FUZZY SAYILARININ SIRALANMASINDA AĞIRLIK MERKEZİ YÖNTEMLERİNİN KARŞILAŞTIRMALI ANALİZİ

Aylin ELMALI
Yüksek Lisans Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Ocak – 2013

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Aylin ELMALI'nın "**Fuzzy Sayılarının Sıralanmasında Ağırlık Merkezi Yöntemlerinin Karşılaştırmalı Analizi**" başlıklı **Matematik** Anabilim Dalındaki, Yüksek Lisans tezi 10 /01 /2013 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

		Adı Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	:	**Yard. Doç. Dr. Handan AKYAR**	......
Üye	:	**Doç. Dr. Sevil ŞENTÜRK**	......
Üye	:	**Doç. Dr. Serkan Ali DÜZCE**	......

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ....tarih ve ....sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

FUZZY SAYILARININ SIRALANMASINDA AĞIRLIK MERKEZİ YÖNTEMLERİNİN KARŞILAŞTIRMALI ANALİZİ

Aylin ELMALI

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yard. Doç. Dr. Handan AKYAR
2013, 100 Sayfa

Bu tezde, karar verme sürecinin önemli bir parçası olan fuzzy sayıların sıralanması yöntemleri ele alınmıştır. Fuzzy sayıların sıralanmasında en yaygın olarak kullanılan ağırlık merkezine bağlı sıralama yöntemleri incelenmiştir. Yöntemlerin ağırlık merkezi formüllerinin, sıralama değerlerinin, fuzzy sayı ve genelleştirilmiş fuzzy sayının sıralanmasında geçerliliğinin karşılaştırması yapılmıştır. Yöntemler arasında karşılaştırma yapmak amacıyla farklı fuzzy sayı kümelerine incelenen yöntemler uygulanmış ve her bir fuzzy sayı için sıralama değerleri bulunmuştur. Bulunan sıralama değerlerinden yararlanılarak her yöntem için sıralama sonuçları elde edilmiş ve bu sonuçlar için tablolar oluşturularak her bir yöntemin avantajları ve sınırlılıklarından kısaca bahsedilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Ağırlık Merkezi, Fuzzy Sayı, Üçgensel Fuzzy Sayı, Yamuk Fuzzy Sayı, Sıralama Yöntemleri

ABSTRACT

Master of Science Thesis

THE COMPARATIVE ANALYSIS OF CENTROID METHODS IN RANKING FUZZY NUMBERS

Aylin ELMALI

Anadolu University
Graduate School of Sciences
Mathematics Program

Supervisor : Asst. Prof. Dr. Handan AKYAR

2013, 100 Pages

In this thesis, the ranking of fuzzy numbers, an important component in the decision making process, is discussed. Most commonly used techniques, namely the centroid index ranking methods are analyzed. Formulae of centroid points, the ranking indices, the effectiveness and the generalized fuzzy numbers of the mentioned methods are compared in terms of their validity. In order for comparison, the reviewed methods are applied to different fuzzy number sets and ranking indices are obtained for each fuzzy number. On using the ranking indices, ranking results are obtained for each of the methods and these results are tabulated. The advantages and limitations of each method are shortly discussed.

Keywords: Centroid, Fuzzy Number, Triangular Fuzzy Number
Trapezoidal Fuzzy Number, Ranking Methods

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında yardımlarını ve bilgilerini esirgemeyen değerli hocam Yard. Doç. Dr. Handan AKYAR'a ve her zaman beni destekleyen aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

Aylin ELMALI
Ocak – 2013

İçindekiler

Şekil Listesi

Tablo Listesi

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}$	:	Gerçel sayılar kümesi
f_A	:	Üyelik fonksiyonu
$S(A)$	:	A fuzzy kümesinin destek (support) kümesi
$h(A)$	:	A fuzzy kümesinin boyu
A_α	:	A fuzzy kümesinin α-kesmesi
$A = (a_1, a_2, a_3)$	:	Üçgensel A fuzzy sayısı
$A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$	:	Yamuk A fuzzy sayısı
$A = (a_1, a_2, a_3; w_A)$	:	Genelleştirilmiş üçgensel A fuzzy sayısı
$A = (a_1, a_2, a_3, a_4; w_A)$	:	Genelleştirilmiş yamuk A fuzzy sayısı
A^*	:	Standardize edilmiş genelleştirilmiş A fuzzy sayısı
σ	:	Standard hata
μ	:	Aritmetik ortalama
s	:	Standard sapma
I_A	:	Üçgenin iç teğet çemberinin merkezi
r_A	:	Üçgenin iç teğet çemberinin yarıçapı

1 GİRİŞ

Fuzzy kümeler, sahip oldukları elemanların yanı sıra, bu elemanların üyelik derecelerini de içeren kümelerdir. Bu kümeler, ilk olarak 1965 yılında Lotfi A. Zadeh [1] tarafından tanıtılmıştır.

Klasik kümeler teorisindeki elemanların üyelikleri, kümeye ait olup olmama durumuna göre iki farklı değer almaktadır. Fuzzy kümelerde ise, elemanların belli derecelerde kümeye ait olmasına izin verilmekte ve bu elemanların üyelik dereceleri, ilgili küme üzerinde tanımlanan ve $[0, 1]$ birim aralığında değerler alan üyelik fonksiyonları yardımıyla bulunmaktadır. Klasik kümelerin üyelik fonksiyonları, fuzzy kümelerde tanımlanan üyelik fonksiyonlarının sadece 0 ve 1 değerlerini alan özel bir halidir.

Fuzzy kümelerin özel olarak reel sayılarda tanımlanmış, konveks, normal ve üyelik fonksiyonları parçalı sürekli olanlarına fuzzy sayı denilmektedir. Fuzzy küme kavramı Zadeh tarafından öne sürüldüğünden beri fuzzy teori sürekli gelişmekte ve bir çok alanda kullanılmaktadır.

Fuzzy çok kriterli karar verme problemleri teorik ve uygulamalı araştırmada önemli bir konudur. Fuzzy çok kriterli karar vermede kriter değerleri fuzzy sayılarla ifade edilir. Bu durum fuzzy sayının sıralanmasına yol açar. Ayrıca, optimum ve en iyi seçimin doğru olması tamamen fuzzy sayıların sıralanmasına veya karşılaştırılmasına bağlıdır. Bu nedenle fuzzy sayıların özel sıralaması karar verme için önemli bir prosedürdür ve genel olarak fuzzy teoride ana problemlerden biri olmaktadır. Fuzzy sayıların sıralanması karar verme, optimizasyon, tahmin, kontrol gibi alanlarda pratik kullanımda önemli bir rol oynamaktadır.

Fuzzy sayıları sıralamak için fuzzy sayı ölçülebilmeli ve diğer fuzzy sayılarla karşılaştırılabilmelidir. Fakat bu kolay olmamaktadır. Fuzzy sayılar olasılık dağılımı ile gösterildiğinde birbiriyle çakışabilmektedir ve bir fuzzy sayının diğerinden küçük ya da büyük olduğu kolaylıkla belirlenememektedir. Fuzzy sayılar, reel sayılarda olduğu gibi doğal bir sıra oluşturmadıkları için, fuzzy sayıları sıralamak için çok çeşitli yöntemler kullanılmaktadır. Literatürde bu konuda pek çok çalışmaya rastlanmaktadır. Her yöntemin kendine göre avantajları ve dezavantajları vardır ve hangi yöntemin en iyi olduğu konusunda karar vermek oldukça güçtür. Söz konusu problemin karmaşıklığına, hassasiyetine, yorumlanabilme kolaylığına ve fuzzy sayıların şekline bağlı olarak değişik sıralama yöntemleri kullanılmaktadır.

Fuzzy sayıları sıralama yöntemi ilk olarak 1976 yılında Jain [2] tarafından ileri sürülmüştür. Daha sonra bir çok sıralama yöntemi geliştirilmiştir. Bu yöntemler arasında en genel kullanılan tekniklerden biri ağırlık merkezi indeksine göre fuzzy sayıları sıralama yöntemidir.

Ağırlık merkezi yüzyıllar öncesinden beri bilinmesine ve çeşitli disiplinlerde uygulanmasına rağmen, fuzzy sayıların sıralamasında ağırlık merkezi kavramının ilişkisi 1980'de Yager [3] ile başlamıştır. Yager'den sonra Murakami ve ark. [4], Cheng [5], Chu ve Tsao [6], Chen ve Chen [7], Yong ve Qi [8], Liang ve ark. [9], Chen ve Chen [10], Wang ve Lee [11], Xu ve Wei [12], Bakar ve ark. [13], Wang ve ark. [14], Akyar ve ark. [15], Akyar ve ark. [16] gibi bir çok araştırmacı da sıralama indeksi geliştirmekte ağırlık merkezi kavramını kullanmışlardır. Araştırmacıların her biri ağırlık merkezi kavramına bağlı kendi tanımlarını vermiştir. Bazı sıralama indisleri sadece ağırlık merkezinin apsisi olan $\bar{x}$ değerine bağlı iken bazıları $\bar{x}$ ve $\bar{y}$ değerlerinin her ikisine de bağlıdır. Burada $\bar{y}$ ağırlık merkezinin ordinatını göstermektedir. Bunun yanında, doğru ağırlık merkezi formüllerini üretmek ve bunları sıralama indeksinde uygulamak da Wang ve ark. [17] ve Shieh [18] gibi araştırmacıların bir amacı olmuştur. Bu araştırmacıların doğrulanan formülleri, ağırlık merkezi kavramına bağlı fuzzy sayıların sıralanmasında çok kullanışlıdır.

Bu araştırmacılar dışında Ramli ve Mohamad [19] mevcut yöntemler arasındaki benzerlik, farklılık, avantaj ve sınırlılıklarından bahsetmişlerdir. Bu tezde de Ramli ve Mohamad'ın çalışmasına ek olarak yakın literatür incelenerek güncel makaleler de ilave edilerek daha kapsamlı ve ayrıntılı bir inceleme yapılmıştır.

İlk olarak tezde gerekli olacak bazı temel tanımlar verilmiştir.

Tanım 1.1.1 (Moment). *x-ekseni üzerindeki bir x noktasında bulunan m*

kütleli bir parçacığın $x = 0$ noktasına göre momenti $x.m$ şeklinde tanımlanır. Daha genel olarak, $x = x_0$ noktasına göre moment $(x - x_0)m$ dir. Eğer x-ekseni x_0 a dayanmış bir kol olarak düşünülürse m kütlesinin ağırlığı bu kolu dönmeye zorlar. x_0 a göre moment bu dönme eğilimini ölçer.

Eğer $m_1, m_2, \ldots, m_n$ kütleleri sırasıyla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ noktalarında bulunuyorsa, sistemin $x = x_0$ noktasına göre toplam momenti

$$M_{x=x_0} = (x_1 - x_0)m_1 + (x_2 - x_0)m_2 + \ldots + (x_n - x_0)m_n = \sum_{j=1}^{n}(x_j - x_0)m_j$$

olur.

Tanım 1.1.2 (Kütle Merkezi). *Toplam momentin sıfır olduğu $x = \bar{x}$ noktasına kütle merkezi denir.*

$$0 = \sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})m_j = \sum_{j=1}^{n} x_j m_j - \bar{x}\sum_{j=1}^{n} m_j$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j m_j}{\sum_{j=1}^{n} m_j} = \frac{M_{x=0}}{m}$$

şeklinde ifade edilir. Burada m, sistemin toplam kütlesini ve $M_{x=0}$, $x = 0$'a göre toplam momenti gösterir.

x-ekseninin kütleleri taşıyan ağırlıksız bir tel olduğu düşünülürse, bu durumda $\bar{x}$ noktası telin dayandığı ve dengede kaldığı noktadır. Eksen ağırlıklı yani bir tahterevalli gibi olsa dahi, $x = \bar{x}$ dayandığı noktada kütleler toplandıktan sonra dengede kalmaya devam edecektir. Pek çok amaç için kütlelerden oluşan bir sistem sanki, toplam kütlesi kütle merkezinde yoğunlaştırılmış gibi davranır.

Bir boyutta kütle merkezi: Doğrusal yoğunluğu $\delta(x)$ olan bir boyutlu kütle dağılımının sürekli bir şekilde x-eksenindeki $[a, b]$ aralığı üzerinde yayıldığı kabul edilsin. Bir x noktasındaki uzunluk elemanı dx ise bu noktadaki kütlesi:

$$dm = \delta(x)dx,$$

momenti:

$$dM_{x=0} = xdm = x\delta(x)dx,$$

$x = 0$' a göre toplam moment, bu momentlerin toplamı (integrali)dir:

$$M_{x=0} = \int_a^b x\delta(x)dx.$$

Toplam kütle:

$$m = \int_a^b \delta(x)dx$$

Kütle merkezi:

$$\bar{x} = \frac{M_{x=0}}{m} = \frac{\displaystyle\int_a^b x\delta(x)dx}{\displaystyle\int_a^b \delta(x)dx}$$

şeklinde ifade edilir.

İki boyutta kütle merkezi: Eğer düzlemde $m_1, m_2 \ldots, m_n$ kütleleri (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \ldots, (x_n, y_n)$ noktalarında ise $x = 0$'a yani y-eksenine göre moment:

$$M_{x=0} = M_y = x_1m_1 + x_2m_2 + \cdots + x_nm_n = \sum_{j=1}^{n} x_jmj,$$

$y = 0$'a yani x-eksenine göre moment:

$$M_{y=0} = M_x = y_1m_1 + y_2m_2 + \cdots + y_nm_n = \sum_{j=1}^{n} y_jm_j$$

olarak tanımlanır. Buradan $(\bar{x}, \bar{y})$ noktasına cismin kütle merkezi denirse

$$\bar{x} = \frac{M_{x=0}}{m} = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_jm_j}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_j} \quad ve \quad \bar{y} = \frac{M_{y=0}}{m} = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} y_jm_j}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_j}$$

olur.

Eğer toplam kütlesi sonlu tane ayrık noktaya değilde düzlemdeki bir bölgeye dağılan sistem düşünülürse kütle, moment ve kütle merkezi kavramları toplam yerine integrallarle tanımlanır.

Bölge belli bir yoğunluktaki (birim alandaki kütle) metalden yapılmış bir plaka olsun. Yani, $a \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq f(x)$ ve herhangi bir (x, y) noktasındaki yoğunluk fonksiyonu $\delta(x)$ olan bölgenin kütle, moment ve kütle merkezi aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$m = \int_a^b \delta(x)f(x)dx,$$

$$M_{x=0} = \int_a^b x\delta(x)f(x)dx,$$
$$M_{y=0} = \frac{1}{2}\int_a^b \delta(x)(f(x))^2 dx.$$

Tanım 1.1.3 (**Ağırlık Merkezi (Centroid)**). *δ yoğunluk fonksiyonu $\delta(x) = 1$ ya da daha genel olarak $\delta(x) = k$ gibi bir sabitse, bu durumda oluşan kütle merkezine verilen eğrinin, düzlemsel bölgenin, yüzeyin ya da katı cismin ağırlık merkezi adı verilir.*

Yoğunluk sabit olduğundan kütle merkezi hesabında, integral veya toplamda pay ve paydada sadeleşme meydana gelir. Bu durumda kütle merkezi sadece cismin şekline yani, cisim tarafından işgal edilen bölgenin geometrik özelliklerine bağlı olur.

$a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)$ ile verilen düzlemsel bölgenin $(\bar{x}, \bar{y})$ ağırlık merkezi:

$$\bar{x} = \frac{M_{x=0}}{A},\ \bar{y} = \frac{M_{y=0}}{A}.$$

Burada

$$A = \int_a^b f(x)dx,\ \text{(düzlemsel bölgenin alanı)}$$
$$M_{x=0} = \int_a^b xf(x)dx,$$
$$M_{y=0} = \frac{1}{2}\int_a^b (f(x))^2 dx$$

dir.

Simetri yardımıyla bazı düzlemsel bölgelerin ağırlık merkezleri kolaylıkla söylenebilir. Örneğin dairesel ya da eliptik diskin ağırlık merkezi diskin merkezi, dikdörtgenin ağırlık merkezi ise köşegenlerinin kesim noktasıdır.

Üçgenin ağırlık merkezi kenarortaylarının kesim noktasıdır ve köşeleri $(x_1, y_1),\ (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ noktalarında olan üçgenin ağılık mekezi

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

olarak hesaplanır.

Tanım 1.1.4 (**Bağıntı**). *Herhangi $X,\ Y$ kümeleri için $X \times Y$ kümesinin bir R alt kümesine X den Y ye bir bağıntı denir. $(x, y) \in R$ için xRy yazılır ve x ile y ye bağıntılı elemanlar denir.*

Bir R bağıntısının tanım ve değer kümelerinin her ikisi de bir X kümesinin alt kümeleri ise R ye X üzerinde bir bağıntı denir.

Tanım 1.1.5 (Kısmi Sıralama Bağıntısı). *Bir X üzerinde tanımlı*

i) $\forall x \in X$ *için* xRx *(yansıyan)*

ii) xRy *ve* $yRx \Rightarrow x = y$ *(ters simetrik)*

iii) xRy *ve* $yRz \Rightarrow xRz$ *(geçişli)*

özelliklerini taşıyan bir R bağıntısına kısmen sıralama bağıntısı ya da kısmi sıralama bağıntısı ve (X, R) çiftine de kısmen sıralı küme denir.

Bir kısmi sıralama bağıntısını göstermek için R yerine $\leq$ simgesi kullanılır. Böylece xRy veya $(x, y) \in R$ yerine $x \leq y$ yazılır.

Kısmi sıralı bir X kümesinin boş olmayan her alt kümesi de kısmi sıralıdır.

$(X, \leq)$ kısmi sıralı kümesinin herhangi iki elemanı $x, y \in X$ için $x \leq y$ veya $y \leq x$ ise x ile y ye karşılaştırılabilir elemanları denir.

Tanım 1.1.6 (Tam Sıralama Bağıntısı). *Her eleman çifti karşılaştırılabilen kısmi sıralı bir kümeye tam sıralı küme, bağıntıya da tam sıralama bağıntısı denir.*

O halde $\leq$, X üzerinde tam sıralama bağıntısı ise, aşağıdaki koşullar sağlanır.

(i) $\forall x \in X$ için $x \leq x$ dir.

(ii) $x, y \in X$ için $x \leq y$ ve $y \leq x$ ise $x = y$ dir.

(iii) $x, y, z \in X$ için $x \leq y$ ve $y \leq z$ ise $x \leq z$ dir.

(iv) $\forall x, y \in X$ için ya $x \leq y$ ya da $y \leq x$ dir.

2 FUZZY KÜMELER VE FUZZY SAYILAR İLE İLGİLİ TEMEL TANIM VE ÖZELLİKLER

Bu bölümde fuzzy kümeler tanıtılacaktır. Ardından α-kesme işlemi, fuzzy küme ve fuzzy sayıların belli başlı özelliklerine değinilecek, genelleştirilmiş üçgensel ve yamuk fuzzy sayılar tanımlanacaktır.

2.1 Fuzzy Kümeler

Üyelik fonksiyonu kullanılarak, bir x elemanının, A kümesine ait olup olmadığı belirlenebilir. Klasik kümeler teorisinde üyelik fonksiyonu f_A, X evrensel kümesinin her elemanını, $\{0,1\}$ kümesine resmeden fonksiyondur.

$$f_A : X \to \{0,1\}, \quad f_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

Tanım 2.1.1 (Fuzzy Küme (Bulanık Küme)). *([21]) X evrensel kümesi içinde $A : X \to [0,1]$ fonksiyonuna A fuzzy kümesi denir. A fonksiyonu yerine genellikle f_A kullanılır ve A fuzzy kümesi f_A üyelik fonksiyonuyla karakterize edilir.*

$$\begin{aligned} f_A : \quad X &\to [0,1], \\ x &\to f_A(x). \end{aligned}$$

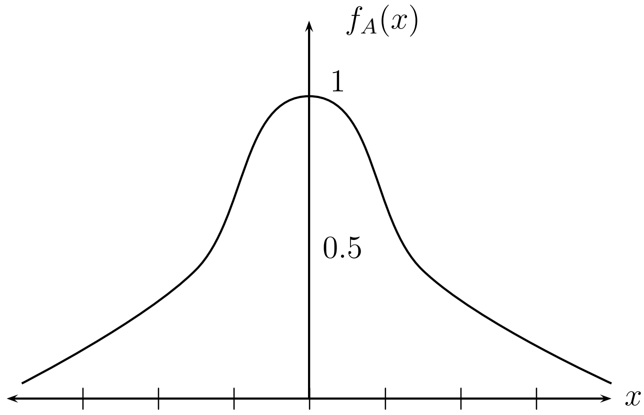
$f_A(x)$ değeri, x elemanının A kümesine ait olma derecesini gösterir.

Fuzzy kümeler, klasik kümelerden farklı olarak, sınırı belirsiz kümelerdir.

Örnek 2.1.2. *$A = \{0$' a yakın reel sayılar $\}$ fuzzy kümesi tanımlansın. Bu küme için bir sınır belirlemek oldukça zordur. Bir x reel sayısının 0 'a ne kadar yakın olduğunu gösteren üyelik fonksiyonu, aşağıdaki gibi tanımlanabilir:*

$$f_A(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Bu şekilde tanımlanan üyelik fonksiyonuna göre, 1'in üyelik dercesi $\dfrac{1}{1+1^2} = 0.5$, 2 için 0.2 ve 3 için 0.1 dir.



Şekil 2.1: "0' a yakın reel sayılar" kümesinin üyelik fonksiyonu

Tanım 2.1.3 (**Fuzzy Destek (Support) Kümesi**). *([20]) A, X içinde bir fuzzy küme olsun. A'nın destek kümesi $S(A)$, üyelik derecesi sıfır olmayan tüm noktaların kümesidir ve*

$$S(A) = \{x \in X : f_A(x) > 0\}$$

ile gösterilir.

Tanım 2.1.4 (**Fuzzy Kümenin Boyu**). *([20]) $h(A)$, A fuzzy kümesinin boyunu göstermek üzere*

$$h(A) = \sup_{x \in X} f_A(x)$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 2.1.5 (**Normal Fuzzy Küme**). *([20]) Eğer bir A fuzzy kümensinin boyu 1 ise, A fuzzy kümesine normal fuzzy küme denir.*

A fuzzy kümesinin boyu $0 < h(A) < 1$ olmak üzere, A normal olmayan fuzzy kümesi normalleştirilebilirdir, yani üyelik fonksiyonu

$$\frac{f_A(x)}{h(A)}, \ x \in X$$

şeklinde yeniden tanımlanır.

Tanım 2.1.6 (**α-Kesme Kümesi**). *([20]) A bir fuzzy küme ve $\alpha \in (0,1]$ olsun. A fuzzy kümesinin α-kesmesi A_α, üyelikleri α'dan küçük olmayan elemanların oluşturduğu kümedir ve*

$$A_\alpha = \{x \in X : f_A(x) \geq \alpha\}$$

ile gösterilir.

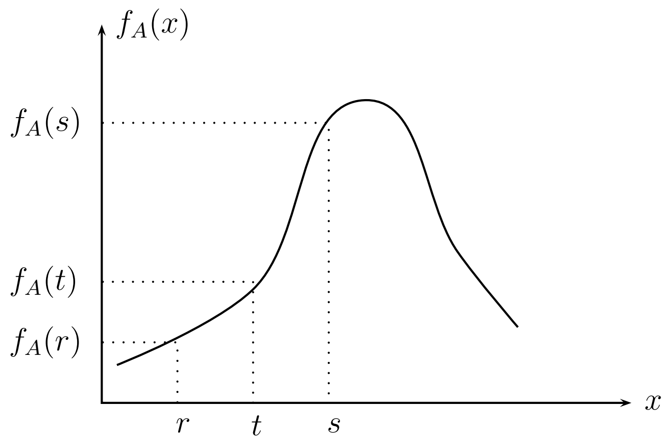
Tanım 2.1.7 (**Konveks Fuzzy Küme**). *([21]) $\mathbb{R}^n$'de bir A fuzzy kümesinin konveks olması için, bu fuzzy kümenin tüm α-kesme kümeleri konveks olmalıdır. Bir başka ifadeyle*

$$t = \lambda r + (1-\lambda)s, \; r, s \in \mathbb{R}^n, \; \lambda \in [0,1]$$

için

$$f_A(t) \geq \min[f_A(r), f_A(s)]$$

bağıntısı sağlanıyorsa, A fuzzy kümesi konvekstir denir.



Şekil 2.2: Konveks fuzzy küme $f_A(t) \geq f_A(r)$

2.2 Fuzzy Sayılar

Tanım 2.2.1 (**Fuzzy Sayı (Bulanık Sayı)**). *([21]) $\mathbb{R}$'de aşağıdaki koşulları sağlayan A fuzzy kümesine bir fuzzy sayı denir. A fuzzy kümesi*

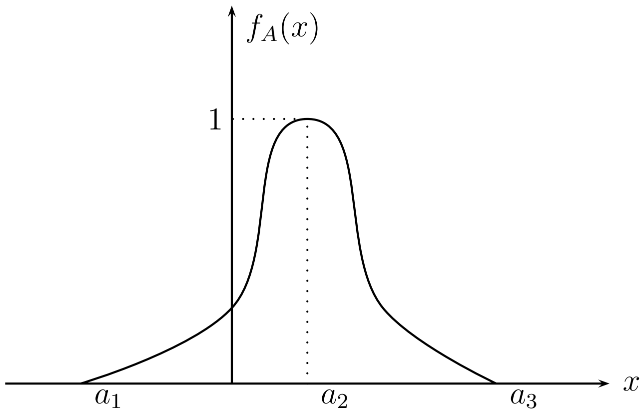
(i) konveks,

(ii) *normal,*

(iii) *üyelik fonksiyonu parçalı sürekli,*

(iv) *reel sayılarda tanımlanmış*

olmalıdır.



Şekil 2.3: A fuzzy sayısı

Fuzzy kümenin normal olması için, üyelik fonksiyonunun supremum değeri 1 olmalıdır yani, $\exists x \in \mathbb{R},\ f_A(x) = 1$ dir. Fuzzy kümenin konveks olması için α-kesmesinin oluşturduğu doğru sürekli olmalı ve α-kesme aralığı $A_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha)}]$ aşağıdaki koşulu sağlamalıdır

$$(\alpha' < \alpha) \Rightarrow (a_1^{(\alpha')} \leq a_1^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha')} \geq a_3^{(\alpha)}).$$

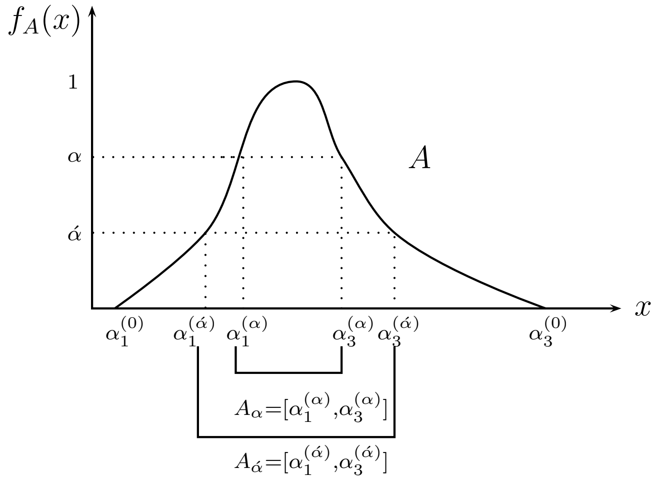
Fuzzy sayılara örnek olarak aralıklar gösterilebilir.

2.2.2 Aralıklar

Tanım 2.2.3 (**Aralık**). *([21]) Reel sayılar kümesinin aşağıdaki özelliklere sahip I alt kümelerine bir aralık denir.*

(i) *I en az iki elemana sahiptir.*

(ii) *I' nın herhangi iki elemanı arasında kalan tüm reel sayılar I' ya aittir.*

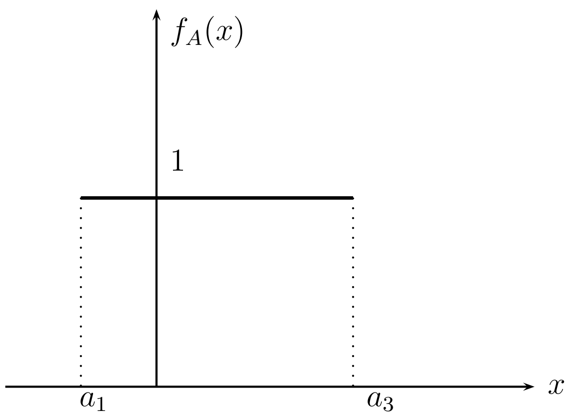


Şekil 2.4: $(\acute{\alpha} < \alpha) \Rightarrow A_\alpha \subset A_{\acute{\alpha}}$ fuzzy sayısının α-kesmesi

Aralık, $a_1, a_3 \in \mathbb{R}$, $a_1 < a_3$ olmak üzere $A = [a_1, a_3]$ şeklinde gösterilsin. Bu aralık üyelik fonksiyonu ile aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$f_A(x) = \begin{cases} 0, & x < a_1 \\ 1, & a_1 \leq x \leq a_3 \\ 0, & x > a_3 \end{cases}$$

$A = [a_1, a_3]$ aralığı, reel sayılarda tanımlı, üyelik fonksiyonu parçalı sürekli,



Şekil 2.5: $A = [a_1, a_3]$ aralığı

normal ve konveks olduğundan aynı zamanda bir fuzzy sayıdır.

Özel olarak $a_1 = a_3$ olursa, bu aralık tek bir noktaya karşılık gelir yani, $[a_1, a_1] = a_1$ olur.

2.2.4 Aralık İşlemleri

Aralıklarla yapılan işlemler, fuzzy sayılara genelleştirilebilir.

Her $a_1, a_3, b_1, b_3 \in \mathbb{R}$ için

$$A = [a_1, a_3],\ B = [b_1, b_3]$$

gibi iki aralık ele alındığında, aralıklarla yapılan bazı işlemler şu şekilde tanımlanır.

1) Toplama

$$[a_1, a_3](+)[b_1, b_3] = [a_1 + b_1, a_3 + b_3]$$

2) Çıkarma

$$[a_1, a_3](-)[b_1, b_3] = [a_1 - b_3, a_3 - b_1]$$

3) Çarpma

$$[a_1, a_3](\bullet)[b_1, b_3] = [a_1 \bullet b_1 \wedge a_1 \bullet b_3 \wedge a_3 \bullet b_1 \wedge a_3 \bullet b_3, a_1 \bullet b_1 \vee a_1 \bullet b_3 \vee a_3 \bullet b_1 \vee a_3 \bullet b_3]$$

4) Bölme

$$[a_1, a_3](/)[b_1, b_3] = [a_1/b_1 \wedge a_1/b_3 \wedge a_3/b_1 \wedge a_3/b_3, a_1/b_1 \vee a_1/b_3 \vee a_3/b_1 \vee a_3/b_3],$$

$(b_1 \neq 0$ ve $b_3 \neq 0)$

5) Aralığın Tersi

$$[a_1, a_3]^{-1} = [1/a_1 \wedge 1/a_3, 1/a_1 \vee 1/a_3], \quad (a_1 \neq 0 \text{ ve } a_3 \neq 0)$$

Eğer A ve B kümeleri pozitif reel sayılarda tanımlı ise,

3') Çarpma

$$[a_1, a_3](\bullet)[b_1, b_3] = [a_1 \bullet b_1, a_3 \bullet b_3]$$

4') Bölme

$$[a_1, a_3](/)[b_1, b_3] = [a_1/b_3, a_3/b_1],\ (b_1 \neq 0 \text{ ve } b_3 \neq 0)$$

5') Aralığın Tersi

$$[a_1, a_3]^{-1} = [1/a_3, 1/a_1], \quad (a_1 \neq 0 \text{ ve } a_3 \neq 0)$$

6) Minimum

$$[a_1, a_3](\wedge)[b_1, b_3] = [a_1 \wedge b_1,\ a_3 \wedge b_3]$$

7) Maksimum

$$[a_1, a_3](\vee)[b_1, b_3] = [a_1 \vee b_1,\ a_3 \vee b_3]$$

Bir aralık, bir skaler sayıyla da çarpılabilir. Örneğin, $[b_1, b_3]$ aralığı $a \in \mathbb{R}$ ile çarpılırsa

$$a[b_1, b_3] = [a \bullet b_1 \wedge a \bullet b_3, a \bullet b_1 \vee a \bullet b_3]$$

olur.

