YİNELEMELİ FONKSİYON SİSTEMİ ANLAMINDA KENDİNE BENZER GRUPLAR

Mustafa SALTAN

Doktora Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Mart 2012

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Mustafa SALTAN'ın **"Yinelemeli Fonksiyon Sistemi Anlamında Kendine Benzer Gruplar"** başlıklı **Matematik** Anabilim Dalındaki **Doktora** tezi 23.02.2012 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	Adı - Soyadı	**İmza**
Üye (Tez Danışmanı)	**Doç.Dr. Bünyamin DEMİR**	....
Üye	**Prof.Dr. Şahin KOÇAK**	....
Üye	**Doç.Dr. N. Kemal ERDOĞAN**	....
Üye	**Prof.Dr. Mahmut KOÇAK**	....
Üye	**Doç.Dr. Ayşe BAYAR**	....

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof.Dr. Rıdvan SAY
Enstitü Müdürü

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

ÖZET

Doktora Tezi

YİNELEMELİ FONKSİYON SİSTEMİ ANLAMINDA KENDİNE BENZER GRUPLAR

Mustafa SALTAN

Anadolu Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Bünyamin DEMİR

2012, 89 Sayfa

Klasik fraktallerin önemli özelliklerinden biri kendine benzerliktir. Köklü ağacın otomorfizm grubunun kendine benzerliği S. Sidki tarafından tanımlanmaktadır (Tanım 3.1.3). Bu anlamdaki grupların en iyi bilinen örnekleri Adding machine, Grigorchuk ve sonsuz dihedral gruptur. Diğer taraftan, kompakt bir topolojik grubun yinelemeli fonksiyon sistemi (YFS) anlamında kendine benzerlik kavramı Ş. Koçak tarafından verilmektedir (Tanım 4.1.1).

Bu çalışmada, öncelikle Tanım 3.1.3 anlamında kendine benzer grup yapısı incelenmiştir. Ayrıca, köklü ağacın otomorfizm grubu üzerinde tanımlanan doğal metriğe göre büzülme dönüşümlerinin bir ailesini verdikten sonra atraktörü, adding machine grubunun kapanışı olan bir yinelemeli fonksiyon sistemi verilmiştir. Böylece, Sidki anlamında en temel kendine benzer grup örneklerden biri olan adding machine grubunun kapanışının YFS anlamında da kendine benzer grup olduğu gösterilmiştir. Daha sonra, bir kompakt topolojik grubun YFS anlamında kendine benzerliği ayrıntılı olarak incelenmiş ve profinite gruplar arasındaki ilişki verilmiştir. Son bölümde, $p-$sel sayılar grubunun bazı alt gruplarının YFS anlamında kendine benzer grup olduğu gösterildikten sonra bu anlamda farklı gruplar inşa edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Otomorfizm Grubu, Kendine Benzer Grup, Yinelemeli Fonksiyon Sistemi, Cantor Kümesi, Fraktal, Profinite Grup

ABSTRACT

PhD Thesis

SELF-SIMILAR GROUPS IN THE SENSE OF ITERATED FUNCTION SYSTEM

Mustafa SALTAN

Anadolu University

Graduate School of Sciences

Mathematics Program

Supervisor: Assoc.Prof.Dr. Bünyamin DEMİR

2012, 89 Pages

Self-similarity is the most important property of the classical fractals. Self-similarity of the automorphism group of a rooted tree is defined by S. Sidki (Definition 3.1.3). The well-known examples of this group are Adding machine, Grigorchuk and infinite dihedral group. On the other hand, the notion of self-similarity in the sense of iterated function system (IFS) for compact topological groups is given by Ş. Koçak (Definition 4.1.1).

In this work, first we investigate self-similar group structure in the sense of Definition 3.1.3. We equip the automorphism group of a rooted tree with a natural metric and define a family of contractions on $Aut(X^*)$. Moreover, we construct an iterated function system (IFS) whose attractor is the closure of the adding machine group on $Aut(X^*)$. Then we particulary investigate self-similarity of compact topological groups in the sense of IFS. We also look into relations between profinite groups and self-similar groups in the sense of IFS. Finally, we show that some subgroups of the group of $p-$adic numbers $\mathbb{Q}_p$ are self-similar in the sense of IFS and build some examples.

Keywords: Automorphism Group, Self-similar Group, Iterated Function System, Cantor Set, Fractal, Profinite Group

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında her türlü desteğini benden esirgemeyen değerli danışman hocam Doç. Dr. Bünyamin Demir ve değerli hocam Prof. Dr. Şahin Koçak'a, her zaman yanımda olan sevgili eşime ve aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

Doktora çalışmalarım boyunca bana verdiği maddi desteklerinden dolayı TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığı'na özel olarak teşekkür ederim.

Mustafa Saltan
Şubat 2012

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

X^*	: Sonlu kelimelerin kümesi
X^ω	: Sonsuz kelimelerin kümesi
$Aut(X^*)$	: X^* ağacının otomorfizm gurubu
$St_G(n)$	: X^* ağacına etki eden G grubunun n. seviyesi sabitleyicisi
$S(X)$	: X in simetrik grubu
$H * x$	: H nin x tarafından belirlenen sağ eşkümesi
$[G : H]$	: H alt grubunun G deki indeksi
G/N	: G grubunun N normal alt grubuna bölüm grubu
$\leq_o$, $\leq_c$	: Açık alt grup, kapalı alt grup
$\trianglelefteq_o$, $\trianglelefteq_c$	: Açık normal alt grup, kapalı normal alt grup
$G \times H$	: G ve H gruplarının çarpım grubu
$G^X \rtimes H$	: G ve H gruplarının yarı-direkt çarpımı (semi-direct product)
$G \wr H$	: G ve H gruplarının büküm çarpımı (wreath product)
$g\|_v$	: g otomorfiziminin köklü ağacın v köşesine kısıtlanmışı
$\mathbb{Z}_p$	: $p-$sel tamsayılar grubu
$\mathbb{Q}_p$	: $p-$sel sayılar grubu
C	: Cantor kümesi
A	: Adding machine grubu
$\overline{A}$	: Adding machine grubunun kapanışı
YFS	: Yinelemeli fonksiyon sistemi
$\varprojlim_{i\in I} X_i$	: X_i topolojik gruplarının ters (inverse) limiti

1 GİRİŞ

1.1 Homomorfizm, Eşküme ve Normal Alt Grup Kavramları

Öncelikle bu tezde geçen bazı temel cebirsel kavramlar özetlenmektedir.

Tanım 1.1.1. *G boş olmayan bir küme olmak üzere,*

$$\begin{array}{rccc} * : & G \times G & \to & G \\ & (g_1, g_2) & \mapsto & g_1 * g_2 \end{array}$$

olacak şekilde tanımlı bir $*$ fonksiyonuna G üzerinde bir ikili işlem denir. G kümesi üzerinde tanımlı $*$ ikili işlemi;

(G1) [Birleşme] Her $g_1, g_2, g_3 \in G$ için $g_1 * (g_2 * g_3) = (g_1 * g_2) * g_3$,

(G2) [Birim eleman] Her $g \in G$ için $g * e = e * g = g$ olacak şekilde $e \in G$ vardır,

(G3) [Ters eleman] Her $g \in G$ için $g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$ olacak şekilde $g^{-1} \in G$ vardır,

özelliklerine sahip ise $(G, *)$ ikilisine ya da kısaca G ye bir gruptur denir. Ek olarak, her $g_1, g_2 \in G$ için $g_1 * g_2 = g_2 * g_1$ ise G grubuna değişmelidir denir. $\emptyset \neq H \subseteq G$ olmak üzere $(H, *)$ bir grup ise H grubuna, G nin bir alt grubu denir ve $H \leq G$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.2. *$(G, *)$ bir grup, $H \leq G$ ve $x \in G$ olsun.*

$$H * x = \{h * x \mid h \in H\} \quad ve \quad x * H = \{x * h \mid h \in H\}$$

olmak üzere $H * x$ kümesine H nin G de x tarafından belirlenen sağ eşkümesi (sağ koset), $x * H$ kümesine ise H nin G de x tarafından belirlenen sol eşkümesi (sol koset) denir.

Önerme 1.1.3. *G bir grup, $H \leq G$ ve $x, y \in G$ olsun. Bu durumda,*

(i) $x \in H * x$ dır. $H * x = H \Leftrightarrow x \in H$ dır.

(ii) $H * x = H * y \Leftrightarrow x \in H * y \Leftrightarrow y \in H * x$.

(iii) $H * x = H * y \Leftrightarrow x * y^{-1} \in H$.

(iv) *Ya* $H * x = H * y$ *ya da* $(H * x) \cap (H * y) = \emptyset$ *dir.*

Yukarıdaki önermeden dolayı H nin tüm sağ eşkümelerinin G grubunun bir parçalanışını verdiği sonucu çıkar. Yani; $G = \bigcup_{x \in G}(H * x)$ ve $H * x \neq H * y$ ise $(H*x) \cap (H*y) = \emptyset$ dir. H nin G deki tüm sağ eşkümelerinden oluşan kümenin kardinalitesine, H nin G içindeki indeksi denir ve $[G : H]$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.4. *$(G, *)$ ve $(G', \circ)$ iki grup ve $f : G \to G'$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in G$ için $f(x * y) = f(x) \circ f(y)$ ise f ye bir grup homomorfizmidir denir. Bire-bir homomorfizme monomorfizm, örten homomorfizme ise epimorfizm adı verilir. Bire-bir ve örten grup homomorfizmine bir izomorfizm denir. Bu durumda G ve G' gruplarına izomorfturlar denir ve $G \cong G'$ ile gösterilir. G den G ye bir homomorfizme G nin bir endomorfizmi ve G den G ye bir izomorfizme G nin bir otomorfizmi denir. G nin tüm otomorfizmleri grubu $Aut(G)$ ile gösterilir.*

Tanım 1.1.5. *$(G, *)$ ve $(G', \circ)$ iki grup olsun. $G \times G' = \{(x, y) \mid x \in G, y \in G'\}$ kümesi üzerinde tanımlı*

$$(x, y)(x', y') = (x * x', y \circ y')$$

işlemine göre $G \times G'$ kümesi bir gruptur ve çarpım grubu adı verilir.

Tanım 1.1.6. *N ve H iki grup ve $\Phi : H \to Aut(N)$ bir grup homomorfizmi olsun. $h \in H$ için $\Phi(h) = \Phi_h$ ile gösterilsin. Bu durumda $G = N \rtimes_\Phi H = N \rtimes H$ ile gösterilen küme,*

$$(n_1, h_1)(n_2, h_2) = (n_1 \Phi_{h_1}(n_2), h_1 h_2)$$

işlemine göre bir gruptur ve bu gruba N ile H nin yarı-direkt (semi-direct) çarpım grubu adı verilir.

Tanım 1.1.7. *G bir grup, $N \leq G$ olsun. Her $g \in G$ için $g * N = N * g$ ya da diğer bir ifadeyle, her $n \in N$ ve $g \in G$ için $gng^{-1} \in N$ ise N grubuna G nin normal alt grubu denir ve $N \trianglelefteq G$ ile gösterilir.*

Tanım 1.1.8. $(G, *)$ *bir grup,* $N \trianglelefteq G$ *olsun.*

$$G/N = \{N * x \mid x \in G\}$$

bölüm kümesi her $x, y \in G$ *için*

$$N * (x * y) = (N * x) * (N * y)$$

işlemine göre bir gruptur. G/N *grubuna* G *nin* N *ye bölüm grubu denir.*

Tanım 1.1.9. $(G, \circ)$ *birimi* e *olan bir grup ve* X *boş olmayan bir küme olsun.*

$$\begin{array}{rcccl} * & : & G \times X & \to & X \\ & & (g, x) & \mapsto & g * x = g(x) = x^g \end{array}$$

fonksiyonu,

i) *Her* $x \in X$ *için* $e * x = x$

ii) *Her* $x \in X$ *ve her* $g_1, g_2 \in G$ *için* $(g_1 \circ g_2) * x = g_1 * (g_2 * x)$

koşulları sağlıyorsa bu fonksiyona G *nin* X *üzerine etkisi denir. Bu durumda* G, X *üzerine soldan etki eder veya* X *bir* $G-$*kümesidir denir. Benzer şekilde sağ etki tanımlanır. Genelde sol etkileri kullanacağız. Grubun* g *elemanının etkisi altında* x *elemanının görüntüsünü* $g(x)$ *veya* x^g *ile belirteceğiz.* $g_1 \circ g_2$, *önce* g_2 *sonra* g_1 *etki eder anlamındadır.*

Tanım 1.1.10. G *grubu bir* X *kümesine etki etsin.* $\forall x, y \in X$ *için* $g * x = y$ *olacak şekilde* $g \in G$ *var ise* X *üzerinde* G *nin etkisi geçişkendir denir. Gelecek bölümde tanımlanan* X^* *ağacının her* X^n *seviyesi için* G *grubunun etkisi geçişken ise seviye geçişkendir adı verilir.*

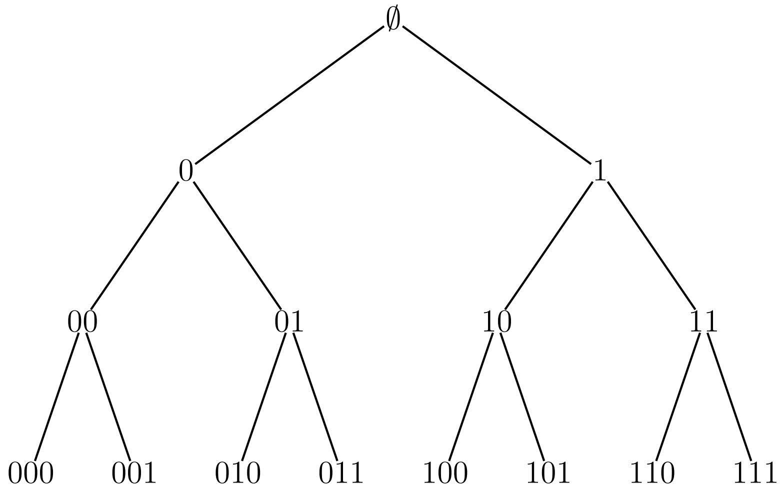
Tanım 1.1.11. X *bir* $G-$*kümesi ise* X *in her elemanını sabit bırakan* G *nin bir* N *alt kümesi* G *nin bir normal alt grubudur. Eğer* $N = \{e\}$ *ise* X *in her elemanını sabit bırakan tek eleman* G *nin birimidir. Bu durumda* G, X *üzerine tamamen (faithfully) etki eder denir.*

1.2 Köklü Bir Ağacın Otomorfizm Grubu

Sonlu bir X kümesi (alfabesi) için, boş kelimeyi içeren X alfabesi üzerindeki bütün sonlu kelimelerin kümesi,

$$X^* = \{x_1x_2\dots x_n \mid x_i \in X, n \geqslant 0\}$$

tarafından belirtilir. $X^0 = \{\emptyset\}$ olmak üzere, $v = x_1x_2...x_n \in X^*$ kelimesinin uzunluğu n dir ve $|v|$ ile gösterilir. $v_1, v_2 \in X^*$ kelimelerin çarpımı doğal olarak v_1v_2 ucuca eklemesi olarak tanımlanır. X^* kümesi sonlu köklü ağacın köşe kümesidir. Bu ağaçta iki köşenin bir kenar tarafından bağlantılı olması için gerek ve yeter şart $v \in X^*$ ve $x \in X$ olmak üzere bu iki köşenin v, vx formunda olmasıdır. X^* ağacının kökü $\emptyset$ ve n. seviyesi X^n ile gösterilir.



Şekil 1.1. İkili köklü ağaçın ilk üç seviyesi

Sonlu X alfabesi için X^* ağacının sınırı, bütün sonsuz kelimelerin kümesi olan

$$X^\omega = \{x_1x_2\dots \mid x_i \in X\}$$

kümesidir.

Kökü ve köşelerin bağlantılığını koruyan $f : X^* \to X^*$ dönüşümüne X^* ağacının endomorfizmi denir. Yani; $v, vx \in X^*$ herhangi iki komşu köşe ise $f(v), f(vx) \in X^*$ köşeleri de komşudur. Bu durumda $f(v) = w$, $f(vx) = wy$ olacak şekilde $y \in X$ ve $w \in X^*$ vardır. Bire-bir ve örten endomorfizme otomorfizm denir. X^* köklü ağacının bütün otomorfizmlerinin grubu $Aut(X^*)$ ile ifade edelir.

$g : X^* \to X^*$, X^* köklü ağacının bir endomorfizmi olsun. v, X^* ağacının bir köşesi olmak üzere vX^* ve $g(v)X^*$ alt ağaçlarını alalım. Burada vX^* kökü v olan ağaçtır ve köşelerinin kümesi v ile başlayan kelimelerdir. Böylece $g : vX^* \to g(v)X^*$ dönüşümü köklü ağaçların bir morfizmidir.

$$\begin{aligned} vX^* &\to X^* \\ vw &\mapsto w \end{aligned}$$

dönüşümü bir ağaç izomorfizmi olduğundan vX^* alt ağacı X^* ağacına doğal olarak izomorfiktir. Benzer şekilde $g(v)X^*$ alt ağacı X^* ağacına doğal olarak izomorfiktir. Böylece vX^* ve $g(v)X^*$ alt ağaçlarını X^* ağacı ile özdeşleştirirsek $g|_v : X^* \to X^*$ endomorfizmini elde ederiz.

$v \in X^*$ olmak üzere $g : X^* \to X^*$, X^* köklü ağacının bir endomorfizmi olsun. $g|_v : X^* \to X^*$ endomorfizmi,

$$g(vw) = g(v)g|_v(w)$$

koşulu ile tek türlü bellidir. $g|_v$ endomorfizmi, v de g nin kısıtlanmışı olarak adlandırılır. Bu kısıtlama aşağdaki özelliklere sahiptir:

$$\begin{aligned} g|_{v_1v_2} &= (g|_{v_1})|_{v_2} \\ (g_1g_2)|_v &= g_1|_{g_2(v)}g_2|_v. \end{aligned}$$

$G \leq Aut(X^*)$, X^* köklü ağacının bir otomorfizm grubu olsun. $v \in X^*$ köşe sabitleyicisi (stabilizer),

$$G_v = \{g \in G \mid g(v) = v\}$$

kümesidir. n. seviye sabitleyicisi,

$$St_G(n) = \bigcap_{v \in X^n} G_v$$

alt grubudur. Ayrıca $St_G(n)$, G nin sonlu indeksli normal alt grubudur ve $\bigcap_{n\geq 1} St_G(n) = \{1\}$ dir.

Köklü ağaç üzerindeki otomorfizimleri tanımlamak için farklı diller geliştirilmiştir. Bunlardan birisi de permütasyonel büküm çarpımlar (wreath products) dır. G keyfi bir grup ve H, X kümesi üzerine permütasyonlar ile etki eden bir grup olsun. G ile H nin büküm çarpımı $G^X \rtimes H$ yarı-direkt (semi-direct) çarpımıdır ve $G \wr H$ ile gösterilir. $h \in H$ ve $g \in G^X$ olmak üzere $G \wr H$ nin bir elemanı gh formundadır. Eğer $X = \{x_1, x_2, ..., x_d\}$ ise $g_i \in G$, g nin x_i ile uyumlu kordinatı olmak üzere $g = (g_1, g_2, ..., g_d)$ olarak yazılır. $g_i, f_i \in G$ ve $\alpha, \beta \in H$ olmak üzere $(g_1, g_2, ..., g_d)\alpha, (f_1, f_2, ..., f_d)\beta \in G \wr H$ elemanlarının çarpımı,

$$(g_1, g_2, ..., g_d)\alpha(f_1, f_2, ..., f_d)\beta = (g_1 f_{1^\alpha}, g_2 f_{2^\alpha}, ..., g_d f_{d^\alpha})\alpha\beta$$

ile verilir. Burada i^α, α nın etkisi altında i nin resmidir.

Önerme 1.2.1 ([11]). *X in bütün permütasyonlarının simetrik grubu $S(X)$ tarafından belirtilsin ve $X = \{x_1, x_2, ..., x_d\}$ olarak sabitlensin. α permütasyonu g nin X üzerine etkisine eşit olmak üzere,*

$$\begin{array}{rcl} \varphi \; : \; Aut(X^*) & \rightarrow & Aut(X^*) \wr S(X) \\ g & \mapsto & (g|_{x_1}, g|_{x_2}, ..., g|_{x_d})\alpha \end{array}$$

dönüşümü bir izomorfizimdir.

Böylece her $g \in Aut(X^*)$, $g = (g|_{x_1}, g|_{x_2}, ..., g|_{x_d})\alpha$ olarak yazılabilir ve g otomorfizminin büküm tekrarlaması (wreath recursion) olarak adlandırılır.

1.3 Topolojik Uzaylar

Bu çalışmada geçen topolojik uzayların bazı önemli özellikleri ispatsız olarak aşağıda verilmektedir.

Tanım 1.3.1. *X boştan farklı bir küme olsun. X kümesi üzerinde,*

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu,

d1) Her $x, y \in X$ için $d(x, y) \geq 0$ ve $x = y \Leftrightarrow d(x, y) = 0$, *d2) Her $x, y \in X$ için $d(x,y) = d(y,x)$,*

d3) [Üçgen Eşitsizliği] Her $x, y, z \in X$ için $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$,

özelliklerine sahip ise d ye X üzerinde bir metriktir ve (X,d) ye bir metrik uzaydır denir. Eğer, üçgen eşitsizliği yerine kuvvetli üçgen eşitsizliği, yani;

$$\forall x, y \in X \text{ için } d(x,z) \leq \max\{d(x,y), d(y,z)\}$$

özelliğine sahip ise, (X,d) ye bir ultra metrik uzaydır denir.

Tanım 1.3.2. *(X,τ) bir topolojik uzay ve $\mathfrak{B}$ de açık kümelerin bir kolleksiyonu olsun. τ nun her elemanı $\mathfrak{B}$ ye ait bir takım kümelerin birleşimi olarak yazılabiliyorsa $\mathfrak{B}$ ye τ topolojisinin bir tabanı denir.*

$\mathfrak{T}$, açık kümelerin bir kolleksiyonu olsun. $\mathfrak{T}$ ya ait bütün sonlu sayıdaki bir takım kümelerin arakesiti τ nun bir tabanı ise $\mathfrak{T}$ ya τ nun bir alt tabanı denir.

Tanım 1.3.3. *X bir topolojik uzay ve $x \in X$ olsun. Bir V kümesi x noktasını bulunduran en az bir açık kümeyi kapsıyor ise V kümesine x noktasının bir komşuluğu denir. $\mathfrak{N}(x) = \{V \mid V, x \text{ noktasının bir komşuluğu}\}$ ailesine x in komşuluklar ailesi denir.*

$\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{N}(x)$ olmak üzere, x in herhangi V komşuluğu için $U \subseteq V$ olacak şekilde $U \in \mathfrak{U}$ var ise $\mathfrak{U}$ alt ailesine x in yerel komşuluklar tabanı denir.

Önerme 1.3.4. *X bir topolojik uzay olsun. X in açık alt kümelerinden oluşan bir $\mathfrak{B}$ kolleksiyonunun X topolojik uzayının bir tabanı olabilmesi için gerek ve yeter şart her U açık kümesi ve her $x \in U$ için $x \in B_x \subseteq U$ olacak şekilde bir $B_x \in \mathfrak{B}$ olmasıdır.*

Tanım 1.3.5. *X bir topolojik uzay olsun. $x \neq y$ özelliğindeki her $x, y \in X$ için $x \in U$, $y \in V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde X in U ve V açıkları var ise X uzayına bir Hausdorff uzay denir.*

Tanım 1.3.6. *(X,d) bir metrik uzay ve (x_n), X de bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n, m \geq \mathbb{N}(\varepsilon)$ iken $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde $\mathbb{N}(\varepsilon)$ doğal sayısı var ise (x_n) dizisine, X de bir Cauchy dizisi denir. X de her Cauchy dizisi yakınsak ise X e tam metrik uzay denir.*

Tanım 1.3.7. *X ve Y topolojik uzaylar ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Her $x \in X$ ve $f(x)$ in her V komşuluğu için, x in bir U komşuluğu $f(U) \subseteq V$ olacak şekilde var ise f ye süreklidir denir. Denk tanım olarak, Y nin her V açığı için, $f^{-1}(V)$ kümesi X in bir açığı ise f süreklidir denir. Eğer f fonksiyonu bire-bir, örten, sürekli ve tersi de sürekli ise f ye X den Y ye bir homeomorfizm, X ve Y topolojik uzaylarına ise homeomorfturlar denir.*

Tanım 1.3.8. *(X, d_1) ve (Y, d_2) metrik uzaylar olsun. Her $x, y \in X$ için $d_1(x, y) = d_2(f(x), f(y))$ olacak şekilde $f : X \to Y$ dönüşümüne izometri veya uzaklığı koruyan dönüşüm denir. Bir izometri dönüşümü açık olarak bire-birdir. X den Y ye örten bir izometri var ise X ve Y ye izometrik uzaylar denir.*

Tanım 1.3.9. *X bir topolojik uzay olsun. X in her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü var ise X e kompakt topolojik uzay denir. (X, d) bir metrik uzay ise, X de her dizinin X in bir noktasına yakınsayan yakınsak bir alt dizisi var ise X e kompakttır denir.*

Teorem 1.3.10. *$f : X \to Y$ sürekli bir fonksiyon ve X kompakt ise $f(X)$ de kompakttır.*

Teorem 1.3.11. *Hausdorff uzayın kompakt her alt kümesi kapalıdır.*

Teorem 1.3.12. *Kompakt uzayın kapalı her alt kümesi kompakttır.*

Teorem 1.3.13. *$f : X \to Y$ sürekli, birebir ve örten fonksiyon, X kompakt, Y Hausdorff ise f bir homeomorfizmdir.*

Tanım 1.3.14. *X topolojik uzayının açık kümelerinden oluşan hiç bir ayrışımı yoksa X e bağlantılıdır denir. X topolojik uzayının bağlantılı bir alt kümesi başka bir bağlantılı alt kümesinin içinde yer almıyorsa bu alt küme X in bir bağlantılı bileşenidir. X in tek elemanlı kümelerinden başka bağlantılı bileşeni yoksa X e tamamen bağlantısızdır denir.*

Tanım 1.3.15. *J bir indis kümesi olmak üzere her bir $j \in J$ için X_j boş olmayan bir küme ve $X = \prod_{j \in J} X_j$ olsun. $i \in J$ için $\pi_i((x_j)_{j \in J}) = x_i$ şeklinde* *tanımlı* $\pi_i : X \to X_i$ *fonksiyonuna i. izdüşüm (projeksiyon) fonksiyonu denir. Açıkça her* $i \in J$ *için* π_i *fonksiyonu örtendir.*

Teorem 1.3.16. *J bir indis kümesi olmak üzere* $(X_\alpha, \tau_\alpha)_{\alpha \in J}$ *topolojik uzayların bir kolleksiyonu ve* $X = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ *olsun. Her* $\alpha \in J$ *için,*

$$\mathfrak{T}_\alpha = \{\pi_\alpha^{-1}(U_{\alpha_i}) \mid U_{\alpha_i} \in \tau_\alpha\}$$

ve

$$\mathfrak{T} = \bigcup_{\alpha \in J} \mathfrak{T}_\alpha$$

olsun. Bu durumda $\mathfrak{T}$ *kolleksiyonu* $X = \prod_{j \in J} X_j$ *kümesi üzerinde bir* τ *topolojisinin alt tabanıdır.*

Yukarıdaki teoremde, $X = \prod_{j \in J} X_j$ kümesi üzerinde alt tabanı $\mathfrak{T}$ olarak verilen bu τ topolojisine çarpım topolojisi denir. Ayrıca, her $i \in J$ için π_i izdüşüm fonksiyonu süreklidir.

Teorem 1.3.17. *I keyfi bir indis kümesi ve* $i \in I$ *olmak üzere* X_i *topolojik uzayların bir kolleksiyonu ve* $X = \prod_{i \in I} X_i$ *olsun.*

a) *Her* X_i *Hausdorff ise* X *de Hausdorftur.*

b) *Her* X_i *tamamen bağlantısız ise* X *de tamamen bağlantısızdır.*

c) *[Tychonoff Teoremi] Her* X_i *kompakt ise* X *de kompakttır.*

1.4 Topolojik Gruplar

$(G, *)$ hem bir grup hem de bir topolojik uzay olsun. Eğer

$$\begin{array}{rccc} *: & G \times G & \to & G \\ & (x, y) & \mapsto & x * y^{-1} \end{array}$$

dönüşümü sürekli ise G ye bir topolojik grup denir.

