlarda

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}_1 &= \eta_{123} - \eta_{145} - \eta_{167} + \eta_{246} - \eta_{257} + \eta_{347} \\ &\quad + \eta_{356} + \eta_{267} + \eta_{245} - \eta_{157} + \eta_{146}. \end{aligned}$$

$\widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1$ 4-formu hesaplanacak olursa,

$$\begin{aligned} \widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1 &= 2^{-1/3}\{*\varphi_1 + *(\xi_3 \lrcorner * \varphi_1) + \xi_3 \lrcorner * (\xi_3 \lrcorner \varphi_1)\} \\ &= 2^{-1/3}\{*\varphi_1 - \eta_3 \wedge \varphi_1 + *(\eta_3 \wedge *(\eta_3 \wedge *\varphi_1))\}. \end{aligned}$$

$$*\varphi_1 = -\frac{1}{8}d\eta_1 \wedge d\eta_1 + \frac{1}{8}d\eta_2 \wedge d\eta_2 + \frac{1}{8}d\eta_3 \wedge d\eta_3,$$

$$\eta_3 \wedge \varphi_1 = -\frac{1}{4}d\eta_1 \wedge d\eta_2$$

ve

$$*(\eta_3 \wedge *(\eta_3 \wedge *\varphi_1)) = \frac{1}{8}d\eta_3 \wedge d\eta_3$$

eşitliklerinden $d\widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1 = 0$ bulunur. O halde yeni G_2 yapısı $\mathcal{P}$, $\mathcal{W}_1$, $\mathcal{W}_3$, $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3$ sınıflarından birine aittir. $\widetilde{\varphi}_1$ 4-formunun dış türevi

$$d\widetilde{\varphi}_1 = \frac{1}{2}d\eta_1 \wedge d\eta_1 - \frac{1}{2}d\eta_2 \wedge d\eta_2 - \frac{1}{2}d\eta_3 \wedge d\eta_3 - d\eta_1 \wedge d\eta_2,$$

lokal koordinatlarda ise

$$\begin{aligned} d\widetilde{\varphi}_1 &= 4\{-\eta_{1247} - \eta_{1256} + \eta_{1345} + \eta_{1346} - \eta_{1357} + \eta_{1367} \\ &\quad + \eta_{2345} - \eta_{2346} + \eta_{2357} + \eta_{2367} - \eta_{4567}\}. \end{aligned}$$

$d\widetilde{\varphi}_1 \neq 0$ ifadesinden $\mathcal{P}$ sınıfı elenir.

Sıfırdan farklı bir k sabiti için $d\widetilde{\varphi}_1 = k\widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1$ olsun.

$$\begin{aligned} \widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1 &= 2^{-1/3}\{-\tfrac{1}{8}d\eta_1 \wedge d\eta_1 + \tfrac{1}{8}d\eta_2 \wedge d\eta_2 + \tfrac{1}{8}d\eta_3 \wedge d\eta_3 \\ &\quad + \tfrac{1}{4}d\eta_1 \wedge d\eta_2 + \tfrac{1}{8}d\eta_3 \wedge d\eta_3\}, \end{aligned}$$

lokal koordinatlarda

$$\begin{aligned} \widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1 &= 2^{-1/3}\{2\eta_{1247} + 2\eta_{1256} - \eta_{1345} - \eta_{1346} + \eta_{1357} - \eta_{1367} \\ &\quad -\eta_{2345} + \eta_{2346} - \eta_{2357} - \eta_{2367} + 2\eta_{4567}\} \end{aligned}$$

olduğundan, $d\widetilde{\varphi}_1$ ve $k\widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1$ 4-formlarının η_{1247} ve η_{1357} terimlerinin katsayıları karşılaştırılırsa,

$$4 = -2^{2/3}k \text{ ve } 4 = -2^{-1/3}k$$

çelişkisine varılarak $\mathcal{W}_1$ sınıfı da elenir.

$d\widetilde{\varphi}_1 \wedge \widetilde{\varphi}_1 = -44\ \eta_{1234567} \neq 0$ ifadesinden ise $M \notin \mathcal{W}_3$ olduğu görülür. O halde $\widetilde{M}$ manifoldu $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3$ sınıfının elemanıdır.

Sonuç olarak, 7-boyutlu bir 3-Sasaki manifoldu üzerinde φ_1 hemen-hemen paralel G_2 yapısı, 3-Sasaki yapısının ξ_1, ξ_2, ξ_3 karakteristik vektör alanları ile deforme edilirse, yeni G_2 yapılar sırasıyla $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_4$, $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3$ ve $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3$ sınıfının elemanları olurlar. $\square$

Benzer şekilde, φ_2 (sırasıyla φ_3) temel 3-formu ξ_1 ve ξ_3 (sırasıyla ξ_1 and ξ_2) ile deforme edilirse, $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3$ sınıfından yeni G_2 yapıları elde edilir. φ_2 (sırasıyla φ_3) temel 3-formu ξ_2 (sırasıyla ξ_3) ile deforme edildiğinde ise, $i = 2, 3$ için, $\alpha = -2\eta_i$ ve $f = -2^{4/3}$ olmak üzere, $d\widetilde{\varphi}_i = \alpha \wedge \widetilde{\varphi}_i + f\widetilde{*}\widetilde{\varphi}_i$ eşitliğini gerçekleyen $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_4$ sınıfından yeni G_2 yapıları inşa edilir.

6 YENİ G_2 YAPILARI

Bu bölümde 7-boyutlu, $(\xi_i, \eta_i, \phi_i)_{i=1,2,3}$, 3-Sasaki yapısıyla donatılmış bir M 3-Sasaki manifoldu üzerinde G_2 yapılar ifade edilmiştir. İlk alt bölümde a, b, c, $f \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$a\ \eta_1 \wedge d\eta_1 + b\ \eta_2 \wedge d\eta_2 + c\ \eta_3 \wedge d\eta_3 + f\eta_1 \wedge \eta_2 \wedge \eta_3$$

tipinden bir 3-form ele alınmış, bu 3-formun manifold üzerinde G_2 yapı vermesi için gerek ve yeter koşullar verilmiştir. Böyle bir 3-formun G_2 yapı vermesi için gerek ve yeter koşul, bu 3-formun [27]'de inşa edilen kanonik G_2 yapısı veya hemen-hemen paralel G_2 yapılardan biri olmasıdır. İkinci alt bölümde ise M üzerinde $a, b, c, d, e, f, h \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$a\ d\eta_1 \wedge \eta_2 + b\ \eta_1 \wedge d\eta_2 + c\ d\eta_1 \wedge \eta_3 + d\ \eta_1 \wedge d\eta_3 + e\ d\eta_2 \wedge \eta_3 + f\ \eta_2 \wedge d\eta_3 + h\ \eta_{123}$$

lineer toplamı ele alınarak, yeni G_2 yapılar verilmiştir. Takip eden bölümde bu G_2 yapıların ait oldukları sınıflar belirlenmiştir. Son iki alt bölümde ise yeni G_2 yapılara bazı deformasyonlar uygulanarak, deforme edilmiş 3-formların sınıf değişimleri incelenmiştir.

6.1 Kanonik ve Hemen-Hemen Paralel G_2 Yapıların İfadesi

(M, g) 7-boyutlu bir 3-Sasaki manifoldu ve $(\xi_i, \eta_i, \phi_i)_{\alpha=1,2,3}$ bu manifoldun 3-Sasaki yapısı olsun. M üzerinde $a, b, c, f \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\varphi = a\ \eta_1 \wedge d\eta_1 + b\ \eta_2 \wedge d\eta_2 + c\ \eta_3 \wedge d\eta_3 + f\eta_1 \wedge \eta_2 \wedge \eta_3 \tag{6.1}$$

3-formu ele alınsın. Bu 3-formun M üzerinde bir G_2 yapı vermesi için, $x, y \in \Gamma(TM)$ olmak üzere,

$$(x \lrcorner \varphi) \wedge (y \lrcorner \varphi) \wedge \varphi = 6g(x, y)d_{vol} \tag{6.2}$$

eşitliği sağlanmalıdır. Manifoldun açık bir kümesinde, [27]'de verilen özelliklere sahip $\{e_1, \cdots, e_7\}$ ortonormal çatısı seçilsin. Bu durumda,

$$
\begin{aligned}
(e_1 \lrcorner\, \varphi) \wedge (e_1 \lrcorner\, \varphi) \wedge \varphi &= 24a^2(-2(a+b+c)+f)\ \eta_{1234567}, \\
(e_2 \lrcorner\, \varphi) \wedge (e_2 \lrcorner\, \varphi) \wedge \varphi &= -24b^2(2(a+b+c)-f)\ \eta_{1234567}, \\
(e_3 \lrcorner\, \varphi) \wedge (e_3 \lrcorner\, \varphi) \wedge \varphi &= -24c^2(2(a+b+c)-f)\ \eta_{1234567}, \\
(e_4 \lrcorner\, \varphi) \wedge (e_4 \lrcorner\, \varphi) \wedge \varphi &= 48abc\ \eta_{1234567}, \\
(e_5 \lrcorner\, \varphi) \wedge (e_5 \lrcorner\, \varphi) \wedge \varphi &= 48abc\ \eta_{1234567}, \\
(e_6 \lrcorner\, \varphi) \wedge (e_6 \lrcorner\, \varphi) \wedge \varphi &= 48abc\ \eta_{1234567}, \\
(e_7 \lrcorner\, \varphi) \wedge (e_7 \lrcorner\, \varphi) \wedge \varphi &= 48abc\ \eta_{1234567}, \\
(e_i \lrcorner\, \varphi) \wedge (e_j \lrcorner\, \varphi) \wedge \varphi &= 0, \quad i \neq j
\end{aligned}
$$

olduğundan, (6.2) eşitliği kullanılırsa; φ 3-formunun M üzerinde bir G_2 yapı vermesi için gerek ve yeter koşul, $a, b, c, f \in \mathbb{R}$ katsayıları arasında aşağıdaki ilişkilerin olmasıdır:

$$
\begin{aligned}
a^2\,(-2(a+b+c)+f) &= \tfrac{1}{4}, \\
b^2\,(-2(a+b+c)+f) &= \tfrac{1}{4}, \\
c^2\,(-2(a+b+c)+f) &= \tfrac{1}{4}, \\
abc &= \tfrac{1}{8}.
\end{aligned}
$$

Bu denklem sisteminin çözümleri

1. $a = 1/2,\ b = 1/2,\ c = 1/2,\ f = 4,$
2. $a = 1/2,\ b = -1/2,\ c = -1/2,\ f = 0,$
3. $a = -1/2,\ b = 1/2,\ c = -1/2,\ f = 0,$
4. $a = -1/2,\ b = -1/2,\ c = 1/2,\ f = 0$

olarak bulunur. Buradan

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\eta_1 \wedge d\eta_1 + \frac{1}{2}\eta_2 \wedge d\eta_2 + \frac{1}{2}\eta_3 \wedge d\eta_3 + 4\eta_1 \wedge \eta_2 \wedge \eta_3,$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2}\eta_1 \wedge d\eta_1 - \frac{1}{2}\eta_2 \wedge d\eta_2 - \frac{1}{2}\eta_3 \wedge d\eta_3,$$

$$\varphi_3 = -\frac{1}{2}\eta_1 \wedge d\eta_1 + \frac{1}{2}\eta_2 \wedge d\eta_2 - \frac{1}{2}\eta_3 \wedge d\eta_3,$$

$$\varphi_4 = -\frac{1}{2}\eta_1 \wedge d\eta_1 - \frac{1}{2}\eta_2 \wedge d\eta_2 + \frac{1}{2}\eta_3 \wedge d\eta_3$$

temel 3-formları elde edilir. φ_1 3-formu [27]'de verilen M üzerindeki kanonik G_2 yapısıdır ve $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3$ sınıfındadır (cocalibrated). Diğer 3-formlar ise yine [27]'de Killing spinorları tarafından üretilen, $\mathcal{W}_1$ sınıfına ait (hemen-hemen paralel) G_2 yapılardır.

6.2 Yeni G_2 Yapılar

(M, g) 7-boyutlu, $(\xi_i, \eta_i, \phi_i)_{i=1,2,3}$ 3-Sasaki yapısına sahip bir 3-Sasaki manifoldu olsun. M üzerinde $a, b, c, d, e, f, h \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\varphi = a\, d\eta_1 \wedge \eta_2 + b\, \eta_1 \wedge d\eta_2 + c\, d\eta_1 \wedge \eta_3 + d\, \eta_1 \wedge d\eta_3 + e\, d\eta_2 \wedge \eta_3 + f\, \eta_2 \wedge d\eta_3 + h\, \eta_{123} \tag{6.3}$$

3-formu ele alınsın. Bu 3-formun M üzerinde bir G_2 yapı vermesi için, $x, y \in \Gamma(TM)$ olmak üzere, (6.2) eşitliği sağlanmalıdır. Manifoldun açık bir kümesinde, [27]'de verilen özelliklere sahip $\{e_1, \cdots, e_7\}$ ortonormal çatısı seçilsin. Bu çatıya göre φ 3-formunun lokal ifadesi

$$\begin{aligned}\varphi \;=\; & -2a\, \eta_{245} - 2a\, \eta_{267} - 2b\, \eta_{146} + 2b\, \eta_{157} - 2c\, \eta_{345} - 2c\, \eta_{367} \\ & -2d\, \eta_{147} - 2d\, \eta_{156} - 2e\, \eta_{346} + 2e\, \eta_{357} - 2f\, \eta_{247} - 2f\, \eta_{256} + h\, \eta_{123}\end{aligned}$$

kullanıldığında,

$$(e_1 \lrcorner\, \varphi) \wedge (e_1 \lrcorner\, \varphi) \wedge \varphi = 24h(b^2 + d^2)\, \eta_{1234567}$$

$$(e_2 \lrcorner\, \varphi) \wedge (e_2 \lrcorner\, \varphi) \wedge \varphi = 24h(a^2 + f^2)\, \eta_{1234567}$$

$$(e_3 \lrcorner\, \varphi) \wedge (e_3 \lrcorner\, \varphi) \wedge \varphi = 24h(c^2 + e^2)\, \eta_{1234567}$$

$$(e_4 \lrcorner\, \varphi) \wedge (e_4 \lrcorner\, \varphi) \wedge \varphi = 48(ade + bcf)\, \eta_{1234567}$$

$$(e_5 \lrcorner\, \varphi) \wedge (e_5 \lrcorner\, \varphi) \wedge \varphi = 48(ade + bcf)\, \eta_{1234567}$$

$$(e_6 \lrcorner\, \varphi) \wedge (e_6 \lrcorner\, \varphi) \wedge \varphi = 48(ade + bcf)\, \eta_{1234567}$$

$$(e_7 \lrcorner\, \varphi) \wedge (e_7 \lrcorner\, \varphi) \wedge \varphi = 48(ade + bcf)\, \eta_{1234567}$$

$$(e_1 \lrcorner\, \varphi) \wedge (e_2 \lrcorner\, \varphi) \wedge \varphi = 24dfh\ \eta_{1234567}$$

$$(e_1 \lrcorner\, \varphi) \wedge (e_3 \lrcorner\, \varphi) \wedge \varphi = 24beh\ \eta_{1234567}$$

$$(e_2 \lrcorner\, \varphi) \wedge (e_3 \lrcorner\, \varphi) \wedge \varphi = 24ach\ \eta_{1234567}$$

ve diğer durumlarda

$$(e_i \lrcorner\, \varphi) \wedge (e_j \lrcorner\, \varphi) \wedge \varphi = 0$$

olduğundan, (6.2) eşitliği göz önüne alınarak, φ 3-formunun M üzerinde bir G_2 yapı vermesi için gerek ve yeter koşul, $a, b, c, d, e, f, h \in \mathbb{R}$ katsayıları arasında aşağıdaki ilişkilerin olmasıdır:

$$\begin{aligned}
h(b^2+d^2) &= \frac{1}{4}, \\
h(a^2+f^2) &= \frac{1}{4}, \\
h(c^2+e^2) &= \frac{1}{4}, \\
dfh &= 0, \\
beh &= 0, \\
ach &= 0, \\
ade+bcf &= \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

Bu denklem sisteminin çözümleri ve çözümlere karşılık inşa edilen yeni G_2 yapılar şu şekildedir:

1. $a = d = e = 0,\ h = 1$

   (a) $b = 1/2,\ c = 1/2,\ f = 1/2,$
   $\varphi_1 = \frac{1}{2}\ \eta_1 \wedge d\eta_2 + \frac{1}{2}\ d\eta_1 \wedge \eta_3 + \frac{1}{2}\ \eta_2 \wedge d\eta_3 +\ \eta_{123}$

   (b) $b = -1/2,\ c = -1/2,\ f = 1/2,$
   $\varphi_2 = -\frac{1}{2}\ \eta_1 \wedge d\eta_2 - \frac{1}{2}\ d\eta_1 \wedge \eta_3 + \frac{1}{2}\ \eta_2 \wedge d\eta_3 +\ \eta_{123}$

   (c) $b = -1/2,\ c = 1/2,\ f = -1/2,$
   $\varphi_3 = -\frac{1}{2}\ \eta_1 \wedge d\eta_2 + \frac{1}{2}\ d\eta_1 \wedge \eta_3 - \frac{1}{2}\ \eta_2 \wedge d\eta_3 +\ \eta_{123}$

   (d) $b = 1/2,\ c = -1/2,\ f = -1/2,$
   $\varphi_4 = \frac{1}{2}\ \eta_1 \wedge d\eta_2 - \frac{1}{2}\ d\eta_1 \wedge \eta_3 - \frac{1}{2}\ \eta_2 \wedge d\eta_3 +\ \eta_{123}$

2. $b = c = f = 0,\ h = 1$

   (a) $a = 1/2,\ d = 1/2,\ e = 1/2,$

   $\varphi_5 = \frac{1}{2}\ d\eta_1 \wedge \eta_2 + \frac{1}{2}\ \eta_1 \wedge d\eta_3 + \frac{1}{2}\ d\eta_2 \wedge \eta_3 +\ \eta_{123}$

   (b) $a = -1/2,\ d = -1/2,\ e = 1/2,$

   $\varphi_6 = -\frac{1}{2}\ d\eta_1 \wedge \eta_2 - \frac{1}{2}\ \eta_1 \wedge d\eta_3 + \frac{1}{2}\ d\eta_2 \wedge \eta_3 +\ \eta_{123}$

   (c) $a = -1/2,\ d = 1/2,\ e = -1/2,$

   $\varphi_7 = -\frac{1}{2}\ d\eta_1 \wedge \eta_2 + \frac{1}{2}\ \eta_1 \wedge d\eta_3 - \frac{1}{2}\ d\eta_2 \wedge \eta_3 +\ \eta_{123}$

   (d) $a = 1/2,\ d = -1/2,\ e = -1/2,$

   $\varphi_8 = \frac{1}{2}\ d\eta_1 \wedge \eta_2 - \frac{1}{2}\ \eta_1 \wedge d\eta_3 - \frac{1}{2}\ d\eta_2 \wedge \eta_3 +\ \eta_{123}.$

6.3 Yeni G_2 Yapıların Sınıflandırılması

Bu bölümde Bölüm (6.2)'de elde edilen, $i = 1, \cdots, 8$ olmak üzere, yeni φ_i 3-formlarının ait oldukları sınıflar belirlenecektir. Bundan sonraki hesaplarda [27]'de verilen ortonormal 1-formlarının $\{\eta_1, \cdots, \eta_7\}$ kümesi kullanılacaktır.

Teorem 6.3.1. *Bölüm (6.2)'de elde edilen $i = 1, \cdots, 8$ için, φ_i 3-formları, G_2 yapıların en geniş sınıfı olan $\mathcal{W}$ sınıfındadır.*

Kanıt. φ_1 3-formunun sınıflandırılması:

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\ \eta_1 \wedge d\eta_2 + \frac{1}{2}\ d\eta_1 \wedge \eta_3 + \frac{1}{2}\ \eta_2 \wedge d\eta_3 +\ \eta_{123}$$

için

$$d\varphi_1 = \frac{1}{2}d\eta_1 \wedge d\eta_2 + \frac{1}{2}d\eta_1 \wedge d\eta_3 + \frac{1}{2}d\eta_2 \wedge d\eta_3 + d\eta_1 \wedge \eta_{23} - \eta_{13} \wedge d\eta_2 + \eta_{12} \wedge d\eta_3$$

olduğundan, lokal koordinatlarda

$$\begin{aligned} d\varphi_1 \quad = \quad & 2\,\{\eta_{1245} + \eta_{1246} - \eta_{1247} - \eta_{1256} - \eta_{1257} + \eta_{1267} \\ & -\eta_{1345} + \eta_{1346} - \eta_{1347} - \eta_{1356} - \eta_{1357} - \eta_{1367} \\ & -\eta_{2345} + \eta_{2346} + \eta_{2347} + \eta_{2356} - \eta_{2357} - \eta_{2367}\} \end{aligned}$$

bulunur. Seçilen ortonormal çatıda $d\varphi_1 \neq 0$ olduğundan, manifold üzerinde de $d\varphi_1 \neq 0$ 'dır.

φ_1 3-formunun lokal ifadesi

$$\varphi_1 = \eta_{123} - \eta_{146} + \eta_{157} - \eta_{247} - \eta_{256} - \eta_{345} - \eta_{367}.$$

φ_1 3-formunun Hodge-starı

$$*\varphi_1 = -\eta_{1245} - \eta_{1267} + \eta_{1347} + \eta_{1356} - \eta_{2346} + \eta_{2357} + \eta_{4567}$$

olarak bulunur. Global olarak ise

$$*\varphi_1 = \frac{1}{2}\eta_{12} \wedge d\eta_1 - \frac{1}{2}\eta_{13} \wedge d\eta_3 + \frac{1}{2}\eta_{23} \wedge d\eta_2 + *\eta_{123}.$$

$d\varphi_1$ ve $*\varphi_1$ karşılaştırılırsa, $d\varphi_1 = k * \varphi_1$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir k sabitinin olamayacağı görülür.

M üzerinde $d\varphi_1 = \alpha \wedge \varphi_1$ olacak şekilde bir α 1-formu var olsun. Bu 1-form lokal olarak $\alpha = \sum \alpha_i \eta_i$ olarak yazılabilir. $d\varphi_1$ ve $\alpha \wedge \varphi_1$ formlarının η_{1245} teriminin katsayıları karşılaştırıldığında $0 = 2$ çelişkisine varılır. O halde böyle bir α 1-formu yoktur.

Buna ek olarak, lokal koordinatlarda $d\varphi_1 \wedge \varphi_1 = -12\eta_{1234567} \neq 0$ 'dır.

$*\varphi_1$ 4-formunun dış türevi

$$\begin{aligned} d * \varphi_1 &= \frac{1}{2}\{\eta_2 \wedge d\eta_1 \wedge d\eta_1 - \eta_1 \wedge d\eta_1 \wedge d\eta_2 - \eta_3 \wedge d\eta_1 \wedge d\eta_3 \\ &\quad +\eta_1 \wedge d\eta_3 \wedge d\eta_3 + \eta_3 \wedge d\eta_2 \wedge d\eta_2 - \eta_2 \wedge d\eta_2 \wedge d\eta_3\} \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. $d * \varphi_1$ 5-formunun lokal ifadesi

$$\begin{aligned} d * \varphi_1 &= 2\{-\eta_{12345} - \eta_{12346} - \eta_{12347} - \eta_{12356} + \eta_{12357} - \eta_{12367}\} \\ &\quad +4\{\eta_{14567} + \eta_{24567} + \eta_{34567}\} \end{aligned}$$

olduğundan $d * \varphi_1 \neq 0$ 'dır.

M manifoldu üzerinde $d * \varphi_1 = \beta \wedge *\varphi_1$ olacak şekilde bir β 1-formu var olsun. Bu durumda β 1-formu, $\beta_i \in C^\infty(M)$ olmak üzere, lokal olarak $\beta = \sum \beta_i \eta_i$ şeklinde yazılabilir. $d * \varphi_1$ ve $\beta \wedge *\varphi_1$ 5-formlarının sırasıyla η_{12357} ve η_{14567} terimlerinin katsayıları karşılaştırılırsa, $\beta_1 = 2$ ve $\beta_1 = 4$ elde edilir, bu da bir çelişkidir. O halde $d * \varphi_1 = \beta \wedge *\varphi_1$ olacak şekilde bir β 1-formu yoktur.

