VEKTÖR VE KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLER İÇİN YÖNLÜ TÜREV VE UYGULAMALARI

Mustafa SOYERTEM

Doktora Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Mayıs 2012

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Mustafa Soyertem'in **"Vektör ve Küme Değerli Dömünşümler İçin Yönlü Türev ve Uygulamaları"** başlıklı **Matematik** Anabilim Dalındaki **Doktora** tezi 17.04.2012 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	Adı - Soyadı	**İmza**
Üye (Tez Danışmanı)	**Prof.Dr. Mahide KÜÇÜK**	....
Üye	**Prof.Dr. Memmedağa MEMMEDLİ**	....
Üye	**Prof.Dr. Yalçın KÜÇÜK**	....
Üye	**Prof.Dr. Vakıf CAFER**	....
Üye	**Yard.Doç.Dr. Özden ÜSTÜN**	....

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof.Dr. Rıdvan SAY
Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

VEKTÖR VE KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLER İÇİN YÖNLÜ TÜREV VE UYGULAMALARI

Mustafa SOYERTEM

Anadolu Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mahide KÜÇÜK

2012, 70 Sayfa

Bu çalışmada, koniler yardımıyla tanımlanan kısmi sıralamaların tam sıralama tanımlayabilmeleri için bir ek şart verilmiştir. Gerçel ayrılabilir Hilbert uzayının bir dikey tabanı kullanılarak tam sıralama konisi oluşturulması için bir yöntem geliştirilmiştir. Bu yöntemle birlikte tam sıralama konilerinin bir karekterizasyonu verilmiştir. Tam sıralamaya göre verilen vektör ve küme değerli optimizasyon problemleri için optimallik şartları ve çözüm yöntemleri verilmiştir. Tam sıralama konileri ile elde edilen optimallik şartı kullanılarak yeni bir skalerleştirme yöntemi geliştirilmiş, bu yeni yönteme "Ardışık Ağırlıklandırılmış Toplam Yöntemi" adı verilmiştir. Bu yöntem bir optimizasyon problemi üzerinde bazı ölçütlere göre Ağırlıklandırılmış Toplam Yöntemi ile karşılaştırılmıştır. Ardışık Ağırlıklandırılmış Toplam Yöntemi kullanılarak bir kümeden bir vektör elde edilmesi işlemi vektörleştirme olarak isimlendirilmiştir. Bazı küme değerli optimizasyon problemlerinin vektör değerli optimizasyon problemlerine dönüştürülerek çözülebileceği kanıtlanmıştır. Küme değerli dönüşümler için bilinen limit tanımı ve vektörleştirme kullanılarak yönlü türevin küme değerli dönüşümlere bir genellemesi yapılmıştır. Bu tanımla bazı küme değerli dönüşümlerin yönlü türevinin vektör fonksiyonlar yardımıyla hesaplanması için bir yöntem geliştirilmiştir. Bu yönteme dayalı olarak optimallik şartları verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Vektör Optimizasyon, Küme Değerli Optimizasyon, Vektörleştirme, Yönlü Türev, Ardışık Ağırlıklandırılmış Toplam Yöntemi, Tam Sıralama

ABSTRACT

PhD Thesis

DIRECTIONAL DERIVATIVE FOR VECTOR AND SET VALUED MAPPINGS AND APPLICATIONS

Mustafa SOYERTEM

Anadolu University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Mathematics Program

Supervisor: Prof. Dr. Mahide KÜÇÜK

2012, 70 Pages

In this work, an additional condition for a partial ordering cone to define a total ordering cone in vector spaces is given. A process for constructing a total order by using an orthogonal base of real separable Hilbert space is developed. A characterization of total ordering cones is given by using this process. Optimality conditions and solution methods for vector or set valued optimality problems with respect to a total order are presented. A new scalarization method is developed by using the optimality condition obtained with total ordering cones and this method is named as "Successive Weighted Sum Method". This new method is compared with Weighted Sum Method on an optimization problem with respect to some criteria. The process of acquiring a vector from a set is named as vectorization. It is shown that set valued optimization problems can be solved by replacing them by vector valued optimization problems. A generalization of directional derivative to set valued maps is given by using vectorization and the definition of the limit of set valued maps. A method for calculating the set valued directional derivative of some of the set valued maps is developed by using the vector valued function. Some optimality conditions are obtained in terms of the developed calculation method.

Keywords: Vector Optimization, Set-Valued Optimization, Vectorization, Directional Derivative, Successive Weighted Sum Method, Total Order

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında ve üzerimde büyük emekleri olan değerli hocalarım Prof. Dr. Mahide KÜÇÜK ve Prof. Dr. Yalçın KÜÇÜK'e, vermiş olduğu bilgilerden, birlikte yaptığımız çalışmalardan dolayı Prof. Dr. Refail KASIMBEYLİ'ye, hazırlama aşamasında ve tezin yazımında yardımlarını esirgemeyen İlknur ATASEVER ve Didem TOSKAN'a, beni yetiştiren aileme, beni her zaman destekleyen sevgili eşim ve ailesine en içten teşekkürlerimi sunarım.

Mustafa Soyertem

Mayıs 2012

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\leq_C$	: C sıralama konisine göre tanımlanan sıralama bağıntısı
$min(A, C)$	: A kümesinin C sıralama konisine göre minimal elemanları kümesi
$p - min(A, C)$	: A kümesinin C sıralama konisine göre has(proper) minimal elemanları kümesi
(P)	: Optimzasyon problemi
(VP)	: Vektör değerli optimizasyon problemi
(SVP)	: Küme değerli optimizasyon problemi
(SP)	: Skaler optimizasyon problemi
$C^\sharp$	: C konisinin dualinin quasi içi
$V_F(\cdot)$	: F küme değerli dönüşümünün K minimali
$f'(x; h)$	: f fonksiyonunun x noktasında h yönündeki yönlü türevi
$D_hF_-(x)$	: F küme değerli dönüşümünün x noktasında h yönündeki alttan küme değerli yönlü türevi
$D_hF_+(x)$	: F küme değerli dönüşümünün x noktasında h yönündeki üstten küme değerli yönlü türevi
$D_hF(x)$	: F küme değerli dönüşümünün x noktasında h yönündeki küme değerli yönlü türevi
$\mathbb{R}^n_+$	: $\mathbb{R}^n$ uzayının tüm bileşenleri pozitif veya 0 olan alt kümesi
$min(SP_i)$	: i. skaler problemin görüntü kümesinin minimal elemanları kümesi
$Sol(SP_i)$	: i. skaler problemin minimal elemanlarının ters görüntü kümesi

1 GİRİŞ

Bir fonksiyonun minimum ya da maksimumunun olması matematiğin ve dolayısıyla gerçek hayatın en önemli problemlerinden biridir.

Bir X gerçel normlu vektör uzayı üzerinde tanımlı gerçel değerli f fonksiyonu ve X'in boş olmayan bir A altkümesi için aşağıdaki (P) problemi göz önüne alınsın:

$$(P): \begin{cases} \max(\min) \quad f(x) \\ \qquad x \in A \end{cases}$$

$\bar{x}$ bu problemin bir çözümü, A'nın bir iç noktası ve f, $\bar{x}$'de Frechet diferansiyellenebiliyorsa $f'(\bar{x}) = 0$ olur ki bu optimallik için gerekli bir şarttır. Eğer $\bar{x}$, A kümesinin bir iç noktası değilse bu şart varyasyonel eşitsizlik diye adlandırılan ve

$$\forall\ x \in A \text{ için } \langle f'(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle \geq 0$$

biçiminde ifade edilen bir formda verilir. f'in $\bar{x}$ noktasında diferansiyellenebilme şartı (P) probleminin özüne ait değişmez bir özellik değildir. f'in diferansiyellenemez olduğu durumlarda da (P) probleminin çözümü gerçekleşebilir.

Ne konveks ne de türevlenemeyen fonksiyonlar için (P) probleminin çözümü çok daha zordur. Bununla birlikte son yüzyıl içinde bu alanda da dikkate değer çalışmalar yapılmıştır.

Konveks durumda f'in $\bar{x}$ noktasındaki x^* subgradienti ilk olarak

$$\forall\ x \in X \text{ için } f(x) \geq f(\bar{x}) + \langle x^*, x - \bar{x} \rangle$$

şartını sağlayan $x^* : X \to \mathbb{R}$ sürekli doğrusal fonksiyonu olarak tanımlanmıştır. Daha sonra f'in $\bar{x}$ noktasında d vektörü yönündeki $f'(\bar{x}, d)$ yönlü türevi kullanılarak

$$\forall\ d \in X \text{ için } \langle x^*, d \rangle \leq f'(\bar{x}, d)$$

şartına uyan $x^* : X \to \mathbb{R}$ sürekli lineer fonksiyonelinin de f'nin $\bar{x}$ noktasında bir subgradienti olduğu gösterilmiştir. f konveks ise $f'(\bar{x}, \cdot) : X \to \mathbb{R}$ de konveks bir fonksiyoneldir. Ancak f konveks değilse $f'(\bar{x}, \cdot)$ fonksiyonu konveks olmak zorunda olmadığı gibi, optimallik şartlarını da vermeye yeterli olmayabilir.

Bazı araştırmacılar optimallik şartlarını verebilmek için $f'(\bar{x},\cdot)$ yönlü türev fonksiyonelini üstten sınırlayan ve konveks yaklaşımlar diye bilinen yöntemler geliştirmişlerdir.

(P) probleminin çözümü araştırılırken bir f fonksiyoneline bir $\bar{x}$ noktası civarında yaklaşımda bulunmanın yanısıra eş zamanlı olarak A kümesine de yine aynı noktada yaklaşımda bulunulabilir. Optimizasyon problemlerinin bir çok sınıfı için A kümesine tanjant koniler ile yaklaşım uygun olmaktadır. $f'(\bar{x},\cdot)$ ve $T(A,\bar{x})$ sırasıyla $\bar{x}$ noktasında f fonksiyonunun yönlü türevi ve A kümesinin $\bar{x}$ noktasındaki tanjant konisi olmak üzere optimizasyon problemlerinde gerekli bir şart

$$\forall\ x \in T(A,\bar{x}) \text{ için } f'(\bar{x},x) \geq 0$$

biçiminde verilebilir.

A kümesine yerel yaklaşımın diğer bir metodu da normal konilerle yaklaşımdır. Normal koniyi tanımlamanın alışılagelmiş yolu onu, tanjant koninin poları olarak ifade etmektir. Normal koniler -aynı zamanda- uygun fonksiyonellerin subdiferansiyeli yardımıyla da tanımlanabilirler.

Küme değerli dönüşümler için türev çalışmaları Aubin [4] ile başlar. Aubin Fréchet türevi küme değerli dönüşümler için genelleştirmiş, bunu kullanarak küme değerli dönüşümler için optimallik şartlarını belirlemeye çalışmıştır. Ancak yapılan çalışmalarda bilinen standart optimallik şartları küme değerli dönüşümler için doğrudan genelleştirilememiştir. Optimallik şartlarını elde etmek için Jahn ve Rauh [18] küme değerli dönüşümler için gerek ve yeterli şartları elde etmişlerdir. Ayrıca Jahn ve Rauh küme değerli dönüşümün görüntü uzayının gerçel sayılar kümesi olduğu durumda epitürevin varlık teoremini vermişlerdir. Fakat genel durumda -yani görüntü uzayının kısmi sıralı herhangi bir Banach uzayı olması durumunda- contingent epitürevin varlığı, hala açık bir problemdir. Chen ve Jahn genelleştirilmiş contingent epitürevi tanımlayıp varlığı ile ilgili çeşitli sonuçlar bulmuşlar ve bunlar yardımıyla koni-konveks küme değerli optimizasyon problemi için gerekli ve yeterli optimallik şartları vermişlerdir [10]. Diğer taraftan Bhatia ve Mehra [7] koni-preinvex küme değerli dönüşümlerin sınıfını tanımlamışlardır ki; bu sınıf, koni-konveks küme değerli dönüşümlerin sınıfından daha geniştir. Jinghui ise genelleştirilmiş koni-preinvex küme değerli dönüşümünü tanımlamıştır ve Corley 'in [11] tanımladığı koni-yönlü contingent türevi kullanarak kısıtsız genelleştirilmiş preinvex küme değerli optimizasyon probleminin zayıf ve güçlü minimal elemanları için gerekli ve yeterli optimallik şartlarını vermiştir [21].

Bu kısıma kadar bahsedilen çalışmaların hepsi koni-konveks ya da zayıflatılmış koni-konvekslik şartı olan kısıtsız küme değerli optimizasyon problemleri üzerinedir. Bazán küme değerli dönüşümler için bir radial epitürev tanımlamış ve konveks olmayan kısıtsız küme değerli optimizasyon probleminin zayıf minimal ve minimal elemanları için gerekli ve yeterli optimallik şartlarını vermiştir [6]. Aynı zamanda bulunan çözümlerin yerel değil, global olduğunu söylemiştir. Fakat radial epitürevin tanımındaki kısıtlayıcı etkenlerden dolayı Bazan'ın tanımı çok kullanışlı değildir. Bunun üzerine Kasımbeyli [22] Jahn ve Rauh'un contingent epitürevine benzer olarak radial epitürev tanımını vermiş; kısıtsız küme değerli optimizasyon probleminin has ve zayıf minimalleştiricileri için gerekli ve yeterli optimallik şartlarını çalışmıştır.

Götz ve Jahn [14], koni-konveks küme değerli optimizasyon problemi için Lagrange çarpanları yöntemini kullanarak zayıf minimal noktalar için gerekli ve yeterli optimallik şartlarını vermişlerdir. Hernandez ve Rodriguez-Marin ise konveks lineer olmayan küme değerli optimizasyon problemi için duallik teoremleri ve Lagrange çarpanları kuralını vermişlerdir [16]. Küme değerli dönüşümler için subdiferansiyel kavramı da çeşitli araştırmacılar tarafından tanımlanmıştır [5], [35]. Bunlardan Jahn ve Baier küme değerli dönüşümler için subdiferansiyel ve zayıf subdiferansiyel yardımıyla kısıtsız küme değerli optimizasyon problemlerinde zayıf minimal ve güçlü minimal elemanlar için gerekli ve yeterli optimallik şartlarını elde etmişlerdir. Taa [33] ise küme değerli dönüşümlerlerde subdiferansiyeli kullanarak kısıtlı küme değerli optimizasyon problemleri için Lagrange-Frtiz-John ve Lagrange-Kuhn-Tucker çarpanları yardımıyla optimallik şartlarını elde etmiştir.

Bu çalışmada, koniler yardımıyla tanımlanan kısmi sıralamaların, vektör uzaylarında tam sıralama tanımlayabilmeleri için gerek ve yeter bir şart verilmiştir. Bu şartla birlikte sonlu boyutlu Euclid ve gerçel ayrılabilir Hilbert uzayların dikey bir tabannı kullanılarak tam sıralama konisi oluşturulması için bir yöntem elde edilmiştir. Bu yöntemin uygulamasına yönelik örnekler verilmiştir. Bu yöntemle birlikte tam sıralama konilerinin bir karekterizasyonu verilmiştir. Tam sıralama konilerinin özellikleri incelenmiş, lexicografik koninin bir tam sıralama konisi olarak standart tabanla ilişkisi ispatlanmıştır. Tam sıralama konilerinin taban vektörleri değiştirilerek lexicografik sıralamaya dönüştürülebildiği kanıtlanmıştır. Tam sıralamaya göre verilen vektör ve küme değerli optimizasyon problemleri için optimallik şartları ve çözüm yöntemleri verilmiştir. Bu yöntemle başka koniler için de çözüm bulunabileceği gösterilmiştir.

Tam sıralama konileri ile elde edilen optimallik şartının getirmiş olduğu skalerleştirici çözüm yöntemi, Ardışık Ağırlıklandırılmış Toplam yöntemi olarak isimlendirilmiş ve bir optimizasyon problemi üzerinde bazı ölçütlere göre Ağırlıklandırılmış Toplam Yöntemi ile karşılaştırılmıştır. Ağırlıklandırılmış Toplam Yöntemi ile elde edilebilecek çözüm kümelerinin uç noktalarının Ardışık Ağırlıklandırılmış Toplam Yöntemi ile elde edilebileceği gösterilmiştir.

Şimdi şu problemi gözönüne alalım. Bir marketler zincirinde daha ucuza daha iyi hizmet için 11 farklı şubede farklı çalışma planları uygulanmış ve elde edilen şonuçlar çalışan şikayetleri, müşteri şikayetleri ve maliyet ana başlıkları altında aşağıdaki tabloda listelenmiştir.

Şube	A	B	C	D	E	F	H	I	J	K	L
Çalışan Şikayetleri	4	2	4	5	4	2	6	7	8	8	6
Müşteri Şikayetleri	4	6	6	1	6	2	8	3	6	2	2
Maliyet	4	4	4	6	6	8	4	2	2	9	4

Sonuçlar üç değişik kritere göre değerlendirilecektir. İlk olarak üç ana başlıkta eşit derecede önemli kabul edilecek, daha sonra da müşteri memnuniyeti öne çıkarılacak ve son olarak da maliyet ön planda tutulacaktır. Bu tür bir vektör optimizasyon problemi, tam sıralama konisi kullanılarak Ardışık Ağırlıklandırılmış Toplam Yöntemi ile 3. bölümde çözülecektir.

Bir küme değerli dönüşümünün minimal elemanlarını seçerek vektör değerli dönüşüm elde edilmesi işlemi küme değerli dönüşümlerin vektörleştirilmesi olarak adlandırılmış ve Ardışık Ağırlıklandırılmış Toplam yöntemi ile küme değerli dönüşümlerin vektörleştirilmesi verilmiştir. Küme değerli dönüşümler ile bunların vektörleştirilmelerinin sıralanmasının denk olduğu görülmüş böylece; küme değerli optimizasyon problemlerinin vektör değerli optimizasyon problemlerine dönüştürülerek çözülebileceği gösterilmiştir.

Daha önce verilen [4] küme değerli dönüşümler için limit tanımı ve vektörleştirme kullanılarak yönlü türevin küme değerli dönüşümlere bir genellemesi tanımlanmıştır. Bu tanımla bazı küme değerli dönüşümler için yönlü türevin vektör değerli fonksiyonlar kullanılarak hesaplanması, yöntem olarak verilmiştir. Bir küme değerli dönüşümün yönlü türevi ile vektörleştirilmesinin yönlü türevi arasındaki ilişki verilerek optimallik şartları elde edilmiştir. Örnekler üzerinde hesaplanması ve optimallik şartları gösterilmiştir.

2 TAM SIRALAMA

Kısmi sıralı uzaylarda, vektör optimizasyon fikrini ilk olarak ortaya koyanlar Edgeworth [12] ve Pareto [30] olmuştur. Vektör Optimizasyon problemleri çözülürken kısmi sıralı doğrusal uzaylarda bir kümenin optimal elemanı aranır. Koopmans [25] ve Kuhn-Tucker [26] ise bu konunun öncülerindendir. Hurwicz [17], Vogel [38], Penot [31], Kirsch ve ark. [23] ve daha pek çokları bu konu üzerine çalışmışlardır. Vektör optimizasyonu konusunda son yıllarda yapılan çalışmaların bir bölümü Dinh The Luc'un Theory of Vector Optimization [28] ve Johannes Jahn'ın Vector Optimization [19] adlı kitaplarında yer almaktadır.

Küme değerli optimizasyon, vektör optimizasyonun küme değerli problemlere bir uzantısıdır. Son yirmi yıldır vektör optimizasyon prensiplerinin küme değerli problemlere uyarlanması, pek çok araştırmacının ilgisini çekmiştir. Bazı küme değerli optimizasyon problemleri ve uygulamaları Aubin ve Cellina [2], Chen ve Jahn [10], Klein ve Thompson [24] tarafından çalışılmıştır. Küme değerli optimizasyonun oyun teorisi ve mühendislik üzerine önemli uygulamaları olduğu bilinmektedir [3].

Çeşitli yönlü türevlerin nonsmooth analiz ve optimizasyonda önemli bir yeri vardır. Örneğin; yönlü türevler kullanılarak çeşitli subdiferansiyeller tanımlanabilmiştir. Jeyakumar ve Yang [20] skaler-değerli dönüşümler için alttan ve üstten Dini yönlü türev kullanarak sürekli bir fonksiyon için konveksleştirici elde etmişler ve bir sürekli fonksiyon sınıfı için ortalama değer teoremini ifade etmişlerdir. Vektör değerli dönüşümler için Dini yönlü türev Valadir [37] tarafından verilmiştir.

Bu bölümde, vektör uzaylarda koniler yardımıyla yapılan sıralamalarda, tam sıralama için bir şart elde edilmiştir. Bu şart kullanarak öncelikle $\mathbb{R}^n$'de dikey bir taban yardımıyla tam sıralama konisinin elde edilme yöntemi verilmiştir. Daha sonra da bu yöntem, gerçel ayrılabilir Hilbert uzaylarına genelleştirilmiştir. Tam sıralama konilerinin bazı özellikleri incelenerek gerçel ayrılabilir Hilbert uzaylarında her tam sıralamanın dikey bir tabanla eşleştirilerek elde ettiğimiz yöntemle verilebileceği gösterilmiştir. Böylece de gerçel ayrılabilir Hilbert uzaylarda tam sıralama konilerinin bir karekterizasyonu elde edilmiştir. Özel bir tam sıralama örneği olarak lexicographic sıralamanın standart

tabanla ilişkisi gösterilmiştir. Bununla birlikte taban vektörleri değiştirilerek her tam sıralamanın lexicographic sıralama olarak ifade edilebileceği gösterilmiş, dolayısıyla gerçel ayrılabilir Hilbert uzaylarda tüm tam sıralamaların izomorf olduğu kanıtlanmıştır.

Kompakt tabana sahip bir koniyi kapsayan bir tam sıralamanın varlığı gösterilmiştir. Tam sıralama konisine göre elde edilen bir minimal elemanın kompakt tabana sahip olan koninin has minimal elemanları kümesine ait olduğu gösterilmiştir. Tam sıralamaya göre minimallik tanımlarının özellikleri incelenmiştir. Tam sıralama konisine ve kompakt tabana sahip sıralama konisine göre verilen vektör ve küme değerli optimizasyon problemleri için optimallik şartları elde edilmiştir.

2.1 Kısmi Sıralama

Bu bölüme, vektör uzaylarında kısmı sıralamanın bilinen tanımını vererek başlıyoruz.

