ARALIK MATRİS OYUNLAR ve ÇÖZÜMLERİ

Melek ÖZTÜRK
Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Nisan - 2012

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Melek ÖZTÜRK'ün **"Aralık Matris Oyunlar ve Çözümleri"** başlıklı **Matematik** Anabilim Dalındaki, Yüksek Lisans Tezi 05.04.2012 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

		Adı Soyadı	**İmza**
Üye (Tez Danışmanı)	**:**	**Doç. Dr. SERKAN ALİ DÜZCE**	....
Üye	**:**	**Doç. Dr. AHMET BEKİR**	....
Üye	**:**	**Yard. Doç. Dr. BURHAN DOĞAN**	....

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ARALIK MATRİS OYUNLAR ve ÇÖZÜMLERİ

Melek Öztürk

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Serkan Ali Düzce
2012, 71 sayfa

Bu çalışmada öncelikle iki kişilik sıfır toplamlı sonlu oyunlar incelenmiş ve temel tanım ve teoremler verilmiştir. Aralık tanımı ve aralıklar ile ilgili temel aritmetik işlemler ifade edilmiş ayrıca aralık karşılaştırması için bir sıralama bağıntısı tanımlanmıştır. Getirilerin aralık değerli olduğu aralık matris oyunlar tanımlanmış ve aralık matris oyunların çözümleri incelenmiştir. Denge noktası olan aralık matris oyunlarda çözüm bir örnek yardımıyla gösterilmiş, denge noktası olmayan aralık matris oyunlar için iki çözüm yöntemi verilmiş ve elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler : Matris oyunlar, Denge noktası, Aralık analizi, Aralık matris oyunlar

ABSTRACT

Master of Science Thesis

INTERVAL MATRIX GAMES
and THEIR SOLUTIONS

Melek Öztürk

Anadolu University
Graduate School of Sciences
Mathematics Program

Supervisor: **Assoc. Prof. Dr. Serkan Ali DÜZCE**
2012, 71 pages

In this study, firstly two person zero-sum games are examined and fundamental definitions and theorems are given. Definition of interval and basic arithmetic operations about intervals are expressed also an order relation for comparing intervals is defined. Interval matrix games in which payoffs are intervals are defined and solutions of interval matrix games are examined. Solution of interval matrix games which have an equilibrium point is presented with the help of an example, two solution methods for matrix games without an equilibrium point are given and obtained solutions are compared.

Keywords : Matrix games, Equilibrium point, Interval analysis, Interval matrix games

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Doç. Dr. Serkan Ali DÜZCE'ye,

Yüksek lisans öğrenimim boyunca bana her konuda destek olan sevgili arkadaşım Arş. Gör. Ömer Faruk DOĞAN'a,

Hayatım boyunca maddi ve manevi destekleriyle hep yanımda olan sevgili ailem annem, babam ve ağabeyim Sait ÖZTÜRK'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Melek ÖZTÜRK

Nisan 2012

İÇİNDEKİLER

ÇİZELGELER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathrm{I_i}$	:	I. oyuncunun i. saf stratejisi
$\mathrm{II_j}$	:	II. oyuncunun j. saf stratejisi
g_{ij}	:	$\mathrm{I_i}$ ve $\mathrm{II_j}$ stratejisine karşılık I. oyuncunun getirisi
$\mathbf{G}$	:	matris oyunun getiri matrisi
$\tilde{\mathbf{G}}$	:	aralık matris oyunun getiri matrisi
$\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_m)$	:	I. oyuncunun karma stratejisi
$\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$	:	II. oyuncunun karma stratejisi
X_m	:	I. oyuncunun karma stratejiler kümesi
Y_n	:	II. oyuncunun karma stratejiler kümesi
$\|\mathbf{x}\|$	:	$\mathbf{x}$ in öklid normu
$g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$	:	$\mathbf{x} \in X_m,\ \ \mathbf{y} \in Y_n$ karma stratejilerine karşılık oyunun getirisi
$\mathbf{y}^T$	:	$\mathbf{y}$ vektörünün transpozu
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	:	iç çarpım
ν	:	matris oyunun değeri
$\mathrm{I_l} \geq \mathrm{I_s}$	:	$\mathrm{I_l}$ stratejisi $\mathrm{I_s}$ stratejisine baskın
$\mathrm{I_l} > \mathrm{I_s}$	:	$\mathrm{I_l}$ stratejisi $\mathrm{I_s}$ stratejisine kesin baskın
$\tilde{A}$	:	A aralığı
$\underline{a}$	:	$\tilde{A}$ aralığının alt sınırı
$\bar{a}$	:	$\tilde{A}$ aralığının üst sınırı
$m(\tilde{A})$	:	$\tilde{A}$ aralığının orta noktası
$r(\tilde{A})$	:	$\tilde{A}$ aralığının yarıçapı
$I(\mathbb{R})$	:	$\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı tüm aralıklar kümesi
$w(a)$	:	$\tilde{A}$ aralığının genişliği
$\tilde{A} \preceq \tilde{B}$	:	$\tilde{A}$ aralığı $\tilde{B}$ aralığından küçüktür
$\tilde{A} \succeq \tilde{B}$	:	$\tilde{A}$ aralığı $\tilde{B}$ aralığından büyüktür
$\tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$	:	$\mathbf{x} \in X_m,\ \ \mathbf{y} \in Y_n$ karma stratejilerine karşılık aralık matris oyunun getirisi

1 GİRİŞ

Oyun Teorisi, John von Neumann'ın 1928 yılında yayınladığı bir makale ve 1944 yılında Oskar Morgenstern ile birlikte yayınladıkları Oyunlar Teorisi ve Ekonomik Davranış isimli kitabı ile hız kazanmıştır. Mücadele içeren olaylar yani oyunlar hakkında daha önceleri bazı gelişmeler olsa da oyun teorisi hakkındaki ciddi çalışmaların bu kitap sayesinde başladığı söylenebilir. Daha sonra J.F. Nash 1950-1953 yılları arasında yayınladığı dört çalışma ile oyun teorisinin gelişimine önemli katkılarda bulunmuş, hem rekabetçi hem de işbirlikçi oyunlarda kullanılabilecek bir denge kavramını ortaya koymuştur. Diğer birçok bilim adamının katkılarıyla oyun teorisi günümüzde sosyal bilimler (özellikle ekonomi), biyoloji, fizik, mekanik, mühendislik ve bilgisayar bilimleri gibi bilimin pek çok farklı alanında kullanılan, uygulamalı matematiğin gelişmiş dallarından biri haline gelmiştir.

Oyun teorisi, rekabet veya işbirliği ilişkisi içerisinde verilebilecek en doğru karar veya kararların ne olduğunu matematiksel yöntemlerle inceleyen bir bilim dalıdır ve karar alma sistemlerinde oldukça önemli bir role sahiptir. Gündelik hayatta aldığımız sıradan kararlar bile bu teorinin önemini bir kez daha vurgulamaktadır. Oyun teorisinin uygulama alanı oldukça geniş bir yer kapladığından akla gelebilecek sorulardan biri de elde olan verilerin kesin değerli olmadığı bir belirsizlik durumunun bu matematiksel modele nasıl uygulanabileceğidir.

Bu çalışmada öncelikle oyun teorisinin önemli kavramlarından olan ve birinin kazancının diğerinin kaybına eşit olduğu iki kişilik sıfır toplamlı sonlu oyunlar yani matris oyunlar ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir. İki kişilik sıfır toplamlı sonlu oyunların her zaman çözümü olduğu gösterilmiş ve denge noktası olan oyunlar için çözüm kavramı bir örnek ile incelenmiştir. Daha sonra denge noktası olmayan $m \times n$ matris oyunlar için lineer programlama yardımıyla bir çözüm yöntemi verilmiş ve ikinci bölüm bu çözüm yöntemiyle sonlandırılmıştır.

Klasik matris oyun tanımında getirilerin kesin olarak bilindiği varsayılır. Gerçek yaşam uygulamalarında ise getirilerin sadece belli bir aralıkta değiştiğinin bilindiği durumlar ortaya çıkabilir. Bu belirsizlik durumunda getiriler aralık değerli olacağından matematiksel model olarak aralık matris oyunlar kullanılır. Bu çalışmanın amacı klasik matris oyunları aralık matris oyunlara genişletmektir. Bu amaçla üçüncü bölümde aralık tanımı ve aralıklar için özellikler verilmiş, aralık matris oyunlar tanıtılmış ve aralık matris oyunların çözümü incelenmiştir. Günümüzde aralık matris oyunların çözümü için geliştirilmiş birkaç yöntem olmakla birlikte bu konuda çalışmalar sürdürülmektedir.

2 OYUN TEORİSİ İLE İLGİLİ TEMEL KAVRAMLAR

2.1 İki Kişilik Sıfır Toplamlı Sonlu Oyunlar

Oyun teorisinin önemli kavramlarından olan iki kişilik sıfır toplamlı sonlu oyunlar, sonlu stratejiye sahip iki oyuncunun rekabet durumunda kendileri için en iyi stratejiyi belirleme yöntemidir. Oyunun sıfır toplamlı olması, oyuncuların getirilerinin toplamının sabit bir sayı olması anlamına gelmektedir. Kolayca gösterilebilir ki bu sabit sayı her zaman sıfır olarak alınabilir. Böylece sıfır toplamlı oyun tanımlanırken, oyuncuların getirileri toplamının sıfır olduğu kabul edilir. Başka bir deyişle, oyunculardan birinin kazancı diğerinin kaybına eşittir.

I. oyuncunun strateji sayısı m, II. oyuncunun strateji sayısı n ise bu tip oyunlar $m \times n$ *oyun* olarak adlandırılır. Böylece iki kişilik sıfır toplamlı sonlu oyunlara kısaca ***matris oyunlar*** denir.

I. oyuncunun m saf stratejisi $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, ..., \mathrm{I}_m$ ve II. oyuncunun n saf stratejisi $\mathrm{II}_1, \mathrm{II}_2, ..., \mathrm{II}_n$ olmak üzere,

$$\mathbf{G} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \mathrm{II}_1 & \mathrm{II}_2 & \dots & \mathrm{II}_n \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{I}_1 \\ \mathrm{I}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{I}_m \end{array} & \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1} & g_{m2} & \dots & g_{mn} \end{pmatrix} \end{array} \tag{2.1.1}$$

matrisine oyunun ***getiri matrisi*** denir. Burada g_{ij}, I. oyuncu I_i stratejisi ve II. oyuncu II_j stratejisiyle oynadığında I. oyuncunun getirisini göstermektedir. Oyun sıfır toplamlı olduğundan II. oyuncunun getirisi $-g_{ij}$ dir. Yani I. oyuncu g_{ij} kadar kazanırken, II. oyuncu g_{ij} kadar kaybeder. Bu yüzden I. oyuncu g_{ij} getirilerini maksimalleştirmeye çalışırken, II. oyuncu minimalleştirmeye çalışır.

2.1.1 Saf Stratejiler ve Oyunun Değeri

İki kişilik sıfır toplamlı sonlu bir oyunda, $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, ..., \mathrm{I}_m$ ve $\mathrm{II}_1, \mathrm{II}_2, ..., \mathrm{II}_n$ saf stratejileri için oyunun değerini ve oyuncuların seçebilecekleri en iyi stratejiler olarak yorumlanan optimal saf strateji kavramını tanımlayalım.

Tanım 2.1.1. *Getiri matrisi* (2.1.1) *ile verilen oyunda, oyunun saf stratejilerdeki alt ve üst değeri sırasıyla,*

$$V_L^S = \max_{i=1,2,...,m} \min_{j=1,2,...,n} g_{ij} \qquad ve \qquad V_U^S = \min_{j=1,2,...,n} \max_{i=1,2,...,m} g_{ij}$$

olarak tanımlanır. Eğer,

$$V_U^S = V_L^S = V$$

olacak şekilde bir V sayısı varsa, V'ye oyunun saf stratejilerdeki değeri denir.

Tanım 2.1.2.

$$\min_{j=1,2,...,n} g_{i_*j} = \max_{i=1,2,...,m} \min_{j=1,2,...,n} g_{ij} = V_L^S$$

koşulunu sağlayan I_{i_*} *stratejisine,* I. *oyuncunun optimal saf stratejisi ve*

$$\max_{i=1,2,...,m} g_{ij_*} = \min_{j=1,2,...,n} \max_{i=1,2,...,m} g_{ij} = V_U^S$$

koşulunu sağlayan II_{j_*} *stratejisine,* II. *oyuncunun optimal saf stratejisi denir.*

Burada,

$$\min_{j=1,2,...,n} g_{i_*j} = V_L^S$$

olduğundan keyfi bir $j = 1, 2, ..., n$ için $g_{i_*j} \geq V_L^S$ olur. Yani, II. oyuncu hangi stratejisiyle oynarsa oynasın, I. oyuncu optimal stratejisiyle oynadığı takdirde her durumda en az V_L^S kadar kazanır. Ayrıca,

$$\max_{i=1,2,...,m} g_{ij_*} = V_U^S$$

olduğundan keyfi bir $i = 1, 2, ..., m$ için $g_{ij_*} \leq V_U^S$ olur. Yani, II. oyuncu optimal stratejisiyle oynadığında en fazla V_U^S kadar kaybeder. Eğer oyunculardan herhangi biri oyunda optimal olmayan stratejisini kullanırsa, diğer oyuncu bu oyuncunun kazancını azaltabilir. Bu yüzden, optimal saf stratejiler oyuncuların seçebilecekleri en iyi stratejilerdir.