M manifoldu üzerinde $d\varphi_1 = \alpha \wedge \varphi_1 + f * \varphi_1$ olacak şekilde α 1-formu ve f fonksiyonu var olsun. Bu durumda $\alpha_i \in C^\infty(M)$ olmak üzere, lokal olarak $\alpha = \sum \alpha_i \eta_i$ yazıldığında, $d\varphi_1$ ve $\alpha \wedge \varphi_1 + f * \varphi_1$ 4-formlarının sırasıyla η_{1245} ve η_{4567} terimlerinin katsayıları karşılaştırılırsa,

$$f = -2 \text{ ve } f = 0$$

elde edilir, bu da bir çelişkidir. O halde manifold üzerinde $d\varphi_1 = \alpha \wedge \varphi_1 + f * \varphi_1$ olacak şekilde α 1-formu ve f fonksiyonu yoktur.

Ayrıca

$$*d\varphi_1 \wedge \varphi_1 = 8\{-\eta_{124567} + \eta_{134567} - \eta_{234567}\}$$

olduğundan, $*d\varphi_1 \wedge \varphi_1 \neq 0$ 'dır. Sonuç olarak φ_1 3-formu G_2 yapıların tanımlama bağıntılarından hiçbirini sağlamadığından, en geniş sınıf olan $\mathcal{W}$ sınıfındadır.

φ_2 3-formunun sınıflandırılması:

$$\varphi_2 = -\frac{1}{2}\,\eta_1 \wedge d\eta_2 - \frac{1}{2}\,d\eta_1 \wedge \eta_3 + \frac{1}{2}\,\eta_2 \wedge d\eta_3 + \eta_{123}$$

için

$$d\varphi_2 = -\frac{1}{2}d\eta_1 \wedge d\eta_2 - \frac{1}{2}d\eta_1 \wedge d\eta_3 + \frac{1}{2}d\eta_2 \wedge d\eta_3 + d\eta_1 \wedge \eta_{23} - \eta_{13} \wedge d\eta_2 + \eta_{12} \wedge d\eta_3$$

olduğundan, lokal koordinatlarda

$$\begin{aligned} d\varphi_2 \;=\;& 2\,\{-\eta_{1245} + \eta_{1246} - \eta_{1247} - \eta_{1256} - \eta_{1257} - \eta_{1267} \\ & +\eta_{1345} + \eta_{1346} - \eta_{1347} - \eta_{1356} - \eta_{1357} + \eta_{1367} \\ & -\eta_{2345} - \eta_{2346} - \eta_{2347} - \eta_{2356} + \eta_{2357} - \eta_{2367}\} \end{aligned}$$

bulunur. Seçilen ortonormal çatıda $d\varphi_2 \neq 0$ olduğundan, manifold üzerinde de $d\varphi_2 \neq 0$ 'dır.

φ_2 3-formunun lokal ifadesi

$$\varphi_2 = \eta_{123} + \eta_{146} - \eta_{157} - \eta_{247} - \eta_{256} + \eta_{345} + \eta_{367}.$$

φ_2 3-formunun Hodge-starı

$$*\varphi_2 = \eta_{1245} + \eta_{1267} + \eta_{1347} + \eta_{1356} + \eta_{2346} - \eta_{2357} + \eta_{4567}$$

olarak bulunur. Global olarak ise

$$*\varphi_2 = -\frac{1}{2}\eta_{12} \wedge d\eta_1 - \frac{1}{2}\eta_{13} \wedge d\eta_3 - \frac{1}{2}\eta_{23} \wedge d\eta_2 + *\eta_{123}.$$

$d\varphi_2$ ve $*\varphi_2$ karşılaştırılırsa, $d\varphi_2 = k * \varphi_2$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir k sabitinin olamayacağı görülür.

M üzerinde $d\varphi_2 = \alpha \wedge \varphi_2$ olacak şekilde bir α 1-formu var olsun. Bu 1-form lokal olarak $\alpha = \sum \alpha_i \eta_i$ olarak yazılabilir. Lokal koordinatlarda $d\varphi_2$ ve $\alpha \wedge \varphi_2$ formlarının η_{2346} teriminin katsayıları karşılaştırıldığında $-2 = 0$ çelişkisine varılır. O halde böyle bir α 1-formu yoktur.

Buna ek olarak, lokal koordinatlarda $d\varphi_2 \wedge \varphi_2 = -12\eta_{1234567} \neq 0$ 'dır.

$*\varphi_2$ 4-formunun dış türevi

$$\begin{aligned} d * \varphi_2 &= \frac{1}{2}\{-\eta_2 \wedge d\eta_1 \wedge d\eta_1 + \eta_1 \wedge d\eta_1 \wedge d\eta_2 - \eta_3 \wedge d\eta_1 \wedge d\eta_3 \\ &\quad + \eta_1 \wedge d\eta_3 \wedge d\eta_3 - \eta_3 \wedge d\eta_2 \wedge d\eta_2 + \eta_2 \wedge d\eta_2 \wedge d\eta_3\} \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. $d * \varphi_2$ 5-formunun lokal ifadesi

$$\begin{aligned} d * \varphi_2 &= 2\{-\eta_{12345} + \eta_{12346} + \eta_{12347} + \eta_{12356} - \eta_{12357} - \eta_{12367}\} \\ &\quad + 4\{\eta_{14567} - \eta_{24567} - \eta_{34567}\} \end{aligned}$$

olduğundan $d * \varphi_2 \neq 0$ 'dır.

M manifoldu üzerinde $d * \varphi_2 = \beta \wedge *\varphi_2$ olacak şekilde bir β 1-formu var olsun. Bu durumda β 1-formu, $\beta_i \in C^\infty(M)$ olmak üzere, lokal olarak $\beta = \sum \beta_i \eta_i$ şeklinde yazılabilir. $d * \varphi_2$ ve $\beta \wedge *\varphi_2$ 5-formlarının sırasıyla η_{12346} ve η_{14567} terimlerinin katsayıları karşılaştırılırsa, $\beta_1 = 2$ ve $\beta_1 = 4$ elde edilir, bu da bir çelişkidir. O halde $d * \varphi_2 = \beta \wedge *\varphi_2$ olacak şekilde bir β 1-formu yoktur.

M manifoldu üzerinde $d\varphi_2 = \alpha \wedge \varphi_2 + f * \varphi_2$ olacak şekilde α 1-formu ve f fonksiyonu var olsun. Bu durumda $\alpha_i \in C^\infty(M)$ olmak üzere, lokal olarak $\alpha = \sum \alpha_i \eta_i$ yazıldığında, $d\varphi_2$ ve $\alpha \wedge \varphi_2 + f * \varphi_2$ 4-formlarının sırasıyla η_{1245} ve η_{4567} terimlerinin katsayıları karşılaştırılırsa,

$$f = -2 \text{ ve } f = 0$$

elde edilir, bu da bir çelişkidir. O halde manifold üzerinde $d\varphi_2 = \alpha \wedge \varphi_2 + f * \varphi_2$ olacak şekilde α 1-formu ve f fonksiyonu yoktur.

Ayrıca

$$*d\varphi_2 \wedge \varphi_2 = 8\{\eta_{124567} - \eta_{134567} - \eta_{234567}\}$$

olduğundan, $*d\varphi_2 \wedge \varphi_2 \neq 0$ 'dır. Sonuç olarak φ_2 3-formu G_2 yapıların tanımlama bağıntılarından hiçbirini sağlamadığından, en geniş sınıf olan $\mathcal{W}$ sınıfındadır.

φ_3 3-formunun sınıflandırılması:

$$\varphi_3 = -\frac{1}{2}\,\eta_1 \wedge d\eta_2 + \frac{1}{2}\,d\eta_1 \wedge \eta_3 - \frac{1}{2}\,\eta_2 \wedge d\eta_3 + \ \eta_{123}$$

için

$$d\varphi_3 = -\frac{1}{2} d\eta_1 \wedge d\eta_2 + \frac{1}{2} d\eta_1 \wedge d\eta_3 - \frac{1}{2} d\eta_2 \wedge d\eta_3 + d\eta_1 \wedge \eta_{23} - \eta_{13} \wedge d\eta_2 + \eta_{12} \wedge d\eta_3$$

olduğundan, lokal koordinatlarda

$$\begin{aligned} d\varphi_3 \quad = \quad & 2\,\{\eta_{1245} - \eta_{1246} - \eta_{1247} - \eta_{1256} + \eta_{1257} + \eta_{1267} \\ & + \eta_{1345} + \eta_{1346} + \eta_{1347} + \eta_{1356} - \eta_{1357} + \eta_{1367} \\ & - \eta_{2345} - \eta_{2346} + \eta_{2347} + \eta_{2356} + \eta_{2357} - \eta_{2367}\} \end{aligned}$$

bulunur. Seçilen ortonormal çatıda $d\varphi_3 \neq 0$ olduğundan, manifold üzerinde de $d\varphi_3 \neq 0$ 'dır.

φ_3 3-formunun lokal ifadesi

$$\varphi_3 = \eta_{123} + \eta_{146} - \eta_{157} + \eta_{247} + \eta_{256} - \eta_{345} - \eta_{367}.$$

φ_3 3-formunun Hodge-starı

$$*\varphi_3 = -\eta_{1245} - \eta_{1267} - \eta_{1347} - \eta_{1356} + \eta_{2346} - \eta_{2357} + \eta_{4567}$$

olarak bulunur. Global olarak ise

$$*\varphi_3 = \frac{1}{2}\eta_{12} \wedge d\eta_1 + \frac{1}{2}\eta_{13} \wedge d\eta_3 - \frac{1}{2}\eta_{23} \wedge d\eta_2 + *\eta_{123}.$$

$d\varphi_3$ ve $*\varphi_3$ karşılaştırılırsa, $d\varphi_3 = k * \varphi_3$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir k sabitinin olamayacağı görülür.

M üzerinde $d\varphi_3 = \alpha \wedge \varphi_3$ olacak şekilde bir α 1-formu var olsun. Bu 1-form lokal olarak $\alpha = \sum \alpha_i \eta_i$ olarak yazılabilir. Lokal koordinatlarda $d\varphi_3$ ve $\alpha \wedge \varphi_3$ formlarının η_{2346} teriminin katsayıları karşılaştırıldığında $-2 = 0$ çelişkisine varılır. O halde böyle bir α 1-formu yoktur.

Buna ek olarak, lokal koordinatlarda $d\varphi_3 \wedge \varphi_3 = -12\eta_{1234567} \neq 0$ 'dır.

$*\varphi_3$ 4-formunun dış türevi

$$\begin{aligned} d * \varphi_3 &= \frac{1}{2}\{\eta_2 \wedge d\eta_1 \wedge d\eta_1 - \eta_1 \wedge d\eta_1 \wedge d\eta_2 + \eta_3 \wedge d\eta_1 \wedge d\eta_3 \\ &\quad -\eta_1 \wedge d\eta_3 \wedge d\eta_3 - \eta_3 \wedge d\eta_2 \wedge d\eta_2 + \eta_2 \wedge d\eta_2 \wedge d\eta_3\} \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. $d * \varphi_3$ lokal ifadesi

$$\begin{aligned} d * \varphi_3 &= 2\{\eta_{12345} - \eta_{12346} + \eta_{12347} + \eta_{12356} + \eta_{12357} + \eta_{12367}\} \\ &\quad +4\{-\eta_{14567} + \eta_{24567} - \eta_{34567}\} \end{aligned}$$

olduğundan $d * \varphi_3 \neq 0$ 'dır.

M manifoldu üzerinde $d * \varphi_3 = \beta \wedge *\varphi_3$ olacak şekilde bir β 1-formu var olsun. Bu durumda β 1-formu, $\beta_i \in C^\infty(M)$ olmak üzere, lokal olarak $\beta = \sum \beta_i \eta_i$ şeklinde yazılabilir. $d * \varphi_3$ ve $\beta \wedge *\varphi_3$ 5-formlarının sırasıyla η_{12346} ve η_{14567} terimlerinin katsayıları karşılaştırılırsa, $\beta_1 = -2$ ve $\beta_1 = -4$ elde edilir, bu da bir çelişkidir. O halde $d * \varphi_3 = \beta \wedge *\varphi_3$ olacak şekilde bir β 1-formu yoktur.

M manifoldu üzerinde $d\varphi_3 = \alpha \wedge \varphi_3 + f * \varphi_3$ olacak şekilde α 1-formu ve f fonksiyonu var olsun. Bu durumda $\alpha_i \in C^\infty(M)$ olmak üzere, lokal olarak $\alpha = \sum \alpha_i \eta_i$ yazıldığında, $d\varphi_3$ ve $\alpha \wedge \varphi_3 + f * \varphi_3$ 4-formlarının sırasıyla η_{1267} ve η_{4567} terimlerinin katsayıları karşılaştırılırsa,

$$f = -2 \text{ ve } f = 0$$

elde edilir, bu da bir çelişkidir. O halde manifold üzerinde $d\varphi_3 = \alpha \wedge \varphi_3 + f * \varphi_3$ olacak şekilde α 1-formu ve f fonksiyonu yoktur.

Ayrıca

$$*d\varphi_3 \wedge \varphi_3 = 8\{\eta_{124567} + \eta_{134567} + \eta_{234567}\}$$

olduğundan, $*d\varphi_3 \wedge \varphi_3 \neq 0$ 'dır. Sonuç olarak φ_3 3-formu G_2 yapıların tanımlama bağıntılarından hiçbirini sağlamadığından, en geniş sınıf olan $\mathcal{W}$ sınıfındadır.

φ_4 3-formunun sınıflandırılması:

$$\varphi_4 = \frac{1}{2}\,\eta_1 \wedge d\eta_2 - \frac{1}{2}\,d\eta_1 \wedge \eta_3 - \frac{1}{2}\,\eta_2 \wedge d\eta_3 + \,\eta_{123}$$

için

$$d\varphi_4 = \frac{1}{2}d\eta_1 \wedge d\eta_2 - \frac{1}{2}d\eta_1 \wedge d\eta_3 - \frac{1}{2}d\eta_2 \wedge d\eta_3 + d\eta_1 \wedge \eta_{23} - \eta_{13} \wedge d\eta_2 + \eta_{12} \wedge d\eta_3$$

olduğundan, lokal koordinatlarda

$$\begin{aligned} d\varphi_4 \;&=\; 2\,\{-\eta_{1245} - \eta_{1246} - \eta_{1247} - \eta_{1256} + \eta_{1257} - \eta_{1267} \\ &\quad -\eta_{1345} + \eta_{1346} + \eta_{1347} + \eta_{1356} - \eta_{1357} - \eta_{1367} \\ &\quad -\eta_{2345} + \eta_{2346} - \eta_{2347} - \eta_{2356} - \eta_{2357} - \eta_{2367}\} \end{aligned}$$

bulunur. Seçilen ortonormal çatıda $d\varphi_4 \neq 0$ olduğundan, manifold üzerinde de $d\varphi_4 \neq 0$ 'dır.

φ_4 3-formunun lokal ifadesi

$$\varphi_4 = \eta_{123} - \eta_{146} + \eta_{157} + \eta_{247} + \eta_{256} + \eta_{345} + \eta_{367}.$$

φ_4 3-formunun Hodge-starı

$$*\varphi_4 = \eta_{1245} + \eta_{1267} - \eta_{1347} - \eta_{1356} - \eta_{2346} + \eta_{2357} + \eta_{4567}$$

olarak bulunur. Global olarak ise

$$*\varphi_4 = -\frac{1}{2}\eta_{12} \wedge d\eta_1 + \frac{1}{2}\eta_{13} \wedge d\eta_3 + \frac{1}{2}\eta_{23} \wedge d\eta_2 + *\eta_{123}.$$

$d\varphi_4$ ve $*\varphi_4$ karşılaştırılırsa, $d\varphi_4 = k * \varphi_4$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir k sabitinin olamayacağı görülür.

M üzerinde $d\varphi_4 = \alpha \wedge \varphi_4$ olacak şekilde bir α 1-formu var olsun. Bu 1-form lokal olarak $\alpha = \sum \alpha_i \eta_i$ olarak yazılabilir. $d\varphi_4$ ve $\alpha \wedge \varphi_4$ formlarının η_{2346} teriminin katsayıları karşılaştırıldığında $2 = 0$ çelişkisine varılır. O halde böyle bir α 1-formu yoktur.

Buna ek olarak, lokal koordinatlarda $d\varphi_4 \wedge \varphi_4 = -12\eta_{1234567} \neq 0$ 'dır.

$*\varphi_4$ 4-formunun dış türevi

$$\begin{aligned} d * \varphi_4 &= \frac{1}{2}\{-\eta_2 \wedge d\eta_1 \wedge d\eta_1 + \eta_1 \wedge d\eta_1 \wedge d\eta_2 + \eta_3 \wedge d\eta_1 \wedge d\eta_3 \\ &\quad -\eta_1 \wedge d\eta_3 \wedge d\eta_3 + \eta_3 \wedge d\eta_2 \wedge d\eta_2 - \eta_2 \wedge d\eta_2 \wedge d\eta_3\} \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. $d * \varphi_4$ 5-formunun lokal ifadesi

$$\begin{aligned} d * \varphi_4 &= 2\{\eta_{12345} + \eta_{12346} - \eta_{12347} - \eta_{12356} - \eta_{12357} + \eta_{12367}\} \\ &\quad +4\{-\eta_{14567} - \eta_{24567} + \eta_{34567}\} \end{aligned}$$

olduğundan $d * \varphi_4 \neq 0$ 'dır.

M manifoldu üzerinde $d * \varphi_4 = \beta \wedge *\varphi_4$ olacak şekilde bir β 1-formu var olsun. Bu durumda β 1-formu, $\beta_i \in C^\infty(M)$ olmak üzere, lokal olarak $\beta = \sum \beta_i \eta_i$ şeklinde yazılabilir. $d * \varphi_4$ ve $\beta \wedge *\varphi_4$ 5-formlarının sırasıyla η_{12357} ve η_{14567} terimlerinin katsayıları karşılaştırılırsa, $\beta_1 = 2$ ve $\beta_1 = -4$ elde edilir, bu da bir çelişkidir. O halde $d * \varphi_4 = \beta \wedge *\varphi_4$ olacak şekilde bir β 1-formu yoktur.

M manifoldu üzerinde $d\varphi_4 = \alpha \wedge \varphi_4 + f * \varphi_4$ olacak şekilde α 1-formu ve f fonksiyonu var olsun. Bu durumda $\alpha_i \in C^\infty(M)$ olmak üzere, lokal olarak $\alpha = \sum \alpha_i \eta_i$ yazıldığında, $d\varphi_4$ ve $\alpha \wedge \varphi_4 + f * \varphi_4$ 4-formlarının sırasıyla η_{2346} ve η_{4567} terimlerinin katsayıları karşılaştırılırsa,

$$f = -2 \text{ ve } f = 0$$

elde edilir, bu da bir çelişkidir. O halde manifold üzerinde $d\varphi_4 = \alpha \wedge \varphi_4 + f * \varphi_4$ olacak şekilde α 1-formu ve f fonksiyonu yoktur.

Ayrıca

$$*d\varphi_4 \wedge \varphi_4 = 8\{-\eta_{124567} - \eta_{134567} + \eta_{234567}\}$$

olduğundan, $*d\varphi_4 \wedge \varphi_4 \neq 0$ 'dır. Sonuç olarak φ_4 3-formu G_2 yapıların tanımlama bağıntılarından hiçbirini sağlamadığından, en geniş sınıf olan $\mathcal{W}$ sınıfındadır.

φ_5 3-formunun sınıflandırılması:

$$\varphi_5 = \frac{1}{2}\,\eta_2 \wedge d\eta_1 + \frac{1}{2}\eta_1 \wedge d\eta_3 + \frac{1}{2}\,\eta_3 \wedge d\eta_2 + \eta_{123}$$

için

$$d\varphi_5 = \frac{1}{2}d\eta_1 \wedge d\eta_2 + \frac{1}{2}d\eta_1 \wedge d\eta_3 + \frac{1}{2}d\eta_2 \wedge d\eta_3 + d\eta_1 \wedge \eta_{23} - \eta_{13} \wedge d\eta_2 + \eta_{12} \wedge d\eta_3$$

olduğundan, lokal koordinatlarda

$$\begin{aligned} d\varphi_5 &= 2\{\eta_{1245} + \eta_{1246} - \eta_{1247} - \eta_{1256} - \eta_{1257} + \eta_{1267} \\ &\quad -\eta_{1345} + \eta_{1346} - \eta_{1347} - \eta_{1356} - \eta_{1357} - \eta_{1367} \\ &\quad -\eta_{2345} + \eta_{2346} + \eta_{2347} + \eta_{2356} - \eta_{2357} - \eta_{2367}\} \end{aligned}$$

bulunur. Seçilen ortonormal çatıda $d\varphi_5 \neq 0$ olduğundan, manifold üzerinde de $d\varphi_5 \neq 0$ 'dır.

φ_5 3-formunun lokal ifadesi

$$\varphi_5 = \eta_{123} - \eta_{147} - \eta_{156} - \eta_{245} - \eta_{267} - \eta_{346} + \eta_{357}.$$

φ_5 3-formunun Hodge-starı

$$*\varphi_5 = -\eta_{1246} + \eta_{1257} + \eta_{1345} + \eta_{1367} - \eta_{2347} - \eta_{2356} + \eta_{4567}$$

olarak bulunur. Global olarak ise

$$*\varphi_5 = \frac{1}{2}\eta_{12} \wedge d\eta_2 - \frac{1}{2}\eta_{13} \wedge d\eta_1 + \frac{1}{2}\eta_{23} \wedge d\eta_3 + *\eta_{123}.$$

$d\varphi_5$ ve $*\varphi_5$ karşılaştırılırsa, $d\varphi_5 = k * \varphi_5$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir k sabitinin olamayacağı görülür.

M üzerinde $d\varphi_5 = \alpha \wedge \varphi_5$ olacak şekilde bir α 1-formu var olsun. Bu 1-form lokal olarak $\alpha = \sum \alpha_i \eta_i$ olarak yazılabilir. Lokal koordinatlarda $d\varphi_5$ ve $\alpha \wedge \varphi_5$ formlarının η_{1345} teriminin katsayıları karşılaştırıldığında $-2 = 0$ çelişkisine varılır. O halde böyle bir α 1-formu yoktur.

Buna ek olarak, lokal koordinatlarda $d\varphi_5 \wedge \varphi_5 = -12\eta_{1234567} \neq 0$ 'dır.

$*\varphi_5$ 4-formunun dış türevi

$$\begin{aligned} d * \varphi_5 &= \frac{1}{2}\{-\eta_3 \wedge d\eta_1 \wedge d\eta_1 + \eta_1 \wedge d\eta_1 \wedge d\eta_3 + \eta_3 \wedge d\eta_2 \wedge d\eta_3 \\ &\quad -\eta_2 \wedge d\eta_3 \wedge d\eta_3 + \eta_2 \wedge d\eta_1 \wedge d\eta_2 - \eta_1 \wedge d\eta_2 \wedge d\eta_2\} \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. $d * \varphi_5$ 5-formunun lokal ifadesi

$$\begin{aligned} d * \varphi_5 &= 2\{\eta_{12345} + \eta_{12346} + \eta_{12347} + \eta_{12356} - \eta_{12357} + \eta_{12367}\} \\ &\quad +4\{-\eta_{14567} - \eta_{24567} - \eta_{34567}\} \end{aligned}$$

olduğundan $d * \varphi_5 \neq 0$ 'dır.

M manifoldu üzerinde $d * \varphi_5 = \beta \wedge *\varphi_5$ olacak şekilde bir β 1-formu var olsun. Bu durumda β 1-formu, $\beta_i \in C^\infty(M)$ olmak üzere, lokal olarak $\beta = \sum \beta_i \eta_i$ şeklinde yazılabilir. $d * \varphi_5$ ve $\beta \wedge *\varphi_5$ 5-formlarının sırasıyla η_{12356} ve η_{14567} terimlerinin katsayıları karşılaştırılırsa, $\beta_1 = -2$ ve $\beta_1 = -4$ elde edilir, bu da bir çelişkidir. O halde $d * \varphi_5 = \beta \wedge *\varphi_5$ olacak şekilde bir β 1-formu yoktur.