Tanım 2.1.1. *Y bir vektör uzayı ve R, Y'de bir bağıntı olsun. R aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa R'ye Y de bir kısmi sıralama denir.*

$y_1, y_2, y_3 \in Y$ olmak üzere

i) R yansıyandır (her $y_1 \in Y$ için $y_1 \; R \; y_1$)

ii) R anti-simetriktir ($y_1 \; R \; y_2$ ve $y_2 \; R \; y_1 \Rightarrow y_1 = y_2$)

iii) R geçişkendir ($y_1 \; R \; y_2$ ve $y_2 \; R \; y_3 \Rightarrow y_1 \; R \; y_3$)

iv) R toplamayla uyumludur ($\forall y \in Y$ için $y_1 \; R \; y_2 \Leftrightarrow y_1 + y \; R \; y_2 + y$)

v) R skaler çarpım ile uyumludur ($\forall \lambda > 0$ için $y_1 \; R \; y_2 \Leftrightarrow \lambda y_1 \; R \; \lambda y_2$)

Koni yardımıyla tanımlanan kısmi sıralamanın bazı özellikleri aşağıda verilmiştir.

[13] Y bir vektör uzayı, $C \subset Y$ boş olmayan bir küme, " $\leq_C$ " Y üzerinde

$$y_1 \leq_C y_2 \Leftrightarrow y_2 - y_1 \in C$$

ile tanımlanan bir bağıntı olsun. Bu durumda " $\leq_C$ " bağıntısı toplamayla uyumludur.

Tanım 2.1.2. *Y bir vektör uzayı, $C \subset Y$ boş olmayan bir küme olsun. Her $c \in C$ ve $\lambda \geq 0$ için $\lambda c \in C$ oluyorsa C'ye koni denir.*

Önerme 2.1.3. *[13] Y bir vektör uzayı, $C \subset Y$ boş olmayan bir küme " $\leq_C$ " Y üzerinde $y_1, y_2 \in Y$ için*

$$y_1 \leq_C y_2 \Leftrightarrow y_2 - y_1 \in C$$

ile tanımlanan bir bağıntı olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur:

a) " $\leq_C$ " yansıyandır. $\Leftrightarrow 0 \in C$

b) " $\leq_C$ " anti-simetriktir. $\Leftrightarrow$ C sivridir (pointed). $(C \cap (-C) = \{0\})$

c) " $\leq_C$ " geçişkendir. $\Leftrightarrow$ C konvekstir.

d) " $\leq_C$ " çarpma ile uyumludur $\Leftrightarrow$ C bir konidir.

Sonuç 2.1.4. *[13] Y bir vektör uzayı, $C \subset Y$ boş olmayan bir küme, " $\leq_C$ " Y üzerinde $y_1, y_2 \in Y$ için*

$$y_1 \leq_C y_2 \Leftrightarrow y_2 - y_1 \in C$$

ile tanımlanan bir bağıntı olsun. C bir sivri, konveks koni ise " $\leq_C$ " Y üzerinde bir kısmi sıralama tanımlar.

2.2 $\mathbb{R}^n$'de Tam Sıralama Konileri

Bu bölümde bir kısmi sıralama konisinin tam sıralama tanımlayabilmesi için gerekli ve yeterli bir şart verilmiş, sonlu boyutlu Euclid uzaylarında dikey bir taban kullanılarak tam sıralama konileri oluşturulmuş ve tam sıralama konilerine örnekler verilmiştir.

Bu bölüme, tam sıralamanın bilinen tanımını vererek başlıyalım:

Tanım 2.2.1. *Y bir vektör uzayı ve R, Y üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı olsun.*

Her $y_1, y_2 \in Y$ için $y_1 \; R \; y_2$ veya $y_2 \; R \; y_1$ oluyorsa R'ye Y üzerinde bir tam sıralama bağıntısı denir.

Aşağıda bir kısmi sıralama bağıntısının tam sıralama bağıntısı olabilmesi için gerek ve yeter şart verilmiştir.

Önerme 2.2.2. *Y bir vektör uzayı, $C \subset Y$ boş olmayan bir küme, " $\leq_C$ " Y üzerinde $y_1, y_2 \in Y$ için*

$$y_1 \leq_C y_2 \Leftrightarrow y_2 - y_1 \in C$$

ile tanımlanan bir kısmi sıralama bağıntısı olsun. Bu durumda

$$\text{" } \leq_C \text{ " } Y \text{ üzerinde bir tam sıralama bağıntısıdır} \Leftrightarrow C \cup (-C) = Y \, dir.$$

Kanıt. $(\Rightarrow)$ y, Y uzayında bir nokta olsun. Bu durumda $0_Y \leq_C y$ veya $y \leq_C 0_Y$ olur. Dolayısıyla $y - 0_Y = y \in C$ veya $0_Y - y = -y \in C$ elde edilir. Böylece, $y \in C \cup (-C)$ olur. Buradan $Y \subset C \cup (-C)$ elde edilir. Ters kapsam her zaman doğru olacağından $Y = C \cup (-C)$ elde edilir.

$(\Leftarrow)$ " $\leq_C$ ", $Y = C \cup (-C)$ olacak şekilde Y üzerinde bir kısmi sıralama ve y_1, y_2 Y'de herhangi iki nokta olsun. Bu durumda $y_1 - y_2$ de Y uzayında bir noktadır. $Y = C \cup (-C)$ olduğundan, $y_1 - y_2 \in C$ veya $y_1 - y_2 \in -C$ olur. Bu ise $y_1 \leq_C y_2$ veya $y_2 \leq_C y_1$ olduğunu gösterir. Böylece Y uzayındaki herhangi iki nokta " $\leq_C$ " kısmi sıralamasına göre karşılaştırılabilir. O halde $\leq_C$ bir tam sıralamadır. □

Yukarıdaki önerme, tüm vektör uzayları için geçerlidir.

Şimdi; sonlu boyutlu Euclid uzaylarında bir tam sıralama konisinin elde ediliş yöntemini vereceğiz.

Önce, $\mathbb{R}^n$'de verilen sıfırdan farklı bir r_1 vektörü için, $K_1 = \{k \in \mathbb{R}^n : \langle k, r_1 \rangle > 0\}$ kümesi oluşturulup r_2 vektörü r_1'e dik bir şekilde seçilir. Ardından r_1 ve r_2 vektörleri kullanılarak $K_2 = \{k \in \mathbb{R}^n : \langle k, r_1 \rangle = 0, \langle k, r_2 \rangle > 0\}$ kümesi oluşturulur. Daha sonra r_1 ve r_2 ye dik olan r_3 vektörü seçilip $K_3 = \{k \in \mathbb{R}^n : \langle k, r_1 \rangle = 0, \langle k, r_2 \rangle = 0, \langle k, r_3 \rangle > 0\}$ kümesi oluşturulur. Bu uygulumaya adım adım devam edilirse i. adımda r_i vektörü her $j < i$ için r_i r_j vektörlerine dik olarak seçilip $K_i = \{k \in \mathbb{R}^n : \forall j < i \text{ için } \langle k, r_j \rangle = 0, \text{ ve } \langle k, r_i \rangle > 0\}$ kümesi oluşturulur. Sonuç olarak

$$K = \left(\bigcup_{i=1}^{n} K_i \right) \cup \{0_{\mathbb{R}^n}\} \tag{2.1}$$

kümesini tanımlanır.

Aşağıdaki teoremde (2.1)'de verilen K kümesinin bir tam sıralama konisi olduğu kanıtlanmıştır.

Teorem 2.2.3. *Sonlu boyutlu Euclid uzaylarında (2.1) eşitliği ile tanımlanan K kümesi $K \cup (-K) = \mathbb{R}^n$ olacak şekilde bir sivri, konveks konidir. Ayrıca bu koni $\mathbb{R}^n$ üzerinde*

$$\begin{aligned} a \leq_K b \Leftrightarrow \quad & a = b \text{ veya } \forall j < i, \text{ için } \langle r_j, a \rangle = \langle r_j, b \rangle \text{ ve } \langle r_i, a \rangle < \langle r_i, b \rangle \\ & \text{koşullarını sağlayacak şekilde } i \in \{1, ..., n\} \text{ vardır.} \end{aligned}$$

tanımlamasıyla bir tam sıralama konisidir.

Kanıt. Bu teoremin kanıtını 4 adımda yapalım;

1. ADIM Önce K'nın bir koni olduğunu gösterelim. k, K'da bir vektör ve $\lambda \geq 0$ olsun.

   * Eğer $k = 0_{\mathbb{R}^n}$ veya $\lambda = 0$ ise $\lambda k = 0_{\mathbb{R}^n} \in K$ olur.

   * Eğer $k \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ ve $\lambda > 0$ ise her $j < i$ için $\langle r_j, k \rangle = 0$ ve $\langle r_i, k \rangle > 0$ olacak biçimde bir $i \in \{1, ..., n\}$ vardır. Buradan her $j < i$ için $\langle r_j, \lambda k \rangle = 0$ ve $\langle r_j, \lambda k \rangle > 0$ olur. Dolayısıyla $\lambda k \in K$ elde ederiz. Sonuç olarak K $\mathbb{R}^n$'da bir konidir.

2. ADIM K'nın sivri(pointed) olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $k \in K \cap (-K)$ olan $\exists k \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ var olsun. $k \in K$ olduğundan, her $j < i_1$ için $\langle r_j, k \rangle = 0$ ve $\langle r_{i_1}, k \rangle > 0$ olan bir $i_1 \in \{1, ..., n\}$ vardır. $k \in -K$ olduğundan da her $j < i_2$ için $\langle r_j, -k \rangle = 0$ ve $\langle r_{i_2}, -k \rangle > 0$ olan bir $i_2 \in \{1, ..., n\}$ vardır.

   i_1 ve i_2 için iki olasılık vardır:

   * Eğer $i_1 = i_2$ ise $\langle r_{i_1}, k \rangle > 0$ ve $\langle r_{i_1}, -k \rangle > 0$ olur bu da bir çelişkidir.
   * Eğer $i_1 < i_2$ ise her $j < i_2$ için $\langle r_j, -k \rangle = 0$, $\langle r_{i_1}, k \rangle > 0$ olur bu da bir çelişkidir.

   $i_2 < i_1$ olduğu durumda da aynı şekilde bir çelişki elde edilir. Sonuç olarak $K \cap (-K) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ olur.

3. ADIM Şimdi de K'nın konveks olduğunu gösterelim.

   K bir koni olduğundan $K + K = K$ olduğunu göstermek yeterlidir.

   $0_{\mathbb{R}^n} \in K$ olduğundan

$$K = 0_{\mathbb{R}^n} + K \subset K + K \tag{2.2}$$

   olur. Diğer kapsamı göstermek için bir $k \in K + K$ seçelim. Bu durumda $k_1 + k_2 = k$ olacak biçimde $k_1, k_2 \in K$ vardır. Eğer k_1 veya k_2 sıfır olursa $k \in K$ olur. Eğer k_1 ve k_2 sıfırdan farklı vektörlerse her $j < i$ için $\langle r_j, k_1 \rangle = 0$, $\langle r_{i_1}, k_1 \rangle > 0$ olan bir $i_1 \in \{1, ..., n\}$ vardır. Aynı biçimde her $j < i$ için $\langle r_j, k_2 \rangle = 0$, $\langle r_{i_2}, k_2 \rangle > 0$ olan bir $i_2 \in \{1, ..., n\}$ vardır. Kabul edelim ki $i_1 \leq i_2$ olsun. Bu durumda her $j < i_1$ için

$$\langle r_j, k_1 + k_2 \rangle = \langle r_j, k_1 \rangle + \langle r_j, k_2 \rangle = 0 + 0 = 0$$

   olur. Bununla birlikte $\langle r_{i_1}, k_1 \rangle > 0$, $\langle r_{i_1}, k_2 \rangle \geq 0$ olduğundan,

$$\langle r_{i_1}, k_1 + k_2 \rangle = \langle r_{i_1}, k_1 \rangle + \langle r_{i_1}, k_2 \rangle > 0$$

   elde ederiz.

   Bu ise $k_1 + k_2 = k \in K$ demektir. Yani

$$K + K \subset K \tag{2.3}$$

   olur. (2.2) ve (2.3) den $K = K + K$ elde ederiz.

4. ADIM Son olarak da K'nın bir tam sıralama olduğunu, yani $K \cup (-K) = \mathbb{R}^n$ olduğunu gösterelim.

$$K \cup (-K) \subset \mathbb{R}^n \tag{2.4}$$

olduğu açıktır.

Şimdi de $\mathbb{R}^n \subset K \cup (-K)$ olduğunu gösterelim. $r \in \mathbb{R}^n$ olsun. Eğer $r = 0_{\mathbb{R}^n}$ ise $r \in K \cup (-K)$ olur. Eğer $r \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ ise her $j < i$ için $\langle r_j, r \rangle = 0$ ve $\langle r_i, r \rangle \neq 0$ olan bir $i \in \{1, ..., n\}$ vardır. ($\{r_1, ..., r_n\}$, $\mathbb{R}^n$'de dikey bir küme olduğundan $\mathbb{R}^n$'de sıfırdan farklı bir vektör kümedeki tüm vektörlere dik olamaz). $\langle r_i, r \rangle \neq 0$ olduğundan $\langle r_i, r \rangle > 0$ veya $\langle r_i, r \rangle < 0$ olur.

* Eğer $\langle r_i, r \rangle > 0$ ise $r \in K$
* Eğer $\langle r_i, r \rangle < 0$ ise $r \in -K$

Sonuç olarak $r \in K \cup (-K)$ bulunur. Buradan

$$\mathbb{R}^n \subset K \cup (-K) \tag{2.5}$$

elde ederiz. (2.4) ve (2.5)'den $\mathbb{R}^n = K \cup (-K)$ olur.

$\mathbb{R}^n$'deki bu tam sıralama da aşağıdaki şekildedir;

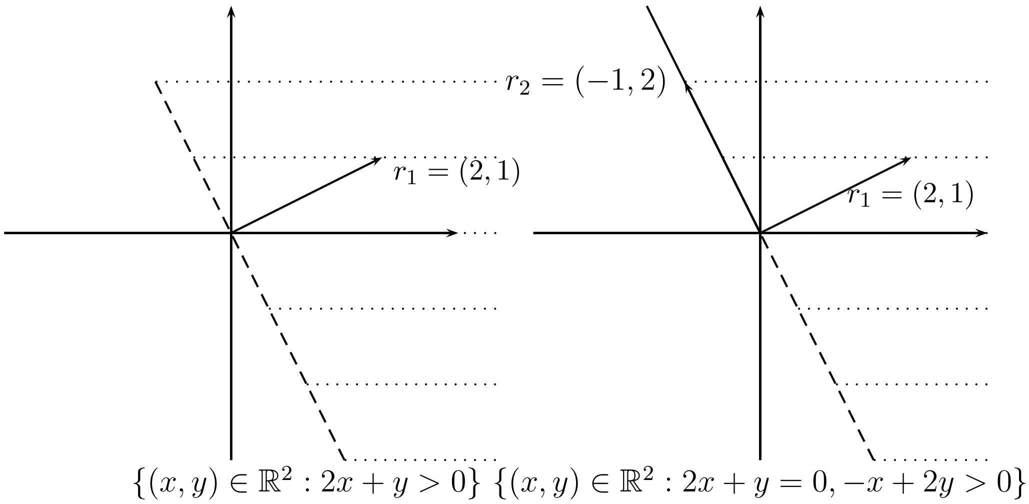
$$\begin{aligned} a \quad \leq_K \quad & b \Leftrightarrow b - a \in K \\ \Leftrightarrow \quad & \exists i \in \{1, ..., n\} \text{ öyle ki } \forall j < i \text{ için }, \langle r_j, b - a \rangle = 0 \text{ ve } \langle r_i, b - a \rangle > 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \exists i \in \{1, ..., n\} \text{ öyle ki } \forall j < i \text{ için }, \langle r_j, b \rangle = \langle r_j, a \rangle \text{ ve } \langle r_i, b \rangle > \langle r_i, a \rangle \end{aligned}$$

$\square$

Aşağıdaki örnekde teoremdeki yöntem uygulanarak $\mathbb{R}^2$'de bir tam sıralama konisi oluşturulmuştur.

Örnek 2.2.4. $\mathbb{R}^2$*'de sıfırdan farklı herhangi bir vektörü seçerek tam sıralama konimizi adım adım oluşturalım.* $r_1 = (2, 1)$ *olsun. Sonrasında* $K_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \langle (2, 1), (x, y) \rangle > 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y > 0\}$ *kümesini* *tanımlayalım. Bu küme* $\mathbb{R}^2$*'de* $y = -2x$ *doğrusunun üst kısmı olan açık yarı uzaydır. İkinci adımda* r_2 *vektörünü* r_1*'e dik olan herhangi bir vektör seçelim.* $r_2 = (-1, 2)$ *olsun.* r_1*,* r_2 *vektörleri ile* $K_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \langle (2, 1), (x, y) \rangle = 0, \langle (-1, 2), (x, y) \rangle > 0\}$ *kümesini tanımlayalım. Bu küme başlangıç noktası orijin olan* $r_2 = (-1, 2)$ *yönündeki açık yarı doğrudur.* $\{r_1, r_2\}$ *kümesinin* $\mathbb{R}^2$ *nin bir tabanı olduğu açıktır.*

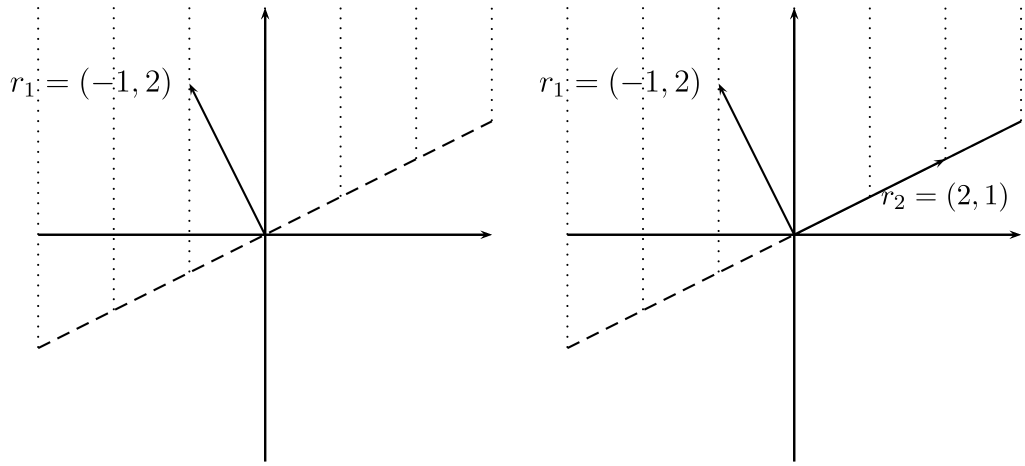
$K = K_1 \cup K_2 \cup \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ *kümesi* $y = -2x$ *doğrusunun üst açık yarı uzayı, orijinden başlayıp* r_2 *yönünde sonsuza giden açık yarı doğru ve orijinin birleşimidir(Şekil 2.1). Bu küme* $\mathbb{R}^2$*'de bir tam sıralama konisidir.*



Şekil 2.1: Örnek 2.2.4'de verilen $\mathbb{R}^2$'de tam sıralama konisi örneği.

Teorem 2.2.3'de verilen $\{r_1, ..., r_n\}$ *kümesinde sıralama önemlidir. Bu vektörlerin sıralamalarının değişmesi tam sıralama konisini ve koninin belirttiği tam sıralamayı değiştirir.*

Örnekte vektörlerin sıralamalarını $r_1 = (-1, 2)$ *ve* $r_2 = (2, 1)$ *olarak değiştirirsek, bu durumda* K*,* $y = \frac{1}{2}x$ *doğrusunun üst yarı uzayı ve başlangıç noktasından başlayan* $(2, 1)$ *yönündeki açık yarı doğru ve orijin olur. (Şekil 2.2)*



Şekil 2.2: Örnek 2.2.4'de vektörlerin sırası değiştiğinde oluşan tam sıralama konisi.

2.3 Gerçel Ayrılabilir Hilbert uzaylarda Tam Sıralama Konileri

Bu bölümde, sonlu boyutlu Euclid uzayları için yukarıda tanımladığımız yöntemi, gerçel ayrılabilir Hilbert uzaylarına genişleterek bazı özelliklerini inceledik. Ayrıca; bu yöntem ile tüm tam sıralama konilerinin ifade edilebileceğini kanıtladık.

Öncelikle; bir önceki bölümde $\mathbb{R}^n$ için verilen tam sıralama konisinin oluşturulma işlemini gerçel ayrılabilir Hilbert uzaylarına genelleştirelim.

$\{r_i : i \in \mathbb{N}^+\}$ Y gerçel ayrılabilir Hilbert uzayının bir dik tabanı olsun. $K_1 = \{y \in Y : \langle r_1, y\rangle > 0\}$, $K_2 = \{y \in Y : \langle r_1, y\rangle = 0, \langle r_2, y\rangle > 0\}$ ve herhangi bir $i \in \mathbb{N}^+$ iken $K_i = \{y \in Y : \forall j < i, \langle r_j, y\rangle = 0, \langle r_i, y\rangle > 0\}$ kümeleri için

$$K = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i\right) \cup \{0_Y\} \tag{2.6}$$

kümesini tanımlayalım.

Aşağıdaki teorem, K'nın Y'nin sıralı $\{r_i : i \in \mathbb{N}^+\}$ tabanına göre elde edilen bir tam sıralama konisi olduğunu gösterir.

Teorem 2.3.1. *Gerçel ayrılabilir Y Hilbert uzayında (2.6) eşitliği ile tanımlanan K kümesi, $K \cup (-K) = Y$ olacak şekilde bir sivri, konvex, konidir. Yani*

K, Y'de

$$a \leq_K b \Leftrightarrow \quad a = b \text{ veya } \forall j < i \text{ için } \langle r_j, a\rangle = \langle r_j, b\rangle \text{ ve } \langle r_i, a\rangle < \langle r_i, b\rangle$$
$$\text{olacak biçimde } i \in \mathbb{N}^+ \text{ vardır.}$$

olacak şekilde bir tam sıralama tanımlar.