G bir grup, U ve V, G nin alt kümeleri ve $g \in G$ olsun. $U * g = \{u * g \mid u \in U\}$, $g * U = \{g * u \mid u \in U\}$, $U^{-1} = \{u^{-1} \mid u \in U\}$ ve $U * V = \{u * v \mid u \in U, v \in V\}$ dir. Aşağıdaki yardımcı teoremde, topolojik grupların bazı sonuçları verilmektedir.

Yardımcı Teorem 1.4.1. *$(G,*)$ bir topolojik grup olsun.*

a) *$G\times G\to G$, $(x,y)\mapsto x*y$ dönüşümü süreklidir ve $G\to G$, $x\mapsto x^{-1}$ dönüşümü bir homeomorfizmdir. Her bir $g\in G$ için $G\to G$, $x\mapsto g*x$ ve $x\mapsto x*g$ dönüşümleri birer homeomorfizmdir.*

b) *H, G nin açık (ya da kapalı) alt grubu ise, G de H nin her $H*g$ veya $g*H$ koseti açık (ya da kapalı) dır.*

c) *G nin her açık alt grubu kapalıdır ve sonlu indeksli her kapalı alt grubu açıktır. Eğer G kompakt ise G nin her açık alt grubu sonlu indekslidir.*

d) *H, G nin boş olmayan bir U açık alt kümesini içeren alt grubu ise H, G de açıktır.*

e) *G nin Hausdorff olması için gerek ve yeter şart $\{e\}$ in G nin kapalı alt kümesi olmasıdır ve K, G nin bir normal alt grubu ise G/K nin Hausdorff olması için gerek ve yeter şart K nın G de kapalı olmasıdır. G tamamen bağlantısız ise Hausdorfftur.*

Önerme 1.4.2. *G bir topolojik grup ve $e\in G$ birim eleman olsun. Eğer $\mathfrak{B}_e$ kümesi e nin bir komşuluklar tabanı ise $\mathfrak{B}_a=\{U*a\mid U\in\mathfrak{B}_e\}$ kümesi $a\in G$ nin bir komşuluklar tabanıdır.*

Önerme 1.4.3. *G bir topolojik grup ve $e\in G$ birim eleman olsun. Eğer $\mathfrak{B}_e$ kümesi e nin bir komşuluklar tabanı ise $\mathfrak{B}=\{U*a\mid a\in G, U\in\mathfrak{B}_e\}$ kümesi G nin bir tabanıdır.*

Önerme 1.4.4. *Bir topolojik grubun her alt grubu bir topolojik gruptur.*

Önerme 1.4.5. *G topolojik grubunda H bir alt grup ise $\overline{H}$ da bir alt gruptur. Ayrıca, H bir normal alt grup ise $\overline{H}$ da bir normal alt gruptur.*

Önerme 1.4.6. *$\{G_i\mid i\in I\}$ topolojik grupların bir ailesi ise $G=\prod_{i\in I}G_i$ çarpım uzayı da bir topolojik gruptur.*

Teorem 1.4.7. *Bir G topolojik grubu metriklenebilirdir ancak ve ancak G Hausdorfftur ve $e\in G$ birim elemanının sayılabilir bir komşuluklar tabanı vardır.*

Tanım 1.4.8. *d, $(G,*)$ grubu üzerinde bir metrik olsun. Her $x,y,a \in G$ için*

$$d(x*a, y*a) = d(x,y)$$

ise G üzerinde d metriği sağ değişmez (right-invaryant) metriktir denir. Eğer

$$d(a*x, a*y) = d(x,y)$$

ise G üzerinde d metriği sol değişmez (left-invaryant) metriktir denir.

1.5 Yinelemeli Fonksiyon Sistemi ve Kendine Benzerlik

Fraktalleri inşa etmenin önemli bir yolu yinelemeli fonksiyon sistemleridir. Klasik fraktaller genellikle bir yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörü olarak karşımıza çıkarlar. Bunlara örnek olarak Cantor kümesi, Sierpinski üçgeni ve Koch eğrisi verilebilir ([2], [7] ve [10]). Bu çalışmada geçen yinelemeli fonksiyon sistemi ve kendine benzerlik ile ilgili temel tanım ve teoremler aşağıda özetlenmektedir:

Tanım 1.5.1. *(X,d) bir metrik uzay ve $f : X \to X$ bir fonksiyon olsun. Her $x,y \in X$ için*

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x,y)$$

olacak şekilde $0 \leq k < 1$ özelliğine sahip bir k reel sayısı var ise f fonksiyonuna bir büzülme dönüşümü denir. Bu eşitliği sağlayan k sayısına da f nin büzülme katsayısı denir. Her $x,y \in X$ için

$$d(f(x), f(y)) = kd(x,y)$$

olacak şekilde $0 < k < 1$ özelliğine sahip bir k reel sayısı var ise f fonksiyonuna bir benzerlik dönüşümü denir.

Tanım 1.5.2. *(X,d) metrik uzayı ve $f : X \to X$ fonksiyonu verilsin.*

$$f(x_0) = x_0$$

olacak şekilde bir $x_0 \in X$ noktası var ise, x_0 noktasına f nin sabit noktası denir.

Teorem 1.5.3 (Banach Sabit Nokta Teoremi)**.** *(X, d) bir metrik uzay ve $f : X \to X$ bir büzülme dönüşümü olsun. Eğer (X, d) metrik uzayı tam ise f nin bir tek sabit noktası vardır ve keyfi bir $x \in X$ için,*

$$x, f(x), f^2(x), \ldots, f^n(x), \ldots$$

dizisi bu sabit noktaya yakınsar.

Tanım 1.5.4. *(X, d) bir metrik uzay ve $f : X \to X$ bir büzülme dönüşümü olsun. Bu durumda f süreklidir.*

(X,d) bir tam metrik uzay olmak üzere X in boş kümeden farklı kompakt alt kümelerinin uzayı $\mathcal{H}(X)$ ile gösterilir ve

$$\mathcal{H}(X) = \{S \subseteq X \mid S \neq \emptyset \text{ ve S kompakt}\}$$

şeklinde tanımlanır. $A \in \mathcal{H}(X)$ ve $x \in X$ olsun. A kompakt olduğundan,

$$\{d(x, y) \mid y \in A\} \subseteq \mathbb{R}$$

kümesininin bir en küçük elemanı vardır.

Tanım 1.5.5. *$A, B \in \mathcal{H}(X)$ olsun. $x \in X$ noktasının B kümesine olan uzaklığı,*

$$d(x, B) = \min\{d(x, y) \mid y \in B\}$$

A kümesinin B kümesine olan uzaklığı,

$$d(A, B) = \max\{d(x, B) \mid x \in A\}$$

dır.

Tanım 1.5.6. *$A, B \in \mathcal{H}(X)$ olsun.*

$$d_h(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\}$$

değerine A ve B kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığı denir.

Teorem 1.5.7. *d_h, $\mathcal{H}(X)$ uzayı üzerinde bir metriktir. Bu metriğe Hausdorff metriği denir.*

Teorem 1.5.8. *(X, d) tam metrik uzay ise $(\mathcal{H}(X), d_h)$ metrik uzayı tamdır.*

Tanım 1.5.9 (Yinelemeli Fonksiyon Sistemi)**.** *X tam metrik uzay olmak üzere,*

$$\{f_i : X \to X : i = 0, 1, 2, \ldots, N\}$$

büzülme dönüşümlerinin sonlu kümesine yinelemeli fonksiyon sistemi (YFS) denir.

Teorem 1.5.10. *(X, d) tam metrik uzay ve $\{X, f_i, i = 0, 1, 2, \ldots, N\}$ yinelemeli fonksiyon sistemi olsun. Her $S \in \mathcal{H}(X)$ için,*

$$F(S) = \bigcup_{n=0}^{N} f_n(S)$$

olacak şekilde tanımlı $F : \mathcal{H}(X) \to \mathcal{H}(X)$ fonksiyonu $(\mathcal{H}(X), d_h)$ üzerinde büzülmedir. Onun tek sabit noktası olan $S_0 \in \mathcal{H}(X)$ için,

$$F(S_0) = \bigcup_{n=0}^{N} f_n(S_0) = S_0$$

dır ve her $S \in \mathcal{H}(X)$ için $S_0 = \lim_{n\to\infty} F^n(S)$ dır.

Tanım 1.5.11 (Atraktör)**.** *Teorem 1.5.10 de belirtilen $S_0 \in \mathcal{H}(X)$ sabit noktası, YFS nin atraktörü (çekici) olarak adlandırılır.*

Tanım 1.5.12 (Kendine Benzer Küme)**.** *Bir küme bir YFS nin atraktörü ise kendine benzer küme adını alır.*

Bazı kaynaklarda kendine benzerlik tanımı, büzülme dönüşümleri yerine benzerlik dönüşümleri alınarak verilmektedir ([7]).

1.6 Kod Uzayları ve Bir Noktanın Adresi

A kümesi bir YFS nin atraktörü olsun. A üzerindeki bir noktasının adresi, A da tanımlı ilgili YFS ye göre büzülme dönüşümlerinin bir dizisi tarafından belirtilebilir. YFS nin tamamen bağlantısız, just-touching ve overlapping gibi farklı türleri vardır. Bu adlandırma atraktöre değil, YFS ye yapılır. Sebebi ise atraktörü aynı küme olan birden fazla YFS yazılabilmesidir. Bu bölümün detayları ayrıntılı olarak [2] de incelenmektedir.

Tanım 1.6.1 (Kod Uzayı)**.** $\{1, 2, \ldots, N\}$ *kümesi üzerindeki sonsuz dizilerin kümesi dizi uzayı veya kod uzayı olarak adlandırılır ve* Σ *ile gösterilir. Yani,*

$$\Sigma = \{(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots) \mid \sigma_i \in \{1, 2, \ldots, N\}\}$$

kümesidir.

Tanım 1.6.2. $\{X, w_1, w_2, \ldots, w_N\}$ *bir yinelemeli fonksiyon sistemi olsun. YFS ile ilgili kod uzayı* $\{1, 2, \ldots, N\}$ *kümesi üzerindeki, her* $\sigma, \gamma \in \Sigma$ *için*

$$d_c(\sigma, \gamma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sigma_n - \gamma_n|}{(N+1)^n}$$

metriği ile verilen (Σ, d_c) *kod uzayıdır.*

Ayrıca (Σ, d_c) metrik uzayı kompakttır.

Teorem 1.6.3. (X, d) *tam metrik uzay,* $\{X, w_1, w_2, \ldots, w_N\}$ *bir yinelemeli fonksiyon sistemi ve atraktörü* A *olsun.* (Σ, d_c) *YFS ile ilgili kod uzayı olmak üzere, her* $\sigma \in \Sigma$*,* $n \in N$ *ve* $x \in X$ *için,*

$$\phi(\sigma, n, x) = w_{\sigma_1} \circ w_{\sigma_2} \circ \ldots \circ w_{\sigma_n}(x)$$

olsun. Bu durumda, x *in seçiminden bağımsız,*

$$\phi(\sigma) = \lim_{n \to \infty} \phi(\sigma, n, x)$$

vardır ve A *ya aittir.* $\phi : \Sigma \to A$ *fonksiyonu sürekli ve örtendir.*

Tanım 1.6.4. $\{X, w_1, w_2, \ldots, w_N\}$ *bir yinelemeli fonksiyon sistemi ve ilgili kod uzayı* Σ *olsun. Teorem 1.6.3 de sürekli ve örten olduğu gösterilen* $\phi : \Sigma \to A$ *fonksiyonu verilsin. Bir* $a \in A$ *noktasının adresi*

$$\phi^{-1}(a) = \{\sigma \in \Sigma \mid \phi(\sigma) = a\}$$

kümesinin herhangi bir elemanıdır. Bu küme $a \in A$ *noktasının adres kümesidir. Eğer atraktörünün her noktası bir tek adrese sahip ise YFS ye tamamen bağlantısızdır denir.*

Eğer YFS tamamen bağlantısız değil fakat atraktörü A *metrik uzayında,*

i) $\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, N\}$ *ve* $i \neq j$ *için* $w_i(\mathcal{O}) \cap w_j(\mathcal{O}) = \emptyset$,

ii) $\bigcup_{i=1}^{N} w_i(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{O}$,

olacak şekilde boştan farklı bir açık $\mathcal{O}$ *kümesi içeriyorsa, YFS ye just-touching denir. Atraktörü, yukarıda verilen i) ve ii) koşulunu sağlayan YFS ye açık küme koşulunu sağlar denir.*

Ne just-touching ne de tamamen bağlantısız olan YFS ye overlapping denir.

Şimdi [2] de verilen aşağıdaki teoremleri ayrıntılı olarak ispatları ile vereceğiz. Aşağıda verilen teoremler, YFS anlamında kuvvetli kendine benzer grupların tamamen bağlantısız olmasının ispatında önemli rol üstlenmektedir.

Teorem 1.6.5. $\{X, w_1, w_2, \ldots, w_N\}$ *bir yinelemeli fonksiyon sistemi olsun. YFS tamamen bağlantısız ise her* $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$ *için* w_i *büzülme dönüşümleri bire-birdir.*

Kanıt. Her $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$ için ve her $a_1, a_2 \in A$ için, $w_i(a_1) = w_i(a_2) = a$ olsun. $a_1 \neq a_2$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $\phi(\sigma) = a_1$ ve $\phi(\gamma) = a_2$ olacak şekilde $\sigma \neq \gamma$ adresleri vardır. Bu ise a nın $i\sigma$ ve $i\gamma$ olacak şekilde iki farklı adresinin olması demektir ve YFS nin tamamen bağlantısız olması ile çelişir. Bu durumda varsayımımız hatalıdır ve her $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$ için w_i ler bire-birdir. □

Teorem 1.6.6. $\{X, w_1, w_2, \ldots, w_N\}$ *bir yinelemeli fonksiyon sistemi ve atraktörü* A *olsun. YFS tamamen bağlantısızdır ancak ve ancak her* $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$ *için* w_i *dönüşümleri bire-birdir ve*

$$\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, N\} \text{ ve } i \neq j \text{ için } w_i(A) \cap w_j(A) = \emptyset$$

dir.

Kanıt. YFS tamamen bağlantısız olsun. Bu durumda atraktörü üzerindeki her noktanın bir tek adresi vardır. Bu ise $\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, N\}$ ve $i \neq j$ için $w_i(A) \cap w_j(A) = \emptyset$ olmasını gerektirir. Çünkü en az bir $i, j \in \{1, 2, \ldots, N\}$ ve $i \neq j$ için $x \in w_i(A) \cap w_j(A) \neq \emptyset$ olsaydı, x in iki farklı adresi olmasını gerektirirdi.

Ayrıca, Teorem 1.6.5 gereğince her $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ için w_i dönüşümleri bire-birdir.

$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, N\},\ i \neq j$ için $w_i(A) \cap w_j(A) = \emptyset$ ve her $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ için w_i dönüşümleri bire-bir olsun. YFS nin tamamen bağlantısız olmadığını varsayalım. Bu durumda atraktörü üzerinde bazı noktaların iki farklı adresi vardır. Bu noktaya x diyelim.

i) A ya uygulanan büzülme dönüşümleri ilk sıradan farklı olsun. Yani; $\sigma_1 \neq \gamma_1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} x &= w_{\sigma_1} w_{\sigma_2} \dots (A) \\ x &= w_{\gamma_1} w_{\gamma_2} \dots (A) \end{aligned}$$

olsun. Bu durumda $A_1, A_2 \subseteq A$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} x &= w_{\sigma_1}(A_1) \\ x &= w_{\gamma_1}(A_2) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $w_{\sigma_1}(A_1) \cap w_{\gamma_1}(A_2) \neq \emptyset$ olur. Bu ise $w_{\sigma_1}(A) \cap w_{\gamma_1}(A) \neq \emptyset$ olması demektir ve varsayımımızla çelişir.

ii) A ya uygulanan büzülme dönüşümleri ilk k sıraya kadar aynı olsun. Yani; $\sigma_{k+1} \neq \gamma_{k+1}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} x &= w_{\sigma_1} w_{\sigma_2} \dots w_{\sigma_k} w_{\sigma_{k+1}} \dots (A) \\ x &= w_{\sigma_1} w_{\sigma_2} \dots w_{\sigma_k} w_{\gamma_{k+1}} \dots (A) \end{aligned}$$

olsun. Bu durumda $A_1, A_2 \subseteq A$ ve her $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ için w_i dönüşümleri bire-bir olduğundan,

$$\begin{aligned} w_{\sigma_k}^{-1} \dots w_{\sigma_2}^{-1} w_{\sigma_1}^{-1}(x) &= w_{\sigma_{k+1}} \dots (A) \\ w_{\sigma_k}^{-1} \dots w_{\sigma_2}^{-1} w_{\sigma_1}^{-1}(x) &= w_{\gamma_{k+1}} \dots (A) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $w_{\sigma_{k+1}}(A_1) \cap w_{\gamma_{k+1}}(A_2) \neq \emptyset$ olur. Bu ise $w_{\sigma_{k+1}}(A) \cap w_{\gamma_{k+1}}(A) \neq \emptyset$ olması demektir ve varsayımımızla çelişir.

Böylece YFS tamamen bağlantısızdır. $\square$

Teorem 1.6.7. $\{X, w_1, w_2, \dots, w_N\}$ *bir yinelemeli fonksiyon sistemi ve atraktörü* A *olsun. Her* $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ *için* w_i *dönüşümleri bire-bir olmak üzere,*

$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, N\} \text{ ve } i \neq j \text{ için } w_i(A) \cap w_j(A) = \emptyset$$

ise A tamamen bağlantısızdır bir kümedir.

Kanıt. $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$ ve $i \neq j$ için $w_i(A) \cap w_j(A) = \emptyset$ olsun. Bu durumda Teorem 1.6.6 dan YFS tamamen bağlantısızdır. Yani, YFS ile ilgili kod uzayı Σ olmak üzere $\phi : \Sigma \to A$ dönüşümü bire-birdir. Ayrıca Teoerem 1.6.3 den dolayı $\phi : \Sigma \to A$ sürekli ve örten dönüşümdür. Kompakt metrik uzaylar arası sürekli, bire-bir ve örten dönüşüm bir homeomorfizm olduğundan ve Cantor kümesi ile Σ kod uzayı homeomorf olduğundan A tamamen bağlantısız olmalıdır. □

1.7 Profinite Gruplar

$I = (I, \preceq)$ yönlendirilmiş kısmi sıralı bir indis kümesi olsun. Yani; I kümesi üzerindeki $\preceq$ bağıntısı;

i) $\forall i \in I$ için $i \preceq i$,

ii) $\forall i, j, k \in I$ için $i \preceq j$ ve $j \preceq k$ ise $i \preceq k$,

iii) $\forall i, j \in I$ için $i \preceq j$ ve $j \preceq i$ ise $i = j$,

iv) $i, j \in I$ ise $i, j \preceq k$ olacak şekilde bir $k \in I$ vardır,

özelliklerine sahip olsun. $\{X_i : i \in I\}$ topolojik grupların bir ailesi ve her $i, j \in I$ ve $i \succeq j$ için, $\varphi_{ij} : X_i \to X_j$ sürekli grup homomorfizmleri, her $i, j, k \in I$ ve $i \succeq j \succeq k$ için,

$$\begin{tikzcd}
X_i \arrow[rr, "\varphi_{ik}"] \arrow[dr, "\varphi_{ij}"'] & & X_k \\
& X_j \arrow[ur, "\varphi_{jk}"'] &
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli ($\varphi_{jk}\varphi_{ij} = \varphi_{ik}$) ise, $\{X_i, \varphi_{ij}, I\}$ sistemine bir ters (inverse) sistem denir. φ_{ii}, X_i üzerinde birim dönüşümü olan Id_{X_i} dir.

Y bir topolojik grup, $\{X_i, \varphi_{ij}, I\}$ bir ters sistem ve her $i \in I$ için $\psi_i : Y \to X_i$ sürekli grup homomorfizmleri olsunlar. Her $j \preceq i$ için $\varphi_{ij}\psi_i = \psi_j$ ise ψ_i dönüşümlerine uyumlu dönüşümler denir. Yani; aşağıdaki diyagram değişmelidir.

$$
\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[dl, "\psi_i"'] \arrow[dr, "\psi_j"] & \\
X_i \arrow[rr, "\varphi_{ij}"'] & & X_j
\end{tikzcd}
$$

Aşağıdaki evrensel özelliğe sahip,

$$\varphi_i : X \to X_i \quad (i \in I)$$

uyumlu sürekli grup homomorfizmleri ile birlikte X topolojik grubuna $\{X_i, \varphi_{ij}, I\}$ ters sisteminin bir ters veya projektif limiti denir.

Evrensel özellik: Y bir topolojik grup ve $\psi_i : Y \to X_i \quad (i \in I)$ uyumlu sürekli grup homomorfizmleri ise her $i \in I$ için $\varphi_i \psi = \psi_i$ olacak şekilde bir tek $\psi : Y \to X$ sürekli grup homomorfizmi vardır.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[dr, "\varphi_j"'] & X_i \arrow[d, "\varphi_{ij}"] & Y \arrow[l, "\psi_i"'] \arrow[dl, "\psi_j"] \\
 & X_j &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "\psi_i"'] & X \arrow[d, "\varphi_i"] \\
 & X_i
\end{tikzcd}
$$

$\varphi_i : X \to X_i$ dönüşümüne izdüşüm dönüşümü denir. φ_i izdüşüm dönüşümleri örten olmak zorunda değildir. $\{X_i, I\}$ topolojik uzayların bir kolleksiyonu ise direkt çarpımları çarpım topolojisi tarafından belirlenen $\prod_{i \in I} X_i$ topolojik uzayıdır.

Teorem 1.7.1. *$\{X_i, \varphi_{ij}, I\}$ topolojik grupların bir ters sistemi olsun.*

a) *$\{X_i, \varphi_{ij}, I\}$ ters sisteminin bir ters limiti vardır.*

b) *Bu limit aşağıdaki anlamda tektir. Yani; (X, φ_i) ve (Y, ψ_i), $\{X_i, \varphi_{ij}, I\}$ ters sisteminin iki ters limiti ise, her $i \in I$ için $\psi_i \varphi = \varphi_i$ olacak şekilde bir tek $\psi : X \to Y$ topolojik izomorfizm vardır.*

$\{X_i, \varphi_{ij}, I\}$ topolojik grupların bir ters sistemi ise, ters limiti $\varprojlim_{i\in I} X_i$ ile gösterilir ve

$$X = \varprojlim_{i\in I} X_i = \{(x_i) \in \prod_{i\in I} X_i \mid \varphi_{ij}(x_i) = x_j\}$$

ile ifade edilir.

Teorem 1.7.2. *$\{X_i, \varphi_{ij}, I\}$, Hausdorff topolojik grupların bir ters sistemi ise $\varprojlim_{i\in I} X_i$, $\prod_{i\in I} X_i$ nın kapalı alt grubudur.*

Teorem 1.7.3. *$\{X_i, \varphi_{ij}, I\}$, topolojik grupların bir ters sistemi ve ters limiti $X = \varprojlim_{i\in I} X_i$ olsun.*

i) *Her bir X_i Hausdorff ise X de Hausdorfftur.*

ii) *Her bir X_i tamamen bağlantısız ise X de tamamen bağlantısızdır.*

iii) *Her bir X_i kompakt ve Hausdorff ise X de kompakt ve Hausdorfftur.*

iv) *Her bir X_i boştan farklı kompakt ve Hausdorff uzay ise X de boştan farklıdır.*

Tanım 1.7.4 (Profinite Grup)**.** *Sonlu topolojik grupların ters sisteminin ters limitine topolojik olarak izomorfik olan topolojik gruba profinite grup denir.*

Çeşitli kaynaklarda profinite gruplar için denk tanımlar verilmektedir. [6], [12] ve [16] da verilen bu denk tanımlar ve profinite grubun özellikleri aşağıdaki önermede özetlenmektedir:

Önerme 1.7.5. *G bir profinite grup olsun.*

i) *G; kompakt, Hausdorff ve tamamen bağlantısız topolojik gruptur. Ayrıca, bu özellikler profinite grupları karaktarize eder.*

ii) *G; açık alt grupları birim elemanın komşuluklar tabanı formunda olan kompakt ve Hausdorff topolojik gruptur.*

iii) *G nin her açık alt grubu kapalıdır, sonlu indekslidir ve G nin bir açık normal alt grubunu kapsar.*

iv) *G nin her kapalı ve sonlu indeksli alt grubu açıktır.*

v) $\{H_s\}_{s\in S}$, *G nin açık normal alt gruplarının kümesi ise,* $\bigcap_{s\in S} H_s = \{e\}$ *dir.*

vi) *G nin açık normal alt grupları, birim elemanının komşulukları için bir taban formundadır. Ayrıca, onların ötelenmiş formları G üzerindeki topoloji için taban formundadır.*

vii) $\mathfrak{F}$, $e \in G$ *nin komşuluklar tabanı olacak şekilde G nin açık normal alt gruplarının bir kolleksiyonu olsun. Bu durumda kapsama tarafından* $\mathfrak{F}$ *yi sıralayabiliriz ve* $N' \subseteq N$ *olduğunda,* $G/N \to G/N'$ *bir doğal homomorfizmdir. Böylece*

$$G \cong \varprojlim_{N\in\mathfrak{F}} (G/N)$$

dir.

Aşağıdaki teorem bir profinite grubun hangi durumlarda metriklenebilir olacağını göstermektedir.

Teorem 1.7.6. *Bir G profinite grubunun metriklenebilir olması için gerek ve yeter şart G nin birim elemanının sayılabilir bir komşuluklar tabanı vardır.*

Uyarı 1.7.7. *G profinite grubunun birim elemanının sayılabilir bir komşuluklar tabanı var olması koşulu sayılabilir sayıda açık alt gruba sahiptir ya da sonlu grupların sayılabilir ters sisteminin ters limitidir ifadeleriyle eşdeğerdir.*

Daha açık olarak, G nin metriklenebilir bir profinite grup olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$G = G_0 \geq G_1 \geq \ldots G_i \geq \ldots \quad ve \quad \bigcap_{i=0}^{\infty} G_i = \{e\}$$

olacak şekilde açık normal alt gruplarının sayılabilir bir azalan zinciri vardır ([12], Sonuç 2.6.6).