Şimdi saf stratejiler sınıfında oyunun değerinin olmayabileceğine ilişkin bir örnek verelim.

Örnek 2.1.3.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \mathrm{II}_1 & \mathrm{II}_2 \end{array} \\ \mathbf{G} = \begin{array}{c} \mathrm{I}_1 \\ \mathrm{I}_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

getiri matrisi ile verilen 2×2 *oyunu ele alalım. Oyunun değerinin olup olmadığını belirlemek için alt ve üst değerlerini bulalım:*

$$\begin{aligned} V_L^S = \max_{i=1,2} \min_{j=1,2} g_{ij} &= \max\left\{ \min_{j=1,2} g_{1j}, \min_{j=1,2} g_{2j} \right\} \\ &= \max\{-1, -\tfrac{1}{2}\} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

üst değeri ise,

$$\begin{aligned} V_U^S = \min_{j=1,2} \max_{i=1,2} g_{ij} &= \min\left\{ \max_{i=1,2} g_{i1},\ \max_{i=1,2} g_{i2} \right\} \\ &= \min\{0, 0\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. $V_U^S \neq V_L^S$ *olduğundan oyunun saf stratejiler sınıfında değeri yoktur.*

Şimdi strateji kümesi, karma stratejilere genişletildiğinde oyunun değerinin ve çözümünün olup olmadığını açıklayalım.

2.1.2 Karma Stratejiler ve Oyunun Değeri

İki kişilik sıfır toplamlı bir $m \times n$ oyunu ele alalım.

Tanım 2.1.4. *Keyfi bir* $i = 1, 2, ..., m$ *için* $x_i \geq 0$ *ve* $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$ *olacak şekilde m-boyutlu* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_m)$ *vektörüne* I. *oyuncunun* ***karma stratejisi*** *denir.* I. *oyuncunun karma stratejileri kümesi* X_m *ile gösterilir. Bir başka deyişle*

$$X_m = \left\{ \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_m) : \forall i = 1, 2, .., m \text{ için } x_i \geq 0 \text{ ve } \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \right\}$$

olur.

Tanım 2.1.5. *Keyfi bir* $j = 1, 2, ..., n$ *için* $y_j \geq 0$ *ve* $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$ *olacak şekilde n-boyutlu* $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ *vektörüne* II. *oyuncunun* ***karma stratejisi*** *denir.*

II. *oyuncunun karma stratejileri kümesi* Y_n *ile gösterilir. Yani,*

$$Y_n = \left\{ \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, ..., y_n) : \forall j = 1, 2, .., n \text{ için } y_j \geq 0 \text{ ve } \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \right\}$$

dir.

I. oyuncunun oyunda $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_m) \in X_m$ karma stratejisini seçerek oynaması, I_1 stratejisini x_1 olasılığı ile, I_2 stratejisini x_2 olasılığı ile, I_i stratejisini x_i olasılığı ile oynaması anlamına gelmektedir. Yani, oyun s kez oynandığında, I. oyuncunun $s \cdot x_i$ kez I_i stratejisi ile oynadığı anlaşılır. II. oyuncunun $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n) \in Y_n$ karma stratejisi de benzer şekilde yorumlanabilir. Açıktır ki, sadece i. bileşeni 1 olan $\mathbf{x} = (0, ..., 0, 1, 0..., 0) \in X_m$ karma stratejisi, I_i saf stratejisine denk olur. Tersine I. oyuncunun oyunda sadece I_i stratejisini kullanması $\mathbf{x} = (0, ..., 0, 1, 0..., 0)$ karma stratejisiyle oynaması anlamına gelmektedir.

Önerme 2.1.6. I. *oyuncunun* $X_m \subset \mathbb{R}^m$ *ve* II. *oyuncunun* $Y_n \subset \mathbb{R}^n$ *karma strateji kümeleri kompakt ve konveks kümelerdir.*

Kanıt. Öncelikle $X_m \subset \mathbb{R}^m$ kümesinin kompakt olduğunu gösterelim. Bunun için sınırlı ve kapalı olduğunu göstermek yeterlidir.

Keyfi bir $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_m) \in X_m$ alalım. Böylece keyfi $i = 1, 2, ..., m$ için $x_i \geq 0$ ve $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i = 1$ olduğundan,

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_m^2} \leq x_1 + x_2 + ... + x_m = 1$$

olur. O halde keyfi $\mathbf{x} \in X_m$ için $\|\mathbf{x}\| \leq 1$ olduğundan X_m sınırlı bir kümedir.

Şimdi X_m kümesinin kapalı küme olduğunu gösterelim. Bunun için $\mathbf{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_m^{(k)}) \in X_m$ $(k = 1, 2, ...)$ dizisini alalım. $k \to \infty$ iken $\mathbf{x}^{(k)} \to \mathbf{x}^{(*)} = (x_1^{(*)}, x_2^{(*)}, ..., x_m^{(*)})$ olsun. $\mathbf{x}^{(*)} \in X_m$ olduğunu gösterelim.

$k \to \infty$ iken $\mathbf{x}^{(k)} \to \mathbf{x}^{(*)}$ olduğundan keyfi $i = 1, 2, ..., m$ için $k \to \infty$ iken $x_i^{(k)} \to x_i^{(*)}$ olur. Keyfi $k = 1, 2, ...$ için $x_i^{(k)} \geq 0$ ve $k \to \infty$ iken $x_i^{(k)} \to x_i^{(*)}$ olduğundan $x_i^{(*)} \geq 0$ olur.

$\mathbf{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_m^{(k)}) \in X_m$ olduğundan $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^{(k)} = 1$ dir. Her $k = 1, 2, ...$ için $k \to \infty$ iken $x_i^{(k)} \to x_i^{(*)}$ olduğundan,

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^{(*)} = 1$$

olur. Keyfi $i = 1, 2, ..., m$ için $x_i^{(*)} \geq 0$ ve $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^{(*)} = 1$ olduğundan $\mathbf{x}^{(*)} = (x_1^{(*)}, x_2^{(*)}, ..., x_m^{(*)}) \in X_m$ olduğu elde edilir. Böylece X_m kümesi kapalı kümedir. Sonuç olarak, X_m karma strateji kümesi kapalı ve sınırlı olduğundan kompakt bir kümedir.

Şimdi X_m kümesinin konveks küme olduğunu gösterelim. Keyfi $\mathbf{x}^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, ..., x_m^{(1)})$, $\mathbf{x}^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, ..., x_m^{(2)}) \in X_m$ alalım. $\lambda \in [0, 1]$ için $\lambda \mathbf{x}^{(1)} + (1 - \lambda)\mathbf{x}^{(2)} \in X_m$ olduğunu kanıtlayalım. Açıktır ki,

$$\lambda \mathbf{x}^{(1)} + (1 - \lambda)\mathbf{x}^{(2)} = (\lambda x_1^{(1)} + (1 - \lambda)x_1^{(2)}, ..., \lambda x_m^{(1)} + (1 - \lambda)x_m^{(2)})$$

dir. Ayrıca, $\mathbf{x}^{(1)} \in X_m$ ve $\mathbf{x}^{(2)} \in X_m$ olduğundan keyfi $i = 1, 2, ..., m$ için $x_i^{(1)} \geq 0$, $x_i^{(2)} \geq 0$ olur. O halde keyfi $i = 1, 2, ..., m$ için

$$\lambda x_i^1 + (1 - \lambda)x_i^2 \geq 0$$

eşitsizliği sağlanır. $\mathbf{x}^{(1)} \in X_m$ ve $\mathbf{x}^{(2)} \in X_m$ olduğundan

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^{(1)} = 1, \quad \sum_{i=1}^{m} x_i^{(2)} = 1$$

eşitlikleri geçerlidir. O halde

$$\sum_{i=1}^{m} [\lambda x_i^{(1)} + (1 - \lambda)x_i^{(2)}] = \sum_{i=1}^{m} \lambda x_i^{(1)} + \sum_{i=1}^{m} (1 - \lambda)x_i^{(2)} = \lambda + (1 - \lambda) = 1$$

olur. Böylece,

$$\lambda \mathbf{x}^{(1)} + (1 - \lambda)\mathbf{x}^{(2)} \in X_m$$

olduğu bulunur. Yani, X_m konveks bir kümedir.

Benzer şekilde Y_n kümesinin de kompakt ve konveks küme olduğu gösterilebilir. $\square$

Tanım 2.1.7. *Getiri matrisi*

$$\mathbf{G} = \begin{array}{c} \\ \mathrm{I}_1 \\ \mathrm{I}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{I}_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathrm{II}_1 & \mathrm{II}_2 & \dots & \mathrm{II}_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1} & g_{m2} & \dots & g_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

ile verilen oyunda I. *ve* II. *oyuncu sırasıyla,*

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_m) \in X_m \quad ve \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n) \in Y_n$$

karma stratejileri ile oynuyor olsun. Bu durumda ***oyunun getirisi****,*

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_i g_{ij} y_j$$

olarak tanımlanır.

Denk bir ifadeyle

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} G \mathbf{y}^T = \langle \mathbf{x}\mathbf{G}, \mathbf{y} \rangle$$

yazılabilir. Burada $\mathbf{y}^T$ vektörü, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n) \in Y_n \subset \mathbb{R}^n$ vektörünün transpozunu ve $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ise iç çarpımı göstermektedir.

Açıktır ki, I. oyuncu $\mathbf{x}^* = (0, 0, ..., 0, 1, 0, ..., 0) \in X_m$ karma stratejisi ile, yani I_i saf stratejisi ile, II. oyuncu ise $\mathbf{y}^* = (0, 0, ..., 0, 1, 0, ..., 0) \in Y_n$ karma stratejisi ile, yani II_j saf stratejisi ile oynarsa,

$$g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_i g_{ij} y_j = g_{ij}$$

olur. Bu değer, I. oyuncunun i. saf stratejisi, II. oyuncunun j. saf stratejisi ile oynadığında I. oyuncunun elde edeceği getiridir.

Şimdi oyunun karma stratejilerdeki alt değerini, üst değerini ve değerini tanımlayalım. Getiri matrisi (2.1.1) ile verilen oyunda, I. oyuncu $\mathbf{x} \in X_m$ karma stratejilerini seçerek $g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ getirisini arttırmaya, II. oyuncu ise $\mathbf{y} \in Y_n$ stratejilerini seçerek $g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ getirisini azaltmaya çalışır. Böylece oyunun alt ve üst değeri şu şekilde tanımlanır:

Tanım 2.1.8.

$$V_L = \max_{\mathbf{x}\in X_m} \min_{\mathbf{y}\in Y_n} g(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

sayısına oyunun alt değeri,

$$V_U = \min_{\mathbf{y}\in Y_n} \max_{\mathbf{x}\in X_m} g(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

sayısına da oyunun üst değeri denir.

Önerme 2.1.9. *Getiri matrisi* (2.1.1) *ile verilen herhangi bir matris oyunda,*

$$V_L \leq V_U$$

eşitsizliği geçerlidir.

Kanıt. Keyfi bir $\mathbf{x}^* \in X_m$ ve $\mathbf{y}^* \in Y_n$ için,

$$\min_{\mathbf{y}\in Y_n} g(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}) \leq g(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)$$

olduğu açıktır. Bu eşitsizlikten

$$\max_{\mathbf{x}\in X_m} \min_{\mathbf{y}\in Y_n} g(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leq \max_{\mathbf{x}\in X_m} g(\mathbf{x},\mathbf{y}^*) \tag{2.1.2}$$

olduğu elde edilir. (2.1.2) eşitsizliği keyfi $\mathbf{y}^* \in Y_n$ için geçerli olduğundan,

$$\max_{\mathbf{x}\in X_m} \min_{\mathbf{y}\in Y_n} g(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leq \min_{\mathbf{y}\in Y_n} \max_{\mathbf{x}\in X_m} g(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

olduğu bulunur. Yani

$$V_L \leq V_U$$

olur. □

Tanım 2.1.10. V_L *oyunun alt değeri ve* V_U *da üst değeri olmak üzere,*

$$V_L = V_U = \nu$$

oluyorsa oyunun değeri vardır ve ν *sayısına* ***oyunun değeri*** *denir.*

İki kişilik sıfır toplamlı oyun teorisinin temelini atan ve gelişiminde önemli bir rol oynayan John von Neumann 1928 yılında yayımladığı bir makalede, karma stratejiler sınıfında sıfır toplamlı oyunların değerinin olduğunu ifade ve ispat etmiştir.