Bir fuzzy sayısının α-kesmesini bir skalerle çarpmak da anlamlıdır. Örneğin, her $\alpha \in [0,1]$, $b_1^{(\alpha)}$, $b_3^{(\alpha)} \in \mathbb{R}$ için

$$a[b_1^{(\alpha)}, b_3^{(\alpha)}] = [a \bullet b_1^{(\alpha)} \wedge a \bullet b_3^{(\alpha)},\ a \bullet b_1^{(\alpha)} \vee a \bullet b_3^{(\alpha)}]$$

olarak bulunur.

2.2.5 Fuzzy Sayılarla İşlemler

Aralıklar üzerinde tanımlanan işlemler fuzzy sayılara da uygulanabilir. Fuzzy sayılar aynı zamanda fuzzy kümeler olduklarından, sonuç bir üyelik fonksiyonu yardımıyla ifade edilebilir.

Her $x, y, z \in \mathbb{R}$ için

1) Toplama: $A(+)B$

$$f_{A(+)B}(z) = \bigvee_{z=x+y} (f_A(x) \wedge f_B(y))$$

2) Çıkarma: $A(-)B$

$$f_{A(-)B}(z) = \bigvee_{z=x-y} (f_A(x) \wedge f_B(y))$$

3) Çarpma: $A(\bullet)B$

$$f_{A(\bullet)B}(z) = \bigvee_{z=x \cdot y} (f_A(x) \wedge f_B(y))$$

4) Bölme: $A(/)B$

$$f_{A(/)B}(z) = \bigvee_{z=x/y} (f_A(x) \wedge f_B(y))$$

5) Minimum: $A(\wedge)B$

$$f_{A(\wedge)B}(z) = \bigvee_{z=x\wedge y} (f_A(x) \wedge f_B(y))$$

6) Maksimum: $A(\vee)B$

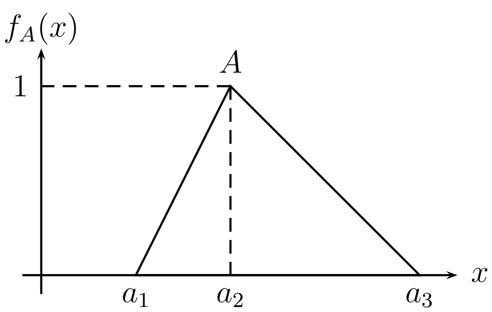
$$f_{A(\vee)B}(z) = \bigvee_{z=x\vee y} (f_A(x) \wedge f_B(y))$$

2.2.6 Üçgensel Fuzzy Sayılar

Genellikle, gerçek hayatta bazı özel tip fuzzy sayılar kullanılır. Bunlardan en önemlisi üçgensel fuzzy sayılardır ve bunların üyelik fonksiyonu üçgene benzemektedir.

Tanım 2.2.7 (Üçgensel Fuzzy Sayı). *([21]) Üyelik fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanan A fuzzy sayısına üçgensel fuzzy sayı denir ve $A = (a_1, a_2, a_3)$ üçlüsü ile gösterilir.*

$$f_A(x) = \begin{cases} 0, & x < a_1 \text{ veya } x > a_3 \\ \dfrac{x - a_1}{a_2 - a_1}, & a_1 \leq x \leq a_2 \\ \dfrac{a_3 - x}{a_3 - a_2}, & a_2 < x \leq a_3. \end{cases}$$



Şekil 2.6: $A = (a_1, a_2, a_3)$ üçgensel fuzzy sayısı

A fuzzy sayısına α-kesmesi uygulanırsa, her $\alpha \in [0, 1]$ için

$$\frac{a_1^{(\alpha)} - a_1}{a_2 - a_1} = \alpha, \quad \frac{a_3 - a_3^{(\alpha)}}{a_3 - a_2} = \alpha$$

olup

$$\begin{aligned} a_1^{(\alpha)} &= (a_2 - a_1)\alpha + a_1 \\ a_3^{(\alpha)} &= -(a_3 - a_2)\alpha + a_3 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan A_α aralığı

$$\begin{aligned} A_\alpha &= [a_1^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha)}] \\ &= [(a_2 - a_1)\alpha + a_1, -(a_3 - a_2)\alpha + a_3] \end{aligned}$$

olur.

Örnek 2.2.8. *$A = (-5, -1, 1)$ üçgensel fuzzy sayısı için üyelik fonksiyonu*

$$f_{(A)}(x) = \begin{cases} 0, & x < -5 \text{ veya } x > 1 \\ \frac{x+5}{4}, & -5 \leq x \leq -1 \\ \frac{1-x}{2}, & -1 < x \leq 1 \end{cases}$$

dir. A fuzzy sayısının α-kesme aralığı

$$\frac{x+5}{4} = \alpha \Rightarrow x = 4\alpha - 5$$

$$\frac{1-x}{2} = \alpha \Rightarrow x = -2\alpha + 1$$

$$A_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha)}] = [4\alpha - 5, -2\alpha + 1]$$

olarak bulunur.

Eğer $\alpha = 0.5$ ise,

$$A_{0.5} = [a_1^{(0.5)}, a_3^{(0.5)}] = [-3, 0]$$

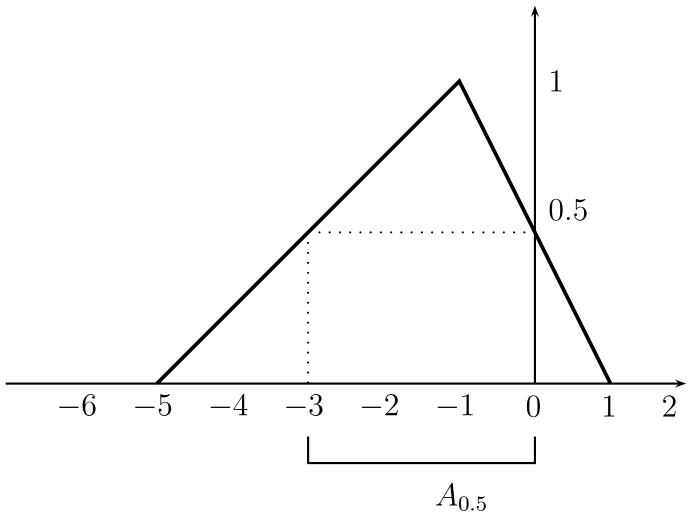
olarak bulunur.

2.2.9 Üçgensel Fuzzy Sayılarla İşlemler

Üçgensel fuzzy sayılarla yapılan işlemlerin bazı önemli özellikleri şunlardır:

1) Üçgensel fuzzy sayılarla yapılan toplama ve çıkarma işlemlerinin sonucu yine bir üçgensel fuzzy sayıdır.

2) Üçgensel fuzzy sayılarla yapılan çarpma ve bölme işlemlerinin sonucu bir üçgensel fuzzy sayı olmayabilir.



Şekil 2.7: $A = (-5, -1, 1)$ üçgensel fuzzy sayısının $\alpha = 0.5$ kesmesi

3) Üçgensel fuzzy sayılarla yapılan maksimum ve minimum işlemlerinin sonucu bir üçgensel fuzzy sayı olmayabilir.

Fakat, genel olarak çarpma ve bölme işlemlerinin sonucunun bir üçgensel fuzzy sayıya yaklaştığı varsayılır.

İlk olarak, toplama ve çıkarma işlemleri düşünüldüğünde, bu işlemler için üyelik fonksiyonunun kullanılmasına gerek yoktur. $A = (a_1, a_2, a_3)$ ve $B = (b_1, b_2, b_3)$ üçgensel fuzzy sayıları için

(i) Toplama

$$\begin{aligned} A(+)B &= (a_1, a_2, a_3)(+)(b_1, b_2, b_3) \\ &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \end{aligned}$$

(ii) Çıkarma

$$\begin{aligned} A(-)B &= (a_1, a_2, a_3)(-)(b_1, b_2, b_3) \\ &= (a_1 - b_3, a_2 - b_2, a_3 - b_1) \end{aligned}$$

(iii) Simetrik görüntü

$$-A = (-a_3, -a_2, -a_1)$$

üçgensel fuzzy sayıları elde edilir.

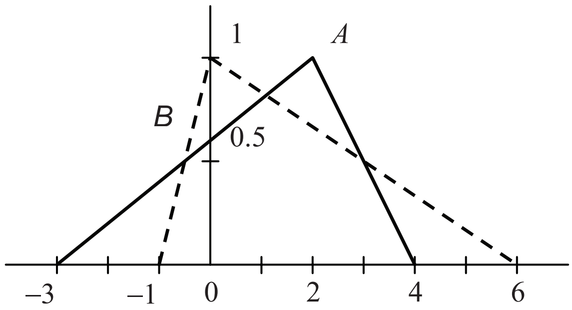
Örnek 2.2.10. $A = (-3, 2, 4)$ *ve* $B = (-1, 0, 6)$ *üçgensel fuzzy sayıları için*

$$A(+)B = (-4, 2, 10)$$

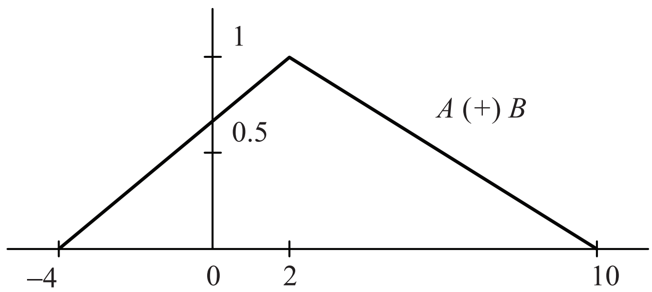
$$A(-)B = (-9, 2, 5)$$

$$-A = (-4, -2, 3)$$

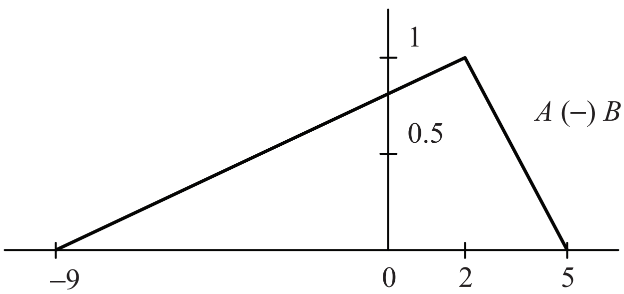
olarak hesaplanır.



Şekil 2.8: $A = (-3, 2, 4)$ ve $B = (-1, 0, 6)$ üçgensel fuzzy sayıları

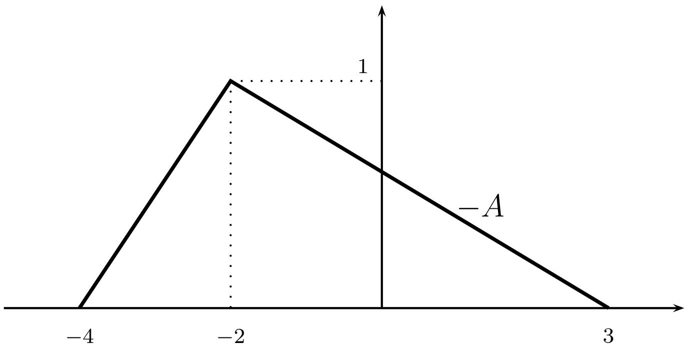


Şekil 2.9: $A(+)B$ üçgensel fuzzy sayısı



Şekil 2.10: Örnek 2.2.10'daki $A(-)B$ üçgensel fuzzy sayısı

Örnek 2.2.11. *$A = (-3, 2, 4)$ ve $B = (-1, 0, 6)$ üçgensel fuzzy sayılarının*



Şekil 2.11: Örnek 2.2.10'daki $-A$ üçgensel fuzzy sayısı

α-kesmeleri

$$
\begin{aligned}
A_\alpha &= [a_1^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha)}] &= [(a_2 - a_1)\alpha + a_1, -(a_3 - a_2)\alpha + a_3] \\
& &= [5\alpha - 3, -2\alpha + 4] \\
B_\alpha &= [b_1^{(\alpha)}, b_3^{(\alpha)}] &= [(b_2 - b_1)\alpha + b_1, -(b_3 - b_2)\alpha + b_3] \\
& &= [\alpha - 1, -6\alpha + 6]
\end{aligned}
$$

A_α ve B_α aralık α-kesmeleri için

$$A_\alpha(+)B_\alpha = [6\alpha - 4, -8\alpha + 10].$$

Özel olarak, $\alpha = 0$ ve $\alpha = 1$ için,

$$A_0(+)B_0 = [-4,\ 10]$$
$$A_1(+)B_1 = [2,\ 2] = 2$$

bulunur. Bu değerler kullanılarak $A(+)B$ üçgensel fuzzy sayısı $(-4, 2, 10)$ olarak ifade edilir.

Benzer şekilde

$$A_\alpha(-)B_\alpha = [11\alpha - 9,\ -3\alpha + 5]$$

olarak hesaplanır. $\alpha = 0$ ve $\alpha = 1$ için

$$A_0(-)B_0 = [-9,\ 5],$$
$$A_1(-)B_1 = [2,\ 2] = 2$$

elde edilir. Sonuç olarak, $A(-)B = (-9, 2, 5)$ bulunur.

Çarpma ve bölme işlemlerinde üç nokta yardımıyla ifade edilen notasyon uygun olmadığı için, bu tür işlemlerde üyelik fonksiyonlarından yararlanılmaktadır.

Örnek 2.2.12 ([21]). *$A = (1,2,4)$ ve $B = (2,4,6)$ üçgensel fuzzy sayılarının üyelik fonksiyonları aşağıdaki gibi verilsin.*

$$f_A(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \text{ veya } x > 4 \\ x-1, & 1 \le x \le 2 \\ -\frac{1}{2}x + 2, & 2 < x \le 4 \end{cases},$$

$$f_B(y) = \begin{cases} 0, & y < 2 \text{ veya } y > 6 \\ \frac{1}{2}y - 1, & 2 \le y \le 4 \\ -\frac{1}{2}y + 3, & 4 < y \le 6 \end{cases}.$$

A ve B nin çarpımları olan $A(\bullet)B$ aşağıdaki şekilde hesaplanabilir.

$x \in A$ ve $y \in B$ olmak üzere, özel olarak $z = x(\bullet)y = 8$ için $z = 2(\bullet)4$ veya $z = 4(\bullet)2$ dir. Bu koşulu sağlayan tüm x ve y değerleri için,

$$\begin{aligned} f_{A(\bullet)B} &= \bigvee_{x\bullet y=8} [f_A(2) \wedge f_B(4), f_A(4) \wedge f_B(2), \ldots] \\ &= \bigvee [1 \wedge 1, 0 \wedge 0, \ldots] \\ &= 1 \end{aligned}$$

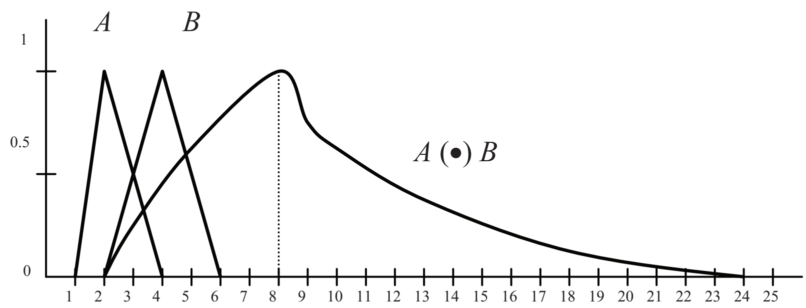
olur. Eğer $z = 12$ durumu için benzer işlemler uygulanacak olursa, olabilecek x ve y değerleri, $z = x \bullet y = 12,\ 3 \bullet 4, 4 \bullet 3, 2.5 \bullet 4.8, \ldots$ dir.

$$\begin{aligned} f_{A(\bullet)B} &= \bigvee_{x\bullet y=12} [f_A(3) \wedge f_B(4), f_A(4) \wedge f_B(3), f_A(2.5) \wedge f_B(4.8), \cdots] \\ &= \bigvee [0.5 \wedge 1, 0 \wedge 0.5, 0.75 \wedge 0.6, \ldots] \\ &= \bigvee [0.5, 0, 0.6, \ldots] \\ &= 0.6 \end{aligned}$$

Bu yöntemle, her $z \in A(\bullet)B$ için üyelik derecesi hesaplanırsa, Şekil 2.12 de gösterilen fuzzy sayı bulunur. Fakat bu grafik eğrisel olduğundan, bulunan bu sayı, üçgensel bir fuzzy sayı değildir. Ancak bu grafiğe bir üçgensel fuzzy sayıyla yaklaşılabilir. Bu yüzden bu sayı

$$A(\bullet)B \cong (2, 8, 24)$$

şeklinde gösterilebilir.



Şekil 2.12: $A(\bullet)B$ fuzzy sayısı

2.2.13 Yamuk Fuzzy Sayılar

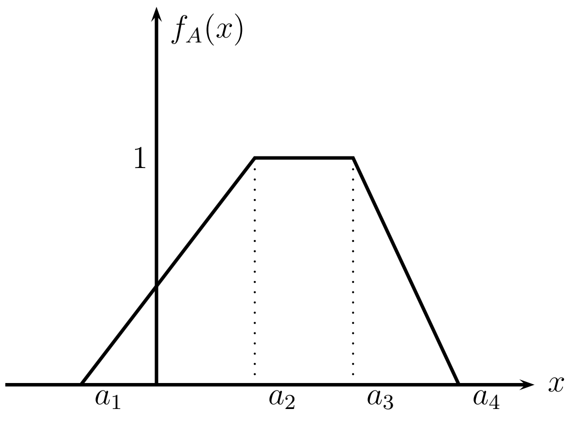
Fuzzy sayıların diğer bir örneği ise, yamuk fuzzy sayılardır.

Tanım 2.2.14 (Yamuk Fuzzy Sayı). *([21]) Bir A yamuk fuzzy sayısı,*

$$A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$$

şeklinde gösterilir ve fuzzy sayının üyelik fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$f_A(x) = \begin{cases} 0, & x < a_1 \text{ veya } x > a_4 \\ \dfrac{x - a_1}{a_2 - a_1}, & a_1 \leq x < a_2 \\ 1, & a_2 \leq x \leq a_3 \\ \dfrac{a_4 - x}{a_4 - a_3}, & a_3 < x \leq a_4 \end{cases}.$$



Şekil 2.13: $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ yamuk fuzzy sayısı

Bu fuzzy sayısı için α-kesme aralığı aşağıdaki şekilde elde edilir.

Her $\alpha \in [0, 1]$ için

$$A_\alpha = [(a_2 - a_1)\alpha + a_1, -(a_4 - a_3)\alpha + a_4).$$

$a_2 = a_3$ olduğunda, yamuk fuzzy sayısı bir üçgensel fuzzy sayı belirtir.

2.2.15 Yamuk Fuzzy Sayılarla İşlemler

1) Yamuk fuzzy sayılarla yapılan toplama ve çıkarma işlemlerinin sonucu yine bir yamuk fuzzy sayıdır.

2) Yamuk fuzzy sayılarla yapılan çarpma, bölme ve ters işlemlerin sonucu her zaman yamuk fuzzy sayı olmayabilir.

3) Yamuk fuzzy sayılarla yapılan maksimum ve minimum işlemleri sonucunda elde edilen sayı, bir yamuk fuzzy sayı olmayabilir.

Bazı durumlarda, çarpma ve bölme işlemlerinin sonucu, bir yamuk fuzzy sayıya yaklaşabilir. Üçgensel fuzzy sayılarda olduğu gibi, toplama ve çıkarma işlemleri kolaylıkla yapılabilir. Çarpma ve bölme işlemleri için, üyelik fonksiyonlarından yararlanılmalıdır.

$A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ ve $B = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ yamuk fuzzy sayıları için,

(i) Toplama

$$\begin{aligned} A(+)B &= (a_1, a_2, a_3, a_4)\,(+)\,(b_1, b_2, b_3, b_4) \\ &= (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ a_3 + b_3,\ a_4 + b_4) \end{aligned}$$

(ii) Çıkarma

$$A(-)B = (a_1 - b_4,\ a_2 - b_3,\ a_3 - b_2,\ a_4 - b_1)$$

Örnek 2.2.16 ([21])**.** *$A = (1, 5, 6, 9)$ ve $B = (2, 3, 5, 8)$ yamuk fuzzy sayılarının çarpımları hesaplansın. Yaklaşık değerleri bulmak için yine α-kesme aralıkları kullanılabilir.*

$$A_\alpha = [4\alpha + 1,\ -3\alpha + 9]$$

$$B_\alpha = [\alpha + 2,\ -3\alpha + 8]$$

$\alpha \in [0, 1]$ *olduğundan aralıklar pozitif değerlidir.*

$$\begin{aligned} A_\alpha(\bullet)B_\alpha &= [(4\alpha + 1)(\alpha + 2),\ (-3\alpha + 9)(-3\alpha + 8)] \\ &= [4\alpha^2 + 9\alpha + 2,\ 9\alpha^2 - 51\alpha + 72]. \end{aligned}$$

$\alpha = 0,$

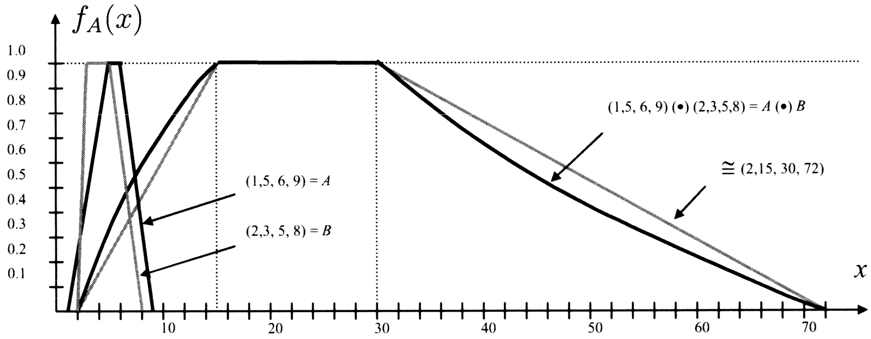
$$A_0(\bullet)B_0 = [2, 72]$$

$\alpha = 1,$

$$\begin{aligned} A_1(\bullet)B_1 &= [4 + 9 + 2,\ 9 - 51 + 72] \\ &= [15, 30]. \end{aligned}$$

$\alpha = 0$ ve $\alpha = 1$ değerleri için bulunan aralıkların uç noktaları kullanılarak, bu yamuk fuzzy sayısının yaklaşımı şu şekilde yazılır:

$$A(\bullet)B \cong [2, 15, 30, 72].$$



Şekil 2.14: $A(\bullet)B$ fuzzy sayısı

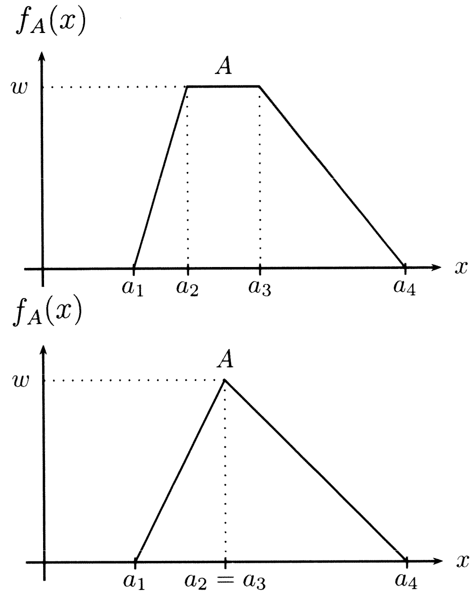
Özel olarak A fuzzy sayısının boyu $0 < \mathrm{h}(A) \leq 1$ ise bu fuzzy sayıya genelleştirilmiş fuzzy sayı denir.

Tanım 2.2.17 (Genelleştirilmiş Yamuk Fuzzy Sayı). *([13]) Üyelik fonksiyonu aşağıdaki gibi verilen A fuzzy sayısına genelleştirilmiş yamuk fuzzy sayı denir.*

$$f_A(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < a_1 \quad veya \quad x > a_4, \\ \dfrac{w_A(x - a_1)}{a_2 - a_1} & , \quad a_1 \leq x < a_2, \\ w_A & , \quad a_2 \leq x \leq a_3, \\ \dfrac{w_A(x - a_4)}{a_3 - a_4} & , \quad a_3 < x \leq a_4, \end{cases}$$

Burada , $0 < w_A \leq 1$ dir. A genelleştirilmiş yamuk fuzzy sayısı $A = (a_1, a_2, a_3, a_4; w_A)$ ile gösterilir ve grafiği Şekil 2.15 deki gibidir.

Genelleştirilmiş yamuk fuzzy sayının özel hali genelleştirilmiş üçgensel fuzzy sayıdır. $A = (a_1, a_2, a_3, a_4; w_A)$ ifadesinde $a_2 = a_3$ alındığında elde edilir. (Şekil 2.15).



Şekil 2.15: Genelleştirilmiş Yamuk ve Üçgensel Fuzzy Sayılar

Tanım 2.2.18 (Standardize Edilmiş Genelleştirilmiş Yamuk Fuzzy Sayı). *([13]) Eğer bir* $A = (a_1, a_2, a_3, a_4; w_A)$ *fuzzy sayısının elemanları* $-1 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq 1$ *özelliğine sahipse bu* A *fuzzy sayısına standardize edilmiş genelleştirilmiş yamuk fuzzy sayı denir ve* $A^* = (a_1^*, a_2^*, a_3^*, a_4^*; w_{A^*})$ *ile gösterilir. Herhangi bir genelleştirilmiş yamuk fuzzy sayı aşağıdaki şekilde standardize edilmiş genelleştirilmiş yamuk fuzzy sayıya dönüştürülebilir.*

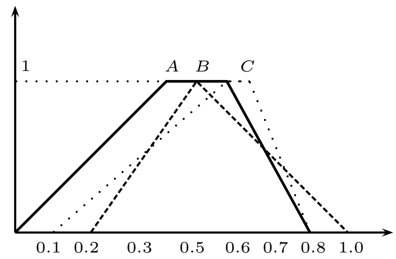
$$\begin{aligned} A^* &= \left(\tfrac{a_1}{k}, \tfrac{a_2}{k}, \tfrac{a_3}{k}, \tfrac{a_4}{k}; w_{A^*}\right) \\ &= (a_1^*, a_2^*, a_3^*, a_4^*; w_{A^*}) \end{aligned}$$

Burada $k = \max |a_i|$, $i = 1, 2, 3, 4$ *dir.*

Fuzzy kümeler ve fuzzy sayılar hakkında ayrıntılı bilgi [20] ve [21] kitaplarında bulunabilir.

Bu tezde fuzzy sayıların sıralanmasında kullanılan ağırlık merkezi formülleri ve ağırlık merkezi indeksine bağlı sıralama yöntemlerinden bahsedilecektir. Burada karşılaştırılan fuzzy sayılar üçgensel fuzzy sayı, yamuk fuzzy sayı, genelleştirilmiş yamuk fuzzy sayı ve genelleştirilmiş üçgensel fuzzy sayılardır. Bunların grafiği düzlemsel bölgede olduğu için hangi fuzzy sayının daha büyük olduğunu belirlemek için ağırlık merkezinden yararlanılmaktadır.

Eğer fuzzy sayılar iç içe geçmişse hangisinin daha büyük olduğuna karar vermek kolay değildir. Örneğin Şekil 2.16 e bakacak olursak $A < B < C$ veya



Şekil 2.16: A, B ve C fuzzy sayıları

$C < B < A$ veya diğer durumları da düşünerek hangi fuzzy sayının daha büyük olduğunu söylemek zor olabilir.

Bu zorluğun üstesinden gelebilmek için fuzzy sayılarını sıralamada farklı yöntemler ileri sürülmüştür. Bu tezde önce bu yöntemlerden bahsedilmiştir.

3 AĞIRLIK MERKEZİ İNDEKSİNE BAĞLI SIRALAMA YÖNTEMLERİ

Bu bölümde fuzzy sayıların sıralanmasında kullanılan ağırlık merkezi formülleri ve ağırlık merkezi indeksine bağlı sıralama yöntemlerinden bahsedilecektir. Burada karşılaştırılan fuzzy sayılar üçgensel fuzzy sayı, yamuk fuzzy sayı, genelleştirilmiş yamuk fuzzy sayı ve genelleştirilmiş üçgensel fuzzy sayılardır. Bunların grafiği düzlemsel bölgede olduğu için hangi fuzzy sayının daha büyük olduğunu belirlemek için ağırlık merkezinden yararlanılmaktadır.

3.1 Yager'in Yöntemi (1980)

Yager [3], sıralama yöntemlerinde ağırlık merkezi formülü kullanan ilk araştırmacıdır. Yager sıralama indeksi olarak sadece yatay eksendeki ağırlık merkezi $\bar{x}_A$ değerini kullanmıştır. $\bar{x}_A$ değeri aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$\bar{x}_A = \frac{\displaystyle\int_0^1 w(x) f_A(x) dx}{\displaystyle\int_0^1 f_A(x) dx} \tag{3.1.1}$$

Burada $w(x)$; x değerinin önemini ölçen ağırlık fonksiyonu ve $f_A(x)$, A fuzzy sayısının üyelik fonksiyonunu ifade etmektedir. $w(x) = x$ için, $\bar{x}_A$ indeksi

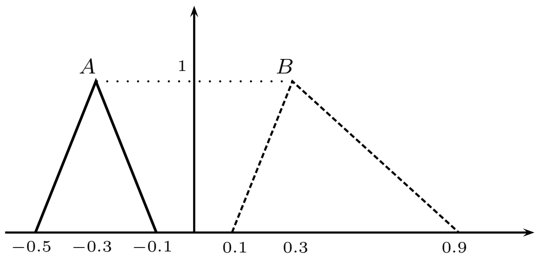
$$\bar{x}_A = \frac{\displaystyle\int_0^1 x f_A(x) dx}{\displaystyle\int_0^1 f_A(x) dx} \tag{3.1.2}$$

ile ağırlık merkezinin birinci koordinatı olmaktadır. Bu yöntemde, $\bar{x}_A$ değeri büyük olan A fuzzy sayısı sıralamada daha büyüktür.