G metriklenebilir bir profinite grup olsun. Bu durumda Teorem 1.7.6 ve Teorem 1.7.5 (vi) gereğince $\mathfrak{F}$, $e \in G$ nin sayılabilir komşuluklar tabanı olacak şekilde G nin içiçe geçmiş açık normal alt gruplarının bir kolleksiyonu vardır. $I = \{1, 2, \ldots\}$ ve her $i \in I$ için $N_{i+1} \subseteq N_i$ olmak üzere $\mathfrak{F} = \{N_1, N_2, \ldots\}$ olsun. Bu durumda,

$$G \cong \varprojlim_{i\in\mathbb{I}} (G/N_i) \tag{1.7.7}$$

olur. Böylece; her $i \in I$ için,

$$\varphi_{(i+1)i} : G/N_{i+1} \to G/N_i$$

doğal homomorfizmleri,

$$\varphi_{(i+1)i}(N_{i+1} * g_{i+1}) = N_i * g_i \text{ ve } g_{i+1} * g_i^{-1} \in N_i$$

olarak tanımlandığından, G profinite grubu,

$$\begin{aligned} G = \{(N_1 * g_1, N_2 * g_2, \ldots, N_i * g_i, \ldots) \in \prod_{i \in I}(G/N_i) \mid \\ \varphi_{(i+1)i}(N_{i+1} * g_{i+1}) = N_i * g_i,\ g_{i+1} * g_i^{-1} \in N_i\} \end{aligned}$$

olarak ifade edilebilir. Ayrıca, $i \in I$ olmak üzere,

$$N_1 \cong \varprojlim_{i \geq 2}(N_1/N_i)$$

olduğundan, N_1 de bir profinite gruptur. Her $i \in I$ için,

$$\varphi_{(i+1)i} : N_1/N_{i+1} \to N_1/N_i$$

doğal homomorfizmleri,

$$\varphi_{(i+1)i}(N_{i+1} * h_{i+1}) = N_i * h_i \text{ ve } h_{i+1} * h_i^{-1} \in N_i$$

olacak şekilde tanımlandığından,

$$\begin{aligned} N_1 = \{(N_1 * e, N_2 * h_2, \ldots, N_i * h_i, \ldots) \in \prod_{i \in I}(N_1/N_i) \mid \\ \varphi_{(i+1)i} : N_1/N_{i+1} \to N_1/N_i,\ h_{i+1} * h_i^{-1} \in N_i\} \end{aligned}$$

olarak ifade edilebilir. Benzer şekilde, $i \in I$ olmak üzere,

$$N_n \cong \varprojlim_{i \geq n+1}(N_n/N_i)$$

olduğundan, N_n de bir profinite gruptur. $i = n+1, n+2, \ldots$ için,

$$\varphi_{(i+1)i} : N_n/N_{i+1} \to N_n/N_i$$

doğal homomorfizmleri,

$$\varphi_{(i+1)i}(N_{i+1} * s_{i+1}) = N_i * s_i \text{ ve } s_{i+1} * s_i^{-1} \in N_i$$

olacak şekilde tanımlandığından,

$$N_n = \{(N_1 * e, \ldots, N_n * e, N_{n+1} * s_{n+1}, \ldots) \in \prod_{i=1}^{n}(N_i * e) \times \prod_{i \geq n+1}(N_n/N_i) \mid \\ \varphi_{(i+1)i}(N_{i+1} * s_{i+1}) = N_i * s_i, \ s_{i+1} * s_i^{-1} \in N_i\}$$

olur. Şimdi G üzerinde aşağıda tanımlanan metriğin, G üzerindeki topolojiyi ürettiğini gösterelim.

$i = 1, 2, \ldots$ için $N_i \lhd_o G$ olmak üzere $\varphi_i : G \to G/N_i$ izdüşüm dönüşümü olsun. $l = \min\{i \mid \varphi_i(x) \neq \varphi_i(y)\}$ olmak üzere,

$$\begin{array}{rcl} d : G \times G & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & d(x, y) = 2^{-l} \end{array}$$

ve $i = 1, 2, \ldots$ için $\varphi_i(x) = \varphi_i(y)$ ise $d(x, y) = 0$ olacak şekilde G üzerinde tanımlı fonksiyonun bir metrik olduğunu ve G nin topolojisini ürettiğini kısaca gösterelim.

i) d nin tanımından dolayı pozitif tanımlı ve $x = y$ ise $d(x, y) = 0$ olduğu açıktır. $d(x, y) = 0$ olsun. Bu durumda $i = 1, 2, \ldots$ için $\varphi_i(x) = \varphi_i(y)$ dir. G bir profinite grup olduğundan, $\bigcap_{i \geq 1} N_i = \{e\}$ dir.

$$\begin{aligned} \varphi_i(x) = \varphi_i(y) & \Rightarrow \ i = 1, 2, \ldots \text{ için } N_i * x_i = N_i * y_i \\ & \Rightarrow \ i = 1, 2, \ldots \text{için } x_i * y_i^{-1} \in N_i \\ & \Rightarrow \ x_i * y_i^{-1} \in \bigcap_{i \geq 1} N_i = \{e\} \\ & \Rightarrow \ i = 1, 2, \ldots \text{için } x_i = y_i \\ & \Rightarrow \ x = y \end{aligned}$$

elde edilir.

ii) Simetri özelliği, d nin tanımından açıktır.

iii) $d(x, y) = 2^{-k}$ ve $d(y, z) = 2^{-s}$ olsun. Bu durumda, $d(x, y) = 2^{-k}$ olduğundan $i = 1, 2, \ldots, k-1$ için $\varphi_i(x) = \varphi_i(y)$ ve $\varphi_k(x) \neq \varphi_k(y)$ dir. $d(y, z) = 2^{-s}$ olduğundan $i = 1, 2, \ldots, s-1$ için $\varphi_i(y) = \varphi_i(z)$ ve

$\varphi_s(y) \neq \varphi_s(z)$ dir. Böylece $t = \min\{k-1, s-1\}$ dersek $i = 1, 2, \ldots, t$ için $\varphi_i(x) = \varphi_i(z)$ elde edilir. Böylece üçgen eşitsizliği sağlanır. Ayrıca;

$$d(x,z) \leq \frac{1}{2^{t+1}} \leq \max\{d(x,y), d(y,z)\}$$

olduğundan ultra metrik uzaydır.

Her bir $i = 1, 2, \ldots$ için, $e = (N_1 * e, N_2 * e, \ldots)$, G nin birimi olmak üzere,

$$B_{\frac{1}{2^i}}(e,d) = \{x \in G \mid d(x,e) < \frac{1}{2^i}\}$$

birim elemanı içeren G nin açık (kapalı) normal alt grubudur. Böylece

$$\{N_i = B_{\frac{1}{2^i}}(e,d) \mid i = 1, 2, \ldots\}$$

kümesi birimin komşuluklar tabanıdır.

1.8 $p-$sel Tamsayılar Grubu

Bir $p-$sel tamsayı, $i = 0, 1, 2, \ldots$ için $x_i \in \{0, 1, 2, \ldots, (p-1)\}$ olmak üzere,

$$\sum_{i \geq 0} x_i p^i = x_0 + x_1 p + x_2 p^2 + \ldots + x_n p^n + \ldots$$

serisidir ve tüm $p-$sel tamsayıların kümesi $\mathbb{Z}_p$ ile gösterilir.

$x = \sum_{i \geq 0} x_i p^i$ ve $y = \sum_{i \geq 0} y_i p^i$, $\mathbb{Z}_p$ nin iki elemanı olsunlar. x ile y nin toplamı $z = \sum_{i \geq 0} z_i p^i$ olmak üzere, her bir $m \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ ve $z_i \in \{0, 1, \ldots, (p-1)\}$ için,

$$\sum_{i=0}^{m} z_i p^i \equiv \sum_{i=0}^{m} (x_i + y_i) p^i \pmod{p^{m+1}}$$

olarak tanımlanır. Bu işlem altında $\mathbb{Z}_p$ bir gruptur ve $p-$sel tamsayılar grubu olarak adlandırılır. Bu grubun,

- Birim elemanı $\sum_{i \geq 0} 0p^i = 0 + 0p + 0p^2 + \ldots$ dir.
- Keyfi bir $x = \sum_{i \geq 0} x_i p^i \in \mathbb{Z}_p$ için, x in tersi,

$$\begin{aligned} -x &= \sum_{i \geq 0} (p - 1 - x_i) p^i + 1 \\ &= (p - x_0) + (p - 1 - x_1) p + (p - 1 - x_2) p^2 + \ldots \end{aligned}$$

dir.

$\mathbb{Z}_p$ de bir pozitif tamsayı, yeterince büyük i için $x_i = 0$ olmak üzere,

$$\sum_{i=0}^{n} x_i p^i = x_0 + x_1 p + x_2 p^2 + \ldots + x_n p^n + 0p^{n+1} + 0p^{n+2} + \ldots$$

sonlu serisidir. Örnek olarak; $\mathbb{Z}_2$ de,

$$\begin{aligned} 1 &= 1 + 0.2 + 0.2^2 + \ldots + 0.2^n + \ldots \\ 2 &= 0 + 1.2 + 02^2 + 0.2^3 + \ldots + 0.2^n + \ldots \\ 25 &= 1 + 0.2 + 0.2^2 + 1.2^3 + 1.2^4 + 0.2^5 + 0.2^6 + \ldots + 0.2^n + \ldots \end{aligned}$$

olarak ifade edilir. Kısaca, $\mathbb{Z}_p$ de bir pozitif tamsayı o sayının, p tabanındaki ifadesidir.

$\mathbb{Z}_p$ de bir negatif tamsayı ise, i ne kadar büyük seçilirse seçilsin, bir $x_i \in \{0, 1, 2, \ldots, (p-1)\}$ sayısı $x_i \neq 0$ olacak şekilde var olmak üzere,

$$\sum_{i \geq 0} x_i p^i$$

sonsuz serisidir. Örnek olarak; $\mathbb{Z}_2$ de,

$$\begin{aligned} -1 &= 1 + 1.2 + 1.2^2 + 1.2^3 + \ldots + 1.2^n + \ldots \\ -2 &= 0 + 1.2 + 1.2^2 + 1.2^3 + \ldots + 1.2^n + \ldots \\ -5 &= 1 + 0.2 + 0.2^2 + 1.2^3 + 1.2^4 + \ldots + 1.2^n + \ldots \end{aligned}$$

dir.

$$p\mathbb{Z}_p = \{\sum_{i \geq 1} a_i p^i \mid a_i \in \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}\},$$

$\mathbb{Z}_p$ nin normal alt grubudur. Ayrıca $p\mathbb{Z}_p + 0, p\mathbb{Z}_p + 1, p\mathbb{Z}_p + 2, \ldots, p\mathbb{Z}_p + (p-1)$; $\mathbb{Z}_p$ de $p\mathbb{Z}_p$ nin sırasıyla $0, 1, 2, \ldots, p-1$ ile belirlenen sağ eşkümeleridir.

$x = \sum_{i \geq 0} x_i p^i$, $\mathbb{Z}_p$ nin bir elemanı ve $x \neq 0$ olsun. Bu durumda $x_v \neq 0$ olacak şekilde $v(x) \geq 0$ ilk indeksi vardır. Bu indeks x elemanının mertebesi olarak adlandırılır ve $ord_p(x)$ tarafından belirtilir. $i = 0, 1, 2, \ldots$ için $x_i = 0$ ise $ord_p(x) = \infty$ dur. Diğer taraftan x in $p-$sel değeri,

$$|x|_p = \begin{cases} 0 & , \quad i = 0, 1, 2, \ldots \text{ için } x_i = 0 \text{ ise} \\ p^{-ord_p(x)} & , \quad \text{d.d.} \end{cases}$$

tarafından belirtilir ve $x, y \in \mathbb{Z}_p$ için $d_p = |x-y|_p$, $\mathbb{Z}_p$ üzerinde bir metriktir.

Bir $p-$sel sayı, her $i \in \mathbb{Z}$ için $a_i \in \{0, 1, 2, \ldots, (p-1)\}$ ve yeterince büyük i için $a_{-i} = 0$ olmak üzere,

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i p^i$$

serisidir. Tüm $p-$sel sayılar $\mathbb{Q}_p$ tarafından belirtilir ve yukarıdaki toplama işlemi altında bir gruptur. Ayrıca ilgili $p-$sel norma göre $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{Q}$ nun metrik tamlamasıdır. $p-$sel sayılar grubu bir topolojik gruptur. Ayrıca $p-$sel tamsayılar grubu

$$\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p \mid |x|_p \leq 1\}$$

olarak ifade edilebilir ve $\mathbb{Q}_p$ nin önemli bir alt grubudur. $\mathbb{Z}_p$ kompakttır ve böylece tamdır. $\mathbb{Q}_p$ tam ve yerel kompakttır ve d_p metriği öteleme altında değişmezdir. Ayrıca, sırasıyla 0 merkezli p^{-n} yarıçaplı yuvar ve a merkezli p^{-n} yarıçaplı yuvar;

$$\begin{aligned} B(0, p^{-n}) &= \{x \in \mathbb{Z}_p \mid |x-0|_p = |x|_p \leq \frac{1}{p^n}\} = p^n \mathbb{Z}_p \\ B(a, p^{-n}) &= \{x \in \mathbb{Z}_p \mid |x-a|_p \leq \frac{1}{p^n}\} = p^n \mathbb{Z}_p + a \end{aligned}$$

dır. Bu konunun detayları [8], [13] ve [14] de ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Bir başka tanımı olarak her bir $i = 2, 3, \ldots$ için $\varphi_{i(i-1)} : \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^{i-1}\mathbb{Z}$ olmak üzere, $p-$sel tamsayılar grubu,

$$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z}/p^4\mathbb{Z} \leftarrow \ldots$$

ters sisteminin ters limiti olarak ifade edilebilir. Yani;

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_p &= \varprojlim_{i \in \mathbb{N}^+} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \\ &= \{(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n \in \mathbb{N}^+} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \mid \forall n \in \mathbb{N}^+ \text{ için } \alpha_{n+1} \equiv \alpha_n (\mathrm{mod} p^n)\} \end{aligned}$$

$\mathbb{Z}_p$ de, yukarıda tanımlı profinite grubun elemanları,

$$\begin{aligned} 0 &= (0,0,0,\ldots) \\ 1 &= (1,1,1,\ldots) \\ 2 &= (0,2,2,\ldots) \\ 5 &= (1,1,5,5,\ldots) \\ -1 &= (1,3,7,15,\ldots,1+1.2+1.2^2+...+1.2^n,\ldots) \end{aligned}$$

olarak ifade edilir.

2 $(Aut(X^*), d)$ METRİK UZAYI

Bu bölümde, $X = \{0, 1\}$ olmak üzere, X^* ağacı üzerine etki eden otomorfizimler grubu olan $Aut(X^*)$, grubun elemanlarının ağacın seviyelerine etkisini yansıtan bir metrik ile donatılacaktır. Ayrıca, bu metrik uzayın bir topolojik grup ve kompakt metrik uzay olduğunu göstereceğiz. Bu metriğe denk metriklerle de bu özelliklerin sağlandığı gösterilebilir. $X = \{0, 1, \ldots, m\}$ olmak üzere $(m+1)-$li köklü ağacı için benzer şekilde ispatlar verilebilir.

2.1 $Aut(X^*)$ Üzerinde Seviye Metriği ve Özellikleri

Tanım 2.1.1. *$g_1, g_2 \in Aut(X^*)$ olmak üzere, bu iki dönüşüm ağacın ilk k seviyesine aynı etkiyi yapıyorsa fakat $(k+1)$. seviyede farklı etki yapıyorsa aralarındaki uzaklığı $\frac{1}{2^k}$ olarak tanımlayalım. Yani;*

$$d(g_1, g_2) = \begin{cases} \frac{1}{2^k} & , \quad g_1^{-1}g_2 \in St_{Aut(X^*)}(k) \ ve\ g_1^{-1}g_2 \notin St_{Aut(X^*)}(k+1) \ ise \\ 0 & , \quad g_1 = g_2 \ ise \end{cases}$$

olsun.

Önerme 2.1.2. *Yukarıda $Aut(X^*)$ üzerinde tanımlı d fonksiyonu bir metriktir.*

Kanıt. X^* ağacının seviyeleri üzerinde tanımlı,

$$\begin{array}{rcccl} d & : & Aut(X^*) \times Aut(X^*) & \to & \mathbb{R} \\ & & (g_1, g_2) & \mapsto & d(g_1, g_2) \end{array}$$

fonksiyonu yukarıdaki gibi tanımlansın.

i) $\forall g_1, g_2 \in Aut(X^*)$ için tanım gereği $d(g_1, g_2) \geq 0$ dır. Ayrıca $g_1 = g_2$ ise g_1 ve g_2 ağacın tüm seviyelerine aynı etki edeceğinden $d(g_1, g_2) = 0$ dir. $d(g_1, g_2) = 0$ ise $g_1 = g_2$ olmak zorundadır. $g_1 \neq g_2$ olsaydı ağacın en az bir seviyesinde farklı etki etmek zorunda olurdu. Bu ise $d(g_1, g_2) = 0$ olması ile çelişir.

ii) $\forall g_1, g_2 \in Aut(X^*)$ için g_1 ve g_2 nin ağacın seviyelere etkisi nasılsa g_2 ve g_1 in ağacın seviyelere etkisi aynıdır. Yani $d(g_1, g_2) = d(g_2, g_1)$ olmak zorundadır.

iii) $\forall g_1, g_2, g_3 \in Aut(X^*)$ için

$$d(g_1, g_2) \leq d(g_1, g_3) + d(g_3, g_2)$$

olduğunu gösterelim. g_1 ve g_2, ağacın ilk n seviyesine kadar aynı fakat $(n+1)$. seviyede farklı etki etsinler. Bu durumda tanım gereği $d(g_1, g_2) = \dfrac{1}{2^n}$ dir. Eğer g_1, g_3 veya g_3, g_2 den herhangi biri ilk n seviyeye kadar farklı etkiyi yaparsa, tanım gereği $\dfrac{1}{2^n} \leq d(g_1, g_3)$ veya $\dfrac{1}{2^n} \leq d(g_3, g_2)$ dir. Bu durumda üçgen eşitşizliği geçerlidir. Bu eşitsizliği sağlamayacak şekilde g_1, g_3 ve g_3, g_2 nin en az ilk $(n+1)$ seviyede aynı etkiyi yaptığını varsayalım. Bu durumda g_1, g_2 de en az ilk $(n+1)$ seviyede aynı etki etmelidir. Bu ise g_1, g_2 nin $(n+1)$. seviyede farklı etki etmesi ile çelişir. Varsayımımız hatalı olup böyle bir durum olamaz. O halde d, $Aut(X^*)$ üzerinde kuvvetli üçgen eşitsizliğini sağlar. Yani, bir ultra metrik uzaydır.

□

Önerme 2.1.3. *$(Aut(X^*), d)$ metrik uzayı kompakttır.*

Kanıt. $(Aut(X^*), d)$ metrik uzayında keyfi bir (g_n) dizisi alalım. Bu dizinin yakınsak bir alt dizisi olduğunu gösterelim. Bu dizinin 1. seviyeyi değiştiren ya da değiştirmeyen alt dizilerinin en az biri sonsuz elemanlı olmalıdır (Eğer ikiside sonsuz elemanlı ise keyfi birini seçelim). Bu sonsuz elemanlı dizinin g_{n_1} elemanını alalım. Seçtiğimiz bu alt dizinin 2. seviyedeki bir dalı değişitirip değiştirmemesine göre sonsuz elemanlı bir alt dizisi olmalıdır. Bu sonsuz elemanlı alt dizinin g_{n_2} elemanını alalım. g_{n_2} ve g_{n_1} elemanlarının 1. seviyeye etkisi aynıdır. Bu şekilde devam ederek k. seviyede bu seviyenin dalları değiştirip değiştirmemesine göre bu dizinin sonsuz elemanlı alt dizisinin g_{n_k} elemanını alalım. $g_{n_{k-1}}$ ve g_{n_k} elemanlarının $(k-1)$. seviyeye etkisi aynıdır. Böylece (g_n) dizisinin,

$$g_{n_1}, g_{n_2}, \ldots, g_{n_k}, \ldots$$

alt dizisini elde ederiz. Bu dizinin yakınsak olduğunu gösterelim. Ağacın 1. seviyesine g_{n_1}, 2. seviyesine g_{n_2} ve bu şekilde devam edersek k. seviyesine g_{n_k}

ile aynı etki eden $g \in Aut(X^*)$ elemanını alalım. $k \to \infty$ için,

$$d(g_{n_k}, g) = \frac{1}{2^k} \to 0$$

olduğundan g, (g_{n_k}) dizisinin limitidir. Böylece, (g_{n_k}) yakınsak olup (g_n) dizisi, $Aut(X^*)$ nin keyfi dizisi olduğundan, $Aut(X^*)$ de her dizinin yakınsak bir alt dizisi vardır. $\square$

Önerme 2.1.4. *$Aut(X^*)$ yukarıda tanımlanan d metriğine göre topolojik gruptur.*

Kanıt. Öncelikle,

$$\begin{array}{rcccc} \psi & : & Aut(X^*) \times Aut(X^*) & \longrightarrow & Aut(X^*) \\ & & (g,h) & \longmapsto & gh \end{array}$$

dönüşümünün sürekli olduğunu gösterelim. Herhangi bir $(g_0, h_0) \in Aut(X^*) \times Aut(X^*)$ alalım. U, g_0h_0 ın bir komşuluğu olsun. Bu durumda,

$$B\Big(g_0h_0, \frac{1}{2^n}\Big) = \Big\{f \mid d(f, g_0h_0) < \frac{1}{2^n}\Big\} \subseteq U$$

olacak şekilde n tamsayısı vardır. $Aut(X^*) \times Aut(X^*)$ ın

$$V_1 = B\Big(g_0, \frac{1}{2^n}\Big) = \Big\{g \mid d(g, g_0) < \frac{1}{2^n}\Big\}$$

ve

$$V_2 = B\Big(h_0, \frac{1}{2^n}\Big) = \Big\{h \mid d(h, h_0) < \frac{1}{2^n}\Big\}$$

olacak şekilde

$$V = V_1 \times V_2 = \{(g,h) \mid g \in V_1, h \in V_2\}$$

açık kümesini alalım. Bu durumda,

$$\psi(V) = \psi(V_1 \times V_2) = \{gh \mid g \in V_1, h \in V_2\}$$

dir. $\psi(V) \subseteq U$ olduğunu gösterelim. $gh \in \psi(V)$ olsun. Böylece $g \in V_1$ ve $h \in V_2$ dir. Ayrıca,

$$g^{-1}g_0 \in St_{Aut(X^*)}(n+1) \text{ } ve \text{ } h^{-1}h_0 \in St_{Aut(X^*)}(n+1) \tag{2.1}$$

elde edilir. Böylece,

$$(gh)^{-1}g_0h_0 = h^{-1}(g^{-1}g_0)h_0 \in St_{Aut(X^*)}(n+1)$$

olur. (2.1) den dolayı $gh \in U$ dir. Yani, ψ süreklidir. Benzer şekilde,

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & Aut(X^*) & \longrightarrow & Aut(X^*) \\ & & g & \longmapsto & g^{-1} \end{array}$$

dönüşümünün sürekli olduğunu gösterelim. Keyfi bir $g_0 \in Aut(X^*)$ alalım. U, g_0^{-1} ın komşuluğu olsun. Bu durumda,

$$B\Big(g_0^{-1}, \frac{1}{2^n}\Big) = \Big\{f \mid d(f, g_0^{-1}) < \frac{1}{2^n}\Big\} \subseteq U$$

olacak şekilde n tamsayısı vardır. $Aut(X^*)$ da, g_0 ın

$$V = B\Big(g_0, \frac{1}{2^n}\Big) = \{g \mid d(g, g_0) < \frac{1}{2^n}\}$$

komşuluğunu alalım. $\varphi(V) \subseteq U$ olduğunu göstermeliyiz. $g^{-1} \in \varphi(V)$ olsun. Böylece $g \in V$ dir. Yani,

$$gg_0^{-1} \in St_{Aut(X^*)}(n+1)$$

olur. U nun tanımından, $g^{-1} \in U$ elde edilir. Böylece φ süreklidir. $\square$

Uyarı 2.1.5. *$Aut(X^*)$, sonlu grupların ters sisteminin ters limiti olarak ifade edilebilir. Daha açık ifadeyle, her bir $n = 1, 2, \ldots$ için $St_{Aut(X^*)}(n)$, $Aut(X^*)$ ın açık normal alt grubudur ve $St_{Aut(X^*)}(n+1) \trianglelefteq St_{Aut(X^*)}(n)$ dir. Ayrıca,*

$$[Aut(X^*) : St_{Aut(X^*)}(n)] = 2^{2^n - 1}$$

dir. Böylece her bir $n = 2, 3, \ldots$ için,

$$\varphi_{n(n-1)} : Aut(X^*)/St_{Aut(X^*)}(n) \to Aut(X^*)/St_{Aut(X^*)}(n-1)$$

bir doğal homomorfizm olduğundan $Aut(X^*)$,

$$Aut(X^*)/St_{Aut(X^*)}(1) \longleftarrow \ldots \longleftarrow Aut(X^*)/St_{Aut(X^*)}(n) \longleftarrow \ldots$$

ters sisteminin ters limitidir. Yani;

$$Aut(X^*) \;\cong\; \varprojlim_{n \in \mathbb{N}^+} Aut(X^*)/St_{Aut(X^*)}(n)$$

olur. Böylece $Aut(X^*)$ bir profinite grup olduğundan kompakt, Hausdorff ve tamamen bağlantısız bir topolojik grup olduğu bu şekilde de söylenebilir.

2.2 $(Aut(X^*), d)$ Üzerinde Büzülme Dönüşümleri

Önerme 2.2.1 de, $Aut(X^*)$ üzerinde büzülme dönüşümlerini vereceğiz ve bu büzülme dönüşümlerini, $(Aut(X^*), d)$ metrik uzayında atraktörü Adding machine grubunun kapanışı olan bir yinelemeli fonksiyon sistemi verirken kullanacağız.

Önerme 2.2.1. *$X = \{0, 1, 2, \ldots, m\}$ ve $h \in Aut(X^*)$ olmak üzere,*

$$\begin{array}{rcccl} \psi & : & Aut(X^*) & \to & Aut(X^*) \\ & & g & \mapsto & (g, g, \ldots, g)h \end{array}$$

büzülme dönüşümüdür. Eğer h birim otomorfizm ise ψ, bire-bir homomorfizmdir.

Kanıt. Her $g_1, g_2 \in Aut(X^*)$ için,

$$d(\psi(g_1), \psi(g_2)) \leq rd(g_1, g_2)$$

olacak şekilde $0 \leq r < 1$ gerçel sayısının varlığını göstermliyiz. g_1, X^* köklü ağacının ilk k seviyesine g_2 gibi etki etsin, fakat $(k+1)$. seviyedeki etkileri farklı olsun. Diğer bir deyişle, $g_1^{-1}g_2 \in St_{Aut(X^*)}(k)$ ve $g_1^{-1}g_2 \notin St_{Aut(X^*)}(k+1)$. Her $w \in X^\omega$ için, $w'_{k+1} \neq w''_{k+1}$ ve $v'_{k+2} \neq v''_{k+2}$ olmak üzere,

$$g_1(w) = g_1(w_1w_2w_3 \ldots w_kw_{k+1} \ldots) = w'_1w'_2w'_3 \ldots w'_kw'_{k+1} \ldots,$$

$$g_2(w) = g_2(w_1w_2w_3 \ldots w_kw_{k+1} \ldots) = w'_1w'_2w'_3 \ldots w'_kw''_{k+1} \ldots$$

ve

$$\begin{aligned} \psi(g_1)(w) &= (g_1, g_1, \ldots, g_1)h(w) \\ &= (g_1, g_1, \ldots, g_1)(v_1v_2v_3 \ldots v_kv_{k+1}v_{k+2} \ldots) \\ &= v_1g_1(v_2v_3 \ldots v_kv_{k+1}v_{k+2} \ldots) \\ &= v_1v'_2v'_3 \ldots v'_kv'_{k+1}v'_{k+2} \ldots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi(g_2)(w) &= (g_2, g_2, \ldots, g_2)h(w) \\ &= (g_2, g_2, \ldots, g_2)(v_1v_2v_3 \ldots v_kv_{k+1}v_{k+2} \ldots) \\ &= v_1g_2(v_2v_3 \ldots v_kv_{k+1}v_{k+2} \ldots) \\ &= v_1v'_2v'_3 \ldots v'_kv'_{k+1}v''_{k+2} \ldots \end{aligned}$$

eşitlikleri geçerlidir. Böylece,

$$d(\psi(g_1), \psi(g_2)) \leq \frac{1}{2} d(g_1, g_2)$$

elde edilir. ψ bir büzülme dönüşümüdür. h bir birim otomorfizm olsun. Her $g_1,\ g_2 \in Aut(X^*)$ için,

$$\psi(g_1 g_2) = (g_1 g_2, g_1 g_2, \ldots, g_1 g_2) = (g_1, g_1, \ldots, g_1)(g_2, g_2, \ldots, g_2) = \psi(g_1)\psi(g_2)$$

olduğundan, ψ bir homomorfizmdir. Son olarak, her $g_1, g_2 \in Aut(X^*)$ için,

$$\psi(g_1) = \psi(g_2) \Longrightarrow \quad (g_1, g_1, \ldots, g_1) = (g_2, g_2, \ldots, g_2) \quad \Longrightarrow \quad g_1 = g_2$$

olup, φ bire-birdir. $\square$

Aşağıdaki verilen önermelerin ispatı Önerme 2.2.1 e benzer olarak yapılır.