Kanıt. Teorem 2.2.3'in kanıtındaki 4 adımı burada da gösterelim

1. ADIM Önce K'nın bir koni olduğunu gösterelim. k K'da bir nokta ve $\lambda \geq 0$ olsun.

   * $k = 0_Y$ veya $\lambda = 0$ olursa $\lambda k = 0_Y \in K$ olur.
   * $k \neq 0_Y$ ve $\lambda > 0$ olsun. Bu durumda her $j < i$ için $\langle r_j, k\rangle = 0$ ve $\langle r_i, k\rangle > 0$ olacak şekilde bir $i \in \mathbb{N}$ vardır. Bu ise her $j < i$ için $\langle r_j, \lambda k\rangle = 0$ ve $\langle r_j, \lambda k\rangle > 0$ olduğunu gösterir. Sonuç olarak, $\lambda k \in K$ olur. Yani K, Y'de bir konidir.

2. ADIM Şimdi K'nın sivri olduğunu gösterelim. Sıfırdan farklı bir $k \in K \cap (-K)$ olduğunu varsayalım. $k \in K$ olduğundan her $j < i_1$ için $\langle r_j, k\rangle = 0$ ve $\langle r_{i_1}, k\rangle > 0$ olacak biçimde bir $i_1 \in \mathbb{N}^+$ vardır. Benzeri şekilde $k \in -K$ olduğundan her $j < i_2$ için $\langle r_j, -k\rangle = 0$ ve $\langle r_{i_2}, -k\rangle > 0$ olacak biçimde bir $i_2 \in \mathbb{N}^+$ vardır. i_1 ve i_2 için iki durum olabilir: ya $i_1 = i_2$ veya $i_1 \neq i_2$ dir.

   * $i_1 = i_2$ ise $\langle r_{i_1}, k\rangle > 0$ ve $\langle r_{i_1}, -k\rangle > 0$ olur ki bu bir çelişkidir.
   * $i_1 < i_2$ ise her $j < i_2$ için $\langle r_j, -k\rangle = 0$ ve $\langle r_{i_1}, k\rangle > 0$ olur ki bu da bir çelişkidir.

   $i_2 < i_1$ olduğu durum için de benzeri bir çelişki elde edilir.Sonuç olarak $K \cap (-K) = \{0_Y\}$ olur.

3. ADIM Şimdi K kümesinin konveks olduğunu gösterelim. K bir koni olduğundan $K + K = K$ olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

$0_Y \in K$ olduğundan

$$K = 0_Y + K \subset K + K \tag{2.7}$$

olur.

Ters kapsamı göstermek için $k \in K + K$ olsun. Bu durumda $k_1 + k_2 = k$ olacak biçimde $k_1, k_2 \in K$ vardır. k_1 veya k_2 sıfır olduğu durumda $k \in K$ olacağı açıktır. k_1 ve k_2 sıfır olmadığı durumda k_1 için, her $j < i_1$ için $\langle r_j, k_1 \rangle = 0$, $\langle r_{i_1}, k_1 \rangle > 0$ olacak biçimde bir $i_1 \in \mathbb{N}$ vardır. k_2 için de, her $j < i_2$ için $\langle r_j, k_2 \rangle = 0$, $\langle r_{i_2}, k_2 \rangle > 0$ olacak şekilde bir $i_2 \in \mathbb{N}$ vardır. Genelliği bozmadan $i_1 \leq i_2$ olsun. Bu durumda her $j < i_1$ için

$$\langle r_j, k_1 + k_2 \rangle = \langle r_j, k_1 \rangle + \langle r_j, k_2 \rangle = 0 + 0 = 0$$

olur. Aynı zamanda $\langle r_{i_1}, k_1 \rangle > 0$, $\langle r_{i_1}, k_2 \rangle \geq 0$ olduğundan

$$\langle r_{i_1}, k_1 + k_2 \rangle = \langle r_{i_1}, k_1 \rangle + \langle r_{i_1}, k_2 \rangle > 0$$

elde ederiz. Bu durumda $k_1 + k_2 = k \in K$ olur. Yani

$$K + K \subset K \tag{2.8}$$

olur.

(2.7) ve (2.8) kapsamlarından $K = K + K$ olur.

4. ADIM Kanıtın buraya kadar olan kısmında K'nın bir kısmi sıralama konisi olduğu gösterildi. Şimdi K'nın tam sıralama tanımladığını gösterelim. Yani $K \cup (-K) = Y$ olduğunu gösterelim.

Öncelikle

$$K \cup (-K) \subset Y \tag{2.9}$$

olduğu açıktır.

$Y \subset K \cup (-K)$ olduğunu gösterelim. Bunun için $r \in Y$ olsun. $r = 0_Y$ ise $r \in K \cup (-K)$ olur. $r \neq 0_Y$ ise $\{r_i : i \in \mathbb{N}^+\}$ Y'nin bir tabanı olduğundan, her $j < i$ için $\langle r_j, r \rangle = 0$ ve $\langle r_i, r \rangle \neq 0$ olacak biçimde bir $i \in \mathbb{N}^+$ vardır. $\langle r_i, r \rangle \neq 0$ olduğundan $\langle r_i, r \rangle > 0$ veya $\langle r_i, r \rangle < 0$ olacaktır.(Tüm taban vektörlerine dik olamaz.)

* $\langle r_i, r\rangle > 0$ olursa $r \in K$,
* $\langle r_i, r\rangle < 0$ olursa $r \in -K$ olur.

Sonuç olarak $r \in K \cup (-K)$ elde ederiz. Bu ise

$$Y \subset K \cup (-K) \tag{2.10}$$

olduğunu gösterir. Bu durumda (2.9) ve (2.10)'den $Y = K \cup (-K)$ elde ederiz.

Ek olarak, K kümesi Y uzayında aşağıdaki şekilde tanımlanan bir tam sıralama verir:

$$\begin{aligned} a \leq_K b \;\; &\Leftrightarrow b - a \in K \\ &\Leftrightarrow \forall j < i \text{ için } \langle r_j, b-a\rangle = 0 \text{ ve } \langle r_i, b-a\rangle > 0 \\ &\quad \text{olacak şekilde bir } i \in \mathbb{N}^+ \text{vardır.} \\ &\Leftrightarrow \forall j < i \text{ için } \langle r_j, b\rangle = \langle r_j, a\rangle \text{ ve } \langle r_i, b\rangle > \langle r_i, a\rangle \\ &\quad \text{olacak şekilde bir } i \in \mathbb{N}^+ \text{ vardır.} \end{aligned}$$

□

Şimdi gerçel ayrılabilir Hilbert uzaylarda tam sıralama konilerinin bazı özelliklerini verelim.

Yardımcı Teorem 2.3.2. *K, Y gerçel ayrılabilir Hilbert uzayında bir tam sıralama konisi olsun. Bu durumda*

$$-K = (Y \setminus K) \cup \{0_Y\}$$

olur.

Kanıt. $k \in -K$ olsun. $k = 0_Y$ ise $k \in (Y \setminus K) \cup \{0_Y\}$ olur. $k \neq 0_Y$ ve $k \in K$ ise $k \in K \cap (-K) = \{0_Y\}$ elde ederiz ki bu bir çelişkidir. Buradan $k \in Y \setminus K$ ve

$$-K \subset (Y \setminus K) \cup \{0\} \tag{2.11}$$

olur.

Tersine, $k \in (Y \setminus K) \cup \{0_Y\}$ olsun. $k = 0_Y$ ise $k \in -K$ olur. $k \in Y \setminus K$ ise $Y = K \cup (-K)$ olduğundan $k \in -K$ olur. Yani

$$(Y \setminus K) \cup \{0_Y\} \subset -K \tag{2.12}$$

olur.

Bu durumda (2.11) ve (2.12)'dan

$$-K = (Y \setminus K) \cup \{0_Y\}$$

elde ederiz. □

Aşağıdaki yardımcı teorem, bir tam sıralama konisinin herhangi bir alt uzaya indirgendiğinde bu alt uzayda da bir tam sıralama konisi tanımladığını gösterir.

Yardımcı Teorem 2.3.3. *Bir K tam sıralama konisi ile Y ayrılabilir Hilbert uzayının bir A alt uzayının kesişimi bu alt uzayda bir tam sıralama konisidir.*

Kanıt. K, Y'de bir tam sıralama konisi olsun. $A \subset Y$, Y'nin bir alt uzayı ve $K_A = K \cap A$ olsun. A ve K konveks kümeler olduğundan K_A da konvekstir. A ve K koni olduğundan K_A da konidir. K sivri bir konidir. Bu durumda

$$\begin{aligned} K_A \cap (-K_A) &= (A \cap K) \cap (A \cap (-K)) \\ &= A \cap (K \cap (-K)) \\ &= A \cap \{0_Y\} \\ &= \{0_A\} \end{aligned}$$

olur. Yani K_A sivridir.

Şimdi $K_A \cup (-K_A) = A$ olduğunu gösterelim. $A \subset Y$ olduğundan

$$\begin{aligned} A &= A \cap Y \\ &= A \cap (K \cup (-K)) \\ &= (A \cap K) \cup (A \cap (-K)) \\ &= K_A \cup (-K_A) \end{aligned}$$

bulunur.

Sonuç olarak K_A, $K_A \cup (-K_A) = A$ olacak şekilde bir sivri konveks konidir. Yani K_A, A'da tam sıralama tanımlar.

□

Aşağıdaki yardımcı teorem [19]'deki ayırma teoreminin bir sonucudur.

Yardımcı Teorem 2.3.4. *K, $int(K) \neq \emptyset$ olacak şekilde Y gerçel ayrılabilir Hilbert uzayında bir tam sıralama konisi ise*

$$\{a \in Y : \langle r, a\rangle > 0\} \subset K$$

olacak biçimde bir $r \in Y$ vardır.

Kanıt. K ve $(-K)$, Y'de tam sıralama konileri olduğundan konvekstirler. $int(K) \neq \emptyset$ ve K sivri olur. $int(K) \cap (-K) = \emptyset$ olduğundan konveks kümelerin ayrılmasından her $k_1 \in K$ ve $k_2 \in -K$ için

$$\langle \ell, k_1\rangle \leq \alpha \leq \langle \ell, k_2\rangle \tag{2.13}$$

olacak şekilde $\ell \in Y \setminus \{0_Y\}$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ vardır. Her $k_1 \in int(K)$ için

$$\langle \ell, k_1\rangle < \alpha \tag{2.14}$$

olur.

K ve $(-K)$ koni olduğundan $\alpha = 0$ olur. $\ell = -r \in Y$ olarak seçersek (2.14)'da verilen eşitsizlik her $k_1 \in int(K)$ için $\langle r, k_1\rangle > 0$ olur.

Şimdi $\{a \in Y : \langle r, a\rangle > 0\} \subset K$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki bir $a \in Y$ için $\langle r, a\rangle > 0$ ve $a \notin K$ olsun. Yardımcı Teorem 2.3.2'den $a \notin K$ ise $a \in -K$ olur. Bu (2.13) eşitsizliği ile çelişir. Sonuç olarak $\{a \in X : \langle r, a\rangle > 0\} \subset K$ olur. □

Yardımcı Teorem 2.3.4'de verilen özellik $\mathbb{R}^n$'e indirgendiğinde koninin içi daima eleman bulundurduğundan bu şart çıkarılabilir.

Aşağıdaki teoremde gerçel ayrılabilir Hilbert uzayında herhangi bir tam sıralama konisinin nasıl oluşturulacağı ile ilgili bir yöntem verilmiştir.

Teorem 2.3.5. *K, $int(K) \neq \emptyset$ olacak şekilde Y gerçel ayrılabilir Hilbert uzayında bir tam sıralama konisi olsun. Bu durumda $\forall i \in \mathbb{N}^+$ için $r_i \neq 0_Y$, $\forall j < i$ için $\langle r_j, r_i\rangle = 0$ ve*

$$K = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \{k \in \mathbb{R}^n : \forall j < i,\ \langle k, r_j\rangle = 0, \langle k, r_i\rangle > 0\} \right) \cup \{0_Y\} \tag{2.15}$$

olacak biçimde bir $\{r_i : i \in \mathbb{N}^+\}$ kümesi vardır.

Kanıt. Yardımcı Teorem 2.3.4'ten ve K tam sıralama konisi olduğundan

$$\{k \in Y : \langle r_1, k \rangle > 0\} \subset K$$

olacak biçimde sıfırdan farklı bir $r_1 \in Y$ vardır. $A_1 = \{a \in Y : \langle r_1, a \rangle = 0\}$ altuzayını tanımlayacak olursak, Yardımcı Teorem 2.3.3'ten $K_{A_1} = K \cap A_1$ A_1 altuzayında bir tam sıralama konisi tanımlar. Aynı yardımcı teoremden

$$\{k \in Y : \langle r_1, k \rangle = 0, \langle r_2, k \rangle > 0\} \subset K_{A_1}$$

olacak biçimde sıfırdan farklı bir $r_2 \in A_1$ vardır. Böylece $A_2 = \{a \in Y : \langle r_1, a \rangle = 0, \langle r_2, a \rangle = 0\}$ altuzayını elde ederiz. Yardımcı Teorem 2.3.3'ten $K_{A_2} = K \cap A_2$ A_2'de bir tam sıralama konisidir ve K_{A_2}

$$\{k \in Y : \langle r_1, k \rangle = 0, \langle r_2, k \rangle = 0, \langle r_3, k \rangle > 0\} \subset K_{A_2}$$

açık yarı altuzayını kapsar. Böylece de sıfırdan farklı $r_3 \in A_2$ ile $A_3 = \{a \in Y : j \leq 3 \text{ için } \langle r_j, a \rangle = 0\}$ altuzayını tanımlarız.

Bu şekilde devam ettiğimizde

$$\{k \in Y : \text{ her } j < i \text{ için, } \langle r_j, k \rangle = 0, \text{ ve } \langle r_i, k \rangle > 0\} \subset K_{A_{i-1}}$$

olacak şekilde elde ettiğimiz dikey küme $\{r_1, r_2, ..., r_i\}$ olsun. Bu durumda $A_i = \{a \in Y : \text{ her } j \leq i \text{ için, } \langle r_j, a \rangle = 0, \}$ Y'nin bir altuzayı olur ve $A_i \subset A_{i-1} = \{a \in Y : \text{ her } j < i-1 \text{ için, } \langle r_j, a \rangle = 0\}$dir. Yardımcı Teorem 2.3.3'den $K_{A_i} = K_{A_{i-1}} \cap A_i$ A_i'de bir tam sıralama konisidir. Dolayısıyla Yardımcı Teorem 2.3.4'ten sıfırdan farklı bir r_{i+1} vektörü

$$\{k \in Y : \text{ her } j < i+1 \text{ için, } \langle r_j, k \rangle = 0, \text{ ve } \langle r_{i+1}, k \rangle > 0\} \subset K_{A_i} \subset K$$

olacak şekilde vardır. Dolayısıyla $A_{i+1} = \{a \in Y : \text{ her } j \leq i+1 \text{ için, } \langle r_j, a \rangle = 0, \}$ Y'nin bir alt uzayı ve $A_{i+1} \subset A_i = \{a \in Y : \text{ her } j \leq i \text{ için, } \langle r_j, a \rangle = 0\}$ olacak şekilde $\{r_1, r_2, ..., r_{i+1}\}$ dikey kümesini elde ederiz. Yardımcı Teorem 2.3.3'ten $K_{A_{i+1}} = K_{A_i} \cap A_{i+1}$ A_{i+1}'de bir tam sıralama konisidir. Yardımcı Teorem 2.3.4'ten sıfırdan farklı bir r_{i+2} vektörü

$$\{k \in X : \text{ her } j < i+2 \text{ için } \langle r_j, k \rangle = 0 \text{ ve } \langle r_{n+2}, k \rangle > 0\} \subset K_{A_{i+1}} \subset K$$

olacak şekilde vardır.

Sonuç olarak

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}\{k\in Y:\forall j<i \text{ için } \langle k,r_j\rangle=0,\langle k,r_i\rangle>0\}\right)\cup\{0_Y\}\subset K \qquad (2.16)$$

bulunur.

Yukarıda elde ettiğimiz altuzaylar için $A_1\supset A_2\supset ...\supset A_n\supset ...$ olduğu açıktır. Bu durumda azalan bir kapalı altuzay dizisi elde ederiz. Cantor Teoremden bu altuzayların kesişimi bir tek vektörden oluşur. Tüm altuzaylar 0_Y'ı kapsadığından bu vektör 0_Y'dir. Yani

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i=\{0_Y\}$$

olur. $\{r_i:i\in\mathbb{N}^+\}$ dikey bir kümedir ve bu kümenin dik tümleyeni $\{0_Y\}$ kümesidir. Bu durumda $\{r_i:i\in\mathbb{N}^+\}$ Y uzayının bir dikey tabanıdır. Teorem 2.3.1'den (2.16)'deki kapsamın sol tarafındaki birleşim kümesi bir tam sıralama konisidir. Kanıtı tamamlamak için K'nın bu birleşimin altkümesi olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır.

Kabul edelim ki, sıfır olmayan $k\in K$ vektörü bu birleşimin bir elemanı olmasın. Birleşim bir tam sıralama olduğundan, k birleşimin negatifine aittir. (2.16)'daki kapsamdan dolayı birleşim $(-K)$'nın alt kümesi olduğundan, $k\in K\cap(-K)$ olur. Bu ise K'nın sivriliği ile çelişir. □

[28]Lexicographic sıralama, sözlükte kelime sıralamak için kullanılır. Bilinen şekilde kelimelerin öncelikle ilk harflerini, eğer ilk harfler aynı ise, ikinci harflerini karşılaştırır ve farklı ilk harfi buluncaya kadar devam eder. İlk farklı harfteki sıralama kelimelerin de sıralamasını verir. Vektörleri karşılaştırırken de lexicographic sıralama kullanılır. Bu durumda kelimelerin harflerinin yerlerini vektörlerin indisleri alır ve karşılaştırma indislere göre yapılır. Yani Y vektör uzayı ve $y=(y_1,y_2,...,y_n,...),\tilde{y}=(\tilde{y}_1,\tilde{y}_2,...,\tilde{y}_n,...)\in Y$ olmak üzere

$$y\leq_{lex}\tilde{y}\Leftrightarrow y=\tilde{y} \text{ veya } i \ y \text{ ve } \tilde{y}\text{'nın farklı ilk indisi olmak üzere } y_i<\tilde{y}_i$$

olur.

Aşağıda, lexicographic sıralamanın bazı özellikleri verilmiştir.

i) Lexicographic sıralama bir tam sıralamadır.

ii) K'nın tanımında $r_1 = (1, 0, ...), r_2 = (0, 1, ...), ..., r_n = (0, ..., 1, ...), ...$ olarak seçersek, bu durumda

$$K = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \{k : \forall j < i \text{ için } \langle r_j, k \rangle = 0, \langle r_i, k \rangle > 0\} \right) \cup \{0_Y\}$$

konisi Y gerçel ayrılabilir Hilbert uzayında lexicographic sıralamayı veren bir tam sıralama konisi olur.

Teorem 2.3.6'da $\mathbb{R}^n$'de taban vektörleri değiştirilerek herhangi bir tam sıralamanın lexicographic sıralamaya dönüştürülebileceği gösterilmiştir.

Teorem 2.3.6. *$\{r_1, ...r_n\}$ bir dikey taban olmak üzere K konisi (2.1)'de verildiği şekilde bu tabandan elde edilen $\mathbb{R}^n$'de bir tam sıralama konisi olsun. Bu durumda $\leq_K$ sıralaması $\{r_1, ...r_n\}$ tabanına göre lexicographic sıralamadır.*

Kanıt. $\{r_1, ...r_n\}$, K'nın tanımından elde edilen dikey taban ve $a, b \in \mathbb{R}^n$ olsun. Bu durumda $a = \alpha_1 r_1 + ... + \alpha_n r_n$, $b = \beta_1 r_1 + ... + \beta_n r_n$ olacak şekilde $\alpha_1, ..., \alpha_n, \beta_1, ..., \beta_n \in \mathbb{R}$ vardır. Böylece $\{r_1, ...r_n\}$ tabanına göre, $a = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ ve $b = (\beta_1, ..., \beta_n)$ olur.

Bu ise $\forall k \in \{1, ..., n\}$ için $\langle r_k, a \rangle = \alpha_k \|r_k\|^2$ ve $\langle r_k, b \rangle = \beta_k \|r_k\|^2$, olmasını gerektirir.

$a = b$ ise $a \leq_{lex} b$ olduğu açıktır. $a \neq b$ ise $\forall j < i$ için $\alpha_j \|r_j\|^2 = \beta_j \|r_j\|^2$, ve $\alpha_i \|r_i\|^2 < \beta_i \|r_i\|^2$ olacak biçimde $i \in \{1, ..., n\}$ vardır. Yani $\forall j < i$ için $\alpha_j = \beta_j$ ve $\alpha_i < \beta_i$'dir. Bu ise $\{r_1, r_2, ..., r_n\}$ tabanına göre lexicographic sıralamadır. □

Aşağıdaki sonuç ile $\mathbb{R}^n$'de tüm sıralama konilerinin birbirine dönüştürülebileceği belirtilmiştir.

Sonuç 2.3.7. *$\mathbb{R}^n$'de verilen herhangi bir tam sıralama konisi $\mathbb{R}^n$'nin bir $\{r_1, r_2, ..., r_n\}$ tabanı ile ifade edilebilir. Bu durumda, $\mathbb{R}^n$'deki her tam sıralama lexicographic sıralama ile izomorftur. Dolayısıyla her tam sıralama birbiriyle izomorftur.*

2.4 Optimallik Şartları

Bu bölümde vektör ve küme değerli optimizasyon problemleri için verilen bazı optimallik şartları kullanılarak tam sıralama konileri ve kompakt tabana sahip sıralama konileri için sonuçlar elde edilmiştir. Öncelikle vektör optimizasyonda kullanılan bazı minimallik tanımlarını verelim.

Tanım 2.4.1. *[19]Y bir vektör uzayı ve $C \subset Y$ bir sivri konveks koni olsun. $A \subset Y$ ve $\bar{y} \in A$ için*

1) $(\bar{y} - C) \cap A = \{\bar{y}\}$ ise $\bar{y}$'ye A'nın bir minimal elemanıdır denir. A'nın C konisine göre minimal elemanları kümesi $min(A, C)$ ile gösterilir.

2) C konisine göre minimal olan bir nokta T $(C \setminus \{0\} \subset int(T))$ olacak şekildeki daha geniş bir koniye göre de minimal ise bu noktaya A kümesinin C konisine göre Henig anlamında has (proper) minimal elemanıdır denir. A kümesinin C konisine göre tüm has minimal noktaları kümesi $p - min(A, C)$ ile gösterilir.