M manifoldu üzerinde $d\varphi_5 = \alpha \wedge \varphi_5 + f * \varphi_5$ olacak şekilde α 1-formu ve f fonksiyonu var olsun. Bu durumda $\alpha_i \in C^\infty(M)$ olmak üzere, lokal olarak $\alpha = \sum \alpha_i \eta_i$ yazıldığında, $d\varphi_5$ ve $\alpha \wedge \varphi_5 + f * \varphi_5$ 4-formlarının sırasıyla η_{1345} ve η_{4567} terimlerinin katsayıları karşılaştırılırsa,

$$f = -2 \text{ ve } f = 0$$

elde edilir, bu da bir çelişkidir. O halde manifold üzerinde $d\varphi_5 = \alpha \wedge \varphi_5 + f * \varphi_5$ olacak şekilde α 1-formu ve f fonksiyonu yoktur.

Ayrıca

$$*d\varphi_5 \wedge \varphi_5 = 8\{\eta_{124567} - \eta_{134567} + \eta_{234567}\}$$

olduğundan, $*d\varphi_5 \wedge \varphi_5 \neq 0$ 'dır. Sonuç olarak φ_5 3-formu G_2 yapıların tanımlama bağıntılarından hiçbirini sağlamadığından, en geniş sınıf olan $\mathcal{W}$ sınıfındadır.

<u>φ_6 3-formunun sınıflandırılması:</u>

$$\varphi_6 = -\frac{1}{2}\,\eta_2 \wedge d\eta_1 - \frac{1}{2}\eta_1 \wedge d\eta_3 + \frac{1}{2}\,\eta_3 \wedge d\eta_2 + \eta_{123}$$

için

$$d\varphi_6 = -\frac{1}{2}d\eta_1 \wedge d\eta_2 - \frac{1}{2}d\eta_1 \wedge d\eta_3 + \frac{1}{2}d\eta_2 \wedge d\eta_3 + d\eta_1 \wedge \eta_{23} - \eta_{13} \wedge d\eta_2 + \eta_{12} \wedge d\eta_3$$

olduğundan, lokal koordinatlarda

$$
\begin{aligned}
d\varphi_6 &= 2\{-\eta_{1245}+\eta_{1246}-\eta_{1247}-\eta_{1256}-\eta_{1257}-\eta_{1267}\\
&\quad +\eta_{1345}+\eta_{1346}-\eta_{1347}-\eta_{1356}-\eta_{1357}+\eta_{1367}\\
&\quad -\eta_{2345}-\eta_{2346}-\eta_{2347}-\eta_{2356}+\eta_{2357}-\eta_{2367}\}
\end{aligned}
$$

bulunur. Seçilen ortonormal çatıda $d\varphi_6 \neq 0$ olduğundan, manifold üzerinde de $d\varphi_6 \neq 0$ 'dır.

φ_6 3-formunun lokal ifadesi

$$\varphi_6 = \eta_{123}+\eta_{147}+\eta_{156}+\eta_{245}+\eta_{267}-\eta_{346}+\eta_{357}.$$

φ_6 3-formunun Hodge-starı

$$*\varphi_6 = -\eta_{1246}+\eta_{1257}-\eta_{1345}-\eta_{1367}+\eta_{2347}+\eta_{2356}+\eta_{4567}$$

olarak bulunur. Global olarak ise

$$*\varphi_6 = \frac{1}{2}\eta_{12}\wedge d\eta_2+\frac{1}{2}\eta_{13}\wedge d\eta_1-\frac{1}{2}\eta_{23}\wedge d\eta_3+*\eta_{123}.$$

$d\varphi_6$ ve $*\varphi_6$ karşılaştırılırsa, $d\varphi_6 = k*\varphi_6$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir k sabitinin olamayacağı görülür.

M üzerinde $d\varphi_6 = \alpha\wedge\varphi_6$ olacak şekilde bir α 1-formu var olsun. Bu 1-form lokal olarak $\alpha = \sum \alpha_i\eta_i$ olarak yazılabilir. $d\varphi_6$ ve $\alpha\wedge\varphi_6$ formlarının η_{1345} teriminin katsayıları karşılaştırıldığında $2 = 0$ çelişkisine varılır. O halde böyle bir α 1-formu yoktur.

Buna ek olarak, lokal koordinatlarda $d\varphi_6\wedge\varphi_6 = -12\eta_{1234567} \neq 0$ 'dır.

$*\varphi_6$ 4-formunun dış türevi

$$
\begin{aligned}
d*\varphi_6 &= \frac{1}{2}\{\eta_3\wedge d\eta_1\wedge d\eta_1-\eta_1\wedge d\eta_1\wedge d\eta_3-\eta_3\wedge d\eta_2\wedge d\eta_3\\
&\quad +\eta_2\wedge d\eta_3\wedge d\eta_3+\eta_2\wedge d\eta_1\wedge d\eta_2-\eta_1\wedge d\eta_2\wedge d\eta_2\}
\end{aligned}
$$

olarak hesaplanır. $d*\varphi_6$ lokal ifadesi

$$
\begin{aligned}
d*\varphi_6 &= 2\{\eta_{12345}-\eta_{12346}-\eta_{12347}-\eta_{12356}+\eta_{12357}+\eta_{12367}\}\\
&\quad +4\{-\eta_{14567}+\eta_{24567}+\eta_{34567}\}
\end{aligned}
$$

olduğundan $d*\varphi_6 \neq 0$ 'dır.

M manifoldu üzerinde $d*\varphi_6 = \beta \wedge *\varphi_6$ olacak şekilde bir β 1-formu var olsun. Bu durumda β 1-formu, $\beta_i \in C^\infty(M)$ olmak üzere, lokal olarak $\beta = \sum \beta_i \eta_i$ şeklinde yazılabilir. $d*\varphi_6$ ve $\beta \wedge *\varphi_6$ 5-formlarının sırasıyla η_{12347} ve η_{14567} terimlerinin katsayıları karşılaştırılırsa, $\beta_1 = -2$ ve $\beta_1 = -4$ elde edilir, bu da bir çelişkidir. O halde $d*\varphi_6 = \beta \wedge *\varphi_6$ olacak şekilde bir β 1-formu yoktur.

M manifoldu üzerinde $d\varphi_6 = \alpha \wedge \varphi_6 + f*\varphi_6$ olacak şekilde α 1-formu ve f fonksiyonu var olsun. Bu durumda $\alpha_i \in C^\infty(M)$ olmak üzere, lokal olarak $\alpha = \sum \alpha_i \eta_i$ yazıldığında, $d\varphi_6$ ve $\alpha \wedge \varphi_6 + f*\varphi_6$ 4-formlarının sırasıyla η_{1345} ve η_{4567} terimlerinin katsayıları karşılaştırılırsa,

$$f = -2 \text{ ve } f = 0$$

elde edilir, bu da bir çelişkidir. O halde manifold üzerinde $d\varphi_6 = \alpha \wedge \varphi_6 + f*\varphi_6$ olacak şekilde α 1-formu ve f fonksiyonu yoktur.

Ayrıca

$$*d\varphi_6 \wedge \varphi_6 = 8\{-\eta_{124567} + \eta_{134567} + \eta_{234567}\}$$

olduğundan, $*d\varphi_6 \wedge \varphi_6 \neq 0$ 'dır. Sonuç olarak φ_6 3-formu G_2 yapıların tanımlama bağıntılarından hiçbirini sağlamadığından, en geniş sınıf olan $\mathcal{W}$ sınıfındadır.

φ_7 3-formunun sınıflandırılması:

$$\varphi_7 = -\frac{1}{2}\,\eta_2 \wedge d\eta_1 + \frac{1}{2}\eta_1 \wedge d\eta_3 - \frac{1}{2}\,\eta_3 \wedge d\eta_2 + \ \eta_{123}$$

için

$$d\varphi_7 = -\frac{1}{2} d\eta_1 \wedge d\eta_2 + \frac{1}{2} d\eta_1 \wedge d\eta_3 - \frac{1}{2} d\eta_2 \wedge d\eta_3 + d\eta_1 \wedge \eta_{23} - \eta_{13} \wedge d\eta_2 + \eta_{12} \wedge d\eta_3$$

olduğundan, lokal koordinatlarda

$$\begin{aligned} d\varphi_7 \ &= \ 2\{\eta_{1245} - \eta_{1246} - \eta_{1247} - \eta_{1256} + \eta_{1257} + \eta_{1267} \\ &\quad + \eta_{1345} + \eta_{1346} + \eta_{1347} + \eta_{1356} - \eta_{1357} + \eta_{1367} \\ &\quad - \eta_{2345} - \eta_{2346} + \eta_{2347} + \eta_{2356} + \eta_{2357} - \eta_{2367}\} \end{aligned}$$

bulunur. Seçilen ortonormal çatıda $d\varphi_7 \neq 0$ olduğundan, manifold üzerinde de $d\varphi_7 \neq 0$ 'dır.

φ_7 3-formunun lokal ifadesi

$$\varphi_7 = \eta_{123} - \eta_{147} - \eta_{156} + \eta_{245} + \eta_{267} + \eta_{346} - \eta_{357}.$$

φ_7 3-formunun Hodge-starı

$$*\varphi_7 = \eta_{1246} - \eta_{1257} - \eta_{1345} - \eta_{1367} - \eta_{2347} - \eta_{2356} + \eta_{4567}$$

olarak bulunur. Global olarak ise

$$*\varphi_7 = -\frac{1}{2}\eta_{12} \wedge d\eta_2 + \frac{1}{2}\eta_{13} \wedge d\eta_1 + \frac{1}{2}\eta_{23} \wedge d\eta_3 + *\eta_{123}.$$

$d\varphi_7$ ve $*\varphi_7$ karşılaştırılırsa, $d\varphi_7 = k * \varphi_7$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir k sabitinin olamayacağı görülür.

M üzerinde $d\varphi_7 = \alpha \wedge \varphi_7$ olacak şekilde bir α 1-formu var olsun. Bu 1-form lokal olarak $\alpha = \sum \alpha_i \eta_i$ olarak yazılabilir. $d\varphi_7$ ve $\alpha \wedge \varphi_7$ formlarının η_{1345} teriminin katsayıları karşılaştırıldığında $2 = 0$ çelişkisine varılır. O halde böyle bir α 1-formu yoktur.

Buna ek olarak, lokal koordinatlarda $d\varphi_7 \wedge \varphi_7 = -12\eta_{1234567} \neq 0$ 'dır.

$*\varphi_7$ 4-formunun dış türevi

$$\begin{aligned} d * \varphi_7 \;&=\; \frac{1}{2}\{\eta_3 \wedge d\eta_1 \wedge d\eta_1 - \eta_1 \wedge d\eta_1 \wedge d\eta_3 + \eta_3 \wedge d\eta_2 \wedge d\eta_3 \\ &\quad -\eta_2 \wedge d\eta_3 \wedge d\eta_3 - \eta_2 \wedge d\eta_1 \wedge d\eta_2 + \eta_1 \wedge d\eta_2 \wedge d\eta_2\} \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. $d * \varphi_7$ 5-formunun lokal ifadesi

$$\begin{aligned} d * \varphi_7 \;&=\; 2\{-\eta_{12345} + \eta_{12346} - \eta_{12347} - \eta_{12356} - \eta_{12357} - \eta_{12367}\} \\ &\quad +4\{\eta_{14567} - \eta_{24567} + \eta_{34567}\} \end{aligned}$$

olduğundan $d * \varphi_7 \neq 0$ 'dır.

M manifoldu üzerinde $d * \varphi_7 = \beta \wedge *\varphi_7$ olacak şekilde bir β 1-formu var olsun. Bu durumda β 1-formu, $\beta_i \in C^\infty(M)$ olmak üzere, lokal olarak $\beta = \sum \beta_i \eta_i$ şeklinde yazılabilir. $d * \varphi_7$ ve $\beta \wedge *\varphi_7$ 5-formlarının sırasıyla η_{12347} ve η_{14567} terimlerinin katsayıları karşılaştırılırsa, $\beta_1 = 2$ ve $\beta_1 = 4$ elde edilir, bu da bir çelişkidir. O halde $d * \varphi_7 = \beta \wedge *\varphi_7$ olacak şekilde bir β 1-formu yoktur.

M manifoldu üzerinde $d\varphi_7 = \alpha \wedge \varphi_7 + f * \varphi_7$ olacak şekilde α 1-formu ve f fonksiyonu var olsun. Bu durumda $\alpha_i \in C^\infty(M)$ olmak üzere, lokal olarak $\alpha = \sum \alpha_i \eta_i$ yazıldığında, $d\varphi_7$ ve $\alpha \wedge \varphi_7 + f * \varphi_7$ 4-formlarının sırasıyla η_{1345} ve η_{4567} terimlerinin katsayıları karşılaştırılırsa,

$$f = -2 \text{ ve } f = 0$$

elde edilir, bu da bir çelişkidir. O halde manifold üzerinde $d\varphi_7 = \alpha \wedge \varphi_7 + f * \varphi_7$ olacak şekilde α 1-formu ve f fonksiyonu yoktur.

Ayrıca

$$*d\varphi_7 \wedge \varphi_7 = 8\{-\eta_{124567} - \eta_{134567} - \eta_{234567}\}$$

olduğundan, $*d\varphi_7 \wedge \varphi_7 \neq 0$ 'dır. Sonuç olarak φ_7 3-formu G_2 yapıların tanımlama bağıntılarından hiçbirini sağlamadığından, en geniş sınıf olan $\mathcal{W}$ sınıfındadır.

φ_8 3-formunun sınıflandırılması:

$$\varphi_8 = \frac{1}{2}\,\eta_2 \wedge d\eta_1 - \frac{1}{2}\eta_1 \wedge d\eta_3 - \frac{1}{2}\,\eta_3 \wedge d\eta_2 + \eta_{123}$$

için

$$d\varphi_8 = \frac{1}{2}d\eta_1 \wedge d\eta_2 - \frac{1}{2}d\eta_1 \wedge d\eta_3 - \frac{1}{2}d\eta_2 \wedge d\eta_3 + d\eta_1 \wedge \eta_{23} - \eta_{13} \wedge d\eta_2 + \eta_{12} \wedge d\eta_3$$

olduğundan, lokal koordinatlarda

$$\begin{aligned} d\varphi_8 \quad = \quad & 2\,\{-\eta_{1245} - \eta_{1246} - \eta_{1247} - \eta_{1256} + \eta_{1257} - \eta_{1267} \\ & -\eta_{1345} + \eta_{1346} + \eta_{1347} + \eta_{1356} - \eta_{1357} - \eta_{1367} \\ & -\eta_{2345} + \eta_{2346} - \eta_{2347} - \eta_{2356} - \eta_{2357} - \eta_{2367}\} \end{aligned}$$

bulunur. Seçilen ortonormal çatıda $d\varphi_8 \neq 0$ olduğundan, manifold üzerinde de $d\varphi_8 \neq 0$ 'dır.

φ_8 3-formunun lokal ifadesi

$$\varphi_8 = \eta_{123} + \eta_{147} + \eta_{156} - \eta_{245} - \eta_{267} + \eta_{346} - \eta_{357}.$$

φ_8 3-formunun Hodge-starı

$$*\varphi_8 = \eta_{1246} - \eta_{1257} + \eta_{1345} + \eta_{1367} + \eta_{2347} + \eta_{2356} + \eta_{4567}$$

olarak bulunur. Global olarak ise

$$*\varphi_8 = -\frac{1}{2}\eta_{13} \wedge d\eta_1 - \frac{1}{2}\eta_{23} \wedge d\eta_3 - \frac{1}{2}\eta_{12} \wedge d\eta_2 + *\eta_{123}.$$

$d\varphi_8$ ve $*\varphi_8$ karşılaştırılırsa, $d\varphi_8 = k * \varphi_8$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir k sabitinin olamayacağı görülür.

M üzerinde $d\varphi_8 = \alpha \wedge \varphi_8$ olacak şekilde bir α 1-formu var olsun. Bu 1-form lokal olarak $\alpha = \sum \alpha_i \eta_i$ olarak yazılabilir. Lokal koordinatlarda $d\varphi_8$ ve $\alpha \wedge \varphi_8$ formlarının η_{1345} teriminin katsayıları karşılaştırıdığında $-2 = 0$ çelişkisine varılır. O halde böyle bir α 1-formu yoktur.

Buna ek olarak, lokal koordinatlarda $d\varphi_8 \wedge \varphi_8 = -12\eta_{1234567} \neq 0$ 'dır.

$*\varphi_8$ 4-formunun dış türevi

$$\begin{aligned} d * \varphi_8 &= \frac{1}{2}\{-\eta_3 \wedge d\eta_1 \wedge d\eta_1 + \eta_1 \wedge d\eta_1 \wedge d\eta_3 - \eta_3 \wedge d\eta_2 \wedge d\eta_3 \\ &\quad +\eta_2 \wedge d\eta_3 \wedge d\eta_3 - \eta_2 \wedge d\eta_1 \wedge d\eta_2 + \eta_1 \wedge d\eta_2 \wedge d\eta_2\} \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. $d * \varphi_8$ 5-formunun lokal ifadesi

$$\begin{aligned} d * \varphi_8 &= 2\{-\eta_{12345} - \eta_{12346} + \eta_{12347} + \eta_{12356} + \eta_{12357} - \eta_{12367}\} \\ &\quad +4\{\eta_{14567} + \eta_{24567} - \eta_{34567}\} \end{aligned}$$

olduğundan $d * \varphi_8 \neq 0$ 'dır.

M manifoldu üzerinde $d * \varphi_8 = \beta \wedge *\varphi_8$ olacak şekilde bir β 1-formu var olsun. Bu durumda β 1-formu, $\beta_i \in C^\infty(M)$ olmak üzere, lokal olarak $\beta = \sum \beta_i \eta_i$ şeklinde yazılabilir. $d * \varphi_8$ ve $\beta \wedge *\varphi_8$ 5-formlarının sırasıyla η_{12347} ve η_{14567} terimlerinin katsayıları karşılaştırılırsa, $\beta_1 = 2$ ve $\beta_1 = 4$ elde edilir, bu da bir çelişkidir. O halde $d * \varphi_8 = \beta \wedge *\varphi_8$ olacak şekilde bir β 1-formu yoktur.

M manifoldu üzerinde $d\varphi_8 = \alpha \wedge \varphi_8 + f * \varphi_8$ olacak şekilde α 1-formu ve f fonksiyonu var olsun. Bu durumda $\alpha_i \in C^\infty(M)$ olmak üzere, lokal olarak

$\alpha = \sum \alpha_i \eta_i$ yazıldığında, $d\varphi_8$ ve $\alpha \wedge \varphi_8 + f * \varphi_8$ 4-formlarının sırasıyla η_{1345} ve η_{4567} terimlerinin katsayıları karşılaştırılırsa,

$$f = -2 \text{ ve } f = 0$$

elde edilir, bu da bir çelişkidir. O halde manifold üzerinde $d\varphi_8 = \alpha \wedge \varphi_8 + f * \varphi_8$ olacak şekilde α 1-formu ve f fonksiyonu yoktur.

Ayrıca

$$*d\varphi_8 \wedge \varphi_8 = 8\{\eta_{124567} + \eta_{134567} - \eta_{234567}\}$$

olduğundan, $*d\varphi_8 \wedge \varphi_8 \neq 0$ 'dır. Sonuç olarak φ_8 3-formu G_2 yapıların tanımlama bağıntılarından hiçbirini sağlamadığından, en geniş sınıf olan $\mathcal{W}$ sınıfındadır. $\square$

6.4 Yeni G_2 Yapıların Λ^3_7 Uzayından Elemanlarla Deformasyonları

(M, g) 7-boyutlu bir 3-Sasaki manifoldu ve $i = 1, 2, 3$ olmak üzere, (ξ_i, η_i, Φ_i) bu manifoldun 3-Sasaki yapısı olsun. M üzerinde Bölüm (6.2)'de elde edilen

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\eta_1 \wedge d\eta_2 + \frac{1}{2}d\eta_1 \wedge \eta_3 + \frac{1}{2}\eta_2 \wedge d\eta_3 + \eta_{123}$$

3-formu ele alınsın. Bu 3-form 3-Sasaki manifoldunun Sasaki yapısını belirleyen, birim uzunluktaki sırasıyla ξ_1, ξ_2 ve ξ_3 vektör alanlarıyla deforme edilsin. Bu durumda aşağıdaki teorem geçerlidir.

Teorem 6.4.1. *Bölüm (6.2)'de elde edilen φ_1 temel 3-formu, ξ_1, ξ_2 ve ξ_3 karakteristik vektör alanlarıyla deforme edildiğinde, yeni G_2 yapılar en geniş sınıf olan $\mathcal{W}$ sınıfına aittir.*

Kanıt. φ_1 3-formu ξ_1 ile deforme edildiğinde, yeni $\widetilde{\varphi}_1 = \varphi_1 + \xi_1 \lrcorner * \varphi_1$ 3-formu

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}_1 &= \tfrac{1}{2}\eta_1 \wedge d\eta_2 + \tfrac{1}{2}d\eta_1 \wedge \eta_3 + \tfrac{1}{2}\eta_2 \wedge d\eta_3 \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\eta_2 \wedge d\eta_1 - \tfrac{1}{2}\eta_3 \wedge d\eta_3 \end{aligned}$$

ve lokal koordinatlarda

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}_1 &= \eta_{123} - \eta_{146} + \eta_{157} - \eta_{247} - \eta_{256} - \eta_{345} \\ &\quad - \eta_{367} - \eta_{245} - \eta_{267} + \eta_{347} + \eta_{356} \end{aligned}$$

şeklindedir. Bu 3-formun dış türevi

$$d\widetilde{\varphi}_1 = d\eta_1 \wedge d\eta_2 + \frac{1}{2}d\eta_1 \wedge d\eta_3 + \frac{1}{2}d\eta_2 \wedge d\eta_3 - \frac{1}{2}d\eta_3 \wedge d\eta_3$$

olarak bulunur. Lokal koordinatlarda ise

$$\begin{aligned} d\widetilde{\varphi}_1 &= 2\eta_{1245} + 2\eta_{1246} - 4\eta_{1247} - 4\eta_{1256} - 2\eta_{1257} + 2\eta_{1267} - 4\eta_{1345} - 2\eta_{1347} \\ &\quad -2\eta_{1356} - 4\eta_{1367} + 4\eta_{2346} + 2\eta_{2347} + 2\eta_{2356} - 4\eta_{2357} - 4\eta_{4567} \end{aligned}$$

olur. O halde $d\widetilde{\varphi}_1 \neq 0$'dır ve $\widetilde{M} \notin \mathcal{P}$ ve $\widetilde{M} \notin \mathcal{W}_2$'dir.

Manifold üzerinde $d\widetilde{\varphi}_1 = \alpha \wedge \widetilde{\varphi}_1$ olacak şekilde bir α 1-formu var olsun. Bu 1-form lokal olarak $\alpha = \sum \alpha_i \eta_i$ olarak yazılabilir. Burada α_i fonksiyonları M üzerinde C^∞ fonksiyonlardır.