Önerme 2.2.2. *$X = \{0,1\}$ ve $h \in Aut(X^*)$ olmak üzere,*

$$\begin{array}{rcrcl} \psi & : & Aut(X^*) & \to & Aut(X^*) \\ & & g & \mapsto & (hgh^{-1}, hgh^{-1}) \end{array}$$

büzülme dönüşümü ve bire-bir homomorfizimdir.

Önerme 2.2.3. *$X = \{0,1\}$ olsun. $h \in Aut(X^*)$ olmak üzere,*

$$\begin{array}{rcl} g & \mapsto & (g, 1) \\ g & \mapsto & (1, g) \\ g & \mapsto & (g, hgh^{-1}) \\ g & \mapsto & (1, hgh^{-1}) \end{array}$$

büzülme dönüşümleri ve bire-bir homomorfizimlerdir.

Sonuç 2.2.4. *Yukarıda önermelerde verilen büzülme dönüşümlerinin ağacın daha alt dallarına kısıtlanmışlarıda birer büzülme dönüşümleridir. Yani; $Aut(X^*)$ üzerinde tanımlı,*

$$\begin{array}{rcl} g & \mapsto & ((g, g), (g, g)) \\ g & \mapsto & ((1, g), (1, g)) \\ g & \mapsto & ((g, 1), (g, 1)) \\ g & \mapsto & ((hgh^{-1}, hgh^{-1}), (hgh^{-1}, hgh^{-1})) \end{array}$$

büzülme katsayıları $\frac{1}{4}$ *olan büzülme dönüşümleridir. Ayrıca, bire-bir homomorfizmlerdir. Bu şekilde devam edersek, her* $n = 1, 2, \ldots$ *için büzülme katsayısı* $\frac{1}{2^n}$ *olan büzülme dönüşümleri elde edebiliriz. Ayrıca yukarıda önermelerden elde ettiğimiz sonuçlar* $m-$*li köklü ağaç üzerine de genelleştirilibilir.*

3 OTOMORFİZM GRUPLARININ KENDİNE BENZERLİĞİ

Bu bölümde öncelikle V. Nekrashevych tarafından [3] de tanımlanan bir grubun bir kümeye etkisinin ve S. Sidki tarafından [15] da tanımlanan bir köklü ağaca etki eden otomorfizm grubunun kendine benzerliği tanımlarını ifade edeceğiz. Ayrıca bu kümenin bir köklü ağaca kısıtlanma sebebini verip bu grupların bazı özelliklerini ve en temel örneklerini göstereceğiz.

3.1 Kendine Benzerlik Tanımları ve Özellikleri

Bir grubunun bir kümeye etkisinin kendine benzerlik tanımı [3] de aşağıdaki gibi verilmektedir:

Tanım 3.1.1. *F bir küme, G bir grup, E sonlu bir indis kümesi ve $\phi_e : F \to F$ dönüşümleri için $\{\phi_e\}_{e\in E}$ bir yinelemeli fonksiyon sistemi olsun. Her $p \in F$, $e \in E$ ve her $g \in G$ için,*

$$(\phi_e(p))^g = \phi_f(p^h)$$

olacak şekilde $f \in E$ ve $h \in G$ var ise F üzerine G nin etkisi kendine benzerdir denir.

ϕ_e dönüşümleri altında F nin görüntülerinin kesişmediği durumlar en uygun durumlardır. Böylece F nin farklı noktaları farklı kodlara sahiptir. Bu durumda F, X^ω ya homeomortur. Böylece F, Cantor kümesi olarak düşünülebilir. $E = X$ olarak alındığı zaman, ϕ_e dönüşümleri X^ω üzerinde, $T_x : w \mapsto xw$ dönüşümleri haline gelir. Böylece yukarıdaki tanım aşağıdaki gibi düşünebilir:

Tanım 3.1.2. *G, X^* ağacına tamamen etki etsin. Her $g \in G$, her $x \in X$ ve her $w \in X^\omega$ için,*

$$(xw)^g = y(w^h) \tag{3.1.2}$$

olacak şekilde $h \in G$ ve $y \in X$ varsa X^ω üzerinde bir G grubunun etkisi kendine benzerdir denir. (3.1.2) eşitliği sonlu kez üst üste uygularsak her $v \in X^*$ sonlu kelimesi, her $g \in G$ ve her $w \in X^\omega$ için,

$$(vw)^g = u(w^h)$$

olacak şekilde $h \in G$ ve $u \in X^{\,*}$ olduğu görülür.

Eğer G, X^ω üzerine tamamen etki ederse grubun h elemanı tek türlü tanımlıdır. Yani; $(xw)^g = y(w^{h_1})$ ve $(xw)^g = y(w^{h_2})$ olacak şekilde $h_1, h_2 \in G$ var ise $h_1 = h_2$ olmalıdır. Çünkü $(xw)^g = y(w^{h_1}) = y(w^{h_2})$ olduğundan,

$$\begin{aligned} y(w^{h_1}) = y(w^{h_2}) &\Rightarrow w^{h_1} = w^{h_2} \\ &\Rightarrow h_1 * w = h_2 * w \\ &\Rightarrow h_2^{-1} * (h_1 * w) = w \\ &\Rightarrow (h_2^{-1} h_1) * w = w \\ &\Rightarrow h_2^{-1} h_1 = e \\ &\Rightarrow h_1 = h_2 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda h, g nin v ye kısıtlanmışı olarak adlandırılır ve $h = g|_v$ olarak yazılır. Böylece,

$$\begin{aligned} (vw)^g = u(w^h) &\Rightarrow (vw)^g = v^g w^{g|_v} \\ &\Rightarrow g(vw) = g(v) g|_v(w) \end{aligned}$$

dir.

X^* ağacına etki eden bir otomorfizm grubunun kendine benzerliği S. Sidki tarafından [15] da aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

Tanım 3.1.3. *G, X^* köklü ağacının bir otomorfizm grubu olsun. Her $g \in G$ ve $v \in X^*$ için,*

$$g|_v \in G$$

ise G ye kendine benzerdir denir.

Sonuç 3.1.4. *Yukarıdaki tanımda, G grubunun kendine benzerliğinden söz edilirken bir köklü ağaca olan etkisi alınmıştır. Böyle bir durumda ağacın sınırı olan X^ω, Cantor kümesine homeomorfiktir. Yani tamamen bağlantısız kümelere etki eden grubun kendine benzerliği sözkonusudur.*

Aşağıdaki önermede, $[0,1]$ bağlantılı kümesi üzerine etki eden Sidki anlamında kendine benzer otomorfizm grubunu vereceğiz.

Önerme 3.1.5. $[0,1]$ *kümesi üzerine etki eden Sidki anlamında kendine benzer grup $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ grubuna izomorftur.*

Kanıt. Öncelikle, $[0,1]$ bağlantılı kümesi üzerine etki eden otomorfizm grubunu bulalım. Sidki anlamında kendine benzerlik tanımını uygulayacağımızdan, buradaki otomorfizm grubunun elemanları kökü ve köşelerin komşuluğunu koruyan bire-bir örten dönüşümlerdir. f, $[0,1]$ e etki eden otomorfizm grubunun keyfi bir elemanı olsun. İlk olarak $[0,1]$ in $[0,\frac{1}{2}]$ ve $[\frac{1}{2},1]$ alt aralıklarını alalım. Buradan,

1. durum:

$$f:[0,\tfrac{1}{2}]\to[0,\tfrac{1}{2}] \quad , \quad f:[\tfrac{1}{2},1]\to[\tfrac{1}{2},1] \tag{1.1}$$

2. durum:

$$f:[0,\tfrac{1}{2}]\to[\tfrac{1}{2},1] \quad , \quad f:[\tfrac{1}{2},1]\to[0,\tfrac{1}{2}] \tag{1.2}$$

durumları söz konusudur. Her $x\in[0,1]$ için 1. durumdan $f(x)=x$ ve 2. durumdan $g(x)=1-x$ elde edildiğini gösterelim.

1. durumda $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$ olmak zorundadır. 2. durumda da $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$ dir.

f nin 1. durumu sağladığını varsayalım. $[0,\frac{1}{2}]$ nin $[0,\frac{1}{4}]$ ve $[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$ alt aralıklarını alalım. Burada da aşağıdaki iki durum geçerlidir:

$$f:[0,\tfrac{1}{4}]\to[0,\tfrac{1}{4}] \quad , \quad f:[\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{2}]\to[\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{2}] \tag{2.1.a}$$

$$f:[0,\tfrac{1}{4}]\to[\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{2}] \quad , \quad f:[\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{2}]\to[0,\tfrac{1}{4}] \tag{2.2.a}$$

Fakat (2.2.a) durumunun sağlanması imkansızdır. Çünkü (1.1) durumunda, $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$ olduğunu göstermiştik. (2.1.a) durumundan $f(\frac{1}{4})=\frac{1}{4}$ olduğu görülür.

Şimdi, $[\frac{1}{2},1]$ in $[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]$ ve $[\frac{3}{4},1]$ alt aralıklarını alalım. Burada da aşağıdaki iki durum geçerlidir:

$$f:[\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{4}]\to[\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{4}] \quad , \quad f:[\tfrac{3}{4},1]\to[\tfrac{3}{4},1] \tag{2.1.b}$$

$$f:[\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{4}]\to[\tfrac{3}{4},1] \quad , \quad f:[\tfrac{3}{4},1]\to[\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{4}] \tag{2.2.b}$$

Fakat (2.2.b) durumunun sağlanması imkansızdır. Çünkü (1.1) durumunda, $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$ olduğunu göstermiştik. (2.1.b) durumundan $f(\frac{3}{4})=\frac{3}{4}$ olduğu görülür.

f nin (2.1.a) durumunun sağladığını varsayalım. $[0,\frac{1}{4}]$ nin $[0,\frac{1}{8}]$ ve $[\frac{1}{8},\frac{1}{4}]$ alt aralıklarını alalım. Burada da aşağıdaki iki durum geçerlidir:

$$f:[0,\tfrac{1}{8}]\to[0,\tfrac{1}{8}] \quad , \quad f:[\tfrac{1}{8},\tfrac{1}{4}]\to[\tfrac{1}{8},\tfrac{1}{4}] \tag{3.1.a}$$

$$f:[0,\tfrac{1}{8}]\to[\tfrac{1}{8},\tfrac{1}{4}] \quad , \quad f:[\tfrac{1}{8},\tfrac{1}{4}]\to[0,\tfrac{1}{8}] \tag{3.2.a}$$

Fakat (3.2.a) durumunun sağlanması imkansızdır. Çünkü (2.1.a) durumunda, $f(\frac{1}{4})=\frac{1}{4}$ olduğunu göstermiştik. Bu durumdan da $f(\frac{1}{8})=\frac{1}{8}$ olduğu görülür. Benzer şekilde,

- $[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$ nin $[\frac{1}{4},\frac{3}{8}]$ ve $[\frac{3}{8},\frac{1}{2}]$ alt aralıklarını alırsak, $f(\frac{3}{8})=\frac{3}{8}$,
- $[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]$ ün $[\frac{1}{2},\frac{5}{8}]$ ve $[\frac{5}{8},\frac{3}{4}]$ alt aralıklarını alırsak, $f(\frac{5}{8})=\frac{5}{8}$,
- $[\frac{3}{4},1]$ in $[\frac{3}{4},\frac{7}{8}]$ ve $[\frac{7}{8},1]$ alt aralıklarını alırsak, $f(\frac{7}{8})=\frac{7}{8}$,

olduğu görülür. Bu şekilde devam edersek, $n=1,2,\ldots$ iken $0<k<2^n$ $(k\in\mathbb{N})$ olmak üzere, $f(\frac{k}{2^n})=\frac{k}{2^n}$ elde edilir.

2. durumundan başlarsak, benzer şekilde $n=1,2,\ldots$ iken $0<k<2^n$ $(k\in\mathbb{N})$ olmak üzere, $f(\frac{k}{2^n})=1-\frac{k}{2^n}$ elde edilir.

Son olarak her $x\in[0,1]$ için, 1. durumdan $f(x)=x$ ve 2. durumdan $g(x)=1-x$ otomofizmlerinin elde edildiğini gösterelim.

$n=1,2,\ldots$ ve $0\leq k<2^n$ $(k\in\mathbb{N})$ olmak üzere $f([\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}])=[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}]$ olduğunu biliyoruz. $x\in[0,1]$ ve $x\neq\frac{k}{2^n}$ olsun. $f(x)\neq x$ olduğunu varsayalım. $a=|f(x)-x|$ olsun. $x\in[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}]$ olacak şekilde k,n sayıları vardır. $x-\frac{k}{2^n}<a$ veya $\frac{k+1}{2^n}-x<a$ olacak şekilde seçersek, $x\in[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}]$ için $f(x)\notin[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}]$ olur. Bu ise f nin tanımı ile çelişir. O halde her $x\in[0,1]$ için $f(x)=x$ olur. Her $x\in[0,1]$ için $g(x)=1-x$ olduğu benzer şekilde gösterilir. □

Uyarı 3.1.6. *Benzer durum Sierpinski üçgeni, Koch eğrisi ve Sierpinski halısı gibi bağlantılı klasik fraktallere de uygulanabilir. Bu kümeler üzerindeki, Sidki anlamında kendine benzer gruplar sonlu otomorfizm grupları olacaktır.*

"Sidki anlamında kendine benzer bir grubun kapanışı da kendine benzer midir?" sorusunun cevabı [11] de aşağıdaki gibi verilmektedir.

Önerme 3.1.7. *G, $Aut(X^*)$ nin Tanım 3.1.3 anlamında kendine benzer bir alt grubu ve $\overline{G}$, $Aut(X^*)$ daki kapanışı olsun. $\overline{G}$ da bu anlamda kendine benzer otomorfizm grubudur.*

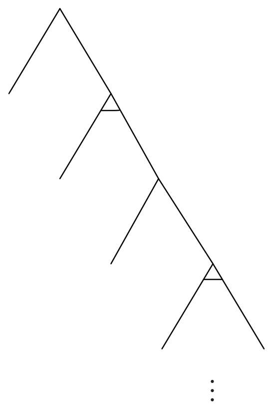
Kanıt. $g \in Aut(X^*)$ elemanının $\overline{G}$ nın elemanı olabilmesi için gerek ve yeter şart her $n \in \mathbb{N}$ için g nin X^* ağacının ilk n seviyeye etkisinin bazı $g' \in G$ otomorfizmlerin etkisiyle aynı olmasıdır. Böylece eğer $g \in \overline{G}$ ise her $x \in X$ için $g|_x$ ve $g'|_x$ kısıtlamaları ağacın ilk $(n-1)$ seviyesinde aynı etkiyi yapacaklarından $g|_x \in \overline{G}$ olur. Böylece $\overline{G}$, $Aut(X^*)$ ın Tanım 3.1.3 anlamında kendine benzer bir alt grubudur. □

Önerme 3.1.8. *Tanım 3.1.3 anlamında kendine benzer bir grup, grup izomorfizmi altında korunmaz.*

Kanıt. S_2, $X = \{0, 1\}$ kümesi üzerinde simetrik grubu ve $\sigma = (01) \in S_2$ olmak üzere g, X^* üzerinde,

$$g = (1, (1, g)\sigma)$$

büküm tekrarlaması (wreath recursion) ile tanımlı dönüşüm olsun. Sonsuz



Şekil 3.2. g otomorfizminin ikili ağaca etkisi

mertebeli tek üreteçli her grup $\mathbb{Z}$ ye izomorftur. Öncelikle g dönüşümünün, X^* üzerinde sonsuz mertebeli olduğunu gösterelim. g nin mertebesinin sonlu olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $g^k = 1$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ sayısı vardır ve k sayısı bu özelliği sağlayan en küçük doğal sayıdır. İki durum söz konusudur.

- k çift olsun. Bu durumda $k = 2l$ olacak şekilde $l \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Bu durumda,

$$\begin{aligned}1 = g^k &= g^{2l}\\ &= (1,(1,g)\sigma)^{2l}\\ &= ((1,(1,g)\sigma)(1,(1,g)\sigma))^l\\ &= (1.1,(1,g)\sigma.(1,g)\sigma)^l\\ &= (1,(1,g).(g,1)\sigma^2)^l\\ &= (1,(g,g))^l\\ &= (1,(g^l,g^l))\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda $g^l = 1$ olmak zorundadır. Bu ise k nın en küçük olması ile çelişir. O halde k çift olamaz.

- k tek olsun. Bu durumda $k = 2^l + 1$ olacak şekilde $l \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Bu durumda,

$$\begin{aligned}1 = g^k &= g^{2l+1}\\ &= (1,(1,g)\sigma)^{2l}(1,(1,g)\sigma)\\ &= (1,(g^l,g^l))(1,(1,g)\sigma)\\ &= (1.1,(g^l.1,g^l.g)\sigma)\\ &= (1,(g^l,g^{l+1})\sigma)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise ağacın ikinci seviyesinin sol dalının değişmesi demektir. g^{2l+1} nin birim otomorfizm olması ile çelişir. O halde k tek olamaz.

Böylece g sonsuz mertebelidir ve $G = \langle g \rangle$, $\mathbb{Z}$ ye izomorftur. G nın elemanları,

$$\begin{aligned}g^2 &= (1,(1,g)\sigma)(1,(1,g)\sigma) & g^3 &= (1,(g,g))(1,(1,g)\sigma)\\ &= (1,(g,g)) & &= (1,(g,g^2)\sigma)\end{aligned}$$

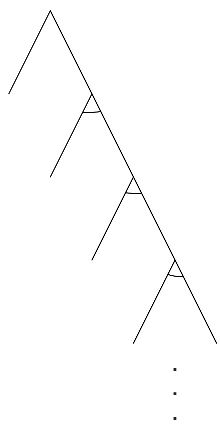
$$\cdots$$

$$\begin{aligned}g^{-1} &= (1,(g^{-1},1)\sigma) & g^{-2} &= (1,(g^{-1},1)\sigma)(1,(g^{-1},1)\sigma)\\ & & &= (1,(g^{-1},g^{-1}))\end{aligned}$$

şeklindedir. Açık olarak, $g|_1 = (1,g)\sigma$ dır. Fakat G, birinci seviyeyi değiştiren hiçbir elemana sahip olmadığından $g|_1 \notin G$ dir. Bu ise G nin kendine benzer bir otomorfizm grubu olmaması demektir. Ayrıca G seviye geçişken değildir. Çünkü, $0 \in X$ için $g^k(0) = 1$ olacak şekilde k sayısı yoktur.

Şimdi $a = (1, a)\sigma$ ile verilen otomorfizmin ürettiği grup olan kendine benzer grupların en temel örneklerinden adding machine grubunu alalım. Açıkça $A \cong \mathbb{Z}$ olduğundan $A \cong G$ elde edilir. Bu ise bu anlamda kendine benzerliğin izomorfizm altında korunmaması demektir. $\square$

Kendine benzer olmayan ve seviye geçişken olmayan bir otomorfizm grubuna örnek olarak, $a = (1, a)\sigma$ olmak üzere, $\langle(1, a)\rangle$ tek üreteçli grubu da verilebilir. Bu grupta açık olarak $\mathbb{Z}$ ye izomorftur.



Şekil 3.3. $(1, a)$ otomorfizminin ikili ağaca etkisi

Tanım 3.1.9. *G_1, G_2 iki grup olsun. $Dom\phi, G_1$ in sonlu indeksli alt grubu olmak üzere $\phi : Dom\phi \to G_2$ grup homomorfizmi ise ϕ ye G_1 den G_2 ye sanal homomorfizm denir ve $\phi : G_1 \dashrightarrow G_2$ ile gösterilir. G grubunun sanal endomorfizmi ise $\phi : G \dashrightarrow G$ sanal homomorfizmidir. $[G : Dom\phi]$, ϕ sanal homomorfizminin indeksidir ve $ind\phi$ ile gösterilir. G grubu olarak tekrar adding machine grubunu alalım. G nin 1.seviyeyi sabit bırakan $St_G(1)$ alt grubunu düşünelim. Kolaylıkla hesaplanabilir ki bu alt grup $\langle a^2 : a \in G\rangle$ dir ve $2\mathbb{Z}$ ye izomorftur. $[\mathbb{Z} : 2\mathbb{Z}] = 2$ olup sonludur. Böylece*

$$\begin{array}{rcccl} \phi & : & 2\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ & & x & \longmapsto & \frac{x}{2} \end{array}$$

bir grup homomorfizmidir. Böylece $\phi : \mathbb{Z} \dashrightarrow \mathbb{Z}$ sanal endomorfizmdir.

Tanım 3.1.10. *G kendine benzer grubu X^* ağacının ilk seviyesi üzerinde geçişken ve her $x \in X$ için,*

$$\begin{array}{rcccl} \phi_x & : & St_G(1) & \longrightarrow & G \\ & & g & \longmapsto & g|_x \end{array}$$

homomorfizmi örten ise G ye fraktal (kendini tekrarlar) denir.

Her $x \in X$ için,

$$\begin{array}{rcccl} \phi_x & : & St_G(1) & \longrightarrow & G \\ & & g & \longmapsto & g|_x \end{array}$$

dönüşümü bir homomorfizmdir. Çünkü, her $x \in X$ ve $g, h \in St_G(1)$ için, $h(x) = x$ ve

$$\begin{aligned} \phi_x(gh) &= (gh)|_x \\ &= g|_{h(x)} h|_x \\ &= g|_x h|_x \\ &= \phi_x(g)\phi_x(h) \end{aligned}$$

dir.

Tanım 3.1.11. *(G, X) kendine benzer etki olsun. $\mathcal{N} \subset G$ sonlu olmak üzere $\forall g \in G$ için öyle bir $k \in \mathbb{N}$ vardır ki $v \in X^*$ ve $|v| \geq k$ iken $g|_v \in \mathcal{N}$ ise G nin X^* üzerine etkisi büzülmedir denir. Minimal $\mathcal{N}$ kümesine kendine benzer etkinin nükleusu denir.*

Adding machine grubunun X^* üzerine etkisinin büzülme olup olmadığını araştıralım. Bu grup tek üreteçlidir ve $\mathbb{Z}$ ye izomorftur. $a^2 \in A$ alalım. Bu durumda $a^2|_0 = a$ olup $|v| \geq 1$ özelliğindeki $\forall v \in X^*$ için $a^2|_0 \in \mathcal{N} = \{a^{-1}, e, a\}$ olur. Benzer şekilde,

$$a^4|_{00} = \left(a^4|_0\right)|_0 = a^2|_0 = a$$

olup $|v| \geq 2$ özelliğindeki $\forall v \in X^*$ için $a^4|_{00} \in \mathcal{N} = \{a^{-1}, e, a\}$ dir. Benzer şekilde,

$$a^8|_{000} = (\left(a^8|_0\right)|_0)|_0 = a^4|_{00} = a$$

olup $|v| \geq 3$ özelliğindeki $\forall v \in X^*$ için $a^4|_{00} \in \mathcal{N} = \{a^{-1}, e, a\}$ dir. a nın tek kuvvetleri içinde böyle k sayısı bulunabilir. $a^5 \in A$ alalım.

$$a^5|_{00} = \left(a^5|_0\right)|_0 = a^2|_0 = a$$

olup $|v| \geq 2$ özelliğindeki $\forall v \in X^*$ için $a^5|_{00} \in \mathcal{N} = \{a^{-1}, e, a\}$ olur. Bu şekilde devam edersek $\forall a \in A$ için bu özelliği sağlayan bir $k \in \mathbb{N}$ vardır. Yani Adding machine büzülmedir.

3.2 Adding Machine Grubu

S_2, $X = \{0, 1\}$ kümesi üzerinde simetrik grup ve $\sigma = (01) \in S_2$ olmak üzere a, X^* üzerinde,

$$a = (1, a)\sigma$$

büküm tekrarlaması ile tanımlı dönüşüm olsun. Ayrıca a dönüşümü,

$$\begin{aligned} a(0w) &= 1w \\ a(1w) &= 0a(w) \end{aligned}$$

olarak da tanımlanır. a dönüşümü, X^* üzerinde sonsuz mertebeli devirli grup üretir. Bu grup adding machine grup olarak adlandırılır. Bu grubu kısaca A ile belirteceğiz. Permütasyonel büküm çarpım kullanarak, A nın elemanları,

$$\begin{aligned} a^2 &= (1,a)\sigma(1,a)\sigma \\ &= (a,a)\sigma^2 \\ &= (a,a) \end{aligned} \qquad \text{ve} \qquad \begin{aligned} a^3 &= a(1,a)\sigma(1,a)\sigma \\ &= a(a,a)\sigma^2 \\ &= a(a,a) \end{aligned}$$

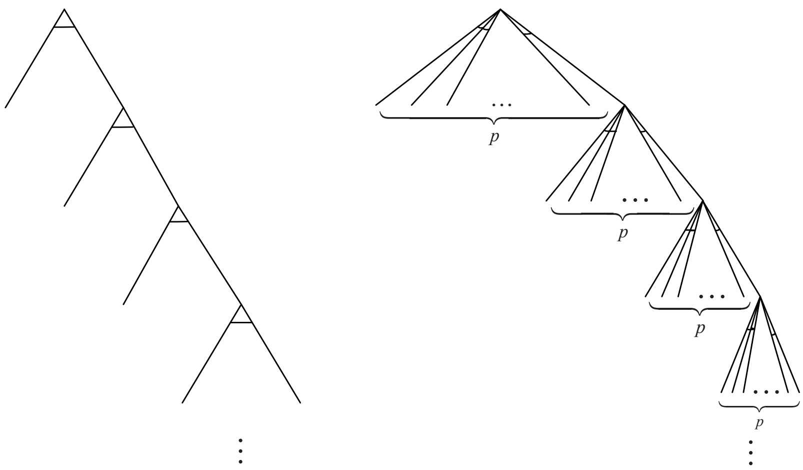
olarak ifade edilebilir. Genel olarak,

$$a^n = \begin{cases} (a^{\frac{n}{2}}, a^{\frac{n}{2}}) & , \ n \text{ çift ise} \\ a(a^{\frac{n-1}{2}}, a^{\frac{n-1}{2}}) & , \ n \text{ tek ise} \end{cases}$$

elde edilir.

$\sigma = (012...p-1) \in S_p$ ve $X = \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ olarak alınırsa a dönüşümü,

$$a = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{p-1}, a)\sigma$$



Şekil 3.4. $X = \{0,1\}$ and $X = \{0,1,\ldots,p-1\}$ için a nın resmi

olarak tanımlanır. Böylece,

$$\begin{aligned} a^p &= (1,\ldots,1,a)\sigma(1,\ldots,1,a)\sigma\ldots(1,\ldots,1,a)\sigma \\ &= (a,a,\ldots,a)\sigma^p \\ &= (a,a,\ldots,a) \end{aligned}$$

elde edilir.

Herhangi bir

$$w_0 + w_1p + w_2p^2 + \ldots + w_np^n + \ldots$$

$p-$sel tamsayısı, X alfabesi üzerinde bir $w = w_1w_2\ldots w_n\ldots$ sonsuz dizisi olarak tanımlanabilir. Bu dönüşüme adding machine dönüşümü adı verilmesinin sebebi, herhangi bir $p-$sel tamsayıya bir ekleyerek etki etmesidir. Örnek olarak,

$$a \;:\; \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_2$$

olarak düşünelim. Bu durumda;

$w = 0 = 0 + 0.2 + 0.2^2 + \ldots$ için $a(w) = 1 = 1 + 0.2 + 0.2^2 + \ldots$,

$w = 0 = 0 + 0.2 + 0.2^2 + \ldots$ için $a^2(w) = 2 = 0 + 1.2 + 0.2^2 + \ldots$,

$w = -1 = 1 + 1.2 + 1.2^2 + \ldots$ için $a(w) = 0 = 0 + 0.2 + 0.2^2 + \ldots$

dir.

A nın ilgili d metriğine göre kapanışını $\overline{A}$ ile gösterilsin.