3) $A \subset (\bar{y} + C)$ oluyorsa $\bar{y}$'ye A kümesinin C konisine göre güçlü (strong) minimal elemanıdır denir.

Tam sıralama konilerinin minimal elemanlarla ilgili bazı özellikleri aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.4.2. *K, Y gerçel ayrılabilir Hilbert uzayının bir tam sıralama konisi olsun. $A \subset Y$ kümesinin bu sıralamaya göre minimal elemanı varsa tektir.*

Kanıt. $A \subset Y$ olsun. Kabul edelim ki, A kümesinin K konisine göre farklı iki minimal elemanı $\bar{y}$ ve $\bar{y}_1$ olsun. K tam sıralama konisi olduğundan, $\bar{y} \leq_K \bar{y}_1$ veya $\bar{y}_1 \leq_K \bar{y}$ olur. Sıralama anti-simetrik olduğundan bunlardan sadece biri gerçekleşir. Kabul edelim ki, $\bar{y}_1 \leq_K \bar{y}$ olsun. Bu durumda, $\bar{y}_1 \in (\bar{y} - K) \cap A$ olur. Bu ise $\bar{y}$'ın minimalliği ile çelişir. Sonuç olarak $\bar{y} = \bar{y}_1$ olmalıdır. □

Teorem 2.4.3. *Y gerçel ayrılabilir Hilbert uzayı, $K \subset Y$ bir tam sıralama konisi, $A \subset Y$ ve $\bar{y} \in A$ olsun. $\bar{y}$ A'nın K konisine göre minimal elemanıdır ancak ve ancak $\bar{y}$ A'nın K konisine göre güçlü minimal elemanıdır.*

Kanıt. ($\Rightarrow$) $\bar{y}$ A'nın K tam sıralama konisine göre minimal elemanı olsun . Tanımdan $(\bar{y} - K) \cap A = \{\bar{y}\}$ ve Yardımcı Teorem 2.3.2'den $-K = (Y \setminus K) \cup \{0_Y\}$ eşitliği yazılabiliyordu. Dolayısıyla, $(\bar{y} + [Y \setminus K] \cup \{0_Y\}) \cap A = \{\bar{y}\}$ ya da $[(\bar{y} + (Y \setminus K)) \cup \{\bar{y}\}] \cap A = \{\bar{y}\}$ yazılabilir. Böylece $A \setminus \{\bar{y}\} \subset Y \setminus ((\bar{y} + (Y \setminus K)) \cup \{\bar{y}\})$ elde ederiz. Bu ise, $A \setminus \{\bar{y}\} \subset [Y \setminus (\bar{y} + (Y \setminus K))] \cap (Y \setminus \{\bar{y}\})$ olduğunu gösterir. Böylece, $A \setminus \{\bar{y}\} \subset (\bar{y} + K) \setminus \{\bar{y}\}$ olur. Buradan da $A \subset \bar{y} + K$ olur. Sonuç olarak, $\bar{y}$ A'nın güçlü minimal elemanıdır.

Tersi, aynı şekilde elde edilir. □

Aşağıdaki Yardımcı Teoremde sıralama konileri ve minimal elemanlar kümesi arasındaki ilişki verilmiştir.

Yardımcı Teorem 2.4.4. *Y bir vektör uzayı C_1 ve C_2 Y içinde $C_1 \subset C_2$ olan iki koni olsunlar. A kümesinin C_2 konisine göre tüm minimal elemanları aynı zamanda A kümesinin C_1 konisine göre de minimal elemanıdır. Yani,*

$$C_1 \subset C_2 \Rightarrow min(A, C_2) \subset min(A, C_1)$$

dir.

Kanıt. $C_1 \subset C_2$ ve $\bar{x} \in min(A, C_2)$ olsun. A kümesinin minimal elemanları tanımından

$$(\bar{x} - C_1) \cap A \subset (\bar{x} - C_2) \cap A = \{\bar{x}\}$$

elde ederiz. Bu durumda $\bar{x} = \bar{x} - 0 \in A$ olur. Yani $(\bar{x} - C_1) \cap A = \{\bar{x}\}$ olur ki; bu $\bar{x} \in min(A, C_1)$ olduğunu gösterir. Sonuç olarak $min(A, C_2) \subset min(A, C_1)$ olur. □

Bundan sonraki bölümlerde, kompakt tabana sahip bir sıralama konisi ile bu koniyi kapsayan tam sıralama konisi oldukça sık kullanılacaktır. Aşağıda verilen özellikler, bu ilişkinin anlaşılması için bir altyapı oluşturduğundan önemlidir. Özellikleri vermeden önce bir koninin tabanı tanımını verelim.

Tanım 2.4.5. *[19] C, Y gerçel ayrılabilir Hilbert uzayında bir koni ve B C'nin konveks bir altkümesi olsun, $0_Y \notin B$ ve her $c \in C \setminus \{0_Y\}$ için $c = \lambda b$ olacak şekilde tek bir $b \in B$ ve $\lambda > 0$ varsa B'ye C'nin bir tabanı denir.*

Ek olarak, B kompakt ise C konisine kompakt tabana sahiptir, denir.

Kompakt tabana sahip bir koniyi kapsayan bir tam sıralama konisinin elde edilişi aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 2.4.6. *C, Y gerçel ayrılabilir Hilbert uzayında bir koni olsun. C kompakt tabana sahip ise*

$$C \setminus \{0_Y\} \subset int(K)$$

olacak şekilde bir K tam sıralama konisi vardır.

Kanıt. $B \subset C$ kümesi C'nin kompakt tabanı olsun. [28]'de Önerme 1.10'dan $B = \{c \in C : \langle r, c\rangle = 1\}$ olacak şekilde bir $r \in Y$ vardır. Böylece

$$C \setminus \{0\} \subset \{a \in Y : \langle r, a\rangle > 0\}$$

elde ederiz. $r_1 = r$ seçersek ve $\{r_2, r_3, ..., r_n, ...\}$ kümesini de (2.6)'i sağlayacak şekilde oluşturursak, bu durumda

$$\begin{aligned} C \setminus \{0\} &\subset \{a \in Y : \langle r, a\rangle > 0\} \\ &\subset int\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}\{a \in Y : \forall j < i, \langle r_j, a\rangle = 0, \langle r_i, a\rangle > 0\}\right) \cup \{0_Y\}\right) \\ &= int(K) \end{aligned}$$

elde ederiz.

□

Sonuç 2.4.7. *C, Y gerçel ayrılabilir Hilbert uzayında bir sıralama konisi ve $A \subset Y$ boş olmayan bir küme olsun. C kompakt bir tabana sahip ise,*

$$C \setminus \{0\} \subset int(K) \tag{2.17}$$

ve

$$min(A, K) \subset p - min(A, C) \tag{2.18}$$

olacak şekilde bir K tam sıralama konisi vardır.

Kanıt. Teorem 2.4.6'den (2.17)'ü sağlayan bir tam sıralama konisinin varlığını biliyoruz . Yardımcı Teorem 2.4.4 has minimal elemanın tanımı ve (2.17)'de elde edilen kapsamdan $min(A, K) \subset p - min(A, C)$ olacağı açıktır. □

Aşağıdaki teoremde, tam sıralama konisinin oluşturulması için kullanılan yöntemin doğal sonucu olan bir optimallik şartı verilmiştir. Bu şart aynı zamanda, vektör ve küme değerli optimizasyon problemlerinde çözümün bulunması için de yeni bir yöntem içerir.

Teorem 2.4.8. *X boş olmayan bir küme, $f : X \to \mathbb{R}^n$ bir dönüşüm olsun.*

$$(VP)\begin{cases} min\ f(x) \\ x \in X \end{cases}$$

(2.1) eşitliği ile verilen bir K tam sıralamasına göre değerlendirilen optimizasyon problemini düşünelim.

Bu problemin çözümü (eğer varsa) n ardışık skaler problemin çözümü ile elde edilebilir.

$sol(SP_i)$, i. skaler problemin çözüm kümesi olmak üzere:

$$(SP_1)\begin{cases} min\langle r_1, f(x)\rangle \\ x \in X \end{cases} \qquad (SP_2)\begin{cases} min\langle r_2, f(x)\rangle \\ x \in sol(SP_1) \end{cases}$$

$$\ldots \qquad (SP_n)\begin{cases} min\langle r_n, f(x)\rangle \\ x \in sol(SP_{n-1}) \end{cases}$$

biçimindedir.

Kanıt. $\bar{x}$ yukarıda verilen n ardışık skaler problemin çözümü olsun ve kabul edelim ki $\bar{x}$, (VP) probleminin bir çözümü olmasın. Bu durumda $f(x) \leq_K f(\bar{x})$ olacak biçimde bir $x \in X \setminus \{\bar{x}\}$ vardır. K'nın tanımından her $j < i$ için $\langle r_j, f(x)\rangle = \langle r_j, f(\bar{x})\rangle$ ve $\langle r_i, f(x)\rangle < \langle r_i, f(\bar{x})\rangle$ olan bir $i \in \{1, ..., n\}$ vardır. Bu durumda $\bar{x} \notin Sol(SP_i)$ olur bu ise varsayımla çelişir. □

Aşağıda bu çözüm yöntemini açıklayan bir örnek verilmiştir.

Örnek 2.4.9. *$X = [5, 11]$ ve $n = 2$ için $f : [5, 11] \to \mathbb{R}^2$ dönüşümü*

$$f(t) = \begin{cases} ((t-7)^2 + 7, 14 - t) & ; \quad 5 \leq t \leq 7 \\ (t, -t + 14) & ; \quad 7 < t < 9 \\ (t, (t-9)^2 + 5) & ; \quad 9 \leq t \leq 11 \end{cases}$$

olmak üzere $r_1 = (1,1)$ *ve* $r_2 = (1,-1)$ *vektörleri ile elde edilen*

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y > 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0, x - y > 0\} \cup \{0\}$$

tam sıralama konisine göre

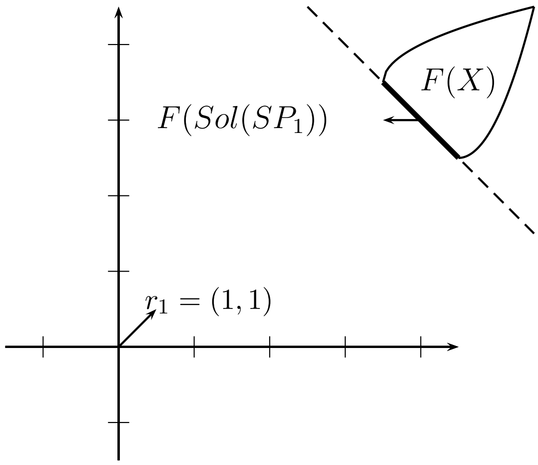
$$(VP) \begin{cases} minf(t) \\ 5 \leq t \leq 11 \end{cases}$$

vektör değerli probleminin yukarıdaki yöntemle çözümünü yapalım.

Bu durumda (VP) *için ilk skaler problemimiz*

$$(SP_1) \begin{cases} min\langle(1,1), f(t)\rangle \\ 5 \leq t \leq 11 \end{cases}$$

olur ve bu problemin çözüm kümesi, hiperdüzlem ile görüntü kümesinin kesiştiği parçanın ters görüntüsü olan $[7,9]$*'dir(Şekil 2.3).*

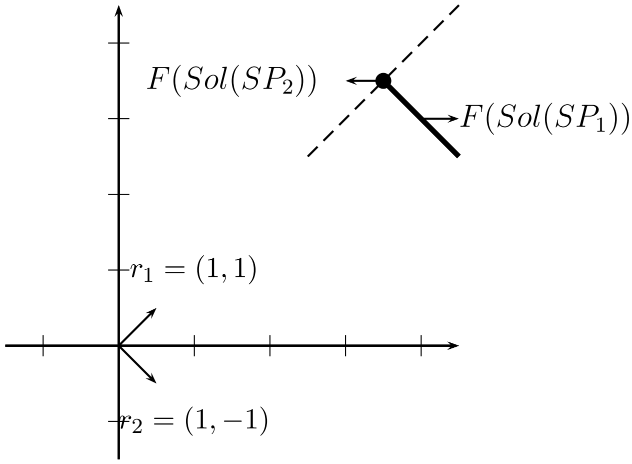


Şekil 2.3: Örnek 2.4.9'de $F(X)$'in minimal elemanları

İkinci skaler problemimiz ise;

$$(SP_2) \begin{cases} min\langle(1,-1), f(t)\rangle \\ 7 \leq t \leq 9 \end{cases}$$

olur. (SP_2) *probleminin ve vektör probleminin çözümü hiperdüzlemle kümenin keşistiği noktanın ters görüntüsü olan 7'dir(Şekil 2.4).*



Şekil 2.4: Örnek 2.4.9'de $F([7,9])$'un minimal elemanı

Teorem 2.4.3'te verilen vektör değerli optimizasyon problemleri için optimallik şartının küme değerli optimizasyon problemlerine bir uyarlaması aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.4.10. *X boş olmayan bir küme, $F : X \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ küme değerli bir dönüşüm olsun. (2.1)' de tanımlanan K tam sıralama konisine göre verilen*

$$(SP)\begin{cases} min\ F(x) \\ x \in X \end{cases}$$

problemi düşünelim.

Bu problemin çözümü (varsa) n ardışık skaler problemin çözümü ile elde edilebilir.

$min(SP_i)$, i. skaler problemin çözüm kümesi olmak üzere

$$(SP_1)\begin{cases} min\langle r_1, y\rangle \\ y \in F(X) \end{cases} \qquad (SP_2)\begin{cases} min\langle r_2, y\rangle \\ x \in min(SP_1) \\ y \in F(x) \end{cases}$$

$$\ldots \qquad (SP_n)\begin{cases} min\langle r_n, y\rangle \\ x \in min(SP_{n-1}) \\ y \in F(x) \end{cases}$$

biçimindedir.

Kanıt. $\bar{y} \in F(\bar{x})$ n ardışık skaler problemin çözümü olsun. $y \in F(X) \setminus \{\bar{y}\}$ iken $\forall j < i$ için $\langle r_j, \bar{y} \rangle = \langle r_j, y \rangle$ ve $\langle r_i, \bar{y} \rangle < \langle r_i, y \rangle$ olacak biçimde $i \in \{1, ..., n\}$ vardır. Bu durumda $F(X) \subset \bar{y} + K$ olur, yani $\bar{y} \in F(\bar{x})$ $F(X)$'nin güçlü minimal elemanı aynı zamanda minimal elemanıdır. □

Yukarıda da görüleceği gibi yöntem, tam sıralama konileri için tek minimal elemanı verir. Sıralama konisi olarak kompakt tabana sahip bir koni seçilirse, has minimal elemanlardan birinin elde edilmesini sağlar. Aşağıdaki teoremde kompakt tabana sahip bir koniye göre verilen vektör optimizasyon problemleri için bir optimallik şartı verilmiştir.

Teorem 2.4.11. *X boş olmayan bir küme, $f : X \to \mathbb{R}^n$ bir dönüşüm olsun.*

$$(VP) \begin{cases} min\ f(x) \\ x \in X \end{cases}$$

problemini kompakt tabana sahip bir C konisine göre düşünelim. Bu durumda

$$(SP_1) \begin{cases} min\langle r_1, f(x) \rangle \\ x \in X \end{cases} \qquad (SP_2) \begin{cases} min\langle r_2, f(x) \rangle \\ x \in sol(SP_1) \end{cases}$$

$$\ldots \qquad (SP_n) \begin{cases} min\langle r_n, f(x) \rangle \\ x \in sol(SP_{n-1}) \end{cases}$$

n ardışık skaler problemin çözümü (VP) probleminin de bir çözümü olacak şekilde bir dikey $\{r_1, r_2, ..., r_n\} \subset \mathbb{R}^n$ kümesi vardır.

Kanıt. Teorem C kompakt tabana sahip olduğundan ve Teorem 2.4.6'dan dikey bir $\{r_1, r_2, ..., r_n\}$ kümesi ve K tam sıralama konisi

$$C \setminus \{0\} \subset int(K) = \{k \in \mathbb{R} : \langle k, r_1 \rangle > 0\} \tag{2.19}$$

olacak şekilde vardır. $\bar{x}$ n ardışık skaler problemin çözümü olsun. (2.19), Teorem 2.4.8 ve Sonuç 2.4.7'den $\bar{x}$ aynı zamanda (VP) probleminin bir has çözümüdür. □

3 ARDIŞIK AĞIRLIKLANDIRILMIŞ TOPLAM YÖNTEMİ

Skalarizasyon, bir optimizasyon probleminin optimal çözümlerini bulmak için kullanılır. Bu yöntemde, vektör veya küme değerli problemler, gerçel değerli problemlere dönüştürülür. Böylece aynı zamanda orjinal problemlerin de çözümünü veren, çözümü daha kolay olan problemler elde ederiz. Skalarizasyon yöntemleri ve uygulamaları ile ilgili pek çok çalışma mevcuttur. Temel bazı yöntemler ve özellikleri ile ilgili Ehrgott'un Multicriteria Optimization [13] kitabına bakılabilir.

Son yıllarda küme değerli skalarizasyonun ilginç bir uygulaması da Hernández ve Rodrígez-Marín [15] tarafından verilmiştir.

Önceki bölümde $\mathbb{R}^n$'de tam sıralama konileri kullanarak bir çözüm yöntemi verilmişti. Bu yöntem; uygulama olarak Ağırlıklandırılmış Toplam ile skalarizasyon yönteminin öncelikle bir problemde, sonrasında ise problemin çözüm kümelerinde tekrar tekrar uygulanması biçiminde olduğundan, bu yöntem Ardışık Ağırlıklandırılmış Toplam Yöntemi olarak isimlendirildi. Bu bölümde Ardışık Ağırlıklandırılmış Toplam Yönteminin bir vektör optimizasyon problemi üzerinde uygulanması ve Ağırlıklandırılmış Toplam Yöntemi ile bazı kriterlere göre karşılaştırılması verilip bu yöntemlerle elde edilen çözümler arasındaki ilişki verilmiştir.

X herhangi bir küme olmak üzere $f : X \to \mathbb{R}^n$ şeklinde tanımlanan bir fonksiyon ve bir $C \subset \mathbb{R}^n$ sıralama konisi için verilen

$$(VP) \begin{cases} min\ f(x) \\ x \in X \end{cases}$$

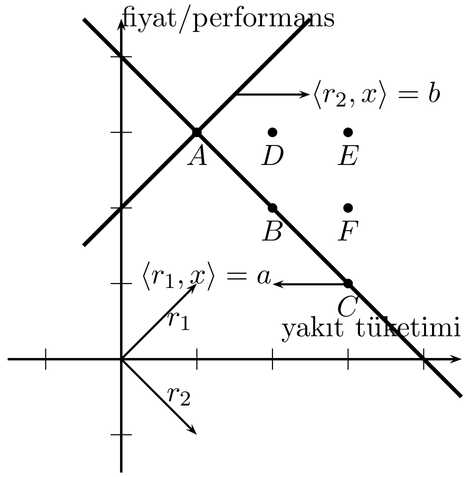
vektör değerli probleminde bir $w \in C$ ağırlık vektörü ile

$$(P) \begin{cases} min\ \langle f(x), w \rangle \\ x \in X \end{cases}$$

gerçel değerli problemin elde edilerek çözülmesine Ağırlıklandırılmış Toplam Yöntemi ile skalarizasyon denir. Bu yöntemin diğer özellikleri için [13] ve [19]'a bakılabilir.

Aşağıdaki örnekte Ağırlıklandırılmış Toplam Yöntemi ile Ardışık Ağırlıklandırılmış Toplam Yöntemi karşılaştırılmıştır.

Örnek 3.0.12. *Bazı araçların fiyat-performans oranları ve yakıt tüketimleri şekildeki gibi olsun. Performansa göre düşük ücret ve az yakıt tüketimi tercih edildiğinden* $\mathbb{R}^2_+$ *konisi sıralama konisi seçilerek minimal elemanlar bulunmaya çalışılacaktır.*



Şekil 3.5: Örnek 3.0.12'de Ağırlıklandırılmış Toplam ve Ardışık Ağırlıklandırılmış Toplam Yöntemleri için seviye kümeleri

$(1, 1)$ *vektörünü Ağırlıklandırılmış Toplam Yönteminde* w *ağırlık vektörü olarak seçersek, çözüm kümesini* $\{A, B, C\}$ *olarak buluruz (Şekil 3.5). Bunun sebebi, bu araçların* $\{y : \langle r_1, y\rangle = a\}$ *seviye kümesi üzerinde olmasıdır. Ardışık Ağırlıklandırılmış Toplam Yönteminde* r_1 *vektörünü* $(1, 1)$ *olarak seçersek, aynı çözüm kümesini ilk adımın sonucu olarak elde ederiz. Çünkü; ilk adımda Ağırlıklandırılmış Toplam Yöntemi ile aynı skaler problemi elde etmiş oluruz. Ardışık Ağırlıklandırılmış Toplam Yönteminde ikinci adım için* $r_2 = (1, -1)$ *olarak seçersek, problemin bu metoda göre tek sonucu olan* A *aracını buluruz(Şekil 3.5).*

Aşağıda bu iki yöntemin yukarıdaki örnekden elde edilen sonuçlar dikkate alınarak bazı kriterlere göre karşılaştırmaları verilmiştir.

3.1 Vektör ve Ağırlıkların Seçilmesi

Bu başlık altında Ağırlıklandırılmış Toplam Yönteminin ağırlık vektörünün Ardışık Ağırlıklandırılmış Toplam Yönteminde ise; ağırlık vektörlerinin ve bu vektörlerin sıralarının nasıl seçildiği, bu vektörlerin problemi çözecek kişilerin isteklerini nasıl karşıladığı incelenecektir.

Ağırlıklandırılmış Toplam Yönteminde kriterler arasındaki önem tercihi bize ağırlık vektörünü verir. Örnek olarak ikinci kriter, birinci kriterden daha önemli ise; ağırlık vektörü olarak $(1,2)$ vektörünü seçebiliriz. Böylece; ikinci kritere iki kat önem vermiş oluruz. Bu durum da ikinci kritere göre daha optimaldir. Ağırlık vektöründe bir bileşeni "0" seçersek, çözüm bulunurken karşılık gelen kriter dikkate alınmayacaktır. $(1,1)$ seçildiğinde ise, kriterlere eşit önem verilmiş olur.