Örnek 3.1.1. *$A = (-0.5, -0.3, -0.1)$ ve $B = (0.1, 0.3, 0.9)$ fuzzy sayıları (Şekil 3.17) ele alınsın. $\bar{x}_A = -0.3$, $\bar{x}_B = 0.4333$ olduğundan $A < B$ dir.*

3.2 Murakami ve ark.'nın Yöntemi (1983)

1983'te Murakami ve ark., sıralama indeksi olarak ağırlık merkezi noktasının yatay x eksenini ve dikey y eksininin her ikisini de sunmuşlardır [4].



Şekil 3.17: Örnek 3.1.1'deki fuzzy sayılar

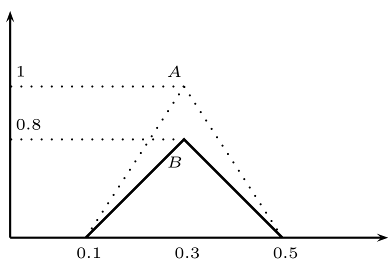
Ağırlık merkezinin $\bar{x}_A$ değeri Yager(1980) ile aynıdır, $\bar{y}_A$ değeri

$$\bar{y}_A = \frac{\displaystyle\int_0^1 x f_A(x) d f_A(x)}{\displaystyle\int_0^1 f_A(x) dx} \tag{3.2.3}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Sıralamada $\bar{x}_A$ ve (veya) $\bar{y}_A$ değeri büyük olan sayı daha büyüktür.

Murakami ve ark.'nın yöntemi fuzzy sayı ve genelleştirilmiş fuzzy sayılara uygulanabilmektedir.

Örnek 3.2.1. $A = (0.1, 0.3, 0.5; 1)$ *ve* $B = (0.1, 0.3, 0.5; 0.8)$ *fuzzy sayıları (Şekil 3.18) için*



Şekil 3.18: 3.2.1'deki fuzzy sayılar

$\bar{x}_A = \bar{x}_B = 0.3$ *dir. Böylece hangi sayının büyük olduğuna karar verebilmek için* $\bar{y}$ *değerlerine bakılır.* $\bar{y}_A = \dfrac{1}{3}$, $\bar{y}_B = \dfrac{0.8}{3}$ *tür.* $\bar{y}_B < \bar{y}_A$ *olduğundan* $B < A$ *dır.*

3.3 Cheng'in Yöntemi (1998)

Cheng 1998 yılında, fuzzy sayılarını sıralamak için uzaklık indeksi ve CV indeksine dayalı bir yöntem sunmuştur [5]. Bazı durumlarda fuzzy sayılarının x değerleri veya sağ ve sol yayılımları aynı olduğunda, $\bar{x}$ değerlerinin bir yardımcı indeks ve $\bar{y}$ değerlerinin ise ana indeks olabileceğini savunmuştur. Bu nedenle $\bar{x}$' yi veya $\bar{y}$' yi ana indeks olarak seçme probleminin üstesinden gelmek için, ağırlık merkezini hesaplamaya dayalı uzaklık yöntemiyle fuzzy sayılarını sıralamıştır.

Bu yöntem, üyelik fonksiyonu

$$f_A(x) = \begin{cases} f_A^L = \dfrac{x-a_1}{a_2-a_1}, & a_1 \leq x \leq a_2 \\ 1, & a_2 \leq x \leq a_3 \\ f_A^R = \dfrac{x-a_4}{a_3-a_4}, & a_3 \leq x \leq a_4 \\ 0, & \text{d.d.} \end{cases} \tag{3.3.4}$$

ile verilen $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ yamuk fuzzy sayısı için aşağıdaki şekildedir.

1. Adım: f_A^L ve f_A^R kullanılarak g_A^L ve g_A^R ters fonksiyonları bulunur.

2. Adım: A fuzzy sayısı için ağırlık merkezi $(\bar{x}_A, \bar{y}_A)$ aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned} \bar{x}_A &= \frac{\displaystyle\int_{a_1}^{a_2}(xf_A^L)dx + \int_{a_2}^{a_3} xdx + \int_{a_3}^{a_4}(xf_A^R)dx}{\displaystyle\int_{a_1}^{a_2}(f_A^L)dx + \int_{a_2}^{a_3} dx + \int_{a_3}^{a_4}(f_A^R)dx} \\ \bar{y}_A &= \frac{\displaystyle\int_0^1(yg_A^L)dy + \int_0^1(yg_A^R)dy}{\displaystyle\int_0^1(g_A^L)dy + \int_0^1(g_A^R)dy} \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

3. Adım: Sıralama fonksiyonunun hesaplanması: Ağırlık merkezi $(\bar{x}_A, \bar{y}_A)$ ile orjin noktası arasındaki uzaklık;

$$R(A) = \sqrt{(\bar{x}_A)^2 + (\bar{y}_A)^2}. \tag{3.3.6}$$

4. Adım: Fuzzy sayıların sıralanması : Her hangi A_i ve A_j fuzzy sayıları için, eğer

i) $R(A_i) < R(A_j) \Rightarrow A_i < A_j$,

ii) $R(A_i) = R(A_j) \Rightarrow A_i = A_j$,

iii) $R(A_i) > R(A_j) \Rightarrow A_i > A_j$.

olur.

Genelleştirilmiş $B = (a_1, a_2, a_3, a_4; w)$ yamuk fuzzy sayının üyelik fonksiyonu

$$f_B(x) = \begin{cases} w\left(\dfrac{x-a_1}{a_2-a_1}\right), & a_1 \le x \le a_2 \\ w, & a_2 \le x \le a_3 \quad \text{ve} \quad 0 \le w \le 1 \\ w\left(\dfrac{x-a_4}{a_3-a_4}\right), & a_3 \le x \le a_4 \\ 0, & \text{d.d.} \end{cases} \tag{3.3.7}$$

idi.

f_B^L ve f_B^R fonksiyonlarının ters fonksiyonları sırasıyla

$$g_B^L = a_1 + (a_2 - a_1)y/w$$

ve

$$g_B^R = a_4 + (a_3 - a_4)y/w,$$

$y \in [0, w]$ dir.

$$\begin{aligned} \bar{x}_B &= \frac{w\displaystyle\int_{a_1}^{a_2}[x\frac{x-a_1}{a_2-a_1}]dx + w\int_{a_2}^{a_3} xdx + w\int_{a_3}^{a_4}[x\frac{x-a_4}{a_3-a_4}]dx}{w\displaystyle\int_{a_1}^{a_2}\frac{x-a_1}{a_2-a_1}dx + w\int_{a_2}^{a_3} dx + w\int_{a_3}^{a_4}\frac{x-a_4}{a_3-a_4}dx} \\ &= \frac{\displaystyle\int_{a_1}^{a_2}(xf_A^L)dx + \int_{a_2}^{a_3} xdx + \int_{a_3}^{a_4}(xf_A^R)dx}{\displaystyle\int_{a_1}^{a_2}(f_A^L)dx + \int_{a_2}^{a_3} dx + \int_{a_3}^{a_4}(f_A^R)dx} = \bar{x}_A \end{aligned}$$

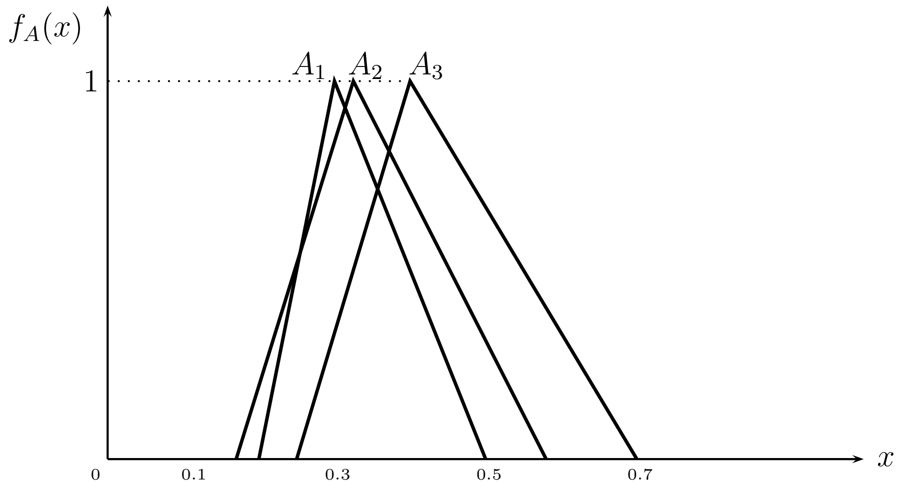
olur. Fakat,

$$\int_0^1 g_B^L(wy)dy = \int_0^1 [a_1 + (a_2 - a_1)(wy)/w]dy = \int_0^1 g_A^L(y)dy$$

$$\int_0^1 g_B^R(wy)dy = \int_0^1 [a_4 + (a_3 - a_4)(wy)/w]dy = \int_0^1 g_A^R(y)dy$$

ve

$$\int_0^1 (wy)g_B^L(wy)dy = w\int_0^1 [a_1 y + (a_2 - a_1)(wy^2)/w]dy = w\int_0^1 y g_A^L(y)dy$$



Şekil 3.19: A_1, A_2, A_3 fuzzy sayıları

$$\int_0^1 (wy)g_B^R(wy)dy = w\int_0^1 [a_4 y + (a_3 - a_4)(wy^2)/w]dy = w\int_0^1 y g_A^R(y)dy$$

dir. Bu nedenle

$$\bar{y}_B = \frac{w\left[\displaystyle\int_0^1 y g_A^L(y)dy + \int_0^1 y g_A^R(y)dy\right]}{\displaystyle\int_0^1 g_A^L(y)dy + \int_0^1 g_A^R(y)dy} \tag{3.3.8}$$

olur. Burada w, y değeri için düzeltme faktörüdür.

Örnek 3.3.1 ([5]). *$A_1 = (0.2, 0.3, 0.5)$, $A_2 = (0.17, 0.32, 0.58)$ ve $A_3 = (0.25, 0.4, 0.7)$ fuzzy sayıları verilsin.*

(3.3.5) ile verilen eşitliklerden A_1, A_2 ve A_3 için ağırlık merkezi noktaları

$$\begin{aligned}(\bar{x}_{A_1}, \bar{y}_{A_1}) &= (0.333, 0.4872)\\ (\bar{x}_{A_2}, \bar{y}_{A_2}) &= (0.357, 0.4868)\\ (\bar{x}_{A_3}, \bar{y}_{A_3}) &= (0.450, 0.4857)\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Buradan (3.3.6) formülü kullanılarak

$$\begin{aligned}R(A_1) &= 0.590\\ R(A_2) &= 0.604\\ R(A_3) &= 0.662\end{aligned}$$

elde edilir. $R(A_1) < R(A_2) < R(A_3)$ olduğundan sıralama sonucu $A_1 < A_2 < A_3$ olur.

Cheng ayrıca, Lee ve Li'nin [22] yöntemini geliştirmek için CV indeksini önermiştir [5]. Lee ve Li yönteminde, fuzzy sayıları sıralamak için olasılık ölçülerine dayanan genelleştirilmiş ortalama ve standard sapmayı kullanmıştır. Yöntem, fuzzy sayıları iki kritere göre sıralamaktadır: fuzzy ortalama ve fuzzy yayılımdır. Fuzzy olaylar için olasılık dağılımının iki türünü göz önüne almışlar ve karşılık gelen indisleri aşağıdaki şekilde türetmişlerdir.

1) Düzgün Dağılım: $f(A) = 1/|A|$ ve $A \in U$.

Ortalaması $x_U(A)$ ve standard sapması $\sigma_U(A)$ aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$x_U(A) = \int_{S(A)} x f_A(x)dx \Big/ \int_{S(A)} f_A(x)dx, \tag{3.3.9}$$

$$\sigma_U(A) = \left[\left(\int_{S(A)} x^2 f_A(x)dx \Big/ \int_{S(A)} f_A(x)dx\right) - (x_U(A))^2\right]^{1/2} \tag{3.3.10}$$

$S(A)$, A fuzzy sayısının destek (support) kümesidir.

A üçgensel fuzzy sayı olduğunda yukarıdaki eşitlikler yeniden yazılabilir:

$$\begin{aligned} x_U(A) &= \frac{1}{3}(l + m + n), && (3.3.11)\\ \sigma_U(A) &= \frac{1}{18}(l^2 + m^2 + n^2 - lm - ln - mn), && (3.3.12) \end{aligned}$$

burada $l = \inf S(A)$, $f_A(m) = 1$, $n = \sup S(A)$ dır.

2) Orantılı Dağılım: $f(A) = k \cdot f_A(x)$, $A \in P$, k orantı sabitidir.

$$x_P(A) = \int_{S(A)} x^2 f_A(x)dx \Big/ \int_{S(A)} (f_A(x))^2 dx, \tag{3.3.13}$$

$$\sigma_P(A) = \left[\left(\int_{S(A)} x^2 (f_A(x))^2 dx \Big/ \int_{S(A)} (f_A(x))^2 dx\right) - (x_P(A))^2\right]^{1/2} \tag{3.3.14}$$

A üçgensel fuzzy sayı olduğunda eşitlikler yeniden yazılırsa;

$$\begin{aligned} x_P(A) &= \frac{1}{4}(l + 2m + n), && (3.3.15)\\ \sigma_P(A) &= \frac{1}{80}(3l^2 + 4m^2 + 3n^2 - 4lm - 2ln - 4mn). && (3.3.16) \end{aligned}$$

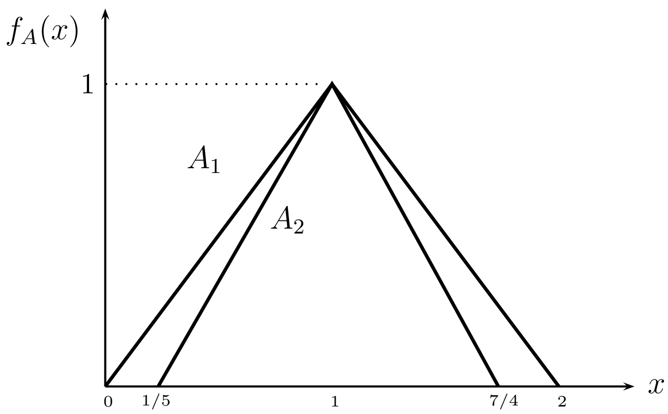
Lee ve Li'ye [22] göre fuzzy sayılarda yüksek ortalama ve aynı zamanda daha az yayılım sıralamada büyüktür. Fakat, yüksek ortalama değeri ve aynı zamanda daha çok yayılım veya düşük ortalama ve aynı zamanda daha az yayılım oluğunda, sıralamaları karşılaştırmak kolay değildir. Bu nedenle, Cheng

[5], Lee ve Li'nin yöntemini geliştirmek için varyasyon katsayısı kullanarak etkili bir indeks vermiştir. Varyasyon katsayısı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$CV = \sigma \text{ (standart hata)}/|\mu| \text{ (ortalama)}, \tag{3.3.17}$$

$\mu \neq 0$ ve $\sigma > 0$ dır.

CV (coefficient of variation) indeksi ile fuzzy sayıları karşılaştırmak için, ilk olarak ortalama değer ve Lee ve Li'nin yöntemiyle standard sapma hesaplanır. Daha sonra, CV değeri hesaplanır. Fuzzy sayıları sıralamada CV değeri daha küçük olan fuzzy sayısı daha büyüktür.



Şekil 3.20: A_1, A_2 fuzzy sayıları

Örnek 3.3.2 ([5]). *Şekil 3.20 ile verilen $A_1 = (0, 1, 2)$ ve $A_2 = (1/5, 1, 7/4)$ fuzzy sayıları düşünüldüğünde, (3.3.9)-(3.3.17) denklemlerinden $\bar{x}$ ortalama değeri, σ standart sapması ve düzgün dağılımla CV indeksleri aşağıdaki gibi hesaplanır.*

$$\begin{aligned} \bar{x}(A_1) &= 1, \\ \sigma(A_1) &= 0.1667, \\ CV(A_1) &= 0.1667 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \bar{x}(A_2) &= 0.9833, \\ \sigma(A_2) &= 0.1001, \\ CV(A_2) &= 0.1018. \end{aligned}$$

Bu sonuçlardan, $\bar{x}$ kriterine göre $A_2 < A_1$ ve σ kriterine göre de $A_2 < A_1$ dir. Ancak Lee ve Li'nin yönteminde yüksek ortalama değeri ve aynı zamanda *düşük dağılımı olan sayı büyük olmaktadır. Dolayısıyla A_1 ve A_2 fuzzy sayıları için bu yöntemle sıralama kolay olmamaktadır. Bu nedenle burada CV indeksi kullanılabilir. CV değerlerine bakıldığında $CV(A_1) > CV(A_2)$ olduğundan sıralama $A_1 < A_2$ olarak elde edilir.*

Ancak Cheng [5]'in yönteminde bazı eksiklikler bulunmaktadır. Çünkü, Şekil 3.19 ile verilen A_1, A_2 ve A_3 fuzzy sayıları incelendiğinde Cheng [5]'in uzaklık yöntemiyle $A_1 < A_2 < A_3$ elde edilmişti. Mantıksal olarak, A_1, A_2, A_3'ün simetrikleri olan $-A_1, -A_2, -A_3$ için sıralama $-A_1 > -A_2 > -A_3$ olmalıdır. Fakat, uzaklık yöntemine göre sıralama aynı kalarak $-A_1 < -A_2 < -A_3$ olmaktadır [6].

3.4 Chu ve Tsao'nun Yöntemi (2002)

Chu ve Tsao [6], Cheng [5]'in CV indeksi ve uzaklık yöntemindeki eksikliklerinin üstesinden gelmek için ağırlık merkezi ile orjin arasında kalan alanı kullanarak fuzzy sayıların sıralanabileceğini öne sürmüştür.

$A = (a_1, a_2, a_3, a_4; w_A)$ genelleştirilmiş yamuk fuzzy sayısının ağırlık merkezi $(\bar{x}_A, \bar{y}_A)$ aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$\begin{aligned} \bar{x}_A &= \frac{\displaystyle\int_{a_1}^{a_2} (x f_A^L) dx + \int_{a_2}^{a_3} x dx + \int_{a_3}^{a_4} (x f_A^R) dx}{\displaystyle\int_{a_1}^{a_2} (f_A^L) dx + \int_{a_2}^{a_3} dx + \int_{a_3}^{a_4} (f_A^R) dx}, \\ \bar{y}_A &= \frac{\displaystyle\int_0^{w_A} (y g_A^L) dy + \int_0^{w_A} (y g_A^R) dy}{\displaystyle\int_0^{w_A} (g_A^L) dy + \int_0^{w_A} (g_A^R) dy}, \end{aligned} \tag{3.4.18}$$

A fuzzy sayısının ağırlık merkezi $(\bar{x}_A, \bar{y}_A)$ ile orjin arasındaki alan

$$S(A) = \bar{x}_A \bar{y}_A \tag{3.4.19}$$

olarak tanımlanmaktadır. Burada $S(A)$ değeri sıralama yapmak için kullanılır. Her hangi A_i, A_j fuzzy sayıları için,

(i) $S(A_i) < S(A_j) \Rightarrow A_i < A_j$

$(ii)\ S(A_i) = S(A_j) \Rightarrow A_i = Aj$

$(iii)\ S(A_i) > S(A_j) \Rightarrow A_i > Aj$

dir [6].

Örnek 3.4.1 ([6]). $A_1 = (0.2, 0.3, 0.5),\ A_2 = (0.17, 0.32, 0.58)$ *ve* $A_3 = (0.25, 0.4, 0.7)$ *üçgensel fuzzy sayıları verilsin. Denklem (3.4.18) ile*

$$\begin{aligned}(\bar{x}_{A_1}, \bar{y}_{A_1}) &= (0.333,\ 0.4872)\\ (\bar{x}_{A_2}, \bar{y}_{A_2}) &= (0.357,\ 0.4868)\\ (\bar{x}_{A_3}, \bar{y}_{A_3}) &= (0.450,\ 0.4857)\end{aligned}$$

elde edilir ve buradan denklem (3.4.19) kullanılarak

$$\begin{aligned}S(A_1) &= 0.333 \times 0.4872 &= 0.162\\ S(A_2) &= 0.357 \times 0.4868 &= 0.174\\ S(A_3) &= 0.450 \times 0.4857 &= 0.219\end{aligned}$$

hesaplanır. $S(A_1) < S(A_2) < S(A_3)$ *olduğundan sıralama* $A_1 < A_2 < A_3$ *olur.*

Aynı fuzzy sayıların simetrikleri $-A_1 = (-0.5, -0.3, -0.2), -A_2 = (-0.58, -0.32, -0.17)$ *ve* $-A_3 = (-0.7, -0.4, -0.25)$ *düşünüldüğünde, bu sayıların ağırlık merkezi noktaları*

$$\begin{aligned}(\bar{x}_{-A_1}, \bar{y}_{-A_1}) &= (-0.333, 0.4872)\\ (\bar{x}_{-A_2}, \bar{y}_{-A_2}) &= (-0.357, 0.4868)\\ (\bar{x}_{-A_3}, \bar{y}_{-A_3}) &= (-0.450, 0.4857)\end{aligned}$$

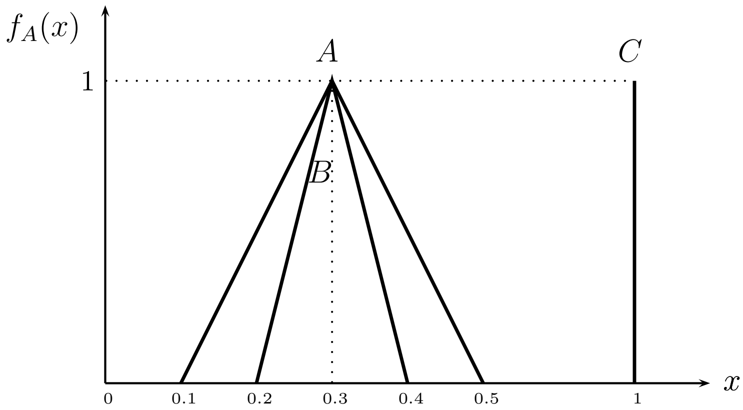
dir

$$\begin{aligned}S(-A_1) &= -0.333 \times 0.4872 &= -0.162\\ S(-A_2) &= -0.357 \times 0.4868 &= -0.174\\ S(-A_3) &= -0.450 \times 0.4857 &= -0.219\end{aligned}$$

olup, $S(-A_1) > S(-A_2) > S(-A_3)$ *olduğundan fuzzy sayıların sıralaması* $-A_1 > -A_2 > -A_3$ *olarak bulunur. Buradan bu yöntemin fuzzy sayıları ve simetriklerini tutarlı olarak sıraladığı söylenebilir.*

3.5 Chen ve Chen'in Yöntemi (2003)

Chen ve Chen 2003 yılındaki çalışmalarında, Cheng [5], Murakami ve ark. [4] ve Yager'in [3] yöntemlerinin bazı durumlarda fuzzy sayıları doğru sıralayamadığını ve kesin sayıların sıralamasını hesaplayamadığını ortaya çıkarmışlardır [7].



Şekil 3.21: A, B, C fuzzy sayıları

Şekil 3.21'de verilen A, B ve C fuzzy sayıları ele alındığında, görüldüğü üzere A ve B fuzzy sayıları birbirinden farklıdır. Ancak [3], [4], [5] ile verilen yöntemlerde A ve B fuzzy sayıları için aynı sıralama değerleri hesaplanmaktadır. Ayrıca [6] da, C kesin fuzzy sayısının belirlediği alanın sıfır olması sebebiyle verilen formüllerde paydayı sıfır yaptığından sıralama değeri hesaplanamamaktadır. Bu nedenle, bu problemin üstesinden gelmek için Chen ve Chen [7] genelleştirilmiş yamuk fuzzy sayıların sıralanmasında ağırlık merkezi ve standard sapmaya bağlı bir yöntem önermiştir.

Bu yönteme göre, $A = (a_1, a_2, a_3, a_4; w_A)$ genelleştirilmiş yamuk fuzzy sayısı için $Rank(A)$ sıralama değeri aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\text{Rank(A)} = \bar{x}_A + (w_A - \bar{y}_A)^{s_A} \times (\bar{y}_A + 0.5)^{1-w_A}, \qquad (3.5.20)$$

$\bar{x}_A$ ve $\bar{y}_A$ değerleri A genelleştirilmiş fuzzy sayısının ağırlık merkezinin koordinatlarıdır ve aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\bar{y}_A = \begin{cases} \dfrac{w_A \times \left(\frac{a_3-a_2}{a_4-a_1}+2\right)}{6} & , \quad a_1 \neq a_4 \quad \text{ve} \quad 0 < w_A \leq 1 \\ \dfrac{w_A}{2} & , \quad a_1 = a_4 \quad \text{ve} \quad 0 < w \leq 1 \end{cases} , \tag{3.5.21}$$

$$\bar{x}_A = \frac{\bar{y}_A(a_3+a_2)+(a_4+a_1)(w_A-\bar{y}_A)}{2w_A}. \tag{3.5.22}$$

Burada s_A ile A genelleştirilmiş yamuk fuzzy sayısının standard sapması gösterilmektedir ve

$$s_A = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{4}(a_i-\bar{a})^2}{4-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{4}(a_i-\bar{a})^2}{3}}. \tag{3.5.23}$$

Burada $\bar{a}$; a_1, a_2, a_3, a_4 sayılarının aritmetik ortalamasıdır yani,

$$\bar{a} = \frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}.$$

Sıralamada A fuzzy sayısına karşılık hesaplanan Rank(A) değeri büyük olan fuzzy sayısı daha büyüktür. Eğer A bir normal fuzzy sayı yani ($w_A = 1$) ise

$$\text{Rank(A)} = \bar{x}_A + (1-\bar{y}_A)^{s_A} \tag{3.5.24}$$

olur.

$$\bar{y}_A = \begin{cases} \dfrac{1 \times \left(\frac{a_3-a_2}{a_4-a_1}+2\right)}{6} & , \quad a_1 \neq a_4 \\ \dfrac{1}{2} & , \quad a_1 = a_4 \end{cases} \tag{3.5.25}$$

$$\bar{x}_A = \frac{\bar{y}_A(a_3+a_2)+(a_4+a_1)(1-\bar{y}_A)}{2} \tag{3.5.26}$$

dır.

$S = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ yamuk fuzzy sayıların bir kümesi olsun. [7] de önerilen yöntem aşağıdaki algoritma ile verilebilir:

1. Adım: $(\bar{x}_{A_i}, \bar{y}_{A_i})$ ağırlık merkezleri hesaplanır.
2. Adım: Her A_i fuzzy sayısı için s_{A_i} standart sapma bulunur.
3. Adım: Her A_i fuzzy sayısı için Rank(A_i) sıralama değeri hesaplanır.
4. Adım: Fuzzy sayıların sıralanması aşağıdaki gibidir:

(i) $Rank(A_i) < Rank(A_j) \Rightarrow A_i < A_j$,

(ii) $Rank(A_i) = Rank(A_j) \Rightarrow A_i = A_j$,

(iii) $Rank(A_i) > Rank(A_j) \Rightarrow A_i > A_j$

dir.

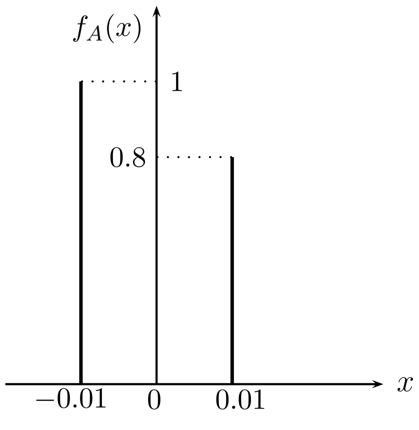
Örnek 3.5.1 ([7]). *Şekil 3.21'te gösterilen* $A = (0.1, 0.3, 0.5), B = (0.2, 0.3, 0.4)$ *ve* $C = (1.0, 1.0, 1.0)$ *fuzzy sayıları için (3.5.25) ve (3.5.26) deklemleri yardımıyla* A, B *ve* C *fuzzy sayılarının ağırlık merkezleri*

$$\begin{aligned}(\bar{x}_A, \bar{y}_A) &= (0.3, 1/3),\\ (\bar{x}_B, \bar{y}_B) &= (0.3, 1/3),\\ (\bar{x}_C, \bar{y}_c) &= (1.0, 1/2)\end{aligned}$$

ve standard sapmaları $s_A = 0.1633$, $s_B = 0.0816$ *ve* $s_C = 0$ *hesaplanır. Buradan*

$$\begin{aligned}Rank(A) &= 1.2359,\\ Rank(B) &= 1.2675,\\ Rank(C) &= 2.0\end{aligned}$$

bulunur. $Rank(A) < Rank(B) < Rank(C)$ *olduğundan sıralama* $A < B < C$ *olur.*



Şekil 3.22: A ve B genelleştirilmiş fuzzy sayıları

Ancak bu yöntem bazı durumlarda genelleştirilmiş fuzzy sayıların sıralamasını doğru hesaplayamamaktadır. Aşağıda bunun bir örneği verilmiştir.

Örnek 3.5.2 ([8]). *Şekil 3.22 ile gösterilen* $A = (-0.01, -0.01, -0.01, -0.01; 1)$ *ve* $B = (0.01, 0.01, 0.01, 0.01; 0.8)$ *genelleştirilmiş fuzzy sayıları verilsin. Kolaylıkla,* $(\bar{x}_A, \bar{y}_A) = (-0.01, 0.5)$ *ve* $(\bar{x}_B, \bar{y}_B) = (0.01, 0.4)$ *hesaplanır. Chen ve Chen'in [7] yöntemini uygulayarak* $Rank(A) = 0.99$*,* $Rank(B) = 0.989$ *bulunur. Bu yöntemle sıralama sonucu* $A > B$ *olur. Ancak sıralama* $A < B$ *olmalıdır [8].*

3.6 Yong ve Qi'nin Yöntemi (2005)

Chen ve Chen'in [7] sıralama yöntemindeki eksikliklerin üstesinden gelmek için Yong ve Qi [8] yeni bir yöntem öne sürmüştür. Bu yöntem aşağıdaki şekilde uygulanmaktadır:

1. Adım : Genelleştirilmiş yamuk fuzzy sayısı standardize edilmiş A^* yamuk fuzzy sayısına dönüştürülür.

2. Adım : Her A^* standardize edilmiş yamuk fuzzy sayının ağırlık merkezi belirlenir. Bu adımda ağırlık merkezi aşağıdaki eşitliklerle hesaplanır:

$$\bar{y}_A = \begin{cases} \dfrac{w_A\left(\frac{a_3-a_2}{a_4-a_1}+2\right)}{6} & , \quad a_1 \neq a_4 \\ w_A\dfrac{1}{2} & , \quad a_1 = a_4 \end{cases} \tag{3.6.27}$$

$$\bar{x}_A = \frac{\bar{y}_A(a_3+a_2)+(a_4+a_1)(w_A-\bar{y}_A)}{2}. \tag{3.6.28}$$

3. Adım : Ağırlık merkezi indeks noktasına dönüştürülür: $(\bar{x}_A, \bar{y}_A)$ ağırlık merkezi olsun. O halde $(\bar{x}_{A^*}, \bar{y}_{A^*})$ indeks noktsı aşağıdaki şekildedir.

$$\bar{x}_{A^*} = \bar{x}_A, \tag{3.6.29}$$

$$\bar{y}_{A^*} = (w_A - \bar{y}_A)^{s_A} \times (\bar{y}_A + 0.5)^{1-w_A}. \tag{3.6.30}$$

4. Adım : Pozitif nokta ve negatif nokta belirlenir. Pozitif ve negatif noktalar

$$(\bar{x}_P, \bar{y}_P) = (1, 1/2),$$
$$(\bar{x}_N, \bar{y}_N) = (-1, 1/2)$$

olsun.