Önerme 3.2.1. *$\overline{A}$, $Aut(X^*)$ ın alt grubudur.*

Kanıt. Her $g, h \in \overline{A}$ için, $gh \in \overline{A}$ ve $g^{-1} \in \overline{A}$ olduğunu göstermeliyiz. $g, h \in \overline{A}$ olsun. A da,

$$\lim_{n\to\infty} g_n = g \text{ ve } \lim_{n\to\infty} h_n = h$$

olacak şekilde A da (g_n),(h_n) dizileri vardır. Böylece, $\lim_{n\to\infty}(g_n, h_n) = (g, h)$ dir. Diğer taraftan,

$$\begin{array}{rcccc} \psi & : & Aut(X^*) \times Aut(X^*) & \longrightarrow & Aut(X^*) \\ & & (g,h) & \longmapsto & gh \end{array}$$

fonksiyonunun sürekli olduğu Önerme 2.1.4 da gösterildi. Böylece

$$\lim_{n\to\infty} g_n h_n = gh$$

olur. $g_n h_n$ dizisi A da olduğundan dolayı $gh \in \overline{A}$ elde edilir.

$$\begin{array}{rcccc} \varphi & : & Aut(X^*) & \longrightarrow & Aut(X^*) \\ & & g & \longmapsto & g^{-1} \end{array}$$

fonksiyonu sürekli olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} g_n^{-1} = g^{-1}$$

elde edilir. g_n dizisi A da olup A grup olduğundan g_n^{-1} de A dadır. Böylece, $g^{-1} \in \overline{A}$ olur. Yani; $\overline{A}$, $Aut(X^*)$ nin alt grubudur. □

Önerme 3.2.2. *$\overline{A}$, kendine benzer gruptur.*

Kanıt. Öncelikle her $g \in \overline{A}$ için $g|_0, g|_1 \in \overline{A}$ olduğunu göstereceğiz. $g \in \overline{A}$ olduğundan dolayı,

$$\lim_{k\to\infty} a^{n_k} = g$$

olacak şekilde terimleri A da olan (a^{n_k}) dizisi vardır. Böylece (n_k) dizisinin terimleri ya çift ya da tek olacak şekilde (n_l) alt dizisi vardır. Bu durumda,

$$g|_0 = \begin{cases} \lim_{l\to\infty} a^{\frac{n_l}{2}} & , \ (n_l) \text{ çift ise} \\ \lim_{l\to\infty} a^{\frac{n_l-1}{2}} & , \ (n_l) \text{ tek ise} \end{cases} \qquad g|_1 = \begin{cases} \lim_{l\to\infty} a^{\frac{n_l}{2}} & , \ (n_l) \text{ çift ise} \\ \lim_{l\to\infty} a^{\frac{n_l+1}{2}} & , \ (n_l) \text{ tek ise} \end{cases}$$

olarak elde edilir. $(a^{\frac{n_l}{2}})$,$(a^{\frac{n_l-1}{2}})$ ve $(a^{\frac{n_l+1}{2}})$ A da olduğundan $g|_0, g|_1 \in \overline{A}$ dir. Benzer şekilde, $g|_{v_1 v_2} = g|_{v_1}|_{v_2}$ olduğundan dolayı her $v \in X^*$ için $g|_v \in \overline{A}$ olur. □

3.3 Grigorchuk Grup

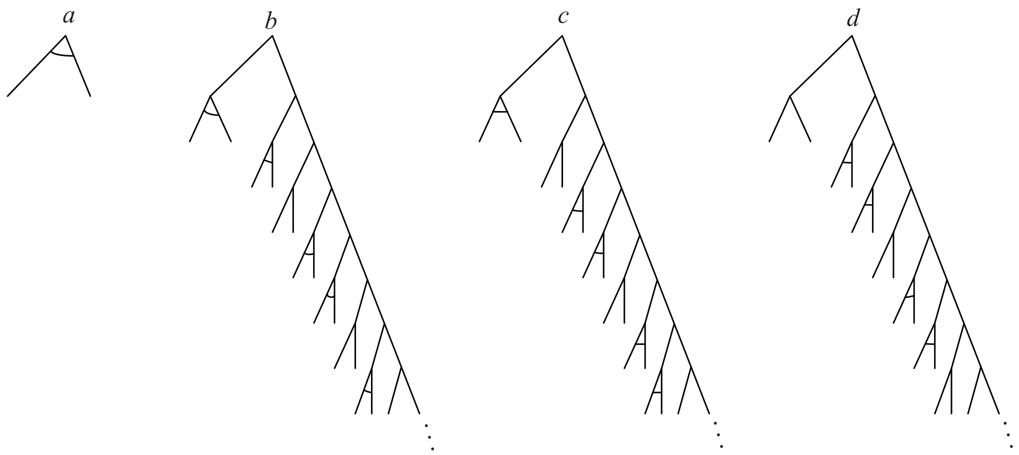
S_2, $X = \{0,1\}$ kümesi üzerinde simetrik grup ve $\sigma = (01) \in S_2$ olmak üzere a, b, c, d, X^* üzerinde,

$$\begin{aligned} a &= (1,1)\sigma \\ b &= (a,c) \\ c &= (a,d) \\ d &= (1,b) \end{aligned}$$

büküm tekrarlaması ile tanımlı dönüşümler olsun. Ayrıca a, b, c, d dönüşümleri,

$$\begin{array}{lcl} a(0w) = 1w & , & a(1w) = 0w \\ b(0w) = 0a(w) & , & b(1w) = 1c(w) \\ c(0w) = 0a(w) & , & c(1w) = 1d(w) \\ d(0w) = 0w & , & d(1w) = 1b(w) \end{array}$$

olarak ifade edilir.



Şekil 3.5. Grigorchuk grubunun üreteçlerinin resmi

Grigorchuk grup, X^* ağacına etki eden yukarıda tanımlı a, b, c, d otomorfizmleri tarafından üretilen gruptur ve Sidki anlamında kendine benzer grupların en temel örneklerinden biridir. Bu grubu G ile gösterelim. G, sonlu üreteçli sonsuz periyodik gruptur. Yani; her elemanı sonlu mertebeye sahiptir. G nin bazı özellikleri aşağıda verilmektedir:

- a, b, c, d otomorfizmlerinin her birinin mertebesi 2 dir. Yani; $a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = 1$ dir.

- G bir sonsuz $2-$ gruptur. Yani; her $g \in G$ için $g^{2^n} = 1$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ vardır.

- b, c, d elemanları değişmelidir ve $bc = cb = d$, $bd = db = c$ ve $cd = dc = b$ dir. Böylece $\langle b, c, d \rangle$, G nin alt grubudur ve $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ grubuna izomorftur.

- Grigorchuk grubunun her elemanı, $i = 1, 2, \ldots, m-1$ için $s_i \in \{b, c, d\}$ ve $s_0, s_m \in \{1, b, c, d\}$ olmak üzere, $s_0 a s_1 a s_2 a \ldots s_{m-1} a s_m$ şeklindedir.

- Büküm çarpım kullanarak $aba = (c, a)$, $aca = (d, a)$ ve $ada = (b, 1)$ elde edilir.

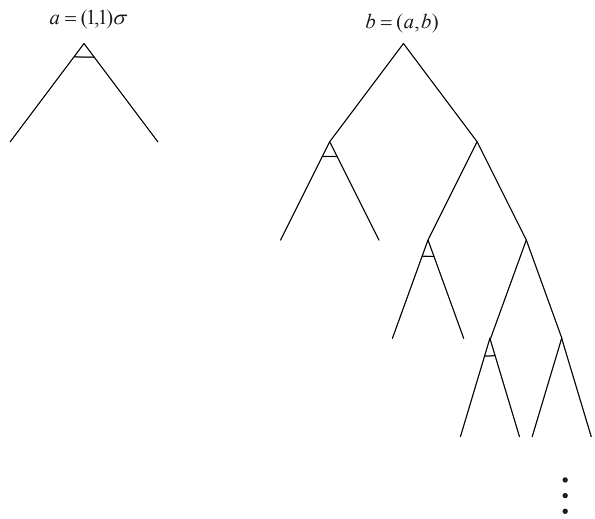
- $St_G(1) = \langle b, c, aba, aca \rangle$ dir. $[G : St_G(1)] = 2$ ve $G = St_G(1) \sqcup aSt_G(1)$ dir.

3.4 Sonsuz Dihedral Grup

a ve b, $X^\omega = \{0, 1\}^\omega$ uzayı üzerinde $w \in X^\omega$ keyfi olmak üzere,

$$\begin{array}{rclcrcl} (0w)^a & = & 1w & \quad & (0w)^b & = & 0w^a \\ (1w)^a & = & 0w & \quad & (1w)^b & = & 1w^b \end{array}$$

kurallarını sağlayan iki dönüşüm olsun.



Şekil 3.6. Sonsuz dihedral grubunun üreteçlerinin resmi

Büküm tekrarlaması ile bu dönüşümler,

$$\begin{array}{rcl} a & = & (1,1)\sigma \\ b & = & (a, b) \end{array}$$

olacak şekilde ifade edilir.

a ve b dönüşümleri tarafından üretilen bu grup

$$\mathbb{D}_\infty = \left\langle a, b \mid a^2 = b^2 = 1 \right\rangle$$

sonsuz dihedral grubuna izomorftur. Böylece; $a|_0 = 1$, $a|_1 = 1$, $b|_0 = a$ ve $b|_1 = b$ olduğundan açık olarak kendine benzer bir otomorfizm grubudur.

4 YİNELEMELİ FONKSİYON SİSTEMİ (YFS) ANLAMINDA KENDİNE BENZER GRUPLAR

Cantor kümesi, Sierpinski üçgeni ve Koch eğrisi klasik fraktallerin en temel örneklerindendir. Bu örneklerden de kolaylıkla anlaşılabileceği gibi fraktal kümelerin kabul edilen en önemli özelliği kendine benzerliktir. Yani; fraktal bir kümenin keyfi küçük parçalarında tüm kümeyi görebilmekteyiz. Bu bölümdeki asıl amacımız, kompakt topolojik gruplar için Ş. Koçak tarafından tanımlanan yinelemeli fonksiyon sistemi (YFS) anlamında kendine benzerlik tanımını verip bu grupların temel özelliklerini araştırmaktır. Ayrıca, hangi klasik fraktaller üzerinde kendine benzer grup tanımının anlamlı olacağını açıklayacağız.

4.1 YFS Anlamında Kendine Benzer Grup Tanımı

Ş.Koçak tarafından tanımlanan bir kompakt topolojik grubun kendine benzerliği aşağıdaki tanımda verilmektedir. Bu çalışma boyunca, G grubu için, aksi belirtilmedikçe üzerindeki işlem $*$ olarak alınacaktır.

Tanım 4.1.1. *(G, d) kompakt topolojik grup ve d öteleme altında değişmeyen bir metrik olsun. Eğer G nin kendisinden farklı sonlu indeksli H alt grubu ve ilgili d metriğine göre büzülme olan $\phi : G \to H$ örten homomorfizmi var ise G grubuna yinelemeli fonksiyon sistemi (YFS) anlamında kendine benzer gruptur denir.*

Örnek 4.1.2. *Her sonlu G grubu, üzerindeki ayrık metrik ile YFS anlamında kendine benzerdir. Çünkü G, üzerindeki ayrık topoloji ile kompakt topolojik gruptur. e, G grubunun birim elemanı ve $|G| = m$ olsun. Eğer $H = \{e\}$ olarak tanımlarsak,*

$$\begin{array}{rccc} \phi & : & G & \to & H \\ & & g & \mapsto & e \end{array}$$

fonksiyonu açık olarak örten bir grup homomorfizmidir ve büzülme dönüşümüdür. Ayrıca, $[G : H] = m$ olup G grubu, YFS anlamında kendine benzerdir.

Sonuç 4.1.3. *G, YFS anlamında kendine benzer bir grup ve Tanım 4.1.1 de* *verilen H, G nin normal alt grubu olsun. Böylece G/H bölüm grubu üzerindeki ayrık metriğe göre YFS anlamında kendine benzer bir gruptur.*

Tanım 4.1.4. (G, d) *kompakt topolojik grup ve d öteleme altında değişmeyen bir metrik olsun. Eğer G nin kendisinden farklı sonlu indeksli H alt grubu ve ilgili d metriğine göre büzülme olan $\phi : G \to H$ izomorfizmi var ise G grubuna YFS anlamında kuvvetli kendine benzer gruptur denir.*

Örnek 4.1.5. *Sonlu bir G grubu hiçbir zaman YFS anlamında kuvvetli kendine benzer grup olamaz. Çünkü, hiçbir sonlu grup onun kendisinden farklı bir alt grubuna izomorf olamaz.*

4.2 YFS Anlamında Kendine Benzer Grupların Özellikleri

Önerme 4.2.1. *YFS anlamında kendine benzer grup bir YFS nin atraktörüdür.*

Kanıt. G, yinelemeli fonksiyon sistemi anlamında kendine benzer bir grup olduğu için sonlu indeksli H alt grubu ve ilgili d metriğine göre büzülme olan $\phi_0 : G \to H$ örten homomorfizmi vardır. $[G : H] = n$ olsun. Bu durumda $x_0 = e$ elemanı G nin birimi olmak üzere, her $i, j \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ ve $i \neq j$ için,

$$(H * x_i) \cap (H * x_j) = \emptyset$$

ve

$$G = H \cup (H * x_1) \cup (H * x_2) \ldots \cup (H * x_{n-1})$$

olacak şekilde H nin G de kosetleri vardır. Her bir $i = 1, 2, \ldots, n-1$ için,

$$\begin{array}{rccl} \phi_i & : & G & \to & G \\ & & g & \mapsto & \phi_0(g) * x_i \end{array}$$

büzülme dönüşümü olduklarını gösterelim. ϕ_0 dönüşümünün tanımından

$$\phi_i(G) = H * x_i$$

olduğu açıktır. ϕ_0 büzülme sabiti k olan büzülme dönüşümü ve G ilgili d

metriğine göre öteleme altında değişmez olduğundan,

$$
\begin{aligned}
d(\phi_i(g), \phi_i(h)) &= d(\phi_0(g) * x_i, \phi_0(h) * x_i) \\
&= d(\phi_0(g), \phi_0(h)) \\
&\leq kd(g, h)
\end{aligned}
$$

elde ederiz. Böylece, her bir $i = 1, 2, \ldots, n-1$ için ϕ_i büzülme sabiti k olan büzülme dönüşümüdür ve

$$
G = \phi_0(G) \cup \phi_1(G) \cup \ldots \cup \phi_n(G)
$$

olur. Yani; G, $\{\phi_0, \phi_1, \ldots \phi_{n-1}\}$ yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörüdür.

□

Önerme 4.2.2. *$(G, *, d)$ ve $(G', *', d')$ birer kompakt topolojik grup olsunlar. G, YFS anlamında kendine benzer grup ve $f : G \to G'$ hem izometri dönüşümü hem de bir grup izomorfizmi ise G' de YFS anlamında kendine benzer gruptur.*

Kanıt. d' nün öteleme altında değişmez bir metrik olduğunu gösterelim. Her $g', h', a' \in G'$ için f örten olduğundan, $f(g) = g', f(h) = h'$ ve $f(a) = a'$ olacak şekilde $g, h, a \in G$ vardır. f uzaklığı koruyan bir grup homomorfizmi ve d öteleme altında değişmez olduğundan,

$$
\begin{aligned}
d'(g' *' a', h' *' a') &= d'(f(g) *' f(a), f(h) *' f(a)) \\
&= d'(f(g * a), f(h * a)) \\
&= d(g * a, h * a) \\
&= d(g, h) \\
&= d'(f(g), f(h)) \\
&= d'(g', h')
\end{aligned}
$$

elde edilir.

G, YFS anlamında kendine benzer bir grup olduğundan sonlu indeksli H alt grubu ve $\phi : G \to H$ örten homomorfizmi vardır. $f(H) = H'$ olsun. f bir grup izomorfizmi olduğundan, H', G' nün sonlu indeksli alt grubu olduğu açıktır.

$\phi' = f_{|_H} \circ \phi \circ f^{-1} : G' \to H'$ nün bir büzülme dönüşümü ve örten grup homomorfizmi olduğunu gösterelim.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "f"'] & H \arrow[d, "f|_H"] \\ G' \arrow[r, "\phi'"'] & H' \end{tikzcd}$$

f, $f|_H$ ve ϕ örten grup homomorfizmleri olduğundan ϕ' de örten grup homomorfizmidir. Ayrıca ϕ, büzülme sabiti k olan bir büzülme dönüşümü ve f, $f|_H$ izometri dönüşümleri olup,

$$\begin{aligned} d'(\phi'(g'), \phi'(h')) &= d'(f_{|_H} \circ (\phi \circ f^{-1})(g'), f_{|_H} \circ (\phi \circ f^{-1}(h'))) \\ &= d(\phi \circ f^{-1}(g'), \phi \circ f^{-1}(h')) \\ &\leq kd(f^{-1}(g'), f^{-1}(h')) \\ &= kd'(g', h') \end{aligned}$$

elde edilir. □

Uyarı 4.2.3. *YFS anlamında kuvvetli kendine benzer grup içinde Önerme 4.2.1 ve Önerme 4.2.2 geçerlidir.*

Önerme 4.2.4. *G, YFS anlamında kendine benzer bir grup ise G bağlantısız bir kümedir.*

Kanıt. G nın bağlantılı olduğunu varsayalım. G, YFS anlamında kendine benzer bir grup olduğundan kompakt bir topolojik gruptur ve Önerme 4.2.1 deki gibi bir $\{\phi_0, \ldots, \phi_{n-1}\}$ yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörüdür. $i = 1, 2, \ldots, n-1$ için,

$$\phi_i : G \to \phi_i(G)$$

dönüşümleri birer büzülme olup süreklidir ve kompakt bir kümenin sürekli fonksiyon altındaki görüntüsü kompakt olup $\phi_i(G)$ kompakttır. Ayrıca metrik uzay olduğundan Hausdorfftur ve böylece $\phi_i(G)$ kapalıdır. Ayrıca $\{\phi_0, \ldots, \phi_{n-1}\}$ yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörü G, her $i, j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ ve $i \neq j$ için,

$$\begin{aligned} G &= \phi_0(G) \cup \phi_1(G) \cup \ldots \cup \phi_{n-1}(G) \\ \emptyset &= \phi_i(G) \cap \phi_j(G) \end{aligned}$$

dir. Fakat,

$$\begin{aligned} G &= \phi_0(G) \cup [\phi_1(G) \cup \ldots \cup \phi_{n-1}(G)] \\ \emptyset &= \phi_0(G) \cap [\phi_1(G) \cup \ldots \cup \phi_{n-1}(G)] \end{aligned}$$

olduğundan $\{\phi_0(G), [\phi_1(G) \cup \ldots \cup \phi_N(G)]\}$ kümesi G metrik uzayının kapalı bir ayrışımıdır. Bu ise G nın bağlantılı olması ile çelişir. □

Sonuç 4.2.5. *Yukarıdaki önerme, her fraktal küme üzerinde bir YFS anlamında kendine benzer grup tanımlanamayacağını gösterir. Sierpinski üçgeni, Koch eğrisi, Sierpinski halısı en iyi bilinen fraktal küme örnekleridir. Fakat bu kümeler bağlantılı olduğundan dolayı bu kümeler üzerinde YFS anlamında kendine benzer grup tanımlanamaz. Bu tanıma uyan fraktal küme Cantor kümesidir. Bu yüzden son bölümde verilen YFS anlamında kendine benzer grup örneklerdeki kümeler Cantor kümesi veya bu kümeye homeomorf olan kümelerdir.*

Önerme 4.2.6. *G, YFS anlamında kuvvetli kendine benzer bir grup ise G tamamen bağlantısız bir kümedir.*

Kanıt. $\phi_0 : G \to H$ bire-bir ve örten olduğundan,

$$\begin{aligned} \phi_i(g) = \phi_i(h) &\Rightarrow \phi_0(g) * x_i = \phi_0(h) * x_i \\ &\Rightarrow \phi_0(g) = \phi_0(h) \\ &\Rightarrow g = h \\ &\Rightarrow \text{Her bir } i = 1, 2, \ldots, n-1 \text{ için } \phi_i \text{ bire-birdir.} \end{aligned}$$

Ayrıca G, YFS anlamında kendine benzer bir grup olduğundan Önerme 4.2.1 deki gibi bir YFS nin atraktörüdür. Yani, her $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ve $i \neq j$ için $\phi_i(G) \cap \phi_j(G) = \emptyset$ ve büzülme dönüşümleri bire-bir olacak şekilde atraktörü G olan $\{\phi_0, \phi_1, \ldots \phi_{n-1}\}$ yinelemeli fonksiyon sistemi vardır. Teorem 1.6.6 gereğince bu YFS tamamen bağlantısızdır. Böylece Teorem 1.6.7 gereğince de G tamamen bağlantısız bir kümedir. □

Teorem 4.2.7. *$G_1, G_2, \ldots, G_n$; YFS anlamında kendine benzer gruplar ise $G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$, YFS anlamında kendine benzer gruptur.*

Kanıt. $(G_1, *_1, d_1), (G_2, *_2, d_2), \ldots, (G_n, *_n, d_n)$ kompakt topolojik grup olduğundan $G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ de kompakt topolojik gruptur. Ayrıca YFS anlamında kendine benzer grup olduklarından, her bir $i = 1, 2, \ldots, n$ için, $[G_i : H_i] = m_i$ olacak şekildeki alt grupları vardır ve

$$\varphi_i \ : \ G_i \ \to \ H_i$$

büzülme dönüşümü ve grup homomorfizmidir.

$$\begin{array}{rccl} \phi & : & G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n & \to & H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_n \\ & & (g_1, g_2, \ldots, g_n) & \mapsto & (\varphi_1(g_1), \varphi_2(g_2), \ldots, \varphi_n(g_n)) \end{array}$$

dönüşümünü alalım. Açık olarak $H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_n$, $G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ nin alt grubudur ve $[G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n : H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_n] = m_1 m_2 \ldots m_n$ dir. Şimdi ϕ nin bir grup homorfizmi olduğunu gösterelim. $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ bir grup homomorfizmi olduğundan

$$\begin{aligned} \phi(g * h) &\Rightarrow \phi((g_1, g_2, \ldots, g_n) * (h_1, h_2, \ldots, h_n)) \\ &\Rightarrow \phi((g_1 *_1 h_1, g_2 *_2 h_2, \ldots, g_n *_n h_n)) \\ &\Rightarrow (\varphi_1(g_1 *_1 h_1), \varphi_2(g_2 *_2 h_2), \ldots, \varphi_n(g_n *_n h_n)) \\ &\Rightarrow (\varphi_1(g_1) *_1 \varphi_1(h_1), \ldots, \varphi_n(g_n) *_n \varphi_n(h_n)) \\ &\Rightarrow (\varphi_1(g_1), \ldots, \varphi_n(g_n)) * (\varphi_1(h_1), \ldots, \varphi_n(h_n)) \\ &\Rightarrow \phi((g_1, g_2, \ldots, g_n)) * \phi((h_1, h_2, \ldots, h_n)) \\ &\Rightarrow \phi(g) * \phi(h) \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi ϕ nin bir büzülme dönüşümü olduğunu gösterelim. Her $i = 1, 2, \ldots, n$ için φ_i büzülme dönüşümlerinin büzülme sabiti k_i olmak üzere $k = \max\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$ olarak seçilirse

$$\begin{aligned} d(\phi(g), \phi(h)) &= d(\phi(g_1, g_2, \ldots, g_n), \phi(h_1, h_2, \ldots, h_n)) \\ &= d((\varphi_1(g_1), \ldots, \varphi_n(g_n)), (\varphi_1(h_1), \ldots, \varphi_n(h_n))) \\ &= \max\{d_1(\varphi_1(g_1), \varphi_1(h_1)), \ldots, d_n(\varphi_n(g_n), \varphi_n(h_n))\} \\ &\leq \max\{k_1 d_1(g_1, h_1), \ldots, k_n d_n(g_n, h_n)\} \\ &\leq \max\{k d_1(g_1, h_1), \ldots, k d_n(g_n, h_n)\} \\ &= k \max\{d_1(g_1, h_1), \ldots, d_n(g_n, h_n)\} \\ &= kd((g_1, g_2, \ldots, g_n), (h_1, h_2, \ldots, h_n)) \\ &= kd(g, h) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ϕ bir büzülme dönüşümüdür. $G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$, YFS anlamında kendine benzer gruptur. $\square$

Uyarı 4.2.8. *YFS anlamında kendine benzer bir grubun kapanışı da YFS anlamında kendine benzerdir. Çünkü, YFS anlamında kendine benzer bir grup kompakt olduğundan kapalıdır ve kapalı kümenin kapanışıda kendisidir.*

4.3 Profinite Gruplar ve YFS Anlamında Kendine Benzer Gruplar Arasındaki İlişki

Teorem 4.3.1. *YFS anlamında kuvvetli kendine benzer bir grup profinite gruptur.*

Kanıt. Tanımından dolayı YFS anlamında kendine benzer grup bir kompakt topolojik gruptur. Ayrıca metrik uzay olduğundan Hausdorfftur. Tamamen bağlantısız olduğu Önerme 4.2.6 de gösterilmiştir. Böylece YFS anlamında kendine benzer grup profinite grupları karaterize eden özelliklere sahiptir. $\square$

Yukarıdaki teoremin tersi her zaman doğru değildir. Yani bir profinite grup YFS anlamında kuvvetli kendine benzer bir grup olmayabilir.

Örnek 4.3.2. *G sonlu grubu üzerindeki ayrık metrik ile verilsin. Bu durumda G açık olarak kompakt, Hausdorff ve tamamen bağlantısız bir topolojik gruptur. Yani bir profinite gruptur. Fakat Örnek 4.1.5 gereğince YFS anlamında kuvvetli kendine benzer bir grup değildir.*

Şimdi aşağıda verilen koşul altında bir profinite grubun YFS anlamında kuvvetli kendine benzer bir grup olduğunu göstereceğiz.

Koşul (*): G metriklenebilir bir profinite grup olsun. Bu durumda, $I = \{1, 2, 3, \ldots\}$ olmak üzere her $i \in I$ için $N_{i+1} \subseteq N_i$ olacak şekildeki G nin içiçe geçmiş açık normal alt grupları,

$$G \cong \varprojlim_{i \in I} (G/N_i)$$

olacak şekilde vardır. G nin yukarıda tanımlı normal açık alt grupları arasındaki ilişki aşagıdaki gibi verilsin:

$\forall i \in I$ için $f(N_i) = N_{i+1}$ olacak şekilde $f : G \to N_1$ bir izomorfizmdir.

Teorem 4.3.3. *G, (*) koşulunu sağlayan metriklenebilir bir profinite grup ise YFS anlamında kuvvetli kendine benzer bir gruptur.*

Kanıt. G profinite grup olduğundan kompakt topolojik gruptur. Ayrıca, $I = \{1, 2, 3, \ldots\}$ olmak üzere her $i \in I$ için $N_{i+1} \subseteq N_i$ olacak şekildeki G nin içiçe geçmiş açık normal alt grupları olmak üzere, 1.7.7 den dolayı

$$G \cong \varprojlim_{i \in I} (G/N_i)$$

dir. G, (*) koşulunu sağladığından her $i \in I$ için $f(N_i) = N_{i+1}$ olacak şekilde $f : G \to N_1$ bir grup izomorfizmi vardır. Böylece; her $i \in I$ için,

$$\varphi_{(i+1)i} : G/N_{i+1} \to G/N_i$$

doğal homomorfizmleri,

$$\varphi_{(i+1)i}(N_{i+1} * g_{i+1}) = N_i * g_i \text{ ve } g_{i+1} * g_i^{-1} \in N_i$$

olarak tanımlandığından,

$$G = \{(N_1 * g_1, N_2 * g_2, \ldots, N_i * g_i, \ldots) \in \prod_{i \in I} (G/N_i) \mid \varphi_{(i+1)i}(N_{i+1} * g_{i+1}) = N_i * g_i,\ g_{i+1} * g_i^{-1} \in N_i\}$$

olarak ifade edilebilir. Ayrıca, $i \in I$ olmak üzere,

$$N_1 \cong \varprojlim_{i \geq 2} (N_1/N_i)$$

olduğundan, N_1 de bir profinite gruptur. Her $i \in I$ için,

$$\varphi_{(i+1)i} : N_1/N_{i+1} \to N_1/N_i$$

doğal homomorfizmleri, $g_0 = e$ birim eleman olmak üzere,

$$\varphi_{(i+1)i}(N_{i+1} * f(g_i)) = N_i * f(g_{i-1}) \text{ ve } f(g_i * g_{i-1}^{-1}) \in N_i$$

olacak şekilde tanımlandığından,

$$N_1 = \{(N_1 * e, N_2 * f(g_1), \ldots, N_{i+1} * f(g_i), \ldots) \in \prod_{i \in I} (N_1/N_i)\} \mid \varphi_{(i+1)i}(N_{i+1} * f(g_i)) = N_i * f(g_{i-1}),\ f(g_i * g_{i-1}^{-1}) \in N_i\}$$

olarak ifade edilebilir. $N_1 \lhd_o G$ olduğundan Y. Teorem 1.4.1 gereğince N_1, G de sonlu indekslidir. Şimdi,

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & G & \to & N_1 \\ & (N_1 * g_1, N_2 * g_2, N_3 * g_3, \ldots) & \mapsto & (N_1 * e, N_2 * f(g_1), N_3 * f(g_2), \ldots) \end{array}$$

dönüşümünün bir büzülme dönüşümü ve bir grup izomorfizmi olduğunu göstereceğiz. Öncelikle iyi tanımlı olduğunu göstermeliyiz.