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \widetilde{\varphi}_1 &= -\alpha_4\eta_{1234} - \alpha_5\eta_{1235} - \alpha_6\eta_{1236} - \alpha_7\eta_{1237} - \alpha_1\eta_{1245} + \alpha_2\eta_{1246} \\ &\quad -\alpha_1\eta_{1247} - \alpha_1\eta_{1256} - \alpha_2\eta_{1257} - \alpha_1\eta_{1267} - \alpha_1\eta_{1345} + \alpha_3\eta_{1346} \\ &\quad +\alpha_1\eta_{1347} + \alpha_1\eta_{1356} - \alpha_3\eta_{1357} - \alpha_1\eta_{1367} - \alpha_5\eta_{1456} - \alpha_4\eta_{1457} \\ &\quad +\alpha_7\eta_{1467} + \alpha_6\eta_{1567} + (\alpha_3 - \alpha_2)\eta_{2345} + (\alpha_3 + \alpha_2)\eta_{2347} \\ &\quad +(\alpha_3 + \alpha_2)\eta_{2356} + (\alpha_3 - \alpha_2)\eta_{2367} + (\alpha_4 + \alpha_6)\eta_{2456} + (\alpha_7 - \alpha_5)\eta_{2457} \\ &\quad +(\alpha_4 - \alpha_6)\eta_{2467} + (\alpha_5 + \alpha_7)\eta_{2567} + (\alpha_6 - \alpha_4)\eta_{3456} + (\alpha_7 + \alpha_5)\eta_{3457} \\ &\quad +(\alpha_6 + \alpha_4)\eta_{3467} + (\alpha_5 - \alpha_7)\eta_{3567} \end{aligned}$$

olduğundan, $d\widetilde{\varphi}_1$ ve $\alpha \wedge \widetilde{\varphi}_1$ 4-formlarının η_{1245} ve η_{1247} terimlerinin katsayıları karşılaştırılırsa sırasıyla $\alpha_1 = -2$ ve $\alpha_1 = 4$ olur, bu da bir çelişkidir. O halde $d\widetilde{\varphi}_1 = \alpha \wedge \widetilde{\varphi}_1$ olacak şekilde bir α 1-formu yoktur, yani $\widetilde{M} \notin \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_4$.

$d\widetilde{\varphi}_1 \wedge \widetilde{\varphi}_1 = -36\eta_{1234567} \neq 0$ olduğundan $\widetilde{M} \notin \mathcal{W}_3$, $\widetilde{M} \notin \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3$, $\widetilde{M} \notin \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$ ve $\widetilde{M} \notin \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$'tür.

$\widetilde{\varphi}_1$ 3-formunun Hodge-star operatörü

$$\begin{aligned} \widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1 &= 2^{-1/3}\{*\varphi_1 + *(\xi_1 \lrcorner * \varphi_1) + \xi_1 \lrcorner * (\xi_1 \lrcorner \varphi_1)\} \\ &= 2^{-1/3}\{\tfrac{1}{2}\eta_{12} \wedge d\eta_1 - \tfrac{1}{2}\eta_{13} \wedge d\eta_3 + \tfrac{1}{2}\eta_{23} \wedge d\eta_2 \\ &\quad + * \eta_{123} + \tfrac{1}{8}d\eta_3 \wedge d\eta_3 - \tfrac{1}{4}d\eta_1 \wedge d\eta_2 \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. Lokal koordinatlarda

$$\begin{aligned} \widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1 &= 2^{-1/3}\{-\eta_{1245} - \eta_{1267} + \eta_{1347} + \eta_{1356} - 2\eta_{2346} + 2\eta_{2357} \\ &\quad +2\eta_{4567} + \eta_{1367} + \eta_{1345} + \eta_{1256} + \eta_{1247}\}. \end{aligned}$$

Sıfırdan farklı bir k sabiti için $d\widetilde{\varphi}_1 = k\widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1$ olsun. $d\widetilde{\varphi}_1$ 4-formunun η_{1246} teriminin katsayısı 2 iken, $\widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1$ 4-formunun η_{1246} teriminin katsayısı 0'dır. Bu da $k = 0$ demektir, kabulden $k \neq 0$ olduğundan böyle bir sabit yoktur. O halde $\mathcal{W}_1$ ve $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2$ sınıfları elenir.

$\widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1$ 4-formunun dış türevi

$$\begin{aligned} d\widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1 &= 2^{-1/3}\{\tfrac{1}{2}\eta_2 \wedge d\eta_1 \wedge d\eta_1 - \tfrac{1}{2}\eta_1 \wedge d\eta_1 \wedge d\eta_2 - \tfrac{1}{2}\eta_3 \wedge d\eta_1 \wedge d\eta_3 \\ &\quad +\tfrac{1}{2}\eta_1 \wedge d\eta_3 \wedge d\eta_3 + \tfrac{1}{2}\eta_3 \wedge d\eta_2 \wedge d\eta_2 - \tfrac{1}{2}\eta_2 \wedge d\eta_2 \wedge d\eta_3\} \end{aligned}$$

olduğundan, lokal koordinatlarda

$$\begin{aligned} d\widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1 &= 2^{-1/3}\{-2\eta_{12345} - 2\eta_{12346} - 2\eta_{12347} - 2\eta_{12356} + 2\eta_{12357} - 2\eta_{12367} \\ &\quad +4\eta_{14567} + 4\eta_{24567} + 4\eta_{34567}\} \end{aligned}$$

şeklindedir. Bu ifade sıfırdan farklı olduğundan $\widetilde{M} \notin \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3$'tür.

M üzerinde $d\widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1 = \beta \wedge \widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1$ özelliğine sahip bir β 1-formu var olsun. Lokal koorinatlarda $\beta = \sum \beta_i \eta_i$ yazılabilir. $d\widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1$ ve $\beta \wedge \widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1$ 5-formlarının η_{12346} ve η_{14567} terimlerinin katsayıları karşılaştırıldığında $\beta_1 = 1$ ve $\beta_1 = 2$ çelişkisine ulaşılır. O halde $d\widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1 = \beta \wedge \widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1$ olacak şekilde bir β 1-formu bulunamaz. Böylece $\widetilde{M} \notin \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_4$, $\widetilde{M} \notin \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$ elde edilir.

M üzerinde $d\widetilde{\varphi}_1 = \alpha \wedge \widetilde{\varphi}_1 + f\widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1$ eşitliğini sağlayacak şekilde α 1-formu ve f fonksiyonunun olduğu kabul edilsin. α lokal yazılır ve $d\widetilde{\varphi}_1$ ve $\alpha \wedge \widetilde{\varphi}_1 + f\widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1$ 4-formlarının η_{1245} ve η_{1247} terimlerinin katsayıları karşılaştırılırsa,

$$2 = -\alpha_1 - 2^{-1/3}f \text{ ve } -4 = -\alpha_1 + 2^{-1/3}f$$

eşitliklerinden $f = -3.2^{1/3}$ bulunur. Aynı 4-formların bu kez η_{4567} teriminin katsayıları karşılaştırıldığında ise, $f = -2^{4/3}$ olur. O halde
$d\widetilde{\varphi}_1 = \alpha \wedge \widetilde{\varphi}_1 + f\widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1$ bağıntısını sağlayan α 1-formu ve f fonksiyonu bulunamaz. Buradan
$\widetilde{M} \notin \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_4$'tür.

Ayrıca lokal olarak

$$\widetilde{*}d\widetilde{\varphi} \wedge \widetilde{\varphi}_1 = 2^{4/3}\{-\eta_{124567} + 3\eta_{134567} - 4\eta_{234567}\}$$

sıfırdan farklı olduğundan, $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3$ sınıfı da elenir.

$(M, \widetilde{g})$ manifoldu [6] çalışmasında verilen G_2 yapılarının tanımlama bağıntılarından hiç birini sağlamadığından, bu manifold en geniş sınıf olan $\mathcal{W}$ sınıfındadır.

Aynı φ_1 temel 3-formu ξ_1 yerine ξ_2 vektör alanı kullanılarak deforme edilirse, elde edilen yeni 3-formun yine en geniş sınıfta olduğu görülür:

Yeni $\widetilde{\varphi}_1 = \varphi_1 + \xi_2 \lrcorner * \varphi_1$ 3-formu 3-Sasaki yapısı kullanılarak

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}_1 &= \tfrac{1}{2}\eta_1 \wedge d\eta_2 + \tfrac{1}{2}d\eta_1 \wedge \eta_3 + \tfrac{1}{2}\eta_2 \wedge d\eta_3 \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\eta_3 \wedge d\eta_2 - \tfrac{1}{2}\eta_1 \wedge d\eta_1\end{aligned}$$

şeklinde yazılır ve lokal koordinatlarda

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}_1 &= \eta_{123} + \eta_{145} - \eta_{146} + \eta_{157} + \eta_{167} - \eta_{247} \\ &\quad - \eta_{256} - \eta_{345} - \eta_{346} + \eta_{357} - \eta_{367}\end{aligned}$$

olur. Bu 3-formun dış türevi

$$d\widetilde{\varphi}_1 = \frac{1}{2}d\eta_1 \wedge d\eta_2 + \frac{1}{2}d\eta_1 \wedge d\eta_3 + d\eta_2 \wedge d\eta_3 - \frac{1}{2}d\eta_1 \wedge d\eta_1$$

olarak bulunur. Lokal koordinatlarda

$$\begin{aligned}d\widetilde{\varphi}_1 &= 2\eta_{1245} + 4\eta_{1246} - 4\eta_{1257} + 2\eta_{1267} - 2\eta_{1345} - 4\eta_{1347} - 4\eta_{1356} - 2\eta_{1367} \\ &\quad - 4\eta_{2345} + 2\eta_{2346} + 2\eta_{2347} + 2\eta_{2356} - 2\eta_{2357} - 4\eta_{2367} - 4\eta_{4567}\end{aligned}$$

olduğundan, $d\widetilde{\varphi}_1 \neq 0$'dır. O halde $\widetilde{M} \notin \mathcal{P}$ ve $\widetilde{M} \notin \mathcal{W}_2$'dir.

Manifold üzerinde $d\widetilde{\varphi}_1 = \alpha \wedge \widetilde{\varphi}_1$ olacak şekilde bir α 1-formu var olsun. Bu 1-form lokal olarak $\alpha = \sum \alpha_i \eta_i$ şeklinde yazılabilir. Burada α_i fonksiyonları M üzerinde C^∞ fonksiyonlardır. $d\widetilde{\varphi}_1$ 4-formunun η_{4567} teriminin katsayısı -4 iken $\alpha \wedge \widetilde{\varphi}_1$ 4-formunun aynı katsayısının terimi α ne olursa olsun sıfırdır. O halde $d\widetilde{\varphi}_1 = \alpha \wedge \widetilde{\varphi}_1$ olacak şekilde bir α 1-formu yoktur, yani $\widetilde{M} \notin \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_4$'tür.

$d\widetilde{\varphi}_1 \wedge \widetilde{\varphi}_1 = -36\eta_{1234567} \neq 0$ olduğundan $\widetilde{M} \notin \mathcal{W}_3$, $\widetilde{M} \notin \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3$, $\widetilde{M} \notin \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$ ve $\widetilde{M} \notin \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$'tür.

$\widetilde{\varphi}_1$ 3-formunun Hodge-star operatörü

$$\begin{aligned}\widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1 &= 2^{-1/3}\{*\varphi_1 + *(\xi_2 \lrcorner * \varphi_1) + \xi_2 \lrcorner * (\xi_2 \lrcorner \varphi_1)\} \\ &= 2^{-1/3}\{\tfrac{1}{2}\eta_{12} \wedge d\eta_1 - \eta_{13} \wedge d\eta_3 + \tfrac{1}{2}\eta_{23} \wedge d\eta_2 \\ &\quad + 2 * \eta_{123} + \tfrac{1}{2}\eta_{12} \wedge d\eta_2 - \tfrac{1}{2}\eta_{23} \wedge d\eta_1\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. Lokal koordinatlarda

$$\begin{aligned}\widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1 &= 2^{-1/3}\{-\eta_{1245}-\eta_{1246}+\eta_{1257}-\eta_{1267}+2\eta_{1347}+2\eta_{1356}\\ &\quad +\eta_{2345}-\eta_{2346}+\eta_{2357}+\eta_{2367}+2\eta_{4567}\}.\end{aligned}$$

Sıfırdan farklı bir k sabiti için $d\widetilde{\varphi}_1 = k\widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1$ olsun. $d\widetilde{\varphi}_1$ 4-formunun η_{1367} teriminin katsayısı -2 iken, $\widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1$ 4-formunun aynı teriminin katsayısı 0'dır. Bu da $k = 0$ demektir, kabulden $k \neq 0$ olduğundan böyle bir sabit yoktur. O halde $\mathcal{W}_1$ ve $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2$ sınıfları elenir.

$\widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1$ 4-formunun dış türevi

$$\begin{aligned}d\widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1 &= 2^{-1/3}\{\tfrac{1}{2}\eta_2\wedge d\eta_1\wedge d\eta_1-\tfrac{1}{2}\eta_1\wedge d\eta_1\wedge d\eta_2-\eta_3\wedge d\eta_1\wedge d\eta_3\\ &\quad +\eta_1\wedge d\eta_3\wedge d\eta_3+\tfrac{1}{2}\eta_3\wedge d\eta_2\wedge d\eta_2-\tfrac{1}{2}\eta_2\wedge d\eta_2\wedge d\eta_3\\ &\quad +\tfrac{1}{2}\eta_2\wedge d\eta_1\wedge d\eta_2-\tfrac{1}{2}\eta_1\wedge d\eta_2\wedge d\eta_2\}\end{aligned}$$

olduğundan, lokal koordinatlarda

$$\begin{aligned}d\widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1 &= 2^{2/3}\{-\eta_{12345}-\eta_{12346}-\eta_{12347}-\eta_{12356}+\eta_{12357}\\ &\quad -\eta_{12367}+2\eta_{14567}+2\eta_{24567}+2\eta_{34567}\}\end{aligned}$$

şeklindedir. Bu ifade sıfırdan farklı olduğundan $\widetilde{M} \notin \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3$'tür.

M üzerinde $d\widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1 = \beta \wedge \widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1$ özelliğine sahip bir β 1-formu var olsun. Lokal koorinatlarda $\beta = \sum \beta_i\eta_i$ yazılabilir. $d\widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1$ ve $\beta \wedge \widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1$ 5-formlarının η_{12345} ve η_{12346} terimlerinin katsayıları karşılaştırıldığında $\beta_1 = 0$ bulunur. Aynı 5-formların η_{14567} teriminin katsayıları karşılaştırıldığında ise $\beta_1 = 2$ olur, bu da bir çelişkidir. O halde $d\widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1 = \beta \wedge \widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1$ olacak şekilde bir β 1-formu bulunamaz. Buradan $\widetilde{M} \notin \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_4$, $\widetilde{M} \notin \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$ elde edilir.

M üzerinde $d\widetilde{\varphi}_1 = \alpha \wedge \widetilde{\varphi}_1 + f\widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1$ eşitliğini sağlayacak şekilde α 1-formu ve f fonksiyonunun olduğu kabul edilsin. α lokal yazılır ve $d\widetilde{\varphi}_1$ ve $\alpha \wedge \widetilde{\varphi}_1 + f\widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1$ 4-formlarının η_{1245} ve η_{1246} terimlerinin katsayıları karşılaştırılırsa,

$$2 = -\alpha_2 - 2^{-1/3}f \text{ ve } 4 = \alpha_2 - 2^{-1/3}f$$

eşitliklerinden $f = -3.2^{1/3}$ bulunur. Aynı 4-formların bu kez η_{4567} teriminin katsayıları karşılaştırıldığında ise, $f = -2^{4/3}$ olur. O halde
$d\widetilde{\varphi}_1 = \alpha\wedge\widetilde{\varphi}_1 + f\widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1$ bağıntısını sağlayan α 1-formu ve f fonksiyonu bulunamaz.

Böylece
$\widetilde{M} \notin \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_4$'tür.

Ayrıca lokal olarak

$$\widetilde{*} d\widetilde{\varphi} \wedge \widetilde{\varphi}_1 = 2^{4/3}\{-3\eta_{124567} + 4\eta_{134567} - \eta_{234567}\}$$

sıfırdan farklı olduğundan, $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3$ sınıfı da elenir.

$(M, \widetilde{g})$ manifoldu [6] çalışmasında verilen G_2 yapılarının tanımlama bağıntılarından hiç birini sağlamadığından, bu manifold en geniş sınıf olan $\mathcal{W}$ sınıfındadır.

Son olarak φ_1 3-formu ξ_3 ile deforme edilirse, yeni $\widetilde{\varphi}_1 = \varphi_1 + \xi_3 \lrcorner * \varphi_1$ 3-formu

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}_1 &= \tfrac{1}{2}\eta_1 \wedge d\eta_2 + \tfrac{1}{2}d\eta_1 \wedge \eta_3 + \tfrac{1}{2}\eta_2 \wedge d\eta_3 \\ &\quad -\tfrac{1}{2}\eta_2 \wedge d\eta_2 + \tfrac{1}{2}\eta_1 \wedge d\eta_3 \end{aligned}$$

ve lokal koordinatlarda

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}_1 &= \eta_{123} - \eta_{146} - \eta_{147} - \eta_{156} + \eta_{157} + \eta_{246} \\ &\quad -\eta_{247} - \eta_{256} - \eta_{257} - \eta_{345} - \eta_{367} \end{aligned}$$

şeklindedir. Bu 3-formun dış türevi

$$d\widetilde{\varphi}_1 = \frac{1}{2}d\eta_1 \wedge d\eta_2 + d\eta_1 \wedge d\eta_3 + \frac{1}{2}d\eta_2 \wedge d\eta_3 - \frac{1}{2}d\eta_2 \wedge d\eta_2$$

olarak bulunur. Lokal koordinatlarda

$$\begin{aligned} d\widetilde{\varphi}_1 &= 4\eta_{1245} + 2\eta_{1246} - 2\eta_{1257} + 4\eta_{1267} - 2\eta_{1345} + 4\eta_{1346} - 2\eta_{1347} - 2\eta_{1356} \\ &\quad -4\eta_{1357} - 2\eta_{1367} + 2\eta_{2346} + 4\eta_{2347} + 4\eta_{2356} - 2\eta_{2357} - 4\eta_{4567} \end{aligned}$$

olduğundan, $d\widetilde{\varphi}_1 \neq 0$'dır. O halde $\widetilde{M} \notin \mathcal{P}$ ve $\widetilde{M} \notin \mathcal{W}_2$'dir.

Manifold üzerinde $d\widetilde{\varphi}_1 = \alpha \wedge \widetilde{\varphi}_1$ olacak şekilde bir α 1-formu var olsun. Bu 1-form lokal olarak $\alpha = \sum \alpha_i \eta_i$ olarak yazılabilir. Burada α_i fonksiyonları M üzerinde C^∞ fonksiyonlardır. $d\widetilde{\varphi}_1$ 4-formunun η_{4567} teriminin katsayısı -4 iken $\alpha \wedge \widetilde{\varphi}_1$ 4-formunun aynı katsayısının terimi α ne olursa olsun sıfırdır. O halde $d\widetilde{\varphi}_1 = \alpha \wedge \widetilde{\varphi}_1$ olacak şekilde bir α 1-formu yoktur, yani $\widetilde{M} \notin \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_4$'tür.

$d\widetilde{\varphi}_1 \wedge \widetilde{\varphi}_1 = -36\eta_{1234567} \neq 0$ olduğundan $\widetilde{M} \notin \mathcal{W}_3$, $\widetilde{M} \notin \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3$, $\widetilde{M} \notin \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$ ve $\widetilde{M} \notin \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$'tür.

$\widetilde{\varphi}_1$ 3-formunun Hodge-star operatörü

$$\begin{aligned} \widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1 &= 2^{-1/3}\{*\varphi_1 + *(\xi_3 \lrcorner * \varphi_1) + \xi_3 \lrcorner * (\xi_3 \lrcorner \varphi_1)\} \\ &= 2^{-1/3}\{\eta_{12} \wedge d\eta_1 - \tfrac{1}{2}\eta_{13} \wedge d\eta_3 + \tfrac{1}{2}\eta_{23} \wedge d\eta_2 \\ &\quad +2 * \eta_{123} + \tfrac{1}{2}\eta_{23} \wedge d\eta_3 + \tfrac{1}{2}\eta_{13} \wedge d\eta_2 \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. Lokal koordinatlarda

$$\begin{aligned} \widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1 &= 2^{-1/3}\{-2\eta_{1245} - 2\eta_{1267} - \eta_{1346} + \eta_{1347} + \eta_{1356} + \eta_{1357} \\ &\quad -\eta_{2346} - \eta_{2347} - \eta_{2356} + \eta_{2357} + 2\eta_{4567}\}. \end{aligned}$$

Sıfırdan farklı bir k sabiti için $d\widetilde{\varphi}_1 = k\widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1$ olsun. $d\widetilde{\varphi}_1$ 4-formunun η_{1345} teriminin katsayısı 2 iken, $\widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1$ 4-formunun aynı teriminin katsayısı 0'dır. Bu da $k = 0$ demektir, kabulden $k \neq 0$ olduğundan böyle bir sabit yoktur. O halde $\mathcal{W}_1$ ve $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2$ sınıfları elenir.

$\widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1$ 4-formunun dış türevi

$$\begin{aligned} d\widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1 &= 2^{-1/3}\{\eta_2 \wedge d\eta_1 \wedge d\eta_1 - \eta_1 \wedge d\eta_1 \wedge d\eta_2 - \tfrac{1}{2}\eta_3 \wedge d\eta_1 \wedge d\eta_3 \\ &\quad +\tfrac{1}{2}\eta_1 \wedge d\eta_3 \wedge d\eta_3 + \tfrac{1}{2}\eta_3 \wedge d\eta_2 \wedge d\eta_2 - \tfrac{1}{2}\eta_2 \wedge d\eta_3 \wedge d\eta_3\} \end{aligned}$$

olduğundan, lokal koordinatlarda

$$\begin{aligned} d\widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1 &= 2^{2/3}\{-\eta_{12345} - \eta_{12346} - \eta_{12347} - \eta_{12356} + \eta_{12357} - \eta_{12367} \\ &\quad +2\eta_{14567} + 2\eta_{24567} + 2\eta_{34567}\} \end{aligned}$$

şeklindedir. Bu ifade sıfırdan farklı olduğundan $\widetilde{M} \notin \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3$'tür.

M üzerinde $d\widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1 = \beta \wedge \widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1$ özelliğine sahip bir β 1-formu var olsun. Lokal koorinatlarda $\beta = \sum \beta_i \eta_i$ yazılabilir. $d\widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1$ ve $\beta \wedge \widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1$ 5-formlarının η_{12345} ve η_{34567} terimlerinin katsayıları karşılaştırıldığında $\beta_3 = 1$ ve $\beta_3 = 2$ bulunur, bu da bir çelişkidir. O halde $d\widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1 = \beta \wedge \widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1$ olacak şekilde bir β 1-formu bulunamaz. Buradan $\widetilde{M} \notin \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_4$, $\widetilde{M} \notin \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$ elde edilir.

M üzerinde $d\widetilde{\varphi}_1 = \alpha \wedge \widetilde{\varphi}_1 + f\widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1$ eşitliğini sağlayacak şekilde α 1-formu ve f fonksiyonunun olduğu kabul edilsin. α lokal yazılır ve $d\widetilde{\varphi}_1$ ve $\alpha \wedge \widetilde{\varphi}_1 + f\widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1$ 4-formlarının η_{1345} teriminin katsayıları karşılaştırılırsa, $\alpha_1 = 2$ bulunur. Aynı 4-formların η_{1246} teriminin katsayıları karşılaştırıldığında ise $2 = \alpha_1 + \alpha_2$ olur. $\alpha_1 = 2$ olduğundan, $\alpha_2 = 0$'dır. Son olarak bu 4-formların η_{1247} teriminin katsayıları karşılaştırılırsa, $0 = -\alpha_1 + \alpha_2 = -2$ çelişkisine ulaşılır. O halde

$d\widetilde{\varphi}_1 = \alpha\wedge\widetilde{\varphi}_1 + f\widetilde{*}\widetilde{\varphi}_1$ bağıntısını sağlayan α 1-formu ve f fonksiyonu bulunamaz. Buradan $\widetilde{M} \notin \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_4$'tür.

Ayrıca lokal olarak

$$\widetilde{*}d\widetilde{\varphi} \wedge \widetilde{\varphi}_1 = 2^{4/3}\{-4\eta_{124567} + \eta_{134567} - 3\eta_{234567}\}$$

sıfırdan farklı olduğundan, $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3$ sınıfı da elenir.

$(M, \widetilde{g})$ manifoldu [6] çalışmasında verilen G_2 yapılarının tanımlama bağıntılarından hiç birini sağlamadığından, bu manifold en geniş sınıf olan $\mathcal{W}$ sınıfındadır.