5. Adım : İndeks noktası ile pozitif nokta ve negatif nokta arasındaki uzaklıklar sırasıyla aşağıdaki formüllerle hesaplanır.

$$d^+ = \sqrt{(\bar{x}_{A^*} - \bar{x}_P)^2 + (\bar{y}_{A^*} - \bar{y}_P)^2}, \tag{3.6.31}$$

$$d^- = \sqrt{(\bar{x}_{A^*} - \bar{x}_N)^2 + (\bar{y}_{A^*} - \bar{y}_N)^2} \tag{3.6.32}$$

6. Adım : İndeks katsayısı hesaplanır. İndeks katsayısı fuzzy sayıların sıralamasını belirlemek için tanımlanır. A fuzzy sayısının indeks katsayısı

$$IC_A = \frac{d^-}{d^+ + d^-}, \quad I = 1, 2, \ldots, m \tag{3.6.33}$$

şeklinde hesaplanır ve sıralama

$$\begin{aligned} IC_A < IC_B &\Rightarrow A < B \\ IC_A = IC_B &\Rightarrow A = B \\ IC_A > IC_B &\Rightarrow A > B \end{aligned}$$

biçimindedir.

Chen ve Chen'in [7]'deki yönteminin bazı fuzzy sayılarını örneğin, kesin fuzzy sayıları yanlış sıraladağı [8] tarafından gösterilmişti. Aşağıda Yong ve Qi'nin yönteminin nasıl uygulandığına dair örnekler verilmiştir.

Örnek 3.6.1 ([8]). $A = (-0.01, -0.01, -0.01, -0.01; 1)$ *ve* $B = (0.01, 0.01, 0.01, 0.01; 0.8)$ *genelleştirilmiş fuzzy sayıları için ilk olarak ağırlık merkezi noktaları aşağıdaki şekildedir.*

$$\begin{aligned} (\bar{x}_A, \bar{y}_A) &= (-0.01, 0.5), \\ (\bar{x}_B, \bar{y}_B) &= (0.01, 0.4) \end{aligned}$$

Daha sonra ağırlık merkezi noktaları indeks noktalarına dönüştürülür ve aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

$$\begin{aligned} \bar{x}_{A^*} &= -0.01, \\ \bar{y}_{A^*} &= (w_A - \bar{y}_A)^{s_A} \times (\bar{y}_A + 0.5)^{1-w_A} = 1, \\ \bar{x}_{B^*} &= 0.01, \\ \bar{y}_{B^*} &= (w_B - \bar{y}_B)^{s_B} \times (\bar{y}_B + 0.5)^{1-w_B} = 1. \end{aligned}$$

Pozitif nokta ve negatif nokta sırasıyla aşağıdaki gibi alınır.

$$\begin{aligned} (\bar{x}_P, \bar{y}_P) &= (1, 1/2), \\ (\bar{x}_N, \bar{y}_N) &= (-1, 1/2). \end{aligned}$$

Genelleştirilmiş A fuzzy sayısı için indeks noktasının bir pozitif nokta ve bir negatif noktadan uzaklığı sırasıyla

$$\begin{aligned} d_A^+ &= \sqrt{(\bar{x}_{A^*} - \bar{x}_P)^2 + (\bar{y}_{A^*} - \bar{y}_P)^2} = 1.01, \\ d_A^- &= \sqrt{(\bar{x}_{A^*} - \bar{x}_N)^2 + (\bar{y}_{A^*} - \bar{y}_N)^2} = 0.99 \end{aligned}$$

dir. Benzer yolla genelleştirilmiş B fuzzy sayısı için indeks noktasının bir pozitif nokta ve bir negatif noktadan uzaklığı sırasıyla

$$\begin{aligned} d_B^+ &= 0.99, \\ d_B^- &= 1.01 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. A ve B fuzzy sayıları için indeks katsayıları sırasıyla aşağıdaki şekilde hesaplanabilir.

$$\begin{aligned} IC_A &= \frac{d_A^-}{d_A^+ + d_A^-} = \frac{0.99}{1.01 + 0.99} = 0.495, \\ IC_B &= \frac{d_B^-}{d_B^+ + d_B^-} = \frac{1.01}{0.99 + 1.01} = 0.505. \end{aligned}$$

Buradan, $IC_A < IC_B$ *olduğundan,* $A < B$ *dir.*

Örnek 3.6.2 ([8]). $A = (0.1, 0.3, 0.5; 1)$, $B = (0.2, 0.3, 0.4; 1)$ *ve* $C = (1.0, 1.0, 1.0; 1)$ *fuzzy sayıları için verilen yöntem uygulanırsa*

$$IC_A = 0.6214, IC_B = 0.6244, \; IC_C = 1$$

elde edilir ve sıralama $A < B < C$ *olur.*

Yong ve Qi'nin yöntemi kesin sayıları da sıralayabilmektedir.

3.7 Wang ve ark.'nın Düzlemsel Bir Bölge İçin Doğru Ağırlık Merkezi Formüllerini Hatırlatması (2006)

Cheng'in [5] çalışmasında sunduğu ağırlık merkezi formüllerinin yanlış olduğu ve bazı yanlış uygulamalara sebep olduğu anlaşılmıştır. Bu nedenle Wang ve ark. [17] bir karmaşaya sebep olmasın diye yapılan hatayı durdurmak için düzlemsel bir bölge için doğru ağırlık merkezi formüllerini vermiştir ve analitik geometri bakış açısıyla doğrulamışlardır.

Üyelik fonksiyonu

$$f_A(x) = \begin{cases} f_A^L(x), & a_1 \leq x \leq a_2 \\ w_A, & a_2 \leq x \leq a_3 \\ f_A^R(x), & a_3 \leq x \leq a_4 \\ 0, & \text{d.d.} \end{cases} \tag{3.7.34}$$

ile verilen $A = (a_1, a_2, a_3, a_4; w_A)$ genelleştirilmiş fuzzy sayısı için ağırlık merkezi formülleri aşağıdaki gibi olmalıdır [17].

f_A^L ve f_A^R kesin monoton fonksiyonlarının ters fonksiyonları sırasıyla g_A^L ve g_A^R olmak üzere,

$$\begin{aligned} \bar{x}_A &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x f_A(x)dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f_A(x)dx} \\ &= \frac{\int_{a_1}^{a_2} x f_A^L(x)dx + \int_{a_2}^{a_3} (w_A x)dx + \int_{a_3}^{a_4} x f_A^R(x)dx}{\int_{a_1}^{a_2} f_A^L(x)dx + \int_{a_2}^{a_3} w dx + \int_{a_3}^{a_4} f_A^R(x)dx} \end{aligned} \tag{3.7.35}$$

$$\bar{y}_A = \frac{\int_0^{w_A} y(g_A^R(y) - g_A^L(y))dy}{\int_0^{w_A} (g_A^R(y) - g_A^L(y))dy}$$

Cheng [5] ve Chu ve Tsao'nun [6] formüllerindeki temel hata $\bar{x}_A$ formüllerinde w_A'nın unutulması ve $\bar{y}_A$ formüllerinde ikinci terimin pay ve paydada pozitif işaretli olmasıdır.

$A = (a_1, a_2, a_3, a_4; w_A)$ genelleştirilmiş yamuk fuzzy sayısı için üyelik fonksiyonu

$$f_A(x) = \begin{cases} w_A \left(\dfrac{x - a_1}{a_2 - a_1} \right) & , \ a_1 \leq x \leq a_2 \\ w_A & , \ a_2 \leq x \leq a_3 \\ w_A \left(\dfrac{x - a_4}{a_3 - a_4} \right) & , \ a_3 \leq x \leq a_4 \\ 0 & , \ \text{d.d.} \end{cases}$$

şeklinde tanımlandığında

$$\bar{x}_A = \frac{1}{3}\left[a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - \frac{a_4a_3 - a_1a_2}{(a_4 + a_3) - (a_1 + a_2)}\right], \quad (3.7.36)$$

$$\bar{y}_A = w_A\frac{1}{3}\left[1 + \frac{a_3 - a_2}{(a_4 + a_3) - (a_1 + a_2)}\right] \quad (3.7.37)$$

olur. Burada $a_2 = a_3$ olarak alınırsa genelleştirilmiş üçgensel A fuzzy sayısı için ağırlık merkezi

$$\bar{x}_A = \frac{1}{3}[a_1 + a_2 + a_4], \quad (3.7.38)$$

$$\bar{y}_A = \frac{1}{3}w_A \quad (3.7.39)$$

ve normal üçgensel fuzzy sayı için

$$\bar{y}_A = \frac{1}{3} \quad (3.7.40)$$

olur.

3.8 Liang ve ark.'nın Yöntemi (2006)

Liang ve ark. 2006 yılında, Cheng'in [5] CV indenksindeki bazı tutarsızlıkların üstesinden gelmek için R_* ve RV indeksi öne sürmüştür [9].

Cheng [5] önerdiği uzaklık yöntemi ve CV indeksi yönteminde ana indeksin $\bar{x}_A$ mı yoksa $\bar{y}_A$ mı olduğunu belirtmemiştir. Bu nedenle bu iki indis tutarsızlıklara neden olabilmektedir.

$A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ yamuk fuzzy sayısının üyelik fonksiyonu

$$f_A(x) = \begin{cases} f_A^L(x), & a_1 \leq x \leq a_2 \\ 1, & a_2 \leq x \leq a_3 \\ f_A^R(x), & a_3 \leq x \leq a_4 \\ 0, & \text{d.d.} \end{cases} \quad (3.8.41)$$

ve f_A^L ve f_A^R kesin monoton fonksiyonlarının ters fonksiyonları sırasıyla g_A^L ve g_A^R olmak üzere, [9] deki sunulan yöntem aşağıdaki algoritma ile verilebilir.

1. Adım : A fuzzy sayısının ağırlık merkezi $(\bar{x}_A, \bar{y}_A)$ aşağıdaki formüllerle

hesaplanır.

$$\bar{x}_A = \frac{\displaystyle\int_{a_1}^{a_2} x f_A^L(x)dx + \int_{a_2}^{a_3} x dx + \int_{a_3}^{a_4} x f_A^R(x)dx}{\displaystyle\int_{a_1}^{a_2} f_A^L(x)dx + \int_{a_2}^{a_3} dx + \int_{a_3}^{a_4} f_A^R(x)dx}$$

$$= \frac{a_4^2 + a_3^2 + a_3a_4 - a_1^2 - a_2^2 - a_1a_2}{3(a_4 + a_3 - a_1 - a_2)}, \tag{3.8.42}$$

$$\bar{y}_A = \frac{\displaystyle\int_0^1 y g_A^R(y)dy - \int_0^1 y g_A^L(y)dy}{\displaystyle\int_0^1 g_A^R(y)dy - \int_0^1 g_A^L(y)dy}$$

$$= \frac{a_4 - 2a_3 - a_1 - 2a_2}{3(a_4 + a_3 - a_1 - a_2)}.$$

2. Adım : Uzaklık indeksinin hesaplanması: Ağırlık merkezi ile orjin arasındaki uzaklık

$$R_*(A) = \sqrt{(\bar{x}_A)^2 + (\bar{y}_A)^2} \tag{3.8.43}$$

bulunur.

3. Adım : RV indeksinin hesaplanması : RV indeksi, CV indeksindeki tutarsızlığı gidermek için kullanılmıştır. RV indeksi ortalamanın bir yüzdesi olarak standard sapmayı ifade ederek sunulur. Küçük RV indekse sahip olan fuzzy sayı sıralamada daha büyüktür.

$$\sigma_x(A) = \left[\frac{\displaystyle\int_{a_1}^{a_2} x^2 f_A^L(x)dx + \int_{a_2}^{a_3} x^2 dx + \int_{a_3}^{a_4} x^2 f_A^R(x)dx}{\displaystyle\int_{a_1}^{a_2} f_A^L(x)dx + \int_{a_2}^{a_3} dx + \int_{a_3}^{a_4} f_A^R(x)dx} - (\bar{x}_A)^2\right]^{1/2}$$

$$= \left[\frac{(a_4^2 + a_3^2)(a_4 + a_3) - (a_2^2 + a_1^2)(a_2 + a_1)}{6[(a_4 + a_3) - (a_2 + a_1)]} - (\bar{x}_A)^2\right]^{1/2},$$

$$\sigma_y(A) = \left[\frac{\displaystyle\int_0^1 y^2(g_A^R(y) - g_A^L(y))dy}{\displaystyle\int_0^1 (g_A^R(y) - g_A^L(y))dy} - (\bar{y}_A)^2\right]^{1/2}$$

$$= [2(a_4 - a_1)^2 + 8(a_4 - a_1)(a_3 - a_2) + 2(a_3 - a_2)^2]^{1/2},$$

$$\sigma_R(A) = \sqrt{(\sigma_x(A))^2 + (\sigma_y(A))^2},$$

$$RV(A) = \sigma_R(A)/R_*(A). \tag{3.8.44}$$

$a_2 = a_3$ olduğunda A üçgensel fuzzy sayısı elde edilir ve yukarıdaki formüller aşağıdaki şekilde yeniden yazılırsa

$$\sigma_x(A) = \left[\frac{1}{18}(a_1^2 + a_2^2 + a_4^2 - a_1a_2 - a_1a_4 - a_2a_4)\right]^{1/2}$$

$R_*(A)$ ile karşılaştırmak için, Cheng (1998)'deki çalışmada $\sigma_U(A)$ ve $\sigma_P(A)$ aşağıdaki şekilde tanımlanmalıdır.

$$\sigma_U(A) = \left[\frac{1}{18}(l^2 + m^2 + n^2 - ml - nl - mn)\right]^{1/2},$$
$$\sigma_P(A) = \left[\frac{1}{80}(3l^2 + 4m^2 + 3n^2 - 4ml - 2nl - 4mn)\right]^{1/2}.$$

Genelleştirilmiş bir $B = (a_1, a_2, a_3, a_4; w)$ yamuk fuzzy sayısı için üyelik fonksiyonu

$$f_B(x) = \begin{cases} f_B^L(x), & a_1 \le x \le a_2 \\ w, & a_2 \le x \le a_3 \\ f_B^R(x), & a_3 \le x \le a_4 \\ 0, & \text{d.d.} \end{cases} \tag{3.8.45}$$

ve f_B^L ve f_B^R kesin monoton fonksiyonlarının ters fonksiyonları sırasıyla g_B^L ve g_B^R olmak üzere

1. Adım: B genelleştirilmiş fuzzy sayısının ağırlık merkezi $(\bar{x}_B, \bar{y}_B)$ aşağıdaki formüllerle hesaplanır.

$$\bar{x}_B = \frac{w\int_{a_1}^{a_2} x f_B^L(x)dx + w\int_{a_2}^{a_3} x dx + w\int_{a_3}^{a_4} x f_B^R(x)dx}{w\int_{a_1}^{a_2} f_B^L(x)dx + w\int_{a_2}^{a_3} dx + w\int_{a_3}^{a_4} f_B^R(x)dx} = \bar{x}_A,$$

$$\bar{y}_B = \frac{\int_0^w y g_A^R(y)dy - \int_0^w y g_A^L(y)dy}{\int_0^w g_A^R(y)dy - \int_0^w g_A^L(y)dy}$$

$$= \frac{w^2\int_0^1 y g_A^R(y)dy - w^2\int_0^1 y g_A^L(y)dy}{w\int_0^1 g_A^R(y)dy - w\int_0^1 g_A^L(y)dy} = w\bar{y}_A$$

2. Adım : Uzaklık indeksi hesaplanır:

$$R_*(B) = \sqrt{(\bar{x}_B)^2 + (\bar{y}_B)^2}.$$

3. Adım : RV indeksi hesaplanır:

$$\begin{aligned}
\sigma_x(B) &= \sigma_x(A), \\
\sigma_y(B) &= w\sigma_y(A), \\
\sigma_R(B) &= \sqrt{(\sigma_x(B))^2 + (\sigma_y(B))^2} = \sqrt{(\sigma_x(A))^2 + w^2(\sigma_y(A))^2}, \\
RV(B) &= \sigma_R(B)/R_*(B).
\end{aligned}$$

Burada w değeri y değerinin düzeltme faktörüdür.

Ana sıralama indeksini seçmek için kurallar:

(1) Ana sıralama indeksi (A ve B fuzzy sayıları için)

(i) A ve B her ikisi de fuzzy sayı ise RV ana indeks ve R_* yardımcı indekstir.

(ii) A fuzzy sayı, B genelleştirilmiş fuzzy sayı ise R_* ana indeks ve RV yardımcı indekstir.

(iii) A ve B her ikisi de genelleştirilmiş fuzzy sayı ise R_* ana indeks ve RV yardımcı indekstir.

(2) R_* ve RV indeksinin özelikleri:

i) R_*'ı büyük olan fuzzy sayı sıralamada büyüktür.

ii) RV'si küçük olan fuzzy sayı sıralamada büyüktür.

Örnek 3.8.1 ([9]). *$A_1 = (0, 1, 2)$ ve $A_2 = (1/5, 1, 7/4)$ üçgensel fuzzy sayılarını ele alalım. R, CV, R_* ve RV değerleri*

$$\begin{array}{llllllll}
R & ; & R(A_1) & = 1.1180 & , & R(A_2) & = & 1.1041 \\
CV & ; & CV(A_1) & = 0.4082 & , & CV(A_2) & = & 0.3218 \\
R_* & ; & R_*(A_1) & = 1.0541 & , & R_*(A_2) & = & 1.0383 \\
RV & ; & RV(A_1) & = 0.4472 & , & RV(A_2) & = & 0.380
\end{array}$$

bulunur. Bu sonuçlardan, CV değerlerine göre $A_1 < A_2$ fakat R değerleri $A_1 > A_2$ dir. Bu nedenle CV indeksi ve R indeksi arasında tutarsızlık vardır. A_1 ve A_2 fuzzy sayılar olduğundan Liang ve ark.'nın (2006) yöntemine göre RV indeksi ana sıralama indeksidir. RV değerine göre sıralamada $A_1 < A_2$ olmaktadır ve bu sonuç CV değerlerinin sıralamasıyla aynıdır.

3.9 Shieh'in Ağırlık Merkezi Formülleri (2007)

Shieh [18], genel durumlarda fuzzy sayıların ağırlık merkezlerini belirlemek için bir çift formül öne sürmüştür. Bu formüller, Wang'ın [17] tanımladığı anlamda doğrudur. Formüller tüm fuzzy sayılar için uygundur ve fuzzy sayıların sıralanmasına uygulanabilir.

Wang'ın [17] ağırlık merkezi formülleri, doğru ağırlık merkezinin aşağıdaki iki özelliğini sağlamaktadır.

(i) Eğer A ve B, üyelik fonksiyonları

$$f_A(x) = \begin{cases} f_A^L(x), & a_1 \leq x \leq a_2 \\ 1, & a_2 \leq x \leq a_3 \\ f_A^R(x), & a_3 \leq x \leq a_4 \\ 0, & \text{d.d.} \end{cases} \tag{3.9.46}$$

ve $f_B(y)$ ile verilen iki fuzzy sayısı, $y = ax + b$ iken $f_A(x) = f_B(y)$ bağıntısını sağlıyorsa,

$$\bar{x}_B = \bar{x}_A + b, \quad \bar{y}_B = \bar{y}_A$$

dır.

(ii) Eğer A ve B, üyelik fonksiyonları $f_A(x)$ ve $f_B(x)$ ile verilen fuzzy sayıları, her $x \in \mathbb{R}$ için, $f_B(x) = wf_A(x)$ bağıntısını sağlıyorsa, o halde;

$$\bar{x}_B = \bar{x}_A, \quad \bar{y}_B = w\bar{y}_A$$

Shieh [18], tüm fuzzy sayılar için aşağıdaki ağırlık merkezi formüllerini önermiştir.

$$\begin{aligned} \bar{x}_A &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x f_A(x)dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f_A(x)dx}, \\ \bar{y}_A &= \frac{\int_0^w \alpha |A^\alpha| d\alpha}{\int_0^w |A^\alpha| d\alpha}. \end{aligned} \tag{3.9.47}$$

Burada A, $\sup_{x\in\mathbb{R}} f_A(x) = w$ ile bir fuzzy sayı ve $|A^\alpha|$, $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere A^α, α-kesmesinin boyudur. Eğer A, $f_A(x_0) = w$ ile kesin bir küme ve eğer $x \neq x_0$ iken $f_A(x) = 0$ ise, bu kümenin ağırlık merkezi (x_0, w) ile tanımlıdır. Açıktır ki (x_0, w), (i) ve (ii) özelliklerini sağlar.

Yukarıdaki $\bar{x}_A$ formülü, yatay eksendeki koordinatın doğal tanımıdır. $\bar{y}_A$ formülü aşağıdaki özelliklere bağlı olarak tanımlanır.

Önerme 3.9.1 ([18]). *A, $\sup_{x\in\mathbb{R}} f_A(x) = w$ ile bir fuzzy sayı olsun. O halde*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_A(x)dx = \int_0^w |A^\alpha| d\alpha$$

dır.

Kanıt. Genelliği bozmadan, A'nın üyelik fonksiyonu tanımladığımız gibi olsun. $\bar{g}_A^R(y) = \sup\{x | f_A^R(x) = y\}$ ve $\underline{g}_A^L(y) = \inf\{x | f_A^L(x) = y\}$ olsun. $f_A^R(x)$ azalan olduğundan $\bar{g}_A^R(y) = \sup\{x | x \in A^y\}$ dir. Benzer şekilde, $f_A^L(x)$ artan olduğundan $\underline{g}_A^L(y) = \inf\{x | x \in A^y\}$ dir.

Her $0 < \alpha \leq 1$ için, $A^\alpha = [\underline{g}_A^L(\alpha), \bar{g}_A^R(\alpha)]$ bir kapalı aralıktır. Buradan,

$$\bar{g}_A^R(\alpha) - \underline{g}_A^L(\alpha) = |A^\alpha|$$

elde edilir. Buradan da,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_A(x)dx = \int_0^w [\bar{g}_A^R(\alpha) - \underline{g}_A^L(\alpha)] d\alpha = \int_0^w |A^\alpha| d\alpha$$

elde edilir. □

f_A^L ve f_A^R fonksiyonları terslenebilir olmak zorunda değildir. Örneğin;

$$A = (1, 0.5) + (2, 0.5) + (1, 3) + (4, 0.5)$$

fuzzy sayısı için $f_A^L(x) = 0.5, \quad x = 1,\ 2$ terslenebilir değildir. Bu nedenle g_A^L ve g_A^R yerine $\underline{g}_A^L$ ve $\bar{g}_A^R$ yukarıda tanımlanmıştır.

$\bar{x}_A$ ve $\bar{y}_A$, (i) ve (ii) özelliklerini sağlar. Bu nedenle doğru ağırlık merkezi formülleridir. Daha önceki formüllerde $\bar{y}_A$ üyelik fonksiyonunun ters fonksiyonu ile belirtilmişti. Bu durum üyelik fonksiyonunun terslenebilir olmasındandır.

Tanım 3.9.2 ([18]). *A ve B fuzzy sayıları, eğer üyelik fonksiyonları aşağıdaki bağıntıyı sağlarsa, aynı şekle sahiptir denir.*

$$\textit{Her} \quad y = ax + b \quad \textit{için} \quad f_B(y) = f_A(x)$$

Burada $a \neq 0$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ sabittir.

Yardımcı Teorem 3.9.3 ([18]). *Eğer A ve B fuzzy sayıları $f_B(y) = f_A(x)$, $y = ax + b$ şartını sağlarsa, o halde, her $0 < \alpha \leq 1$ için*

$$B^\alpha = aA^\alpha + b$$

dır.

Teorem 3.9.4 ([18]). *Eğer A ve B fuzzy sayıları $f_B(y) = f_A(x)$, $y = ax + b$ şartını sağlarsa,*

$$\bar{x}_B = a\bar{x}_A + b, \quad \bar{y}_B = \bar{y}_A$$

dır.

Teorem 3.9.5 ([18]). *Eğer A ve B fuzzy sayıları, her $x \in \mathbb{R}$ için $f_B(x) = wf_A(x)$ bağıntısını sağlıyorsa, o halde $0 < w < 1$ iken $\bar{x}_B = \bar{x}_A$ ve $\bar{y}_B = w\bar{y}_A$ olur.*

$A = (a_1, a_2, a_3, a_4; w)$ genelleştirilmiş yamuk fuzzy sayısı için $\bar{x}_A$, Wang ve ark. [17] ile aynı olduğundan

$$\bar{x}_A = \frac{1}{3}\left[a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - \frac{a_4a_3 - a_1a_2}{(a_4 + a_3) - (a_1 + a_2)}\right]$$

yazılabilir.

$\bar{y}_A$ da aşağıdaki işlemler sonucu elde edilmiştir.

$$A^\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha)}] \Rightarrow |A^\alpha| = |a_3^{(\alpha)} - a_1^{(\alpha)}|$$

$$w\frac{a_1^{(\alpha)} - a_1}{a_2 - a_1} = \alpha \Rightarrow a_1^{(\alpha)} = \frac{\alpha}{w}(a_2 - a_1) + a_1$$

$$w\frac{a_4 - a_3^{(\alpha)}}{a_4 - a_3} = \alpha \Rightarrow a_3^{(\alpha)} = a_4 - \frac{\alpha}{w}(a_4 - a_3)$$

$$|A^\alpha| = |a_4 - \frac{\alpha}{w}(a_4 - a_3) - a_1 - \frac{\alpha}{w}(a_2 - a_1)| = (a_4 - a_1) - \frac{\alpha}{w}(a_4 - a_3 + a_2 - a_1)$$

$$\int_0^w |A^\alpha| d\alpha = \int_0^w [(a_4 - a_1) - \frac{\alpha}{w}(a_4 - a_3 + a_2 - a_1)] d\alpha$$

$$= \frac{w}{2}[(a_4 + a_3) - (a_2 + a_1)]$$

$$\int_0^w \alpha |A^\alpha| d\alpha = \int_0^w [(a_4 - a_1)\alpha - \frac{\alpha^2}{w}(a_4 - a_3 + a_2 - a_1)] d\alpha$$

$$= \frac{w^2}{6}[(a_4 + a_3) - (a_2 + a_1) + (a_3 - a_2)].$$

Bu nedenle

$$\bar{y}_A = \frac{\int_0^w \alpha |A^\alpha| d\alpha}{\int_0^w |A^\alpha| d\alpha} = \frac{w}{3}\left[1 + \frac{a_3 - a_2}{(a_4 + a_3) - (a_1 + a_2)}\right]$$

elde edilir.

Daha önce bahsedilen formüllerde dikey eksendeki noktayı belirlemek için ters fonksiyonlar kullanılmışıt. Fakat bu kısıtlayıcı bir koşul olmaktadır. Burada sunulan formüller sınırsız olduğundan tüm fuzzy sayılar için uygun olmaktadır [18].

3.10 Chen ve Chen'in Yöntemi (2007)

Chen ve Chen'in önerdiği yöntemde genelleştirilmiş yamuk fuzzy sayının ağırlık merkezi ve standard sapması kullanılmıştır [10].

$A = (a_1, a_2, a_3, a_4; w_A)$ genelleştirilmiş yamuk fuzzy sayı olsun. A fuzzy sayısının ağırlık merkezi $(\bar{x}_A, \bar{y}_A)$ aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\bar{y}_A = \begin{cases} \dfrac{w_A \times \left(\dfrac{a_3 - a_2}{a_4 - a_1} + 2\right)}{6} & , \quad a_1 \neq a_4 \quad \text{ve} \quad 0 < w_A \leq 1 \\ \dfrac{w_A}{2} & , \quad a_1 = a_4 \quad \text{ve} \quad 0 < w_A \leq 1 \end{cases} \tag{3.10.48}$$

$$\bar{x}_A = \frac{\bar{y}_A(a_3 + a_2) + (a_4 + a_1)(w_A - \bar{y}_A)}{2w_A}$$

Bu yöntemde sadece ağırlık merkezi değil standard sapma da düşünülmektedir. n tane genelleştirilmiş yamuk fuzzy sayısı $A_1, A_2, \ldots, A_n$ verilsin, öyle ki $A_j = (a_{1j}, a_{2j}, a_{3j}, a_{4j}; w_{A_j})$, $(1 \leq j \leq n)$, $0 < w_{A_j} \leq 1$, $0 \leq a_{1j} \leq a_{2j} \leq a_{3j} \leq a_{4j} \leq k$ ve k herhangi bir reel sayıdır.

Chen ve Chen'in [10] önerdiği yöntem aşağıdaki algoritma ile verilebilir.

1. Adım: Her A_j genelleştirilmiş yamuk fuzzy sayısı için, eğer A_j genelleştirilmiş fuzzy sayısı standardize edilmemiş bir genelleştirilmiş fuzzy sayı ise $A_j = (a_{1j}, a_{2j}, a_{3j}, a_{4j}; w_{A_j})$ aşağıdaki şekilde A_j^* standardize edilmiş genelleştirilmiş fuzzy sayıya dönüştürülür.

$$\begin{aligned} A_j^* &= \left(\frac{a_{1j}}{k}, \frac{a_{2j}}{k}, \frac{a_{3j}}{k}, \frac{a_{4j}}{k}; w_{A_j}\right) \\ &= (a_{1j}^*, a_{2j}^*, a_{3j}^*, a_{4j}^*; w_{A_j^*}) \end{aligned}$$

Burada $w_{A_j^*} = w_{A_j}$, $0 < w_{A_j^*} \leq 1$, $0 \leq a_{1j}^* \leq a_{2j}^* \leq a_{3j}^* \leq a_{4j}^* \leq 1$ veya $-1 \leq a_{1j}^* \leq a_{2j}^* \leq a_{3j}^* \leq a_{4j}^* \leq 1$ ve $1 \leq j \leq n$ dir.

2. Adım: Yukarıdaki $\bar{x}_A$ ve $\bar{y}_A$ formülleri kullanarak standardize edilmiş genelleştirilmiş yamuk fuzzy sayısı A_j^*, $(1 \leq j \leq n)$ için $(\bar{x}_{A_j^*}, \bar{y}_{A_j^*})$ ağırlık merkezi hesaplanır.

3. Adım: Her A_j^* standardize edilmiş genelleştirilmiş yamuk fuzzy sayısının standard sapması $s_{A_j^*}$ aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$s_{A_j^*} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{4}(a_{ij}^* - \bar{a}_j)^2}{3}}$$

Burada $\bar{a}_j$, $a_{1j}^*, a_{2j}^*, a_{3j}^*, a_{4j}^*$ sayılarının aritmetik ortalaması yani,

$$\bar{a}_j = \frac{a_{1j}^* + a_{2j}^* + a_{3j}^* + a_{4j}^*}{4}$$

ve $1 \leq j \leq n$ dir. Standard sapma $s_{A_j^*}$, A_j^*, $(1 \leq j \leq n)$ standardize edilmiş genelleştirilmiş yamuk fuzzy sayısının dağılımının derecesini göstermektedir.