Teorem 2.1.11 (John von Neumann). *İki kişilik sıfır toplamlı sonlu oyunlarda*

$$V_L = V_U = \nu$$

eşitliği her zaman geçerlidir. Yani, iki kişilik sıfır toplamlı sonlu oyunun karma stratejiler sınıfında değeri vardır.

2.1.3 Optimal Stratejiler ve Çözüm Kavramı

Tanım 2.1.12.

$$\min_{\mathbf{y}\in Y_n} g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) = \max_{\mathbf{x}\in X_m} \min_{\mathbf{y}\in Y_n} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \nu$$

olacak biçimdeki $\mathbf{x}^* \in X_m$ *stratejisine* I. *oyuncunun optimal stratejisi,*

$$\max_{\mathbf{x}\in X_m} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) = \min_{\mathbf{y}\in Y_n} \max_{\mathbf{x}\in X_m} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \nu$$

olacak biçimdeki $\mathbf{y}^* \in Y_n$ *stratejisine* II. *oyuncunun optimal stratejisi denir.*

Böylelikle, I. oyuncu, $\mathbf{x}^* \in X_m$ optimal stratejisiyle oynarsa,

$$\min_{\mathbf{y}\in Y_n} g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) = \nu$$

olduğundan en az ν kadar kazancı garantilemiş olur. II. oyuncu da,

$$\max_{\mathbf{x}\in X_m} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) = \nu$$

olduğundan $\mathbf{y}^* \in Y_n$ optimal stratejisiyle oynadığında en çok ν kadar kaybeder.

Tanım 2.1.13. I. *oyuncunun optimal stratejisi* $\mathbf{x}^* \in X_m$, II. *oyuncunun optimal stratejisi* $\mathbf{y}^* \in Y_n$ *ve* ν *oyunun değeri olmak üzere,*

$$(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \nu)$$

*üçlüsüne **oyunun çözümü** denir.*

Teorem 2.1.14. *İki kişilik sıfır toplamlı sonlu oyunun her zaman çözümü vardır.*

Kanıt. Teorem 2.1.11 gereği iki kişilik sıfır toplamlı sonlu bir oyunun her zaman değeri vardır, yani aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$\min_{\mathbf{y}\in Y_n} \max_{\mathbf{x}\in X_m} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{\mathbf{x}\in X_m} \min_{\mathbf{y}\in Y_n} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \nu$$

$X_m \subset \mathbb{R}^m$ ve $Y_n \subset \mathbb{R}^n$ kompakt küme, $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : X_m \times Y_n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (x, y) ye göre sürekli olduğundan,

$$\min_{\mathbf{y} \in Y_n} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : X_m \to \mathbb{R}, \quad \max_{\mathbf{x} \in X_m} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : Y_n \to \mathbb{R}$$

fonksiyonları sürekli fonksiyonlardır.

$X_m \subset \mathbb{R}^m$ kompakt küme ve $\min\limits_{\mathbf{y} \in Y_n} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : X_m \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olduğundan,

$$\min_{\mathbf{y} \in Y_n} g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) = \max_{\mathbf{x} \in X_m} \min_{\mathbf{y} \in Y_n} g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

olacak şekilde $\mathbf{x}^* \in X_m$ vardır. Optimal strateji tanımı gereği, $\mathbf{x}^* \in X_m$ stratejisi I. oyuncunun optimal stratejisi olur.

Benzer olarak $Y_n \subset \mathbb{R}^n$ kompakt küme ve $\max\limits_{\mathbf{x} \in X_m} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : Y_n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olduğundan,

$$\max_{\mathbf{x} \in X_m} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) = \min_{\mathbf{y} \in Y_n} \max_{\mathbf{x} \in X_m} g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

olacak şekilde $\mathbf{y}^* \in Y_n$ vardır. Yine tanım gereği, $\mathbf{y}^* \in Y_n$ stratejisi II. oyuncunun optimal stratejisi olur.

Sonuç olarak, $\mathbf{x}^* \in X_m$ ile $\mathbf{y}^* \in Y_n$ stratejileri sırasıyla I. ve II. oyuncunun optimal stratejileri ve ν oyunun değeri olduğundan $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \nu)$ üçlüsü oyunun çözümü olur. □

Ayrıca, $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \nu_1)$ ve $(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2, \nu_2)$ verilen oyunun çözümleri ise

$$\nu_1 = \nu_2$$

olduğu açıktır.

Şimdi, $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \nu)$ üçlüsünün oyunun çözümü olması için gerek ve yeter koşulu verelim.

Teorem 2.1.15. $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \nu)$ *nin oyunun çözümü olması için gerek ve yeter koşul*

$$\textit{keyfi} \quad \mathbf{y} \in Y_n \quad \textit{için} \quad g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \geq \nu \tag{2.1.3}$$

$$\textit{keyfi} \quad \mathbf{x} \in X_m \quad \textit{için} \quad g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq \nu \tag{2.1.4}$$

olmasıdır.

Kanıt. $(\Rightarrow)$: $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \nu)$ verilen oyunun çözümü olsun. O halde $\mathbf{x}^* \in X_m$, I. oyuncunun optimal stratejisi olur ve tanımdan

$$\min_{\mathbf{y}\in Y_n} g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) = \max_{\mathbf{x}\in X_m} \min_{\mathbf{y}\in Y_n} g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

dir. ν oyunun değeri olduğundan,

$$\min_{\mathbf{y}\in Y_n} g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) = V_L = \nu$$

olur. Son eşitlikten keyfi $\mathbf{y} \in Y_n$ için $g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \geq \nu$ elde edilir.

Benzer olarak $\mathbf{y}^* \in Y_n$ stratejisi de II. oyuncunun optimal stratejisi olur ve tanımdan

$$\max_{\mathbf{x}\in X_m} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) = \min_{\mathbf{y}\in Y_n} \max_{\mathbf{x}\in X_m} g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

dir. Buradan,

$$\max_{\mathbf{x}\in X_m} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) = V_U = \nu$$

bulunur. Böylece keyfi $\mathbf{x} \in X_m$ için $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq \nu$ elde edilir.

$(\Leftarrow)$: Şimdi (2.1.3) ve (2.1.4) eşitsizlikleri doğru iken $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \nu)$ üçlüsünün oyunun çözümü olduğunu kanıtlayalım.

(2.1.3) ten $\min\limits_{\mathbf{y}\in Y_n} g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \geq \nu$ ve buradan

$$\max_{\mathbf{x}\in X_m} \min_{\mathbf{y}\in Y_n} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq \nu \tag{2.1.5}$$

elde edilir.

(2.1.4) ten $\max\limits_{\mathbf{x}\in X_m} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq \nu$ ve buradan

$$\min_{\mathbf{y}\in Y_n} \max_{\mathbf{x}\in X_m} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \nu \tag{2.1.6}$$

elde edilir. Teorem 2.1.11 gereği verilen oyunun değeri vardır, yani

$$\min_{\mathbf{y}\in Y_n} \max_{\mathbf{x}\in X_m} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{\mathbf{x}\in X_m} \min_{\mathbf{y}\in Y_n} g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

dir. (2.1.5), (2.1.6) ve son eşitlikten,

$$\min_{\mathbf{y}\in Y_n} \max_{\mathbf{x}\in X_m} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{\mathbf{x}\in X_m} \min_{\mathbf{y}\in Y_n} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \nu \tag{2.1.7}$$

sonucu elde edilir. Bir başka deyişle, oyunun değeri ν olur.

Şimdi $\mathbf{x}^* \in X_m$ stratejisinin I. oyuncunun, $\mathbf{y}^* \in Y_n$ stratejisinin ise II. oyuncunun optimal stratejisi olduğunu gösterelim. (2.1.3) ve (2.1.4) eşitsizliklerinden sırasıyla $g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \geq \nu$ ve $g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \leq \nu$ buradan

$$g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = \nu \tag{2.1.8}$$

olduğu bulunur. (2.1.3) ten $\min_{\mathbf{y}\in Y_n} g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \geq \nu$ olduğu bilindiğinden (2.1.8) den

$$\min_{\mathbf{y}\in Y_n} g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) = \nu$$

elde edilir. Son eşitlik ve (2.1.7) den,

$$\min_{\mathbf{y}\in Y_n} g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) = \max_{\mathbf{x}\in X_m} \min_{\mathbf{y}\in Y_n} g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

olur. Bu, I. oyuncunun optimal strateji tanımıdır.

(2.1.4) ten $\max_{\mathbf{x}\in X_m} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq \nu$ olduğu elde edilir. O halde (2.1.8) den

$$\max_{\mathbf{x}\in X_m} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) = \nu$$

bulunur. Son eşitlik ve (2.1.7) den,

$$\max_{\mathbf{x}\in X_m} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) = \min_{\mathbf{y}\in Y_n} \max_{\mathbf{x}\in X_m} g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

olur. Bu da, II. oyuncunun optimal strateji tanımıdır.

Böylece, $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \nu)$ verilen oyunun çözümü olduğu sonucuna ulaşılır. □

Sonuç 2.1.16. $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \nu)$ *verilen oyunun çözümü ise* $g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = \nu$ *olur.*

Teorem 2.1.15 yardımıyla oyunun çözümü kavramını yorumlayalım. $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \nu)$ çözüm ise, I. oyuncu $\mathbf{x}^* \in X_m$ optimal stratejisi ile oynadığında (2.1.3) gereği kendisine her durumda en az ν kadar kazancı garantilemiş olur. Eğer II. oyuncu $\mathbf{y}^* \in Y_n$ optimal stratejisi ile oynarsa (2.1.4) gereği ν den daha fazla kaybetmemeyi garantilemiş olur. Her iki oyuncu da optimal stratejileri ile oynadığında, Sonuç 2.1.16 gereği I. oyuncunun kazancı da, II. oyuncunun kaybı da $\nu = g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ kadar olur.

Şimdi, Örnek 2.1.3 te saf stratejiler sınıfında çözümü olmadığını gösterdiğimiz oyunun karma stratejiler sınıfında çözümünü bulalım.

$$\mathbf{G} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \mathrm{II}_1 & \mathrm{II}_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{I}_1 \\ \mathrm{I}_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

oyununda her iki oyuncunun da ikişer saf stratejisi olduğundan, I. oyuncunun karma stratejisini $\mathbf{x} = (x, 1-x) \in X_2$, $x \in [0,1]$ ve II. oyuncunun karma stratejisini de $\mathbf{y} = (y, 1-y) \in Y_2$, $y \in [0,1]$ olarak gösterelim. Bu durumda $\mathbf{x} = (x, 1-x)$ ve $\mathbf{y} = (y, 1-y)$ karma stratejileri için getiri,

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0 \cdot xy + (-1)x(1-y) + (-\frac{1}{2})(1-x)y + 0 \cdot (1-x)(1-y) \\ &= -x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}xy \end{aligned}$$

$\mathbf{x}^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ stratejisini alırsak, keyfi $\mathbf{y} = (y, 1-y) \in Y_2$ stratejisi için

$$g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2}y + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}y = -\frac{1}{3}$$

olur. O halde keyfi $\mathbf{y} \in Y_2$ için $g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \geq -\frac{1}{3}$ olduğu elde edilir.

$\mathbf{y}^* = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ stratejisini alırsak, keyfi $\mathbf{x} = (x, 1-x) \in X_2$ stratejisi için

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) = -x - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}x = -\frac{1}{3}$$

olur. Bu durumda keyfi $\mathbf{x} \in X_2$ için $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq -\frac{1}{3}$ olduğu elde edilir.
Böylece, Teorem 2.1.15 gereği

$$\left(\mathbf{x}^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \mathbf{y}^* = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \nu = -\frac{1}{3}\right)$$

oyunun çözümü olur.

Şimdi, oyun teorisinin önemli kavramlarından olan denge stratejilerini açıklayalım.