□

6.5 Yeni G_2 Yapıların Bir Başka Deformasyonu

Bu bölümde, Bölüm (6.2)'de elde edilen, G_2 yapıların en geniş sınıfı olan $\mathcal{W}$ sınıfına ait φ_1, φ_2, φ_3 ve φ_4 3-formları deforme edilerek, $\mathcal{W}$ sınıfının

$$\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$$

alt sınıfına ait yeni G_2 yapılar verilmiştir. $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$ sınıfından olan manifoldlara integrallenebilir G_2 yapısına sahip manifoldlar veya anti-simetrik torsiyona sahip G_2 manifoldlar denir. Bu tip bir manifold üzerinde, torsiyonu anti-simetrik olan metrik uyumlu bir tek kovaryant türev vardır [9].

(M, g) 7-boyutlu, $(\xi_i, \eta_i, \Phi_i)_{i=1,2,3}$ 3-Sasaki yapısına sahip bir 3-Sasaki manifoldu olsun. Manifold üzerinde $s > 0$ olmak üzere,

$$g^s(x,y) := \begin{cases} g(x,y) & x, y \in T^h \text{ ise} \\ s^2 g(x,y) & x, y \in T^v \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tanımlı Riemann metriği ele alınsın. $\{e_1, \cdots, e_7\}$ kümesi [27]'de verilen $e_1 = \xi_1$, $e_2 = \xi_2$ ve $e_3 = \xi_3$ özelliğindeki g metriğine göre ortonormal çatı olsun. Bu durumda

$$\{\xi_1/s, \xi_2/s, \xi_3/s, e_4, e_5, e_6, e_7\}$$

kümesi g^s metriğine göre ortonormal bir çatıdır. Bu çatıya karşılık gelen 1-formların kümesi de

$$\{s\eta_1, s\eta_2, s\eta_3, \eta_4, \eta_5, \eta_6, \eta_7\}$$

'dir [22,27]. $\{\xi_1/s, \xi_2/s, \xi_3/s, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ ve $\{s\eta_1, s\eta_2, s\eta_3, \eta_4, \eta_5, \eta_6, \eta_7\}$ tabanlarının her ikisi de [22]'deki notasyonla $\{Z_1, \cdots, Z_7\}$ ile gösterilecektir. Bölüm (6.2)'de elde edilen

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\,\eta_1 \wedge d\eta_2 + \frac{1}{2}\,d\eta_1 \wedge \eta_3 + \frac{1}{2}\,\eta_2 \wedge d\eta_3 + \ \eta_{123}$$

temel 3-formu ele alınsın.

$$F_1 = \eta_{123} \text{ ve } F_2 = \frac{1}{2}\,\eta_1 \wedge d\eta_2 + \frac{1}{2}\,d\eta_1 \wedge \eta_3 + \frac{1}{2}\,\eta_2 \wedge d\eta_3$$

olsun. Bu durumda

$$F_1^s := s^3 F_1, \quad F_2^s := sF_2$$

olmak üzere,

$$\varphi^s := F_1^s + F_2^s = s^3 F_1 + sF_2$$

3-formu tanımlansın.

Teorem 6.5.1. *(M, g) 7-boyutlu, $(\xi_i, \eta_i, \Phi_i)_{i=1,2,3}$ 3-Sasaki yapısına sahip bir 3-Sasaki manifoldu ve*

$$F_1 = \eta_{123} \textit{ ve } F_2 = \frac{1}{2}\,\eta_1 \wedge d\eta_2 + \frac{1}{2}\,d\eta_1 \wedge \eta_3 + \frac{1}{2}\,\eta_2 \wedge d\eta_3$$

olsun. Bu durumda

$$F_1^s := s^3 F_1, \quad F_2^s := sF_2$$

olmak üzere,

$$\varphi^s := F_1^s + F_2^s = s^3 F_1 + sF_2$$

3-formu (M, g^s) manifoldu üzerinde pozitif bir 3-formdur. Ayrıca $s = \frac{1}{\sqrt{2}}$ için, bu temel 3-form $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$ sınıfına aittir. $s \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$ için, φ^s yine en geniş sınıftadır.

Kanıt. φ^s 3-formunun pozitif olması için, $x, y \in \Gamma(TM)$ olmak üzere,

$$(x \lrcorner \varphi^s) \wedge (y \lrcorner \varphi^s) \wedge \varphi^s = 6g^s(x, y)d^s_{vol} \tag{6.4}$$

eşitliği sağlanmalıdır. Manifoldun bir açık kümesinde yukarıda bahsedilen, g^s metriğine göre ortonormal $\{Z_1, \cdots, Z_7\}$ tabanı seçilsin. Bu durumda

$$(Z_i \lrcorner \varphi^s) \wedge (Z_i \lrcorner \varphi^s) \wedge \varphi^s = 6g^s(Z_i, Z_i)d^s_{vol} = 6s^3 g(e_i, e_i)d_{vol}$$

ve $i \neq j$ için,

$$(Z_i \lrcorner \varphi^s) \wedge (Z_j \lrcorner \varphi^s) \wedge \varphi^s = 0$$

olmalıdır. Aşağıdaki ilişkiler kullanılırsa, bu eşitliklerin sağlandığı görülür:

$$\begin{aligned}
Z_1 \lrcorner \varphi^s &= s^2\eta_{23} - \eta_{46} + \eta_{57}, \\
Z_2 \lrcorner \varphi^s &= -s^2\eta_{13} - \eta_{47} - \eta_{56}, \\
Z_3 \lrcorner \varphi^s &= s^2\eta_{12} - \eta_{45} - \eta_{67}, \\
Z_4 \lrcorner \varphi^s &= s\eta_{16} + s\eta_{27} + s\eta_{35}, \\
Z_5 \lrcorner \varphi^s &= -s\eta_{17} + s\eta_{26} - s\eta_{34}, \\
Z_6 \lrcorner \varphi^s &= -s\eta_{14} - s\eta_{25} + s\eta_{37}, \\
Z_7 \lrcorner \varphi^s &= s\eta_{15} - s\eta_{24} - s\eta_{36}.
\end{aligned}$$

O halde φ_s bir pozitif 3-formdur. Şimdi de bu 3-formun hangi s değerleri için $\mathcal{W}$ sınıfının alt sınıflarına ait olduğu incelenecektir.

$$\varphi^s = +s^3\eta_{123} + \frac{s}{2}\ \eta_1 \wedge d\eta_2 + \frac{s}{2}\ d\eta_1 \wedge \eta_3 + \frac{s}{2}\ \eta_2 \wedge d\eta_3$$

3-formunun dış türevi

$$d\varphi^s = s^3 d\eta_1 \wedge \eta_{23} - s^3\eta_{13} \wedge d\eta_2 + s^3\eta_{12} \wedge d\eta_3 + \frac{s}{2} d\eta_1 \wedge d\eta_2 + \frac{s}{2} d\eta_1 \wedge d\eta_3 + \frac{s}{2} d\eta_2 \wedge d\eta_3.$$

Lokal koordinatlarda

$$\begin{aligned}
d\varphi^s = \ & 2s \left\{ \eta_{1245} + \eta_{1246} - s^2\eta_{1247} - s^2\eta_{1256} - \eta_{1257} + \eta_{1267} \right. \\
& -\eta_{1345} + s^2\eta_{1346} - \eta_{1347} - \eta_{1356} - s^2\eta_{1357} - \eta_{1367} \\
& \left. -s^2\eta_{2345} + \eta_{2346} + \eta_{2347} + \eta_{2356} - \eta_{2357} - s^2\eta_{2367} \right\}
\end{aligned}$$

olduğundan, her $s > 0$ için, $d\varphi^s \neq 0$'dır. O halde hiç bir pozitif s sabiti için, φ^s 3-formu $\mathcal{P}$ veya $\mathcal{W}_2$ sınıflarına ait değildir.

M üzerinde $d\varphi^s = \alpha \wedge \varphi^s$ olacak şekilde bir α 1-formu var olsun. Bu 1-form

$$\alpha = \sum \alpha_i Z_i = s\alpha_1\eta_1 + s\alpha_2\eta_2 + s\alpha_3\eta_3 + \alpha_4\eta_4 + \alpha_5\eta_5 + \alpha_6\eta_6 + \alpha_7\eta_7$$

olarak yazılabilir. Ayrıca φ^s 3-formu lokal koordinatlarda

$$\varphi^s = s^3\eta_{123} - s\eta_{146} + s\eta_{157} - s\eta_{247} - s\eta_{256} - s\eta_{345} - s\eta_{367}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}\alpha\wedge\varphi^s = & -s^3\alpha_4\eta_{1234}-s^3\alpha_5\eta_{1235}-s^3\alpha_6\eta_{1236}-s^3\alpha_7\eta_{1237}+s^2\alpha_2\eta_{1246}-s^2\alpha_1\eta_{1247}\\ & -s^2\alpha_1\eta_{1256}-s^2\alpha_2\eta_{1257}-s^2\alpha_1\eta_{1345}+s^2\alpha_3\eta_{1346}-s^2\alpha_3\eta_{1357}-s^2\alpha_1\eta_{1367}\\ & -s\alpha_5\eta_{1456}-s\alpha_4\eta_{1457}+s\alpha_7\eta_{1467}+s\alpha_6\eta_{1567}-s^2\alpha_2\eta_{2345}+s^2\alpha_3\eta_{2347}\\ & +s^2\alpha_3\eta_{2356}-s^2\alpha_2\eta_{2367}+s\alpha_4\eta_{2456}-s\alpha_5\eta_{2457}-s\alpha_6\eta_{2467}+s\alpha_7\eta_{2567}\\ & +s\alpha_6\eta_{3456}+s\alpha_7\eta_{3457}+s\alpha_4\eta_{3467}+s\alpha_5\eta_{3567}\end{aligned}$$

eşitliği göz önüne alınarak, $d\varphi^s$ ve $\alpha\wedge\varphi^s$ 4-formlarının η_{1245} teriminin katsayıları karşılaştırılırsa $2s=0$ bulunur. $s>0$ olduğundan, $d\varphi^s=\alpha\wedge\varphi^s$ olacak şekilde bir α 1-formu yoktur, yani $\widetilde{M}\notin\mathcal{W}_4$ ve $\widetilde{M}\notin\mathcal{W}_2\oplus\mathcal{W}_4$'tür.

Ayrıca lokal koordinatlarda $d\varphi^s\wedge\varphi^s=-12s^2\eta_{1234567}$ olduğundan her $s>0$ için, $d\varphi^s\wedge\varphi^s\neq 0$'dır ve böylece $\mathcal{W}_3$, $\mathcal{W}_2\oplus\mathcal{W}_3$, $\mathcal{W}_3\oplus\mathcal{W}_4$ ve $\mathcal{W}_2\oplus\mathcal{W}_3\oplus\mathcal{W}_4$ sınıfları elenir.

φ^s 3-formunun $*_s$ Hodge-star operatörü

$$\begin{aligned}*_s\varphi^s &= -Z_{1245}-Z_{1267}+Z_{1347}+Z_{1356}-Z_{2346}+Z_{2357}+Z_{4567}\\ &= *\eta_{123}-s^2\eta_{1245}-s^2\eta_{1267}+s^2\eta_{1347}+s^2\eta_{1356}-s^2\eta_{2346}+s^2\eta_{2357},\end{aligned}$$

global olarak

$$*_s\varphi^s=*F_1+\frac{s^2}{2}\eta_{23}\wedge d\eta_2-\frac{s^2}{2}\eta_{13}\wedge d\eta_3+\frac{s^2}{2}\eta_{12}\wedge d\eta_1$$

şeklinde ifade edilebilir. $d\varphi^s$ 4-formunun η_{4567} teriminin katsayısı 0 iken, $*_s\varphi^s$ 4-formunun aynı teriminin katsayısı 1 olduğundan, $d\varphi^s=k*_s\varphi^s$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir k sabiti yoktur. O halde $\mathcal{W}_1$ ve $\mathcal{W}_1\oplus\mathcal{W}_2$ sınıfları da elenir.

$*_s\varphi^s$ 4-formunun dış türevi ise

$$\begin{aligned}d*_s\varphi^s &= \frac{s^2}{2}\{\eta_2\wedge d\eta_1\wedge d\eta_1-\eta_1\wedge d\eta_1\wedge d\eta_2-\eta_3\wedge d\eta_1\wedge d\eta_3\\ &\quad +\eta_1\wedge d\eta_3\wedge d\eta_3+\eta_3\wedge d\eta_2\wedge d\eta_2-\eta_2\wedge d\eta_2\wedge d\eta_3\}\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Lokal olarak

$$\begin{aligned}d*_s\varphi^s &= 2s^2\{-\eta_{12345}-\eta_{12346}-\eta_{12347}-\eta_{12356}+\eta_{12357}-\eta_{12367}\}\\ &\quad +4s^2\{\eta_{14567}+\eta_{24567}+\eta_{34567}\}\end{aligned}$$

olduğundan $d*_s\varphi^s\neq 0$ ve sonuç olarak $M\notin\mathcal{W}_1\oplus\mathcal{W}_3$'tür.

M manifoldu üzerinde $d\varphi^s = \alpha \wedge \varphi^s + f *_s \varphi^s$ olacak şekilde α 1-formu ve f fonksiyonu var olsun. Bu durumda α 1-formu, $\alpha_i \in C^\infty(M)$ olmak üzere, lokal olarak $\alpha = \sum \alpha_i Z_i$ şeklinde yazılabilir. Lokal olarak $d\varphi^s$ ve $\alpha \wedge \varphi^s + f *_s \varphi^s$ 4-formlarının sırasıyla η_{1245} ve η_{4567} terimlerinin katsayıları karşılaştırılırsa,

$$f = -2/s \text{ ve } f = 0$$

elde edilir, $s > 0$ olduğundan, bu bir çelişkidir. O halde $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_4$ ve $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_4$ sınıfları da elenir.

$d\varphi^s$ 4-formunun Hodge-star operatörü ise, lokal koordinatlarda

$$\begin{aligned}
*_s d\varphi^s &= -2sZ_{145} + \tfrac{2}{s}Z_{146} + \tfrac{2}{s}Z_{147} + \tfrac{2}{s}Z_{156} - \tfrac{2}{s}Z_{157} - 2sZ_{167} \\
&\quad + \tfrac{2}{s}Z_{245} - 2sZ_{246} + \tfrac{2}{s}Z_{247} + \tfrac{2}{s}Z_{256} + 2sZ_{257} + \tfrac{2}{s}Z_{267} \\
&\quad + \tfrac{2}{s}Z_{345} + \tfrac{2}{s}Z_{346} - 2sZ_{347} - 2sZ_{356} - \tfrac{2}{s}Z_{357} + \tfrac{2}{s}Z_{367} \\
&= -2s^2\eta_{145} + 2\eta_{146} + 2\eta_{147} + 2\eta_{156} - 2\eta_{157} - 2s^2\eta_{167} \\
&\quad + 2\eta_{245} - 2s^2\eta_{246} + 2\eta_{247} + 2\eta_{256} + 2s^2\eta_{257} + 2\eta_{267} \\
&\quad + 2\eta_{345} + 2\eta_{346} - 2s^2\eta_{347} - 2s^2\eta_{356} - 2\eta_{357} + 2\eta_{367}
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$(*_s d\varphi^s) \wedge \varphi^s = 4s(1+s^2)\{-\eta_{124567} + \eta_{134567} - \eta_{234567}\}.$$

$(*_s d\varphi^s) \wedge \varphi^s$ ifadesini sıfır yapan pozitif bir s sabiti yoktur, o halde φ^s 3-formu $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3$ sınıfına ait olamaz.

β, M manifoldu üzerinde $d *_s \varphi^s = \beta \wedge *_s \varphi^s$ olacak şekilde bir 1-form olsun. Bu durumda β 1-formu, $\beta_i \in C^\infty(M)$ olmak üzere, lokal olarak

$$\beta = \sum \beta_i Z_i = s\beta_1\eta_1 + s\beta_2\eta_2 + s\beta_3\eta_3 + \beta_4\eta_4 + \beta_5\eta_5 + \beta_6\eta_6 + \beta_7\eta_7$$

şeklinde yazılabilir.

$$\begin{aligned}
\beta \wedge *_s\varphi^s &= -s^3\beta_3\eta_{12345} - s^3\beta_1\eta_{12346} - s^3\beta_2\eta_{12347} - s^3\beta_2\eta_{12356} \\
&\quad + s^3\beta_1\eta_{12357} - s^3\beta_3\eta_{12367} - s^2\beta_6\eta_{12456} - s^2\beta_7\eta_{12457} \\
&\quad - s^2\beta_4\eta_{12467} - s^2\beta_5\eta_{12567} + s^2\beta_4\eta_{13456} - s^2\beta_5\eta_{13457} \\
&\quad - s^2\beta_6\eta_{13467} + s^2\beta_7\eta_{13567} + s\beta_1\eta_{14567} + s^2\beta_5\eta_{23456} \\
&\quad + s^2\beta_4\eta_{23457} - s^2\beta_7\eta_{23467} - s^2\beta_6\eta_{23567} + s\beta_2\eta_{24567} + s\beta_3\eta_{34567}
\end{aligned}$$

ifadesinden, $d *_s \varphi^s$ ve $\beta \wedge *_s\varphi^s$ 5-formlarının karşılıklı terimlerinin katsayıları karşılaştırıldığında, $d *_s \varphi^s = \beta \wedge *_s\varphi^s$ olması için gerek ve yeter koşul $\frac{2}{s} = 4s$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 4s$ ve $\beta_4 = \beta_5 = \beta_6 = \beta_7 = 0$ eşitliklerinin sağlanmasıdır. $\frac{2}{s} = 4s$ eşitliğinden $s = \frac{1}{\sqrt{2}}$ pozitif sabiti bulunur. Global olarak da $s = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ve $\beta = 2(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3)$ için, $d *_s \varphi^s = \beta \wedge *_s\varphi^s$ eşitliğinin sağlandığı görülür. Sonuç olarak, φ_s 3-formunun $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$ sınıfına ait olması için gerek ve yeter koşul $s = \frac{1}{\sqrt{2}}$ olmasıdır. $s \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$ ise, φ^s temel 3-formu tanımlama bağıntılarının hiç birini sağlamaz, yani en geniş sınıftadır. □

Bölüm (6.2)'de elde edilen

$$\varphi_2 = -\frac{1}{2}\ \eta_1 \wedge d\eta_2 - \frac{1}{2}\ d\eta_1 \wedge \eta_3 + \frac{1}{2}\ \eta_2 \wedge d\eta_3 +\ \eta_{123}$$

temel 3-formu ele alındığında da $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$ sınıfından bir 3-form bulunur.

Teorem 6.5.2. *(M, g) 7-boyutlu, $(\xi_i, \eta_i, \Phi_i)_{i=1,2,3}$ 3-Sasaki yapısına sahip bir 3-Sasaki manifoldu ve*

$$F_1 = \eta_{123} \ \textit{ve}\ F_2 = -\frac{1}{2}\ \eta_1 \wedge d\eta_2 - \frac{1}{2}\ d\eta_1 \wedge \eta_3 + \frac{1}{2}\ \eta_2 \wedge d\eta_3$$

olsun. Bu durumda

$$F_1^s := s^3 F_1, \quad F_2^s := sF_2$$

olmak üzere,

$$\varphi^s := F_1^s + F_2^s = s^3 F_1 + sF_2$$

3-formu (M, g^s) manifoldu üzerinde pozitif bir 3-formdur. Ayrıca $s = \frac{1}{\sqrt{2}}$ için, bu 3-form G_2 yapıların $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$ sınıfındandır. $s \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$ için, φ^s yine en geniş sınıftadır.

Kanıt. φ^s 3-formunun pozitif olması için, $x, y \in \Gamma(TM)$ olmak üzere, (6.4) eşitliği sağlanmalıdır. Manifoldun bir açık kümesinde yukarıda bahsedilen, g^s metriğine göre ortonormal $\{Z_1, \cdots, Z_7\}$ tabanı seçilsin. Bu durumda

$$(Z_i \lrcorner \varphi^s) \wedge (Z_i \lrcorner \varphi^s) \wedge \varphi^s = 6g^s(Z_i, Z_i)d^s_{vol} = 6s^3 g(e_i, e_i)d_{vol}$$

ve $i \neq j$ için,

$$(Z_i \lrcorner \varphi^s) \wedge (Z_j \lrcorner \varphi^s) \wedge \varphi^s = 0$$

olmalıdır. Aşağıdaki ilişkiler kullanılırsa, bu eşitliklerin sağlandığı görülür:

$$
\begin{aligned}
Z_1 \lrcorner \varphi^s &= s^2\eta_{23} + \eta_{46} - \eta_{57}, \\
Z_2 \lrcorner \varphi^s &= -s^2\eta_{13} - \eta_{47} - \eta_{56}, \\
Z_3 \lrcorner \varphi^s &= s^2\eta_{12} + \eta_{45} + \eta_{67}, \\
Z_4 \lrcorner \varphi^s &= -s\eta_{16} + s\eta_{27} - s\eta_{35}, \\
Z_5 \lrcorner \varphi^s &= s\eta_{17} + s\eta_{26} + s\eta_{34}, \\
Z_6 \lrcorner \varphi^s &= s\eta_{14} - s\eta_{25} - s\eta_{37}, \\
Z_7 \lrcorner \varphi^s &= -s\eta_{15} - s\eta_{24} + s\eta_{36}.
\end{aligned}
$$

O halde φ_s bir pozitif 3-formdur. Şimdi de bu 3-formun hangi s değerleri için $\mathcal{W}$ sınıfının alt sınıflarına ait olduğu incelenecektir.

$$\varphi^s = +s^3\eta_{123} - \frac{s}{2}\ \eta_1 \wedge d\eta_2 - \frac{s}{2}\ d\eta_1 \wedge \eta_3 + \frac{s}{2}\ \eta_2 \wedge d\eta_3$$

3-formunun dış türevi

$$d\varphi^s = s^3 d\eta_1 \wedge \eta_{23} - s^3\eta_{13} \wedge d\eta_2 + s^3\eta_{12} \wedge d\eta_3 - \frac{s}{2} d\eta_1 \wedge d\eta_2 - \frac{s}{2} d\eta_1 \wedge d\eta_3 + \frac{s}{2} d\eta_2 \wedge d\eta_3.$$

Lokal koordinatlarda

$$
\begin{aligned}
d\varphi^s = 2s\{ & -\eta_{1245} + \eta_{1246} - s^2\eta_{1247} - s^2\eta_{1256} - \eta_{1257} - \eta_{1267} \\
& + \eta_{1345} + s^2\eta_{1346} - \eta_{1347} - \eta_{1356} - s^2\eta_{1357} + \eta_{1367} \\
& - s^2\eta_{2345} - \eta_{2346} - \eta_{2347} - \eta_{2356} + \eta_{2357} - s^2\eta_{2367}\}
\end{aligned}
$$

olduğundan, her $s > 0$ için, $d\varphi^s \neq 0$'dır. O halde hiç bir pozitif s sabiti için, φ^s 3-formu $\mathcal{P}$ veya $\mathcal{W}_2$ sınıflarına ait değildir.

M üzerinde $d\varphi^s = \alpha \wedge \varphi^s$ olacak şekilde bir α 1-formu var olsun. Bu 1-form

$$\alpha = \sum \alpha_i Z_i = s\alpha_1\eta_1 + s\alpha_2\eta_2 + s\alpha_3\eta_3 + \alpha_4\eta_4 + \alpha_5\eta_5 + \alpha_6\eta_6 + \alpha_7\eta_7$$

olarak yazılabilir. Ayrıca φ^s 3-formu lokal koordinatlarda

$$\varphi^s = s^3\eta_{123} + s\eta_{146} - s\eta_{157} - s\eta_{247} - s\eta_{256} + s\eta_{345} + s\eta_{367}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}\alpha\wedge\varphi^s = & -s^3\alpha_4\eta_{1234}-s^3\alpha_5\eta_{1235}-s^3\alpha_6\eta_{1236}-s^3\alpha_7\eta_{1237}-s^2\alpha_2\eta_{1246}-s^2\alpha_1\eta_{1247}\\ & -s^2\alpha_1\eta_{1256}+s^2\alpha_2\eta_{1257}+s^2\alpha_1\eta_{1345}-s^2\alpha_3\eta_{1346}+s^2\alpha_3\eta_{1357}+s^2\alpha_1\eta_{1367}\\ & +s\alpha_5\eta_{1456}+s\alpha_4\eta_{1457}-s\alpha_7\eta_{1467}-s\alpha_6\eta_{1567}+s^2\alpha_2\eta_{2345}+s^2\alpha_3\eta_{2347}\\ & +s^2\alpha_3\eta_{2356}+s^2\alpha_2\eta_{2367}+s\alpha_4\eta_{2456}-s\alpha_5\eta_{2457}-s\alpha_6\eta_{2467}+s\alpha_7\eta_{2567}\\ & -s\alpha_6\eta_{3456}-s\alpha_7\eta_{3457}-s\alpha_4\eta_{3467}-s\alpha_5\eta_{3567}\end{aligned}$$

eşitliği göz önüne alınarak, $d\varphi^s$ ve $\alpha\wedge\varphi^s$ 4-formlarının η_{1245} teriminin katsayıları karşılaştırılırsa $-2s=0$ bulunur. $s>0$ olduğundan, $d\varphi^s=\alpha\wedge\varphi^s$ olacak şekilde bir α 1-formu yoktur, yani $\widetilde{M}\notin\mathcal{W}_4$ ve $\widetilde{M}\notin\mathcal{W}_2\oplus\mathcal{W}_4$'tür.