4. Adım: Standard sapma $s_{A_j^*}$ ve ağırlık merkezi $(\bar{x}_{A_j^*}, \bar{y}_{A_j^*})$'nin $\bar{y}_{A_j^*}$ değeri kullanılarak $\bar{y}_{A_j^*}^s$ değeri aşağıdaki şekilde elde edilir ve yeni $(\bar{x}_{A_j^*}, \bar{y}_{A_j^*}^s)$ noktası elde edilir

$$\bar{y}_{A_j^*}^s = \frac{w_{A_j^*}}{2} - \bar{y}_{A_j^*} \times s_{A_j^*}.$$

Burada $0 < \bar{y}_{A_j^*}^s \leq 0.5$ ve $1 \leq j \leq n$ dir.

5. Adım: A_j^* standardize edilmiş genelleştirilmiş yamuk fuzzy sayısının sıralama değeri Skor(A_j^*)'yi hesaplamak için, $(\bar{x}_{A_j^*}, \bar{y}_{A_j^*}^s)$ kullanılır ve Skor(A_j^*)

aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\begin{aligned} \text{Skor}(A_j^*) &= \sqrt{(\bar{x}_{A_j^*} - \min_{j=1,2,\ldots,n}[\bar{x}_{A_j^*}])^2 + (\bar{y}^s_{A_j^*} - 0)^2} \\ &= \sqrt{(\bar{x}_{A_j^*} - \min_{j=1,2,\ldots,n}[\bar{x}_{A_j^*}])^2 + (\bar{y}^s_{A_j^*})^2} \end{aligned} \tag{3.10.49}$$

Burada $\min\limits_{j=1,2,\ldots,n}[\bar{x}_{A_j^*}]$; $\bar{x}_{A_1^*}, \bar{x}_{A_2^*}, \ldots, \bar{x}_{A_n^*}$ değerlerinin minimum değerini ifade eder.

(3.10.49) eşitliğinde Skor(A_j^*); $(\bar{x}_{A_j^*}, \bar{y}^s_{A_j^*})$ ve $(\min\limits_{j=1,2,\ldots,n}[\bar{x}_{A_j^*}], 0)$ noktası arasındaki Öklid uzaklığı olarak düşünülmektedir.

Skor(A_j^*)'nin $(j = 1, 2, \ldots, n)$ değeri ne kadar büyükse sıralamada A_j^* fuzzy sayısı daha büyük olmaktadır. Aşağıda verilen örnek ile yöntemin nasıl uygulandığı incelenmiştir.

Örnek 3.10.1 ([10]). $A_1 = (0.1, 0.3, 0.3, 0.8; 1)$, $A_2 = (0.4, 0.5, 0.5, 0.6; 1)$ *ve* $A_3 = (1.0, 1.0, 1.0, 1.0; 1)$ *fuzzy sayıları verilsin. Verilen fuzzy sayılar standardize edilmiş genelleştirilmiş fuzzy sayılardır. Bu fuzzy sayıların ağırlık merkezleri*

$$\begin{aligned} (\bar{x}_{A_1}, \bar{y}_{A_1}) &= (0.4, 0.3333), \\ (\bar{x}_{A_2}, \bar{y}_{A_2}) &= (0.5, 0.3333), \\ (\bar{x}_{A_3}, \bar{y}_{A_3}) &= (1.0, 0.5) \end{aligned}$$

dir. Fuzzy sayıların standard sapmaları sırasıyla $s_{A_1} = 0.2986$, $s_{A_2} = 0.0816$ *ve* $s_{A_3} = 0$ *olarak bulunur. Daha sonra yeni noktalar*

$$\begin{aligned} (\bar{x}_{A_1}, \bar{y}^s_{A_1}) &= (0.4, 0.4005), \\ (\bar{x}_{A_2}, \bar{y}^s_{A_2}) &= (0.5, 0.4728), \\ (\bar{x}_{A_3}, \bar{y}^s_{A_3}) &= (1.0, 0.5) \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Denklem (3.10.49) kullanılarak sıralama değerleri

$$\begin{aligned} Skor(A_1) &= 0.4005, \\ Skor(A_2) &= 0.4832, \\ Skor(A_3) &= 0.781 \end{aligned}$$

bulunur. $Skor(A_1) < Skor(A_2) < Skor(A_3)$ *olduğundan sıralama* $A_1 < A_2 < A_3$ *olur.*

3.11 Wang ve Lee'nin Yöntemi (2008)

Wang ve Lee, Chu ve Tsao'nun [6] yöntemindeki eksikliklere ve hatalara karşı yeni bir yöntem sunmuşlardır [11]. Chu ve Tsao'nun yöntemindeki yanlışlık aşağıdaki örnekte verilmiştir.

Örnek 3.11.1 ([11]). $A_1 = (1, 2, 3; 1)$ *ve* $A_2 = (9, 10, 11; 0.1)$ *genelleştirilmiş üçgensel fuzzy sayıları verilsin. Chu ve Tsao'nun [6] yöntemine göre* A_1 *fuzzy sayısının ağırlık merkezi*

$$\bar{x}_{A_1} = 2 \quad ve \quad \bar{y}_{A_1} = 0.5$$

olarak hesaplanır. Bu nedenle A_1 *fuzzy sayısının ağırlık merkezi* $(\bar{x}_{A_1}, \bar{y}_{A_1})$ *ve orjin arasındaki alan*

$$S(A_1) = 2 \times 0.5 = 1$$

olur.

Benzer şekilde A_2 *fuzzy sayısının ağırlık merkezi Chu ve Tsao'nun [6] yöntemiyle hesaplanırsa*

$$\bar{x}_{A_2} = 10 \quad ve \quad \bar{y}_{A_2} = 0.05$$

bulunur. Bu nedenle A_2 *fuzzy sayısının ağırlık merkezi* $(\bar{x}_{A_2}, \bar{y}_{A_2})$ *ve orjin arasındaki alan*

$$S(A_2) = 10 \times 0.05 = 0.5$$

olur. Chu ve Tsao [6]'nin yöntemindeki hesaplamalara göre $S(A_1) > S(A_2)$ *olduğundan* $A_1 > A_2$ *dir. Ancak, sezgisel olarak* A_1*,* A_2*'den küçük olmalıdır. Bu sonuç Chu ve Tsao [6]'nin yönteminin yanlış sonuçlara yol açtığını göstermektedir.*

Bir A fuzzy sayısının ağırlık merkezi $(\bar{x}_A, \bar{y}_A)$ noktasında $\bar{x}_A$, A fuzzy sayısının temsilci konumunu ve $\bar{y}_A$ ortalama yüksekliğini vermektedir.

Fuzzy sayıları sıralamak için, temsilci konumunun önem derecesi ortalama yüksekliğin önem derecesinden daha yüksektir. Buna bağlı olarak Chu ve Tsao'nun [6] yönteminin gözden geçirilmiş hali aşağıdaki şekilde verilmiştir [11].

A_i ve A_j fuzzy sayıları için

(i) $\bar{x}_{A_i} > \bar{x}_{A_j} \Rightarrow A_i > A_j$,

(ii) $\bar{x}_{A_i} < \bar{x}_{A_j} \Rightarrow A_i < A_j$,

$$\text{(iii)}\ \bar{x}_{A_i} = \bar{x}_{A_j} \Rightarrow \begin{cases} \bar{y}_{A_i} > \bar{y}_{A_j} & \Rightarrow \quad A_i > A_j \\ \bar{y}_{A_i} < \bar{y}_{A_j} & \Rightarrow \quad A_i < A_j \\ \bar{y}_{A_i} = \bar{y}_{A_j} & \Rightarrow \quad A_i = A_j \end{cases}$$

dir.

Kısaca, eğer A_i ve A_j'nin $\bar{x}$ değerleri farklıysa $\bar{x}$ değerlerine bağlı olarak sıralama yapılmaktadır. Eşit olmaları durumunda $\bar{y}$ değerleri karşılaştırılarak sıralama yapılmaktadır.

Burada $\bar{x}_A$ ve $\bar{y}_A$ koordinatlarının hesaplanmasında Chu ve Tsao [6]'nin ağırlık merkezi formülleri kullanılır. Yani;

$$\bar{x}_A = \frac{\int_{a_1}^{a_2} x f_A^L(x)dx + \int_{a_2}^{a_3} x dx + \int_{a_3}^{a_4} x f_A^R(x)dx}{\int_{a_1}^{a_2} f_A^L(x)dx + \int_{a_2}^{a_3} dx + \int_{a_3}^{a_4} f_A^R(x)dx}$$

$$\bar{y}_A = \frac{\int_0^{w_A} y g_A^L(y)dy + \int_0^{w_A} y g_A^R(y)dy}{\int_0^{w_A} g_A^L(y)dy + \int_0^{w_A} g_A^R(y)dy}$$

$\bar{x}_A = \bar{x}_B$'ye bağlı olarak $\bar{y}_A \geq \bar{y}_B$ ise o halde $A \geq B$ dir. A ve B arasındaki " $\geq$ ", aşağıda gösterildiği gibi, fuzzy sayılarda kısmi sıralama bağıntısını sağlar.

Tanım 3.11.2 ([11]). " $\geq$ " *fuzzy sayılarda bir ikili bağıntı, A ve B iki fuzzy sayı olsun. $A \geq B$ olması için gerek ve yeter koşul $\bar{x}_A = \bar{x}_B$ iken $\bar{y}_A \geq \bar{y}_B$ olmasıdır. A büyük eşittir B dir, denir.*

Yardımcı Teorem 3.11.3 ([11]). " $\geq$ " *fuzzy sayılarda kısmi sıralama bağıntısıdır.*

Kanıt. A ve B farklı iki fuzzy sayı ve $\bar{x}_A = \bar{x}_B$ olsun.

(i) $A \geq A$ dır. $\Longleftrightarrow \bar{y}_A \geq \bar{y}_A$ olduğundan " $\geq$ " yansıyandır.

(ii) $A \geq B$ $(\bar{y}_A \geq \bar{y}_B)$ ve $B \geq A$ $(\bar{y}_B \geq \bar{y}_A)$ ise o halde A ve B eşittir $(\bar{y}_A = \bar{y}_B)$ olduğundan " $\geq$ " terssimetriktir.

(iii) C diğer bir fuzzy sayı ve $\bar{x}_A = \bar{x}_B = \bar{x}_C$ olsun. Eğer $A \geq B$ ve $B \geq C$ ise o halde $A \geq C$ dir. $\bar{y}_A \geq \bar{y}_B$ ve $\bar{y}_B \geq \bar{y}_C$ olduğundan $\bar{y}_A \geq \bar{y}_C$ dir yani, " $\geq$ " geçişli özelliğini sağlar.

Açıktır ki, " $\geq$ " yansıma, terssimetri ve geçişli özelliklerini sağlar. Bu nedenle " $\geq$ " fuzzy sayılarda kısmi sıralama bağıntısıdır. □

Örnek 3.11.4 ([11]). *Örnek 3.11.1 de verilen* $A_1 = (1, 2, 3; 1)$ *ve* $A_2 = (9, 10, 11; 0.1)$ *genelleştirilmiş üçgensel fuzzy sayıları için sezgisel olarak* A_1*,* A_2 *den küçük olmalıdır. Wang ve Lee'nin [11] bu yöntemine göre*

$$\bar{x}_{A_1} = 2 \quad ve \quad \bar{x}_{A_2} = 10$$

dur. Dolayısıyla sıralama $A_1 < A_2$ *olur.*

Bu örnekte Wang ve Lee, Chu ve Tsao'nun [6] yönteminin neden olduğu yanlış sonuçları önlediğini iddia etmektedir.

Örnek 3.11.5 ([11]). $A_1 = (0.2, 0.3, 0.5), A_2 = (0.17, 0.32, 0.58)$ *ve* $A_3 = (0.25, 0.4, 0.7)$ *üçgensel fuzzy sayıları verilsin. Chu ve Tsao'nun [6] yöntemiyle*

$$\begin{aligned} S(A_1) &= \bar{x}_{A_1} \cdot \bar{y}_{A_1} &= 0.333 \times 0.4872 = 0.162, \\ S(A_2) &= \bar{x}_{A_2} \cdot \bar{y}_{A_2} &= 0.357 \times 0.4868 = 0.174, \\ S(A_3) &= \bar{x}_{A_3} \cdot \bar{y}_{A_3} &= 0.450 \times 0.4857 = 0.219 \end{aligned}$$

olup sıralama $A_1 < A_2 < A_3$ *olmaktadır. Wang ve Lee'nin önerilen yöntemi kullanıldığında*

$$\begin{aligned} \bar{x}_{A_1} &= 0.333, \\ \bar{x}_{A_2} &= 0.357, \\ \bar{x}_{A_3} &= 0.450 \end{aligned}$$

olup sıralama yine $A_1 < A_2 < A_3$ *olmaktadır.*

Bu örnek ise önerilen yöntemin bazı durumlarda Chu ve Tsao'nun [6] yöntemiyle aynı sonuçları daha basit şekilde bulduğunu göstermektedir.

3.12 Xu ve Wei'nin Yöntemi (2010)

Xu ve Wei, çeşitli fuzzy sayıları sıralamak için etkili bir yeni yöntem öne sürmüştür [12]. Bu yöntemde ağırlık merkezinin hesaplanmasında Wang ve ark.'nın [17] ağırlık merkezi formülleri kullanılmaktadır yani,

$$\bar{x}_A = \frac{\displaystyle\int_{a_1}^{a_2} x f_A^L(x)dx + \int_{a_2}^{a_3} (w_A x)dx + \int_{a_3}^{a_4} x f_A^R(x)dx}{\displaystyle\int_{a_1}^{a_2} f_A^L(x)dx + \int_{a_2}^{a_3} w_A dx + \int_{a_3}^{a_4} f_A^R(x)dx},$$

$$\bar{y}_A = \frac{\displaystyle\int_0^{w_A} y(g_A^R(y) - g_A^L(y))dy}{\displaystyle\int_0^{w_A} (g_A^R(y) - g_A^L(y))dy}$$

$A = (a_1, a_2, a_3, a_4; w_A)$ genelleştirilmiş yamuk fuzzy sayısı için

$$\bar{x}_A = \frac{1}{3}\left[a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - \frac{a_4 a_3 - a_1 a_2}{(a_4 + a_3) - (a_1 + a_2)}\right],$$

$$\bar{y}_A = w_A \frac{1}{3}\left[1 + \frac{a_3 - a_2}{(a_4 + a_3) - (a_1 + a_2)}\right].$$

Fuzzy sayıların α kesmeleri bir aralık olduğundan Xu ve Wei'nin yönteminde ilk olarak aralıkların sıralanması için bir algoritma verilmiştir [12].

Genellikle, aralıklar $A = (a_1, a_2) = [a_1, a_2]$ şeklinde gösterilir. a_1 ve a_2 sayıları sırasıyla aralığın sol bitiş noktası ve sağ bitiş noktasıdır. $a_1 \leq a_2$ olmak üzere, aralığın ağırlık merkezi

$$\bar{x}_A = \frac{(a_1 + a_2)}{2}$$

dir. Özel olarak, eğer $a_1 = a_2$ ise $A = (a_1, a_2)$, a_1 reel sayısını gösterir.
$A = (a_1, a_2)$ ve $B = (b_1, b_2)$ aralıkları için, $A = (a_1, a_2) = B = (b_1, b_2)$ olması için gerek ve yeter koşul $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ olmasıdır.

Tanım 3.12.1 ([12]). *$A(a_1, a_2)$ aralığı için $d(A) = \bar{x}_A \cdot |a_1|$ aralığın ölçümü olarak adlandırılır. Özellikle, $\bar{x}_A = 0$ ise aralığın ölçümü $d'(A) = a_1 \cdot a_2$ dir.*

Tanım 3.12.2 ([12]). *$A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ iki aralık olsun. Eğer, $d(A) \leq d(B)$ $(d'(A) \leq d'(B))$ ise, $A(a_1, a_2) \leq B(b_1, b_2)$ dir.*

Aralıkların ölçümüne göre, aralıkları sıralama algoritması aşağıdaki gibi verilmiştir [12].

1. Adım: Her $A_i(a_{i1}, a_{i2})$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ aralığı için eğer, $a_{i1} = 0$ ise a_{i1} yerine, $\varepsilon = \min\{a_{i1} | a_{i1} > 0\}$, $\varepsilon \ll a_{i2}$ şartını sağlayan ε reel sayısı alınır. Eğer $a_{i2} = 0$ ise, a_{i2} yerine, $\delta = \min\{|a_{i2}| | a_{i2} \neq 0\}$, $a_{i1} \ll \delta$ şartını sağlayan δ sayısı alınır.

2. Adım: Değiştirilen aralıklar hala $A(a_{i1}, a_{i2})$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ şeklinde gösterilir ve ağırlık merkezleri $\bar{x}_{A_i}$ hesaplanır.

3. Adım: İlk sıralama yani, her $A(a_{i1}, a_{i2}) = [a_{i1}, a_{i2}]$ aralığı için $d(A_i)$ ölçümü hesaplanır ve $d(A_i)$'ye göre sınıflandrılır.

4. Adım: 2. adıma göre eğer iki veya daha fazla A_j aralığının ağırlık merkezi $\bar{x}_{A_j} = 0$, $(j = 1, 2, \ldots, n)$ ise $d'(A_j)$ ölçümü hesaplanır. Daha sonra $d'(A_j)$'ye göre aralıkların sıralaması yapılır.

5. Adım: 3. adım ve 4. adım birleştirilerek son sıralama sonucu elde edilir.

Böylece fuzzy sayıların sıralama indeksi, aralıkların ölçümüne ve fuzzy sayıların ağırlık merkezlerine göre verilmiş olur.

Örnek 3.12.3 ([12]). $A_1 = [-1, -0.5]$, $A_2 = [-1, 0.5]$, $A_3 = [-0.5, 0]$, $A_4 = [-0.6, 0]$, $A_5 = [-0.5, 0.5]$, $A_6 = [-0.4, 0.4]$, $A_7 = [0, 0.5]$, $A_8 = [0, 0.6]$, $A_9 = [0.55, 0.75]$ *ve* $A_{10} = [0.3, 1]$ *aralıkları için sıralama algoritması aşağıdaki şekilde uygulanır.*

1. *Adım:* $\varepsilon = 0.3$ *ve* $\delta = 0.4$ *alınır.*

2. *Adım: Değiştirilen aralık sayıların ağırlık merkezleri hesaplanır:*

$\bar{x}_{A_1} = -0.75$, $\bar{x}_{A_2} = -0.25$, $\bar{x}_{A_3} = -0.05$, $\bar{x}_{A_4} = -0.1$, $\bar{x}_{A_5} = 0$, $\bar{x}_{A_6} = 0$, $\bar{x}_{A_7} = 0.4$, $\bar{x}_{A_8} = 0.45$, $\bar{x}_{A_9} = 0.65$, $\bar{x}_{A_{10}} = 0.65$.

3. *Adım: İlk sıralama:* $d(A_1) = -0.75$, $d(A_2) = -0.25$, $d(A_3) = -0.025$, $d(A_4) = -0.06$, $d(A_5) = 0$, $d(A_6) = 0$, $d(A_7) = 0.12$, $d(A_8) = 0.14$, $d(A_9) = 0.3575$, $d(A_{10}) = 0.195$ *olarak hesaplanır ve ilk sıralama* $A_1 < A_2 < A_4 < A_3 < A_5 = A_6 < A_7 < A_8 < A_{10} < A_9$ *olur.*

4. *Adım:* $\bar{x}_{A_5} = 0$ *ve* $\bar{x}_{A_6} = 0$ *olduğundan*

$$d'(A_5) = -0.5 \times 0.5 = -0.25$$

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

ve

$$d'(A_6) = -0.4 \times 0.4 = -0.16$$

olarak hesaplanır. Buradan $A_5 < A_6$ *olur.*

5. *Adım: Son sıralama:*

$$A_1 < A_2 < A_4 < A_3 < A_5 < A_6 < A_7 < A_8 < A_{10} < A_9$$

olur.

Bu örnek, aralıkları sıralama algoritmasının sadece bitiş noktası sıfırdan büyük olan aralık sayıları değil, bitiş noktası sıfırdan küçük olan aralıkları da sıralayabildiğini göstermektedir.

3.12.4 Fuzzy sayıların ağırlık merkezlerine göre sıralanması

Tanım 3.12.5 ([12]). $A = (a_1, a_2, a_3, a_4; w_A)$ *genelleştirilmiş fuzzy sayı,* $\forall \lambda \in [0, w_A]$ *için* $A_\lambda = [g_A^L(\lambda), g_A^R(\lambda)]$ *olsun. Önce* $(\bar{x}_A, \bar{y}_A)$ *ağırlık merkezi hesaplanır. Fuzzy sayının yeni ölçümü*

$$H(A) = sign(\bar{x}_A)(|\bar{x}_A| + w_A|\bar{y}_A| + w_A|\bar{x}_A\bar{y}_A|) \int_0^{w_A} |g_A^L(\lambda)| d\lambda \qquad (3.12.50)$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$sign(\bar{x}_A) = \begin{cases} 1 & , \quad \bar{x}_A \geq 0 \\ -1 & , \quad \bar{x}_A < 0 \end{cases}$$

alınmıştır.

Tanım 3.12.6. *A ve B genelleştirilmiş fuzzy sayılar olsun. Eğer* $H(A) \leq H(B)$ *ise* $A \preceq B$ *dir, denir.*

$H(\cdot)$ ölçümü ile fuzzy sayılar kısmi sıralanabilir [12].

Örnek 3.12.7 ([12]). $A_1 = (1, 3, 5; 1),\ A_2 = (2, 3, 4; 1),\ A_3 = (-2, -1, 1, 2; 1),$ $A_4 = (-2, 0, 2; 0.2), -A_2 = (-4, -3, -2; 1)$ *fuzzy sayıları için yukarıdaki sıralama yöntemi uygulanırsa aşağıdaki sonuçlar elde edilir.*

$$\begin{array}{llllllll}
A_1 & ; & \bar{x}_{A_1} = 3.0 & , & \bar{y}_{A_1} = 0.33 & , & \bar{x}_{A_1} \cdot \bar{y}_{A_1} = 1.0 & , \quad H(A_1) = 8.667, \\
A_2 & ; & \bar{x}_{A_2} = 3.0 & , & \bar{y}_{A_2} = 0.33 & , & \bar{x}_{A_2} \cdot \bar{y}_{A_2} = 1.0 & , \quad H(A_2) = 10.833, \\
A_3 & ; & \bar{x}_{A_3} = 0 & , & \bar{y}_{A_3} = 0.44 & , & \bar{x}_{A_3} \cdot \bar{y}_{A_3} = 0 & , \quad H(A_3) = 0.667, \\
A_4 & ; & \bar{x}_{A_4} = 0 & , & \bar{y}_{A_4} = 0.07 & , & \bar{x}_{A_4} \cdot \bar{y}_{A_4} = 0 & , \quad H(A_4) = 0.003
\end{array}$$

ve

$$-A_2;\ \bar{x}_{-A_2} = -3.0,\ \bar{y}_{-A_2} = 0.333,\ \bar{x}_{-A_2}\cdot\bar{y}_{-A_2} = -1.0,\ H(-A_2) = -15.17$$

Bu sonuçlara göre sıralama $-A_2 < A_4 < A_3 < A_1 < A_2$ *olmaktadır.*

Aynı fuzzy sayılar için Cheng'in [5] yöntemi uygulandığında

$$\begin{aligned} R(A_1) &= 3.02, \\ R(A_2) &= 3.02, \\ R(A_3) &= 0.44, \\ R(A_4) &= 0.07, \\ R(-A_2) &= 3.02 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu değerlerden $A_4 < A_3 < A_1 = A_2 = -A_2$ *olup* A_1, A_2 *ve* $-A_2$ *arasında bir kıyaslama yapılamamaktadır.*

3.13 Bakar ve ark.'nın Yöntemi (2010)

Bakar ve ark., ağırlık merkezi ile benzerlik ölçüsü kullanarak fuzzy sayıları sıralama yöntemi öne sürmüştür [13].

Bu yöntem, $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, a_{i4}; w_i)$ ve $A_j = (a_{j1}, a_{j2}, a_{j3}, a_{j4}; w_j)$ standardize edilmiş genelleştirilmiş fuzzy sayıları için aşağıdaki şekilde uygulanır.

1. Adım: A_i ve A_j arasındaki uyuşma, iki sayının ortalaması alınarak aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned} \delta_{A_iA_j} &= \left(\frac{a_{i1}+a_{j1}}{2}, \frac{a_{i2}+a_{j2}}{2}, \frac{a_{i3}+a_{j3}}{2}, \frac{a_{i4}+a_{j4}}{2}; \frac{w_i+w_j}{2}\right) \\ &= (a_1, a_2, a_3, a_4; w) \end{aligned}$$

2. Adım: $\delta_{A_iA_j}$ ile A_i arasındaki μ_d uzaklığı

$$\mu_d(\delta_{A_iA_j}, A_i) = \frac{1}{4}\left[\left(1 - \frac{a_1 - a_{i1}}{0.5}\right) + \cdots + \left(1 - \frac{a_4 - a_{i4}}{0.5}\right)\right]$$

hesaplanır.

3. Adım: Standardize edilmiş genelleştirilmiş yamuk fuzzy sayının ve uyuşmalarının $(\bar{x}_A, \bar{y}_A)$ ağırlık merkezleri aşağıdaki formüller kullanılarak hesapla-

nır:

$$\bar{x}_A = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x f_A(x)dx}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_A(x)dx},$$

$$\bar{y}_A = \frac{\displaystyle\int_{0}^{w} \alpha|A^\alpha|d\alpha}{\displaystyle\int_{0}^{w} |A^\alpha|d\alpha}.$$

Burada, $|A^\alpha|$, A fuzzy sayısının α-kesmesinin uzunluğu ve $\bar{x}_A$ ve $\bar{y}_A$, A fuzzy sayısının ağırlık merkezi koordinatlarıdır.

4. Adım : Aşağıdaki şekilde verilen değiştirilmiş benzerlik ölçüsü formülü ile sıralama değeri hesaplanır:

$$S(\mu_d(\delta_{A_iA_j}, A_i), A_i) = \bar{x}_{A_i} \cdot \mu_d \left(1 - |\bar{x}_{A_iA_j} - \bar{x}_{A_i}|\right) \cdot \frac{\min(\bar{y}_{A_iA_j}, \bar{y}_{A_i})}{\max(\bar{y}_{A_iA_j}, \bar{y}_{A_i})} \quad (3.13.51)$$

5. Adım : A_i ve A_j sıralanır: Eğer,

(i) $S(\mu_d(\delta_{A_iA_j}, A_i), A_i) > S(\mu_d(\delta_{A_iA_j}, A_j), A_j)$ ise $A_i > A_j$,

(ii) $S(\mu_d(\delta_{A_iA_j}, A_i), A_i) < S(\mu_d(\delta_{A_iA_j}, A_j), A_j)$ ise $A_i < A_j$,

(iii) $S(\mu_d(\delta_{A_iA_j}, A_i), A_i) = S(\mu_d(\delta_{A_iA_j}, A_j), A_j)$ ise $A_i = A_j$

dir.

Örnek 3.13.1 ([13]). $A_1 = (1, 3, 5; 0.6)$ *ve* $A_2 = (1, 2, 4, 5; 0.8)$ *genelleştirilmiş fuzzy sayılar olsun. Her iki sayı ilk önce standardize edilir. Böylece* $A_1 = (0.2, 0.6, 1.0; 0.6)$ *ve* $A_2 = (0.2, 0.4, 0.8, 1.0; 0.8)$ *olur.*

A_1 *ve* A_2 *arasındaki uyuşma*

$$\delta_{A_1A_2} = (0.2, 0.5, 0.7, 1.0; 0.7)$$

olarak hesaplanır. Daha sonra A_1, A_2 *ve* $\delta_{A_1A_2}$ *için ağırlık merkezleri*

$$\begin{aligned}(\bar{x}_{A_1}, \bar{y}_{A_1}) &= (0.6, 0.2),\\ (\bar{x}_{A_2}, \bar{y}_{A_2}) &= (0.6, 0.4),\\ (\bar{x}_{\delta_{A_1A_2}}, \bar{y}_{\delta_{A_1A_2}}) &= (0.6, 0.2917)\end{aligned}$$

bulunur. Son olarak, A_1 ve A_2 için sıralama değerleri aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$\begin{aligned}
S(\mu_d(\delta_{A_1A_2}, A_1), A_1) &= (0.6)(1)(1 - |0.6 - 0.6|)\left(\frac{0.2}{0.2917}\right) \\
&= 0.4114, \\
S(\mu_d(\delta_{A_1A_2}, A_2), A_2) &= (0.6)(1)(1 - |0.6 - 0.6|)\left(\frac{0.2917}{0.4}\right) \\
&= 0.4375
\end{aligned}$$

dir. $S(\mu_d(\delta_{A_1A_2}, A_1), A_1) < S(\mu_d(\delta_{A_1A_2}, A_2), A_2)$ olduğundan sıralama $A_1 < A_2$ olur.

3.14 Wang ve ark.'nın Yöntemi (2011)

Wang ve ark., ağırlık merkezi indeksine bağlı mevcut sıralama yaklaşımlarının eksikliklerinin üstesinden gelmek için yeni bir yöntem öne sürmüştür [14].

İlk olarak baskınlık (üstünlük) ve öncelikli ağırlık tanımlanmış, daha sonra baskınlık, öncelikli ağırlık ve karar vericilerin tercihlerine bağlı bir sıralama yaklaşımı sunulmuştur.

Üyelik fonksiyonu

$$f_A(x) = \begin{cases} f_A^L(x), & a_1 \leq x \leq a_2 \\ w_A, & a_2 \leq x \leq a_3 \\ f_A^R(x), & a_3 \leq x \leq a_4 \\ 0, & \text{d.d.} \end{cases} \tag{3.14.52}$$

ile verilen $A = (a_1, a_2, a_3, a_4; w_A)$ genelleştirilmiş fuzzy sayısı ele alınsın.

Tanım 3.14.1. *A fuzzy sayısının yüksekliği aşağıdaki şekilde tanımlanır.*

$$h(A) = \sup\{f_A(x) | x \in S(A)\} \tag{3.14.53}$$

Burada $S(A)$, A'nın destek (support) kümesini göstermektedir.

Tanım 3.14.2 ([14]). *A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ fuzzy sayısının sol sapma derecesi*

$$S_i^L = \int_0^w g_{A_i}^L(y)dy \tag{3.14.54}$$

sayısına denir. Burada $g_{A_i}^L(y)$, $f_{A_i}^L(x)$'in ters fonksiyonu, $w = \min\{h(A_i) | i = 1, 2, \ldots, n\}$ dir.

Tanım 3.14.3 ([14]). *A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ fuzzy sayısının öncelikli ağırlığı*

$$\alpha_i = \frac{S_i^L}{\sum\limits_{i=1}^{n} S_i^L} \tag{3.14.55}$$

sayısına denir. Burada S_i^L, A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ fuzzy sayısının sol sapma derecesidir.

Tanım 3.14.4 ([14]). *A_i fuzzy sayısının ağırlık merkezi $(\bar{x}_{A_i}, \bar{y}_{A_i})$*

$$\begin{aligned} \bar{x}_{A_i} &= \frac{\int_{a_{i1}}^{a_{i2}} x f_{A_i}^L(x)dx + \int_{a_{i2}}^{a_{i3}} (w_A x)dx + \int_{a_{i3}}^{a_{i4}} x f_{A_i}^R(x)dx}{\int_{a_{i1}}^{a_{i2}} f_{A_i}^L(x)dx + \int_{a_{i2}}^{a_{i3}} w_A dx + \int_{a_{i3}}^{a_{i4}} f_{A_i}^R(x)dx}, \\ \bar{y}_{A_i} &= \frac{\int_0^{w_A} y(g_{A_i}^R(y) - g_{A_i}^L(y))dy}{\int_0^{w_A} (g_{A_i}^R(y) - g_{A_i}^L(y))dy} \end{aligned} \tag{3.14.56}$$

dir.