Tanım 2.1.17. *$\mathbf{x}^* \in X_m$ ve $\mathbf{y}^* \in Y_n$ olsun. Eğer keyfi $\mathbf{x} \in X_m$, $\mathbf{y} \in Y_n$ için*

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \leq g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \tag{2.1.9}$$

oluyorsa, $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ ikilisine ***denge stratejileri*** *denir.*

Denge stratejileri şu şekilde yorumlanabilir: $\mathbf{x} \in X_m$, ve $\mathbf{y} \in Y_n$ stratejileri için $g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ getirisi I. oyuncunun getirisi olarak tanımlanmıştı. Oyun sıfır toplamlı olduğundan II. oyuncunun getirisi $-g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ olur. O halde $\mathbf{x} \in X_m$, ve $\mathbf{y} \in Y_n$ için I. oyuncunun getirisini $g_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, II. oyuncunun getirisi $g_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ile gösterirsek, $g_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $g_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ olur. Böylece (2.1.9) denge tanımından, $\mathbf{x} \in X_m$ için

$$g_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq g_1(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$$

ve keyfi $\mathbf{y} \in Y_n$ için

$$g_2(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \leq g_2(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$$

olur. Buradan açıktır ki, $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ denge stratejileri iken, II. oyuncu $\mathbf{y}^*$ stratejisi ile oynarsa, I. oyuncunun elde edebileceği en büyük getiri $g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ dır ve I. oyuncu bu getirisini $\mathbf{x}^*$ stratejisi ile oynayarak elde edebilir. Benzer olarak I. oyuncu $\mathbf{x}^*$ stratejisi ile oynarsa II. oyuncunun elde edebileceği en büyük getiri $g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ dır ve II. oyuncu bu getirisini $\mathbf{y}^*$ stratejisi ile oynayarak elde edebilir. Böylece oyunculardan herhangi biri denge stratejisi ile oynadığında, diğer oyuncu daha fazla kaybetmemek için denge ikilisindeki diğer stratejiyi seçmek zorunda kalacaktır. Bu yüzden denge stratejileri, tehdit stratejileri olarak da yorumlanabilir.

Verilen oyunda denge stratejileri tek olmayabilir, hatta sonsuz çoklukta olabilir. Ancak oyuncular farklı denge ikilisi ile oynarken, oyunun getirisi hep aynı olur. Sıradaki önerme bunu ifade etmektedir.

Önerme 2.1.18. $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1)$ *ve* $(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2)$ *verilen oyunda denge stratejileri olsun. Bu durumda* $g(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) = g(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2)$ *olur.*

Ayrıca $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2)$ *ve* $(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1)$ *ikilileri de denge stratejileridir.*

Kanıt. $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1)$ denge stratejileri ise keyfi $\mathbf{x} \in X_m$ ve $\mathbf{y} \in Y_n$ için

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) \leq g(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) \leq g(\mathbf{x}_1, \mathbf{y})$$

olur. Buradan $\mathbf{x} = \mathbf{x}_2$, $\mathbf{y} = \mathbf{y}_2$ için

$$g(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1) \leq g(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) \leq g(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2) \tag{2.1.10}$$

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

bulunur. Şimdi $(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2)$ ikilisinin denge stratejileri olduğunu kullanarak tanımdan, keyfi $\mathbf{x} \in X_m$ ve $\mathbf{y} \in Y_n$ için

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2) \leq g(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2) \leq g(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}) \tag{2.1.11}$$

olur. Buradan $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1, \;\; \mathbf{y} = \mathbf{y}_1$ için

$$g(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2) \leq g(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2) \leq g(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1)$$

elde edilir. Böylece (2.1.10) ve (2.1.11) den

$$g(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1) \leq g(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) \leq g(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2) \leq g(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2) \leq g(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1) \tag{2.1.12}$$

bulunur. Buradan $g(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) = g(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2)$ olduğu elde edilir.

Şimdi $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2)$ ikilisinin de denge stratejisi olacağını gösterelim. (2.1.12) eşitsizliklerinden

$$g(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1) = g(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) = g(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2) = g(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2)$$

dir. Bu eşitlik ve $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1)$ ile $(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2)$ nin denge stratejileri olduğu kullanılarak,

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) \leq g(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2) \leq g(\mathbf{x}_1, \mathbf{y})$$

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2) \leq g(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2) \leq g(\mathbf{x}_2, \mathbf{y})$$

yazılabilir. Bu eşitsizliklerden, keyfi $\mathbf{x} \in X_m$ ve $\mathbf{y} \in Y_n$ için

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2) \leq g(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2) \leq g(\mathbf{x}_1, \mathbf{y})$$

bulunur ki, bu $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2)$ ikilisinin denge stratejileri olması demektir.

Benzer şekilde $(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1)$ ikilisinin de denge stratejileri olduğu gösterilebilir.

$\square$

Sıradaki teorem, oyunun denge stratejileri ile oyunun çözümü arasındaki ilişkiyi ortaya koymaktadır.

Teorem 2.1.19. $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ *stratejilerinin oyunun denge stratejileri olması için gerek ve yeter koşul* $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*))$ *üçlüsünün oyunun çözümü olmasıdır.*

Kanıt. $(\Rightarrow)$: $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ stratejileri oyunun denge stratejileri olsun. Tanımdan, keyfi $\mathbf{x} \in X_m$ ve $\mathbf{y} \in Y_n$ için

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \leq g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y})$$

dir. Yani, keyfi $\mathbf{x} \in X_m$ için

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$$

ve keyfi $\mathbf{y} \in Y_n$ için

$$g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \geq g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$$

olur. Böylece Teorem 2.1.15 gereği $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*))$ oyunun çözümüdür.

$(\Leftarrow)$: $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*))$ oyunun çözümü olsun. Teorem 2.1.15 ten dolayı, keyfi $\mathbf{x} \in X_m$ için

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$$

ve keyfi $\mathbf{y} \in Y_n$ için

$$g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \geq g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$$

olur. Böylece keyfi $\mathbf{x} \in X_m$ ve $\mathbf{y} \in Y_n$ için

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \leq g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y})$$

bulunur. Yani $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ stratejileri oyunun denge stratejileridir. □

Teoremin bir sonucu olarak, iki kişilik sıfır toplamlı sonlu oyunlarda denge stratejileri ile optimal stratejilerin denk kavramlar olduğu söylenebilir.

Şimdi, stratejilerden herhangi birinin, diğer bir stratejiden her zaman daha iyi olması durumunu yani baskın strateji tanımını verip bu durumun oyuna nasıl yansıyacağını belirtelim.

Tanım 2.1.20. *Keyfi $j = 1, 2, ..., n$ için $g_{lj} \geq g_{sj}$ oluyorsa,* I. *oyuncunun* I_l *stratejisi,* I_s *stratejisine* ***baskındır*** *denir ve* I_s *stratejisine de* ***bastırılan strateji*** *denir. Benzer şekilde, keyfi $i = 1, 2, ..., m$ için $g_{ir} \leq g_{ik}$ oluyorsa,* II. *oyuncunun* II_r *stratejisi,* II_k *stratejisine* ***baskındır*** *denir ve* II_k *stratejisine de* ***bastırılan strateji*** *denir.*

I. oyuncunun I_l stratejisinin I_s stratejisine baskın olduğunu $\mathrm{I}_l \geq \mathrm{I}_s$, ve II. oyuncunun II_r stratejisinin II_k stratejisine baskın olduğunu $\mathrm{II}_r \geq \mathrm{II}_k$ şeklinde göstereceğiz.

I. oyuncunun I_l stratejisi, I_s stratejisine baskın ise I. oyuncu I_l stratejisi ile oynadığında, II. oyuncu hangi stratejiyi seçerse seçsin, I. oyuncu I_s stratejisi ile elde ettiği kazançtan daha fazlasını elde eder. Bundan dolayı I. oyuncunun I_s stratejisini kullanmasına gerek kalmaz. Benzer olarak, eğer II. oyuncunun II_r stratejisi, II_k stratejisine baskın ise II. oyuncu II_r stratejisi ile oynadığında, I. oyuncu hangi stratejiyi seçerse seçsin, II. oyuncu II_k stratejisi ile vereceği kayıptan daha az kayıp verir. Bu nedenle II. oyuncunun II_k stratejisini kullanmasına gerek yoktur.

Verilen oyunda bastırılan strateji atıldıktan sonra oluşan oyuna ***sadeleştirilmiş oyun*** denir.

Önerme 2.1.21. *Sadeleştirilmiş oyunun çözümü verilen oyunun da çözümüdür.*

Kanıt. Oyunun getiri matrisi,

$$\mathbf{G} = \begin{array}{c} \\ \mathrm{I}_1 \\ \mathrm{I}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{I}_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathrm{II}_1 & \mathrm{II}_2 & \dots & \mathrm{II}_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1} & g_{m2} & \cdots & g_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

ile verilsin. Genelliği bozmadan $\mathrm{I}_2 \geq \mathrm{I}_1$ olduğunu varsayalım. O halde keyfi $j = 1, 2, ..., n$ için $g_{2j} \geq g_{1j}$ olur. I_1 stratejisini getiri matrisinden çıkaralım. O halde sadeleştirilmiş oyunun getiri matrisi,

$$\mathbf{G}_1 = \begin{array}{c} \\ \mathrm{I}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{I}_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathrm{II}_1 & \mathrm{II}_2 & \dots & \mathrm{II}_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1} & g_{m2} & \cdots & g_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

$(m-1) \times n$ boyutlu $\mathbf{G}_1$ matrisine dönüşür.

X_m ve Y_n, getiri matrisi $\mathbf{G}$ ile verilen oyunun X_m^s ve Y_n^s ise getiri matrisi $\mathbf{G}_1$ ile verilen sadeleştirilmiş oyunun sırasıyla I. ve II. oyuncunun karma stratejileri kümesi olsun. II. oyuncunun saf stratejileri sayısı değişmediğinden $Y_n^s = Y_n$ dir ve açıktır ki $X_m^s = X_{n-1}$ olur.

Getiri matrisi $\mathbf{G}$ olan oyunda $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_m) \in X_m$ ve $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n) \in Y_n$ karma stratejileri için oyunun getirisi

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_i g_{ij} y_j$$

ve getiri matrisi $\mathbf{G}_1$ olan yani sadeleştirilmiş oyunda ise, $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_2, ..., \hat{x}_m) \in X_m^s$ ve $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{y} = (\hat{y}_1, \hat{y}_2 ..., \hat{y}_n) \in Y_n^s$ karma stratejileri için sadeleştirilmiş oyunun getirisi

$$\hat{g}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=2}^{m} \hat{x}_i g_{ij} \hat{y}_j$$

olur.

$\hat{\mathbf{x}}^* = (x_2^*, ..., x_m^*) \in X_m^s$ ve $\hat{\mathbf{y}}^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_n^*) \in Y_n^s$ sadeleştirilmiş oyunda sırasıyla I. ve II. oyuncunun optimal stratejileri, ν ise bu oyunun değeri olsun. Yani $(\hat{\mathbf{x}}^*, \hat{\mathbf{y}}^*, \nu)$, getiri matrisi $\mathbf{G}_1$ olan oyunun çözümü olsun.

$\mathbf{x}^* = (0, x_2^*, ..., x_m^*) \in X_m$ ve $\mathbf{y}^* = \hat{\mathbf{y}}^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_n^*) \in Y_n = Y_n^s$ olsun. $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \nu)$ üçlüsünün, getiri matrisi $\mathbf{G}$ olan oyunun çözümü olduğunu kanıtlayalım.

$(\hat{\mathbf{x}}^*, \hat{\mathbf{y}}^*, \nu)$ sadeleştirilmiş oyunun çözümü olduğundan, Teorem 2.1.15 ten

$$\text{keyfi} \quad \hat{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, ..., y_n) \in Y_n^s \quad \text{için} \quad \hat{g}(\hat{\mathbf{x}}^*, \hat{\mathbf{y}}) \geq \nu \tag{2.1.13}$$

ve

$$\text{keyfi} \quad \hat{\mathbf{x}} = (x_2, ..., x_m) \in X_m^s \quad \text{için} \quad \hat{g}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}^*) \leq \nu \tag{2.1.14}$$

olur. Önce

$$\text{keyfi} \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n) \in Y_n \quad \text{için} \quad g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \geq \nu \tag{2.1.15}$$

olduğunu kanıtlayalım. Keyfi $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n) \in Y_n$ için $Y_n = Y_n^s$ olduğundan $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n) \in Y_n^s$ olur. $\mathbf{x}^* = (0, x_2^*, ..., x_m^*) \in X_m, \hat{\mathbf{x}}^* = (x_2^*, ..., x_m^*) \in X_m^s$ olduğundan,

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_i^* g_{ij} y_j \qquad (2.1.16) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=2}^{m} x_i^* g_{ij} y_j \\ &= \hat{g}(\hat{\mathbf{x}}^*, \hat{\mathbf{y}}) \end{aligned}$$

olur. $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n) \in Y_n = Y_n^s$ olduğundan (2.1.13) ve (2.1.16) dan

$$g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \geq \nu$$

olduğu elde edilir. Böylece (2.1.15) eşitsizliğinin doğru olduğu kanıtlandı.