$A = (N_1 * g_1, N_2 * g_2, N_3 * g_3, \ldots)$ ve $B = (N_1 * h_1, N_2 * h_2, N_3 * h_3, \ldots)$, G nin iki keyfi elemanı olsunlar.

$$\begin{aligned} A = B &\Rightarrow \forall i \in I \text{ için } N_i * g_i = N_i * h_i \\ &\Rightarrow \forall i \in I \text{ için } g_i * h_i^{-1} \in N_i \\ &\Rightarrow \forall i \in I \text{ için } f(g_i * h_i^{-1}) \in f(N_i) = N_{i+1} \\ &\Rightarrow \forall i \in I \text{ için } f(g_i) * f(h_i)^{-1} \in N_{i+1} \\ &\Rightarrow \forall i \in I \text{ için } N_{i+1} * f(g_i) = N_{i+1} * f(h_i) \\ &\Rightarrow \varphi(A) = \varphi(B) \end{aligned}$$

olup φ iyi tanımlıdır.

φ nin bire-bir olduğu,

$$\begin{aligned} \varphi(A) = \varphi(B) &\Rightarrow \forall i \in I \text{ için } N_{i+1} * f(g_i) = N_{i+1} * f(h_i) \\ &\Rightarrow \forall i \in I \text{ için } f(g_i) * f(h_i)^{-1} \in N_{i+1} \\ &\Rightarrow \forall i \in I \text{ için } f^{-1}(f(g_i * h_i^{-1})) \in f^{-1}(N_{i+1}) \\ &\Rightarrow \forall i \in I \text{ için } g_i * h_i^{-1} \in N_i \\ &\Rightarrow \forall i \in I \text{ için } N_i * g_i = N_i * h_i \\ &\Rightarrow A = B \end{aligned}$$

olarak gösterilir. φ tanımından dolayı $\varphi(G) = N_1$ olup φ örtendir.

$$\begin{aligned} \varphi(A * B) &= \varphi((N_1 * g_1, N_2 * g_2, N_3 * g_3, \ldots) * (N_1 * h_1, N_2 * h_2, N_3 * h_3, \ldots)) \\ &= \varphi(N_1 * g_1 * h_1, N_2 * g_2 * h_2, N_3 * g_3 * h_3, \ldots) \\ &= (N_1 * e, N_2 * f(g_1 * h_1), N_3 * f(g_2 * h_2), \ldots) \\ &= (N_1 * e, N_2 * f(g_1 * h_1), N_3 * f(g_2 * h_2), \ldots) \\ &= (N_1 * e, N_2 * f(g_1) * f(h_1), N_3 * f(g_2) * f(h_2), \ldots) \\ &= (N_1, N_2 * f(g_1), N_3 * f(g_2), \ldots) * (N_1, N_2 * f(h_1), N_3 * f(h_2), \ldots) \\ &= \varphi(N_1 * g_1, N_2 * g_2, N_3 * g_3, \ldots) * \varphi(N_1 * h_1, N_2 * h_2, N_3 * h_3, \ldots) \\ &= \varphi(A) * \varphi(B) \end{aligned}$$

olup φ bir grup homomorfizmidir.

φ nin bir büzülme dönüşümü olduğunu gösterelim. $d(A, B) = \frac{1}{2^k}$ olsun. $i = 1, 2, \ldots, k-1$ için $N_i * g_i = N_i * h_i$ dır. Böylece,

$$\begin{aligned} N_i * g_i = N_i * h_i &\Rightarrow g_i * h_i^{-1} \in N_i \\ &\Rightarrow f(g_i * h_i^{-1}) \in f(N_i) = N_{i+1} \\ &\Rightarrow f(g_i) * f(h_i)^{-1} \in N_{i+1} \\ &\Rightarrow N_{i+1} * f(g_i) = N_{i+1} * f(h_i) \end{aligned}$$

olur ve $i = k$ için $N_i * g_i \neq N_i * h_i$ dir. O halde,

$$\begin{aligned} N_k * g_k \neq N_k * h_k &\Rightarrow g_k * h_k^{-1} \notin N_k \\ &\Rightarrow f(g_k * h_k^{-1}) \notin f(N_k) = N_{k+1} \\ &\Rightarrow f(g_k) * f(h_k)^{-1} \notin N_{k+1} \\ &\Rightarrow N_{k+1} * f(g_k) \neq N_{k+1} * f(h_k) \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned} d(\varphi(A), \varphi(B)) &= d((N_1 * e, N_2 * f(g_1), \ldots), (N_1 * e, N_2 * f(h_1), \ldots)) \\ &\leq \tfrac{1}{2^{k+1}} \\ &= \tfrac{1}{2} d(A, B) \end{aligned}$$

olur. Yani, φ bir büzülme dönüşümüdür.

Son olarak φ nin öteleme-invaryant olduğunu gösterelim. Yani; her $x, y, a \in G$ için $d(x * a, y * a) = d(x, y)$ olduğunu göstermeliyiz. Her $k = 1, 2, \ldots$ için, φ_k bir grup homomorfizmi olup,

$$\begin{aligned} \varphi_k(x * a) = \varphi_k(y * a) &\Leftrightarrow \varphi_k(x) * \varphi_k(a) = \varphi_k(y) * \varphi_k(a) \\ &\Leftrightarrow \varphi_k(x) = \varphi_k(y) \end{aligned}$$

Bu ise metriğin tanımından dolayı öteleme-invaryant olduğunu gösterir.

Sonuç olarak G, YFS anlamında kuvvetli kendine benzer gruptur. □

Önerme 4.3.4. *G, $(*)$ koşulunu sağlayan bir grup ve $[G : N_1] = n$ ise $i = 1, 2, \ldots$ için $[N_i : N_{i+1}] = n$ dir.*

Kanıt.

$$
\begin{aligned}
[G:N_1]=n \quad &\Rightarrow \quad G = N_1 \cup (N_2 * x_2) \cup \ldots \cup (N_{n-1} * x_{n-1}) \\
&\Rightarrow \quad f(G) = f(N_1 \cup (N_2 * x_2) \cup \ldots \cup (N_{n-1} * x_{n-1}) \\
&\Rightarrow \quad f(G) = f(N_1) \cup f(N_2 * x_2) \cup \ldots \cup f(N_{n-1} * x_{n-1}) \\
&\Rightarrow \quad f(G) = f(N_1) \cup (f(N_2) * f(x_2)) \cup \ldots \cup (f(N_{n-1}) * f(x_{n-1})) \\
&\Rightarrow \quad N_1 = N_2 \cup (N_2 * f(x_2)) \cup \ldots \cup (N_2 * f(x_{n-1}))
\end{aligned}
$$

ve her $i \neq j$ ve $i = 1, 2, \ldots$ için $(N_1 * x_i) \cap (N_1 * x_j) = \emptyset$ olduğundan

$$(N_2 * f(x_i)) \cap (N_2 * f(x_j)) = \emptyset$$

dir. Böylece $[N_1 : N_2] = n$ olur. Genel durum benzer şekilde ispat edilir. $\square$

5 KENDİNE BENZER GRUP ÖRNEKLERİ

5.1 $p-$sel Tamsayılar Grubu

Aşağıdaki önermede, $\mathbb{Q}_p$ nin bazı önemli alt gruplarının bir ailesi için bir YFS vereceğiz.

Önerme 5.1.1. *$n \in \mathbb{Z}$, $i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ ve*

$$\begin{array}{rccl} \psi_i & : & \mathbb{Q}_p & \to \mathbb{Q}_p \\ & & \sum_{k=m}^{\infty} a_k p^k & \mapsto ip^n + \sum_{k=m}^{\infty} a_k p^{k+1} \end{array}$$

olsun. Bu durumda $\{\mathbb{Q}_p, \{\psi_i\}_{i\in\{0,1,\dots,p-1\}}\}$ yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörü

$$G = \{a_n p^n + a_{n+1}p^{n+1} + a_{n+2}p^{n+2} + \dots \mid a_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}\}$$

dir.

Kanıt. $\mathbb{Q}_p$ nin tam ve $\mathbb{Z}_p$ nin kompakt olduğunu biliyoruz. Benzer şekilde G nin kompakt olduğu gösterilebilir. Öncelikle $i = 0, 1, \dots$ için ψ_i nin büzülme dönüşümleri olduklarını gösterelim. $a, b \in \mathbb{Q}_p$ olsun. Bu durumda $a = \sum_{k=m}^{\infty} a_k p^k$ ve $b = \sum_{k=s}^{\infty} b_k p^k$ olacak şekilde $m, s \in \mathbb{Z}$ vardır. Eğer

$$d_p(a, b) = |a - b|_p = \frac{1}{p^t}$$

ise

$$d_p(\psi_i(a), \psi_i(b)) = |\psi_i(a) - \psi_i(b)|_p = \frac{1}{p^{t+1}}$$

elde edilir. Böylece $i = 0, 1, \dots$ için ψ_i büzülme dönüşümleridir ve $\frac{1}{p}$ büzülme katsayılarıdır.

Son olarak,

$$G = \bigcup_{i=0}^{p-1} \psi_i(G)$$

olduğunu gösterelim. $a = a_n p^n + a_{n+1}p^{n+1} + \dots \in G$ verilsin. Eğer $b = a_{n+1}p^n + a_{n+2}p^{n+1} + \dots \in G$ olarak seçersek $i = 0, 1, \dots, p-1$ için $a_n = i$ olmak üzere $\psi_i(b) = a$ elde edilir. Böylece $\mathbb{Z}_p \subseteq \bigcup_{i=0}^{p-1} \psi_i(\mathbb{Z}_p)$ dir. Şimdi keyfi bir $a \in \bigcup_{i=0}^{p-1} \psi_i(G)$ alalım. Böylece $i \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ için $a = \psi_i(b)$ olacak şekilde $b = \sum_{j=n}^{\infty} b_j p^j \in G$ vardır. $i = 0, 1, \ldots, p-1$ için

$$a = \psi_i(b) = \sum_{j=n}^{\infty} b_j p^{j+1} + ip^n \in G$$

olduğundan dolayı $\psi_i(G) \subseteq G$ elde edilir. $\square$

$n = 0$ durumunda, $G = \mathbb{Z}_p$ dir ve $i = 0, 1, \ldots, p-1$ için

$$\begin{array}{rccl} \psi_i & : & \mathbb{Q}_p & \to & \mathbb{Q}_p \\ & & \sum_{k=m}^{\infty} a_k p^k & \mapsto & ip^0 + \sum_{k=m}^{\infty} a_k p^{k+1} \end{array}$$

olmak üzere $\{\mathbb{Q}_p, \{\psi_i\}_{i \in \{0,1,\ldots,p-1\}}\}$ YFS nin atraktörüdür.

Önerme 5.1.2. $G = \{a_n p^n + a_{n+1} p^{n+1} + a_{n+2} p^{n+2} + \ldots \mid a_i \in \{0, 1, \ldots, p-1\}\}$, *YFS anlamında kendine benzer gruptur.*

Kanıt. $\mathbb{Z}_p$ nin kompakt bir topolojik grup olduğunu biliyoruz . G nin kompakt topolojik grup olduğu da benzer şekilde gösterilebilir. Ayrıca, d_p nin öteleme altında değişmez metrik olduğu açıktır. Önerme 5.1.1 de, ψ_0 ın büzülme dönüşümü olduğunu gösterdik. Ayrıca,

$$\psi_0(G) = \{a_n p^{n+1} + a_{n+1} p^{n+2} + a_{n+2} p^{n+3} + \ldots \mid a_n \in \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}\}$$

G nin p indeksli alt grubudur. Böylece ψ_0 ın bir grup homomorfizmi olduğunu göstermek yeterlidir. $n, m \in \mathbb{Z}$ olma üzere $a = \sum_{k=n}^{\infty} a_k p^k$ ve $b = \sum_{k=m}^{\infty} b_k p^k$, $\mathbb{Q}_p$ nin keyfi elemanları olsunlar. $t = \min\{n, m\}$ olmak üzere $a + b = \sum_{k=t}^{\infty} c_k p^k$ olarak ifade edelim. Böylece,

$$\psi_0(a + b) = \sum_{k=t}^{\infty} c_k p^{k+1}$$

olur. $\psi_0(a) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k p^{k+1}$ ve $\psi_0(b) = \sum_{k=m}^{\infty} b_k p^{k+1}$ olduğundan dolayı,

$$\psi_0(a) + \psi_0(b) = \sum_{k=t}^{\infty} c_k p^{k+1}$$

dir. Böylece ψ_0 bir grup homomorfizmidir.

Ayrıca, ψ_0 ın bire-bir olduğu açıktır. Böylece, YFS anlamında kuvvetli kendine benzer gruptur. $\square$

5.2 Adding Machine Grubunun Kapanışı

Önerme 5.2.1. $X = \{0,1\}$ *olsun ve* $g \in Aut(X^*)$, $a \in A$ *verilsin. Eğer*

$$\begin{aligned} f_0 \; : \; Aut(X^*) &\rightarrow Aut(X^*) \\ g &\mapsto (g,g) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f_1 \; : \; Aut(X^*) &\rightarrow Aut(X^*) \\ g &\mapsto a(g,g) \end{aligned}$$

ise $\{Aut(X^*), f_0, f_1\}$ *nin atraktörü adding machine grubunun kapanışıdır.*

Kanıt. $(Aut(X^*), d)$ metrik uzayı kompakttır. Kompakt uzayın kapalı her alt uzayı kompakt olup $\overline{A}$ kompakttır. f_0 ve f_1 in büzülme dönüşümleri olduğunu Önerme 2.2.1 da gösterdik. Şimdi,

$$F(\overline{A}) = f_0(\overline{A}) \cup f_1(\overline{A}) = \overline{A} \tag{5.2}$$

olduğunu göstereceğiz. Keyfi $g \in \overline{A}$ verilsin. Böylece A da,

$$\lim_{k\to\infty} a^{n_k} = g$$

olacak şekilde (a^{n_k}) dizisi vardır. (n_k) dizisinin elemanlarının sonsuz tanesi tek yada çift olmalıdır. İlk olarak bu dizinin elemanlarının sonsuz tanesi çift olan (n_l) alt dizisinin olduğunu varsayalım. Açık olarak,

$$\lim_{l\to\infty} a^{n_l} = g$$

dır. (n_l) dizisinin elemanları çift olduğundan ve $a^{n_l} = (a^{\frac{n_l}{2}}, a^{\frac{n_l}{2}})$ eşitliği geçerli olduğundan,

$$\lim_{l\to\infty} (a^{\frac{n_l}{2}}, a^{\frac{n_l}{2}}) = g$$

elde edilir. $a^{\frac{n_l}{2}}$, A da bir dizi olduğundan $g = (h,h)$ olacak şekilde $h \in \overline{A}$ vardır. Böylece,

$$\lim_{l\to\infty} a^{\frac{n_l}{2}} = h$$

dir. Ayrıca $f_0(a^{\frac{n_l}{2}}) = (a^{\frac{n_l}{2}}, a^{\frac{n_l}{2}})$ olduğundan,

$$\lim_{l\to\infty} f_0(a^{\frac{n_l}{2}}) = g$$

dir. f_0 sürekli olduğundan, $g = f_0(h) \in f_0(\overline{A}) \subseteq F(\overline{A})$ elde edilir. Böylece, $\overline{A} \subseteq F(\overline{A})$ olur.

Eğer (n_l), (n_k) dizisinin elemanlarının sonsuz tanesi tek olan alt dizisiyse $a^{n_l} = a(a^{\frac{n_l-1}{2}}, a^{\frac{n_l-1}{2}})$ olmak üzere,

$$\lim_{l\to\infty} a(a^{\frac{n_l-1}{2}}, a^{\frac{n_l-1}{2}}) = g$$

olarak ifade edilebilir. $(a^{\frac{n_l-1}{2}})$, A da olduğundan $g = a(h,h)$ olacak şekilde $h \in \overline{A}$ vardır. Böylece,

$$\lim_{l\to\infty} a^{\frac{n_l-1}{2}} = h$$

elde edilir. Diğer taraftan $f_1(a^{\frac{n_l-1}{2}}) = a(a^{\frac{n_l-1}{2}}, a^{\frac{n_l-1}{2}})$ olduğundan,

$$\lim_{l\to\infty} f_1(a^{\frac{n_l-1}{2}}) = g$$

dir. f_1 sürekli olduğu için $g = f_1(h) \in f_1(\overline{A}) \subseteq F(\overline{A})$ elde edilir. Böylece $\overline{A} \subseteq F(\overline{A})$ dır.

$F(\overline{A}) \subseteq \overline{A}$ olduğunu gösterelim. Keyfi $h \in F(\overline{A})$ verilsin. Böylece $h = f_0(g)$ veya $h = f_1(g)$ olacak şekilde $g \in \overline{A}$ vardır. Ayrıca,

$$\lim_{k\to\infty} a^{n_k} = g$$

olacak şekilde A da (a^{n_k}) dizisi vardır. $h = f_0(g)$ olsun. f_0 sürekli olduğundan

$$\lim_{k\to\infty} f_0(a^{n_k}) = f_0(g)$$

dir. Ayrıca $f_0(a^n) = a^{2n} = (a^n, a^n)$ olduğundan

$$\lim_{k\to\infty} a^{2n_k} = f_0(g)$$

elde edilir. (a^{2n_k}), A da olduğundan dolayı,

$$h = f_0(g) \in \overline{A} \tag{5.3}$$

olur. $h = f_1(g)$ olsun. f_1 sürekli olduğundan

$$\lim_{k\to\infty} f_1(a^{n_k}) = f_1(g)$$

dir. Diğer taraftan $f_1(a^n) = a^{2n+1} = a(a^n, a^n)$ olduğundan

$$\lim_{k\to\infty} a^{2n_k+1} = f_1(g)$$

elde edilir. (a^{2n_k+1}), A da olup

$$h = f_1(g) \in \overline{A} \tag{5.4}$$

dır. (5.3) and (5.4) den dolayı $F(\overline{A}) \subseteq \overline{A}$ elde edilir. $\square$

Önerme 5.2.2. *$\overline{A}$, YFS anlamında kendine benzer gruptur.*

Kanıt. $\overline{A}$ kompakt topolojik gruptur. Önerme 2.2.1 den dolayı f_0 bir bire-bir grup homomorfizmidir. Önerme 5.2.1 den, $f_0(\overline{A}) \cup f_1(\overline{A}) = \overline{A}$ ve $\overline{A} \cong f_0(\overline{A})$ olduğundan, $\overline{A}$, YFS anlamında kuvvetli kendine benzer gruptur. $\square$

$X = \{0, 1, ..., p-1\}$ olarak alınırsa, Önerme 5.2.1 aşağıdaki gibi genelleştirilebilir.

Önerme 5.2.3. *$g \in Aut(X^*)$, $\sigma = (012\ldots(p-1))$ ve $a = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{p-1\ kez}, a)\sigma \in A$ olsun.*

$$\begin{aligned}
f_0 \;:\; Aut(X^*) &\to Aut(X^*) \\
g &\mapsto (\underbrace{g, g, \ldots, g}_{p\ kez}), \\[1em]
f_1 \;:\; Aut(X^*) &\to Aut(X^*) \\
g &\mapsto a(g, g, \ldots, g), \\
&\vdots \\
f_{p-1} \;:\; Aut(X^*) &\to Aut(X^*) \\
g &\mapsto a^{p-1}(g, g, \ldots, g)
\end{aligned}$$

ise $\overline{A}$, $\{Aut(X^*), f_0, f_1, \ldots, f_{p-1}\}$ yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörüdür.

5.3 $p-$sel Tamsayılar Grubu ve $\overline{A}$ Arasındaki İlişki

Bu bölümde, öncelikle $p-$sel tamsayılar grubunun, $Aut(X^*)$ ın bir alt grubu olan adding machine grubunun kapanışına hem izometrik hem de homomorf olduğunu göstereceğiz. Böylece her $p-$sel tamsayıya, adding machine grubunun kapanışının bir elemanını karşılık getireceğiz. Bu durum, $p-$sel tamsayılar grubunun $Aut(X^*)$ uzayına izometrik olarak gömülebildiği sonucunu da vermektedir. İlk olarak, aşağıdaki teoremde, $p-$sel tamsayılar grubunun $\mathbb{R}^n$ e izometrik olarak gömülemeyeceğinin basit bir ispatını vereceğiz.

Önerme 5.3.1. *$p-$sel tamsayılar $\mathbb{R}^n$ içerisine izometrik olarak gömülemezler.*

Kanıt. $\mathbb{Z}_p$ nin $\mathbb{R}^n$ içerisine izometrik olarak gömüldüğünü varsayalım. $\mathbb{Z}_p$ de $\overline{a}$ merkezli $\dfrac{1}{p^n}$ yarıçaplı bir küre,

$$S\Big(\overline{a}, \frac{1}{p^n}\Big) = \Big\{a \in \mathbb{Z}_p \mid |a - \overline{a}|_p = \frac{1}{p^n}\Big\}$$

kümesidir. Böylece

$$S(0,1) = \{a \in \mathbb{Z}_p \mid a = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots,\ a_0 \neq 0\}$$

ve

$$S\Big(1, \frac{1}{p}\Big) = \{a \in \mathbb{Z}_p \mid a = 1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots,\ a_1 \neq 0\}$$

kümelerinin herbiri $\mathbb{R}^n$ nin sırasıyla 0 merkezli 1 yarıçaplı ve 1 merkezli $\dfrac{1}{p}$ yarıçaplı küreleri üzerindedir. $\mathbb{R}^n$ de böyle iki kürenin kesişimi $\mathbb{R}^{n-1}$ de bir küre olduğundan,

$$S(0,1) \cap S\Big(1, \frac{1}{p}\Big) = S\Big(1, \frac{1}{p}\Big)$$

$\mathbb{R}^{n-1}$ de bir küre üzerindedir. Ayrıca $1 + 1p \in S\Big(1, \dfrac{1}{p}\Big)$ için,

$$S\Big(1 + 1p, \frac{1}{p^2}\Big) = \{a \in \mathbb{Z}_p \mid a = 1 + 1p + a_2 p^2 + \dots,\ a_2 \neq 0\}$$

de $\mathbb{R}^n$ de bir küre üzerindedir. Kolaylıkla görülebilir ki,

$$S\Big(1, \frac{1}{p}\Big) \cap S\Big(1 + 1p, \frac{1}{p^2}\Big) = S\Big(1 + 1p, \frac{1}{p^2}\Big)$$

$\mathbb{R}^{n-2}$ de bir küre üzerindedir.

$$S\Big(1+1p+1p^2,\frac{1}{p^3}\Big)=\{a\in\mathbb{Z}_p \mid a=1+1p+1p^2+a_3p^2+\ldots,\ a_3\neq 0\}$$

de $\mathbb{R}^n$ de küre üzerinde olup,

$$S\Big(1+1p,\frac{1}{p^2}\Big)\cap S\Big(1+1p+1p^2,\frac{1}{p^3}\Big)=S\Big(1+1p+1p^2,\frac{1}{p^3}\Big)$$

$\mathbb{R}^{n-3}$ de bir küre üzerindedir. Benzer şekilde devam edersek,

$$S\Big(1+...+1p^{n-2},\frac{1}{p^{n-1}}\Big)=\{a\in\mathbb{Z}_p \mid a=1+\ldots+1p^{n-2}+a_{n-1}p^{n-1}+\ldots,\ a_{n-1}\neq 0\}$$

kümesinin de $\mathbb{R}$ de bir küre üzerinde olduğu görülür. Fakat $\mathbb{R}$ de bir küre sadece iki noktaya sahiptir.

$$S\Big(1+1p+\ldots+1p^{n-2},\frac{1}{p^{n-1}}\Big)$$

kümesinin sonsuz tane noktası olduğundan bir çelişki elde ederiz. Varsayımımız hatalı olup $p-$sel tamsayılar $\mathbb{R}^n$ içerisine izometrik olarak gömülemez. □

Aşağıdaki önermede, Adding machine grubunun elemanları arasındaki uzaklığı formülüze edeceğiz. Bu ifade $p-$sel tamsayılar grubundaki elemanlar arasındaki uzaklığa benzerdir.

Önerme 5.3.2. *$p,t\in\mathbb{Z}$ aralarında asal, p asal sayı ve $k\in\mathbb{N}$ olmak üzere (A,d) metrik uzayının elemanları arasındaki uzaklık,*

$$\begin{array}{rcl} d \ :\ A\times A & \to & A \\ (a^n,a^m) & \mapsto & d(a^n,a^m)=\begin{cases} 0 & ,\ n=m\ ise \\ \frac{1}{p^k} & ,\ n-m=tp^k\ ise\end{cases}\end{array}$$

olacak şekilde ifade edilebilir.

Kanıt. Öncelikle, $St_A(1)$ i hesaplayalım. Büküm çarpım kullanarak,

$$\begin{aligned} a^p &= (1,1,\ldots,a)\sigma(1,1,\ldots,a)\sigma\ldots(1,1,\ldots,a)\sigma \\ &= (a,a,\ldots,a)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $St_A(1)=\langle a^p \mid p\in\mathbb{Z}\rangle$ olur. Ayrıca,

$$\begin{aligned} a^{p^2} &= a^pa^p\ldots a^p \\ &= (a,a,\ldots,a)(a,a,\ldots,a)\ldots(a,a,\ldots,a) \\ &= (a^p,a^p,\ldots,a^p)\end{aligned}$$

olarak bulunur. $a^p \in St_A(1)$ olduğundan dolayı $a^{p^2} \in St_A(2)$ dir. Böylece $St_A(2) = \langle a^{p^2} \mid p \in \mathbb{Z} \rangle$ olur. Benzer şekilde devam edersek,

$$St_A(k) = \langle a^{p^k} \mid p \in \mathbb{Z} \rangle$$

olarak hesaplanır. Böylece $St_A(1)$ de olup $St_A(2)$ de olmayan A nın elemanları,

$$St_A(1) - St_A(2) = \{a^{tp} : (p,t) = 1\}$$

kümesidir ve genel olarak,

$$St_A(k) - St_A(k+1) = \{a^{tp^k} : (p,t) = 1\}$$

elde edilir. Keyfi $a^n, a^m \in A$ elemanlarını alalım. Bu durumda $n, m \in \mathbb{Z}$ dir.

$n = m$ olsun. Bu durumda $a^n = a^m$ olduğundan açık olarak $d(a^n, a^m) = 0$ elde edilir.

$n \neq m$ olsun. Bu durumda $(p,t) = 1$ olmak üzere $n - m = tp^k$ yazılımı tek türlü bellidir. Böylece,

$$a^n a^{-m} = a^{n-m} = a^{tp^k} \in St_A(k) - St_A(k+1)$$

olduğundan tanım gereğince $d(a^n, a^m) = \dfrac{1}{p^k}$ elde edilir. □

Önerme 5.3.3. $\sum_{i \geq 0} \alpha_i p^i \in \mathbb{Z}_p$ *olsun. Bu durumda terimleri* A *da olan*

$$a^{\alpha_0}, a^{\alpha_0 + \alpha_1 p}, a^{\alpha_0 + \alpha_1 p + \alpha_2 p^2}, \ldots$$

dizisi yakınsaktır.