Tanım 3.14.5 ([14]). *A_i'nin A_j'ye göre baskınlığı (üstünlüğü)*

$$d_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\bar{x}_{A_i}}{\bar{y}_{A_i}} & , \quad i \neq j \\ 1 & , \quad i = j \end{cases} \tag{3.14.57}$$

şeklinde tanımlanır.

Bu tanımdan, A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ fuzzy sayılarının bir grubu için baskınlık matrisi

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \ldots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \ldots & d_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{n1} & d_{n2} & \ldots & d_{nn} \end{bmatrix} \tag{3.14.58}$$

dir. Burada $d_{ij} \times d_{ji} = 1$, $d_{ii} = 1$ $(1 \leq i, j \leq n)$.

Yukarıda verilen tanımlara bağlı olarak A_i fuzzy sayısı için yeni sıralama indeksi

$$R_i = \lambda \sum_{j=1}^{n} \alpha_i d_{ij} + (1 - \lambda)\bar{y}_{A_i} \tag{3.14.59}$$

olarak verilmiştir. Burada $\lambda \in [0.5, 1]$ karar vericiler tarafından belirlenen tercih katsayısıdır. Genellikle $\lambda = 0.5$ alınır.

Herhangi A_i ve A_j fuzzy sayısı için ağırlık merkezi indeksine bağlı sıralama algoritması aşağıdaki şekilde verilmiştir.

1. Adım : A_i fuzzy sayısının $h(A_i)$ yüksekliği hesaplanır.

2. Adım : A_i fuzzy sayısının S_i^L sol sapma derecesi bulunur.

3. Adım : A_i fuzzy sayısının α_i öncelikli ağırlığı belirlenir.

4. Adım : $\bar{x}_{A_i}$ ve $\bar{y}_{A_i}$ hesaplanır.

5. Adım : A_i'nin A_j'ye göre baskınlığı belirlenir ve D matrisi oluşturulur.

6. Adım : A_i $(i = 1, 2, \dots, n)$'nin sıralaması $R_1, R_2, \dots, R_n$ indeks değerine göre belirlenir.

Örnek 3.14.6 ([14])**.** *$A_1 = (1, 2, 3; 1)$ ve $A_2 = (9, 10, 11; 0.1)$ genelleştirilmiş üçgensel fuzzy sayıları için Chu ve Tsao'nun yöntemi [6] uygulandığında sıralama değerleri $S(A_1) = 1$ ve $S(A_2) = 0.5$ olarak hesaplandığından $A_1 > A_2$ olur. Ancak sezgisel olarak bu sonuç tutarlı değildir. [14] de önerilen bu yöntem uygulandığında ise sıralama değerleri $R_1 = 0.2267$ ve $R_2 = 2.717$ elde edilir ve sıralama sonucu Wang ve Lee'nin [11] yönteminde olduğu gibi $A_1 < A_2$ olarak bulunur, bu ise tutarlıdır.*

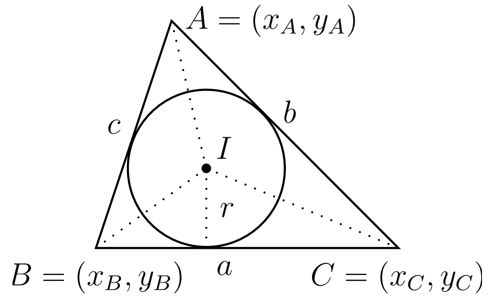
3.15 Akyar ve ark.'nın Yöntemi (2012)

Akyar ve ark.'nın yönteminde, üçgenin içine çizilen iç teğet çemberin merkezine ve yarıçapına bağlı sıralama indeksi oluşturarak üçgensel fuzzy sayıları sıralamışlardır [15]. Önerilen metodun hesabı oldukça kolay olup diğer önerilen metodlarla kıyaslanarak yeni sundukları yöntemin avantajlarını vurgulamışlardır. Bu yöntem kesin sayıları ve aynı ağırlık merkezine sahip fuzzy sayıları da sıralayabilmektedir.

Akyar ve ark.'nın yöntemi, temelde bir üçgenin içine çizilen iç teğet çemberin tekliğini gösteren aşağıdaki teoreme dayanır.

Teorem 3.15.1 ([23])**.** *Üçgenin açıortaylarının kesim noktası olan I noktasına iç teğet çemberin merkezi, üçgenin tüm kenarlarına teğet olan ve üçgenin çevrelediği çembere iç teğet çember denir ve iç teğet çember tektir.*

(x_A, y_A), (x_B, y_B) ve (x_C, y_C) noktaları tarafından belirlenen $\triangle ABC$ üçgeninin kenar uzunlukları sırasıyla a, b ve c ile gösterilsin (Şekil 3.23).



Şekil 3.23: $\triangle ABC$ üçgeninin iç teğet çemberi, iç teğet çemberinin yarıçapı ve iç teğet çemberinin merkezi

Heron formülü bize, üçgenin alanının üç kenarının uzunluğu ile ifade edilebileceğini söyler [24].

Teorem 3.15.2. *$\mathbb{R}^n$ den alınan $\triangle ABC$ üçgeninin alanı $|\triangle ABC|$ Heron formülü ile verilebilir:*

$$|\triangle ABC| = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \qquad (3.15.60)$$

$s = \frac{a+b+c}{2}$ üçgenin yarı çevresini göstermektedir.

Yardımcı Teorem 3.15.3 ([25])**.** *$\mathbb{R}^n$ den alınan $\triangle ABC$ üçeninin alanı $|\triangle ABC|$ iç teğet çemberin yarıçapı r ile üçgenin yarı çevresi s nin çarpımına eşittir.*

Teorem 3.15.2 ve Lemma 3.15.3 kullanılarak

$$|\triangle ABC| = rs \quad \Rightarrow \quad r = \frac{|\triangle ABC|}{s},$$

$$r = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}. \qquad (3.15.61)$$

elde edilir.

Teorem 3.15.4 ([24])**.** *$\mathbb{R}^n$ den alınan $\triangle ABC$ üçgeninin iç teğet çemberinin merkezi I aşağıdaki denklemi sağlar.*

$$I = \frac{a(x_A, y_A) + b(x_B, y_B) + c(x_C, y_C)}{P}. \qquad (3.15.62)$$

Burada $P = a + b + c$, $\triangle ABC$ üçgeninin çevresidir.

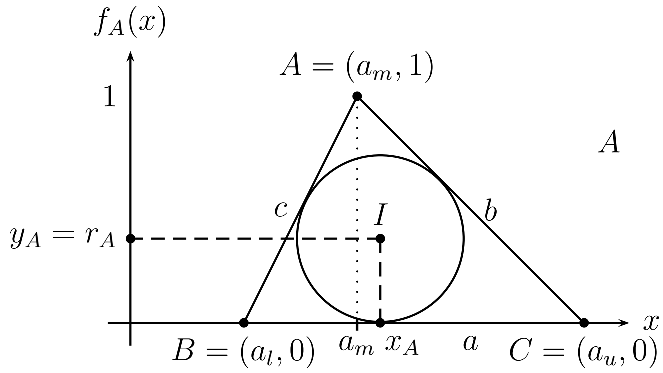
$A = (a_l, a_m, a_u)$ üçgensel fuzzy sayıyı göstersin (Şekil 3.24). Bu durumda

$$(x_A, y_A) = (a_m, 1), \quad (x_B, y_B) = (a_l, 0), \quad (x_C, y_C) = (a_u, 0),$$

olmak üzere, uzaklık formülü ile

$$\begin{gathered} a = a_u - a_l, \quad b = \sqrt{1 + (a_u - a_m)^2}, \quad c = \sqrt{1 + (a_m - a_l)^2}, \\ P = (a_u - a_l) + \sqrt{1 + (a_u - a_m)^2} + \sqrt{1 + (a_m - a_l)^2}. \end{gathered} \tag{3.15.63}$$

elde edilir.



Şekil 3.24: İç teğet çemberi, iç teğet çemberinin merkezi ve iç teğet çemberinin yarıçapı ile A üçgensel fuzzy sayısı

(3.15.63) denklemi (3.15.61) ve (3.15.62) denklemlerinde yerine yazılırsa

$$r_A = \frac{a_u - a_l}{(a_u - a_l) + \sqrt{1 + (a_u - a_m)^2} + \sqrt{1 + (a_m - a_l)^2}}, \tag{3.15.64}$$

$$I_A(x_A, y_A) = \frac{(a_u - a_l)(a_m, 1) + \sqrt{1 + (a_u - a_m)^2}(a_l, 0) + \sqrt{1 + (a_m - a_l)^2}(a_u, 0)}{(a_u - a_l) + \sqrt{1 + (a_u - a_m)^2} + \sqrt{1 + (a_m - a_l)^2}}. \tag{3.15.65}$$

eşitlikleri elde edilir.

Üçgenin tabanı x-ekseni boyunca uzandığından, iç teğet çemberi x-eksenine teğettir. İç teğet çemberin merkezinin ordinatı y_A, iç teğet çemberin yarıçapına yani r_A ya eşittir. $0 < r_A = y_A < 1/2$ dir (Şekil 3.24).

$A = (a_m - \varepsilon_1, a_m, a_m + \varepsilon_2)$ üçgensel fuzzy sayı ve $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2$ yeterince küçük pozitif reel sayılar olsun. (3.15.64) eşitliğinden

$$\lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0^+} r_A \;=\; \lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0^+} \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}{(\varepsilon_2 + \varepsilon_1) + \sqrt{(1 + \varepsilon_2^2)} + \sqrt{(1 + \varepsilon_1^2)}} = 0$$

olur. Benzer olarak (3.15.65) denkleminden

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\to 0^+} x_A &= \lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\to 0^+} \frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)a_m+(a_m-\varepsilon_1)\sqrt{1+\varepsilon_2^2}+(a_m+\varepsilon_2)\sqrt{1+\varepsilon_1^2}}{(\varepsilon_2+\varepsilon_1)+\sqrt{(1+\varepsilon_2^2)}+\sqrt{(1+\varepsilon_1^2)}}\\ &= \frac{a_m}{2}\end{aligned}$$

bulunur. $y_A = r_A$ olduğundan $I_A(x_A, y_A) = \left(\frac{a_m}{2}, 0\right)$ olur. Eğer A üçgensel fuzzy sayısı kesin sayı yani, $a_l = a_m = a_u$ ise $r_A = 0$ ve $I_A = (a_m, 0)$ olur.

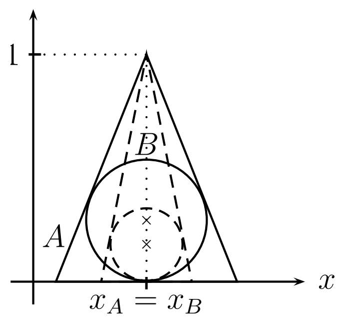
(3.15.64) ve (3.15.65) den üçgensel fuzzy sayının iç teğet çemberinin merkezi ve yarıçapı a_l, a_m ve a_u parametrelerine sürekli olarak bağımlıdır. Yukarıdaki notasyonlar kullanılarak yeni sıralama indeksi önermişlerdir [15]:

$A = (a_l, a_m, a_u)$ üçgensel fuzzy sayısı için

$$\mathrm{Rank}(A) := \left(x_A - \frac{1}{2}y_A, 1 - y_A, a_m\right). \tag{3.15.66}$$

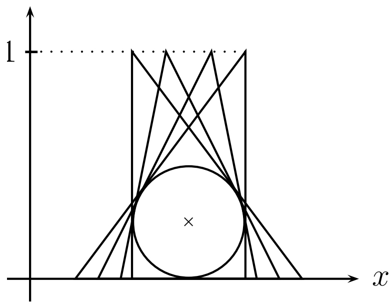
Üçgensel fuzzy sayıları sıralama indeksi üçgenin iç teğet çemberinin merkezine ve tepe noktasına bağlıdır.

(3.15.66) sıralama formülünün yazılma nedeninin ilki, A ve B farklı fuzzy sayılar olsa bile $x_A = x_B$ olabilir (Şekil 3.25). Bunun için rank formülünün ilk koordinatında y_A değeri kullanılmıştır. A ve B farklı fuzzy sayılar olsa bile birinci bileşenleri aynı olabilir. Bunun üstesinden gelmek için ikinci bileşende fuzzy sayıların iç teğet çemberlerinin yarıçapları kullanılmıştır. Yarıçaplar farklı olursa formül kullanışlı olur. Rank formülünün üçüncü bileşeni ile tüm üçgensel fuzzy sayılar ve sıralı üçlü arasında bire-bir eşleme yapılmıştır.



Şekil 3.25: $x_A = x_B$ olan üçgensel fuzzy sayılar

Üçgensel fuzzy sayıları sıralamak için hesaplanan sıralama indekslerine sözlük sıralama (lexicographical order) uygulanmıştır. $A = (a_l, a_m, a_u)$ ve



Şekil 3.26: Aynı iç teğet çemberine sahip üçgensel fuzzy sayılar

$B = (b_l, b_m, b_u)$ fuzzy sayıları için

$$A < B \Leftrightarrow \text{Rank}(A) <_L \text{Rank}(B),$$

burada $<_L$ sözlük sıralamayı göstermektedir.

$$(x_1, x_2, x_3) <_L (y_1, y_2, y_3) \Leftrightarrow (\exists m = 1, 2, 3)(\forall i < m)(x_i = y_i) \wedge (x_m < y_m).$$

dir.

Örnek 3.15.5. *$A = (-0.3, -0.2, 0.1)$ ve $B = (0.2, 0.3, 0.4)$ fuzzy sayıları için, denklem (3.15.64) ve (3.15.65) ile*

$$r_A = 0.1633, \quad r_B = 0.0905,$$

$$I_A = (-0.1195, 0.1633), \quad I_B = (0.3000, 0.0905),$$

hesaplanır. Sıralama indeksi (3.15.66) ile de

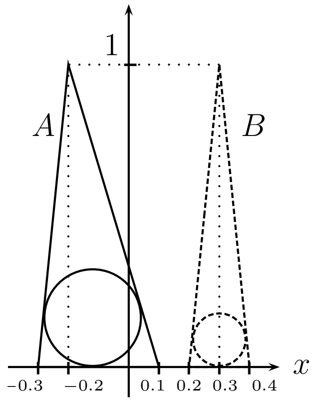
$$\text{Rank}(A) = (-0.2012, 0.8367, -0.2), \quad \text{Rank}(B) = (0.2548, 0.9095, 0.3)$$

bulunur. $(-0.2012, 0.8367, -0.2) <_L (0.2548, 0.9095, 0.3)$ *olduğundan $A < B$ olur (Şekil 3.27).*

$\mathbb{R}^n$ de sözlük sıralama tam sıralama olduğu için [26], bu yöntemde sunulan üçgensel fuzzy sayıları sıralama indeksi tam sıralama olur.

3.16 Akyar ve ark.'nın Yöntemi [16]

Akyar ve ark., [15] da sunulan yöntemi daha da geliştirerek genelleştirilmiş yamuk fuzzy sayıları sıralamak için yeni bir yöntem sunmuşlardır [16].



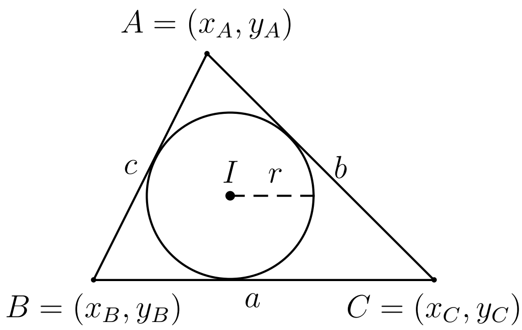
Şekil 3.27: Örnek 3.15.5'teki üçgensel fuzzy sayılar iç teğet çemberleri ile birlikte

Bu yöntemle sıralama indeksi temelde üçgenin içine çizilen iç teğet çemberin yarıçapına ve merkezine bağlıdır.

(x_A, y_A), (x_B, y_B) ve (x_C, y_C) noktaları tarafından belirlenen $\triangle ABC$ üçgeninin kenar uzunlukları sırasıyla a, b ve c ile gösterilsin. Üçgen için temel özellikler ve Heron formülünden, iç teğet çemberin merkezi ve yarıçapı

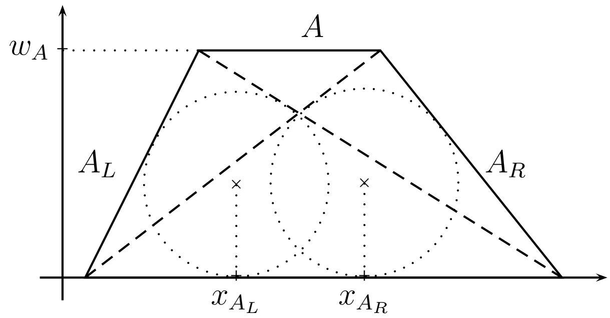
$$
\begin{aligned}
r &= \frac{2|\triangle ABC|}{P} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}, \\
I &= \frac{a(x_A, y_A) + b(x_B, y_B) + c(x_C, y_C)}{P}.
\end{aligned}
$$

Burada $P = a + b + c$: $\triangle ABC$ üçgeninin çevresi, $s = P/2$ üçgenin yarı çevresi ve $|\triangle ABC|$ üçgenin alanıdır (Şekil 3.28).



Şekil 3.28: İç teğet çemberi ile bir üçgen

Herhangi bir $A = (a_1, a_2, a_3, a_4; w_A)$ genelleştirilmiş yamuk fuzzy sayısı için iki tane genelleştirilmiş üçgensel fuzzy sayı $A_L = (a_1, a_2, a_2, a_4; w_A)$ ve $A_R = (a_1, a_3, a_3, a_4; w_A)$ elde edilir (Şekil 3.29).



Şekil 3.29: Genelleştirilmiş yamuk A fuzzy sayısı ve iç teğet çemberleri ile birlikte A_L ve A_R üçgensel fuzzy sayılar

$A_L = (a_1, a_2, a_2, a_4; w_A)$ genelleştirilmiş üçgensel fuzzy sayısı ve

$$\begin{aligned}(x_A, y_A) &= (a_2, w_A),\\ (x_B, y_B) &= (a_1, 0),\\ (x_C, y_C) &= (a_4, 0),\end{aligned}$$

ise

$$\begin{aligned}a_L &= a_4 - a_1,\\ b_L &= \sqrt{w_A^2 + (a_4 - a_2)^2},\\ c_L &= \sqrt{w_A^2 + (a_2 - a_1)^2},\\ P_L &= a_L + b_L + c_L\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$r_{A_L} = \frac{w_A\, a_L}{P_L}, \tag{3.16.67}$$

$$I_{A_L}(x_{A_L}, y_{A_L}) = \frac{a_L(a_2, w_A) + b_L(a_1, 0) + c_L(a_4, 0)}{P_L}. \tag{3.16.68}$$

Benzer olarak $A_R = (a_1, a_3, a_3, a_4; w_A)$ genelleştirilmiş üçgensel fuzzy sayısı için

$$r_{A_R} = \frac{w_A\, a_R}{P_R}, \tag{3.16.69}$$

$$I_{A_R}(x_{A_R}, y_{A_R}) = \frac{a_R(a_3, w_A) + b_R(a_1, 0) + c_R(a_4, 0)}{P_R}, \tag{3.16.70}$$

$$\begin{aligned} a_R &= a_4 - a_1, \\ b_R &= \sqrt{w_A^2 + (a_4 - a_3)^2}, \\ c_R &= \sqrt{w_A^2 + (a_3 - a_1)^2}, \\ P_R &= a_R + b_R + c_R \end{aligned}$$

elde edilir. A_L ve A_R'nin iç teğet çemberleri x-eksenine teğet olduğundan y_{A_L} ve y_{A_R} ordinatları r_{A_L} and r_{A_R} yarıçaplarına eşittir. Ayrıca $0 < y_{A_L} < w_A/2$ ve $0 < y_{A_R} < w_A/2$ sağlanır (Şekil 3.29).

A üçgensel fuzzy sayı ise $A = A_L = A_R$ dir. $A = (a_1, a_2, a_3, a_4; w_A)$ kesin sayı ise $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$ ve $w_A = 1$ olduğundan $r_{A_L} = r_{A_R} = 0$ ve $I_{A_L} = I_{A_R} = (a_1, 0)$ bulunur.

(3.16.67)–(3.16.70) denklemlerinden genelleştirilmiş yamuk fuzzy sayısının iç teğet çemberinin yarıçapı ve merkezi üçgenin yatay koordinatlarına ve yamuğun yüksekliğine sürekli biçimde bağlıdır. A genelleştirilmiş yamuk fuzzy sayısınn iç teğet çemberinin yarıçapı ve merkezi A nın sağa ve sola yayılımını iyi karakterize etmektedir.

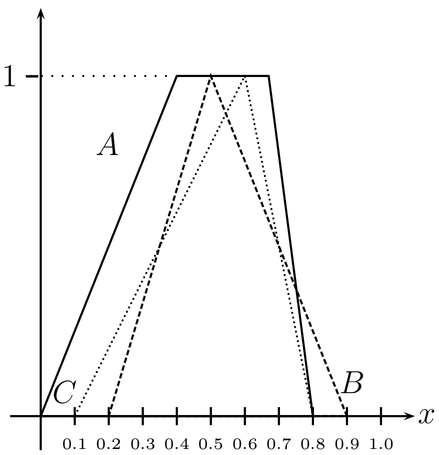
Yukarıdaki fikirler kullanılarak $A = (a_1, a_2, a_3, a_4; w_A)$ genelleştirilmiş yamuk fuzzy sayılarını sıralamaya yarayan aşağıdaki skor elde edilmiştir.

$$\text{Skor}\,(A) := \frac{x_{A_L} + x_{A_R}}{3} + \frac{w_A}{3}\left(1 - \frac{y_{A_L} + y_{A_R}}{2}\right) + \frac{a_2 + a_4 - 2}{6}. \quad (3.16.71)$$

Denklem (3.16.71)'den herhangi reel sayının skoru kendi değeri olmaktadır.

Örnek 3.16.1. $A = (0, 0.4, 0.7, 0.8; 1)$, $B = (0.2, 0.5, 0.5, 0.9; 1)$ *ve* $C = (0.1, 0.6, 0.6, 0.8; 1)$ *fuzzy sayıları için (Şekil 3.30) Denklem (3.16.67)–(3.16.70) kullanılarak*

$$\begin{aligned} I_{A_L} &= (0.3998, 0.2707), \quad I_{A_R} = (0.5078, 0.2643), \\ I_{B_L} &= I_{B_R} = (0.5335, 0.2481), \\ I_{C_L} &= I_{C_R} = (0.4991, 0.2468) \end{aligned}$$



Şekil 3.30: Örnek 3.16.1'teki A, B ve C fuzzy sayıları

elde edilir. (3.16.71) ile herbir fuzzy sayı için skorlar hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \text{Skor}\,(A) &= 0.4134, \\ \text{Skor}\,(B) &= 0.5063, \\ \text{Skor}\,(C) &= 0.4839 \end{aligned}$$

bulunur. A, B ve C fuzzy sayılarının sıralaması $A < C < B$ olur.

4 AĞIRLIK MERKEZİ YÖNTEMLERİ İLE FUZZY SAYILARIN SIRALANMASININ KARŞILAŞTIRILMASI

Bu bölümde, 3. Bölümde verilen ağırlık merkezi yöntemleri kullanılarak fuzzy sayıların sıralanmasında kullanılacak sıralama indeksleri hesaplanmış ve elde edilen sıralama sonuçları karşılaştırılmıştır.

Ağırlık merkezine bağlı sıralama yöntemlerine göre, Yager [3] ve Murakami ve ark. [4]'ün indisleri, ağırlık merkezinin kullanıldığı sıralama yöntemlerinin gelişiminin ilk aşamaları olarak düşünülebilir. Bu iki yöntem sıralama indeksi olarak sadece $\bar{x}$ veya $\bar{y}$ değerlerini kullanmaktadır. Yager [3], genelleştirilmiş fuzzy sayıları göz önüne almamış olmasına rağmen, Chen ve Chen [10], Yager [3]'in indeksini genelleştirilmiş fuzzy sayılara da uygulamıştır. Benzer olarak, Murakami ve ark. [4]'ün indeksi sadece fuzzy sayılar için sınırlı olmasına rağmen, Chen ve Chen [10], genelleştirilmiş fuzzy sayılara da uygulamıştır.

Cheng [5] ve Chu ve Tsao [6]'nin indisleri, $\bar{y}$ değerleri için formüller birbirinden biraz farklı olmasına rağmen, $w = 1$ ile fuzzy sayılar için aynı olmaktadır. Bu nedenle, $w = 1$ iken fuzzy sayılar için Cheng [5] ve Chu ve Tsao [6]'nin formüllerinin eşit olduğu söylenebilir. Bu iki indisin fuzzy sayılar ve genelleştirilmiş fuzzy sayıların sıralamasında geçerliliği benzerdir.

Chen ve Chen [7] ve Chen ve Chen [10]'nin yönteminde ağırlık merkezini hesaplamada kullanılan formüller aynıdır. Bunun yanında, bu iki indis üçgensel ve yamuk fuzzy sayılarla beraber kesin sayıları da sıralayabilmektedir.

Yong ve Qi [8]'in yönteminde de ağırlık merkezinin hesaplanmasında Chen ve Chen [7] ve Chen ve Chen [10]'nin kullandığı ağırlık merkezi formülleri kullanılmıştır.

Liang ve ark. [9]'nın uzaklık indeksinin formülleri, $\bar{y}$ değerinin formülü farklı olmasına rağmen, Cheng [5]'in uzaklık indeksiyle aynıdır. Liang ve ark. [9] indeksi ayrıca Cheng [5]'in uzaklık indeksiyle aynı özelliklere sahiptir ve her iki indis de fuzzy sayıları ve simetriklerini tutarlı olarak sıralayamamaktadır.

Wang ve Lee [11]'nin indeksinde, özellikle eğer fuzzy sayı ve genelleştirilmiş fuzzy sayılar arasında sıralama söz konusu ise, sıralama indeksi olarak sadece $\bar{x}$ değerinin kullanılması mantıklı olmayacağından $\bar{y}$ değeri de sıralamayı etkilemektedir.

Xu ve Wei [12] ve Wang ve ark. [14]'in yöntemlerinde ağırlık merkezinin hesaplanmasında Wang ve ark. [17]'nın verdiği ağırlık merkezi formülleri kullanılmaktadır. Xu ve Wei [12]'nun yöntemi ile fuzzy sayıların yanı sıra aralıkların sıranlaması da mümkün olmaktadır.

Bakar ve ark. [13]'nın yönteminde ağırlık merkezi Shieh [18]'in verdiği formüller kullanılarak hesaplanmaktadır. Bu yöntem genelleştirilmiş ve standardize edilmiş fuzzy sayılara uygulanmaktadır.

Akyar ve ark. [15]'in üçgenin iç teğet çemberinin merkezi ve yarıçapına bağlı sıralama indeksleri ile kesin sayılar ve üçgensel fuzzy sayılar sıralanabilmektedir. Bu yöntemin geliştirilmesiyle elde edilen [16] yöntemi ile de yamuk fuzzy sayıların sıralanması mümkün olmaktadır.

Tablo 4.1'de incelenen yöntemlerde kullanılan ağırlık merkezi formüllerinin ve fuzzy sayıların sıralanmasında kullanılan indekslerinin bir karşılaştırılması yapılmıştır.

Verilen ağırlık merkezi yöntemlerini karşılaştırmak için Chen ve Chen [10] ve Xu ve Wei [12]'dan on adet fuzzy sayı örneği seçilmiştir. Bu fuzzy sayılar Şekil 4.1 ve Şekil 4.2'de gösterilmiştir.Bu fuzzy sayılardan Küme 1-8 Chen ve Chen [10]'den, Küme 9-10 da Xu ve Wei [12]'den seçilmiştir. Mevcut yöntemlerin Tablo 4.2–Tablo 4.11[1]'de gösterilen sıralama sonuçlarının karşılaştırması aşağıdaki şekilde elde edilmiştir.

Şekil 4.1'de Küme 1 ile ifade edilen A_1 ve A_2 fuzzy sayıları farklı fuzzy sayılardır. Ancak Tablo 4.2'den görüldüğü gibi Cheng [5] ve Liang ve ark. [9]'nın yöntemleri her iki fuzzy sayı için de aynı sıralama değerlerini vererek yanlış sıralama sonucuna neden olmaktadır. Wang ve ark. [14] ile de sonuç $A_2 < A_1$ şeklinde elde edildiğinden yanlış sıralama sonucu vermektedir.

Şekil 4.1'de Küme 2 ile gösterilen A_1 ve A_2 fuzzy sayılarından A_2 bir kesin

[1] Tablo 4.2– Tablo 4.11'de "$-$" fuzzy sayının sıralama değerinin hesaplanamadığını göstermektedir.

sayıdır. Tablo 4.3'den, Yager [3], Murakami ve ark. [4], Cheng [5], Chu ve Tsao [6], Liang ve ark. [9], Wang ve Lee [11] ve Xu ve Wei [12] ile verilen yöntemler A_2 fuzzy sayısı için sıralama değerini hesaplayamamaktadır. Çünkü bu yöntemler ağırlık merkezinin hesaplanmasında paydayı sıfır yapmaktadırlar. Diğer tüm yöntemler ile sonuç $A_1 < A_2$ olmaktadır.

Şekil 4.1'de Küme 3 ile gösterilen fuzzy sayılar birbirinden farklıdır ve sıralama $A_1 < A_2$ dir ve verilen tüm yöntemler doğru sıralama sonucunu vermiştir (Tablo 4.4).

Şekil 4.1'deki Küme 4'te farklı A_1 ve A_2 fuzzy sayıları verilmiştir. Ancak Tablo 4.5'den görüldüğü gibi Yager [3], Cheng [5], Chu ve Tsao [6] ve Wang ve Lee [11] aynı sıralama değerleri elde edildiğinden yanlış sonuç vermiştir. Akyar ve ark. [15] ise A_1 yamuk fuzzy sayısı için sıralama değerini hesaplayamamaktadır. Murakami ve ark. [4] ve Bakar ve ark. [13]'nin yöntemiyle $A_2 < A_1$ bulunurken kalan diğer yöntemlerle sonuç $A_1 < A_2$ olmuştur.

Şekil 4.1'de Küme 5 ile verilen fuzzy sayılar birbirinden farklıdır. Yager [3], Murakami ve ark. [4], Cheng [5], Chu ve Tsao [6], Wang ve Lee [11] ve Bakar ve ark. [13]'nun yöntemleri ile her iki fuzzy sayı için aynı sıralama değerleri elde edildiğinden yanlış sıralama sonucu elde edilmiştir. Yong ve Qi [8]'in yöntemiyle $A_2 < A_1$ olurken kalan diğer tüm yöntemlerle sonuç $A_1 < A_2$ olmaktadır (Tablo 4.6).

Şekil 4.1'deki Küme 6'dan A_1 ve A_2 fuzzy sayılarının farklı olduğu söylenebilir. Ancak Tablo 4.7'den görüleceği gibi Yager [3] yöntemiyle her iki fuzzy sayı için aynı sıralama değeri elde edilip sıralama sonucu yanlış olmaktadır. Yong ve Qi [8] ve Wang ve ark. [14] yöntemleriyle $A_2 < A_1$ bulunurken kalan diğer tüm yöntemlerde sıralama sonucu $A_1 < A_2$ olmaktadır.