Şimdi

$$\text{keyfi} \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_m) \in X_m \quad \text{için} \quad g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq \nu \tag{2.1.17}$$

olduğunu gösterelim. Keyfi $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_m) \in X_m$ için,

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_i g_{ij} y_j^* \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_1 g_{1j} y_j^* + \sum_{j=1}^{n} x_2 g_{2j} y_j^* + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=3}^{m} x_i g_{ij} y_j^* \end{aligned} \tag{2.1.18}$$

olur. $\mathrm{I}_2 \geq \mathrm{I}_1$ olduğundan keyfi $j = 1, 2, ..., n$ için $g_{2j} \geq g_{1j}$ eşitsizliği sağlanır. Bu durumda (2.1.18) eşitliğinden

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) &\leq \sum_{j=1}^{n} x_1 g_{2j} y_j^* + \sum_{j=1}^{n} x_2 g_{2j} y_j^* + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=3}^{m} x_i g_{ij} y_j^* \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} (x_1 + x_2) g_{2j} y_j^* + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=3}^{m} x_i g_{ij} y_j^* \end{aligned} \tag{2.1.19}$$

bulunur. $\hat{\mathbf{x}} = (x_1 + x_2, x_3, ..., x_m)$ olsun. Açıktır ki, $\hat{\mathbf{x}} = (x_1 + x_2, x_3, ..., x_m) \in X_m^s$ olur. Ayrıca $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, ..., x_m) \in X_m$ keyfi seçilerek sabitlenmiş olduğundan, $\hat{\mathbf{x}} = (x_1 + x_2, x_3, ..., x_m) \in X_m^s$ keyfi olur. $\hat{\mathbf{y}}^* = \mathbf{y}^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_n^*) \in Y_n = Y_n^s$ olduğundan,

$$\hat{g}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}^*) = \sum_{j=1}^{n} (x_1 + x_2) g_{2j} y_j^* + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=3}^{m} x_i g_{ij} y_j^* \tag{2.1.20}$$

olur. (2.1.14), (2.1.19) ve (2.1.20) den

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq \hat{g}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}^*) \leq \nu$$

olduğu elde edilir. $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, ..., x_m) \in X_m$ keyfi seçildiğinden, son eşitsizlikten (2.1.17) nin doğru olduğu elde edilir.

(2.1.15), (2.1.17) ve Teorem 2.1.15 ten $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \nu)$ üçlüsünün, getiri matrisi $\mathbf{G}$ olan oyunun çözümü olduğu elde edilir. □

Bu önerme gösteriyor ki, oyunun sadeleştirilmesi, verilen oyunun çözümünün bulunmasını kolaylaştırır. Bu nedenle herhangi bir oyunun çözümü bulunurken, oyun sadeleştirilebiliyorsa öncelikle sadeleştirilmelidir. Bu şekilde bulunacak çözüm, verilen oyunun da bir çözümü olacaktır. Fakat bu önermenin tersi her zaman doğru değildir. Yani verilen oyunun çözümü, sadeleştirilmiş oyunun da çözümü olmak zorunda değildir. Bir örnekle Önerme 2.1.21 in tersinin doğru olmadığını gösterelim.

Örnek 2.1.22. *Getiri matrisi*

$$\mathbf{G} = \begin{array}{c} \\ \mathrm{I}_1 \\ \mathrm{I}_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathrm{II}_1 & \mathrm{II}_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

ile verilen oyunu ele alalım.

$\mathrm{II}_1 \geq \mathrm{II}_2$ *olduğundan, oyunu sadeleştirirsek sadeleştirilmiş oyunun matrisi,*

$$\mathbf{G}_1 = \begin{array}{c} \\ \mathrm{I}_1 \\ \mathrm{I}_2 \end{array} \begin{array}{c} \mathrm{II}_1 \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

olur. Getiri matrisi $\mathbf{G}_1$ *olan oyunda* $\mathrm{I}_1 \geq \mathrm{I}_2$ *olduğundan, bu oyunu bir daha sadeleştirirsek, bu kez sadeleştirilmiş oyunun getiri matrisi*

$$\mathbf{G}_2 = \begin{array}{c} \\ \mathrm{I}_1 \end{array} \begin{array}{c} \mathrm{II}_1 \\ \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

olur.

Böylece, getiri matrisi $\mathbf{G}_2$ *olan sadeleştirilmiş oyunda her iki oyuncunun da tek stratejisi olduğundan bu oyunun tek çözümü* $(\mathrm{I}_1, \mathrm{II}_1, 2)$ *dir.*

Şimdi Teorem 2.1.15 yardımıyla oyunun çözümünü bulalım. I. *oyuncunun* $\mathbf{x} = (x, 1-x) \in X_2$ *ve* II. *oyuncunun* $\mathbf{y} = (y, 1-y) \in Y_2$ *karma stratejileri için oyunun getirisi*

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 2 \cdot xy + 2 \cdot x(1-y) + 0 \cdot (1-x)y + 1 \cdot (1-x)(1-y) \\ &= x + 1 - y + xy \end{aligned}$$

olur. Oyunun değeri

$$\begin{aligned}\nu = \min_{\mathbf{y}\in Y_2}\max_{\mathbf{x}\in X_2} g(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \min_{y\in[0,1]}\max_{x\in[0,1]} [x+1-y+xy] \\ &= \min_{y\in[0,1]}\max_{x\in[0,1]} [x(y+1)+1-y] \\ &= \min_{y\in[0,1]} [(y+1)+1-y] \\ &= 2\end{aligned}$$

olur. Şimdi $\mathbf{x}^* = (1,0) \in X_2$ *ve keyfi* $\mathbf{y} = (y, 1-y) \in Y_2,\ y \in [0,1]$ *stratejilerini alalım. Bu durumda*

$$g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) = 1 + 1 - y + 1 \cdot y = 2$$

olduğu bulunur. Son eşitlikten,

$$\textit{keyfi} \quad \mathbf{y} \in Y_2 \quad \textit{için} \quad g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \geq 2 \tag{2.1.21}$$

olduğu elde edilir.

Şimdi II. *oyuncunun keyfi* $\mathbf{y}^* = (y^*, 1-y^*) \in Y_2$ *stratejisini alalım ve sabitleyelim.* I. *oyuncunun keyfi* $\mathbf{x} = (x, 1-x)$ *stratejisi için*

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) = x + 1 - y^* + xy^* \leq 1 + 1 - y^* + y^* = 2$$

olur. Böylece son eşitsizlikten,

$$\textit{keyfi} \quad \mathbf{x} \in X_2 \quad \textit{için} \quad g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq 2 \tag{2.1.22}$$

olduğu elde edilir.

O halde (2.1.21) *ve* (2.1.22) *ten* $\mathbf{x}^* = (1,0) \in X_2$ *ve* II. *oyuncunun keyfi seçilmiş* $\mathbf{y}^* = (y^*, 1-y^*) \in Y_2$ *stratejisi için* $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, 2)$ *veya* $(\mathrm{I}_1, \mathbf{y}^*, 2)$ *üçlüsü verilen oyunun çözümü olur. Oysa* $(\mathrm{I}_1, \mathrm{II}_1, 2)$ *sadeleştirilmiş oyunun tek çözümüdür.*

Tanım 2.1.23. *Keyfi* $j = 1, 2, ..., n$ *için* $g_{lj} > g_{sj}$ *ise,* I. *oyuncunun* I_l *stratejisi* I_s *stratejisine* ***kesin baskındır*** *denir ve* I_s *stratejisine de* ***kesin bastırılan strateji*** *denir. Benzer şekilde, keyfi* $i = 1, 2, ..., m$ *için* $g_{ir} < g_{ik}$ *ise,* II. *oyuncunun* II_r *stratejisi* II_k *stratejisine* ***kesin baskındır*** *denir ve* II_k *stratejisine de* ***kesin bastırılan strateji*** *denir.*

Önerme 2.1.24. *Bir oyundan kesin bastırılan strateji atılırsa, oyunun çözümü, sadeleştirilmiş oyunun da çözümü olur.*

Şimdi gereken (öz) strateji kavramını açıklayalım.
Hatırlanacağı üzere $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \nu)$ üçlüsü, iki kişilik sıfır toplamlı bir $n \times m$ oyunun çözümü ise $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_m^*) \in X_m$ stratejisi I. oyuncunun optimal stratejisi, $\mathbf{y}^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_n^*) \in Y_n$ stratejisi II. oyuncunun optimal stratejisi ve ν oyunun değeridir.

Tanım 2.1.25. I. *oyuncunun optimal* $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_m^*)$ *stratejisinde* $x_{i_*}^* > 0$ *ise* I_{i_*} *saf stratejisine* I. *oyuncunun* ***gereken (öz) stratejisi*** *denir.*

Tanım 2.1.26. II. *oyuncunun optimal* $\mathbf{y}^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_n^*)$ *stratejisinde* $y_{j_*}^* > 0$ *ise* II_{j_*} *saf stratejisine* II. *oyuncunun* ***gereken (öz) stratejisi*** *denir.*

Sıradaki teorem, I. oyuncu $\mathbf{x}^*$ optimal stratejisi ile oynarken II. oyuncu gereken II_{j_*} stratejisi ile oynarsa veya benzer olarak II. oyuncu $\mathbf{y}^*$ optimal stratejisi ile oynarken I. oyuncu gereken I_{i_*} stratejisi ile oynarsa, oyunun getirisinin verilen oyunun değerine eşit olacağını göstermektedir.

Teorem 2.1.27. $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \nu)$ *bir* $m \times n$ *matris oyunun çözümü,* I_{i_*} *ve* II_{j_*} *stratejileri sırasıyla* I. *ve* II. *oyuncunun gereken stratejileri olsun. Bu durumda*

$$g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = g(\mathrm{I}_{i_*}, \mathbf{y}^*) = \nu$$

ve

$$g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = g(\mathbf{x}^*, \mathrm{II}_{j_*}) = \nu$$

olur.

Kanıt. $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \nu)$ oyunun çözümü olduğundan, $\mathbf{x}^* \in X_m$ stratejisi I. oyuncunun optimal stratejisi, $\mathbf{y}^* \in Y_n$ stratejisi II. oyuncunun optimal stratejisi ve ν oyunun değeri olur.

$\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_m^*)$, $\mathbf{y}^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_n^*)$ olsun. Genelliği bozmadan, keyfi $i = 1, 2, ..., k$ $(k \leq n)$ için $x_i^* > 0$ olmak üzere

$$\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_k^*, 0, ..., 0)$$

olduğunu kabul edelim. Yani $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_m^*)$ optimal stratejisinde, saf stratejilerin sıra numaralarını değiştirerek, gereken stratejileri ilk sıraya alalım. Keyfi $1 \leq i_* \leq k$ için I_{i_*} stratejisi I. oyuncunun gereken stratejisidir ve tanım gereği $x_{i_*}^* > 0$ olur.

Şimdi $g(\mathrm{I}_{i_*}, \mathbf{y}^*) = \nu$ olduğunu kanıtlayalım. Aksine $g(\mathrm{I}_{i_*}, \mathbf{y}^*) \neq \nu$ olsun. $\mathbf{y}^* \in Y_n$ stratejisi II. oyuncunun optimal stratejisi olduğundan,

$$\text{keyfi} \quad \mathbf{x} \in X_m \quad \text{için} \quad g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq \nu$$

olur. Son eşitsizlikte $\mathbf{x} \in X_m$ stratejilerini saf stratejiler alırsak

$$\text{keyfi} \quad i = 1, 2, ..., m \quad \text{için} \quad g(\mathrm{I}_i, \mathbf{y}^*) \leq \nu \tag{2.1.23}$$

elde edilir. Ayrıca $g(\mathrm{I}_{i_*}, \mathbf{y}^*) \neq \nu$ kabul edildiğinden,

$$g(\mathrm{I}_{i_*}, \mathbf{y}^*) = \nu_* < \nu \tag{2.1.24}$$

olduğu bulunur.

$(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \nu)$ oyunun çözümü olduğundan, Sonuç 2.1.16 gereği

$$\nu = g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \tag{2.1.25}$$

dir. (2.1.23), (2.1.24), (2.1.25) ten ve $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_k^*, 0, ..., 0)$, $x_{i_*}^* > 0$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
\nu &= g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_i^* g_{ij} y_j^* = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} x_i^* g_{ij} y_j^* \\
&= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} x_i^* g_{ij} y_j^* = \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{n} g_{ij} y_j^* \right) x_i^* = \sum_{i=1}^{k} g(\mathrm{I}_i, \mathbf{y}^*) x_i^* \\
&= g(\mathrm{I}_1, \mathbf{y}^*) x_1^* + ... + g(\mathrm{I}_{i*}, \mathbf{y}^*) x_{i*}^* + ... + g(\mathrm{I}_k, \mathbf{y}^*) x_k^* \\
&\leq \nu x_1^* + ... + \nu_* x_{i*}^* + ... + \nu x_k^* \\
&< \nu x_1^* + ... + \nu x_{i*}^* + ... + \nu x_k^* = \nu
\end{aligned}$$

olduğundan $\nu < \nu$ çelişkisi elde edilir. O halde varsayım doğru değildir. Yani $g(\mathrm{I}_{i_*}, \mathbf{y}^*) = \nu$ olmalıdır.