Kanıt. Her $\varepsilon > 0$ için, $\dfrac{1}{p^{n_0}} < \varepsilon$ olacak şekilde n_0 pozitif tamsayısı vardır. $k > l$ ve $k, l \geq n_0$ ise Önerme 5.3.2 den

$$d(a^{\alpha_0 + \alpha_1 p + \ldots + \alpha_k p^k}, a^{\alpha_0 + \alpha_1 p + \ldots + \alpha_l p^l}) = \frac{1}{p^l} < \varepsilon$$

elde edilir. Böylece bu dizi bir Cauchy dizisidir ve $Aut(X^*)$ tam metrik uzay olduğundan yakınsaktır. □

Önerme 5.3.4.

$$\varphi \ : \ \mathbb{Z}_p \ \to \ \overline{A}$$

dönüşümü $\varphi(\sum_{i\geq 0}\alpha_i p^i)$*;* $a^{\alpha_0}, a^{\alpha_0+\alpha_1 p}, a^{\alpha_0+\alpha_1 p+\alpha_2 p^2}, \ldots$ *dizisinin limiti olacak şekilde tanımlayalım. Bu durumda* φ *hem bir izometri hem de bir grup izomorfizmidir.*

Kanıt. Önerme 5.3.3 dan dolayı, φ iyi tanımlıdır. φ dönüşümünün bir izometri olduğunu gösterelim. Yani; her $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_p$ için $d_p(\alpha,\beta) = d(\varphi(\alpha), \varphi(\beta))$ olduğunu göstermeliyiz. $\alpha = \sum_{i\geq 0}\alpha_i p^i$ ve $\beta = \sum_{i\geq 0}\beta_i p^i$ olsun.

$d_p(\alpha,\beta) = 0$ ise $i = 0, 1, 2, \ldots$ için $\alpha_i = \beta_i$ olduğundan $d(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)) = 0$ elde edilir.

$d_p(\alpha,\beta) = \frac{1}{p^k}$ ise $i < k$ için $\alpha_i = \beta_i$ ve $\alpha_k \neq \beta_k$ dır. $d(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)) = \frac{1}{p^k}$ olduğunu göstermeliyiz. $\varphi(\alpha)$ and $\varphi(\beta)$, sırasıyla

$$a^{\alpha_0}, a^{\alpha_0+\alpha_1 p}, a^{\alpha_0+\alpha_1 p+\alpha_2 p^2}, \ldots \quad \text{and} \quad a^{\beta_0}, a^{\beta_0+\beta_1 p}, a^{\beta_0+\beta_1 p+\beta_2 p^2}$$

dizilerinin limitleri olduğundan dolayı,

$$\lim_{k\to\infty}(a^{\alpha_0+\alpha_1 p+\ldots+\alpha_k p^k}, a^{\beta_0+\beta_1 p+\ldots+\beta_k p^k}) = (\varphi(\alpha), \varphi(\beta))$$

elde edilir. Her metrik fonksiyon sürekli olup,

$$d(a^{\alpha_0}, a^{\beta_0}), d(a^{\alpha_0+\alpha_1 p}, a^{\beta_0+\beta_1 p}), \ldots \to d(\varphi(\alpha), \varphi(\beta))$$

olur. Önerme 5.3.2 den dolayı,

$$0, 0, \ldots, 0, \frac{1}{p^k}, \frac{1}{p^k}, \ldots, \frac{1}{p^k}, \ldots \to \frac{1}{p^k}$$

elde edilir. Böylece $d(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)) = \frac{1}{p^k}$ dir. Yani; φ bir izometri dönüşümüdür.

Her izometri dönüşümü bire-bir olduğundan dolayı φ dönüşümü bire-birdir.

φ dönüşümünün örten olduğunu gösterelim. $b \in \overline{A}$ olsun. Böylece, elemanları A da olan,

$$a^{n_0}, a^{n_1}, \ldots, a^{n_k}, \ldots \to b$$

dizisi vardır. Ayrıca her n_k tamsayısı, $\mathbb{Z}_p$ de

$$\begin{aligned} n_0 &= \alpha_0^0 + \alpha_1^0 p + \alpha_2^0 p^2 + \ldots \\ n_1 &= \alpha_0^1 + \alpha_1^1 p + \alpha_2^1 p^2 + \ldots \\ &\vdots \\ n_k &= \alpha_0^k + \alpha_1^k p + \alpha_2^k p^2 + \ldots \\ &\vdots \end{aligned} \tag{5.3.4}$$

olarak ifade edilebilir. $0, 1, 2, \ldots, (p-1)$ sayılarından en az biri $(\alpha_0^k)_k$ dizisinde sonsuz çoktukta vardır. Onlardan birini seçelim ve β_0 ile adlandıralım. $l = 0, 1, 2, \ldots$ için $\alpha_0^{k_l} = \beta_0$ olacak şekilde $(\alpha_1^{k_l})_l$, $(\alpha_1^k)_k$ nin bir alt dizisi olsun. Benzer şekilde, $(\alpha_1^{k_l})_l$ dizisinde sonsuz çoklukta bulunan sayılardan birisine β_1 ile belirtelim. Bu şekilde devam edersek,

$$a^{\beta_0}, a^{\beta_0+\beta_1 p}, \ldots, a^{\beta_0+\beta_1 p+\ldots+\beta_k p^k}, \ldots$$

dizisini elde ederiz. Önerme 5.3.3 dan, bu dizi yakınsaktır. Bu dizinin b ye yakınsadığını gösterelim. (5.3.4) nin inşasından dolayı, (n_k) dizisinin (n_{k_s}) alt dizisi vardır ve bu alt dizinin s. terimin $p-$sel açılımı,

$$\beta_0 + \beta_1 p + \beta_2 p^2 + \ldots + \beta_s p^s + \gamma_{s+1} p^{s+1} + \gamma_{s+2} p^{s+2} + \ldots$$

olacak şekildedir. Böylece

$$\lim_{s\to\infty} d(a^{\beta_0+\beta_1 p+\ldots+\beta_s p^s}, a^{n_{k_s}}) = 0$$

dır ve üçgen eşitsizliğinden dolayı $(a^{\beta_0+\beta_1 p+\ldots+\beta_k p^k})$ dizisi b ye yakınsar. Bu durumda $\varphi(\sum_{i\geq 0} \beta_i p^i) = b$ olduğundan φ örtendir.

Son olarak φ nin homomorfizm olduğunu gösterelim. Yani; $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_p$ için

$$\varphi(\alpha+\beta) = \varphi(\alpha)\varphi(\beta)$$

olduğunu göstermeliyiz.

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 p + \alpha_2 p^2 + \ldots, \quad \beta = \beta_0 + \beta_1 p + \beta_2 p^2 + \ldots$$

ve

$$\alpha + \beta = \gamma_0 + \gamma_1 p + \gamma_2 p^2 + \ldots$$

olsun. φ nin tanımından dolayı,

$$a^{\gamma_0}, a^{\gamma_0+\gamma_1 p}, a^{\gamma_0+\gamma_1 p+\gamma_2 p^2}, \ldots \to \varphi(\alpha+\beta)$$

olur. Ayrıca, $Aut(X^*)$ bir topolojik grup,

$$a^{\alpha_0}, a^{\alpha_0+\alpha_1 p}, a^{\alpha_0+\alpha_1 p+\alpha_2 p^2}, \ldots \to \varphi(\alpha)$$

ve

$$a^{\beta_0}, a^{\beta_0+\beta_1 p}, a^{\beta_0+\beta_1 p+\beta_2 p^2}, \ldots \to \varphi(\beta)$$

olduğundan,

$$a^{(\alpha_0+\beta_0)}, a^{(\alpha_0+\beta_0)+(\alpha_1+\beta_1)p}, a^{(\alpha_0+\beta_0)+(\alpha_1+\beta_1)p+(\alpha_2+\beta_2)p^2}, \ldots \to \varphi(\alpha)\varphi(\beta)$$

elde edilir.

$\mathbb{Z}_p$ de,

$$\begin{aligned}
\alpha_0+\beta_0 &= \gamma_0+\overline{\gamma_0}p+0p^2+0p^3+\ldots \\
\alpha_0+\beta_0+(\alpha_1+\beta_1)p &= \gamma_0+\gamma_1 p+\overline{\gamma_1}p^2+0p^3+0p^4+\ldots \\
&\vdots \\
\alpha_0+\beta_0+\ldots+(\alpha_k+\beta_k)p^k &= \gamma_0+\ldots+\gamma_k p^k+\overline{\gamma_k}p^{k+1}+0p^{k+2}+ \\
&\quad 0p^{k+3}+\ldots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

olarak ifade edilebilir.

$$x = \alpha_0+\beta_0+\ldots+(\alpha_k+\beta_k)p^k$$

ve

$$y = \gamma_0+\gamma_1 p+\ldots+\gamma_k p^k+\overline{\gamma_k}p^{k+1}+0p^{k+2}+0p^{k+3}+\ldots$$

olsun. Bu durumda,

$$d(a^x, a^y) = \begin{cases} \frac{1}{p^k} & , \quad \overline{\gamma_k} \neq 0 \text{ ise} \\ 0 & , \quad \overline{\gamma_k} = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

dir. Böylece

$$d(a^{\alpha_0+\beta_0}, a^{\gamma_0}), d(a^{\alpha_0+\beta_0+(\alpha_1+\beta_1)p}, a^{\gamma_0+\gamma_1 p}), \ldots \to d(\varphi(\alpha)\varphi(\beta), \varphi(\alpha+\beta))$$

ve

$$\lim_{k\to\infty} d(a^x, a^y) = 0$$

olduğu için, $\varphi(\alpha+\beta) = \varphi(\alpha)\varphi(\beta)$ olup, istenilen elde edilir. $\square$

Sonuç olarak, $\overline{A} \subseteq Aut(X^*)$ olduğu için $p-$sel tamsayılar grubu $\mathbb{Z}_p$, $Aut(X^*)$ metrik grubu içine izometrik olarak gömülebilir.

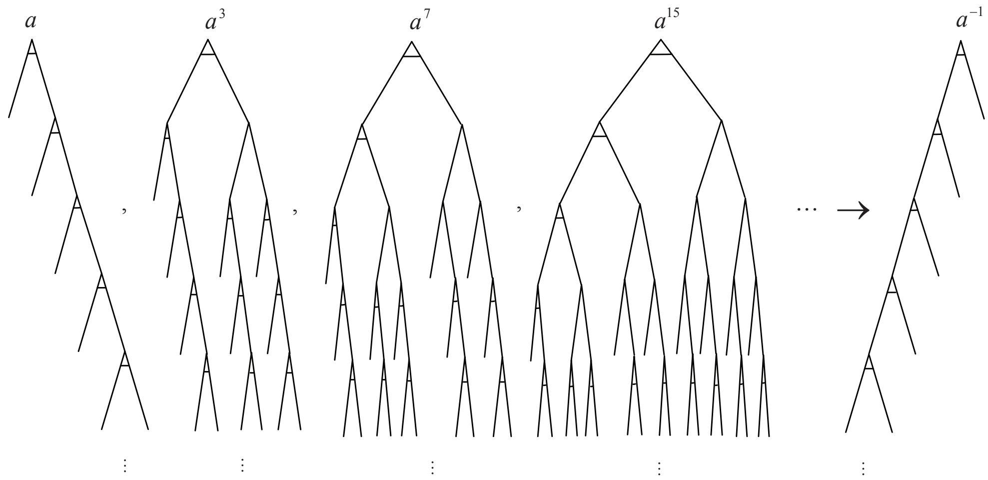
Örnek 5.3.5. *Şekil 5.7 de, $p = 2$ için $\varphi(-1)$ yi resmedeceğiz.*

$$-1 = 1 + 1.2^1 + 1.2^2 + \ldots + 1.2^k + \ldots \in \mathbb{Z}_2$$

olduğunu biliyoruz. $X = \{0,1\}$ için, φ nin tanımından $\varphi(-1)$,

$$a^1, a^{1+1.2^1}, a^{1+1.2^1+1.2^2}, \ldots$$

terimleri A da olan dizisinin limitidir. Bu limit, Önerme 5.3.2 den dolayı $a^{-1} = (a^{-1}, 1)\sigma$ dir.



Şekil 5.7. φ dönüşüm altında $-1 \in \mathbb{Z}_2$ nin resmi

5.4 Cantor Kümesi Üzerinde Bir Grup

Cantor kümesi en iyi bilinen kendine benzer kümelerinden biridir. Öncelikle bir YFS nin atraktorü olarak $k-$lı Cantor kümesinin tanımlayalım.

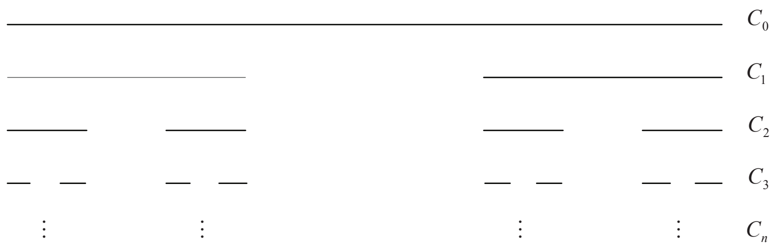
$m \in \{1, 2, 3, \ldots\}$, $k = 2m+1$ ve $i = 0, 1, \ldots, m$ için,

$$f_i(x) = \frac{1}{k}x + \frac{2}{k}i$$

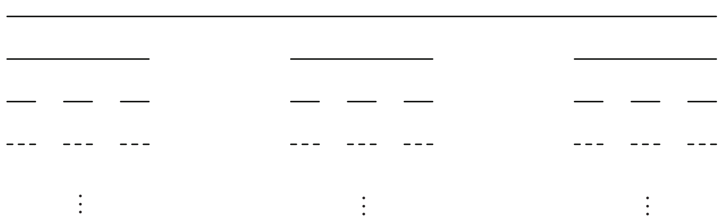
olacak şekilde $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını alalım. Bu durumda $k-$lı Cantor kümesi, $\{\mathbb{R}, \{f_i\}_{i \in \{0,1,\ldots,m\}}\}$ yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörüdür. Biz bu kümeyi C^k ile göstereceğiz. Bu küme ayrıca

$$C^k = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_n}{k^n} \mid a_n \in \{0, 1, \ldots, m\} \right\}$$

olarak ifade edilebilir. Özel olarak $3-$lü Cantor kümesi standart Cantor kümesidir. Yani $C^3 = C$ dir.



Şekil 5.8. Standart Cantor kümesi $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$



Şekil 5.9. $5-$li Cantor kümesi

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \{0, 1, \ldots, m\}^{\omega} & \to & C^k \\ a_1 a_2 a_3 \ldots & \mapsto & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_n}{k^n} \end{array}$$

fonksiyonu bir homeomorfizmdir. Böylece $k-$lı Cantor kümesinin elemanları $n = 1, 2, 3, \ldots$ için $a_n \in \{0, 1, \ldots, m\}$ olmak üzere $a_1 a_2 a_3 \ldots$ sonsuz dizileri olarak alınabilir.

$k-$lı Cantor kümesi üzerinde bir işlem tanımlayıp bu küme üzerinde bir grup yapısı oluşturacağız. $i = 1, 2, 3, \ldots$ için $x_i, y_i \in \{0, 1, \ldots, m\}$ olmak üzere $x = x_1x_2x_3\ldots$ ve $y = y_1y_2y_3\ldots$, C^k nın elemanları olsunlar. C^k üzerinde $*$ işlemini $i = 1, 2, 3, \ldots$ için,

$$x_i \diamond y_i \equiv x_i + y_i \pmod{m+1}$$

olmak üzere

$$x * y = (x_1 \diamond y_1)(x_2 \diamond y_2)(x_3 \diamond y_3)\ldots$$

olacak şekilde tanımlayalım.

Önerme 5.4.1. $(C^k, *)$ *bir gruptur.*

Kanıt.

G1) $\forall i = 1, 2, 3, \ldots$ için $x_i * y_i \in \{0, 1, 2, \ldots, m\}$ olduğundan $x * y \in C^k$ olup kapalılık özelliği sağlanır.

G2) $\forall x, y, z \in C$ için, $s = m + 1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
x * (y * z) &= x_1x_2x_3\ldots * (y_1y_2y_3\ldots * z_1z_2z_3\ldots)\\
&= x_1x_2x_3\ldots * (y_1 \diamond z_1)(y_2 \diamond z_2)\ldots\\
&= x_1x_2x_3\ldots * (y_1 + z_1 \pmod{s})(y_2 + z_2 \pmod{s})\ldots\\
&= (x_1 + (y_1 + z_1) \pmod{s})(x_2 + (y_2 + z_2) \pmod{s})\ldots\\
&= ((x_1 + y_1) + z_1 \pmod{s})((x_2 + y_2) + z_2 \pmod{s})\ldots\\
&= (x_1 + y_1 \pmod{s})(x_2 + y_2 \pmod{s})\ldots) * z_1z_2z_3\ldots\\
&= (x_1 \diamond y_1)(x_2 \diamond y_2)(x_3 \diamond y_3)\ldots * z_1z_2z_3\ldots\\
&= (x_1x_2x_3\ldots * y_1y_2y_3\ldots) * z_1z_2z_3\ldots\\
&= (x * y) * z
\end{aligned}$$

olduğundan C^k, $*$ işlemine göre birleşme özelliğini sağlar.

G3) $\forall x \in C^k$ için, $e = 000\ldots \in C^k$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
x * e &= x_1x_2x_3\ldots * 000\ldots\\
&= (x_1 \diamond 0)(x_2 \diamond 0)(x_3 \diamond 0)\ldots\\
&= (x_1 + 0 \pmod{s})(x_2 + 0 \pmod{s})(x_3 + 0 \pmod{s})\ldots\\
&= x_1x_2x_3\ldots\\
&= x
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde $e * x = x$ olduğundan birim eleman $e = 000\ldots \in C^k$ dir.

G3) $\forall x \in C^k$ ve $i = 1, 2, \ldots$ için $x_i + y_i \equiv 0 \pmod{s}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} x * y &= x_1x_2x_3\ldots y_1y_2y_3\ldots \\ &= (x_1 \diamond y_1)(x_2 \diamond y_2)(x_3 \diamond y_3)\ldots \\ &= (x_1 + y_1 \pmod{s})(x_2 + y_2 \pmod{s})(x_3 + y_3 \pmod{s})\ldots \\ &= 000\ldots \\ &= e \end{aligned}$$

ve benzer şekilde $y * x = e$ olduğundan x elemanının tersi $y = y_1y_2y_3\ldots$dir.

Böylece $(C^k, *)$ bir gruptur. Kolaylıkla görülebilir ki, $C = C^3$ standart Cantor kümesi için her elemanın tersi kendisidir. □

Önerme 5.4.2. *$x = x_1x_2x_3\ldots$ ve $y = y_1y_2y_3\ldots$, C^k nın iki elemanı olsun.*

$$\begin{aligned} d \ : \ C^k \times C^k &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto d(x, y) = 2\left|\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i - y_i}{k^i}\right| \end{aligned}$$

olarak tanımlı fonksiyon C^k üzerinde bir metriktir.

Ayrıca $x \neq y$ için $l = \min\{i|\ x_i \neq y_i$ for $i = 1, 2, \ldots\}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} d_c \ : \ C^k \times C^k &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto d_c(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{k^l} & , \ x \neq y \text{ ise} \\ 0 & , \ x = y \text{ ise} \end{cases} \end{aligned}$$

fonksiyonu C^k üzerinde bir metriktir.

İlk tanımlı metrik $[0, 1]$ aralığı üzerinde $\mathbb{R}$ den indirgenen metriktir. Bu iki metriğin birbirine denk oldukları kolaylıkla gösterilebilir. Böylece C^k üzerinde aynı topolojiyi üretirler. Kolaylık açısından ikinci tanımlanan metriği alalım.

Önerme 5.4.3. $(C^k, *)$ *ilgili metriğe göre bir topolojik gruptur.*

Kanıt. $x = x_1x_2x_3\ldots$ ve $y = y_1y_2y_3\ldots$ C^k nın iki elemanı olsun.

$$\begin{aligned} \psi \ : \ C^k \times C^k &\longrightarrow C^k \\ (x, y) &\longmapsto x * y \end{aligned}$$

dönüşümünün sürekli olduğunu gösterelim. $x' = x'_1x'_2x'_3\dots$ ve $y' = y'_1y'_2y'_3\dots$ olmak üzere keyfi bir $(x', y') \in C^k \times C^k$ elemanını alalım. U, $x' * y'$ nün bir komşuluğu olsun. Bu durumda,

$$B\Big(x' * y', \frac{1}{k^n}\Big) = \Big\{z \mid d(z, x' * y') < \frac{1}{k^n}\Big\} \subseteq U$$

olacak şekilde bir n tamsayısı vardır.

$$V_1 = B\Big(x', \frac{1}{k^n}\Big) = \Big\{x \mid d(x, x') < \frac{1}{k^n}\Big\} = \Big\{\ x'_1x'_2\dots x'_nx_{n+1}x_{n+2}\dots\Big\}$$

ve

$$V_2 = B\Big(y', \frac{1}{k^n}\Big) = \Big\{y \mid d(y, y') < \frac{1}{k^n}\Big\} = \Big\{\ y'_1y'_2\dots y'_ny_{n+1}y_{n+2}\dots\Big\}$$

olacak şekilde

$$V = V_1 \times V_2 = \{(x, y) \mid x \in V_1, y \in V_2\}$$

kümesini seçelim. Açık olarak $(x', y') \in V$ dir. Şimdi $\psi(V) \subseteq U$ olduğunu gösterelim. $z \in \psi(V)$ olsun.

$$\psi(V) = \psi(V_1 \times V_2) = \{x * y \mid x \in V_1, y \in V_2\}$$

olduğundan $x \in V_1$ ve $y \in V_2$ olacak şekilde $z = x * y$ vardır.

$$z = x * y = (x'_1 * y'_1)(x'_2 * y'_2)\dots(x'_n * y'_n)(x_{n+1} * y_{n+1})(x_{n+2} * y_{n+2})\dots$$

olduğundan $z \in U$ elde edilir. Böylece ψ süreklidir.

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & C^k & \longrightarrow & C^k \\ & x & \longmapsto & x^{-1} \end{array}$$

fonksiyonunun sürekli olduğunu benzer şekilde gösterilir. $C^3 = C$ durumunda, her elemanın tersi kendisi olduğundan $\varphi(x) = x^{-1} = x$ dir. □

Önerme 5.4.4. (C^k, d) *metrik uzayı kompakttır.*

Kanıt. C^k de her dizinin yakınsak bir alt dizisi olduğunu göstermeliyiz. (x_n), C^k de bir dizi olsun. $x_n = (x_1^n, x_2^n, \dots)$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $t_1 \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$ olmak üzere $x_1^n = t_1$ olacak şekilde (x_n) dizisinin bir alt dizisi vardır. t_1 lerden birini sabitleyip seçelim ve bu alt dizinin terimleri kümesine A_1 diyelim. Terimleri A_1 den oluşan bu alt dizinin her $n \in \mathbb{N}$ için $t_2 \in \{0, 1, 2, \ldots, m\}$ olmak üzere $x_2^n = t_2$ olacak şekilde bir alt dizisi vardır. t_2 lerden birini sabitleyip seçelim ve bu alt dizinin terimleri kümesine A_2 diyelim. Bu şekilde devam edersek, terimleri A_{k-1} den oluşan bu alt dizinin her $n \in \mathbb{N}$ için $t_k \in \{0, 1, 2, \ldots, m\}$ olmak üzere $x_k^n = t_k$ olacak şekilde bir alt dizisi vardır. t lerden birini sabitleyip seçelim ve bu alt dizinin terimleri kümesine A_k diyelim. Böylece (x_n) dizisinin terimleri kümesi A_k olan bir alt dizisini elde ederiz. Şimdi bu alt dizinin yakınsak olduğunu gösterelim. $x \in A_k$ alalım. Bu durumda $r \to \infty$ için,

$$d(x_{n_r}, x) = \frac{1}{k^r} \to 0$$

olur. Bu ise (x_n) dizisinin terimleri kümesi A_k olan (x_{n_k}) alt dizisinin $x \in C^k$ noktasına yakınsaması demektir. □

C^k üzerinde iki büzülme dönüşümü vereceğiz. Bu büzülmelerden biri altında C^k nin resmi, C^k ye izomorf olan öz alt grubudur. Diğer büzülme dönüşümü altında C^k nin resmi bu alt grubun kosetidir.

Önerme 5.4.5. *Her $i \in \{0, 1, 2, \ldots, m\}$ için,*

$$\begin{array}{rccl} f_i & : & C^k & \to C^k \\ & & x_1x_2x_3\ldots & \mapsto ix_1x_2x_3\ldots \end{array}$$

büzülme dönüşümleridir ve f_0 bire-bir homomorfizmdir.

Kanıt. Her $x, y \in C^k$

$$d(f_i(x), f_i(y)) \leq \alpha d(x, y)$$

olacak şekilde $0 \leq \alpha < 1$ sayısının varlığını göstermeliyiz. C^k nin $x = x_1x_2x_3\ldots$ ve $y = y_1y_2y_3\ldots$ keyfi elemanlarını alalım. $d(x, y) = \frac{1}{k^q}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} d(f_i(x), f_i(y)) &= d(ix_1x_2x_3\ldots, iy_1y_2y_3\ldots) \\ &= \tfrac{1}{k^{q+1}} \\ &= \tfrac{1}{k}d(x, y) \end{aligned}$$

elde ederiz. Her $x, y \in C$ için $f_0(x * y) = f_0(x) * f_0(y)$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} f_0(x * y) &= f_0((x_1 \diamond y_1)(x_2 \diamond y_2)(x_3 \diamond y_3)\ldots) \\ &= 0(x_1 \diamond y_1)(x_2 \diamond y_2)(x_3 \diamond y_3)\ldots \\ &= (0x_1x_2x_3\ldots) * (0y_1y_2y_3\ldots) \\ &= f_0(x) * f_0(y) \end{aligned}$$

olur. Böylece f_0 bir homomorfizmdir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} f_0(x) = f_0(y) &\Rightarrow 0x_1x_2x_3\ldots = 0y_1y_2y_3\ldots \\ &\Rightarrow x_1x_2x_3\ldots = y_1y_2y_3\ldots \\ &\Rightarrow x = y, \end{aligned}$$

olduğundan f_0 bire-birdir. Böylece $f_0(C^k) \cong C^k$ dir. Açık olarak,

$$\begin{aligned} F(C^k) &= f_0(C^k) \cup f_1(C^k) \cup \ldots \cup f_m(C^k) \\ &= \{0x_1x_2\ldots\} \cup \{1x_1x_2\ldots\} \cup \ldots \cup \{mx_1x_2\ldots\} \\ &= C^k \end{aligned}$$

elde ederiz. □

Uyarı 5.4.6. *Standart Cantor kümesi üzerinde ki bu grup,*

$$G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \ldots$$

sonsuz çarpım grubu olarak düşünülebilir. $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ *ve* $y = (y_1, y_2, y_3, \ldots)$ *olsun. Bu grup üzerinde, her* $x, y \in G$ *için*

$$d(x, y) = 2\left|\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i - y_i}{3^i}\right|$$

metriğini tanımlarsak, C *kümesini elde ederiz. Böylece;*

$$\begin{aligned} f_0 \ : \ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \ldots &\to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \ldots \\ (x_1, x_2, x_3, \ldots) &\mapsto (0, x_1, x_2, \ldots) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f_1 \ : \ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \ldots &\to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \ldots \\ (x_1, x_2, x_3, \ldots) &\mapsto (1, x_1, x_2, \ldots) \end{aligned}$$

büzülme dönüşümleri için $\{G; f_0, f_1\}$ *yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörü* G *dir. Ayrıca;*

$$f_0(G) = \{0\} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \ldots$$

olup G *nin bir alt grubudur ve* f_0 *bir grup izomorfizmidir.*

5.5 Büzülmeleri Bire-bir Olmayan Bir Kendine Benzer Grup

YFS anlamında kendine benzer grup tanımında verilen büzülme dönüşümünün her zaman bire-bir olmak zorunda olmadığını göstereceğiz.

$$G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \ldots$$

sonsuz çarpım grubunu alalım. $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ ve $y = (y_1, y_2, y_3, \ldots)$ olsun.

$$\begin{aligned} f_0 \ : \ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \ldots &\rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \ldots \\ (x_1, x_2, x_3, \ldots) &\mapsto (0, 0, x_2, x_3 \ldots), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_1 \ : \ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \ldots &\rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \ldots \\ (x_1, x_2, x_3, \ldots) &\mapsto (0, 1, x_2, x_3, \ldots), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2 \ : \ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \ldots &\rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \ldots \\ (x_1, x_2, x_3, \ldots) &\mapsto (1, 0, x_2, x_3, \ldots) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f_3 \ : \ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \ldots &\rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \ldots \\ (x_1, x_2, x_3, \ldots) &\mapsto (1, 1, x_2, x_3, \ldots) \end{aligned}$$

büzülme dönüşümleri için $\{G; f_0, f_1, f_2, f_3\}$ yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörü G dir. Ayrıca;

$$f_0(G) = \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \ldots$$

olup G nin bir alt grubudur ve f_0 bir homomorfizmdir. Fakat bire-bir değildir. Şimdi bu grup üzerinde,

$$d(x, y) = 2\left|\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i - y_i}{3^i}\right|$$

metriğini alalım. Böylece Cantor kümesini elde ederiz. Bu büzülme dönüşümlerini C üzerinde nasıl davrandığına bakalım.

$$\begin{aligned} f_0 \ : \ C &\rightarrow C \\ x &\mapsto f_0(x) = \begin{cases} \frac{x}{3} & , \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \text{ ise} \\ \frac{1}{3}(x - \frac{2}{3}) & , \quad \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \text{ ise} \end{cases} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f_1 \;:\; C &\to C \\
x &\mapsto f_0(x) = \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{2}{9} & , \; 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \text{ ise} \\ \frac{1}{3}(x - \frac{2}{3}) + \frac{2}{9} & , \; \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \text{ ise} \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_2 \;:\; C &\to C \\
x &\mapsto f_0(x) = \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{2}{3} & , \; 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \text{ ise} \\ \frac{1}{3}(x - \frac{2}{3}) + \frac{2}{3} & , \; \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \text{ ise} \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_3 \;:\; C &\to C \\
x &\mapsto f_0(x) = \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{8}{9} & , \; 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \text{ ise} \\ \frac{1}{3}(x - \frac{2}{3}) + \frac{8}{9} & , \; \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \text{ ise} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Yani Cantor kümesini, f_0 dönüşümü önce katlayıp sonra $\frac{1}{3}$ oranında büzüyor, f_1 dönüşümü önce katlayıp sonra $\frac{1}{3}$ oranında büzüyor ve $\frac{2}{9}$ öteliyor, f_2 dönüşümü önce katlayıp sonra $\frac{1}{3}$ oranında büzüyor ve $\frac{2}{3}$ öteliyor, f_3 dönüşümü önce katlayıp sonra $\frac{1}{3}$ oranında büzüyor ve $\frac{8}{9}$ öteliyor.