Ardışık Ağırlıklandırılmış Toplam Yönteminde de bunu gerçekleştirebiliriz. Bununla birlikte kriterlere öncelik de verebiliriz. r_1 vektörü birinci önceliğe sahiptir. Ardından r_2 vektörü gelir. Bu aşamada sadece, birinci ağırlık vektörüne göre minimal olan sonuçlar değerlendirmeye alınır. Bundan sonrasında da sadece bir önceki skaler problemin çözümleri üzerinde çalışılır. Böylece kriter sayısı kadar ağırlık vektörü seçerek bize daha uygun olan çözümü bulabiliriz. Verilen örnekte r_2 vektörünü $(1,-1)$ seçerek birinci skaler problemin çözümleri arasında daha az yakıt tüketen aracı tercih etmiş olduk.

3.2 Yöntemlerden Elde Edilen Çözümler

Bu bölümde, yöntemlerden elde edilen çözümler değerlendirilecektir. Yöntemlerin uygulama aşamasından çözümün elde edilişine kadar olan aşamalar karşılaştırılacaktır.

Ağırlıklandırılmış Toplam Yönteminde bir skaler problemin çözümü olan çözümler kümesi elde ederiz. Bu küme önceki bölümde açıklandığı gibi ağırlık vektöründe belirtilen değer atamalarına uygun olan tüm çözümleri içerir. Şekil 3.5'te de görülebileceği gibi bir hiperdüzlemle amaç fonksiyonunun görüntü kümesinin kesişimi bize bu çözüm kümesini verir.

Ardışık Ağırlıklandırılmış Toplam Yönteminde ise, n tane ardışık skaler problemin çözümü olan tek çözüm elde ederiz. Her skaler problem sırasına göre önceliğe sahiptir. Seçilen ağırlık vektörleri sırasına göre farklı değer atamalarını dikkate alır. Şekil 3.5'de görülebileceği gibi amaç fonksiyonunun görüntü kümesi ve birbirine dik hiperdüzlemlerin kesişimi çözümü verir.

Verilen örnekte

$$(SP_1)\begin{cases} min\langle r_1, f(x)\rangle \\ x \in X \end{cases}$$

probleminin çözüm kümesi $w = r_1$ olarak seçtiğimizde Ağırlıklandırılmış Toplam Yöntemi ile elde edilen ile aynıdır. Bu küme $\{A, B, C\}$ kümesidir. İkinci skaler problem olan

$$(SP_2)\begin{cases} min\langle r_2, f(x)\rangle \\ x \in Sol(SP_1) \end{cases}$$

probleminin çözümü, Ardışık Ağırlıklandırılmış Toplam Yönteminin çözümüdür. Bu araç $r_2 = (1, -1)$ olarak seçtiğimizde A, $r_2 = (-1, 1)$ seçtiğimizde ise C aracıdır.

3.3 Tam Sıralama İle Uyum

Sıralama konileri, verilen vektör optimizasyon probleminde istenilen daha yüksek veya daha düşük değerlere göre belirlenir. Yani sıralama, probleme bağlıdır. Bu bölümde özel olarak tam sıralama konisine göre bir problem verildiğinde, yöntemlerin göstereceği uyum değerlendirilecektir.

Sıralama konisi, tam sıralama konisi olduğunda; Ardışık Ağırlıklandırılmış Toplam Yöntemi bize problemin çözümünü daima verecektir. Bu durum Teorem 2.4.8'de kanıtlanmıştır.

Ancak, Ağırlıklandırılmış Toplam Yöntemi bunu sağlamayabilir. Bunun sebebi, sıralama konisi tam sıralama veren bir koni olduğunda çözüm tektir. Ancak, Ağırlıklandırılmış Toplam Yönteminin tek sonuç vereceğini garantileyen bir özelliği yoktur. Örnekte sıralama konisini

$$K := \{y \in \mathbb{R}^2 : \langle r_1, y\rangle > 0\} \cup \{y \in \mathbb{R}^2 : \langle r_1, y\rangle = 0, \langle r_2, y\rangle > 0\} \cup \{0\}$$

tam sıralama konisi olarak seçersek, problemin çözümü A aracıdır. Ardışık Ağırlıklandırılmış Toplam Yöntemi $\{r_1, r_2\}$ vektörlerini sırası ile seçtiğimizde bunu sağlayacaktır.

3.4 Yöntemlerin Etkinliği

Bir vektör veya küme değerli optimizasyon problemi skalerizasyon yöntemleri kullanılarak çözüldüğünde, tüm çözümlerin elde edilemediği durumlar olabilir. Bu, kullanılan yöntemin etkinliğine ve çözümden beklenilen kriterlere bağlıdır. Bu bölümde, Ağırlıklandırılmış Toplam ve Ardışık Ağırlıklandırılmış Toplam Yöntemlerinin hangi durumlarda orjinal problemlerin çözümlerini verdiği incelenecektir.

Görüntü kümesi koni konveks olduğunda, Ağırlıklandırılmış Toplam Yöntemi ile tüm çözümlerin bulunabildiği bilinen bir gerçektir [13]. Bu, Ardışık Ağırlıklandırılmış Toplam Yöntemi için geçerli değildir. Verilen örnekte B aracı $\{r_1, r_2\}$ vektörleri nasıl seçilirse seçilsin, Ardışık Ağırlıklandırılmış Toplam Yöntemi ile elde edilebilecek bir çözüm değildir. Ancak, farklı $\{r_1, r_2\}$ vektörleri seçilerek elde edilebilecek çözümlerin konveks kombinasyonudur (A ve C araçlarının). Aşağıdaki teorem, bu özelliği garanti eder.

Teorem 3.4.1. *X herhangi bir küme ve $f : X \to \mathbb{R}^n$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun görüntü kümesi kompakt tabana sahip $C \subset \mathbb{R}^n$ sıralama konisine göre koni kapalı ise*

$$(VP)\begin{cases} min\ f(x) \\ x \in X \end{cases}$$

vektör optimizasyon probleminin Ağırlıklandırılmış Toplam Yöntemi ile elde edilen çözüm kümesi, farklı $\{r_1, r_2, ..., r_n\}$ kullanılarak Ardışık Ağırlıklandırılmış Toplam Yöntemi ile elde edilebilecek çözümlerin bir konveks kombinasyonudur.

Kanıt. Kanıt için verilen problemin Ağırlıklandırılmış Toplam Yöntemi kullanılarak elde edilen çözüm kümesinin konveks örtüsünün herhangi bir uç noktasını dikey bir $\{r_1, r_2, ..., r_n\}$ kümesi için elde edeceğimiz Ardışık Ağırlıklandırılmış Toplam Yönteminin çözümü olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır.

Öncelikle bir w ağırlık vektörü aldığımızda, Ağırlıklandırılmış Toplam Yöntemi ile elde edilecek olan çözüm kümesi bir a gerçel sayısı için

$$A_1 := conv(\{y : x \in X \text{ için } y = f(x), \langle w, y\rangle = a\})$$

şeklindedir. $\bar{y}$, A_1 kümesinin bir uç noktası olsun ve $r_1 = w$ seçelim. $\bar{y}$ A_1 noktasının bir uç noktası olduğundan bir destek hiperdüzlemine sahiptir. Bu destek hiperdüzlemini veren vektör r_2 olsun. r_2 vektörünün r_1 vektörü ile lineer bağımsız olacağı açıktır. Bu durumda r_2 vektörünü r_1 vektörüne dik seçebiliriz. Böylece destek hiperdüzlemi

$$H_1 := \{y \in \mathbb{R}^n : \langle r_2, y\rangle = \langle r_2, \bar{y}\rangle\}$$

olacaktır. Bu hiperdüzleminin A_1 kümesi ile kesişim kümesi

$$A_2 := A_1 \cap H_1$$

şeklinde olur. Bu küme de konvekstir ve $\bar{y}$ A_1 kümesinin uç noktası olduğu için A_2 kümesinin de uç noktasıdır. Bu durumda $\bar{y}$ noktasının A_2 kümesi için de bir destek hiperdüzlemi vardır. Bu vektörü r_3 olarak seçelim. r_3 vektörü de r_1 ve r_2 vektörlerinden lineer bağımsız olacağından, r_3 vektörünü de bu iki vektöre dik seçebiliriz. Bu vektörle elde edeceğimiz hiperdüzlem

$$H_2 := \{y \in \mathbb{R}^n : \langle r_3, y\rangle = \langle r_3, \bar{y}\rangle\}$$

şeklinde olacaktır. Bu hiperdüzlemin A_2 kümesi ile kesişiminden elde edeceğimiz küme

$$A_3 := A_2 \cap H_2$$

şeklinde olur ve bu küme de konvekstir ve $\bar{y}$ bu kümenin de bir uç noktasıdır. Bu şekilde $\{r_1, r_2, ..., r_n\}$ dikey kümesini elde edebiliriz. $\bar{y}$ noktası

$$(SP_1)\begin{cases} min\ \langle f(x), r_1\rangle \\ x \in X \end{cases}$$

skaler probleminin ve $i \in \{2, ..., n\}$ için elde edeceğimiz

$$(SP_i)\begin{cases} min\ \langle f(x), r_i\rangle \\ f(x) \in A_{i-1} \end{cases}$$

sıralı skaler problemlerinin de tek çözümüdür. Bu durumda Ağırlıklandırılmış Toplam Yöntemi ile elde edilebilecek bir çözüm kümesine ait herhangi bir uç nokta, Ardışık Ağırlıklandırılmış Toplam Yöntemi ile elde edilebilir. □

Aşağıdaki örnekte, giriş bölümünde verilen market probleminin çözümü verilmiştir.

Örnek 3.4.2. *Bir marketler zincirinde daha ucuza daha iyi hizmet için 11 farklı şubede farklı çalışma planları uygulanmış ve elde edilen şonuçlar çalışan şikayetleri, müşteri şikayetleri ve maliyet ana başlıkları altında aşağıdaki tabloda listelenmiştir.*

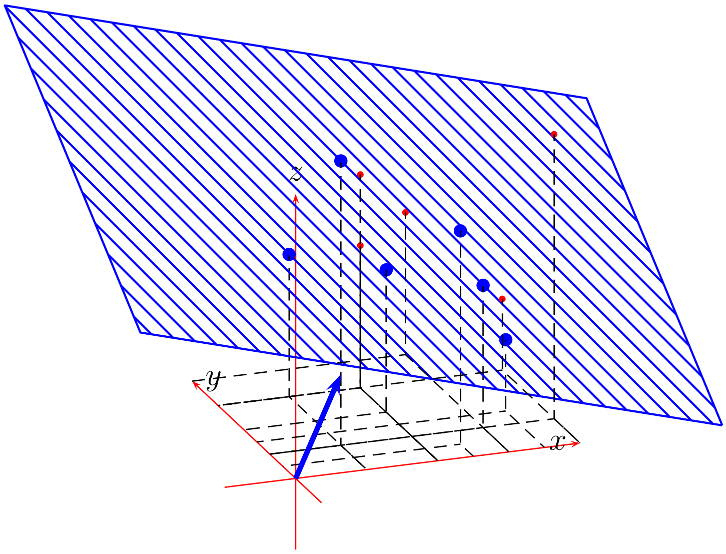
Şube	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*H*	*I*	*J*	*K*	*L*
Çalışan Şikayetleri	4	2	4	5	4	2	6	7	8	8	6
Müşteri Şikayetleri	4	6	6	1	6	2	8	3	6	2	2
Maliyet	4	4	4	6	6	8	4	2	2	9	4

Sonuçlar üç değişik kritere göre değerlendirilecektir. İlk olarak üç ana başlıkta eşit derecede önemli kabul edilecek, daha sonra da müşteri memnuniyeti öne çıkarılacak ve son olarak da maliyet ön planda tutulacaktır. Belirtilen isteklere göre birinci ağırlık vektörü $r_1 = (1,1,1)$ *olmalıdır. Bu durumda elde edeceğimiz ilk skaler problem*

$$(SP_1)\begin{cases} min & \langle r_1, s\rangle \\ s \in S & \end{cases}$$

olur. r_1*'e dik olan hiper düzlem* r_1 *yönünde hareket ettirildiğinde, ilk olarak,* S *kümesinin altı elemanına aynı anda temas eder(Şekil 3.6). Bu elemanlar, birinci skaler problemin çözüm kümesidir. Yani ikinci skaler problemde sadece bu elemanlar dikkate alınarak diğerleri göz ardı edilir.*

Birinci skaler problemin çözüm kümesine $min(SP_1)$ *diyecek olursak; bu küme, altı elemandan oluşur. İkinci kriter olarak müşteri memnuniyeti tek olarak dikkate alınacaktır. Bu durumda,* r_1*'e dik olan* $r_2 = (-1,1,0)$ *vektörü*



Şekil 3.6: Örnek 3.4.2'de 1. Skaler Problemin Çözüm Kümesi

alınabilir. Böylece, ikinci skaler problem

$$(SP_2)\begin{cases} min\langle r_2, s\rangle \\ s \in min(SP_1) \end{cases}$$

olur.

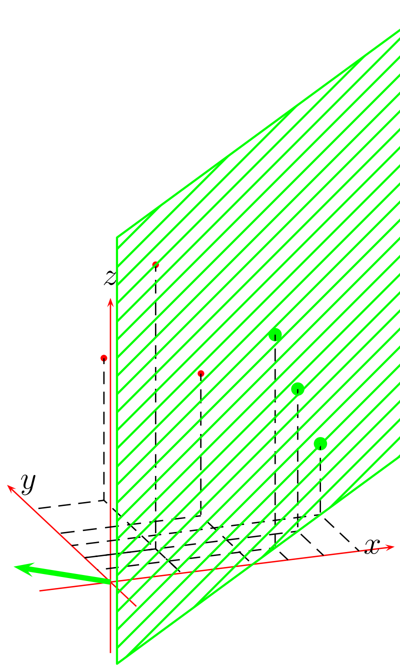
Bu problemin çözüm kümesi ($min(SP_2)$) üç noktadan oluşur (Şekil 3.7). Bu noktalar r_2'ye dik olan hiper düzlemin 1. skaler problemin minimal elemanları kümesine r_2 yönünde ilerletildiği durumdaki ilk temas ettiği noktalardır.

Üçüncü adımda ise, 2. aşamada elde edilen çözümler üzerinden işlem yapılacaktır. Bu aşamada sadece maliyetler dikkate alınacağından, r_1 ve r_2'ye dik olan $r_3 = (-1, -1, 2)$ vektörü kullanılacaktır. Bu durumda üçüncü skaler problem

$$(SP_3)\begin{cases} min\langle r_3, s\rangle \\ s \in min(SP_2) \end{cases}$$

olur.

Bu problemin çözümü geometrik olarak uzayda birbirine dik üç hiper düzlemin kesişimidir. Bu yüzden tek noktadır(Şekil 3.8). Bu nokta, I şubesinin verdiği noktadır.

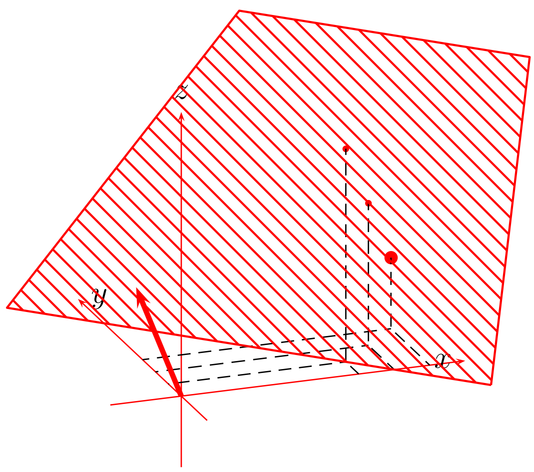


Şekil 3.7: Örnek 3.4.2'de 2. Skaler Problemin Çözüm Kümesi

Yukarıda geometrik olarak yapılan hesaplamalar, aşağıdaki tabloda da belirtilmiştir. Her seviyedeki çözüm kümesinin minimal elemanları, koyu yazı tipiyle gösterilmiş ve çözümün mantığı gereği sadece bu çözümler bir sonraki aşamada dikkate alınmıştır.

Şube	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*H*	*I*	*J*	*K*	*L*
$\langle r_1, \cdot\rangle$	**12**	**12**	*14*	**12**	*16*	**12**	*18*	**12**	*16*	*19*	**12**
$\langle r_2, \cdot\rangle$	*0*	*4*		**-4**		*0*		**-4**			**-4**
$\langle r_3, \cdot\rangle$				*6*				**-6**			*0*

Bu durumda, I şubesinde uygulanan sistemin en iyi çözüm olduğu açıktır.



Şekil 3.8: Örnek 3.4.2'de 3. Skaler Problemin Çözüm Kümesi

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

4 VEKTÖRLEŞTİRME

Küme değerli optimizasyonda yapılan uygulamalar, genel olarak, vektör optimizasyonda elde edilen sonuçların küme değerli dönüşümlere uygulamasıdır. Küme değerli dönüşümler üzerinde optimal kümenin bulunması problemleri, pek çok araştırmacı tarafından çalışılmıştır. Bu çalışmalar arasında en çok dikkat çekenlerden birisi, Aubin ve Cellina'nın Set-Valued Analysis [2] kitabıdır. Konuyla ilgili temel ve ek bilgiler için bu kitaba bakılabilir.

Bu bölümde, uygun küme değerli dönüşümlerden optimizasyon problemlerinde kullanılabilecek biçimde vektör değerli fonksiyonlar elde edilecektir. Bu işlem tarafımızdan "vektörleştirme" olarak adlandırılmıştır. Öncelikle, koni kapalı ve koni sınırlı bir kümeden K tam sıralama konisi kullanarak bir vektörün elde edilişi ile ilgili bir varlık teoremi verilecektir. Sonrasında, kümelerin ve bu kümelerden vektörleştirme ile elde edilen vektörlerin bazı özellikleri incelenecektir. Vektörleştirmenin varlık teoreminin küme değerli dönüşümler için bir sonucu verildikten sonra, Kuroiwa [27] tarafından verilen küme sıralaması ve vektörleştirme ile elde edilen vektörlerin sıralamaları arasında ilişkiler verilerek küme değerli optimizasyon problemlerinin vektör değerli optimizasyon problemlerine dönüştürülmesi kanıtlanacaktır.

4.1 Kümelerin Vektörleştirmesi

Aşağıda vektörleştirme için gerekli olan koni kapalılık ve koni sınırlılık tanımları verilmiştir. Bu tanımlar, farklı çalışmalarda farklı şekillerde verilmiştir.

Tanım 4.1.1. *Y bir vektör uzayı, $C \subset Y$ sivri konveks sıralama konisi ve $A \subset Y$ olmak üzere $A + C$ kapalı ise A'ya C-kapalıdır [28] ve $A \subset (y + C)$ olacak şekilde bir $y \in Y$ varsa A'ya C-sınırlıdır denir. [19]*

Aşağıda bir koni kapalı ve koni sınırlı küme için tam sıralamaya göre minimal elemanın varlığı ve tekliği gösterilmiştir.

Teorem 4.1.2. *Y gerçel ayrılabilir Hilbert uzayı, C Y'de $int(C) \neq \emptyset$ olacak şekilde kompakt tabana sahip sıralama konisi, $S \subset Y$ boş olamayan C-kapalı* *ve C sınırlı bir küme olsun. Bu durumda*

$$\{s\} = min(S; K)$$

olacak şekilde bir K tam sıralama konisi ve $s \in S$ vardır.

Kanıt. C kompakt tabana sahip olduğundan, $B := \{c \in C : \langle r_1, r\rangle = 1\}$ C'nin bir kompakt tabanı olacak şekilde bir $r_1 \in C^\sharp$ ([19] sayfa.17) vardır ve

$$C \subset \{y \in Y : \langle r_1, y\rangle > 0\} \cup \{0_Y\}$$

olur. Böylece

$$K = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \{a \in Y : \forall j < i, \langle r_j, a\rangle = 0, \langle r_i, a\rangle > 0\}\right) \cup \{0_Y\} \qquad (4.1)$$

bir tam sırama konisi olacak biçimde Y'nin dikey bir $\{r_i : i \in \mathbb{N}^+\}$ tabanı vardır(Teorem 2.3). S, C-sınırlı olduğundan

$$S \subset \{y\} + C$$

olan bir $y \in Y$ vardır.

Sonuç olarak; her $\tilde{y} \in S$ için $y \leq_C \tilde{y}$ olur. $r_1 \in C^\sharp$ olduğundan $\langle r_1, \cdot\rangle$ C konisine göre kesin artandır [19]. Bu durumda, her $\tilde{y} \in S$ için $\langle r_1, y\rangle \leq \langle r_1, \tilde{y}\rangle$ olur. Sonuç olarak $\{\langle r_1, \tilde{y}\rangle : \tilde{y} \in S\}$ kümesi altan sınırlıdır.

S'nin minimal elemanı aynı zamanda $S + C$'nin de minimal elemanı olduğundan $\{\langle r_1, \tilde{y}\rangle : \tilde{y} \in S + C\}$ kümesi de alttan sınırlıdır. Bu durumda bir

$$a := min\{\langle r_1, \tilde{y}\rangle : \tilde{y} \in S\}.$$

gerçel sayısı vardır. Kabul edelim ki; $b := \langle r_1, x\rangle$ olsun. $b \leq a$ olacağı açıktır.

$$(SP_1) \begin{cases} min\langle r_1, \tilde{y}\rangle \\ \tilde{y} \in S \end{cases} \qquad (4.2)$$

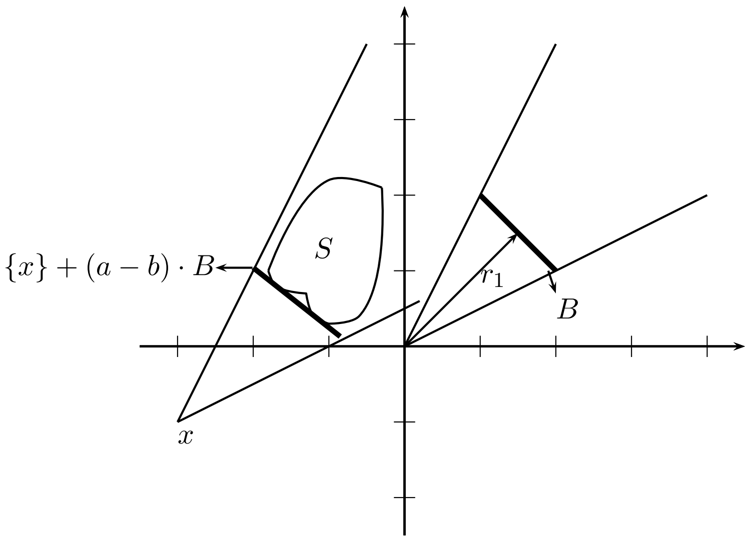
skaler probleminin minimal elemanları kümesi düşünelim.

$$S \cap ((a - b)B + \{y\})$$

olarak gösterilebilir(Şekil 4.9). S ve $S + C$'nin minimal elemanları kümesi aynı olduğundan

$$(S + C) \cap ((a - b)B + \{y\}) = S \cap ((a - b)B + \{y\})$$

eşitliğini doğrudan elde ederiz.