II. oyuncunun gereken II_{j_*} stratejisi için de $g(\mathbf{x}^*, \mathrm{II}_{j_*}) = \nu$ olduğu benzer biçimde kanıtlanır. □

Son olarak, ileride kullanacağımız bir önermeyi kanıtlayalım.

Önerme 2.1.28. *Getiri matrisi*

$$\mathbf{G} = \begin{array}{c} \\ \mathrm{I}_1 \\ \mathrm{I}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{I}_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathrm{II}_1 & \mathrm{II}_2 & \dots & \mathrm{II}_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1} & g_{m2} & \dots & g_{mn} \end{pmatrix} \end{array} \tag{2.1.26}$$

olan iki kişilik sıfır toplamlı $m \times n$ oyunu ele alalım. $r \in \mathbb{R}$ olsun. $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \nu)$ üçlüsünün oyunun çözümü olması için gerek ve yeter koşul $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \nu + r)$ üçlüsünün getiri matrisi

$$\mathbf{G}_1 = \begin{array}{c} \\ \mathrm{I}_1 \\ \mathrm{I}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{I}_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathrm{II}_1 & \mathrm{II}_2 & \dots & \mathrm{II}_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} g_{11}+r & g_{12}+r & \dots & g_{1n}+r \\ g_{21}+r & g_{22}+r & \dots & g_{2n}+r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1}+r & g_{m2}+r & \dots & g_{mn}+r \end{pmatrix} \end{array} \tag{2.1.27}$$

olan oyunun çözümü olmasıdır.

Kanıt. $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_m) \in X_m$ ve $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n) \in Y_n$ sırasıyla I. ve II. oyuncunun karma stratejileri olsun. O halde, getiri matrisi (2.1.26) ile verilen oyunda, $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ karma stratejileri için oyunun getirisi

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_i g_{ij} y_j,$$

getiri matrisi (2.1.27) ile verilen oyunda ise, $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ karma stratejileri için oyunun getirisi

$$g_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_i (g_{ij} + r) y_j = r + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_i g_{ij} y_j = r + g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

olur.

$(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \nu)$ üçlüsü getiri matrisi (2.1.26) olan oyunun çözümü olsun. Teorem 2.1.15 ten

$$\forall \mathbf{y} \in Y_n \quad \text{için} \quad g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \geq \nu$$

$$\forall \mathbf{x} \in X_m \quad \text{için} \quad g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq \nu$$

olur. $g_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = r + g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ olduğundan,

$$\forall \mathbf{y} \in Y_n \quad \text{için} \quad g_1(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \geq r + \nu$$

$$\forall \mathbf{x} \in X_m \quad \text{için} \quad g_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq r + \nu$$

olduğu elde edilir. Bu eşitsizliklerden ve yine Teorem 2.1.15 ten, $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \nu+r)$ üçlüsünün, getiri matrisi $\mathbf{G}_1$ olan oyunun çözümü olduğu bulunur.

$(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \nu+r)$ üçlüsü getiri matrisi (2.1.27) ile verilen oyunun çözümü iken, $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \nu)$ üçlüsünün getiri matrisi (2.1.26) ile verilen oyunun çözümü olduğu da benzer şekilde kanıtlanır. $\square$

Yani, getiri matrisine herhangi bir $r \in \mathbb{R}$ sayısı eklemek oyunu değiştirmez. Oyuncuların optimal stratejileri aynı kalır. Yalnız oyunun değeri r kadar değişir.

2.2 İki Kişilik Sıfır Toplamlı Sonlu Oyunların Çözümü

Önceki bölümde verilen Teorem 2.1.15 te, $m \times n$ matris oyunların çözümü karakterize edilmiş ve bu teorem yardımıyla Örnek 2.1.22 de verilen oyunun çözümü elde edilmiştir. Özel olarak $2 \times n$ veya $m \times 2$ oyunların çözümü için geliştirilen grafik yöntem, bu tip oyunların çözümünde oldukça kullanışlıdır [1]. Ayrıca oyunun değerinin yaklaşık olarak hesaplanmasını sağlayan Brown--Robinson Yöntemi de çözüm için kullanılabilecek yöntemlerdendir [2].

Bu bölümde, öncelikle çözümün kolayca bulunabildiği denge noktası olan oyunlar tanımlanacak ve çözümleri incelenecektir. Daha sonra denge noktası olmayan oyunların çözümü için bir yöntem verilecektir. Bu yöntem, $m \times n$ matris oyunların değerinin kesin olarak hesaplanmasını ve bir primal-dual problem çifti oluşturarak, iki oyuncunun da optimal stratejilerinin belirlenmesini sağlayan lineer programlama yöntemidir.

2.2.1 Denge Noktası Olan Oyunlar için Çözüm

Getiri matrisi

$$\mathbf{G} = \begin{array}{c} \\ \mathrm{I}_1 \\ \mathrm{I}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{I}_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathrm{II}_1 & \mathrm{II}_2 & \dots & \mathrm{II}_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1} & g_{m2} & \dots & g_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

ile verilen oyunda g_{ij} getirisi, i. satırın minimum değeri iken aynı zamanda j. sütunun maksimum değeri ise g_{ij}, $\mathbf{G}$ matris oyununun denge noktasıdır. g_{ij} denge noktası ise I_i stratejisi I. oyuncunun, II_j stratejisi II. oyuncunun denge stratejileri yani optimal stratejileri ve g_{ij} değeri de oyunun değeridir.

Örnek 2.2.1.

$$\mathbf{G} = \begin{array}{c} \\ \mathrm{I}_1 \\ \mathrm{I}_2 \\ \mathrm{I}_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathrm{II}_1 & \mathrm{II}_2 & \mathrm{II}_3 & \mathrm{II}_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -5 & -3 & 2 \\ 6 & 7 & 2 & 4 \\ 13 & -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

getiri matrisi ile verilen oyunu ele alalım. Burada g_{23} getirisi, 2. *satırın minimum değeri ve aynı zamanda* 3. *sütunun maksimum değeri olduğundan denge noktasıdır. Böylece* I_2 *stratejisi* I. *oyuncunun,* II_3 *stratejisi* II. *oyuncunun optimal stratejileri ve oyunun değeri de $g_{23} = \nu = 2$ olarak bulunur. Böylece verilen oyunun çözümü* $(\mathrm{I}_2, \mathrm{II}_3, 2)$ *dir.*

Verilen örnekte **G** matrisi I. oyuncunun kazancını, II. oyuncunun kaybını gösterdiğinden oyuncular sırasıyla maxmin ve minmax kriterlerine uygun olarak davranırlar. Satırların minimum elemanları $-5, 2, -2$ arasından I. oyuncu kendisi için en iyi olanı yani 2 getirisini kazanmayı hedefler. II. oyuncunun kaybı söz konusu olduğundan sütunların maksimum elemanları $13, 7, 2, 5$ arasından minimum olanı yani 2 yi elde etmeye çalışır. Bu durumda her iki oyuncunun oyundan beklediği değerler ortaktır, yani oyunda bir denge noktası vardır. Oyuncular oyunun değeri olan 2 getirisini elde etmek için I_2 ve II_3 stratejilerini seçecektir.

2.2.2 Denge Noktası Olmayan Oyunlar için Çözüm

Bu bölümde, iki kişilik sıfır toplamlı $m \times n$ oyunların çözümlerini bulmak için bir yöntem verilecektir.

Getiri matrisi

$$\mathbf{G} = \begin{array}{c} \\ \mathrm{I}_1 \\ \mathrm{I}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{I}_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathrm{II}_1 & \mathrm{II}_2 & \dots & \mathrm{II}_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1} & g_{m2} & \dots & g_{mn} \end{pmatrix} \end{array} \tag{2.2.1}$$

olan iki kişilik sıfır toplamlı $m \times n$ oyunu ele alalım.

Teorem 2.1.15 ten, $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \nu_*)$ nin oyunun çözümü olması için gerek ve yeter koşulun

$$\text{keyfi } \mathbf{y} \in Y_n \text{ için } g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \geq \nu_*$$

$$\text{keyfi } \mathbf{x} \in X_m \text{ için } g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq \nu_*$$

olduğunu biliyoruz. Şimdi II. oyuncunun herhangi bir $\mathbf{y} \in Y_n$ stratejisini seçtiğini varsayalım. I. oyuncu kendisi için en iyi strateji olan

$$\max_{\mathbf{x} \in X_m} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(\mathbf{x}(\mathbf{y}), \mathbf{y}) = \nu(\mathbf{y})$$

eşitliğini sağlayan $\mathbf{x}(\mathbf{y}) \in X_m$ stratejisini seçer. II. oyuncunun amacı, kaybını minimalleştirmek olduğundan, uygun $\mathbf{y} \in Y_n$ stratejilerini seçerek, $\nu(\mathbf{y})$ yi minimalleştirmeye çalışır. Böylece, II. oyuncu

$$\begin{gathered} \mathbf{y} \in Y_n \\ \text{keyfi } \mathbf{x} \in X_m \text{ için } g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \nu \\ \nu \to \min \end{gathered} \tag{2.2.2}$$

problemini çözmeye çalışır.

Sıradaki önerme, (2.2.2) probleminin çözümü ile verilen oyunun çözümü arasındaki ilişkiyi ortaya koymaktadır.

Önerme 2.2.2. $(\mathbf{y}^*, \nu_*)$ *ikilisi* (2.2.2) *probleminin çözümü olsun.* ν_* *reel sayısı, getiri matrisi* (2.2.1) *ile verilen oyunun değeri,* $\mathbf{y}^* \in Y_n$ *ise* II. *oyuncunun optimal stratejisidir.*

Kanıt. $(\mathbf{y}^*, \nu_*)$ ikilisi (2.2.2) probleminin çözümü olsun. Bu durumda

$$\text{keyfi } \mathbf{x} \in X_m \text{ için } g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq \nu_*$$

olur. Bu eşitsizlikten

$$\max_{\mathbf{x} \in X_m} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq \nu_* \tag{2.2.3}$$

ve

$$\min_{\mathbf{y} \in Y_n} \max_{\mathbf{x} \in X_m} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \nu_* \tag{2.2.4}$$

olduğu elde edilir.

Şimdi

$$\min_{\mathbf{y} \in Y_n} \max_{\mathbf{x} \in X_m} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \nu_* \tag{2.2.5}$$

olduğunu kanıtlayalım. Aksini varsayalım. Bu durumda (2.2.4) ten

$$\min_{\mathbf{y} \in Y_n} \max_{\mathbf{x} \in X_m} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \nu_1 < \nu_* \tag{2.2.6}$$

olacak biçimde ν_1 sayısı vardır. $\mathbf{y} \to \max\limits_{\mathbf{x} \in X_m} g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ fonksiyonu sürekli olduğundan (2.2.6) dan

$$\max_{\mathbf{x} \in X_m} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^1) = \nu_1 < \nu_* \tag{2.2.7}$$

olacak şekilde $\mathbf{y}^1 \in Y_n$ vardır. (2.2.7) den

$$\text{keyfi } \mathbf{x} \in X_m \text{ için } g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^1) \leq \nu_1 < \nu_*$$

olur. Bu ise $(\mathbf{y}^*, \nu_*)$ ikilisinin (2.2.2) probleminin çözümü olması ile çelişir. O halde varsayım doğru değildir. Yani $\min\limits_{\mathbf{y} \in Y_n} \max\limits_{\mathbf{x} \in X_m} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \nu_*$ eşitliği doğrudur. Bir başka deyişle ν_* sayısı, getiri matrisi (2.2.1) ile verilen oyunun değeridir.

Şimdi $\mathbf{y} \in Y_n$ stratejisinin II. oyuncunun optimal stratejisi olduğunu gösterelim. Bunun için

$$\max_{\mathbf{x} \in X_m} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) = \nu_* \tag{2.2.8}$$

olduğunu kanıtlayalım. Yine aksini varsayalım. O halde (2.2.3) ten

$$\max_{\mathbf{x} \in X_m} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^1) = \nu_1 < \nu_*$$

olacak şekilde $\mathbf{y}^1 \in Y_n$ vardır. Buradan

$$\min_{\mathbf{y} \in Y_n} \max_{\mathbf{x} \in X_m} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \nu_1 < \nu_*$$

olduğu bulunur. Bu ise, ν_* sayısının oyunun değeri olması ile çelişir. O halde (2.2.8) eşitliği doğrudur. ν_* oyunun değeri olduğundan $\mathbf{y}^* \in Y_n$ stratejisi II. oyuncunun optimal stratejisidir. $\square$

Önerme 2.2.3. *$\mathbf{y} \in Y_n$ olsun. Keyfi $\mathbf{x} \in X_m$ için $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \nu$ olması için gerek ve yeter koşul keyfi $i = 1, 2, ..., m$ için $g(\mathrm{I}_i, \mathbf{y}) \leq \nu$ olmasıdır.*

Kanıt. Keyfi $\mathbf{x} \in X_m$ için $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \nu$ olsun. Her I_i saf stratejisi, sadece i. koordinatı 1 olan $\mathbf{x} = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ karma stratejisi ile eşlenebildiğinden, keyfi $i = 1, 2, ..., m$ için $g(\mathrm{I}_i, \mathbf{y}) \leq \nu$ olur.