Ayrıca lokal koordinatlarda $d\varphi^s\wedge\varphi^s=-12s^2\eta_{1234567}$ olduğundan her $s>0$ için, $d\varphi^s\wedge\varphi^s\neq 0$'dır ve böylece $\mathcal{W}_3$, $\mathcal{W}_2\oplus\mathcal{W}_3$, $\mathcal{W}_3\oplus\mathcal{W}_4$ ve $\mathcal{W}_2\oplus\mathcal{W}_3\oplus\mathcal{W}_4$ sınıfları elenir.

φ^s 3-formunun $*_s$ Hodge-star operatörü

$$\begin{aligned}*_s\varphi^s &= Z_{1245}+Z_{1267}+Z_{1347}+Z_{1356}+Z_{2346}-Z_{2357}+Z_{4567}\\ &= *\eta_{123}+s^2\eta_{1245}+s^2\eta_{1267}+s^2\eta_{1347}+s^2\eta_{1356}+s^2\eta_{2346}-s^2\eta_{2357},\end{aligned}$$

global olarak

$$*_s\varphi^s=*F_1-\frac{s^2}{2}\eta_{23}\wedge d\eta_2-\frac{s^2}{2}\eta_{13}\wedge d\eta_3-\frac{s^2}{2}\eta_{12}\wedge d\eta_1$$

şeklinde ifade edilebilir. $d\varphi^s$ 4-formunun η_{4567} teriminin katsayısı 0 iken, $*_s\varphi^s$ 4-formunun aynı teriminin katsayısı 1 olduğundan, $d\varphi^s=k*_s\varphi^s$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir k sabiti yoktur. O halde $\mathcal{W}_1$ ve $\mathcal{W}_1\oplus\mathcal{W}_2$ sınıfları da elenir.

$*_s\varphi^s$ 4-formunun dış türevi ise

$$\begin{aligned}d*_s\varphi^s &= \frac{s^2}{2}\{-\eta_2\wedge d\eta_1\wedge d\eta_1+\eta_1\wedge d\eta_1\wedge d\eta_2-\eta_3\wedge d\eta_1\wedge d\eta_3\\ &\quad +\eta_1\wedge d\eta_3\wedge d\eta_3-\eta_3\wedge d\eta_2\wedge d\eta_2+\eta_2\wedge d\eta_2\wedge d\eta_3\}\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Lokal olarak

$$\begin{aligned}d*_s\varphi^s &= 2s^2\{-\eta_{12345}+\eta_{12346}+\eta_{12347}+\eta_{12356}-\eta_{12357}-\eta_{12367}\}\\ &\quad +4s^2\{\eta_{14567}-\eta_{24567}-\eta_{34567}\}\end{aligned}$$

olduğundan $d*_s\varphi^s\neq 0$ ve sonuç olarak $M\notin\mathcal{W}_1\oplus\mathcal{W}_3$'tür.

M manifoldu üzerinde $d\varphi^s = \alpha \wedge \varphi^s + f *_s \varphi^s$ olacak şekilde α 1-formu ve f fonksiyonu var olsun. Bu durumda α 1-formu, $\alpha_i \in C^\infty(M)$ olmak üzere, lokal olarak $\alpha = \sum \alpha_i Z_i$ şeklinde yazılabilir. Lokal olarak $d\varphi^s$ ve $\alpha \wedge \varphi^s + f *_s \varphi^s$ 4-formlarının sırasıyla η_{1245} ve η_{4567} terimlerinin katsayıları karşılaştırılırsa,

$$f = -2/s \text{ ve } f = 0$$

elde edilir, $s > 0$ olduğundan, bu bir çelişkidir. O halde $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_4$ ve $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_4$ sınıfları da elenir.

$d\varphi^s$ 4-formunun Hodge-star operatörü ise, lokal koordinatlarda

$$\begin{aligned} *_s d\varphi^s \;=\; & -2s^2\eta_{145} - 2\eta_{146} - 2\eta_{147} - 2\eta_{156} + 2\eta_{157} - 2s^2\eta_{167} \\ & -2\eta_{245} - 2s^2\eta_{246} + 2\eta_{247} + 2\eta_{256} + 2s^2\eta_{257} - 2\eta_{267} \\ & -2\eta_{345} + 2\eta_{346} - 2s^2\eta_{347} - 2s^2\eta_{356} - 2\eta_{357} - 2\eta_{367} \end{aligned}$$

olduğundan,

$$(*_s d\varphi^s) \wedge \varphi^s \;=\; 4s(1+s^2)\{\eta_{124567} - \eta_{134567} - \eta_{234567}\}.$$

$(*_s d\varphi^s) \wedge \varphi^s$ ifadesini sıfır yapan pozitif bir s sabiti yoktur, o halde φ^s 3-formu $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3$ sınıfına ait olamaz.

β, M manifoldu üzerinde $d *_s \varphi^s = \beta \wedge *_s \varphi^s$ olacak şekilde bir 1-form olsun. Bu durumda β 1-formu, $\beta_i \in C^\infty(M)$ olmak üzere, lokal olarak

$$\beta = \sum \beta_i Z_i = s\beta_1\eta_1 + s\beta_2\eta_2 + s\beta_3\eta_3 + \beta_4\eta_4 + \beta_5\eta_5 + \beta_6\eta_6 + \beta_7\eta_7$$

şeklinde yazılabilir.

$$\begin{aligned} \beta \wedge *_s\varphi^s \;=\; & s^3\beta_3\eta_{12345} + s^3\beta_1\eta_{12346} - s^3\beta_2\eta_{12347} - s^3\beta_2\eta_{12356} \\ & -s^3\beta_1\eta_{12357} + s^3\beta_3\eta_{12367} + s^2\beta_6\eta_{12456} + s^2\beta_7\eta_{12457} \\ & +s^2\beta_4\eta_{12467} + s^2\beta_5\eta_{12567} + s^2\beta_4\eta_{13456} - s^2\beta_5\eta_{13457} \\ & -s^2\beta_6\eta_{13467} + s^2\beta_7\eta_{13567} + s\beta_1\eta_{14567} - s^2\beta_5\eta_{23456} \\ & -s^2\beta_4\eta_{23457} + s^2\beta_7\eta_{23467} + s^2\beta_6\eta_{23567} + s\beta_2\eta_{24567} + s\beta_3\eta_{34567} \end{aligned}$$

ifadesinden, $d *_s \varphi^s$ ve $\beta \wedge *_s\varphi^s$ 5-formlarının karşılıklı terimlerinin katsayıları karşılaştırıldığında, $d *_s \varphi^s = \beta \wedge *_s\varphi^s$ olması için gerek ve yeter koşul $\frac{2}{s} = 4s$, $\beta_1 = 4s$, $\beta_2 = \beta_3 = -4s$ ve $\beta_4 = \beta_5 = \beta_6 = \beta_7 = 0$ eşitliklerinin sağlanmasıdır.

$\frac{2}{s} = 4s$ eşitliğinden $s = \frac{1}{\sqrt{2}}$ pozitif sabiti bulunur. Global olarak da $s = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ve $\beta = 2(\eta_1 - \eta_2 - \eta_3)$ için, $d *_s \varphi^s = \beta \wedge *_s \varphi^s$ eşitliğinin sağlandığı görülür. Sonuç olarak, φ_s 3-formunun $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$ sınıfına ait olması için gerek ve yeter koşul $s = \frac{1}{\sqrt{2}}$ olmasıdır. $s \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$ ise, φ^s temel 3-formu tanımlama bağıntılarının hiç birini sağlamaz, yani en geniş sınıftadır. □

Bu kez de Bölüm (6.2)'de verilen

$$\varphi_3 = -\frac{1}{2}\,\eta_1 \wedge d\eta_2 + \frac{1}{2}\,d\eta_1 \wedge \eta_3 - \frac{1}{2}\,\eta_2 \wedge d\eta_3 + \ \eta_{123}$$

temel 3-formu için benzer hesaplar yapıldığında, yeni φ^s 3-formu yine $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$ sınıfındandır.

Teorem 6.5.3. *(M, g) 7-boyutlu, $(\xi_i, \eta_i, \Phi_i)_{i=1,2,3}$ 3-Sasaki yapısına sahip bir 3-Sasaki manifoldu ve*

$$F_1 = \eta_{123} \ ve \ F_2 = -\frac{1}{2}\,\eta_1 \wedge d\eta_2 + \frac{1}{2}\,d\eta_1 \wedge \eta_3 - \frac{1}{2}\,\eta_2 \wedge d\eta_3$$

olsun. Bu durumda

$$F_1^s := s^3 F_1, \quad F_2^s := sF_2$$

olmak üzere,

$$\varphi^s := F_1^s + F_2^s = s^3 F_1 + sF_2$$

3-formu (M, g^s) manifoldu üzerinde pozitif bir 3-formdur. Ayrıca $s = \frac{1}{\sqrt{2}}$ için, bu 3-form G_2 yapıların $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$ sınıfındandır. $s \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$ için, φ^s yine en geniş sınıftadır.

Kanıt. φ^s 3-formunun pozitif olması için, $x, y \in \Gamma(TM)$ olmak üzere, (6.4) eşitliği sağlanmalıdır. Manifoldun bir açık kümesinde yukarıda bahsedilen, g^s metriğine göre ortonormal $\{Z_1, \cdots, Z_7\}$ tabanı seçilsin. Bu durumda

$$(Z_i \lrcorner \varphi^s) \wedge (Z_i \lrcorner \varphi^s) \wedge \varphi^s = 6g^s(Z_i, Z_i) d^s_{vol} = 6s^3 g(e_i, e_i) d_{vol}$$

ve $i \neq j$ için,

$$(Z_i \lrcorner \varphi^s) \wedge (Z_j \lrcorner \varphi^s) \wedge \varphi^s = 0$$

olmalıdır. Aşağıdaki ilişkiler kullanılırsa, bu eşitliklerin sağlandığı görülür:

$$\begin{aligned}
Z_1 \lrcorner \varphi^s &= s^2\eta_{23} + \eta_{46} - \eta_{57}, \\
Z_2 \lrcorner \varphi^s &= -s^2\eta_{13} + \eta_{47} + \eta_{56}, \\
Z_3 \lrcorner \varphi^s &= s^2\eta_{12} - \eta_{45} - \eta_{67}, \\
Z_4 \lrcorner \varphi^s &= -s\eta_{16} - s\eta_{27} + s\eta_{35}, \\
Z_5 \lrcorner \varphi^s &= s\eta_{17} - s\eta_{26} - s\eta_{34}, \\
Z_6 \lrcorner \varphi^s &= s\eta_{14} + s\eta_{25} + s\eta_{37}, \\
Z_7 \lrcorner \varphi^s &= -s\eta_{15} + s\eta_{24} - s\eta_{36}.
\end{aligned}$$

O halde φ_s bir pozitif 3-formdur. Şimdi de bu 3-formun hangi s değerleri için $\mathcal{W}$ sınıfının alt sınıflarına ait olduğu incelenecektir.

$$\varphi^s = +s^3\eta_{123} - \frac{s}{2}\ \eta_1 \wedge d\eta_2 + \frac{s}{2}\ d\eta_1 \wedge \eta_3 - \frac{s}{2}\ \eta_2 \wedge d\eta_3$$

3-formunun dış türevi

$$d\varphi^s = s^3 d\eta_1 \wedge \eta_{23} - s^3\eta_{13} \wedge d\eta_2 + s^3\eta_{12} \wedge d\eta_3 - \frac{s}{2} d\eta_1 \wedge d\eta_2 + \frac{s}{2} d\eta_1 \wedge d\eta_3 - \frac{s}{2} d\eta_2 \wedge d\eta_3.$$

Lokal koordinatlarda

$$\begin{aligned}
d\varphi^s = \; & 2s\left\{\eta_{1245} - \eta_{1246} - s^2\eta_{1247} - s^2\eta_{1256} + \eta_{1257} + \eta_{1267}\right. \\
& +\eta_{1345} + s^2\eta_{1346} + \eta_{1347} + \eta_{1356} - s^2\eta_{1357} + \eta_{1367} \\
& \left.-s^2\eta_{2345} - \eta_{2346} + \eta_{2347} + \eta_{2356} + \eta_{2357} - s^2\eta_{2367}\right\}
\end{aligned}$$

olduğundan, her $s > 0$ için, $d\varphi^s \neq 0$'dır. O halde hiç bir pozitif s sabiti için, φ^s 3-formu $\mathcal{P}$ veya $\mathcal{W}_2$ sınıflarına ait değildir.

M üzerinde $d\varphi^s = \alpha \wedge \varphi^s$ olacak şekilde bir α 1-formu var olsun. Bu 1-form

$$\alpha = \sum \alpha_i Z_i = s\alpha_1\eta_1 + s\alpha_2\eta_2 + s\alpha_3\eta_3 + \alpha_4\eta_4 + \alpha_5\eta_5 + \alpha_6\eta_6 + \alpha_7\eta_7$$

olarak yazılabilir. Ayrıca φ^s 3-formu lokal koordinatlarda

$$\varphi^s = s^3\eta_{123} + s\eta_{146} - s\eta_{157} + s\eta_{247} + s\eta_{256} - s\eta_{345} - s\eta_{367}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}\alpha\wedge\varphi^s = & -s^3\alpha_4\eta_{1234}-s^3\alpha_5\eta_{1235}-s^3\alpha_6\eta_{1236}-s^3\alpha_7\eta_{1237}-s^2\alpha_2\eta_{1246}+s^2\alpha_1\eta_{1247}\\ & +s^2\alpha_1\eta_{1256}+s^2\alpha_2\eta_{1257}-s^2\alpha_1\eta_{1345}-s^2\alpha_3\eta_{1346}+s^2\alpha_3\eta_{1357}-s^2\alpha_1\eta_{1367}\\ & +s\alpha_5\eta_{1456}+s\alpha_4\eta_{1457}-s\alpha_7\eta_{1467}-s\alpha_6\eta_{1567}-s^2\alpha_2\eta_{2345}-s^2\alpha_3\eta_{2347}\\ & -s^2\alpha_3\eta_{2356}-s^2\alpha_2\eta_{2367}-s\alpha_4\eta_{2456}+s\alpha_5\eta_{2457}+s\alpha_6\eta_{2467}-s\alpha_7\eta_{2567}\\ & +s\alpha_6\eta_{3456}+s\alpha_7\eta_{3457}+s\alpha_4\eta_{3467}+s\alpha_5\eta_{3567}\end{aligned}$$

eşitliği göz önüne alınarak, $d\varphi^s$ ve $\alpha\wedge\varphi^s$ 4-formlarının η_{1245} teriminin katsayıları karşılaştırılırsa $2s=0$ bulunur. $s>0$ olduğundan, $d\varphi^s=\alpha\wedge\varphi^s$ olacak şekilde bir α 1-formu yoktur, yani $\widetilde{M}\notin\mathcal{W}_4$ ve $\widetilde{M}\notin\mathcal{W}_2\oplus\mathcal{W}_4$'tür.

Ayrıca lokal koordinatlarda $d\varphi^s\wedge\varphi^s=-12s^2\eta_{1234567}$ olduğundan her $s>0$ için, $d\varphi^s\wedge\varphi^s\neq 0$'dır ve böylece $\mathcal{W}_3$, $\mathcal{W}_2\oplus\mathcal{W}_3$, $\mathcal{W}_3\oplus\mathcal{W}_4$ ve $\mathcal{W}_2\oplus\mathcal{W}_3\oplus\mathcal{W}_4$ sınıfları elenir.

φ^s 3-formunun $*_s$ Hodge-star operatörü

$$*_s\varphi^s=*\eta_{123}-s^2\eta_{1245}-s^2\eta_{1267}-s^2\eta_{1347}-s^2\eta_{1356}+s^2\eta_{2346}-s^2\eta_{2357},$$

global olarak

$$*_s\varphi^s=*F_1-\frac{s^2}{2}\eta_{23}\wedge d\eta_2+\frac{s^2}{2}\eta_{13}\wedge d\eta_3+\frac{s^2}{2}\eta_{12}\wedge d\eta_1$$

şeklinde ifade edilebilir. $d\varphi^s$ 4-formunun η_{4567} teriminin katsayısı 0 iken, $*_s\varphi^s$ 4-formunun aynı teriminin katsayısı 1 olduğundan, $d\varphi^s=k*_s\varphi^s$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir k sabiti yoktur. O halde $\mathcal{W}_1$ ve $\mathcal{W}_1\oplus\mathcal{W}_2$ sınıfları da elenir.

$*_s\varphi^s$ 4-formunun dış türevi ise

$$\begin{aligned}d*_s\varphi^s = & \frac{s^2}{2}\{\eta_2\wedge d\eta_1\wedge d\eta_1-\eta_1\wedge d\eta_1\wedge d\eta_2+\eta_3\wedge d\eta_1\wedge d\eta_3\\ & -\eta_1\wedge d\eta_3\wedge d\eta_3-\eta_3\wedge d\eta_2\wedge d\eta_2+\eta_2\wedge d\eta_2\wedge d\eta_3\}\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Lokal olarak

$$\begin{aligned}d*_s\varphi^s = & 2s^2\{\eta_{12345}-\eta_{12346}+\eta_{12347}+\eta_{12356}+\eta_{12357}+\eta_{12367}\}\\ & +4s^2\{-\eta_{14567}+\eta_{24567}-\eta_{34567}\}\end{aligned}$$

olduğundan $d*_s\varphi^s\neq 0$ ve sonuç olarak $M\notin\mathcal{W}_1\oplus\mathcal{W}_3$'tür.

M manifoldu üzerinde $d\varphi^s = \alpha \wedge \varphi^s + f *_s \varphi^s$ olacak şekilde α 1-formu ve f fonksiyonu var olsun. Bu durumda α 1-formu, $\alpha_i \in C^\infty(M)$ olmak üzere, lokal olarak $\alpha = \sum \alpha_i Z_i$ şeklinde yazılabilir. Lokal olarak $d\varphi^s$ ve $\alpha \wedge \varphi^s + f *_s \varphi^s$ 4-formlarının sırasıyla η_{1245} ve η_{4567} terimlerinin katsayıları karşılaştırılırsa,

$$f = -2/s \text{ ve } f = 0$$

elde edilir, $s > 0$ olduğundan, bu bir çelişkidir. O halde $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_4$ ve $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_4$ sınıfları da elenir.

$d\varphi^s$ 4-formunun Hodge-star operatörü ise, lokal koordinatlarda

$$\begin{aligned} *_s d\varphi^s &= -2s^2\eta_{145} - 2\eta_{146} + 2\eta_{147} + 2\eta_{156} + 2\eta_{157} - 2s^2\eta_{167} \\ &\quad -2\eta_{245} - 2s^2\eta_{246} - 2\eta_{247} - 2\eta_{256} + 2s^2\eta_{257} - 2\eta_{267} \\ &\quad +2\eta_{345} - 2\eta_{346} - 2s^2\eta_{347} - 2s^2\eta_{356} + 2\eta_{357} + 2\eta_{367} \end{aligned}$$

olduğundan,

$$(*_s d\varphi^s) \wedge \varphi^s = 4s(1+s^2)\{\eta_{124567} + \eta_{134567} + \eta_{234567}\}.$$

$(*_s d\varphi^s) \wedge \varphi^s$ ifadesini sıfır yapan pozitif bir s sabiti yoktur, o halde φ^s 3-formu $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3$ sınıfına ait olamaz.

β, M manifoldu üzerinde $d *_s \varphi^s = \beta \wedge *_s \varphi^s$ olacak şekilde bir 1-form olsun. Bu durumda β 1-formu, $\beta_i \in C^\infty(M)$ olmak üzere, lokal olarak

$$\beta = \sum \beta_i Z_i = s\beta_1\eta_1 + s\beta_2\eta_2 + s\beta_3\eta_3 + \beta_4\eta_4 + \beta_5\eta_5 + \beta_6\eta_6 + \beta_7\eta_7$$

şeklinde yazılabilir.

$$\begin{aligned} \beta \wedge *_s\varphi^s &= -s^3\beta_3\eta_{12345} + s^3\beta_1\eta_{12346} + s^3\beta_2\eta_{12347} + s^3\beta_2\eta_{12356} \\ &\quad -s^3\beta_1\eta_{12357} - s^3\beta_3\eta_{12367} - s^2\beta_6\eta_{12456} - s^2\beta_7\eta_{12457} \\ &\quad -s^2\beta_4\eta_{12467} - s^2\beta_5\eta_{12567} - s^2\beta_4\eta_{13456} + s^2\beta_5\eta_{13457} \\ &\quad +s^2\beta_6\eta_{13467} - s^2\beta_7\eta_{13567} + s\beta_1\eta_{14567} - s^2\beta_5\eta_{23456} \\ &\quad -s^2\beta_4\eta_{23457} + s^2\beta_7\eta_{23467} + s^2\beta_6\eta_{23567} + s\beta_2\eta_{24567} + s\beta_3\eta_{34567} \end{aligned}$$

ifadesinden, $d *_s \varphi^s$ ve $\beta \wedge *_s\varphi^s$ 5-formlarının karşılıklı terimlerinin katsayıları karşılaştırıldığında, $d *_s \varphi^s = \beta \wedge *_s\varphi^s$ olması için gerek ve yeter koşul $\frac{2}{s} = 4s$, $\beta_1 = \beta_3 = -4s$, $\beta_2 = 4s$ ve $\beta_4 = \beta_5 = \beta_6 = \beta_7 = 0$ eşitliklerinin sağlanmasıdır.

$\frac{2}{s} = 4s$ eşitliğinden $s = \frac{1}{\sqrt{2}}$ pozitif sabiti bulunur. Global olarak da $s = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ve $\beta = 2(-\eta_1+\eta_2-\eta_3)$ için, $d{*_s}\varphi^s = \beta \wedge {*_s}\varphi^s$ eşitliğinin sağlandığı görülür. Sonuç olarak, φ_s 3-formunun $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$ sınıfına ait olması için gerek ve yeter koşul $s = \frac{1}{\sqrt{2}}$ olmasıdır. $s \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$ ise, φ^s temel 3-formu tanımlama bağıntılarının hiç birini sağlamaz, yani en geniş sınıftadır. □

Son olarak

$$\varphi_4 = \frac{1}{2}\ \eta_1 \wedge d\eta_2 - \frac{1}{2}\ d\eta_1 \wedge \eta_3 - \frac{1}{2}\ \eta_2 \wedge d\eta_3 +\ \eta_{123}$$

temel 3-formu için de benzer hesaplamalar yapılmıştır.