Şekil 4.2'de Küme 7 ile verilen A_1 ve A_2 fuzzy sayıları için sıralama sonucu tüm yöntemlerle $A_2 < A_1$ olmaktadır.

Şekil 4.2'de Küme 8 ile verilen A_1, A_2 ve A_3 fuzzy sayıları birbirinden farklıdır. Ancak Tablo 4.9'den görüldüğü gibi Cheng [5]'in yöntemi ile A_1 ve A_2 için aynı sıralama değeri bulunup yanlış sıralama sonucu elde edilmektedir. Ayrıca, Akyar ve ark. [15] yöntemi ile A_1 ve A_3 yamuk fuzzy sayıları için sıralama değerleri hesaplanamadığından sıralama sonucu elde edilememiştir. Diğer yöntemlerden, Cheng [5], Chu ve Tsao [6], Xu ve Wei [12] ve Bakar ve ark. [13] yöntemleri ile $A_1 < A_2 < A_3$ elde edilirken, diğer yöntemlerle $A_1 < A_3 < A_2$ elde edilmektedir.

Şekil 4.2'de Küme 9 ile ifade edilen A_1, A_2 ve A_3 fuzzy sayıları için Akyar ve ark. [15] yöntemi A_1 yamuk fuzzy sayısı için sıralama değerini hesaplayamamaktadır. Tablo 4.10'dan da görüldüğü gibi Cheng [5] yöntemi ile $A_3 < A_2 < A_1$, Liang ve ark. [9] ve Wang ve ark. [14] yöntemleri ile $A_2 < A_1 < A_3$ elde edilirken, diğer yöntemlerle $A_1 < A_2 < A_3$ elde edilmektedir.

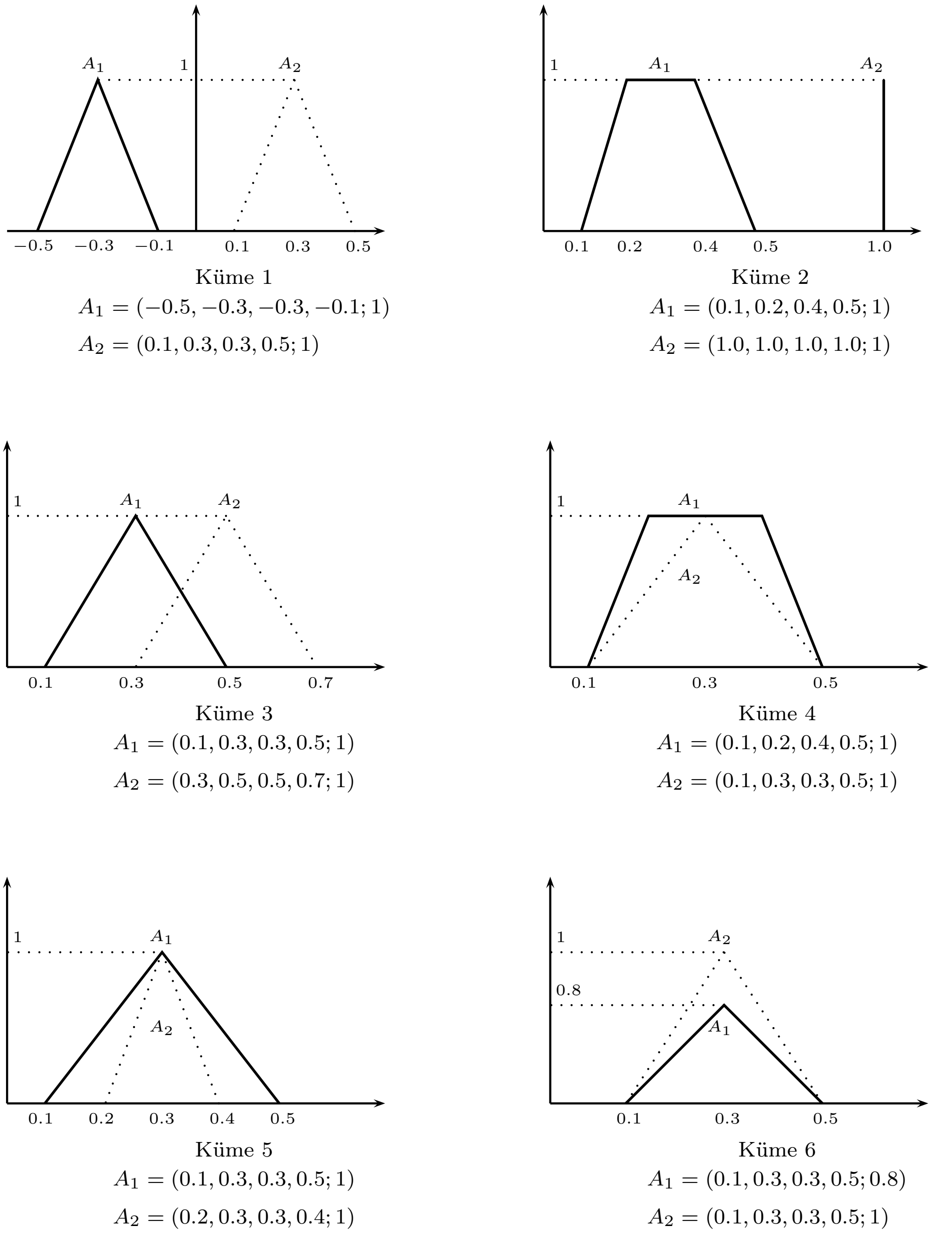
Son olarak Şekil 4.2'de Küme 10 ile verilen A_1, A_2 ve A_3 fuzzy sayıları için Tablo 4.11'de gösterilen sonuçlar elde edilmiştir.

Tablo 4.1: Ağırlık Merkezi Formülleri ve Sıralama İndeksinin Karşılaştırması

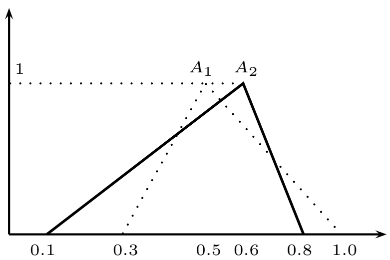
Yöntem	$\bar{x}$ Formülü	$\bar{y}$ Formülü	Sıralama İndeksi
Yager(1980)	$\bar{x}_A = \dfrac{\int_0^1 x f_A(x)dx}{\int_0^1 f_A(x)dx}$		$\bar{x}_A$ değeri
Murakami ve ark.(1983)	$\bar{x}_A = \dfrac{\int_0^1 x f_A(x)dx}{\int_0^1 f_A(x)dx}$	$\bar{y}_A = \dfrac{\int_0^1 x f_A(x)df_A(x)}{\int_0^1 f_A(x)dx}$	$\bar{x}_A$ veya $\bar{y}_A$ değeri
Cheng(1998)	$\bar{x}_A = \dfrac{\int_{a_1}^{a_2} x f_A^L(x)dx + \int_{a_2}^{a_3} x dx + \int_{a_3}^{a_4} x f_A^R(x)dx}{\int_{a_1}^{a_2} f_A^L(x)dx + \int_{a_2}^{a_3} dx + \int_{a_3}^{a_4} f_A^R(x)dx}$	$\bar{y}_A = \dfrac{w[\int_0^1 y g_A^L(y)dy + \int_0^1 y g_A^R(y)dy]}{\int_0^1 g_A^L(y)dy + \int_0^1 g_A^R(y)dy}$	Uzaklık
Chu ve Tsao (2002)	$\bar{x}_A = \dfrac{\int_{a_1}^{a_2} x f_A^L(x)dx + \int_{a_2}^{a_3} x dx + \int_{a_3}^{a_4} x f_A^R(x)dx}{\int_{a_1}^{a_2} f_A^L(x)dx + \int_{a_2}^{a_3} dx + \int_{a_3}^{a_4} f_A^R(x)dx}$	$\bar{y}_A = \dfrac{\int_0^w y g_A^L(y)dy + \int_0^w y g_A^R(y)dy}{\int_0^w g_A^L(y)dy + \int_0^w g_A^R(y)dy}$	Alan
Chen ve Chen (2003)	$\bar{x}_A = \frac{\bar{y}_A(a_3 + a_2) + (a_4 + a_1)(w_A - \bar{y}_A)}{2w_A}$	$\bar{y}_A = \begin{cases} \frac{w_A \times \left(\frac{a_3 - a_2}{a_4 - a_1} + 2\right)}{6} & , \quad a_1 \neq a_4 \\ \frac{w_A}{2} & , \quad a_1 = a_4 \end{cases}$	Standard sapmaya bağlı
Yong ve Qi (2005)	$\bar{x}_A = \frac{\bar{y}_A(a_3 + a_2) + (a_4 + a_1)(w_A - \bar{y}_A)}{2w_A}$	$\bar{y}_A = \begin{cases} \frac{w_A \times \left(\frac{a_3 - a_2}{a_4 - a_1} + 2\right)}{6} & , \quad a_1 \neq a_4 \\ \frac{w_A}{2} & , \quad a_1 = a_4 \end{cases}$	İndeks katsayısı
Wang ve ark. (2006)	$\bar{x}_A = \dfrac{\int_{a_1}^{a_2} x f_A^L(x)dx + \int_{a_2}^{a_3} wx dx + \int_{a_3}^{a_4} x f_A^R(x)dx}{\int_{a_1}^{a_2} f_A^L(x)dx + \int_{a_2}^{a_3} w dx + \int_{a_3}^{a_4} f_A^R(x)dx}$	$\bar{y}_A = \dfrac{\int_0^w y(g_A^R(y) - g_A^L(y))dy}{\int_0^w (g_A^R(y) - g_A^L(y))dy}$	
Liang ve ark. (2006)	$\bar{x}_A = \dfrac{\int_{a_1}^{a_2} x f_A^L(x)dx + \int_{a_2}^{a_3} x dx + \int_{a_3}^{a_4} x f_A^R(x)dx}{\int_{a_1}^{a_2} f_A^L(x)dx + \int_{a_2}^{a_3} dx + \int_{a_3}^{a_4} f_A^R(x)dx}$	$\bar{y}_A = \dfrac{\int_0^1 y g_A^R(y)dy - \int_0^1 y g_A^L(y)dy}{\int_0^1 g_A^R(y)dy - \int_0^1 g_A^L(y)dy}$	Uzaklık ve RV indeksi

Tablo 4.1 (Devam): Ağırlık Merkezi Formülleri ve Sıralama İndeksinin Karşılaştırması

Yöntem	$\bar{x}$ Formülü	$\bar{y}$ Formülü	Sıralama İndeksi
Shieh (2007)	$\bar{x}_A = \dfrac{\int_{-\infty}^{\infty} x f_A(x)dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f_A(x)dx}$	$\bar{y}_A = \dfrac{\int_0^w \alpha \lvert A^\alpha \rvert d\alpha}{\int_0^w \lvert A^\alpha \rvert d\alpha}$	
Chen ve Chen (2007)	$\bar{x}_A = \dfrac{\bar{y}_A(a_3+a_2)+(a_4+a_1)(w_A-\bar{y}_A)}{2w_A}$	$\bar{y}_A = \begin{cases} \dfrac{w_A \times \left(\frac{a_3-a_2}{a_4-a_1}+2\right)}{6} & , \quad a_1 \neq a_4 \\ \dfrac{w_A}{2} & , \quad a_1 = a_4 \end{cases}$	Skor indeksi
Wang ve Lee (2008)	$\bar{x}_A = \dfrac{\int_{a_1}^{a_2} x f_A^L(x)dx + \int_{a_2}^{a_3} x dx + \int_{a_3}^{a_4} x f_A^R(x)dx}{\int_{a_1}^{a_2} f_A^L(x)dx + \int_{a_2}^{a_3} dx + \int_{a_3}^{a_4} f_A^R(x)dx}$	$\bar{y}_A = \dfrac{\int_0^w y g_A^L(y)dy + \int_0^w y g_A^R(y)dy}{\int_0^w g_A^L(y)dy + \int_0^w g_A^R(y)dy}$	$\bar{x}_A$ veya $\bar{y}_A$ değeri
Xu ve Wei (2010)	$\bar{x}_A = \dfrac{\int_{a_1}^{a_2} x f_A^L(x)dx + \int_{a_2}^{a_3} w x dx + \int_{a_3}^{a_4} x f_A^R(x)dx}{\int_{a_1}^{a_2} f_A^L(x)dx + \int_{a_2}^{a_3} w dx + \int_{a_3}^{a_4} f_A^R(x)dx}$	$\bar{y}_A = \dfrac{\int_0^w y(g_A^R(y) - g_A^L(y))dy}{\int_0^w (g_A^R(y) - g_A^L(y))dy}$	H ölçüsü
Bakar ve ark. (2010)	$\bar{x}_A = \dfrac{\int_{-\infty}^{\infty} x f_A(x)dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f_A(x)dx}$	$\bar{y}_A = \dfrac{\int_0^w \alpha \lvert A^\alpha \rvert d\alpha}{\int_0^w \lvert A^\alpha \rvert d\alpha}$	Benzerlik ölçüsü
Wang ve ark. (2011)	$\bar{x}_A = \dfrac{\int_{a_1}^{a_2} x f_A^L(x)dx + \int_{a_2}^{a_3} w x dx + \int_{a_3}^{a_4} x f_A^R(x)dx}{\int_{a_1}^{a_2} f_A^L(x)dx + \int_{a_2}^{a_3} w dx + \int_{a_3}^{a_4} f_A^R(x)dx}$	$\bar{y}_A = \dfrac{\int_0^w y(g_A^R(y) - g_A^L(y))dy}{\int_0^w (g_A^R(y) - g_A^L(y))dy}$	R_i indeksi
Akyar ve ark. (2012)	$I_A(x_A, y_A) = \dfrac{(a_u - a_l)(a_m, 1) + \sqrt{1+(a_u-a_m)^2}(a_l, 0) + \sqrt{1+(a_m-a_l)^2}(a_u, 0)}{(a_u - a_l) + \sqrt{1+(a_u-a_m)^2} + \sqrt{1+(a_m-a_l)^2}}$		Rank indeksi
Akyar ve ark. [16]	$I_{A_L}(x_{A_L}, y_{A_L}) = \dfrac{a_L(a_2, w_A) + b_L(a_1, 0) + c_L(a_4, 0)}{P_L}, \quad I_{A_R}(x_{A_R}, y_{A_R}) = \dfrac{a_R(a_3, w_A) + b_R(a_1, 0) + c_R(a_4, 0)}{P_R}$		Skor indeksi



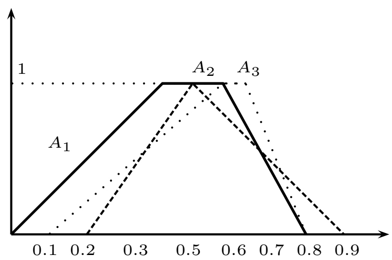
Şekil 4.1: Fuzzy sayı örnekleri



Küme 7

$A_1 = (0.1, 0.6, 0.6, 0.8; 1)$

$A_2 = (0.3, 0.5, 0.5, 1.0; 1)$

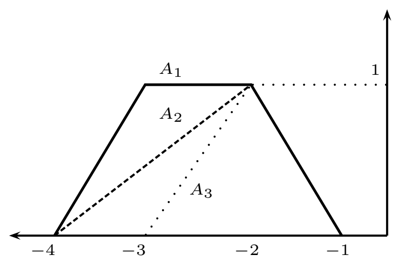


Küme 8

$A_1 = (0, 0.4, 0.6, 0.8; 1)$

$A_2 = (0.2, 0.5, 0.5, 0.9; 1)$

$A_3 = (0.1, 0.6, 0.7, 0.8; 1)$

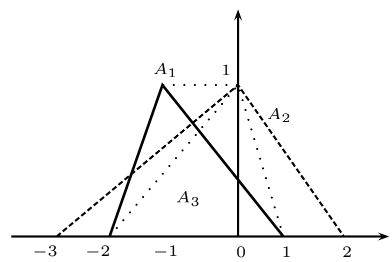


Küme 9

$A_1 = (-4, -3, -2, -1; 1)$

$A_2 = (-4, -2, -1; 1)$

$A_3 = (-3, -2, -1; 1)$



Küme 10

$A_1 = (-2, -1, 1; 1)$

$A_2 = (-3, 0, 2; 1)$

$A_3 = (-2, 0, 1; 1)$

Şekil 4.2: Fuzzy sayı örnekleri

Tablo 4.2: Şekil 4.1'deki Küme 1 için elde edilen sonuçlar

Küme 1			
Yöntemler	Sıralama İndeksi	Sıralama Değeri	Sıralama Sonucu
Yager(1980)	$\bar{x}_A$ değeri	$\bar{x}_{A_1} = -0.3$ $\bar{x}_{A_2} = 0.3$ $\bar{x}_{A_1} < \bar{x}_{A_2}$	$A_1 < A_2$
Murakami ve ark.(1983)	$\bar{x}_A$ veya $\bar{y}_A$ değeri	$\bar{x}_{A_1} = -0.3$ $\bar{x}_{A_2} = 0.3$ $\bar{x}_{A_1} < \bar{x}_{A_2}$	$A_1 < A_2$
Cheng(1998)	Uzaklık	$R(A_1) = 0.5831$ $R(A_2) = 0.5831$ $R(A_1) = R(A_2)$	$A_1 \approx A_2$
Chu ve Tsao(2002)	Alan	$S(A_1) = -0.15$ $S(A_2) = 0.15$ $S(A_1) < S(A_2)$	$A_1 < A_2$
Chen ve Chen(2003)	Standard sapmaya bağlı	$Rank(A_1) = 0.6359$ $Rank(A_2) = 1.2359$ $Rank(A_1) < Rank(A_2)$	$A_1 < A_2$
Yong ve Qi(2005)	İndeks katsayısı	$IC_{A_1} = 0.3755$ $IC_{A_2} = 0.6244$ $IC_{A_1} < IC_{A_2}$	$A_1 < A_2$
Liang ve ark.(2006)	Uzaklık ve RV indeksi	$RV(A_1) = 0.5562$ $RV(A_2) = 0.5562$ $RV(A_1) = RV(A_2)$ $R_*(A_1) = 0.4484$ $R_*(A_2) = 0.4484$ $R_*(A_1) = R_*(A_2)$	$A_1 \approx A_2$
Chen ve Chen(2007)	Score indeksi	$Skor(A_1) = 0.4456$ $Skor(A_2) = 0.7473$ $Skor(A_1) < Skor(A_2)$	$A_1 < A_2$
Wang ve Lee(2008)	$\bar{x}_A$ veya $\bar{y}_A$ değeri	$\bar{x}_{A_1} = -0.3$ $\bar{x}_{A_2} = 0.3$ $\bar{x}_{A_1} < \bar{x}_{A_2}$	$A_1 < A_2$
Xu ve Wei(2010)	H ölçüsü	$H(A_1) = -0.2933$ $H(A_2) = 0.1466$ $H(A_1) < H(A_2)$	$A_1 < A_2$
Bakar ve ark.(2010)	Benzerlik ölçüsü	$S(\mu_d, A_1) = -0.084$ $S(\mu_d, A_2) = 0.336$ $S(\mu_d, A_1) < S(\mu_d, A_2)$	$A_1 < A_2$
Wang ve ark.(2011)	R_i indeksi	$R_1 = 0.2666$ $R_2 = -0.7833$ $R_2 < R_1$	$A_2 < A_1$

Tablo 4.2 (Devam): Şekil 4.1'deki Küme 1 için elde edilen sonuçlar

Küme 1			
Yöntemler	Sıralama İndeksi	Sıralama Değeri	Sıralama Sonucu
Akyar ve ark.(2012)	*Rank* indeksi	$Rank(A_1) = (-0.3819, 0.8361, -0.3)$ $Rank(A_2) = (0.2180, 0.8361, 0.3)$ $Rank(A_1) < Rank(A_2)$	$A_1 < A_2$
Akyar ve ark. [16]	*Skor* indeksi	$Skor(A_1) = -0.3213$ $Skor(A_2) = 0.2787$ $Skor(A_1) < Skor(A_2)$	$A_1 < A_2$

Tablo 4.3: Şekil 4.1'deki Küme 2 için elde edilen sonuçlar

Küme 2			
Yöntemler	Sıralama İndeksi	Sıralama Değeri	Sıralama Sonucu
Yager(1980)	$\bar{x}_A$ değeri	$\bar{x}_{A_1} = 0.3$ $\bar{x}_{A_2} = -$	–
Murakami ve ark.(1983)	$\bar{x}_A$ veya $\bar{y}_A$ değeri	$\bar{x}_{A_1} = 0.3$ $\bar{x}_{A_2} = -$	–
Cheng(1998)	Uzaklık	$R(A_1) = 0.5831$ $R(A_2) = -$	–
Chu ve Tsao(2002)	Alan	$S(A_1) = -0.15$ $S(A_2) = -$	–
Chen ve Chen(2003)	Standard sapmaya bağlı	$Rank(A_1) = 1.2063$ $Rank(A_2) = 2$ $Rank(A_1) < Rank(A_2)$	$A_1 < A_2$
Yong ve Qi(2005)	İndeks katsayısı	$IC_{A_1} = 0.6272$ $IC_{A_2} = 0.8048$ $IC_{A_1} < IC_{A_2}$	$A_1 < A_2$
Liang ve ark.(2006)	Uzaklık ve RV indeksi	$RV(A_1) = 0.5548$ $RV(A_2) = -$	–
Chen ve Chen(2007)	Score indeksi	$Skor(A_1) = 0.4239$ $Skor(A_2) = 0.8602$ $Skor(A_1) < Skor(A_2)$	$A_1 < A_2$
Wang ve Lee(2008)	$\bar{x}_A$ veya $\bar{y}_A$ değeri	$\bar{x}_{A_1} = 0.3$ $\bar{x}_{A_2} = -$	–
Xu ve Wei(2010)	H ölçüsü	$H(A_1) = -0.1316$ $H(A_2) = -$	–
Bakar ve ark.(2010)	Benzerlik ölçüsü	$S(\mu_d, A_1) = 0.0585$ $S(\mu_d, A_2) = 0.4911$	$A_1 < A_2$
Wang ve ark.(2011)	R_i indeksi	$R_1 = -$ $R_2 = -$	–
Akyar ve ark.(2012)	*Rank* indeksi	$Rank(A_1) = -$ $Rank(A_2) = (1, 1, 1)$	–
Akyar ve ark. [16]	*Skor* indeksi	$Skor(A_1) = 0.2622$ $Skor(A_2) = 1$ $Skor(A_1) < Skor(A_2)$	$A_1 < A_2$

Tablo 4.4: Şekil 4.1'deki Küme 3 için elde edilen sonuçlar

Küme 3			
Yöntemler	Sıralama İndeksi	Sıralama Değeri	Sıralama Sonucu
Yager(1980)	$\bar{x}_A$ değeri	$\bar{x}_{A_1} = 0.3$ $\bar{x}_{A_2} = 0.5$ $\bar{x}_{A_1} < \bar{x}_{A_2}$	$A_1 < A_2$
Murakami ve ark.(1983)	$\bar{x}_A$ veya $\bar{y}_A$ değeri	$\bar{x}_{A_1} = 0.3$ $\bar{x}_{A_2} = 0.5$ $\bar{x}_{A_1} < \bar{x}_{A_2}$	$A_1 < A_2$
Cheng(1998)	Uzaklık	$R(A_1) = 0.5831$ $R(A_2) = 0.7071$ $R(A_1) < R(A_2)$	$A_1 < A_2$
Chu ve Tsao(2002)	Alan	$S(A_1) = 0.15$ $S(A_2) = 0.25$ $S(A_1) < S(A_2)$	$A_1 < A_2$
Chen ve Chen(2003)	Standard sapmaya bağlı	$Rank(A_1) = 1.2359$ $Rank(A_2) = 1.4359$ $Rank(A_1) < Rank(A_2)$	$A_1 < A_2$
Yong ve Qi(2005)	İndeks katsayısı	$IC_{A_1} = 0.6244$ $IC_{A_2} = 0.7486$ $IC_{A_1} < IC_{A_2}$	$A_1 < A_2$
Liang ve ark.(2006)	Uzaklık ve RV indeksi	$RV(A_1) = 0.5562$ $RV(A_2) = 0.4150$ $RV(A_1) > RV(A_2)$	$A_1 < A_2$
Chen ve Chen(2007)	Score indeksi	$Skor(A_1) = 0.4456$ $Skor(A_2) = 0.4884$ $Skor(A_1) < Skor(A_2)$	$A_1 < A_2$
Wang ve Lee(2008)	$\bar{x}_A$ veya $\bar{y}_A$ değeri	$\bar{x}_{A_1} = 0.3$ $\bar{x}_{A_2} = 0.5$ $\bar{x}_{A_1} < \bar{x}_{A_2}$	$A_1 < A_2$
Xu ve Wei(2010)	H ölçüsü	$H(A_1) = 0.1466$ $H(A_2) = 0.4$ $H(A_1) < H(A_2)$	$A_1 < A_2$
Bakar ve ark.(2010)	Benzerlik ölçüsü	$S(\mu_d, A_1) = 0.216$ $S(\mu_d, A_2) = 0.54$ $S(\mu_d, A_1) < S(\mu_d, A_2)$	$A_1 < A_2$
Wang ve ark.(2011)	R_i indeksi	$R_1 = 0.4833$ $R_2 = 0.9999$ $R_1 < R_2$	$A_1 < A_2$

Tablo 4.4 (Devam): Şekil 4.1'deki Küme 3 için elde edilen sonuçlar

Küme 3			
Yöntemler	Sıralama İndeksi	Sıralama Değeri	Sıralama Sonucu
Akyar ve ark.(2012)	*Rank* indeksi	$Rank(A_1) = (0.2180, 0.8361, 0.3)$ $Rank(A_2) = (0.4180, 0.8361, 0.5)$ $Rank(A_1) < Rank(A_2)$	$A_1 < A_2$
Akyar ve ark. [16]	*Skor* indeksi	$Skor(A_1) = 0.2787$ $Skor(A_2) = 0.4787$ $Skor(A_1) < Skor(A_2)$	$A_1 < A_2$

Tablo 4.5: Şekil 4.1'deki Küme 4 için elde edilen sonuçlar

Küme 4			
Yöntemler	Sıralama İndeksi	Sıralama Değeri	Sıralama Sonucu
Yager(1980)	$\bar{x}_A$ değeri	$\bar{x}_{A_1} = 0.3$ $\bar{x}_{A_2} = 0.3$ $\bar{x}_{A_1} = \bar{x}_{A_2}$	$A_1 \approx A_2$
Murakami ve ark.(1983)	$\bar{x}_A$ veya $\bar{y}_A$ değeri	$\bar{x}_{A_1} = 0.3$ $\bar{x}_{A_2} = 0.3$ $\bar{x}_{A_1} = \bar{x}_{A_2}$ $\bar{y}_{A_1} = 0.4444$ $\bar{y}_{A_2} = 0.3333$ $\bar{y}_{A_2} < \bar{y}_{A_1}$	$A_2 < A_1$
Cheng(1998)	Uzaklık	$R(A_1) = 0.5831$ $R(A_2) = 0.5831$ $R(A_1) = R(A_2)$	$A_1 \approx A_2$
Chu ve Tsao(2002)	Alan	$S(A_1) = 0.15$ $S(A_2) = 0.15$ $S(A_1) = S(A_2)$	$A_1 \approx A_2$
Chen ve Chen(2003)	Standard sapmaya bağlı	$Rank(A_1) = 1.2063$ $Rank(A_2) = 1.2359$ $Rank(A_1) < Rank(A_2)$	$A_1 < A_2$
Yong ve Qi(2005)	İndeks katsayısı	$IC_{A_1} = 0.6272$ $IC_{A_2} = 0.6244$ $IC_{A_1} < IC_{A_2}$	$A_1 < A_2$
Liang ve ark.(2006)	Uzaklık ve RV indeksi	$RV(A_1) = 0.5548$ $RV(A_2) = 0.5562$ $RV(A_1) > RV(A_2)$	$A_1 < A_2$
Chen ve Chen(2007)	Score indeksi	$Skor(A_1) = 0.4239$ $Skor(A_2) = 0.4456$ $Skor(A_1) < Skor(A_2)$	$A_1 < A_2$
Wang ve Lee(2008)	$\bar{x}_A$ veya $\bar{y}_A$ değeri	$\bar{x}_{A_1} = 0.3$ $\bar{x}_{A_2} = 0.3$ $\bar{x}_{A_1} = \bar{x}_{A_2}$ $\bar{y}_{A_1} = 0.5$ $\bar{y}_{A_2} = 0.5$ $\bar{y}_{A_1} = \bar{y}_{A_2}$	$A_1 \approx A_2$
Xu ve Wei(2010)	H ölçüsü	$H(A_1) = 0.1316$ $H(A_2) = 0.1466$ $H(A_1) < H(A_2)$	$A_1 < A_2$
Bakar ve ark.(2010)	Benzerlik ölçüsü	$S(\mu_d, A_1) = 0.27$ $S(\mu_d, A_2) = 0.25$ $S(\mu_d, A_2) < S(\mu_d, A_1)$	$A_2 < A_1$

Tablo 4.5 (Devam): Şekil 4.1'deki Küme 4 için elde edilen sonuçlar

Küme 4			
Yöntemler	Sıralama İndeksi	Sıralama Değeri	Sıralama Sonucu
Wang ve ark.(2011)	R_i indeksi	$R_1 = 0.5810$ $R_2 = 0.7094$ $R_1 < R_2$	$A_1 < A_2$
Akyar ve ark.(2012)	*Rank* indeksi	$Rank(A_1) = -$ $Rank(A_2) = (0.2180, 0.8361, 0.3)$	$-$
Akyar ve ark. [16]	*Skor* indeksi	$Skor(A_1) = 0.2622$ $Skor(A_2) = 0.2787$ $Skor(A_1) < Skor(A_2)$	$A_1 < A_2$