Keyfi $i = 1, 2, ..., m$ için $g(\mathrm{I}_i, \mathbf{y}) \leq \nu$ ise $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \nu$ olduğunu gösterelim. Keyfi $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_m) \in X_m$ karma stratejisini alalım ve sabitleyelim. $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n) \in Y_n$ için

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_i g_{ij} y_j \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} g_{ij} y_j \right) x_i = \sum_{i=1}^{m} g(\mathrm{I}_i, \mathbf{y}) x_i \leq \sum_{i=1}^{m} \nu x_i = \nu \end{aligned}$$

olur. $\square$

Önerme 2.2.3 yardımıyla (2.2.2) problemi, denk bir ifadeyle

$$\begin{gathered} \mathbf{y} \in Y_n \\ \text{keyfi } i = 1, 2, ..., m \text{ için } g(\mathrm{I}_i, \mathbf{y}) \leq \nu \\ \nu \to \min \end{gathered} \tag{2.2.9}$$

şeklinde yazılabilir. $\mathbf{y} \in Y_n$ ve $g(\mathrm{I}_i, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{n} g_{ij} y_j$ olduğundan, (2.2.9) problemi

$$\begin{gathered} y_1 + y_2 + ... + y_n = 1 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, ..., y_n \geq 0, \\ \sum_{j=1}^{n} g_{ij} y_j \leq \nu, \quad i = 1, 2, ..., m, \\ \nu \to \min \end{gathered} \tag{2.2.10}$$

olarak ifade edilebilir.

Ayrıca keyfi $i = 1, 2, ..., m$ ve $j = 1, 2, ..., n$ için $g_{ij} > 0$ ise $\nu > 0$ olarak alınabilir. Eğer $g_{ij} > 0$ değilse, keyfi $i = 1, 2, ..., m$ ve $j = 1, 2, ..., n$ için $r + g_{ij} > 0$ olacak biçimde $r > 0$ sayısı bulunabilir. Önerme 2.1.28 gereği, getiri matrisindeki tüm g_{ij} sayılarının aynı r reel sayısı ile toplanması, oyunun optimal (veya denge) stratejilerini değiştirmez. Sadece oyunun değeri r sayısı kadar değişir. Bu nedenle $\nu > 0$ kabul edilebilir.

Şimdi genelliği bozmadan $\nu > 0$ kabul edelim. O halde (2.2.10) problemi, denk bir ifadeyle

$$\begin{gathered}
\frac{y_1}{\nu} + \frac{y_2}{\nu} + ... + \frac{y_n}{\nu} = \frac{1}{\nu} \\
y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, ..., y_n \geq 0, \\
\sum_{j=1}^{n} g_{ij} \frac{y_j}{\nu} \leq 1, \quad i = 1, 2, ..., m, \\
\nu \to \min
\end{gathered} \tag{2.2.11}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $Y_j = \dfrac{y_j}{\nu}, j = 1, 2, ..., n$ dersek, (2.2.11) problemi

$$\begin{gathered}
Y_1 + Y_2 + ... + Y_n = \frac{1}{\nu} \\
Y_1 \geq 0, Y_2 \geq 0, ..., Y_n \geq 0, \\
\sum_{j=1}^{n} g_{ij} Y_j \leq 1, \quad i = 1, 2, ..., m, \\
\nu \to \min
\end{gathered} \tag{2.2.12}$$

şeklini alır.

Son olarak, pozitif ν sayısının minimalleştirilmesi, $\dfrac{1}{\nu}$ sayısının maksimalleştirilmesine denk olduğundan, (2.2.12) problemi

$$\begin{gathered}
\max \{Y_1 + Y_2 + ... + Y_n\} \\
\sum_{j=1}^{n} g_{ij} Y_j \leq 1, \quad i = 1, 2, ..., m, \\
Y_1 \geq 0, Y_2 \geq 0, ..., Y_n \geq 0,
\end{gathered} \tag{2.2.13}$$

şeklinde standart bir lineer programlama problemine dönüşür.

$\mathbf{Y}^* = (Y_1^*, Y_2^*, ..., Y_n^*)$ olmak üzere $(\mathbf{Y}^*, r_*)$ ikilisi (2.2.13) probleminin çözümü olsun. Bu durumda $\mathbf{y}^* = (r_* Y_1^*, r_* Y_2^*, ..., r_* Y_n^*)$ ve $\nu_* = \dfrac{1}{r_*}$ olmak üzere $(\mathbf{y}^*, \nu_*)$ ikilisi (2.2.2) probleminin çözümü olur. Önerme 2.2.2 den

$\mathbf{y}^* = (r_* Y_1^*, r_* Y_2^*, ..., r_* Y_n^*) \in Y_n$ stratejisi getiri matrisi (2.2.1) olan oyunda II. oyuncunun optimal stratejisi, $\nu_* = \dfrac{1}{r_*}$ sayısı ise oyunun değeri olur.

Böylece aşağıdaki teorem kanıtlanmış olur.

Teorem 2.2.4. $(\mathbf{Y}^*, r_*)$ *ikilisi* (2.2.13) *lineer programlama probleminin çözümü ise* $\mathbf{y}^* = (r_* Y_1^*, r_* Y_2^*, ..., r_* Y_n^*) \in Y_n$ *stratejisi, getiri matrisi* (2.2.1) *olan oyunda* II. *oyuncunun optimal stratejisi ve* $\nu_* = \dfrac{1}{r_*}$ *sayısı da oyunun değeri olur.*

O halde getiri matrisi (2.2.1) olan oyunda II. oyuncunun optimal stratejisi ve oyunun değeri, (2.2.13) lineer programlama probleminin çözümü yardımıyla bulunur.

Şimdi, I. oyuncunun optimal stratejisini bulalım. I. oyuncu herhangi bir $\mathbf{x} \in X_m$ stratejisini seçtiğinde, II. oyuncu kendisi için en iyi strateji olan

$$\min_{\mathbf{y} \in Y_n} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x})) = \mu(\mathbf{x})$$

olacak şekildeki $\mathbf{y}(\mathbf{x}) \in Y_n$ stratejisini seçer. I. oyuncunun amacı, getirilerini maksimalleştirmek olduğundan, I. oyuncu uygun $\mathbf{x} \in X_m$ stratejisini seçerek, $\mu(\mathbf{x})$ sayısını maksimalleştirmeye çalışır. Bir başka deyişle, I. oyuncu

$$\begin{gathered} \mathbf{x} \in X_m \\ \text{keyfi } \mathbf{y} \in Y_n \text{ için } g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq \mu \\ \mu \to \max \end{gathered} \tag{2.2.14}$$

problemini çözmeye çalışır.

Önerme 2.2.2 ve Önerme 2.2.3 ya benzer olarak aşağıdaki önermeler kanıtlanabilir.

Önerme 2.2.5. $(\mathbf{x}^*, \mu_*)$ *ikilisi* (2.2.14) *probleminin çözümü olsun.* μ_* *sayısı, getiri matrisi* (2.2.1) *ile verilen oyunun değeri,* $\mathbf{x}^* \in X_m$ *ise* I. *oyuncunun optimal stratejisidir.*

Önerme 2.2.6. $\mathbf{x} \in X_m$ *olsun. Keyfi* $\mathbf{y} \in Y_n$ *için* $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq \mu$ *olması için gerek ve yeter koşul keyfi* $j = 1, 2, ..., n$ *için* $g(\mathbf{x}, \mathrm{II}_j) \geq \mu$ *olmasıdır.*

Böylece (2.2.14) problemi,

$$\begin{gathered} \mathbf{x} \in X_m \\ \text{keyfi } j = 1, 2, ..., n \text{ için } g(\mathbf{x}, \mathrm{II}_j) \geq \mu \\ \mu \to \max \end{gathered} \tag{2.2.15}$$

problemine denk olur. $g(\mathbf{x}, \mathrm{II}_j) = \sum_{i=1}^{m} g_{ij} x_i$ olduğundan,

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 + ... + x_m = 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, ..., x_m \geq 0, \\ \sum_{i=1}^{m} g_{ij} x_i \geq \mu, \quad j = 1, 2, ..., n, \\ \mu \to \max \end{gathered} \tag{2.2.16}$$

yazılabilir. Şimdi genelliği bozmadan $\mu > 0$ olduğunu kabul edelim.
O halde (2.2.16) problemi

$$\begin{gathered} \frac{x_1}{\mu} + \frac{x_2}{\mu} + ... + \frac{x_m}{\mu} = \frac{1}{\mu} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, ..., x_n \geq 0, \\ \sum_{i=1}^{m} g_{ij} \frac{x_i}{\mu} \geq 1, \quad j = 1, 2, ..., n, \\ \mu \to \max \end{gathered} \tag{2.2.17}$$

problemine dönüşür. Burada $i = 1, 2, ..., m$ için $X_i = \dfrac{x_i}{\mu}$ dersek,

$$\begin{gathered} X_1 + X_2 + ... + X_m = \frac{1}{\mu} \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, ..., X_m \geq 0, \\ \sum_{i=1}^{m} g_{ij} X_i \geq 1, \quad j = 1, 2, ..., n, \\ \mu \to \max \end{gathered} \tag{2.2.18}$$

olur. Son olarak, pozitif μ sayısının maksimalleştirilmesi, $\dfrac{1}{\mu}$ sayısının minimalleştirilmesine denk olduğundan (2.2.18) problemi, standart biçimde verilen

$$\begin{gathered} \min \{X_1 + X_2 + ... + X_m\} \\ \sum_{i=1}^{m} g_{ij} X_i \geq 1, \quad j = 1, 2, ..., n, \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, ..., X_m \geq 0, \end{gathered} \tag{2.2.19}$$

lineer programlama problemine dönüşür.

$\mathbf{X}^* = (X_1^*, X_2^*, ..., X_m^*)$ olmak üzere $(\mathbf{X}^*, r^*)$ ikilisi (2.2.19) probleminin çözümü olsun. Bu durumda $\mathbf{x}^* = (r^*X_1^*, r^*X_2^*, ..., r^*X_m^*)$ ve $\mu_* = \dfrac{1}{r^*}$ olmak üzere $(\mathbf{x}^*, \mu_*)$ ikilisi (2.2.14) probleminin çözümü olur. Önerme 2.2.5 den $\mathbf{x}^* = (r^*X_1^*, r^*X_2^*, ..., r^*X_m^*)$ karma stratejisi getiri matrisi (2.2.1) olan oyunda I. oyuncunun optimal stratejisi, $\mu_* = \dfrac{1}{r^*}$ sayısı ise oyunun değeri olur.

Böylece aşağıdaki teorem kanıtlanmış olur.

Teorem 2.2.7. $(\mathbf{X}^*, r^*)$ *ikilisi* (2.2.19) *lineer programlama probleminin çözümü olsun.* $\mathbf{x}^* = (r^*X_1^*, r^*X_2^*, ..., r^*X_m^*) \in X_m$ *stratejisi, getiri matrisi* (2.2.1) *olan oyunda* I. *oyuncunun optimal stratejisi ve* $\mu_* = \dfrac{1}{r^*}$ *sayısı da oyunun değeri olur.*

Bir başka deyişle getiri matrisi (2.2.1) olan oyunda I. oyuncunun optimal stratejisi ve oyunun değeri, (2.2.19) lineer programlama probleminin çözümü yardımıyla bulunur.

$(\mathbf{Y}^*, r_*)$ ve $(\mathbf{X}^*, r^*)$ ikilileri, sırasıyla (2.2.13) ve (2.2.19) lineer programlama problemlerinin çözümü olsun. (2.2.13) ve (2.2.19) lineer programlama problemleri biri diğerinin duali olduğundan $r_* = r^*$ olur. O halde getiri matrisi (2.2.1) olan oyunun değeri, problemlerin çözümünde bulunan r_* ve r^* sayılarının herhangi birinin çarpımsal tersidir. Yani

$$\nu_* = \mu_* = \frac{1}{r^*} = \frac{1}{r_*}$$

dir.