Şekil 4.9: Teorem 4.1.2'nin kanıtında (SP_1) probleminin minimal elemanları kümesi

$S+C$ kapalı $((a-b)B+\{y\})$ kompakt ve kapalı küme ile kompakt kümenin kesişimi de kompakt olduğundan

$$A_1 := S \cap ((a - b)B + \{y\})$$

kümesi kompakttır. Böylece

$$(SP_2) \begin{cases} min\langle r_2, \tilde{y}\rangle \\ \tilde{y} \in A_1 \end{cases} \tag{4.3}$$

skaler probleminin çözümü bir $c_2 \in \mathbb{R}$ için

$$A_2 := A_1 \cap \{r \in Y : \langle r_2, r\rangle = c_2\}$$

şeklinde olur. A_1 kompakt ve $\{r \in X : \langle r_2, r\rangle = c\}$ kapalı olduğundan A_2 boş olmayan kompakt bir kümedir.

Benzeri şekilde

$$(SP_{n-1}) \begin{cases} min\langle r_{n-1}, \tilde{y}\rangle \\ \tilde{y} \in A_{n-2} \end{cases} \tag{4.4}$$

$(n-1)$. skaler problem A_{n-2} boş olamayan kompakt kümesi için tanımlı olsun. Bu durumda bu problemin çözüm kümesi bir $c_{n-1} \in \mathbb{R}$ sayısı için

$$A_{n-1} := A_{n-2} \cap \{r \in X : \langle r_{n-1}, r\rangle = c_{n-1}\}$$

şeklinde olur. A_{n-1}'in de boş olmayan kompakt bir küme olduğu açıktır. Bu şekilde

$$(SP_n) \begin{cases} min\langle r_n, \tilde{y}\rangle \\ \tilde{y} \in A_{n-1} \end{cases} \tag{4.5}$$

problemini A_{n-1} kümesi için tanımlanabilir. Sonuç olarak her $i \in \mathbb{N}^+ \setminus \{1, 2\}$ için (SP_i) skaler problemini bu şekilde tanımlayabiliriz. Bu ise, bize, daralan boş olmayan kompakt A_n küme serisi sağlar. Cantor Teoremden bu kümelerin kesişimi tek noktadan oluşur. Bu noktayı s olarak seçersek,

$$\{s\} = min(S, K)$$

olarak elde ederiz. □

Bu şekilde elde ettiğimiz vektörü, S kümesinin K-minimali olarak isimlendireceğiz. Aşağıdaki yardımcı teoremde koni kapalı ve koni sınırlı kümelerin bazı özellikleri verilecektir.

Yardımcı Teorem 4.1.3. *Y gerçel ayrılabilir Hilbert uzayı, C Y'nin $int(C) \neq \emptyset$ olacak şekilde kompakt tabana sahip sıralama konisi ve $S_1, S_2 \subset Y$ boş olmayan C-kapalı, C-sınırlı kümeler olsunlar. Bu durumda;*

i) Her $\lambda > 0$ için λS_1 C-kapalı ve C-sınırlıdır.

ii) $S_1 + S_2$ C-sınırlıdır.

Kanıt. i) Koni kapalılık tanımından $S_1 + C$ kapalıdır. Bu durumda herhangi bir $\lambda > 0$ için

$$\lambda(S_1 + C) = \lambda S_1 + \lambda C = \lambda S_1 + C$$

kapalıdır. Sonuç olarak λS_1 C-kapalıdır.

S_1 C-sınırlı olduğundan $S_1 \subset \{y\} + C$ olacak şekilde bir $y \in Y$ vardır. Buradan

$$\lambda S_1 \subset \lambda(\{y\} + C) = \{\lambda y\} + C$$

olur. Yani λS_1 C-sınırlıdır.

ii) S_1 C-sınırlı olduğundan $S_1 \subset \{y_1\} + C$ olacak şekilde bir $y_1 \in Y$ ve S_2 C-sınırlı olduğundan $S_2 \subset \{y_2\} + C$ olacak şekilde bir $y_2 \in Y$ vardır. Bu durumda

$$S_1 + S_2 \subset (\{y_1\} + C) + (\{y_2\} + C) = \{y_1 + y_2\} + C + C = \{y_1 + y_2\} + C$$

olur. Sonuç olarak $S_1 + S_2$ C-sınırlıdır.

□

Teorem 4.1.4'te kümelerin toplamı ve skaler bir sayı ile çarpımı altında vektörleştirmenin korunduğu gösterilmiştir.

Teorem 4.1.4. *Y gerçel ayrılabilir Hilbert uzayı, C, Y'nin $int(C) \neq \emptyset$ olacak şekilde kompakt tabana sahip sıralama konisi, $S_1, S_2 \subset Y$ boş olmayan C-kapalı, C-sınırlı kümeler ve s_1, s_2 sırasıyla S_1, S_2'nin K-minimalleri olsun. Bu durumda*

i) Her $\lambda > 0$ için λs_1 λS_1'in K-minimalidir.

ii) Ek olarak $S_1 + S_2$ C-kapalı ise $s_1 + s_2$ $S_1 + S_2$'nin K-minimalidir.

Kanıt. i) s_1 vektörü S_1'in K-minimali olduğundan $(\{s_1\} - K) \cap S_1 = \{s_1\}$ olur. Bu eşitlikte her iki tarafı bir $\lambda > 0$ ile çarptığımızda $\lambda(\{s_1\} - K) \cap \lambda S_1 = \lambda\{s_1\}$ elde ederiz. Buradan $(\{\lambda s_1\} - K) \cap \lambda S_1 = \{\lambda s_1\}$ olur. Yani, $\{\lambda s_1\} = min(\lambda S_1, K)$ olur ki bu λs_1 vektörü λS_1'in K-minimali olduğu anlamına gelir.

ii) s_1 vektörü S_1'in K-minimali olduğundan $(\{s_1\} - K) \cap S_1 = \{s_1\}$ ve aynı şekilde s_2 vektörü S_2'in K-minimali olduğundan $(\{s_2\} - K) \cap S_2 = \{s_2\}$ olur. Böylece $s_1 + s_2 \in S_1 + S_2$ ve $s_1 + s_2 \in \{s_1 + s_2\} - K$ olduğu görülür.

Sonuç olarak $s_1 + s_2 \in (\{s_1 + s_2\} - K) \cap (S_1 + S_2)$ olur. Kabul edelim, ki bu kesişim farklı bir elemana daha sahip olsun. Yani

$$\tilde{s}_1 \in S_1,\ \tilde{s}_2 \in S_2 \tag{4.6}$$

ve

$$\tilde{s}_1 + \tilde{s}_2 \in \{s_1 + s_2\} - K \tag{4.7}$$

olacak şekilde bir $\tilde{s} = \tilde{s}_1 + \tilde{s}_2$ var olsun. (4.6) ile birlikte s_1 ve s_2'nin K-minimalliğinden ve tam sıralamaya göre minimallik ve güçlü minimallik denk olduğundan $\tilde{s}_1 \in s_1 + K$ ve $\tilde{s}_2 \in s_2 + K$ olur. Bu durumda $\tilde{s}_1 + \tilde{s}_2 \in \{s_1 + s_2\} + K$ elde ederiz. (4.7) kapsamıyla birlikte buradan $\tilde{s}_1 + \tilde{s}_2 - s_1 - s_2 \in K \cap (-K) = \{0_Y\}$ bulunur. Sonuç olarak $\tilde{s}_1 + \tilde{s}_2 = s_1 + s_2$ olur. $\tilde{s} = \tilde{s}_1 + \tilde{s}_2$'yi $s_1 + s_2$'den farklı kabul ettiğimiz için de bu bir çelişkidir ve $(\{s_1 + s_2\} - K) \cap (S_1 + S_2) = \{s_1 + s_2\}$ olur. Yani $s_1 + s_2$ vektörü $S_1 + S_2$'nin K-minimalidir.

□

4.2 Küme Değerli Dönüşümlerin Vektörleştirilmesi

Bu bölümde, kümelerin vektörleştirilmesinin bir sonucu olarak küme değerli dönüşümlerin vektörleştirilmesi ve optimallik ile ilgili elde edilen sonuçlar verilecektir.

Sonuç 4.2.1. *Y gerçel ayrılabilir Hilbert uzayı, C Y'nin $int(C) \neq \emptyset$ olacak şekilde kompakt tabana sahip bir sıralama konisi, X boş olmayan herhangi bir küme ve $F : X \rightrightarrows Y$ C-kapalı, C-sınırlı küme değerli dönüşüm olsun. Bu durumda her $x \in X$ için $V_F(x)$ $F(x)$'in K-minimali olacak biçimde bir $V_F : X \to Y$ vektör değerli dönüşümü vardır.*

Kanıt. Herhangi bir $x \in X$ için $F(x)$, C-kapalı ve C-sınırlıdır. Teorem 4.1.2'den bir $y \in F(x)$ için y $F(x)$'in K-minimalidir. $V_F(x) = y$ seçersek kanıt biter. □

Bundan sonraki bölümde bu şekilde elde ettiğimiz vektör değerli $V_F(x)$ fonksiyonu $F(x)$'in K-minimali olarak isimlendirilecektir. Bu fonksiyon, seçilen K tam sıralamasına bağlı olarak tekdir. Farklı bir tam sıralama konisi seçildiğinde, farklı bir K-minimal bulunabilir.

Tam sıralama konilerinde minimalliğin, güçlü minimalliğe denk olduğu daha önce gösterilmişti (Teorem 2.4.3). Bu özelliğin bir sonucu olarak aşağıdaki özellik elde edilir.

Sonuç 4.2.2. *Y gerçel ayrılabilir Hilbert uzayı, $C \subset Y$ $int(C) \neq \emptyset$ olacak şekilde kompakt tabana sahip bir sıralama konisi, Y boş olmayan herhangi bir küme ve $F : X \rightrightarrows Y$ C-kapalı, C-sınırlı küme değerli dönüşüm ve $V_F(x)$ $F(x)$'in K-minimali olsun. Bu durumda her $x \in X$ için*

$$\{V_F(x)\} + K = F(x) + K$$

olur.

[27] Y bir vektör uzayı, C Y'de bir sıralama konisi ve A, B Y'de herhangi iki boş olmayan, C-sınırlı ve C-kapalı küme olsunl.

Bu durumda Y'de C konisine göre kümeler için "$\leq_C$" ile gösterilen bir sıralama

$$A \leq_C B \Leftrightarrow B \subset A + C$$

şeklinde tanımlanır.

[27]'de verilen sıralama tanımının yansıyan, geçişken, vektör toplamı ve skaler çarpmayla uyumlu olduğu ancak; anti-simetrik olmadığı belirtilmiştir. Önerme 4.2.3'de sıralamanın bu özellikleri kanıtlanmıştır.

Önerme 4.2.3. *Yukarıda, koni sınırlı ve koni kapalı kümeler için verilen sıralama, yansıyan, geçişken, vektör toplamı ve skaler çarpımıyla uyumludur. Ancak anti-simetrik değildir.*

Kanıt. C Y'de bir sıralama konisi, A, B, D Y'de boş olmayan C-sınırlı ve C-kapalı küme olsunlar.

i) Bu durumda $A \subset A + C$ olur. Dolayısıyla $A \leq_C A$ dır. Yani bu bağıntı yansıyandır.

ii) $A \leq_C B$ ve $B \leq_C D$ olsun. Buradan $B \subset A+C$ ve $D \subset B+C$ olur. C bir sıralama konisi olduğundan konveks konidir. Yani $C = C+C$ dir. Bu durumda

$$D \subset B+C \subset (A+C)+C = A+(C+C) = A+C$$

olur. Sonuç olarak bağıntı geçişkendir.

iii) $y \in Y$ herhangi bir vektör ve $A \leq_C B$ olsun. Tanımdan $B \subset A+C$ demektir. Bu durumda $\{y\}+B \subset \{y\}+A+C$ olur. Bu ise $\{y\}+A \leq_C \{y\}+B$ olduğunu gösterir. Sonuç olarak bu bağıntı vektör toplamı ile uyumludur.

iv) $\lambda > 0$ ve $A \leq_C B$ olsun. O halde $B \subset A+C$ dir. Bu durumda $\lambda B \subset \lambda(A+C)$ ve $C = \lambda C$ olduğundan $\lambda B \subset \lambda A + C$ olur. Sonuç olarak bağıntı skaler çarpım ile uyumludur.

v) Bağıntının anti simetrik olmadığını göstermek için bir ters örnek yeterli olacaktır. $C = \mathbb{R}^2_+ \subset \mathbb{R}^2$, $A := \{(0,0)\}$ ve $B = C$ olsun.

$$A = \{(0,0)\} \subset \mathbb{R}^2_+ + C = B + C$$

ve

$$B = \mathbb{R}^2_+ \subset \{(0,0)\} + C = A + C$$

olduğundan $A \leq_C B$ ve $B \leq_C A$ olur. Ancak $A \neq B$ dır. Bu durumda bağıntı antisimetrik değildir.

$\square$

Küme sıralamasında kısmi sıralama yerine tam sıralama kullanıldığında, antisimetriklik özelliği hariç, bir tam sıralama elde ederiz. Yardımcı Teorem 4.2.4 bu özelliği gösterir.

Yardımcı Teorem 4.2.4. *Y bir vektör uzayı ve K vektörler için bir tam sıralama konisi ve A, B Y'de boş olmayan iki C-sınırlı ve C-kapalı küme olsunlar. " $\leq_K$ " bağıntısı yukarıda verildiği şekilde olsun. Bu durumda $A \leq_K B$ veya $B \leq_K A$ olur.*

Kanıt. Kabul edelim ki, varsayımlar sağlansın ancak; $A \nleq_K B$ ve $B \nleq_K A$ olsun. Bu durumda $\tilde{a} \notin B + C$ olacak biçimde bir $\tilde{a} \in A$ ve $\tilde{b} \notin A + C$ olacak şekilde bir $\tilde{b} \in B$ vardır. Dolayısıyla $\tilde{a} \notin \{\tilde{b}\} + C$ ve $\tilde{b} \notin \{\tilde{a}\} + C$ olur. Yani $a \nleq_K b$ ve $b \nleq_K a$ dır. Bu ise K'nın tam sıralama konisi olması ile çelişir. □

Sonuç 4.2.5. *Y gerçel ayrılabilir Hilbert uzayı, X boş olmayan bir küme ve C Y'nin $int(C) \neq \emptyset$ olacak şekilde kompakt tabana sahip sıralama konisi olsun. $F : X \rightrightarrows Y$ C-kapalı, C-sınırlı küme değerli dönüşüm ve $V_F : X \to Y$ $F(x)$'in K-minimali olsun.*

Bu durumda herhangi $x_1, x_2 \in X$ için,

$$F(x_1) \leq_K F(x_2) \Leftrightarrow V_F(x_1) \leq_K V_F(x_2)$$

dir.

Kanıt. Sonuç 4.2.2'den $V_F(x_1) + K = F(x_1) + K$ ve $V_F(x_2) + K = F(x_2) + K$ dir.

($\Rightarrow$) $F(x_1) \leq_K F(x_2)$ yani $F(x_2) \subset F(x_1) + K$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} V_F(x_2) &\in F(x_2) \\ &\subset F(x_1) + K \\ &= \{V_F(x_1)\} + K \end{aligned}$$

olur. Bu $V_F(x_2) \in \{V_F(x_1)\} + K$ demektir. Dolayısıyla $V_F(x_1) \leq_K V_F(x_2)$ olduğu gösterilmiş olur.

($\Leftarrow$) $V_F(x_1) \leq_K V_F(x_2)$ yani, $V_F(x_2) \in \{V_F(x_1)\} + K$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} F(x_2) &\subset F(x_2) + K \\ &= \{V_F(x_2)\} + K \\ &\subset \{V_F(x_1)\} + K \\ &= F(x_1) + K \end{aligned}$$

olur. Bu $F(x_2) \subset F(x_1) + K$ demektir. Yani $F(x_1) \leq_K F(x_2)$ dir. □

Sonuç 4.2.6. *Y gerçel ayrılabilir Hilbert uzayı, X boş olmayan bir küme ve C Y'de $int(C) \neq \emptyset$ olacak şekilde kompakt tabana sahip sıralama konisi olsun.*

$F : X \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ C-kapalı, C-sınırlı küme değerli dönüşümü ve $V_F : X \to Y$ $F(x)$'in K-minimali olsun.

Bu durumda K tam sıralama konisine göre

$$(SVP)\begin{cases} min\ F(x) \\ x \in X \end{cases} \tag{4.8}$$

küme değerli probleminin çözümü, K tam sıralama konisine göre

$$(VP)\begin{cases} min\ V_F(x) \\ x \in X \end{cases} \tag{4.9}$$

vektör değerli problemin çözümüyle aynıdır.

Kanıt. Kanıt Sonuç 4.2.5'ten hemen görülebilir. □

Koni kapalı ve koni sınırlı bir küme değerli dönüşümle K-minimali arasında süreklilik açısında bir gerektirme yoktur. Aşağıdaki örneklerin ilkinde, küme değerli dönüşümün sürekliliğinin K-minimalinin sürekliliğini gerektirmediği gösterilmiştir. İkinci örnekte ise, küme değerli dönüşüm sürekli olmadığı halde K-minimalinin sürekli olabileceği gösterilmiştir.

Örnek 4.2.7. *$F : [0, 2\pi) \rightrightarrows \mathbb{R}^2$, $F(x) = [(0,0),(cosx, sinx)]$, $C = \mathbb{R}^2_+$ ve K konisi $r_1 = (1,1), r_2 = (-1,1)$ vektörlerinden elde ettiğimiz*

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y > 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, y = -x\} \cup \{(0,0)\}$$

konisi olsun. $F(x)$ kompakt değerli dönüşüm olduğundan, C-sınırlı ve C-kapalıdır. Ek olarak Hausdorff metriğine göre süreklidir. $F(x)$ K konisi ile Teorem 2.2.3'den elde ettiğimiz vektör değerli dönüşüm

$$V_F(x) = \begin{cases} (cosx, sinx) & : \ x \in \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right) \\ (0,0) & : \ x \notin \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right) \end{cases} \tag{4.10}$$

olur.

$V_F(x)$ fonksiyonunun $\frac{3\pi}{4}$ ve $\frac{7\pi}{4}$ noktalarında sürekli olmadığı açıktır.

Örnek 4.2.8. *C ve K Örnek 4.2.7'de verildiği gibi olsun. $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}^2$ küme değerli dönüşüm*

$$F(x) = \begin{cases} [(0,0),(1,2)] & : \quad x \in \mathbb{Q} \\ [(0,0),(2,1)] & : \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \tag{4.11}$$

olarak tanımlansın. $F(x)$ hiçbir noktada sürekli olmadığı açıktır. Ancak $F(x)$ K konisi ile Teorem 2.3.6'de elde ettiğimiz vektör değerli dönüşüm her $x \in \mathbb{R}$ için $V_F(x) = (0,0)$ olur ve süreklidir.

5 KÜME DEĞERLİ YÖNLÜ TÜREV

Küme değerli analiz ve optimizasyon ile ilgili çok sayıda çalışma vardır. Küme değerli optimizasyonun mühendislik ve oyun teorisi üzerine önemli uygulamalarının olduğu bilinmektedir([1] ve bu eserde geçen referanslara bakılabilir.) 1990'da küme değerli analiz, Aubin ve Frankowska tarafından çalışıldı [2]. Küme değerli optimizasyonun sistematik çalışması, 1989'da Luc [28] ve 1984'de Aubin ve Ekeland [1] tarafından verilmiştir. Küme değerli optimizasyondaki önemli yönlerden biri de küme değerli bir dönüşümün türevi veya yönlü türevi ile ilgili çalışmalarıdır. Bu çalışmalar, vektör değerli dönüşümlerin subdiferansiyelleri çalışmaları ile başlamıştır (1974'de Zowe [39], 1982'de Thibault [34], 1985'de Sawaragi ve arkadaşları [32], 1991'de Chen ve Craven [9] ve 1992'de Yang'ın [35] çalışmalarına bakılabilir.)

Küme değerli bir dönüşüm için türev kavramının araştırılması, 1977'de Borwein [8], 1988'de Corley [11] ve 1991'de Luc [29] tarafından geliştirilmiştir. Küme değerli optimizasyonda optimallik şartlarını uygun olarak belirtmek için Jahn ve Rauh [18] 1997'de küme değerli bir dönüşümün contingent türevlerini tanımlamışlardır. 1998'de Yang tarafından küme değerli dönüşümler için Dini yönlü türevler verilmiştir [36].

Bu bölümde, Aubin ve Frankowska'nın Set-Valued Analysis kitabında [3] vermiş oldukları küme değerli dönüşümler için limit tanımı ve vektörleştirme kullanılarak küme değerli dönüşümler için yeni bir yönlü türev tanımı verilmiştir. Bu tanımla daha önce verilmiş olan küme değerli dönüşümler için yönlü türev tanımından [36] daha kolay hesaplanabilir bir türev elde edilmiştir. Bir küme değerli dönüşüm ailesinde doğrudan vektör değerli fonksiyonların yönlü türevinden sonuca ulaşılırken hesaplamalar için geometrik olarak da örnekler verilmiştir. Bu türev tanımı ile optimallik şartları elde edilerek örnekler üzerinde uygulanmıştır.

5.1 Küme Değerli Yönlü Türevin Tanımı ve Hesaplanması

Aşağıda küme değerli dönüşümler için Aubin'in yaptığı limit tanımı verilmiştir.