Tablo 4.6: Şekil 4.1'deki Küme 5 için elde edilen sonuçlar

Küme 5			
Yöntemler	Sıralama İndeksi	Sıralama Değeri	Sıralama Sonucu
Yager(1980)	$\bar{x}_A$ değeri	$\bar{x}_{A_1} = 0.3$ $\bar{x}_{A_2} = 0.3$ $\bar{x}_{A_1} = \bar{x}_{A_2}$	$A_1 \approx A_2$
Murakami ve ark.(1983)	$\bar{x}_A$ veya $\bar{y}_A$ değeri	$\bar{x}_{A_1} = 0.3$ $\bar{x}_{A_2} = 0.3$ $\bar{x}_{A_1} = \bar{x}_{A_2}$ $\bar{y}_{A_1} = 0.3333$ $\bar{y}_{A_2} = 0.3333$ $\bar{y}_{A_1} = \bar{y}_{A_2}$	$A_1 \approx A_2$
Cheng(1998)	Uzaklık	$R(A_1) = 0.5831$ $R(A_2) = 0.5831$ $R(A_1) = R(A_2)$	$A_1 \approx A_2$
Chu ve Tsao(2002)	Alan	$S(A_1) = 0.15$ $S(A_2) = 0.15$ $S(A_1) = S(A_2)$	$A_1 \approx A_2$
Chen ve Chen(2003)	Standard sapmaya bağlı	$Rank(A_1) = 1.2359$ $Rank(A_2) = 1.2674$ $Rank(A_1) < Rank(A_2)$	$A_1 < A_2$
Yong ve Qi(2005)	İndeks katsayısı	$IC_{A_1} = 0.6244$ $IC_{A_2} = 0.6213$ $IC_{A_2} < IC_{A_1}$	$A_2 < A_1$
Liang ve ark.(2006)	Uzaklık ve RV indeksi	$RV(A_1) = 0.5562$ $RV(A_2) = 0.5334$ $RV(A_1) > RV(A_2)$	$A_1 < A_2$
Chen ve Chen(2007)	Score indeksi	$Skor(A_1) = 0.4456$ $Skor(A_2) = 0.4728$ $Skor(A_1) < Skor(A_2)$	$A_1 < A_2$
Wang ve Lee(2008)	$\bar{x}_A$ veya $\bar{y}_A$ değeri	$\bar{x}_{A_1} = 0.3$ $\bar{x}_{A_2} = 0.3$ $\bar{x}_{A_1} = \bar{x}_{A_2}$ $\bar{y}_{A_1} = 0.5$ $\bar{y}_{A_2} = 0.5$ $\bar{y}_{A_1} = \bar{y}_{A_2}$	$A_1 \approx A_2$
Xu ve Wei(2010)	H ölçüsü	$H(A_1) = 0.1466$ $H(A_2) = 0.1833$ $H(A_1) < H(A_2)$	$A_1 < A_2$
Bakar ve ark.(2010)	Benzerlik ölçüsü	$S(\mu_d, A_1) = 0.3$ $S(\mu_d, A_2) = 0.3$ $S(\mu_d, A_1) = S(\mu_d, A_2)$	$A_1 \approx A_2$

Tablo 4.6 (Devam): Şekil 4.1'deki Küme 5 için elde edilen sonuçlar

Küme 5			
Yöntemler	Sıralama İndeksi	Sıralama Değeri	Sıralama Sonucu
Wang ve ark.(2011)	R_i indeksi	$R_1 = 0.5888$ $R_2 = 0.6943$ $R_1 < R_2$	$A_1 < A_2$
Akyar ve ark.(2012)	*Rank* indeksi	$Rank(A_1) = (0.2180, 0.8361, 0.3)$ $Rank(A_2) = (0.2548, 0.9096, 0.3)$ $Rank(A_1) < Rank(A_2)$	$A_1 < A_2$
Akyar ve ark. [16]	*Skor* indeksi	$Skor(A_1) = 0.2787$ $Skor(A_2) = 0.2865$ $Skor(A_1) < Skor(A_2)$	$A_1 < A_2$

Tablo 4.7: Şekil 4.1'deki Küme 6 için elde edilen sonuçlar

Küme 6			
Yöntemler	Sıralama İndeksi	Sıralama Değeri	Sıralama Sonucu
Yager(1980)	$\bar{x}_A$ değeri	$\bar{x}_{A_1} = 0.3$ $\bar{x}_{A_2} = 0.3$ $\bar{x}_{A_1} = \bar{x}_{A_2}$	$A_1 \approx A_2$
Murakami ve ark.(1983)	$\bar{x}_A$ veya $\bar{y}_A$ değeri	$\bar{x}_{A_1} = 0.3$ $\bar{x}_{A_2} = 0.3$ $\bar{x}_{A_1} = \bar{x}_{A_2}$ $\bar{y}_{A_1} = 0.2666$ $\bar{y}_{A_2} = 0.3333$ $\bar{y}_{A_1} < \bar{y}_{A_2}$	$A_1 < A_2$
Cheng(1998)	Uzaklık	$R(A_1) = 0.5$ $R(A_2) = 0.5831$ $R(A_1) < R(A_2)$	$A_1 < A_2$
Chu ve Tsao(2002)	Alan	$S(A_1) = 0.12$ $S(A_2) = 0.15$ $S(A_1) < S(A_2)$	$A_1 < A_2$
Chen ve Chen(2003)	Standard sapmaya bağlı	$Rank(A_1) = 1.1557$ $Rank(A_2) = 1.2359$ $Rank(A_1) < Rank(A_2)$	$A_1 < A_2$
Yong ve Qi(2005)	İndeks katsayısı	$IC_{A_1} = 0.6318$ $IC_{A_2} = 0.6244$ $IC_{A_2} < IC_{A_1}$	$A_2 < A_1$
Liang ve ark.(2006)	Uzaklık ve RV indeksi	$R_*(A_1) = 0.4013$ $R_*(A_2) = 0.4484$ $R_*(A_1) < R_*(A_2)$	$A_1 < A_2$
Chen ve Chen(2007)	Score indeksi	$Skor(A_1) = 0.3564$ $Skor(A_2) = 0.4456$ $Skor(A_1) < Skor(A_2)$	$A_1 < A_2$
Wang ve Lee(2008)	$\bar{x}_A$ veya $\bar{y}_A$ değeri	$\bar{x}_{A_1} = 0.3$ $\bar{x}_{A_2} = 0.3$ $\bar{x}_{A_1} = \bar{x}_{A_2}$ $\bar{y}_{A_1} = 0.4$ $\bar{y}_{A_2} = 0.5$ $\bar{y}_{A_1} < \bar{y}_{A_2}$	$A_1 < A_2$
Xu ve Wei(2010)	H ölçüsü	$H(A_1) = 0.0831$ $H(A_2) = 0.1467$ $H(A_1) < H(A_2)$	$A_1 < A_2$
Bakar ve ark.(2010)	Benzerlik ölçüsü	$S(\mu_d, A_1) = 0.2666$ $S(\mu_d, A_2) = 0.27$ $S(\mu_d, A_1) < S(\mu_d, A_2)$	$A_1 < A_2$

Tablo 4.7 (Devam): Şekil 4.1'deki Küme 6 için elde edilen sonuçlar

Küme 6			
Yöntemler	Sıralama İndeksi	Sıralama Değeri	Sıralama Sonucu
Wang ve ark.(2011)	R_i indeksi	$R_1 = 0.6644$ $R_2 = 0.6416$ $R_2 < R_1$	$A_2 < A_1$
Akyar ve ark.(2012)	*Rank* indeksi	$Rank(A_1) = (0.2024, 0.8049, 0.3)$ $Rank(A_2) = (0.2180, 0.8361, 0.3)$ $Rank(A_1) < Rank(A_2)$	$A_1 < A_2$
Akyar ve ark. [16]	*Skor* indeksi	$Skor(A_1) = 0.2250$ $Skor(A_2) = 0.2787$ $Skor(A_1) < Skor(A_2)$	$A_1 < A_2$

Tablo 4.8: Şekil 4.2'deki Küme 7 için elde edilen sonuçlar

Küme 7			
Yöntemler	Sıralama İndeksi	Sıralama Değeri	Sıralama Sonucu
Yager(1980)	$\bar{x}_A$ değeri	$\bar{x}_{A_1} = 0.6$ $\bar{x}_{A_2} = 0.5$ $\bar{x}_{A_2} < \bar{x}_{A_1}$	$A_2 < A_1$
Murakami ve ark.(1983)	$\bar{x}_A$ veya $\bar{y}_A$ değeri	$\bar{x}_{A_1} = 0.6$ $\bar{x}_{A_2} = 0.5$ $\bar{x}_{A_2} < \bar{x}_{A_1}$	$A_2 < A_1$
Cheng(1998)	Uzaklık	$R(A_1) = 0.7672$ $R(A_2) = 0.7241$ $R(A_2) < R(A_1)$	$A_2 < A_1$
Chu ve Tsao(2002)	Alan	$S(A_1) = 0.2869$ $S(A_2) = 0.2619$ $S(A_2) < S(A_1)$	$A_2 < A_1$
Chen ve Chen(2003)	Standard sapmaya bağlı	$Rank(A_1) = 1.4859$ $Rank(A_2) = 1.3859$ $Rank(A_2) < Rank(A_1)$	$A_2 < A_1$
Yong ve Qi(2005)	İndeks katsayısı	$IC_{A_1} = 0.7475$ $IC_{A_2} = 0.7103$ $IC_{A_2} < IC_{A_1}$	$A_2 < A_1$
Liang ve ark.(2006)	Uzaklık ve RV indeksi	$RV(A_1) = 0.4048$ $RV(A_2) = 0.4623$ $RV(A_2) > RV(A_1)$	$A_2 < A_1$
Chen ve Chen(2007)	Score indeksi	$Skor(A_1) = 0.4126$ $Skor(A_2) = 0.4004$ $Skor(A_2) < Skor(A_1)$	$A_2 < A_1$
Wang ve Lee(2008)	$\bar{x}_A$ veya $\bar{y}_A$ değeri	$\bar{x}_{A_1} = 0.6$ $\bar{x}_{A_2} = 0.5$ $\bar{x}_{A_2} < \bar{x}_{A_1}$	$A_2 < A_1$
Xu ve Wei(2010)	H ölçüsü	$H(A_1) = 0.4533$ $H(A_2) = 0.35$ $H(A_2) < H(A_1)$	$A_2 < A_1$
Bakar ve ark.(2010)	Benzerlik ölçüsü	$S(\mu_d, A_1) = 0.5985$ $S(\mu_d, A_2) = 0.4512$ $S(\mu_d, A_2) < S(\mu_d, A_1)$	$A_2 < A_1$
Wang ve ark.(2011)	R_i indeksi	$R_1 = 0.9132$ $R_2 = 0.7499$ $R_2 < R_1$	$A_2 < A_1$

Tablo 4.8 (Devam): Şekil 4.2'deki Küme 7 için elde edilen sonuçlar

Küme 7			
Yöntemler	Sıralama İndeksi	Sıralama Değeri	Sıralama Sonucu
Akyar ve ark.(2012)	*Rank* indeksi	$Rank(A_1) = (0.4775, 0.7534, 0.5)$ $Rank(A_2) = (0.3758, 0.7534, 0.6)$ $Rank(A_2) < Rank(A_1)$	$A_2 < A_1$
Akyar ve ark. [16]	*Skor* indeksi	$Skor(A_1) = 0.5683$ $Skor(A_2) = 0.4838$ $Skor(A_2) < Skor(A_1)$	$A_2 < A_1$

Tablo 4.9: Şekil 4.2'deki Küme 8 için elde edilen sonuçlar

Küme 8			
Yöntemler	Sıralama İndeksi	Sıralama Değeri	Sıralama Sonucu
Yager(1980)	$\bar{x}_A$ değeri	$\bar{x}_{A_1} = 0.44$ $\bar{x}_{A_2} = 0.5333$ $\bar{x}_{A_3} = 0.525$ $\bar{x}_{A_1} < \bar{x}_{A_3} < \bar{x}_{A_2}$	$A_1 < A_3 < A_2$
Murakami ve ark.(1983)	$\bar{x}_A$ veya $\bar{y}_A$ değeri	$\bar{x}_{A_1} = 0.44$ $\bar{x}_{A_2} = 0.5333$ $\bar{x}_{A_3} = 0.525$ $\bar{x}_{A_1} < \bar{x}_{A_3} < \bar{x}_{A_2}$	$A_1 < A_3 < A_2$
Cheng(1998)	Uzaklık	$R(A_1) = 0.6800$ $R(A_2) = 0.7255$ $R(A_3) = 0.7462$ $R(A_1) < R(A_2) < R(A_3)$	$A_1 < A_2 < A_3$
Chu ve Tsao(2002)	Alan	$S(A_1) = 0.2281$ $S(A_2) = 0.2683$ $S(A_3) = 0.2784$ $S(A_1) < S(A_2) < S(A_3)$	$A_1 < A_2 < A_3$
Chen ve Chen(2003)	Standard sapmaya bağlı	$Rank(A_1) = 1.2892$ $Rank(A_2) = 1.4233$ $Rank(A_3) = 1.3930$ $Rank(A_1) < Rank(A_3) < Rank(A_2)$	$A_1 < A_3 < A_2$
Yong ve Qi(2005)	İndeks katsayısı	$IC_{A_1} = 0.6905$ $IC_{A_2} = 0.7223$ $IC_{A_3} = 0.7210$ $IC_{A_1} < IC_{A_3} < IC_{A_2}$	$A_1 < A_3 < A_2$
Liang ve ark.(2006)	Uzaklık ve RV indeksi	$RV(A_1) = 0.5380$ $RV(A_2) = 0.4386$ $RV(A_3) = 0.4682$ $RV(A_1) > RV(A_3) > RV(A_2)$	$A_1 < A_3 < A_2$
Chen ve Chen(2007)	Score indeksi	$Skor(A_1) = 0.3719$ $Skor(A_2) = 0.4155$ $Skor(A_2) = 0.3979$ $Skor(A_1) < Skor(A_3) < Skor(A_2)$	$A_1 < A_3 < A_2$
Wang ve Lee(2008)	$\bar{x}_A$ veya $\bar{y}_A$ değeri	$\bar{x}_{A_1} = 0.44$ $\bar{x}_{A_2} = 0.5333$ $\bar{x}_{A_3} = 0.525$ $\bar{x}_{A_1} < \bar{x}_{A_3} < \bar{x}_{A_2}$	$A_1 < A_3 < A_2$
Xu ve Wei(2010)	H ölçüsü	$H(A_1) = 0.2032$ $H(A_2) = 0.3655$ $H(A_3) = 0.3839$ $H(A_1) < H(A_2) < H(A_3)$	$A_1 < A_2 < A_3$

Tablo 4.9 (Devam): Şekil 4.2'deki Küme 8 için elde edilen sonuçlar

Küme 8			
Yöntemler	Sıralama İndeksi	Sıralama Değeri	Sıralama Sonucu
Bakar ve ark.(2010)	Benzerlik ölçüsü	$S(\mu_d, A_1) = 0.3832$ $S(\mu_d, A_2) = 0.5327$ $S(\mu_d, A_1) < S(\mu_d, A_2)$ $S(\mu_d, A_2) = 0.4838$ $S(\mu_d, A_3) = 0.5292$ $S(\mu_d, A_2) < S(\mu_d, A_3)$ $S(\mu_d, A_1) < S(\mu_d, A_2) < S(\mu_d, A_3)$	$A_1 < A_2 < A_3$
Wang ve ark.(2011)	R_i indeksi	$R_1 = 0.5555$ $R_2 = 0.9831$ $R_3 = 0.9262$ $R_1 < R_3 < R_2$	$A_1 < A_3 < A_2$
Akyar ve ark.(2012)	*Rank* indeksi	$Rank(A_1) = -$ $Rank(A_2) = (0.1503, 0.7519, 0.5)$ $Rank(A_3) = -$	-
Akyar ve ark. [16]	*Skor* indeksi	$Skor(A_1) = 0.4012$ $Skor(A_2) = 0.5062$ $Skor(A_3) = 0.4948$ $Skor(A_1) < Skor(A_3) < Skor(A_2)$	$A_1 < A_3 < A_2$

Tablo 4.10: Şekil 4.2'deki Küme 9 için elde edilen sonuçlar

Küme 9			
Yöntemler	Sıralama İndeksi	Sıralama Değeri	Sıralama Sonucu
Yager(1980)	$\bar{x}_A$ değeri	$\bar{x}_{A_1} = -2.5$ $\bar{x}_{A_2} = -2.33$ $\bar{x}_{A_3} = -2.0$ $\bar{x}_{A_1} < \bar{x}_{A_2} < \bar{x}_{A_3}$	$A_1 < A_2 < A_3$
Murakami ve ark.(1983)	$\bar{x}_A$ veya $\bar{y}_A$ değeri	$\bar{x}_{A_1} = -2.5$ $\bar{x}_{A_2} = -2.33$ $\bar{x}_{A_3} = -2.0$ $\bar{x}_{A_1} < \bar{x}_{A_2} < \bar{x}_{A_3}$	$A_1 < A_2 < A_3$
Cheng(1998)	Uzaklık	$R(A_1) = 2.5495$ $R(A_2) = 2.3792$ $R(A_3) = 2.0616$ $R(A_3) < R(A_2) < R(A_1)$	$A_3 < A_2 < A_1$
Chu ve Tsao(2002)	Alan	$S(A_1) = -1.25$ $S(A_2) = -1.1219$ $S(A_3) = -1$ $S(A_1) < S(A_2) < S(A_3)$	$A_1 < A_2 < A_3$
Chen ve Chen(2003)	Standard sapmaya bağlı	$Rank(A_1) = -1.9703$ $Rank(A_2) = -1.7326$ $Rank(A_3) = -1.2818$ $Rank(A_1) < Rank(A_2) < Rank(A_3)$	$A_1 < A_2 < A_3$
Yong ve Qi(2005)	İndeks katsayısı	$IC_{A_1} = 0.2364$ $IC_{A_2} = 0.2572$ $IC_{A_3} = 0.2954$ $IC_{A_1} < IC_{A_2} < IC_{A_3}$	$A_1 < A_2 < A_3$
Liang ve ark.(2006)	Uzaklık ve RV indeksi	$RV(A_1) = 0.2770$ $RV(A_2) = 0.2828$ $RV(A_3) = 0.2324$ $RV(A_2) > RV(A_1) > RV(A_3)$	$A_2 < A_1 < A_3$
Chen ve Chen(2007)	Score indeksi	$Skor(A_1) = 0.3745$ $Skor(A_2) = 0.3973$ $Skor(A_2) = 0.4496$ $Skor(A_1) < Skor(A_2) < Skor(A_3)$	$A_1 < A_2 < A_3$
Wang ve Lee(2008)	$\bar{x}_A$ veya $\bar{y}_A$ değeri	$\bar{x}_{A_1} = -2.5$ $\bar{x}_{A_2} = -2.33$ $\bar{x}_{A_3} = -2.0$ $\bar{x}_{A_1} < \bar{x}_{A_2} < \bar{x}_{A_3}$	$A_1 < A_2 < A_3$
Xu ve Wei(2010)	H ölçüsü	$H(A_1) = -13.8541$ $H(A_2) = -10.3332$ $H(A_3) = -7.5$ $H(A_1) < H(A_2) < H(A_3)$	$A_1 < A_2 < A_3$

Tablo 4.10 (Devam): Şekil 4.2'deki Küme 9 için elde edilen sonuçlar

Küme 9			
Yöntemler	Sıralama İndeksi	Sıralama Değeri	Sıralama Sonucu
Bakar ve ark.(2010)	Benzerlik ölçüsü	$S(\mu_d, A_1) = -0.5604$ $S(\mu_d, A_2) = -0.5191$ $S(\mu_d, A_1) < S(A_2)$ $S(\mu_d, A_2) = -0.5162$ $S(\mu_d, A_3) = -0.493$ $S(\mu_d, A_2) < S(A_3)$ $S(\mu_d, A_1) < S(\mu_d, A_2) < S(\mu_d, A_3)$	$A_1 < A_2 < A_3$
Wang ve ark.(2011)	R_i indeksi	$R_1 = -1.9300$ $R_2 = -1.9997$ $R_3 = -1.3606$ $R_2 < R_1 < R_3$	$A_2 < A_1 < A_3$
Akyar ve ark.(2012)	*Rank* indeksi	$Rank(A_1) = -$ $Rank(A_2) = (-2.3145, 0.5489, -2)$ $Rank(A_3) = (-2.2071, 0.5858, -2)$	$-$
Akyar ve ark. [16]	*Skor* indeksi	$Skor(A_1) = -2.4837$ $Skor(A_2) = -2.3763$ $Skor(A_3) = -1.9714$ $Skor(A_1) < Skor(A_2) < Skor(A_3)$	$A_1 < A_2 < A_3$

Tablo 4.11: Şekil 4.2'deki Küme 10 için elde edilen sonuçlar

Küme 10			
Yöntemler	Sıralama İndeksi	Sıralama Değeri	Sıralama Sonucu
Yager(1980)	$\bar{x}_A$ değeri	$\bar{x}_{A_1} = -0.67$ $\bar{x}_{A_2} = -0.33$ $\bar{x}_{A_3} = -0.33$ $\bar{x}_{A_1} < \bar{x}_{A_2} = \bar{x}_{A_3}$	$A_1 < A_2 \approx A_3$
Murakami ve ark.(1983)	$\bar{x}_A$ veya $\bar{y}_A$ değeri	$\bar{x}_{A_1} = -0.67$ $\bar{x}_{A_2} = -0.33$ $\bar{x}_{A_3} = -0.33$ $\bar{x}_{A_1} < \bar{x}_{A_2} = \bar{x}_{A_3}$	$A_1 < A_2 \approx A_3$
Cheng(1998)	Uzaklık	$R(A_1) = 0.8679$ $R(A_2) = 0.4714$ $R(A_3) = 0.4714$ $R(A_1) > R(A_2) = R(A_3)$	$A_2 \approx A_3 < A_1$
Chu ve Tsao(2002)	Alan	$S(A_1) = -0.3703$ $S(A_2) = -0.1111$ $S(A_3) = -0.1111$ $S(A_1) < S(A_2) = S(A_3)$	$A_1 < A_2 \approx A_3$
Chen ve Chen(2003)	Standard sapmaya bağlı	$Rank(A_1) = -0.0662$ $Rank(A_2) = 0.1001$ $Rank(A_3) = 0.2670$ $Rank(A_1) < Rank(A_2) < Rank(A_3)$	$A_1 < A_2 < A_3$
Yong ve Qi(2005)	İndeks katsayısı	$IC_{A_1} = 0.4274$ $IC_{A_2} = 0.4620$ $IC_{A_3} = 0.4636$ $IC_{A_1} < IC_{A_2} < IC_{A_3}$	$A_1 < A_2 < A_3$
Liang ve ark.(2006)	Uzaklık ve RV indeksi	$RV(A_1) = 0.8938$ $RV(A_2) = 2.2360$ $RV(A_3) = 1.4142$ $RV(A_1) < RV(A_3) = RV(A_2)$	$A_2 < A_3 < A_1$
Chen ve Chen(2007)	Score indeksi	$Skor(A_1) = 0.3951$ $Skor(A_2) = 0.3386$ $Skor(A_2) = 0.4037$ $Skor(A_2) < Skor(A_1) < Skor(A_3)$	$A_2 < A_1 < A_3$
Wang ve Lee(2008)	$\bar{x}_A$ veya $\bar{y}_A$ değeri	$\bar{x}_{A_1} = -0.6666$ $\bar{x}_{A_2} = -0.3333$ $\bar{x}_{A_3} = -0.3333$ $\bar{x}_{A_1} < \bar{x}_{A_2} = \bar{x}_{A_3}$ $\bar{y}_{A_2} = 0.33$ $\bar{y}_{A_3} = 0.33$ $\bar{y}_{A_2} = \bar{y}_{A_3}$	$A_1 < A_2 \approx A_3$
Xu ve Wei(2010)	H ölçüsü	$H(A_1) = -1.8333$ $H(A_2) = -1.1666$ $H(A_3) = -0.7777$ $H(A_1) < H(A_2) < H(A_3)$	$A_1 < A_2 < A_3$

Tablo 4.11 (Devam): Şekil 4.2'deki Küme 10 için elde edilen sonuçlar

Küme 10			
Yöntemler	Sıralama İndeksi	Sıralama Değeri	Sıralama Sonucu
Bakar ve ark.(2010)	Benzerlik ölçüsü	$S(\mu_d, A_1) = -0.5604$ $S(\mu_d, A_2) = -0.5191$ $S(\mu_d, A_1) < S(\mu_d, A_2)$ $S(\mu_d, A_2) = -0.5162$ $S(\mu_d, A_3) = -0.493$ $S(\mu_d, A_2) < S(\mu_d, A_3)$ $S(\mu_d, A_1) < S(\mu_d, A_2) < S(\mu_d, A_3)$	$A_1 < A_2 < A_3$
Wang ve ark.(2011)	R_i indeksi	$R_1 = -0.3958$ $R_2 = -0.0208$ $R_3 = 0.0416$ $R_1 < R_2 < R_3$	$A_1 < A_2 < A_3$
Akyar ve ark.(2012)	*Rank* indeksi	$Rank(A_1) = (-1.1364, 0.5489, -1)$ $Rank(A_2) = (-0.2772, 0.5192, 0)$ $Rank(A_3) = (-0.3146, 0.5489, 0)$ $Rank(A_1) < Rank(A_3) < Rank(A_2)$	$A_1 < A_3 < A_2$
Akyar ve ark. [16]	*Skor* indeksi	$Skor(A_1) = -0.7576$ $Skor(A_2) = 0.1485$ $Skor(A_3) = -0.3786$ $Skor(A_1) < Skor(A_3) < Skor(A_2)$	$A_1 < A_3 < A_2$

5 SONUÇLAR, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, fuzzy sayıların sıralanma uygulamalarında kullanılan en genel teknik olan ağırlık merkezi kavramına bağlı sıralama yöntemleri incelenmiştir. Her yaklaşım için ağırlık merkezi formülleri ve sıralama indeksleri verilmiş ve bunlar karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırmalar sonucu, Chen ve Chen [7] ve Chen ve Chen [10]'de ve Chu ve Tsao [6] ve Wang ve Lee [11]'de olduğu gibi bazı yaklaşımlarda ağırlık merkezi formüllerinin aynı olduğu görülmüştür. Bazı yaklaşımlarda da, Cheng [5], Chu ve Tsao [6], Liang ve ark. [9]'da olduğu gibi, aynı $\bar{x}$ formülüne sahip oldukları görülmüştür.

Akyar ve ark.'nın [15] yönteminde ise üçgenin iç teğet çemberinin merkezine ve yarıçapına bağlı bir sıralama indeksi önerilmiş ve bu sıralama indeksine sözlük sıralama uygulayarak fuzzy sayılar sıralanmıştır. Akyar ve ark. bu yöntemi daha da geliştirerek genelleştirilmiş yamuk fuzzy sayıları sıralamak için de yeni bir yöntem vermişlerdir [16].

İncelenen her yöntemin geçerliliği farklı olup, bazı yöntemler sadece fuzzy sayıları sıralayabilirken bazı yöntemler fuzzy sayı ve genelleştirilmiş fuzzy sayılar için geçerli olmaktadır. Hemen hemen hiç bir yöntem için her tür fuzzy sayının sıralamasını tatmin edici şekilde yaptığı ve fuzzy sayıların farklı örnekleri için ayırt edici sıralama sonuçları verdiği söylenemez. Benzer şekilde, hemen hemen tüm yöntemler sadece terslenebilir fuzzy sayılara uygulanabilmektedir ve bu yöntemlerde ağırlık merkezinin $\bar{y}$ değerinin hesaplamada üyelik fonksiyonunun ters fonksiyonları kullanılmaktadır.

Her yöntem bazı avantajların yanısıra dezavantajlara da sahip olduğundan, ağırlık merkezi kavramına bağlı sıralama yöntemlerinde tek bir yöntemin diğer yöntemlerden üstün olduğu söylenemez.

Ağırlık merkezine bağlı mevcut sıralama yöntemlerinin eksikliklerinin üstesinden gelmek için, bundan sonraki çalışmalarda, mevcut yöntemler geliştirilebilir ve yeni yöntemler sunulabilir. Geçerli ve mantıklı en iyi sıralama yöntemini bulma konusu hala bitmeyen bir araştırmadır.

Kaynaklar

[1] Zadeh, L. A., *"Fuzzy Sets". Information and Control*, Springer, Germany, 1965.

[2] Jain, R., "Decision-making in the presence of fuzzy variables", *IEEE Trans. Syst. Man Cybern.*, **10**(6) 698-703, 1976.

[3] Yager, R. R., "On a general class of fuzzy connectives", *Fuzzy Sets and Systems*, **4**(6),235-242,1980.

[4] Murakami, S., Maeda, S. ve Imamura, S., "Fuzzy decision analysis on the development of centralized regional energy control; system",1983.

[5] Cheng, C. H., "A new approach for ranking fuzzy numbers by distance method", *Fuzzy Sets and Systems*, 95, 307-317, 1998.

[6] Chu, T. C. ve Tsao, C. T., "Ranking fuzzy numbers with an area between the centroid point and original point", *Computers and Mathematics with Applications*, 43, 11-117, 2002.

[7] Chen, S. J. ve Chen, S. M., "A new method for handling multicriteria fuzzy decision making problems using FN-IOWA operators", *Cybernatics and System*, 34, 109-137, 2003.

[8] Yong, D. ve Qi, L., "A topsis-based centroid-indeks ranking method of fuzzy numbers and its application in decision-making", *Cybernatics and Systems: An International Journal*, **36**(6), 581-595, 2005.

[9] Liang, C., Wu, J. ve Zhang, J., "Ranking indices and rules for fuzzy numbers based on gravity center point", *6th World Congress on Intelligent Control and Automation*, Dalian, China, 2006.

[10] Chen, S. J. ve Chen, S. M., "Fuzzy risk analysis based on the ranking of generalized trapezoidal fuzzy numbers", *Applied Intelligence*, **26**(1), 1-11, 2007.

[11] Wang, Y. J. ve Lee, H. S., "The revised method of ranking fuzzy numbers with an area between the centroid and original points", *Computers and Mathematics with Applications*, 55, 2033-2042, 2008.

[12] Xu, C. L. ve Wei, L. L., "An improved method for ranking fuzzy numbers based on the centroids", *Seventh International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery*, 442-446, 2010.

[13] Bakar, A. S. A., Mohamad, D. ve Sulaiman, N. H. , "Ranking fuzzy numbers using similarity measure with centroid", *International Conference on Science and Social Research*, Kuala Lumpur, Malaysia, 2010.

[14] Wang, Z., Li, J. ve Liu, F., "A new approach for ranking fuzzy number by centroid indeks", *Eight International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery*, 2011.

[15] Akyar, E., Akyar, H. ve Düzce, S. A., "A New Method for Ranking Triangular Fuzzy Numbers", *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, **20**(5), 729-740, 2012.

[16] Akyar, E., Akyar, H. ve Düzce, S. A., "Fuzzy Risk Analysis Based on a Geometric Ranking Method for Generalized Trapezoidal Fuzzy Numbers", *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, *kabuledildi*.

[17] Wang, Y. M., Yang, J. B., Xu, D. L. ve Chin, K. S.," On the centroids of fuzzy numbers", *Fuzzy Sets and Systems*, 157, 919-926, 2006.

[18] Shieh, B. S., "An approach to centroids of fuzzy numbers", *International Journal of Fuzzy Systems*, 9, 51-54, 2007.

[19] Ramli, N. ve Mohamad, D., "A comparative analysis of centroid methods in ranking fuzzy numbers", *European Journal of Scientific Research*, **28**(3), 492-501, 2009.

[20] Bector, C. R. ve Chandra, S., *Fuzzy Mathematical Programming and Fuzzy Matrix Games,* Springer, Germany, 2005.

[21] Kwang, H. Lee, *First Course on Fuzzy Theory and Applications,* Springer, Germany, 2005.

[22] Lee, E. S. ve Li, R. L., "Comparison of fuzzy numbers based on the probability measure of fuzzy events", *Comput. Math. Appl.*, 15, 887-896, 1988.

[23] Baragar, A., *A Survey of Classical and Modern Geometries: with computer activities* Prentice–Hall, New Jersey, 2001.

[24] Ungar, A. A., *Barycentric Calculus in Euclidean and Hyperbolic Geometry: A Comparative Introduction* World Scientific Publishing Company, Singapore, 2010.

[25] Nelsen, R. B., "Heron's formula via proofs without words", *College Mathematics Journal*, 290–292, 2011.

[26] Bourbaki, N., *Theory of sets*, Springer, Berlin, 2004.