Teorem 6.5.4. (M, g) *7-boyutlu,* $(\xi_i, \eta_i, \Phi_i)_{i=1,2,3}$ *3-Sasaki yapısına sahip bir 3-Sasaki manifoldu ve*

$$F_1 = \eta_{123} \text{ ve } F_2 = \frac{1}{2}\ \eta_1 \wedge d\eta_2 - \frac{1}{2}\ d\eta_1 \wedge \eta_3 - \frac{1}{2}\ \eta_2 \wedge d\eta_3$$

olsun. Bu durumda

$$F_1^s := s^3 F_1, \quad F_2^s := sF_2$$

olmak üzere,

$$\varphi^s := F_1^s + F_2^s = s^3 F_1 + sF_2$$

3-formu (M, g^s) *manifoldu üzerinde pozitif bir 3-formdur. Ayrıca* $s = \frac{1}{\sqrt{2}}$ *için, bu 3-form* G_2 *yapıların* $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$ *sınıfındandır.* $s \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$ *için,* φ^s *yine en geniş sınıftadır.*

Kanıt. φ^s 3-formunun pozitif olması için, $x, y \in \Gamma(TM)$ olmak üzere, (6.4) eşitliği sağlanmalıdır. Manifoldun açık bir kümesinde yukarıda bahsedilen, g^s metriğine göre ortonormal $\{Z_1, \cdots, Z_7\}$ tabanı seçilsin. Bu durumda

$$(Z_i \lrcorner \varphi^s) \wedge (Z_i \lrcorner \varphi^s) \wedge \varphi^s = 6g^s(Z_i, Z_i)d^s_{vol} = 6s^3 g(e_i, e_i)d_{vol}$$

ve $i \neq j$ için,

$$(Z_i \lrcorner \varphi^s) \wedge (Z_j \lrcorner \varphi^s) \wedge \varphi^s = 0$$

olmalıdır. Aşağıdaki ilişkiler kullanılırsa, bu eşitliklerin sağlandığı görülür:

$$\begin{aligned}
Z_1 \lrcorner \varphi^s &= s^2\eta_{23} - \eta_{46} + \eta_{57}, \\
Z_2 \lrcorner \varphi^s &= -s^2\eta_{13} + \eta_{47} + \eta_{56}, \\
Z_3 \lrcorner \varphi^s &= s^2\eta_{12} + \eta_{45} + \eta_{67}, \\
Z_4 \lrcorner \varphi^s &= s\eta_{16} - s\eta_{27} - s\eta_{35}, \\
Z_5 \lrcorner \varphi^s &= -s\eta_{17} - s\eta_{26} + s\eta_{34}, \\
Z_6 \lrcorner \varphi^s &= -s\eta_{14} + s\eta_{25} - s\eta_{37}, \\
Z_7 \lrcorner \varphi^s &= s\eta_{15} + s\eta_{24} + s\eta_{36}.
\end{aligned}$$

O halde φ_s bir pozitif 3-formdur. Şimdi de bu 3-formun hangi s değerleri için $\mathcal{W}$ sınıfının alt sınıflarına ait olduğu incelenecektir.

$$\varphi^s = +s^3\eta_{123} + \frac{s}{2}\,\eta_1 \wedge d\eta_2 - \frac{s}{2}\,d\eta_1 \wedge \eta_3 - \frac{s}{2}\,\eta_2 \wedge d\eta_3$$

3-formunun dış türevi

$$d\varphi^s = s^3 d\eta_1 \wedge \eta_{23} - s^3\eta_{13} \wedge d\eta_2 + s^3\eta_{12} \wedge d\eta_3 + \frac{s}{2} d\eta_1 \wedge d\eta_2 - \frac{s}{2} d\eta_1 \wedge d\eta_3 - \frac{s}{2} d\eta_2 \wedge d\eta_3.$$

Lokal koordinatlarda

$$\begin{aligned}
d\varphi^s = \; & 2s \left\{ -\eta_{1245} - \eta_{1246} - s^2\eta_{1247} - s^2\eta_{1256} + \eta_{1257} - \eta_{1267} \right. \\
& -\eta_{1345} + s^2\eta_{1346} + \eta_{1347} + \eta_{1356} - s^2\eta_{1357} - \eta_{1367} \\
& \left. -s^2\eta_{2345} + \eta_{2346} - \eta_{2347} - \eta_{2356} - \eta_{2357} - s^2\eta_{2367} \right\}
\end{aligned}$$

olduğundan, her $s > 0$ için, $d\varphi^s \neq 0$'dır. O halde hiç bir pozitif s sabiti için, φ^s 3-formu $\mathcal{P}$ veya $\mathcal{W}_2$ sınıflarına ait değildir.

M üzerinde $d\varphi^s = \alpha \wedge \varphi^s$ olacak şekilde bir α 1-formu var olsun. Bu 1-form

$$\alpha = \sum \alpha_i Z_i = s\alpha_1\eta_1 + s\alpha_2\eta_2 + s\alpha_3\eta_3 + \alpha_4\eta_4 + \alpha_5\eta_5 + \alpha_6\eta_6 + \alpha_7\eta_7$$

olarak yazılabilir. Ayrıca φ^s 3-formu lokal koordinatlarda

$$\varphi^s = s^3\eta_{123} - s\eta_{146} + s\eta_{157} + s\eta_{247} + s\eta_{256} + s\eta_{345} + s\eta_{367}$$

olduğundan, $\alpha \wedge \varphi^s$ hesaplanır, $d\varphi^s$ ve $\alpha \wedge \varphi^s$ 4-formlarının η_{1245} teriminin katsayıları karşılaştırılırsa $-2s = 0$ bulunur. $s > 0$ olduğundan, $d\varphi^s = \alpha \wedge \varphi^s$ olacak şekilde bir α 1-formu yoktur, yani $\widetilde{M} \notin \mathcal{W}_4$ ve $\widetilde{M} \notin \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_4$'tür.

Ayrıca lokal koordinatlarda $d\varphi^s \wedge \varphi^s = -12s^2\eta_{1234567}$ olduğundan her $s > 0$ için, $d\varphi^s \wedge \varphi^s \neq 0$'dır ve böylece $\mathcal{W}_3$, $\mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3$, $\mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$ ve $\mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$ sınıfları elenir.

φ^s 3-formunun $*_s$ Hodge-star operatörü

$$*_s\varphi^s = *\eta_{123} + s^2\eta_{1245} + s^2\eta_{1267} - s^2\eta_{1347} - s^2\eta_{1356} - s^2\eta_{2346} + s^2\eta_{2357},$$

global olarak

$$*_s\varphi^s = *F_1 + \frac{s^2}{2}\eta_{23} \wedge d\eta_2 + \frac{s^2}{2}\eta_{13} \wedge d\eta_3 - \frac{s^2}{2}\eta_{12} \wedge d\eta_1$$

şeklinde ifade edilebilir. $d\varphi^s$ 4-formunun η_{4567} teriminin katsayısı 0 iken, $*_s\varphi^s$ 4-formunun aynı teriminin katsayısı 1 olduğundan, $d\varphi^s = k *_s \varphi^s$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir k sabiti yoktur. O halde $\mathcal{W}_1$ ve $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2$ sınıfları da elenir.

$*_s\varphi^s$ 4-formunun dış türevi ise

$$\begin{aligned} d *_s \varphi^s &= \frac{s^2}{2}\{-\eta_2 \wedge d\eta_1 \wedge d\eta_1 + \eta_1 \wedge d\eta_1 \wedge d\eta_2 + \eta_3 \wedge d\eta_1 \wedge d\eta_3 \\ &\quad -\eta_1 \wedge d\eta_3 \wedge d\eta_3 + \eta_3 \wedge d\eta_2 \wedge d\eta_2 - \eta_2 \wedge d\eta_2 \wedge d\eta_3\} \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Lokal olarak

$$\begin{aligned} d *_s \varphi^s &= 2s^2\{\eta_{12345} + \eta_{12346} - \eta_{12347} - \eta_{12356} - \eta_{12357} + \eta_{12367}\} \\ &\quad +4s^2\{-\eta_{14567} - \eta_{24567} + \eta_{34567}\} \end{aligned}$$

olduğundan $d *_s \varphi^s \neq 0$ ve sonuç olarak $M \notin \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3$'tür.

M manifoldu üzerinde $d\varphi^s = \alpha \wedge \varphi^s + f *_s \varphi^s$ olacak şekilde α 1-formu ve f fonksiyonu var olsun. Bu durumda α 1-formu, $\alpha_i \in C^\infty(M)$ olmak üzere, lokal olarak $\alpha = \sum \alpha_i Z_i$ şeklinde yazılabilir. Lokal olarak $d\varphi^s$ ve $\alpha \wedge \varphi^s + f *_s \varphi^s$ 4-formlarının sırasıyla η_{1245} ve η_{4567} terimlerinin katsayıları karşılaştırılırsa,

$$f = -2/s \text{ ve } f = 0$$

elde edilir, $s > 0$ olduğundan, bu bir çelişkidir. O halde $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_4$ ve $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_4$ sınıfları da elenir.

$d\varphi^s$ 4-formunun Hodge-star operatörü ise, lokal koordinatlarda

$$\begin{aligned} *_s d\varphi^s &= -2s^2\eta_{145} + 2\eta_{146} - 2\eta_{147} - 2\eta_{156} - 2\eta_{157} - 2s^2\eta_{167} \\ &\quad +2\eta_{245} - 2s^2\eta_{246} - 2\eta_{247} - 2\eta_{256} + 2s^2\eta_{257} + 2\eta_{267} \\ &\quad -2\eta_{345} - 2\eta_{346} - 2s^2\eta_{347} - 2s^2\eta_{356} + 2\eta_{357} - 2\eta_{367} \end{aligned}$$

olduğundan,

$$(*_s d\varphi^s) \wedge \varphi^s \;=\; 4s(1+s^2)\{-\eta_{124567} - \eta_{134567} + \eta_{234567}\}.$$

$(*_s d\varphi^s) \wedge \varphi^s$ ifadesini sıfır yapan pozitif bir s sabiti yoktur, o halde φ^s 3-formu $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3$ sınıfına ait olamaz.

β, M manifoldu üzerinde $d*_s \varphi^s = \beta \wedge *_s\varphi^s$ olacak şekilde bir 1-form olsun. Bu durumda β 1-formu, $\beta_i \in C^\infty(M)$ olmak üzere, lokal olarak

$$\beta = \sum \beta_i Z_i = s\beta_1\eta_1 + s\beta_2\eta_2 + s\beta_3\eta_3 + \beta_4\eta_4 + \beta_5\eta_5 + \beta_6\eta_6 + \beta_7\eta_7$$

şeklinde yazılabilir.

$$\begin{aligned}\beta \wedge *_s\varphi^s \;=\;& s^3\beta_3\eta_{12345} - s^3\beta_1\eta_{12346} + s^3\beta_2\eta_{12347} + s^3\beta_2\eta_{12356} \\ &+s^3\beta_1\eta_{12357} + s^3\beta_3\eta_{12367} + s^2\beta_6\eta_{12456} + s^2\beta_7\eta_{12457} \\ &+s^2\beta_4\eta_{12467} + s^2\beta_5\eta_{12567} - s^2\beta_4\eta_{13456} + s^2\beta_5\eta_{13457} \\ &+s^2\beta_6\eta_{13467} - s^2\beta_7\eta_{13567} + s\beta_1\eta_{14567} + s^2\beta_5\eta_{23456} \\ &+s^2\beta_4\eta_{23457} - s^2\beta_7\eta_{23467} - s^2\beta_6\eta_{23567} + s\beta_2\eta_{24567} + s\beta_3\eta_{34567}\end{aligned}$$

ifadesinden, $d *_s \varphi^s$ ve $\beta \wedge *_s\varphi^s$ 5-formlarının karşılıklı terimlerinin katsayıları karşılaştırıldığında, $d *_s \varphi^s = \beta \wedge *_s\varphi^s$ olması için gerek ve yeter koşul $\frac{2}{s} = 4s$, $\beta_1 = \beta_2 = -4s$, $\beta_3 = 4s$ ve $\beta_4 = \beta_5 = \beta_6 = \beta_7 = 0$ eşitliklerinin sağlanmasıdır. $\frac{2}{s} = 4s$ eşitliğinden $s = \frac{1}{\sqrt{2}}$ pozitif sabiti bulunur. Global olarak da $s = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ve $\beta = 2(-\eta_1 - \eta_2 + \eta_3)$ için, $d*_s\varphi^s = \beta \wedge *_s\varphi^s$ eşitliğinin sağlandığı görülür. Sonuç olarak, φ_s 3-formunun $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$ sınıfına ait olması için gerek ve yeter koşul $s = \frac{1}{\sqrt{2}}$ olmasıdır. $s \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$ ise, φ^s temel 3-formu tanımlama bağıntılarının hiç birini sağlamaz, yani en geniş sınıftadır. □

Sonuç olarak, $s = \frac{1}{\sqrt{2}}$ olmak üzere, Teorem (6.5.1), Teorem (6.5.2), Teorem (6.5.3) ve Teorem (6.5.4)'te verilen φ^s ile gösterilen temel 3-formlar $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$ sınıfına aittir. O halde her bir manifoldun g^s Riemann metriğinin, Levi-Civita kovaryant türevinden başka; torsiyonu anti-simetrik olan tek türlü belirli bir metrik kovaryant türevi vardır. [9] çalışmasında $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$ sınıfından bir φ 3-formunun, torsiyonu anti-simetrik olan metrik kovaryant türevinin torsiyonu; β 1-formu $d * \varphi = \beta \wedge *\varphi$ eşitliğini sağlayan 1-form olmak üzere,

$$T = \frac{1}{6} g(d\varphi, *\varphi)\varphi - *d\varphi + *(\beta \wedge \varphi)$$

olarak verilmiştir. Örnek olarak, Teorem (6.5.1)'de inşa edilen, $s = \frac{1}{\sqrt{2}}$ olmak üzere,

$$\varphi^s = +s^3\eta_{123} + s\frac{1}{2}\ \eta_1 \wedge d\eta_2 + s\frac{1}{2}\ d\eta_1 \wedge \eta_3 + s\frac{1}{2}\ \eta_2 \wedge d\eta_3$$

3-formuna karşılık gelen g^s Riemann metriğinin, anti-simetrik torsiyonlu metrik kovaryant türevinin torsiyonu hesaplanırsa, aşağıdaki eşitlik bulunur:

$$T = \frac{1}{2}\eta_1 \wedge d\eta_1 + \frac{1}{2}\eta_2 \wedge d\eta_2 + \frac{1}{2}\eta_3 \wedge d\eta_3 + 2\eta_{123}.$$

7 G_2-MORFİZMLERLE G_2 YAPILARIN İLİŞKİSİ

(M_1,φ_1) ve (M_2,φ_2) ikilileri G_2 yapısına sahip manifoldlar olsun. Eğer $F^*\varphi_2=\varphi_1$ olacak şekilde bir $F: M_1 \longrightarrow M_2$ difeomorfizmi varsa, (M_1,φ_1) ve (M_2,φ_2) ikililerine G_2-denk manifoldlar denir [28]. G_2-denk olma G_2 yapısına sahip manifoldlar üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

Bu bölümde G_2-denk iki manifoldun üzerindeki temel 3-formların Fern*á*ndez ve Gray sınıflandırmasına göre aynı sınıfta oldukları gösterilmiştir.

7.1 G_2-denk Manifoldlarda Bazı Eşitlikler

(M_1,φ_1) ve (M_2,φ_2) manifoldları G_2-denk olsun. Bu durumda $F^*\varphi_2=\varphi_1$ olacak şekilde bir $F: M_1 \longrightarrow M_2$ difeomorfizmi vardır. M_1 ve M_2 manifoldları üzerindeki φ_1 ve φ_2 temel 3-formlarının belirledikleri Riemann metrikleri g_1 ve g_2, hacim formları ise Ω_1 ve Ω_2 ile gösterilsin. Her $x,y\in TM_1$ için, (3.3) eşitliğinden,

$$\begin{aligned}
6g_1(x,y)\Omega_1 &= (x\lrcorner\varphi_1)\wedge(y\lrcorner\varphi_1)\wedge\varphi_1\\
&= (x\lrcorner F^*\varphi_2)\wedge(y\lrcorner F^*\varphi_2)\wedge F^*\varphi_2\\
&= (F^*(F_*(x)\lrcorner\varphi_2))\wedge(F^*(F_*(y)\lrcorner\varphi_2))\wedge F^*\varphi_2\\
&= F^*\{(F_*(x)\lrcorner\varphi_2)\wedge(F_*(y)\lrcorner\varphi_2)\wedge\varphi_2\}\\
&= F^*\{6g_2(F_*(x),F_*(y))\Omega_2\}\\
&= 6g_2(F_*(x),F_*(y))F^*\Omega_2
\end{aligned}$$

olur. M_1 manifoldunun bir açık kümesi üzerinde lokal ortonormal bir $\{e_1,\ldots,e_7\}$ çatısı alınırsa,

$$\begin{aligned}
g_1(x,y) &= g_1(x,y)\Omega_1(e_1,\ldots,e_7)\\
&= g_2(F_*(x),F_*(y))F^*\Omega_2(e_1,\ldots,e_7)\\
&= g_2(F_*(x),F_*(y))\Omega_2(F_*(e_1),\ldots,F_*(e_7))\\
&= g_2(F_*(x),F_*(y))(detg_2(F_*(e_i),F_*(e_j)))^{1/2}
\end{aligned}$$

ilişkisinden, (M_1,φ_1) ve (M_2,φ_2) G_2-denk manifoldlar ise,

$$k=(detg_2(F_*(e_i),F_*(e_j)))^{1/2}$$

olmak üzere,

$$kF^*g_2 = g_1$$

bulunur.

P_1 ve P_2 sırasıyla φ_1 ve φ_2 3-formları tarafından belirlenen 2-katlı vektör çarpımları olsun. Her $x, y \in TM_1$ için,

$$\begin{aligned} g_2(P_2(F_*(x), F_*(y)), F_*(z)) &= \varphi_2(F_*(x), F_*(y), F_*(z)) \\ &= \varphi_1(x, y, z) \\ &= g_1(P_1(x, y), z) \\ &= g_2(kF_*(P_1(x, y)), F_*(z)) \end{aligned}$$

olur. g_2 Riemann metriği pozitif tanımlı olduğundan, non-dejeneredir. Ayrıca F difeomorfizm olduğundan, $F_* : TM_1 \longrightarrow TM_2$ izomorfizmdir [29]. O halde

$$F^*P_2 = kF_* \circ P_1$$

elde edilir.

$F_* : TM_1 \longrightarrow TM_2$ izomorfizmi bir $F^* : \Lambda^p(TM_2)^* \longrightarrow \Lambda^p(TM_1)^*$ izomorfizmi belirler. g_1 ve g_2 Riemann metriklerini $\Lambda^p(TM_1)^*$ ve $\Lambda^p(TM_2)^*$ uzaylarına genelleştirmek için, öncelikle α ve β M_2 üzerinde 1-formlar olsun. Bu durumda $F^*\alpha$ ve $F^*\beta$ M_1 üzerinde 1-formlardır. Her $x \in TM_2$ için, $\sharp$ herhangi bir 1-formun veya vektör alanının metrik dualini göstermek üzere,

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= g_2(x, \alpha^\sharp) \\ &= g_2(F_*((F_*)^{-1}(x)), F_*((F_*)^{-1}(\alpha^\sharp))) \\ &= k^{-1}g_1((F_*)^{-1}(x), (F_*)^{-1}(\alpha^\sharp)) \\ &= k^{-1}((F_*)^{-1}(\alpha^\sharp))^\sharp((F_*)^{-1}(x)) \end{aligned}$$

olduğundan,

$$(F^*\alpha)^\sharp = k^{-1}(F_*)^{-1}(\alpha^\sharp)$$

eşitliği sağlanır. Buradan,

$$\begin{aligned} g_1(F^*\alpha, F^*\beta) &= g_1((F^*\alpha)^\sharp, (F^*\beta)^\sharp) \\ &= k^{-2}g_1((F_*)^{-1}(\alpha^\sharp), (F_*)^{-1}(\beta^\sharp)) \\ &= k^{-2}kg_2(\alpha^\sharp, \beta^\sharp) \\ &= k^{-1}g_2(\alpha, \beta) \end{aligned}$$

ifadesine ulaşılır.

M_2 üzerinde $\alpha = \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_p$ ve $\beta = \beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_p$ p-formları alınsın. $F^*(\alpha) = F^*(\alpha_1) \wedge \ldots \wedge F^*(\alpha_p)$ ve $F^*(\beta) = F^*(\beta_1) \wedge \ldots \wedge F^*(\beta_p)$ M_1 üzerinde p-formlar olduklarından,

$$\begin{aligned} g_1(F^*(\alpha), F^*(\beta)) &= g_1(F^*(\alpha_1) \wedge \ldots \wedge F^*(\alpha_p), F^*(\beta_1) \wedge \ldots \wedge F^*(\beta_p)) \\ &= det g_1(F^*(\alpha_i), F^*(\beta_j)) \\ &= k^{-p} det g_2(\alpha_i, \beta_j) \\ &= k^{-p} g_2(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_p, \beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_p) \\ &= k^{-p} g_2(\alpha, \beta) \end{aligned}$$

bulunur. $k = (det g_2(F_*(e_i), F_*(e_j)))^{1/2}$ olduğundan,

$$\begin{aligned} k^2 &= det g_2(F_*(e_i), F_*(e_j)) \\ &= det g_2((F_*(e_i))^\sharp, (F_*(e_j))^\sharp) \\ &= det(k^{-1} g_1(e_i, e_j)) \\ &= k^{-7} g_1(e_1 \wedge \ldots \wedge e_7, e_1 \wedge \ldots \wedge e_7) \\ &= k^{-7}. \end{aligned}$$

eşitliğinden ise $k^9 = 1$, yani $k = 1$ bulunur.

Sonuç olarak (M_1, φ_1) ve (M_2, φ_2) G_2-denk ise,

$$F^* g_2 = g_1, \tag{7.1}$$

$$F^* P_2 = F_* \circ P_1 \tag{7.2}$$

ilişkileri vardır. Tersine (7.1) ve (7.2) eşitlikleri gerçekleniyorsa da (M_1, φ_1) ve (M_2, φ_2) manifoldları G_2-denktir.

g_1 ve g_2 metriklerinin belirledikleri Hodge-star operatörleri sırasıyla $*_1$ ve $*_2$ olsun. α ve β M_2 üzerinde sırasıyla p ve 7-p formlar ise, $F^*\alpha$ ve $F^*\beta$ da M_1 üzerinde p ve 7-p formlardır. $\{e_1, \ldots, e_7\}$ kümesi M_1 manifoldunun bir açık kümesi üzerinde ortonormal bir çatı olsun. Bu durumda

$m = (F^*\Omega_2)(e_1, \ldots, e_7)$ için,

$$\begin{aligned} g_2(*_2\alpha, \beta) &= g_2(\alpha \wedge \beta, \Omega_2) \\ &= g_1(F^*(\alpha \wedge \beta), F^*\Omega_2) \\ &= g_1(F^*\alpha \wedge F^*\beta, m\Omega_1) \\ &= mg_1(*_1 F^*\alpha, F^*\beta) \\ &= mg_1(F^*((F^*)^{-1}(*_1 F^*\alpha)), F^*((F^*)^{-1}(F^*\beta))) \\ &= mg_2((F^*)^{-1}(*_1 F^*\alpha), \beta) \end{aligned}$$

olduğundan,

$$F^*(*_2\alpha) = m *_1 F^*\alpha.$$

F_* izomorfizm olduğundan, $w', x', y', z' \in TM_2$ için,
$F_*(w) = w', F_*(x) = x', F_*(y) = y', F_*(z) = z'$ olacak şekilde $w, x, y, z \in TM_1$ vardır. [5]'te verilen

$$*\varphi(w, x, y, z) = \frac{1}{3} g(w, \mathfrak{S}_{xyz} P(P(x, y), z))$$

formülü kullanılırsa,

$$\begin{aligned} *_2\varphi_2(w', x', y', z') &= *_2\varphi_2(F_*(w), F_*(x), F_*(y), F_*(z)) \\ &= \tfrac{1}{3} g_2(F_*(w), \mathfrak{S}_{xyz} P_2(P_2(F_*(x), F_*(y)), F_*(z))) \\ &= \tfrac{1}{3} g_2(F_*(w), \mathfrak{S}_{xyz} P_2(F_*(P_1(x, y)), F_*(z))) \\ &= \tfrac{1}{3} g_2(F_*(w), \mathfrak{S}_{xyz} F_*(P_1(P_1(x, y), z)) \\ &= \tfrac{1}{3} g_1(w, \mathfrak{S}_{xyz} P_1(P_1(x, y), z)) \\ &= *_1\varphi_1(w, x, y, z) \end{aligned}$$

olduğundan,

$$F^*(*_2\varphi_2) = *_1\varphi_1$$

ilişkisi bulunur. $F^*(*_2\alpha) = m *_1 F^*\alpha$ eşitliğinde $\alpha = \varphi_2$ alınırsa, $m = 1$ olduğu görülür. Yani M_2 üzerinde her α p-formu için,

$$F^*(*_2\alpha) = *_1 F^*\alpha. \tag{7.3}$$

7.2 G_2-denk manifoldlar ve G_2 Yapıların Tanımlama Bağıntıları

(M_1, φ_1) ve (M_2, φ_2) G_2-denk manifoldlar olsun. $F^*\varphi_2 = \varphi_1$ olacak şekilde bir $F : M_1 \longrightarrow M_2$ difeomorfizmi vardır. $\mathcal{U}$, [5]'teki sınıflandırmaya göre, G_2

yapıları tanımlayan 16 sınıftan birini belirtmek üzere, $M_1 \in \mathcal{U}$ olması için gerek ve yeter koşulun $M_2 \in \mathcal{U}$ olduğu gösterilecektir. Bunun için G_2 sınıfların Cabrera'da verilen tanımlama bağıntıları [6] ile, önceki bölümde bulunan (7.1), (7.2) ve (7.3) ilişkileri kullanılacaktır. Her sınıf ayrı ayrı incelenecektir.