Tanım 5.1.1. *[2] X ve Y metrik uzaylar, $F : X \rightrightarrows Y$ küme değerli dönüşüm olmak üzere F dönüşümünün bir $\bar{x} \in X$'deki*

üstten limiti

$$\underset{x \to \bar{x}}{limsup} F(x) := \{y \in Y : \underset{x \to \bar{x}}{liminf}\ d(y, F(x)) = 0\}$$

alttan limiti

$$\underset{x \to \bar{x}}{liminf} F(x) := \{y \in Y : \underset{x \to \bar{x}}{lim}\ d(y, F(x)) = 0\}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 5.1.2. *X ve Y gerçel ayrılabilir Hilbert uzayları, $F : X \rightrightarrows Y$ kompakt tabana sahip bir $C \subset Y$ sıralama konisi için C-kapalı ve C-sınırlı küme değerli dönüşüm, $V_F : X \to Y$ $F(x)$'in K-minimali olsun. Bu durumda*

$$D_h F_+(x) := \left\{ y \in Y : \underset{t \to 0^+}{liminf}\ d\left(y, \frac{F(x+th) - V_F(x)}{t}\right) = 0 \right\}$$

kümesine F küme değerli dönüşümünün bir $x \in X$ noktasında $h \in X$ yönündeki K tam sıralama konisine bağlı üstten yönlü türevi denir.

Benzeri şekilde

$$D_h F_-(x) := \left\{ y \in Y : \underset{t \to 0^+}{lim}\ d\left(y, \frac{F(x+th) - V_F(x)}{t}\right) = 0 \right\}$$

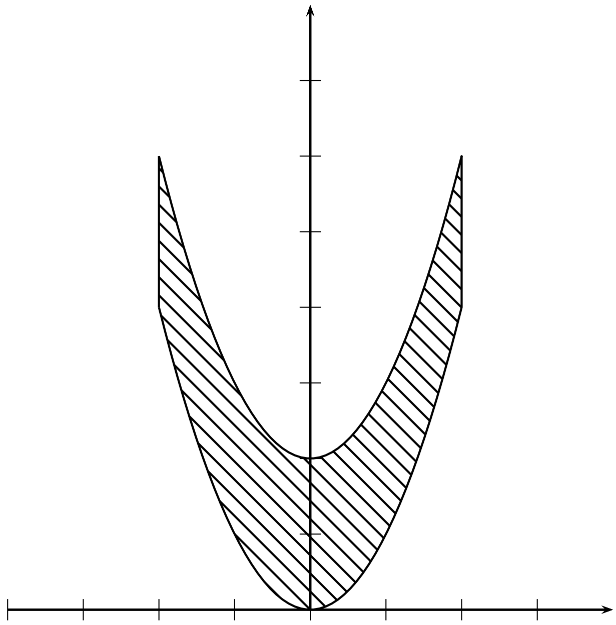
kümesine de alttan yönlü türevi denir.

Bir $x \in X$ için $D_h F_+(x) = D_h F_-(x)$ oluyorsa F x'de h yönünde türevlenebilirdir denir.

$D_h F(x) := D_h F_+(x) = D_h F_-(x)$ ile gösterilir.

Örnek 5.1.3'de $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye küme değerli bir dönüşümde bu türevin hesaplanması verilmiştir.

Örnek 5.1.3. *$F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ küme değerli dönüşümü $F(x) = [x^2, x^2 + 2]$ kapalı aralığı ile tanımlanan dönüşüm olsun (Şekil 5.10).*



Şekil 5.10: Örnek 5.1.3'da $F(x) = [x^2, x^2+2]$ küme değerli dönüşümün grafiği

Bu durumda $C = K = [0,\infty)$ *konisi sıralama konisi olur.* $F(x)$*'in* K*-minimali* $V_F(x) = x^2$ *olur.*

Bu durumda F *küme değerli dönüşümünün bir* $x \in \mathbb{R}$ *noktasındaki üstten türevi*

$$\begin{aligned}
D_hF_+(x) &= \{y \in \mathbb{R} : \liminf_{t\to 0^+} d\left(y, \tfrac{F(x+th)-V_F(x)}{t}\right) = 0\} \\
&= \{y \in \mathbb{R} : \liminf_{t\to 0^+} d\left(y, \tfrac{[(x+th)^2,(x+th)^2+2]-x^2}{t}\right) = 0\} \\
&= \{y \in \mathbb{R} : \liminf_{t\to 0^+} d\left(y, \tfrac{x^2+2xth+t^2h^2+[0,2]-x^2}{t}\right) = 0\} \\
&= \{y \in \mathbb{R} : \liminf_{t\to 0^+} d\left(y, \tfrac{2xth+t^2h^2+[0,2]}{t}\right) = 0\} \\
&= \{y \in \mathbb{R} : \liminf_{t\to 0^+} d\left(y, 2xh+th^2+[0,\tfrac{2}{t}]\right) = 0\} \\
&= 2xh + [0,\infty)
\end{aligned}$$

alttan türevi de benzeri şekilde

$$\begin{aligned}
D_hF_-(x) &= \{y \in \mathbb{R} : \lim_{t\to 0^+} d\left(y, \tfrac{F(x+th)-V_F(x)}{t}\right) = 0\} \\
&= 2xh + [0,\infty)
\end{aligned}$$

olur. $D_hF_+(x) = D_hF_-(x)$ *olduğundan* F $\mathbb{R}^n$*'de türevlenebilirdir.*

Geometrik olarak da düşünülecek olursa bir $\bar{x} \in X$ noktasındaki $h \in X$ yönündeki yönlü türev o yönden $(\bar{x}, V_F(\bar{x}))$ noktasına küme değerli dönüşümün grafiği içinden tüm doğrusal yaklaşımların eğimlerinin kümesi olduğu açıktır.

Uyarı 5.1.4. *F küme değerli dönüşümü vektör değerli bir dönüşüm olarak seçilirse küme değerli yönlü türev vektör değerli fonksiyonlar için tanımlanan yönlü türevle aynı olur. Bu tanım vektör değerli dönüşümler için tanımlanan yönlü türevin küme değerli dönüşümlere bir genelleştirmesidir.*

Örnek 5.1.5'te küme değerli yönlü türevin farklı noktalardaki geometrisi gösterilmiştir.

Örnek 5.1.5. *$F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ küme değerli dönüşümü*

$$F(x) = \begin{cases} [x^4, x^2] & , x \in [-1, 1] \\ [x^2, x^4] & , x \notin [-1, 1] \end{cases}$$

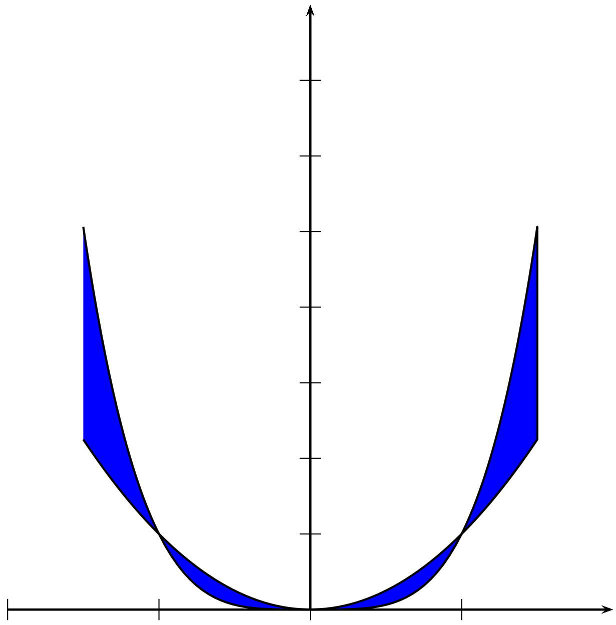
ile tanımlanan dönüşüm olsun (Şekil 5.11). Bu durumda $C = K = [0, \infty)$ konisi sıralama konisi olur. F'nin K-minimali $V_F(x) = min\{x^2, x^4\}$ dönüşümü olur. Bu durumda F küme değerli dönüşümünün 1 noktasındaki ve 1 vektörü yönündeki üstten türevi

$$\begin{aligned} D_1F_+(1) &= \left\{ y \in Y : \underset{t \to 0^+}{liminf}\ d\left(y, \tfrac{\left[(1+t)^2, (1+t)^4\right] - 1}{t} \right) = 0 \right\} \\ &= \left\{ y \in Y : \underset{t \to 0^+}{liminf}\ d\left(y, \tfrac{\left[2t+t^2, 4t+6t^2+4t^3+t^4\right]}{t} \right) = 0 \right\} \\ &= \left\{ y \in Y : \underset{t \to 0^+}{liminf}\ d\left(y, [2+t, 4+6t+4t^2+t^3] \right) = 0 \right\} \\ &= [2, 4] \end{aligned}$$

olur.

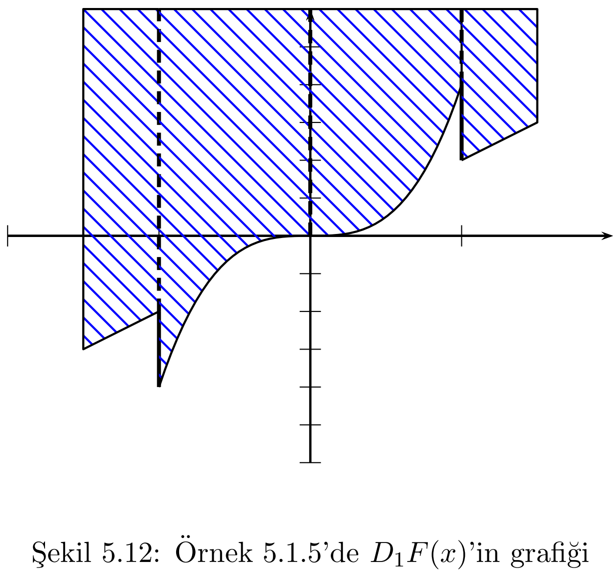
Şekil 5.12'de dönüşümün 1 vektörü yönünde elde edilecek küme değerli yönlü türevin grafiği verilmiştir. Bu sonuç, geometrik olarak açıktır. K minimal fonksiyonun x^4 olduğu durumlarda küme değerli yönlü türev $4x^3$ dönüşümünün üst kısmı, aynı şekilde K minimal fonksiyonun x^2 olduğu durumlarda ise küme değerli yönlü türev $2x$ dönüşümünün üst kısmıdır. Küme değerli yönlü türev vektör değerli sınır dönüşümlerinin kesiştiği -1 noktasında $[-4, -2]$, 0 noktasında $\{0\}$ ve 1 noktasında $[2, 4]$ olur. Bu noktalarda her iki fonksiyon da

K-minimal olarak etkin olduklarından küme değerli yönlü türev bu fonksiyonların türevlerinin belirlediği aralıktır.



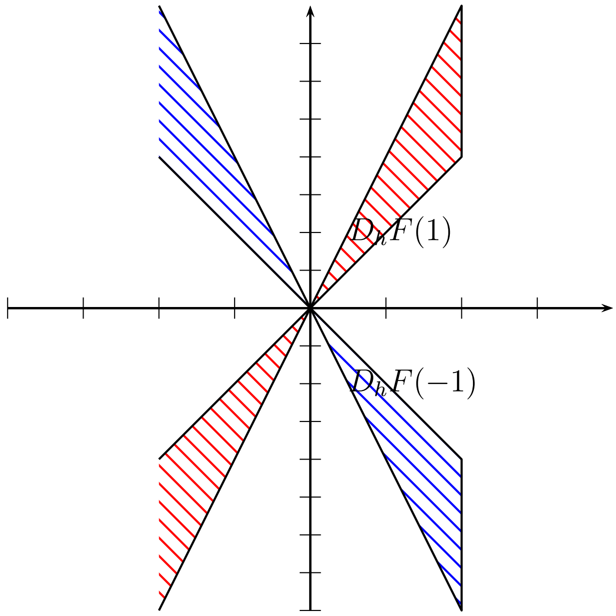
Şekil 5.11: Örnek 5.1.5'de $F(x)$'in grafiği

Şekil 5.13'de 1 ve -1 noktalarında h yönlerine göre küme değerli yönlü türevin grafiği verilmiştir.



Şekil 5.12: Örnek 5.1.5'de $D_1F(x)$'in grafiği

Teorem 5.1.6'da iki vektör değerli dönüşümün sıralı aralığı ile tanımlanan küme değerli dönüşümün yönlü türevi ile alt sınır vektör değerli dönüşümün yönlü türevi arasındaki ilişki belirtilmiştir.



Şekil 5.13: Örnek 5.1.5'de $D_hF(1)$ ve $D_hF(-1)$'in grafiği

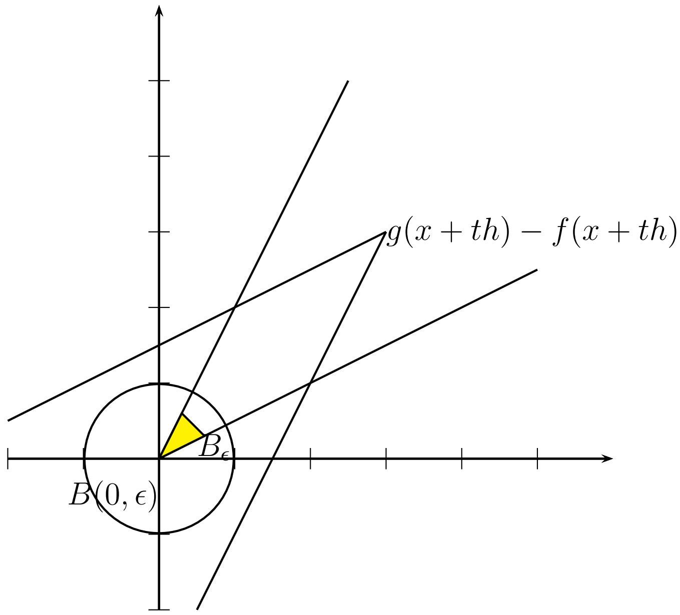
Teorem 5.1.6. *X ve Y gerçel ayrılabilir Hilbert uzayları, C Y uzayında kompakt tabana sahip $int(C) \neq \emptyset$ olacak şekilde bir sıralama konisi olmak üzere, $f, g : X \to Y$ her $x \in X$ için $g(x) - f(x) \in int(C)$ ve f türevlenebilir olacak şekilde, iki vektör değerli dönüşüm olsun. $F : X \rightrightarrows Y$ küme değerli dönüşümü $F(x) := (f(x) + C) \cap (g(x) - C)$ olarak tanımlansın. Bu durumda, F küme değerli dönüşümünün bir $x \in X$ noktasında h yönündeki yönlü türevi*

$$D_hF(x) = f'(x; h) + C$$

olur.

Kanıt. Küme değerli dönüşüm bu şekilde seçildiğinde $V_F(x) = f(x)$ olacağı açıktır. Bu durumda F küme değerli dönüşümünün x noktasında h yönündeki üstten yönlü türevi

$$\begin{aligned} D_hF_+(x) &= \{y \in \mathbb{R} : \liminf_{t \to 0^+} d\left(y, \tfrac{F(x+th) - V_F(x)}{t}\right) = 0\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : \liminf_{t \to 0^+} d\left(y, \tfrac{(f(x+th)+C) \cap (g(x+th)-C) - f(x)}{t}\right) = 0\} \\ &= \{y : \liminf_{t \to 0^+} d\left(y, \tfrac{f(x+th)-f(x)}{t} + \tfrac{(C) \cap (g(x+th) - f(x+th) - C)}{t}\right) = 0\} \\ &= f'(x; h) + C \end{aligned}$$



Şekil 5.14: Teorem 5.1.6'ün kanıtında B_ϵ tabanının elde edilişi

Burada $\frac{f(x+th)-f(x)}{t}$ $f'(x;h)$'e yakınsar.

Diğer taraftan $g(x+th)-f(x+th) \in int(C)$ olduğundan $B(0,\varepsilon) \subset g(x+th)-f(x+th)-C$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ vardır. Bu durumda C konisinin $B_\varepsilon \subset B(0,\varepsilon)$ olacak şekilde bir B_ε tabanı vardır. Dolayısıyla $\frac{(C)\cap(g(x+th)-f(x+th)-C)}{t}$ kümesi C'ye yakınsar ve sonuç elde edilir(Şekil 5.14).

Alttan yönlü türev de benzeri şekilde elde edilir. $\square$

Teorem 5.1.6'de üst sınır fonksiyonu olmadığı durumda da aynı sonuç elde edilir. Teorem 5.1.7'de küme değerli yönlü türevle K-minimalinin yönlü türevi arasındaki ilişki verilmiştir.

Teorem 5.1.7. *X ve Y gerçel ayrılabilir Hilbert uzayları, C Y uzayında kompakt tabana sahip bir sıralama konisi olmak üzere $F : X \rightrightarrows Y$ C-kapalı, C-sınırlı küme değerli dönüşümü ve $F(x)$'in K-minimali $V_F(x)$ türevlenebilir olsun. Bu durumda*

$$V_F'(x;h) \in min(D_hF(x), K)$$

olur.

Kanıt. $\forall x \in X$ için $V_F(x) \in F(x)$ olduğundan

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{V_F(x+th)-V_F(x)}{t} \in \left\{ y : \lim_{t\to 0^+}(inf) d\left(y, \frac{F(x+th)-V_F(x)}{t}\right) = 0 \right\}$$

olacağı açıktır. Bu durumda $V'_F(x;h) \in D_hF(x)$ olur.

$V'_F(x;h)$'nin $D_hF(x)$'in minimal noktası olduğunu göstermek için de kabul edelim ki $V'_F(x;h) \notin min(D_hF(x), K)$ olsun. Bu durumda $\bar{y} \leq_K V'_F(x;h)$ olan bir $\bar{y} \in D_hF(x)$ vardır. K'nın tanımladığı sıralamadan dolayı $\forall j < i_1$ için

$$\langle r_j, \bar{y}\rangle = \langle r_j, V'_F(x;h)\rangle \tag{5.12}$$

ve

$$\langle r_{i_1}, \bar{y}\rangle < \langle r_{i_1}, V'_F(x;h)\rangle \tag{5.13}$$

olan bir $i_1 \in \mathbb{N}^+$ vardır. Diğer taraftan $\bar{y} \in D_hF(x)$ olduğundan bir $t_n \to 0^+$ ve $f_n \in F(x+t_nh)$ dizisi $y_n := \frac{f_n - V_F(x)}{t_n} \to \bar{y}$ olacak şekilde vardır. Yani $\frac{F(x+t_nh)-V_F(x)}{t_n}$ küme dizilerinin içinden $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$V_F(x+t_nh) \leq_K f_n$$

olan bir y_n vektör dizisi vardır öyle ki $y_n \to \bar{y}$ dir. $V_F(x)$'in tanımından bu eşitsizlikte her iki taraftan $V_F(x)$ çıkartıp her iki tarafı t_n'e bölersek

$$V_{Fn} := \frac{V_F(x+t_nh)-V_F(x)}{t_n} \leq_K \frac{f_n - V_F(x)}{t_n} = y_n$$

olur. Burada $V_{Fn} \to V'_F(x;h)$ olduğu açıktır. K'nın tanımladığı sıralamadan $\forall j < i_2$ için

$$\langle r_j, V_{Fn}\rangle = \langle r_j, y_n\rangle \tag{5.14}$$

ve

$$\langle r_{i_2}, V_{Fn}\rangle < \langle r_{i_2}, y_n\rangle \tag{5.15}$$

olan bir $i_2 \in \mathbb{N}$ vardır. i_1 ve i_2 için iki durumdan söz edilebilir ;

* $i_1 > i_2$ ise (5.15) eşitsizliğinde limit alırsak,

$$\lim_{n\to\infty} \langle r_{i_2}, V_{Fn}\rangle < \lim_{n\to\infty} \langle r_{i_2}, y_n\rangle$$

yani

$$\langle r_{i_2}, V'_F(x;h)\rangle < \langle r_{i_2}, \bar{y}\rangle$$

elde ederiz ki; bu, (5.12) ile çelişir.

* $i_2 > i_1$ ise (5.14) eşitsizliğinde limit alırsak

$$\lim_{n\to\infty} \langle r_{i_1}, V_{Fn} \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle r_{i_1}, y_n \rangle$$

yani

$$\langle r_{i_1}, V'_F(x;h) \rangle = \langle r_{i_1}, \bar{y} \rangle$$

elde ederiz ki; bu, (5.13) ile çelişir.

Sonuç olarak, $\bar{y} \leq_K V'_F(x;h)$ olacak şekilde bir $\bar{y}$'nin var olduğunu varsayarak; bu çelişkileri elde ettiğimiz için bu şekilde bir $\bar{y} \in D_h F(x)$ olamaz. Bu durumda

$$V'_F(x;h) \in min(D_h F(x), K)$$

olur. □

5.2 Optimallik Şartları

Bu bölümde, tanımlanan küme değerli yönlü türev için küme değerli optimizasyon problemlerinde kullanılabilecek optimallik şartları ve uygulamaları verilmiştir.

Tanım 5.2.1. *[29] X ve Y ayrılabilir gerçel Hilbert uzayları, Y kompakt tabana sahip C sıralama konisi ile sıralı bir uzay, $F : X \rightrightarrows Y$ bir küme değerli dönüşüm ve $\bar{x} \in X$ olsun. Bu durumda $\bar{x}$ en az bir $\epsilon > 0$ için*

$$(SVP) \begin{cases} min\ F(x) \\ x \in X \cap B(\bar{x}, \epsilon) \end{cases}$$

küme değerli optimizasyon probleminin bir minimalleştiricisi oluyorsa, $\bar{x}$'ye yerel minimalleştirici denir. Tanımda özel olarak F küme değerli dönüşüm yerine $f : X \to Y$ vektör değerli dönüşümü alınırsa, yukarıdaki tanım vektör değerli dönüşümler için yerel minimalleştirici tanımı olur.

Yukarıdaki tanımda küme değerli dönüşümler için yerel minimalleştirici tanımı verildi. Tanımın orjinalinde minimalleştirici $\bar{y} \in min(F(B(\bar{x}, \epsilon)), C)$ ve $\bar{y} \in F(\bar{x})$ şeklindeki $(\bar{x}, \bar{y})$ ikilisi için verilse de aslında bu çalışmada

$\bar{y} = V_F(\bar{x})$ olacağı için yani $\bar{y}$ tek olarak belirli olduğundan $\bar{x}$'ye direk olarak yerel minimalleştirici diyebiliriz.