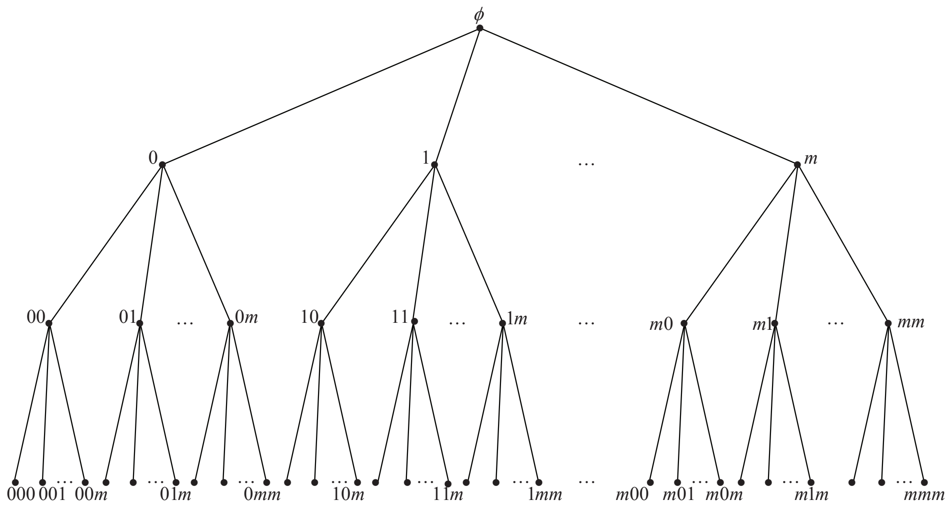
5.6 $(m+1)-$li Köklü Ağacın Bir Otomorfizm Grubu

$X = \{0, 1, 2, \ldots, m\}$ ve $\sigma = (012\ldots m)$ olsun. $g \in Aut(X^*)$ alalım.

(G1) $n = 1, 2, \ldots$ için $v, w \in X^n$ ise $g|_v = g|_w$,

(G2) $v \in X^*$ için $g|_v = (g|_{v0}, g|_{v1}, \ldots, g|_{vm})\alpha$ ve $\alpha \in \{e, \sigma, \sigma^2, \ldots, \sigma^m\}$

özelliklerine sahip $Aut(X^*)$ ın alt kümesi G^m olsun.



Şekil 5.10. $(m+1)-$li köklü ağacın ilk üç seviyesi

Önerme 5.6.1. *G^m, $Aut(X^*)$ ın alt grubudur.*

Kanıt. $g, h \in G^m$ olsun. Her $v \in X^*$ için $t, s \in \{0, 1, 2, \ldots, m\}$ olmak üzere g ve h için $g|_v = (g_{|v0}, g|_{v1}, \ldots, g|_{vm})\sigma^t$ ve $h|_v = (h|_{v0}, h|_{v1}, \ldots, h|_{vm})\sigma^s$ olarak ifade edilir.

(i) g, G^m in keyfi bir elemanı olsun. $t + r \equiv 0 \pmod{m+1}$ ve $t, r \in \{0, 1, 2, \ldots, m\}$ olmak üzere $f \in Aut(X^*)$ elemanını,

$$f|_v = (g^{-1}|_{v0}, g^{-1}|_{v1}, \ldots, g^{-1}|_{vm})\sigma^r$$

olacak şekilde seçelim. $g \in G^m$ olduğundan $n = 1, 2, \ldots$ için $v, w \in X^n$ olmak üzere $g|_v = g|_w$ dir. Böylece $g^{-1}|_v = g^{-1}|_w$ olur. Büküm çarpım kullanarak, 1 birim otomorfizm olmak üzere,

$$\begin{aligned}(gf)|_v &= g|_v f|_v &&= (g|_{v0}, g|_{v0}, \ldots, g|_{v0})\sigma^t (g^{-1}|_{v0}, g^{-1}|_{v0}, \ldots, g^{-1}|_{v0})\sigma^r \\ &&&= (g|_{v0}g^{-1}|_{v0}, g|_{v0}g^{-1}|_{v0}, \ldots, g|_{v0}g^{-1}|_{v0})\sigma^{t+r} \\ &&&= ((gg^{-1})|_{v0}, (gg^{-1})|_{v0}, \ldots, (gg^{-1})|_{v0})\sigma^0 \\ &&&= (1, 1, \ldots, 1) \\ &&&= 1\end{aligned}$$

elde ederiz. Benzer şekilde $fg = 1$ dir. Böylece g nin tersi $f \in G^m$ dir.

(ii) g ve h, G^m in keyfi elemanları olsunlar. $n = 1, 2, \ldots$ için $v, w \in X^n$ olmak üzere $g|_v = g|_w$ ve $h|_v = h|_w$ dir. Böylece $(gh)|_v = (gh)|_w$ olur. Ayrıca $t + s \equiv q \pmod{m+1}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}(gh)|_v &= g|_v h|_v &&= (g|_{v0}, g|_{v0}, \ldots, g|_{v0})\sigma^t (h|_{v0}, h|_{v0}, \ldots, h|_{v0})\sigma^s \\ &&&= (g|_{v0}h|_{v0}, g|_{v0}h|_{v0}, \ldots, g|_{v0}h|_{v0})\sigma^{t+s} \\ &&&= ((gh)|_{v0}, (gh)|_{v0}, \ldots, (gh)|_{v0})\sigma^q \\ &&&= ((gh)|_{v0}, (gh)|_{v1}, \ldots, (gh)|_{vm})\sigma^q\end{aligned}$$

dir. Böylece $gh \in G^m$ elde edilir.

□

Önerme 5.6.2. *G^m bir kompakt topolojik gruptur.*

Kanıt. $Aut(X^*)$ topolojik grup ve G^m, $Aut(X^*)$ ın alt grubu olduğundan, G^m de topolojik gruptur. G^m nin kompakt olduğunu göstermek için $Aut(X^*)$ ın kapalı alt kümesi olduğunu göstermek yeterlidir. $g \in Aut(X^*)$ noktasına yakınsayan G de keyfi (g_n) dizisi alalım. $g \in G^m$ olduğunu gösterelim. g nin G^m de olmadığını varsayalım. Bu durumda en az bir seviye vardır ki bu seviye üzerinde bir köşeye g etkisi bu seviyenin herhangi bir köşesine g nin etkisinden farklıdır. k bu seviyelerin minimumu olsun. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için $d(g_n, g) \geq \frac{1}{2^k}$ olur. Bu ise (g_n) nin g ye yakınsaması ile çelişir. Yani G^m kapalı olup kompakttır. □

Önerme 5.6.3. $X = \{0, 1, 2, \ldots, m\}$ *ve* $\sigma = (012\ldots m)$ *olsun. Her* $s \in X$ *için,*

$$\begin{aligned} f_s \;:\; Aut(X^*) &\to Aut(X^*) \\ g &\mapsto (g, g, \ldots, g)\sigma^s \end{aligned}$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. $\{Aut(X^*), \{f_s\}_{s\in X}\}$ *yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörü* G^m *dir.*

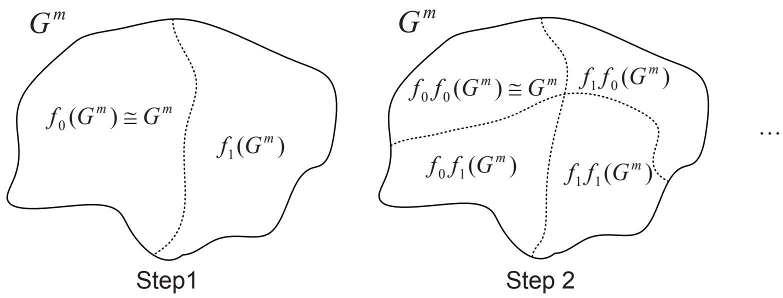
Kanıt. G^m kompakt metrik uzay ve her $s \in X$ için f_s büzülme dönüşümü olduklarından,

$$F(G^m) = \bigcup_{s=0}^{m} f_s(G^m) = G^m$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Öncelikle $G^m \subseteq \bigcup_{s=0}^{m} f_s(G^m)$ olduğunu gösterelim. $g \in G^m$ alalım. Her $v \in X^*$ için $g_{|v} \in G^m$ dir. g nin X^* ın ilk seviyesine etkisi σ^s olsun. $h = g_{|0} = g_{|1} = \ldots = g_{|m} \in G^m$ olarak seçersek, $g = f_s(h)$ elde ederiz. Böylece $g \in \bigcup_{s=0}^{m} f_s(G^m)$ dir.

$\bigcup_{s=0}^{m} f_s(G^m) \subseteq G^m$ olduğunu gösterelim. $g \in \bigcup_{s=0}^{m} f_s(G^m)$ olsun. $s \in X$ için $g = f_s(h)$ olacak şekilde $h \in G^m$ vardır. $g = f_s(h) = (h, h, \ldots, h)\sigma^s$ olduğundan, $g \in G^m$ elde edilir. Böylece $\bigcup_{s=0}^{m} f_s(G^m) \subseteq G^m$ olur. □

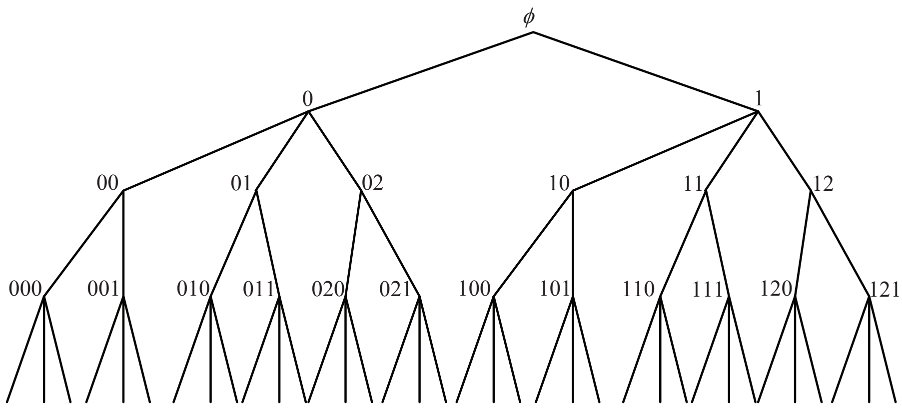
Sonuç 5.6.4. *G^m, YFS anlamında kuvvetli kendine benzer gruptur.*



Şekil 5.11. G^1 in içiçe geçmiş kopyaları

5.7 Köklü Düzgün Olmayan Ağacın Bir Otomorfizm Grubu: $G^{2,3}$

$i = 1, 2, \ldots$ için, $|i|$ tek ise $x_i \in \{0, 1\}$ ve $|i|$ çift ise $x_i \in \{0, 1, 2\}$ olmak üzere aşağıdaki şekilde resmedilen $X^* = \{x_1x_2x_3\ldots\}$ ağacını alalım.



Şekil 5.12. Düzgün olmayan köklü bir ağacın ilk dört seviyesi

$\sigma = (01)$ ve $\gamma = (012)$ olsun. $\alpha \in \{e = (0)(1), \sigma\}$, $\beta \in \{e' = (0)(1)(2), \gamma, \gamma^2\}$ ve $g \in Aut(X^*)$ alalım.

(G1) $n = 1, 2, \ldots$ için $v, w \in X^n$ ise $g|_v = g|_w$,

(G2) $v \in X^*$ için,

$$g|_v = \begin{cases} (g|_{v0}, g|_{v1})\alpha & , \quad |v| \text{ çift ise} \\ (g|_{v0}, g|_{v1}, g|_{v2})\beta & , \quad |v| \text{ tek ise} \end{cases}$$

özelliklerine sahip $Aut(X^*)$ ın alt kümesi $G^{2,3}$ olarak tanımlayalım.

Önerme 5.7.1. *$G^{2,3}$, $Aut(X^*)$ ın alt grubudur.*

Kanıt. $g, h \in G^{2,3}$ olsun. Bu durumda, $n = 1, 2, \ldots$ için $v, w \in X^n$ ise $g|_v = g|_w$,

$$g|_v = \begin{cases} (g|_{v0}, g|_{v1})\alpha & , \quad |v| \text{ çift ise} \\ (g|_{v0}, g|_{v1}, g|_{v2})\beta & , \quad |v| \text{ tek ise} \end{cases}$$

ve $n = 1, 2, \ldots$ için $v, w \in X^n$ ise $h|_v = h|_w$,

$$h|_v = \begin{cases} (h|_{v0}, h|_{v1})\alpha & , \quad |v| \text{ çift ise} \\ (h|_{v0}, h|_{v1}, g|_{v2})\beta & , \quad |v| \text{ tek ise} \end{cases}$$

olur.

(i) g, $G^{2,3}$ in keyfi bir elemanı olsun. $n = 1, 2, \ldots$ için $v, w \in X^n$ ise $f|_v = f|_w$,

$$f|_v = \begin{cases} (g^{-1}|_{v0}, g^{-1}|_{v1})\alpha^{-1} & , \quad |v| \text{ çift ise} \\ (g^{-1}|_{v0}, g^{-1}|_{v1}, g|_{v2})\beta^{-1} & , \quad |v| \text{ tek ise} \end{cases}$$

olmak üzere, $|v|$ çift ise

$$\begin{aligned} (gf)|_v = g|_v f_{|v} &= (g|_{v0}, g|_{v0})\alpha(g^{-1}|_{v0}, g^{-1}|_{v0})\alpha^{-1} \\ &= (g|_{v0}g^{-1}_{|v0}, g|_{v0}g^{-1}|_{v0})\alpha\alpha^{-1} \\ &= ((gg^{-1})|_{v0}, (gg^{-1})|_{v0})\alpha^0 \\ &= (1, 1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

elde ederiz. $|v|$ tek ise

$$\begin{aligned} (gf)|_v = g|_v f|_v &= (g|_{v0}, g|_{v0}, g|_{v0})\beta(g^{-1}|_{v0}, g^{-1}|_{v0}, g^{-1}|_{v0})\beta^{-1} \\ &= (g|_{v0}g^{-1}|_{v0}, g|_{v0}g^{-1}|_{v0}, g|_{v0}g^{-1}|_{v0})\beta\beta^{-1} \\ &= ((gg^{-1})|_{v0}, (gg^{-1})|_{v0}, (gg^{-1})|_{v0})\beta^0 \\ &= (1, 1, 1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde $fg = 1$ dir. Böylece g nin tersi $f \in G^{2,3}$ dir.

(ii) g ve h, $G^{2,3}$ in keyfi elemanları olsunlar. $n = 1, 2, \ldots$ için $v, w \in X^n$ olmak üzere $g|_v = g|_w$ ve $h|_v = h|_w$ dir. Böylece $(gh)|_v = (gh)|_w$ olur.

$t + s \equiv q$ (mod2) olmak üzere, $|v|$ tek ise

$$\begin{aligned} (gh)|_v = g|_v h|_v &= (g|_{v0}, g|_{v0})\sigma^t(h|_{v0}, h|_{v0})\sigma^s \\ &= (g|_{v0}h|_{v0}, g|_{v0}h|_{v0})\sigma^{t+s} \\ &= ((gh)|_{v0}, (gh)|_{v0})\sigma^q \\ &= ((gh)|_{v0}, (gh)|_{v1})\sigma^q \end{aligned}$$

dir.

$t + s \equiv q$ (mod3) olmak üzere, $|v|$ tek ise

$$\begin{aligned} (gh)|_v = g|_v h|_v &= (g|_{v0}, g|_{v0}, g|_{v0})\gamma^t(h|_{v0}, h|_{v0}, h|_{v0})\gamma^s \\ &= (g|_{v0}h|_{v0}, g|_{v0}h|_{v0}, g|_{v0}h|_{v0})\gamma^{t+s} \\ &= ((gh)|_{v0}, (gh)|_{v0}, (gh)|_{v0})\gamma^q \\ &= ((gh)|_{v0}, (gh)|_{v1}, (gh)|_{|v2})\gamma^q \end{aligned}$$

dir. Böylece $gh \in G^{2,3}$ elde edilir.

$\square$

Önerme 5.7.2. *$G^{2,3}$ bir kompakt topolojik gruptur.*

Kanıt. $Aut(X^*)$ topolojik grup ve $G^{2,3}$, $Aut(X^*)$ ın altgrubu olduğundan , $G^{2,3}$ de topolojik gruptur. $G^{2,3}$ nin kompakt olduğunu göstermek için $Aut(X^*)$ ın kapalı alt kümesi olduğunu göstermek yeterlidir. $G^{2,3}$ de $g \in Aut(X^*)$ noktasına yakınsayan keyfi (g_n) dizisi alalım. $g \in G^{2,3}$ olduğunu gösterelim. g nin $G^{2,3}$ de olmadığını varsayalım. Bu durumda en az bir seviye vardır ki bu seviye üzerinde bir köşeye g etkisi bu seviyenin herhangi bir köşesine g nin etkisinden farklıdır. k bu seviyelerin minumumu olsun. Böylece $n \in \mathbb{N}$ için $d(g_n, g) \geq \frac{1}{2^k}$ olur. Bu ise (g_n) nin g ye yakınsaması ile çelişir. Yani $G^{2,3}$ kapalı olup kompakttır. $\square$

Önerme 5.7.3. *$\sigma = (01)$ ve $\gamma = (012)$ olsun. Her $i \in \{0,1\}$ ve $j \in \{0,1,2\}$ için,*

$$\begin{array}{rcccl} f_{ij} & : & Aut(X^*) & \rightarrow & Aut(X^*) \\ & & g & \mapsto & ((g,g,g)\gamma^j, (g,g,g)\gamma^j)\sigma^i \end{array}$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. $\{Aut(X^*), \{f_{i,j}\}_{i\in\{0,1\}, j\in\{0,1,2\}}\}$ yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörü $G^{2,3}$ dir.

Kanıt. $G^{2,3}$ kompakt metrik uzay ve her $i \in \{0,1\}$ ve $j \in \{0,1,2\}$ için $f_{i,j}$ büzülme dönüşümü olduklarından,

$$F(G^{2,3}) = \bigcup_{\substack{i\in\{0,1\} \\ j\in\{0,1,2\}}} f_{ij}(G^{2,3}) = G^{2,3}$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Öncelikle

$$G^{2,3} \subseteq \bigcup_{\substack{i\in\{0,1\} \\ j\in\{0,1,2\}}} f_{ij}(G^{2,3})$$

olduğunu gösterelim. $g \in G^{2,3}$ alalım. $i \in \{0,1\}$ ve $j \in \{0,1,2\}$ için $g = f_{ij}(h)$ olacak şekilde $h \in G^{2,3}$ olduğunu göstermeliyiz. g otomorfizmi X^* ağacının birinci seviyesine σ^i ve ikinci seviyesine γ^j olarak etki ediyor ise $h = g|_{00}$ olarak alırsak istenilen elde edilir.

Şimdi

$$\bigcup_{\substack{i\in\{0,1\}\\ j\in\{0,1,2\}}} f_{ij}(G^{2,3}) \subseteq G^{2,3}$$

olduğunu gösterelim.

$$g \in \bigcup_{\substack{i\in\{0,1\}\\ j\in\{0,1,2\}}} f_{ij}(G^{2,3})$$

olsun. $i \in \{0,1\}$ ve $j \in \{0,1,2\}$ için $g = f_{ij}(h)$ olacak şekilde $h \in G^{2,3}$ vardır.

$$g = f_{ij}(h) = ((h,h,h)\gamma^j, (h,h,h)\gamma^j)\sigma^i$$

olduğundan, $g \in G^{2,3}$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. $\square$

Sonuç 5.7.4. *$G^{2,3}$, YFS anlamında kuvvetli kendine benzer gruptur.*

5.8 Kendine Benzer Bir Profinite Grup Ailesi

$G_1, G_2, \ldots G_m$ birim elemanları sırasıyla $e_1, e_2, \ldots, e_m$ ve eleman sayıları $|G_1|, |G_2|, \ldots, |G_m|$ olan sonlu gruplar olsunlar.

$$G = (G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_m) \times (G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_m) \times \ldots$$

çarpım grubunu alalım.

$$\begin{aligned}
N_1 &= (\{e_1\} \times \ldots \times \{e_m\}) \times (G_1 \times \ldots \times G_m) \times (G_1 \times \ldots \times G_m) \times \ldots \\
N_2 &= (\{e_1\} \times \ldots \times \{e_m\}) \times (\{e_1\} \times \ldots \times \{e_m\}) \times (G_1 \times \ldots \times G_m) \times \ldots \\
&\vdots \\
N_n &= (\{e_1\} \times \ldots \times \{e_m\}) \times \ldots \times (\{e_1\} \times \ldots \times \{e_m\}) \times (G_1 \times \ldots \times G_m) \times \ldots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$N_i \subseteq N_{i-1}$ olacak şekilde içiçe geçmiş G nin normal alt gruplarıdır. Ayrıca, $[G : N_i] = (|G_1||G_2| \cdot \ldots |G_m|)^i$ dir.

$$G = \lim_{\substack{\longleftarrow \\ i \in \mathbb{N}}} (G/N_i)$$

Böylece G, sonlu grupların sayılabilir sayıda ters sisteminin ters limitidir. Böylece metriklenebilir bir profinite gruptur. Şimdi bu grubun YFS anlamında kendine benzer bir grup olduğunu göstereceğiz.

$$\begin{aligned}
\varphi \ : \quad G &\rightarrow N_1 \\
(g_1, g_2, \ldots) &\mapsto (e_1, e_2, \ldots, e_m, g_1, g_2, \ldots)
\end{aligned}$$

dönüşümü bir grup izomorfizmidir. Ayrıca; her $i = 1, 2, \ldots$ için,

$$\varphi(N_i) = N_{i+1}$$

dir. Böylece, Teoerem 4.3.3 gereğince G, YFS anlamında bir kendine benzer gruptur.

5.9 Değişmeli Olmayan Bir Grup

S_3 simetrik grubunu alalım. Bu grubun değişmeli olmadığını biliyoruz. $G = S_3 \times S_3 \times S_3 \times \ldots$ çarpım grubu da değişmeli değildir. G nin,

$$\begin{aligned} N_0 &= \{0\} \times S_3 \times S_3 \times \ldots \\ N_1 &= \{0\} \times \{0\} \times S_3 \times \ldots \\ &\vdots \\ N_n &= \{0\} \times \{0\} \times \ldots \{0\} \times S_3 \times S_3 \ldots \\ &\vdots \end{aligned}$$

alt gruplarını alalım. Her $i \in \mathbb{N}$ için, $N_1 \trianglelefteq G$ dir. Ayrıca, $[G : N_i] = 6^{i+1}$ dir.

$$G = \lim_{\substack{\longleftarrow \\ i \in \mathbb{N}}} (G/N_i)$$

Böylece G, sonlu grupların sayılabilir sayıda ters sisteminin ters limitidir. Böylece metriklenebilir bir profinite gruptur. Şimdi bu grubun YFS anlamında kendine benzer bir grup olduğunu göstereceğiz.

$$\begin{aligned} \varphi \ : \ S_3 \times S_3 \times S_3 \times \ldots &\to \{0\} \times S_3 \times S_3 \times \ldots \\ (s_1, s_2, s_3, \ldots) &\mapsto (0, s_1, s_2, s_3, \ldots) \end{aligned}$$

dönüşümü bir grup izomorfizmidir. Ayrıca; her $i = 1, 2, \ldots$ için,

$$\varphi(N_i) = N_{i+1}$$

dir. Böylece, Teoerem 4.3.3 gereğince G, YFS anlamında bir kendine benzer gruptur.

KAYNAKLAR

[1] Arzhantseva, G.N. ve Sunic, Z., "Construction of elements in the closure of Grigorchuk group", *Geometriae Dedicata*, **124(1)**, 17-26, 2007.

[2] Barnsley, M., Fractals Everywhere, Academic Press, 1988.

[3] Bartholdi, L., Grigorchuk, R. ve Nekrashevych, V., "From fractal groups to fractal sets", *Fractals in Graz 2001*, Analysis - Dynamics - Geometry - Stochastics (Peter Grabner and Wolfgang Woess, eds.), Birkhëuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 25-118, 2003.

[4] Bass, H., Otera-Espinar, M.V., Rockmore, D. ve Tresser, C., Cyclic Renormalition and Automorphism Groups of Rooted Trees, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[5] Demir, B. ve Saltan, M., "A self-similar group in the sense of iterated function system", *Far East J. Math. Sci.*, **60(1)**, 83-99, 2012.

[6] Dixon, J.D., Du, Sautoy, M.P.F., Mann, A., Segal, D., Analytic Pro-p Groups, Cambridge University Press, 1999.

[7] Falconer, K.J., Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Application, John Wiley, 2003.

[8] Gouvêa, F.Q., $p-$adic Numbers, Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[9] Holly, J.E., "Pictures of ultrametric spaces, the $p-$adic numbers, and valued fields", *Amer. Math. Monthly*, **108**, 721-728, 2001.

[10] Hutchinson, J.E., "Fractals and self-similarity", *Indiana Univ. Math. J.*, **30**, 713-747, 1981.

[11] Nekrashevych, V., Self-similar Groups, Mathematical Surveys and Monographs, **117**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[12] Ribes, L., Zalesskii, P., Profinite Groups, Springer, 2010.

[13] Robert, A.M., A Course in $p-$adic Analysis, Springer, 2000.

[14] Schikhof, W.H., Ultrametric Calculus an Introduction to $p-$adic Calculus, Cambridge University Press, New York, 1984.

[15] Sidki, S.N., "Regular trees and their automorphisms", *Monografias de Matematica*, **56**, IMPA, Rio de Janeiro, 1998.

[16] Wilson, J.S., Profinite Groups, London Mathematical Society Monographs, 1998.