$\mathcal{P}$: $M_1 \in \mathcal{P}$ olsun. Bu durumda $d\varphi_1 = 0$ ve $d *_1 \varphi_1 = 0$'dır. $0 = d\varphi_1 = dF^*\varphi_2 = F^*d\varphi_2$ [28] ve $0 = d *_1 \varphi_1 = d(F^*(*_2\varphi_2)) = F^*(d *_2 \varphi_2)$ eşitliklerinden, F^* izomorfizm olduğundan, $d\varphi_2 = 0$ ve $d *_2 \varphi_2 = 0$ bulunur. O halde $M_2 \in \mathcal{P}$'dir.

$\mathcal{W}_\mathbf{1}$: $M_1 \in \mathcal{W}_1$ olsun. Bu durumda sıfırdan farklı bir k sabiti için, $d\varphi_1 = k*_1\varphi_1$ ve $d\varphi_1 \neq 0$ için $d*_1\varphi_1 = 0$'dır. Birinci koşulu incelemek yeterlidir. $k \neq 0$ için, $d\varphi_1 = k*_1\varphi_1$ eşitliği $d(F^*\varphi_2) = k(F^*(*_2\varphi_2))$ ifadesine denktir. d dış türevi geri çekme dönüşümüyle değişmeli olduğundan, $F^*(d\varphi_2) = F^*(k *_2 \varphi_2)$ olur. F^* birebir olduğundan, $d\varphi_2 = k *_2 \varphi_2$ elde edilir. $d\varphi_1 \neq 0$ ve F^* dönüşümünün izomorfizm olduğu kullanılırsa, $d\varphi_2 \neq 0$'dır, yani $M_2 \notin \mathcal{P}$'dir. O halde $M_1 \in \mathcal{W}_1$'dir.

$\mathcal{W}_\mathbf{2}$: $M_1 \in \mathcal{W}_2$ olsun. $d *_1 \varphi_1 \neq 0$ için, $d\varphi_1 = 0$'dır. M_2 manifoldunun $\mathcal{P}$ sınıfının elemanı olamayacağını görmek yeterlidir. $M_2 \in \mathcal{P}$ olsun. Bu durumda $d *_2 \varphi_2 = 0$ olur ki, $d((F^*)^{-1} *_1 \varphi_1) = (F^*)^{-1}(d *_1 \varphi_1)$ ilişkisinden $d *_1 \varphi_1 = 0$ çelişkisine varılır. O halde $M_2 \notin \mathcal{P}$'dir.

$\mathcal{W}_\mathbf{3}$: $M_1 \in \mathcal{W}_3$ olsun. $d\varphi_1 \neq 0$ için, $d *_1 \varphi_1 = 0$ ve $d\varphi_1 \wedge \varphi_1 = 0$'dır. $0 = d\varphi_1 \wedge \varphi_1 = d(F^*\varphi_2) \wedge (F^*\varphi_2) = F^*(d\varphi_2) \wedge (F^*\varphi_2) = F^*(d\varphi_2 \wedge \varphi_2)$ ilişkisi ve F^* dönüşümünün izomorfizm olduğu kullanılırsa, $d\varphi_2 \wedge \varphi_2 = 0$ bulunur. $M_2 \notin \mathcal{P}$ olduğu da $M_2 \notin \mathcal{P}$ ifadesinin kanıtına benzer şekilde görülebilir.

$\mathcal{W}_\mathbf{4}$: $M_1 \in \mathcal{W}_4$ olsun. $\alpha, \beta \neq 0$ formları için, $d\varphi_1 = \alpha \wedge \varphi_1$ ve $d*_1\varphi_1 = \beta \wedge *_1\varphi_1$'dir. $d\varphi_1 = \alpha \wedge \varphi_1$ koşulu $d(F^*\varphi_2) = \alpha \wedge F^*\varphi_2$ koşuluna denktir. Bu eşitlik ise $F^*(d\varphi_2) = F^*((F^*)^{-1}\alpha) \wedge F^*\varphi_2 = F^*((F^*)^{-1}\alpha \wedge \varphi_2)$ şeklinde yazılabilir ve F^* izomorfizm olduğundan, $d\varphi_2 = (F^*)^{-1}\alpha \wedge \varphi_2$ olur. Ayrıca $d *_1 \varphi_1 = \beta \wedge *_1\varphi_1$ eşitliği de $d(F^* *_2 \varphi_2) = \beta \wedge F^* *_2 \varphi_2$ olarak yazıldığında, $F^*(d *_2 \varphi_2) = F^*((F^*)^{-1}\beta) \wedge F^* *_2 \varphi_2 = F^*((F^*)^{-1}\beta \wedge *_2\varphi_2)$ olduğundan, $d *_2 \varphi_2 = (F^*)^{-1}\beta \wedge *_2\varphi_2$ elde edilir. $d\varphi_2 \neq 0$ ve $d *_2 \varphi_2 \neq 0$ olduğundan $\mathcal{P}$ sınıfı elenir. O halde $M_2 \in \mathcal{W}_4$'tür.

$\boldsymbol{\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2}$: $M_1 \in \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2$ olsun. Bu durumda $d\varphi_1 \neq 0$ ve $d *_1 \varphi_1 \neq 0$ olmak üzere, $d\varphi_1 = k *_1 \varphi_1$ ve $(*_1 d *_1 \varphi_1) \wedge *_1\varphi_1 = 0$'dır.

$$\begin{aligned} 0 &= (*_1 d *_1 \varphi_1) \wedge *_1\varphi_1 \\ &= *_1 d(F^* *_2 \varphi_2) \wedge F^*(*_2\varphi_2) \\ &= *_1 F^*(d *_2 \varphi_2) \wedge F^*(*_2\varphi_2) \\ &= F^* *_2 (d *_2 \varphi_2) \wedge F^*(*_2\varphi_2) \\ &= F^*((*_2 d *_2 \varphi_2) \wedge *_2\varphi_2) \end{aligned}$$

olduğundan, $(*_2 d *_2 \varphi_2) \wedge *_2\varphi_2 = 0$'dır. Diğer durumlara benzer şekilde M_2 manifoldunun $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2$ sınıfının alt sınıflarında olamayacağı görülür.

$\boldsymbol{\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3}$: $M_1 \in \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3$ olsun. $d\varphi_1 \neq 0$ için, $d *_1 \varphi_1 = 0$'dır. Burada M_2 manifoldunun $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3$ sınıfının alt sınıflarında olmadığını görmek yeterlidir ve bunun için F^* dönüşümünün izomorfizm olduğu kullanılır.

$\boldsymbol{\mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3}$: $M_1 \in \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3$ olsun. $d\varphi_1 \neq 0$ ve $d *_1 \varphi_1 \neq 0$ için, $d\varphi_1 \wedge \varphi_1 = 0$ ve $(*_1 d\varphi_1) \wedge \varphi_1 = 0$'dır.

$$\begin{aligned} 0 &= (*_1 d\varphi_1) \wedge \varphi_1 \\ &= *_1 d(F^*\varphi_2) \wedge F^*\varphi_2 \\ &= *_1 F^*(d\varphi_2) \wedge F^*\varphi_2 \\ &= F^*(*_2 d\varphi_2) \wedge F^*\varphi_2 \\ &= F^*((*_2 d\varphi_2) \wedge \varphi_2) \end{aligned}$$

olduğundan, $(*_2 d\varphi_2) \wedge \varphi_2 = 0$'dır. Benzer şekilde M_2 alt sınıfların elemanı olamaz.

$\boldsymbol{\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_4}$: $M_1 \in \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_4$ olsun. Bu durumda $d\varphi_1 \neq 0$, $d *_1 \varphi_1 \neq 0$ ve f sıfırdan farklı bir fonksiyon olmak üzere, $d\varphi_1 = \alpha \wedge \varphi_1 + f *_1 \varphi_1$ ve $d *_1 \varphi_1 = \beta \wedge *_1\varphi_1$'dir.

$$\begin{aligned} d\varphi_1 &= \alpha \wedge \varphi_1 + f *_1 \varphi_1, \\ d(F^*\varphi_2) &= \alpha \wedge F^*\varphi_2 + f F^*(*_2\varphi_2), \\ F^*(d\varphi_2) &= F^*((F^*)^{-1}\alpha) \wedge F^*\varphi_2 + f F^*(*_2\varphi_2) \\ &= F^*((F^*)^{-1}\alpha \wedge \varphi_2 + f \circ F^{-1} *_2 \varphi_2) \end{aligned}$$

olduğundan, $d\varphi_2 = (F^*)^{-1}\alpha \wedge \varphi_2 + f \circ F^{-1} *_2 \varphi_2$ bulunur. $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_4$ sınıfının alt sınıfları da benzer şekilde elenerek $M_2 \in \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_4$ bulunur.

$\mathcal{W}_{\mathbf{2}} \oplus \mathcal{W}_{\mathbf{4}}$: $M_1 \in \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_4$ olsun. $d\varphi_1 \neq 0$ için, $d\varphi_1 = \alpha \wedge \varphi_1$ 'dir. $d\varphi_1 = \alpha \wedge \varphi_1$ koşulunun $d\varphi_2 = (F^*)^{-1}\alpha \wedge \varphi_2$ koşuluna denk olduğu gösterilmişti. $\mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_4$ sınıfının alt sınıfları da elenerek $M_2 \in \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_4$ bulunur.

$\mathcal{W}_{\mathbf{3}} \oplus \mathcal{W}_{\mathbf{4}}$: $M_1 \in \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$ olsun. Bu durumda $d *_1 \varphi_1 \neq 0$ ve $d\varphi_1 \neq 0$ olmak üzere, $d\varphi_1 \wedge \varphi_1 = 0$ ve $d *_1 \varphi_1 = \beta \wedge *_1\varphi_1$'dir. Bu eşitliğin ancak ve ancak $d\varphi_2 \wedge \varphi_2 = 0$ ve $d *_2 \varphi_2 = (F^*)^{-1}\beta \wedge *_2\varphi_2$ olması durumunda sağlandığı gösterilmişti. $\mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$ sınıfının alt sınıfları da benzer şekilde elenir.

$\mathcal{W}_{\mathbf{1}} \oplus \mathcal{W}_{\mathbf{2}} \oplus \mathcal{W}_{\mathbf{3}}$: $M_1 \in \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3$ olsun. Bu durumda $d\varphi_1 \neq 0$ ve $d *_1 \varphi_1 \neq 0$ için, $*_1 d\varphi_1 = 0$ veya $*_1 d *_1 \varphi_1 \wedge *_1\varphi_1 = 0$'dır. $*_1 d\varphi_1 = 0$ ise, $0 = *_1 d\varphi_1 = *_1 d(F^*\varphi_2) = *_1 F^* d\varphi_2 = F^*(*_2 d\varphi_2)$ olduğundan, $*_2 d\varphi_2 = 0$'dır. $*_1 d *_1 \varphi_1 \wedge *_1\varphi_1 = 0$ ise,

$$
\begin{aligned}
0 &= *_1 d *_1 \varphi_1 \wedge *_1\varphi_1 \\
&= *_1 d(F^*(*_2\varphi_2)) \wedge F^*(*_2\varphi_2) \\
&= *_1 F^* d(*_2\varphi_2) \wedge F^*(*_2\varphi_2) \\
&= F^* *_2 d(*_2\varphi_2) \wedge F^*(*_2\varphi_2) \\
&= F^*(*_2 d(*_2\varphi_2) \wedge *_2\varphi_2)
\end{aligned}
$$

eşitliklerinden $*_2 d(*_2\varphi_2) \wedge *_2\varphi_2 = 0$'dır. Alt sınıflar da benzer şekilde elenir.

$\mathcal{W}_{\mathbf{1}} \oplus \mathcal{W}_{\mathbf{2}} \oplus \mathcal{W}_{\mathbf{4}}$: $M_1 \in \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_4$ olsun. Bu durumda $d\varphi_1 \neq 0$ ve sıfırdan farklı bir f fonksiyonu için, $d\varphi_1 = \alpha \wedge \varphi_1 + f *_1\varphi_1$'dir. F^* dönüşümünün izomorfizm olduğu kullanılarak M_2 manifoldunun $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_4$ sınıfının alt sınıflarında olamayacağını görmek yeterlidir.

$\mathcal{W}_{\mathbf{1}} \oplus \mathcal{W}_{\mathbf{3}} \oplus \mathcal{W}_{\mathbf{4}}$: $M_1 \in \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$ olsun. $d\varphi_1 \neq 0$ ve $d *_1 \varphi_1 \neq 0$ için, $d *_1 \varphi_1 = \beta \wedge *_1\varphi_1$'dir. Yine F^* dönüşümünün izomorfizm olduğu kullanılarak M_2 manifoldunun $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$ sınıfının alt sınıflarında olamayacağını görülür.

$\mathcal{W}_{\mathbf{2}} \oplus \mathcal{W}_{\mathbf{3}} \oplus \mathcal{W}_{\mathbf{4}}$: $M_1 \in \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$ olsun. $d\varphi_1 \neq 0$ için, $d\varphi_1 \wedge \varphi_1 = 0$'dır. Alt sınıflar benzer diğer durumlara benzer şekilde elenir.

$\mathcal{W}$: $M_1 \in \mathcal{W}$ ise M_2 de aynı sınıftadır, tüm alt sınıflar diğer durumlara benzer şekilde elenir.

Sonuç olarak (M_1, φ_1) ve (M_2, φ_2) G_2-denk manifoldları için, M_1 manifoldu $\mathcal{U}$ sınıfından ise, M_2 manifoldu da aynı sınıftandır. G_2-denk olma G_2 yapısına sahip manifoldlar üzerinde bir denklik bağıntısı olduğundan, $M_1 \in \mathcal{U}$

olması için gerek ve yeter koşul $M_2 \in \mathcal{U}$ olmasıdır. Bu ifadenin tersi doğru değildir. Yani (M_1, φ_1) ve (M_2, φ_2) aynı G_2 sınıfına ait, difeomorfik manifoldlar ise, bu manifoldlar G_2-denk olmayabilir. Örnek olarak Aloff-Wallach uzayları verilebilir. Aloff-Wallach uzayları $U(1)_{k,l}$ kümesi $SU(3)$ grubunun $e^{diag(ik,il,i(-k-l))}$ tipinden elemanlar tarafından üretilen altgrubu olmak üzere, $M_{k,l} := SU(3)/U(1)_{k,l}$ olarak tanımlı uzaylardır [30]. (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldları arasında, bir c sabiti için, $G^* g_2 = c g_1$ olacak şekilde bir $G : M_1 \longrightarrow M_2$ difeomorfizmi varsa, bu manifoldlara homothetic manifoldlar denir [31]. $k \neq \pm l$ olmak üzere, her $M_{k,l}$ Aloff-Wallach uzayında $\mathcal{W}_1$ sınıfından homothetic olmayan, dolayısıyla G_2-denk olmayan G_2 yapıların varlığı bilinmektedir [32].

8 SONUÇLAR, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, G_2 yapıya sahip 7-boyutlu bir Riemann manifoldu üzerindeki φ temel 3-formunun, herhangi bir ω vektör alanı ile

$$\widetilde{\varphi} = \varphi + \omega \lrcorner * \varphi$$

şeklinde deformasyonları incelenmiştir. Öncelikle deformasyonda kullanılan vektör alanına bazı kısıtlar konularak, yeni manifoldun Levi-Civita kovaryant türevi, spinor demeti üzerindeki kovaryant türevi ve Dirac operatörü hesaplanmıştır. $\widetilde{\varphi} = \varphi + \omega \lrcorner * \varphi$ deformasyonunda

$$\nabla \omega = 0 \text{ ve } \nabla \varphi = 0$$

alındığında, yeni G_2 yapısının da paralel kaldığı, yani

$$\widetilde{\nabla} \widetilde{\varphi} = 0$$

olduğu görülmüştür. Buna ek olarak, Dirac operatörlerinin çekirdeklerinin izomorf oldukları kanıtlanmıştır. Daha sonra ise, herhangi bir kısıt olmaksızın, deformasyon ile oluşan yeni manifoldun Levi-Civita kovaryant türevi hesaplanmıştır. Ancak ω vektör alanı üzerinde herhangi bir kısıt olmaksızın, $\widetilde{\varphi} = \varphi + \omega \lrcorner * \varphi$ deformasyonu ile oluşan yeni G_2 yapıların ait oldukları sınıfların belirlenmesi bir araştırma konusudur.

7-boyutlu 3-Sasaki manifoldları üzerinde bilinen bazı G_2 yapıların, 3-Sasaki yapısını belirleyen Killing vektör alanlarıyla deformasyonları da çalışılmıştır. Elde edilen yeni G_2 yapıya sahip manifoldlar üzerinde de 3-Sasaki yapısının var olup olmadığı bilinmemektedir. 7-boyutlu 3-Sasaki manifoldların skaler eğriliği 42 olduğundan, deforme edilmiş yeni manifoldun skaler eğriliğini hesaplamak, manifoldun 3-Sasaki yapısının deformasyonla değişip değişmediğini anlamakta yardımcı olabilecektir. Eğer yeni skaler eğrilik 42'den farklı ise, yeni G_2 yapı 3-Sasaki manifoldu değildir.

Bu tezde ayrıca 7-boyutlu 3-Sasaki manifoldları üzerinde G_2 yapıların en geniş sınıfı olan $\mathcal{W}$ sınıfına ait yeni G_2 yapılar inşa edilmiş, bu yeni G_2 yapıların deformasyonları ile

$$\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$$

sınıfından G_2 yapılar elde edilmiştir. $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$ sınıfından manifoldlar üzerinde, torsiyonu anti-simetrik olan metrik uyumlu tek türlü belirli kovaryant türevler vardır. Bu kovaryant türevlere göre paralel spinorların var olup olmadığının belirlenmesi, bundan sonraki çalışma konularından biri olacaktır.

Ayrıca 7-boyutlu 3-Sasaki manifoldları üzerinde kapalı ($d\varphi = 0$) veya co-closed ($\delta\varphi = 0$) G_2 yapıların var olup olmadığı da araştırılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Agricola, I., "Old and New on the Exceptional Group G_2", *Notices Amer. Math. Soc.*, **55(8)**, 922-929, 2008.

[2] Bryant, R.L., "Metrics with Exceptional Holonomy", *Ann. of Math.*, **126**, 525-576, 1987.

[3] Salamon, S., *Riemannian Geometry and Holonomy Groups*, Longman Scientific and Technical, England, 1989.

[4] Gray, A., "Vector Cross Products on Manifolds", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **141**, 465-504, 1969.

[5] Fernández, M. ve Gray, A., "Riemannian manifolds with structure group G_2", *Ann. Mat. Pura Appl.*, **(4)132**, 19-25, 1982.

[6] Cabrera, F.M., "On Riemannian Manifolds with G_2-Structure", *Bolletino U.M.I* **(7) 10-A**, 99-112, 1996.

[7] Bryant, R.L. ve Salamon, S., "On the Construction of Some Complete Metrics with Exceptional Holonomy", *Duke Math. J.*, **(3)58**, 829-850, 1989.

[8] Joyce, D.D., *Compact Manifolds with Special Holonomy*, Oxford University Press, New York, 2000.

[9] Friedrich, T. ve Ivanov, S., "Parallel Spinors and Connections with Skew-Symmetric Torsion in String Theory", *Asian Jour. Math*, **6**, 303-336, 2002.

[10] Lawson, H.B. ve Michelsohn, M.L., *Spin Geometry*, Princeton Math. Series, no. 38, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1989.

[11] Friedrich, T. ve Kath, I., "7-dimensional Compact Riemannian Manifolds with Killing Spinors", *Comm. Math. Phys.*, **133**, 543-561, 1990.

[12] Sasaki, S., "On Differentiable Manifolds with Certain Structures Which are Closely Related to Almost Contact Structure", *Tohoku Math. J.* **2(12)**, 459-476, 1960.

[13] Kuo, Y.Y., "On Almost Contact 3-Structure", *Tohoku Math. J.* **22**, 325-332, 1970.

[14] Udrişte, C., "Structures Presque Coquaternioniennes", *Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. de Roumanie*, **12**, 487-507, 1969.

[15] Boyer, C.P ve Galicki, K., *Sasakian Geometry*, Oxford Mathematical Monogrphs, Oxford University Press, Oxford, 2008.

[16] Harvey, F.R., *Spinors and Calibrations*, Academic Press, INC. California 1990.

[17] Baker, A., *Matrix Groups*, Springer-Verlag London Limited 2002.

[18] Karigiannis, S., "Deformations of G_2 and $Spin(7)$ Structures on Manifolds", *Can. J. Math.*, **57**, 1012-1055, 2005.

[19] Bryant, R.L.,"Some Remarks on G_2 Structures", Proceedings of Gökova Geometry-Topology Conference 2005, Editörler: Akbulut, S., Önder, T. ve Stern, R.J., International Press, 2006.

[20] Kobayashi, S. ve Nomizu, K., *Foundations of Differential Geometry*, 1. Cilt, John Wiley and Sons, U.S.A., 1963.

[21] Friedrich, T., *Dirac Operators in Riemannian geometry*, A.M.S., U.S.A., 2000.

[22] Friedrich, T., Kath, I., Moroianu, A. ve Semmelmann, U., "On nearly Parallel G_2 structures", *J. Geom. Phys.*, **23**, 256-286, 1997.

[23] Baum, H., Friedrich, T., Grunewald, R. ve Kath, I., *Twistors and Killing Spinors on Riemannian Manifolds*, Teubner-Verlag Leipzig/Stuttgart, 1991.

[24] Hijazi, O., "Spectral Properties of the Dirac Operator and Geometrical Structures", Proceedings of the Summer School on Geometric Methods in Quantum Field Theory, Villa de Leyva, Colombia, Temmuz 12-30, World Scientific 2001, 1999.

[25] Boyer, C.P ve Galicki, K., "3-Sasakian Manifolds", *Surveys Diff. Geom.*, **7**, 123-184, 1999, arXiv:hep-th/ 9810250.

[26] Boyer, C.P., Galicki, K. ve Mann, B.M., "The Geometry and Topology of 3-Sasakian Manifolds", *J. Reine Angew. Math.*, **455**, 183-220, 1994.

[27] Agricola, I. ve Friedrich, T., "3-Sasakian Manifolds in Dimension Seven, Their Spinors and G_2 Structures", *J. Geom. Phys.*, **60**, 326-332, 2010.

[28] Cho, H., Salur, S. ve Todd, A.J., "Diffeomorphisms of 7-Manifolds with Closed G_2-Structure", 2012, arXchiv:1112.0832v1.

[29] Lee, J.M., *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer-Verlag New York, Inc., 2003.

[30] Aloff, S. ve Wallach, N., "An Infinite Family of Distinct 7-Manifolds Admitting Positively Curved Riemannian Structures", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **81**, 93-97, 1975.

[31] O'Neill, B., *Semi-Riemannian Geometry*, Academic Press, New York, 1983.

[32] Cabrera, F.M., Monar, M.D. ve Swann, A.F., "Classification of G_2-Structures", *J. London Math. Soc.* **(2)53**, 407-416, 1996.