Teorem 5.2.2'de bir vektörün vektör değerli bir optimizasyon probleminde yerel minimalleştirici olabilmesi için bir gerek şart verilmiştir.

Teorem 5.2.2. *X ve Y ayrılabilir gerçel Hilbert uzayları, Y uzayı kompakt tabana sahip bir C sıralama konisi ile sıralı, $f : X \to Y$ fonksiyonu ve*

$$(VP)\begin{cases} min\ f(x) \\ x \in X \end{cases}$$

vektör değerli optimizasyon problemi verilsin.

$\bar{x}$, (VP) probleminin bir yerel minimalleştiricisi ise, her $h \in X$ için

$$f'(\bar{x}; h) \notin -C \setminus \{0\} \tag{5.16}$$

olur.

Kanıt. $\bar{x}$ yerel minimalleştirici ise, $(\{f(\bar{x})\} - C) \cap f(X \cap B(\bar{x}, \epsilon)) = \{f(\bar{x})\}$ olacak şekilde bir $\epsilon > 0$ vardır. Bu durumda her $h \in X$ ve $t \in (0, \alpha)$ için $f(\bar{x} + th) = f(\bar{x})$ veya $f(\bar{x} + th) - f(\bar{x}) \notin -C$ olacak şekilde bir $\alpha > 0$ vardır. Her iki durumda da $f(\bar{x} + th) - f(\bar{x}) \notin -C \setminus \{0\}$ olur. $(-C \setminus \{0\})^c$ bir koni olduğundan her $t > 0$ için $\frac{f(\bar{x}+th)-f(\bar{x})}{t} \notin -C \setminus \{0\}$ bulunur. Sonuç olarak $\lim\limits_{t \to 0^+} \frac{f(\bar{x}+th)-f(\bar{x})}{t} \notin -C \setminus \{0\}$ olur. □

Teorem 5.2.2'nin bir sonucu olarak Sonuç 5.2.3'te bir vektörün küme değerli bir optimizasyon probleminde yerel minimalleştirici olabilmesi için bir gerek şart verilmiştir.

Sonuç 5.2.3. *X ve Y ayrılabilir gerçel Hilbert uzayları, Y kompakt tabana sahip bir C sıralama konisi ile sıralı, $F : X \rightrightarrows Y$ C-kapalı, C-sınırlı küme değerli dönüşüm ve bu amaç dönüşümü için C konisi ile elde edilen K tam sıralama konisine göre*

$$(SVP)\begin{cases} min\ F(x) \\ x \in X \end{cases}$$

küme değerli optimizasyon problemi verilsin. F'nin K-minimali $V_F : X \to Y$ ve $V_F(x)$ fonksiyonu $\bar{x} \in X$ noktasında yönlü türevlenebilir olsun.

$\bar{x}$, (SVP) probleminin bir yerel minimalleştiricisi ise, her $h \in X$ için

$$D_h F(\bar{x}) \subset K \tag{5.17}$$

olur.

Kanıt. Her $x \in X$ için $V_F(x) + K = F(x) + K$ olacağından (Sonuç 4.2.2) $\bar{x}$ K konisi için $F(x)$'e göre yerel minimalleştirici ise, $V_F(x)$'e göre de yerel minimalleştiricidir. V_F Teorem 5.2.2'deki f olarak düşünülürse

$$V_F'(\bar{x}; h) \notin -K \setminus \{0\} \tag{5.18}$$

olur. $(-K \setminus \{0\}) \cap K = \emptyset$ olduğundan (5.18)'de $V_F'(\bar{x}; h) \in K$ olur ve K konveks olduğundan $V_F'(\bar{x}; h) + K \subset K$ olur. $V_F'(\bar{x}; h) \in min(D_h F(\bar{x}), K)$ ve tam sıralamalarda minimallik ve güçlü minimallik denk olduğundan(Teorem 2.4.3) $D_h F(\bar{x}) \subset V_F'(\bar{x}; h) + K$ elde ederiz. Sonuç olarak; $D_h F(\bar{x}) \subset K$ olur. □

Yukarıda verilen gereklilik şartının tersinin sağlanabilmesi için koni konvekslik şartının kullanılması gereklidir. Aşağıda koni konvekslik tanımı verilmiştir.

Tanım 5.2.4. *[36] X ve Y normlu uzayları, Y bir C sıralama konisi ile kısmi sıralı olsun. $F : X \rightrightarrows Y$ küme değerli dönüşümü, her $x_1, x_2 \in X$ ve $\lambda \in (0, 1)$ için*

$$\lambda F(x_2) + (1 - \lambda) F(x_1) \subset F(\lambda x_2 + (1 - \lambda) x_1) + C$$

oluyorsa F'ye X'de C-konveks denir.

Küme değerli yönlü türevin minimallikte yeterlilik şartınının ispatında aşağıdaki özellik kullanılacaktır.

Önerme 5.2.5. *X ve Y ayrılabilir gerçel Hilbert uzayları, Y kompakt tabana sahip bir C sıralama konisi ile sıralı, $F : X \rightrightarrows Y$ C-kapalı, C-sınırlı küme değerli dönüşümü verilsin. $F(x)$ K-konveks, $F(x)$'in K-minimali $V_F(x)$ ve V_F x_1'de yönlü türevlenebilir olsun. Bu durumda her $x_2 \in X$ için*

$$F(x_2) - V_F(x_1) \subset V_F'(x_1; x_2 - x_1) + K = D_{x_2 - x_1} F(x_1) + K$$

olur.

Kanıt. $F(x)$ K-konveks olduğundan ve $V_F(x_1) \in F(x_1)$ olduğundan herhangi bir $\lambda \in (0,1)$ için

$$\lambda F(x_2) - (1-\lambda)V_F(x_1) \subset F(\lambda x_2 + (1-\lambda)x_1) + K$$

olur. $F(\lambda x_2 + (1-\lambda)x_1) + K = V_F(\lambda x_2 + (1-\lambda)x_1) + K$ olduğundan her $y \in F(x_2)$ için

$$\lambda y + (1-\lambda)V_F(x_1) \in V_F(\lambda x_2 + (1-\lambda)x_1) + K$$

olur. Bu ifadeyi düzenlersek

$$y - V_F(x_1) \in \frac{V_F(x_1 + \lambda(x_2 - x_1)) - V_F(x_1)}{\lambda} + K$$

olur. $\lambda \to 0$ için de

$$y - V_F(x_1) \in V_F'(x_1; x_2 - x_1) + K = D_{x_2 - x_1}F(x_1) + K$$

elde ederiz. Bu her $y \in F(x_2)$ için bu geçerli olduğundan

$$F(x_2) - V_F(x_1) \subset V_F'(x_1; x_2 - x_1) + K = D_{x_2 - x_1}F(x_1) + K$$

olur. □

Teorem 5.2.6'da bir vektörün bir küme değerli optimizasyon probleminin minimalleştiricisi olabilmesi için bir yeterli şart verilmiştir.

Teorem 5.2.6. *X ve Y ayrılabilir gerçel Hilbert uzayları, Y kompakt tabana sahip bir C sıralama konisi ile sıralı, $F : X \rightrightarrows Y$ C-kapalı, C-sınırlı küme değerli dönüşüm ve bu amaç dönüşümü için C konisi ile elde edilen K tam sıralama konisine göre*

$$(SVP)\begin{cases} \min\ F(x) \\ x \in X \end{cases}$$

küme değerli optimizasyon problemi verilsin. F küme değerli dönüşümünün K-minimali $V_F : X \to Y$ fonksiyonunun $\bar{x} \in X$ noktasında yönlü türevi var ve F K-konveks olsun.

Her $h \in X$ için

$$D_h F(\bar{x}) \subset K \tag{5.19}$$

ise $\bar{x}$ (SVP) probleminin bir minimalleştiricisi olur.

Kanıt. Verilen varsayımlarda $\bar{x}$ minimalleştirici olmasın. Bu durumda

$$y - V_F(\bar{x}) \in -K$$

olacak biçimde bir $x \in X$ ve $y \in F(x)$ vardır. Bu durumda ya $y = V_F(\bar{x})$ ya da $y \neq V_F(x)$ olur.

* $y = V_F(\bar{x})$ olduğu durumda kanıt biter.

* $y \neq V_F(x)$ olsun. $K \cap (-K) = \{0\}$ olduğundan ve verilen varsayımdan

  $$D_{x-\bar{x}}F(\bar{x}) \cap (-K) = \{0\}$$

  olur. F K-konveks olduğundan Önerme 5.2.5'ten

  $$F(x) - V_F(\bar{x}) \subset D_{x-\bar{x}}F(\bar{x}) + K$$

  olur. Yani

  $$y - V_F(\bar{x}) \in D_{x-\bar{x}}F(\bar{x}) + K$$

  olur. Bu durumda sıfırdan farklı bir $d \in D_{x-\bar{x}}F(\bar{x})$ için $y - V_F(\bar{x}) \in d + K$ olur. Ancak bu $d \in -K$ olduğu durumda geçerlidir. Bu ise, hipotezle çelişir.

□

Aşağıdaki örneklerde elde ettiğimiz sonuçlar basitlik açısından $\mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ küme değerli bir dönüşüm kullanılarak uygulanmıştır.

Örnek 5.2.7. *Örnek 5.1.3'de verilen $F(x) = [x^2, x^2 + 2]$ küme değerli dönüşümünde yukarıda elde ettiğimiz sonuçları görebiliriz. Küme değerli dönüşümün minimalleştiricisinin 0 olduğu açıktır. Dönüşüm $\mathbb{R}$'de tanımlı olduğu için iki yön vardır. Bu durumda 0'da 1 yönündeki türevi*

$$D_1F(0) = 2 \cdot 0 \cdot 1 + [0, \infty] = [0, \infty] \subset K$$

olur. Aynı şekilde 0'da -1 yönündeki türevi

$$D_{-1}F(0) = 2 \cdot 0 \cdot (-1) + [0, \infty] = [0, \infty] \subset K$$

olur. Bu durumda her $h \in \mathbb{R}$ için $D_hF(0) \subset K$ olduğundan Sonuç 2.3.7'deki gereklilik şartı, F K-konveks olduğundan ve her $h \in \mathbb{R}$ için $D_hF(0) \subset K$ olduğundan Teorem 5.2.6'daki yeterlilik şartı sağlanır.

Örnek 5.2.8. *$F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}^2$ küme değerli dönüşümü $C = \mathbb{R}^2_+$ sıralama konisi için $F(x) = ((|x|, x^2) + C) \cap ((|x| + 1, x^2 + 1) - C)$ olacak şekilde tanımlansın (Şekil 5.15). Bu dönüşüm sıralı aralıkla tanımlanan bir dönüşümdür. $r_1 = (1, 1)$ ve $r_2 = (-1, 1)$ vektörleri için elde edeceğimiz tam sıralama konisi*

$$K = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 + y_2 > 0\} \cup \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 + y_2 = 0 \text{ ve } y_2 - y_1 \geq 0\}$$

olur. Bu durumda $F(x)$'in K-minimali $V_F(x) = (|x|, x^2)$ olur. Teorem 5.1.6'den

$$D_hF(x) = V_F'(x; h) + C$$

olur.

Tanım kümesi $\mathbb{R}$ olduğundan bakabileceğimiz iki yön vardır. Dolayısıyla 1 yönündeki 0'daki türev

$$\begin{aligned} V_F'(0; 1) &= \lim_{t \to 0^+} \tfrac{V_F(0+t\cdot 1) - V_F(0)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0^+} \tfrac{(t, t^2)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0^+} \tfrac{t(1, t)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0^+} (1, t) \\ &= (1, 0) \end{aligned}$$

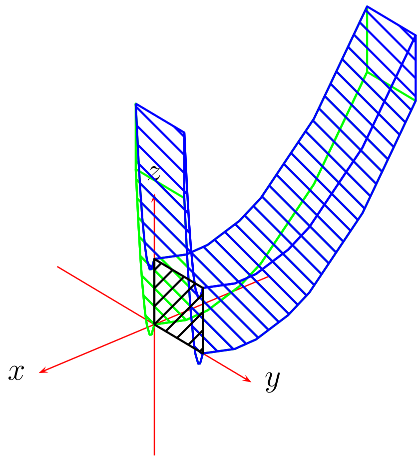
olur. -1 yönü için de aynı sonucu elde ederiz. Her iki durumda da

$$D_hF(0) = (1, 0) + C = [1, \infty) \times [0, \infty)$$

olur. Böylece açıkça görülebileceği gibi

$$D_hF(0) \subset K$$

olur. Yani 0 bu küme değerli dönüşümün minimalleştiricisidir.



Şekil 5.15: Örnek 5.2.8'da $F(x)$ küme değerli dönüşümünün grafiği

Şimdi 1'deki yönlü türevlere bakarak 1'in minimalleştirici olamayacağını gösterelim. 1'de -1 yönündeki yönlü türev

$$\begin{aligned}
V_F'(1;-1) &= \lim_{t\to 0^+} \tfrac{V_F(1+t\cdot(-1)1)-V_F(1)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0^+} \tfrac{(|1-t|,1-2t+t^2)-(1,1)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0^+} \tfrac{(-t,-2t+t^2)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0^+} \tfrac{t\cdot(-1,-2+t)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0^+} (-1,-2+t) \\
&= (-1,-2)
\end{aligned}$$

dir.

Bu durumda

$$D_{-1}F(1) = [-1,\infty) \times [-2,\infty) \not\subset K$$

olur. Sonuç 5.2.3'den 1 minimalleştirici değildir.

6 SONUÇ

Vektör optimizasyonda konilerin tanımlamış olduğu kısmi sıralamalarla ilgili pek çok çalışma mevcuttur. Bu çalışmada, kısmi sıralama konilerinin özel bir sınıfı olan tam sıralama konileri üzeride bazı yeni özellikler elde edilmiştir. Bu özelliklerden bazıları; konilerin ve verdikleri sıralamaların iç çarpımla ifadesi, optimallik şartları, minimallikle ilgili olanlardır. Tam sıralamaların bu yeni gösterimi ile de yeni bir skalerleştirici yöntem geliştirilmiştir.

Küme değerli optimizasyon, vektör değerliye göre daha yeni ve daha geniş bir sınıftır. Vektör değerli fonksiyonların bazı özellikleri, küme değerlilere genelleştirilmiştir. Bu çalışmada, kümelerin ve küme değerli dönüşümlerin vektörleştirilmesi ile bu iki kavram arasında bir köprü daha kurulmuştur. Böylece, vektör değerli fonksiyonların özelliklerinin küme değerlilere aktarılması kolaylaştırılmıştır.

Bunlara örnek olarak vektör değerli yönlü türevin küme değerliler için bir genellemesi verilmiştir. Küme değerli dönüşümler için yönlü türev daha önce Yang tarafından [36] sürekli seçimlerin (selection) yönlü türevlerinin kümesi olarak tanımlanmıştı. Ancak Yang'ın bu makalesinde özellikler ve optimallik şartları kontrol etmesi zor varsayımlarla verildiğinden uygulamaya yönelik örnek elde etmek zordur. Bu tezde verilen tanımda ise, küme değerli yönlü türevin K-minimal fonksiyonların yardımıyla kolayca elde edilebileceği örnekler sunulmuştur. Ayrıca, bu çözümler hem analitik hem de geometrik olarak yorumlanmıştır.

Bu çalışma, gelecekte de vektörleştirme ve küme değerli dönüşümlerin yönlü türevinde araç olarak kullanılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Aubin J.P., Ekeland I.:Applied Nonlinear Analysis. John Wiley and Sons,New York,1984.

[2] Aubin, J.-P.,Cellina, A., Differential Inclusions. Set-Valued Maps and Viability Theory, Grundlehren Math. Wiss., vol. 264, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[3] Aubin, J.P., Ekeland, I.,"Applied nonlinear analysis ", John Wiley and Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, and Singapore, 1984.

[4] Aubin, J.P., Frankowska, H.,"Set-valued analysis" Birkhauser, Boston, 1990.

[5] Baier, J., Jahn, J., "On subdifferentials of set-valued maps", J. Optim. Theory Appl., 100, 233-240, 1999.

[6] Bazan, F.F., "Optimality conditions in non-convex set-valued optimization", Math. Meth. Oper. Res., 53, 403-417, 2001.

[7] Bhatia, D., Mehra, A., "Lagrangian duality for preinvex set-valued functions", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 214, 599-612, 1997.

[8] Borwein J.M.: Multi-Valued Convexity and Optimization; a Unified Approach. Math. Prog., 13, p183-199, 1977.

[9] Chen G.Y., Craven B.D.: A Vector Variational Inequality and Optimization Over an Efficient Set. ZOR-Math.Meth.Oper.Res. 34, p1-12, 1990.

[10] Chen, G.Y., Jahn, J., Optimality conditions for set-valued optimization problems. Set-valued optimization, Math. Methods Oper. Res. 48 (1998)187-200.

[11] Corley, H.W.,"Optimality conditions for maximizations of set-valued functions", J. Optimi. Theory Appl., 58, 1-10, 1988.

[12] Edgeworth, F.Y., Mathematical psychics (Kegan Paul, London, 1881).

[13] M. Ehrgott, *Multicriteria Optimization*, Springer, Berlin, (2005).

[14] Götz,A., Jahn, J., "The Lagrange multiplier rule in set-valued optimization", SIAM J. Optim, 10, 331-344, 1999.

[15] Hernández, E., Rodríguez-Marín, L., "Nonconvex scalarization in set optimization with set-valued maps" J. Math. Anal. Appl. 325 (2007) pp.1-18.

[16] Hernández, E., Marin, L.R., "Lagrangian duality in set-valued optimization ", *J. Optim. Theory Appl.*, **134**, 119-134, 2007.

[17] Hurwicz, L., "Programming in linear spaces" (ed. Arrow, K.J., Hurwicz, L., Uzawa, H.), Studies in linear and nonlinear programming (Stanford University Press, Stanford, 1958), pp.38-102.

[18] Jahn, J., Rauh, R.,"Contingent epiderivatives and set-valued optimization" Math. Meth. Oper. Res., 46, 193-211, 1997.

[19] J. Jahn, *Vector Optimization*, Springer, Heidelberg, (2004).

[20] Jeyakumar, V. ve Yang, X.Q.,"First and Second-Order Optimality Conditions for Convex Composite Multiobjective Optimization", J. Optim. Theory Appl., 95, 209-224, 1997.

[21] Jinghui, Q., "Cone directed contingent derivatives and generalized preinvex set-valued optimization", Acta Mathematica Scientia, 27B, 211-218, 2007.

[22] Kasimbeyli, R.N., "Radial epiderivatives and set-valued optimizaiton", Optimization, 58, 521-534, 2009.

[23] Kirsch, A., Wadth, W. and Werner, J., Notwendige Optimalitätsbedingungen und ihre Anwendung, Sprinter, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems No. 152, Berlin, Germany, 1978.

[24] Klein, E., Thompson, A.C., Theory of correspondences. Including applications to mathematical economics, Canad. Math. Soc. Ser. Monographs Adv. Texts, Wiley and Sons, New York, 1984.

[25] Koopmans, T.C., "Analysis of production as an efficient combinations of activities", in: Koopmans, T.C. (ed.), Activity analysis of production and allocation (Wiley, New York,1951), pp.33-97.

[26] Kuhn, H.W., Tucker, A.V., "Nonlinear programming", in: Neyman, J. (ed.), Proceedings of second Berkeley Symposium on mathematical Statistics and Probability (University of California Press, Berkeley, 1951), pp.481-492

[27] D. Kuroiwa, Some duality theorems of set-valued optimization with natural criteria, Proceedings of the International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis, World Scientific, River Edge, NJ (1999), pp. 221-228.

[28] Dinh The Luc, *Theory of Vector Optimization*, Springer, Berlin,(1989),

[29] Luc D.T.: Contingent Derivatives of Set-Valued Maps and Applications to Vector Optimizations. Math. Prog., 50, 99-111, 1991.

[30] Pareto V., Cours d'economie politique (F. Rouge, Lausanne, 1896).

[31] Penot, J.P., "L'optimisation à la Pareto : Deux ou trois choses que je sais d'elle" publications Mathématiques de Pau, Paris, France, 1978.

[32] Sawaragi Y., Nakayama H., Tanino T.: Theory of Multiobjective Optimisation. Academic Press Inc. Orlando, Florida, 1985.

[33] Taa, A., "Subdifferentials of multifunctions and Lagrange multipliers for multiobjective optimization", J. Math. Anal. Appl., 283, 398-415, 2003.

[34] Thibault L.:Subdifferentials of Nonconvex Vector-Valued Functions. J. Math. Anal. Appl., 86, p319-344, 1982.

[35] Yang, X.Q.,"A hahn-banach theorem in ordered linear spaces and its applications", Optimization, 25, 1-9, 1992.

[36] Yang X.Q.: Directional Derivatives for Set-Valued Mappings and Applications. Math. Meth. Oper. Res., 48, p273-285, 1998.

[37] Valadir, M.,"Sous-differentiabilite de fonctions convexes a valeurs dans un espace vectoriel ordonne", Math. Scand., 30, 65-72, 1972.

[38] Vogel, W., Vectoroptimierung in Producträumen, Anton Hain, Meisenheim am Glan, Germany, 1977.

[39] Zowe J.: Subdifferentiability of Convex Functions With Values in Ordered Vector Spaces. Math. Scand., 34, p64-83, 1974.

Bu tezden çıkan makaleler aşağıda verilmiştir:

[40] Küçük M, Soyertem M. ve Küçük Y., "On Constructing Total Orders and Solving Vector Optimization Problems with Total Orders", J Glob Optim, 50,2,235-247, 2011

[41] Küçük M., Soyertem M. ve Küçük Y., "On the Scalarization of Set-valued Optimization Problems with respect to Total Ordering Cones",Operations Research Proceedings 2010, Springer, Heidelberg, 347-352, (DOI: 10.1007/978-3-642-20009-0), 2011

[42] Küçük M., Soyertem M., Küçük Y. and Atasever, İ.,"Vectorization of Set-Valued Maps With Respect to Total Ordering Cones and Its Applications to Set Valued Optimization Problems", Journal of Mathematical Analysis and Applications (JMAA) , (DOI:10.1016/j.jmaa.2011.06.045), 2011.

[43] Küçük M., Soyertem M., Küçük Y., "The Generalization Of Total Ordering Cones And Vectorization To Separable Hilbert Spaces", Journal of Mathematical Analysis and Applications(JMAA), (DOI:10.1016/j.jmaa.2012.01.017), 2012