Özet olarak,

$$\begin{gathered} \min \{X_1 + X_2 + ... + X_m\} \\ \sum_{i=1}^{m} g_{ij} X_i \geq 1, \quad j = 1, 2, ..., n, \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, ..., X_m \geq 0, \end{gathered} \tag{2.2.20}$$

ve

$$\begin{gathered} \max \{Y_1 + Y_2 + ... + Y_n\} \\ \sum_{j=1}^{n} g_{ij} Y_j \leq 1, \quad i = 1, 2, ..., m, \\ Y_1 \geq 0, Y_2 \geq 0, ..., Y_n \geq 0, \end{gathered} \tag{2.2.21}$$

problemlerinin çözümünden elde edilen $\mathbf{x}^* = (r^*X_1^*, r^*X_2^*, ..., r^*X_m^*)$ ve $\mathbf{y}^* = (r_*Y_1^*, r_*Y_2^*, ..., r_*Y_n^*)$ ikilileri, sırasıyla I. ve II. oyuncuların optimal stratejileri ve herhangi birinin çözümünden elde edilen μ veya ν değeri ise oyunun değeridir.

Böylece oyunun çözümü, $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \nu = \mu)$ olur.

3 ARALIK MATRİS OYUNLAR

Bu bölümde, iki kişilik sıfır toplamlı sonlu oyunlar, aralık matris oyunlara genişletilecektir. Aralık matris oyunlar, getirilerin yalnızca herhangi bir aralıkta değiştiğinin bilindiği bir belirsizlik durumunun matematiksel modeli olarak düşünülebilir. Bu durumda, getiri matrisinin elemanları reel sayılar yerine aralıklar olacağından öncelikle aralıklar ile ilgili temel kavramlar verilecek ve aralıklar üzerindeki işlemler tanımlanacaktır.

3.1 Aralık Tanımı ve Temel Bilgiler

Tanım 3.1.1. $\mathbb{R}$ *reel sayılar kümesini göstermek üzere,*

$$\tilde{A} = [\underline{a}, \bar{a}] = \{x \in \mathbb{R} : \underline{a} \leq x \leq \bar{a}\}$$

şeklinde tanımlanan, $\mathbb{R}$ *reel sayılar kümesinin kapalı ve sınırlı her bir alt kümesine* ***aralık*** *denir. Burada* $\underline{a}$ *ve* $\bar{a}$ *reel sayılarına sırasıyla* $\tilde{A}$ *aralığının alt ve üst sınırı denir.*

Ayrıca, $\tilde{A}$ aralığının orta noktası $m(\tilde{A})$ ve yarıçapı $r(\tilde{A})$ olmak üzere, $\tilde{A}$ aralığı $\tilde{A} =< m(\tilde{A}), r(\tilde{A}) >$ ile de gösterilebilir. Burada,

$$m(\tilde{A}) = \frac{1}{2}(\underline{a} + \bar{a}) \quad \text{ve} \quad r(\tilde{A}) = \frac{1}{2}(\bar{a} - \underline{a})$$

dir. Açıktır ki, $\underline{a} = \bar{a}$ bir başka deyişle $m(\tilde{A}) = 0$ ise $\tilde{A} = [\underline{a}, \underline{a}]$ aralığı bir reel sayı belirtir.

Şimdi reel sayılar üzerinde tanımlanan temel aritmetik işlemleri aralıklar için genişletelim [3]. $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı tüm aralıklar kümesi $I(\mathbb{R})$ olsun.

Tanım 3.1.2. $\tilde{A} = [\underline{a}, \bar{a}], \tilde{B} = [\underline{b}, \bar{b}] \in I(\mathbb{R})$ *olmak üzere,*

i) $\tilde{A} + \tilde{B} = [\underline{a} + \underline{b}, \bar{a} + \bar{b}]$

ii) $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\lambda\tilde{A} = \begin{cases} [\lambda\underline{a}, \lambda\bar{a}] & , \quad \lambda \geq 0 \\ [\lambda\bar{a}, \lambda\underline{a}] & , \quad \lambda < 0 \end{cases}$$

iii) $-\tilde{B} = [-\bar{b}, -\underline{b}]$ olduğundan, $\tilde{A} - \tilde{B} = [\underline{a} - \bar{b}, \bar{a} - \underline{b}]$ dir.

iv) $\tilde{A} \times \tilde{B} = \big[\min\{\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\bar{b}, \bar{a}\underline{b}, \bar{a}\bar{b}\}, \max\{\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\bar{b}, \bar{a}\underline{b}, \bar{a}\bar{b}\}\big]$ dir.

v) $0 \notin \tilde{B}$, bir başka deyişle, $\underline{b} > 0$ veya $\bar{b} < 0$ olmak üzere,
$\dfrac{\tilde{A}}{\tilde{B}} = \big[\min\{\underline{a}/\underline{b}, \underline{a}/\bar{b}, \bar{a}/\underline{b}, \bar{a}/\bar{b}\}, \max\{\underline{a}/\underline{b}, \underline{a}/\bar{b}, \bar{a}/\underline{b}, \bar{a}/\bar{b}\}\big]$ dir.

Örnek 3.1.3. *$\tilde{A} = [3,4]$ ve $\tilde{B} = [5,6]$ olmak üzere $\tilde{A} + \tilde{B} = [8,10]$, $\tilde{A} - \tilde{B} = [-3,-1]$, $\tilde{A} \times \tilde{B} = [15,24]$, $\tilde{A}/\tilde{B} = [1/2, 4/5]$ bulunur. Ayrıca $\tilde{A} - \tilde{A} = [-1,1]$ ve $\tilde{A}/\tilde{A} = [3/4, 4/3]$ dir.*

Dikkat edilirse, $\tilde{A} - \tilde{A} \neq 0$ ve $\tilde{A}/\tilde{A} \neq 1$ dir.

3.2 Aralık Karşılaştırması

Bu bölümde $\mathbb{R}$ üzerinde bilinen " $\geq$ "," $\leq$ " sıralama bağıntıları aralıklar için genişletilecektir.

İlk olarak Moore [3], $\tilde{A}$ aralığının $\tilde{B}$ tarafından kapsanmasını $\tilde{A} \subseteq \tilde{B} \Leftrightarrow \underline{a} \geq \underline{b}$ ve $\bar{a} \leq \bar{b}$ şeklinde tanımlamış ve ayrık iki aralık arasındaki sıralamayı

$$\tilde{A} < \tilde{B} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{a} < \underline{b}$$

olarak tanımlamıştır. Fakat bu sıralama, kesişen veya birbirini kapsayan aralıklar arasında bir karşılaştırma yapmamaktadır.

Ishibuchi ve Tanaka [4], iki aralık arasındaki sıralama bağıntısını alt ve üst sınırlar yardımıyla,

$$\begin{aligned} \tilde{A} \leq_{LR} \tilde{B} \quad &\Leftrightarrow \quad \underline{a} \leq \underline{b} \quad \text{ve} \quad \bar{a} \leq \bar{b} \\ \tilde{A} <_{LR} \tilde{B} \quad &\Leftrightarrow \quad \tilde{A} \leq_{LR} \tilde{B} \quad \text{ve} \quad \tilde{A} \neq \tilde{B} \end{aligned}$$

şeklinde ve bu bağıntının uygulanamadığı durumlar için orta nokta ve yarıçap yardımıyla $\leq_{mr}$ bağıntısını,

$$\begin{aligned} \tilde{A} \leq_{mr} \tilde{B} \quad &\Leftrightarrow \quad m(\tilde{A}) \leq m(\tilde{B}) \quad \text{ve} \quad r(\tilde{A}) \geq r(\tilde{B}) \\ \tilde{A} <_{mr} \tilde{B} \quad &\Leftrightarrow \quad \tilde{A} \leq_{mr} \tilde{B} \quad \text{ve} \quad \tilde{A} \neq \tilde{B} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlamıştır. Fakat bu sıralama bağıntısının da uygulanamadığı durumlar vardır. Yani aralıkların karşılaştırması için bu sıralamalar da yeterli değildir. Bu yüzden herhangi iki aralığın karşılaştırılabileceği bir bağıntıya ihtiyaç duyulmuş ve bu konuda çalışmalar sürdürülmüştür. Aralıkların oyun teorisine uygulanmasıyla beraber bu karşılaştırmaların oyuncuların seçimleri ile de tutarlı olması gözönünde bulundurulmuştur. [5, 6, 9, 10]

Şimdi oyun teorisinin mantığıyla çelişmeyen ve her bir aralığın birbirleriyle karşılaştırılmasını sağlayacak bir sıralama bağıntısı tanımlayalım. Öncelikle aralıkların bazı durumları için bu karşılaştırmayı yorumlayalım.
$\tilde{A} = [\underline{a}, \bar{a}]$ ve $\tilde{B} = [\underline{b}, \bar{b}]$ herhangi iki aralık olsun.

1. *Durum:* $\bar{a} < \underline{b}$ şeklinde ise, $\tilde{A}$ aralığının hiçbir elemanı $\tilde{B}$ aralığının elemanlarından büyük değildir. Bu yüzden rasyonel bir oyuncu, $\tilde{A}$ aralığını tercih etmez. Yani $\tilde{A} \leq \tilde{B}$ dir.

2. *Durum:* $\underline{a} < \underline{b} < \bar{a} < \bar{b}$ şeklinde ise, rasyonel bir oyuncu yine $\tilde{A}$ aralığını tercih etmez. Çünkü $\tilde{B}$ aralığını seçtiğinde elde edeceği minimum ve maksimum değerler daha fazla olacaktır. Yani $\tilde{A} \leq \tilde{B}$ dir.

3. *Durum:* $\tilde{A} = \tilde{B}$ yani $\underline{a} = \underline{b}$ ve $\bar{a} = \bar{b}$ ise, aralıklardan biri diğerine üstün değildir. Bu yüzden her iki durum da kabul edilebilir. Yani $\tilde{A} \leq \tilde{B}$ ve $\tilde{B} \leq \tilde{A}$ dir. Bu üç durumda da aralıklar kesin karşılaştırılabilirdir.

4. *Durum:* $\tilde{A} \subset \tilde{B}$ yani $\underline{a} > \underline{b}$ ve $\bar{a} < \bar{b}$ durumunda ise seçim belirsizdir. Çünkü $\tilde{B}$ aralığının $\tilde{A}$ aralığından küçük ve büyük olan değerleri vardır. Bir oyuncu $\tilde{B}$ aralığının minimum değeri daha küçük olsa da elde edebileceği maksimum kazancı düşünerek $\tilde{B}$ aralığını seçebilir. Risk almak istemeyen diğer bir oyuncu $\tilde{A}$ aralığının minimum değeri daha yüksek olduğundan daha fazla kaybetmemek için $\tilde{A}$ aralığını seçebilir. Bu yüzden seçim belirsizdir. Diğer bir deyişle bu tip iki aralık, bilinen sıralama mantığıyla karşılaştırılamaz. Zadeh [11] tarafından 1965 yılında geliştirilen bulanık(fuzzy) mantık teorisi, bu belirsizlik durumunu matematiksel modele yansıtan bir yöntemi ifade etmektedir. Bu nedenle aralık karşılaştırması fuzzy üyelik fonksiyonu yardımıyla yapılabilir.

Şimdi $\underline{a} = \underline{b} < \bar{a} < \bar{b}$ şeklindeki $\tilde{A} \subset \tilde{B}$ aralıklarını düşünelim. Bu durumda rasyonel bir oyuncu, $\tilde{B}$ aralığını seçer. $\tilde{A}$ aralığı tercih edilmediğinden $\tilde{A} \leq \tilde{B}$ kesin doğrudur yani üyelik derecesi 1 dir. Diğer yandan $\tilde{A}$ aralığı sağa doğru kaydırılıp üst sınırları eşitlendiğinde yani $\underline{b} < \underline{a} < \bar{a} = \bar{b}$ olduğunda, rasyonel bir oyuncu $\tilde{A}$ aralığını seçecektir. Bu durumda ise $\tilde{A} \leq \tilde{B}$ kesin yanlış olur yani üyelik derecesi 0 dır. Açıktır ki, $\tilde{A}$ aralığı soldan sağa hareket ettirildiğinde fuzzy üyelik derecesi 1 den 0 a gider.

$\tilde{A} \leq \tilde{B}$ bağıntısı için üyelik derecesi 1 ise oyuncu kesin $\tilde{B}$ aralığını, üyelik derecesi 0 ise oyuncu kesin $\tilde{A}$ aralığını seçer ve bu aralıkta aldığı değerler, oyuncunun risk alma derecesi ya da bağıntının kabul edilebilirlik derecesi olarak düşünülebilir. Bu durum,

$$f(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{\bar{b} - \bar{a}}{w(b) - w(a)}$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada $w(a) = \bar{a} - \underline{a}$ ve $w(b) = \bar{b} - \underline{b}$ sırasıyla $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ aralıklarının genişliğidir.

Sonuç olarak, herhangi iki aralık için "$\preceq$" sıralama bağıntısı, fuzzy üyelik fonksiyonu yardımıyla aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

Tanım 3.2.1. *$\tilde{A} = [\underline{a}, \bar{a}], \tilde{B} = [\underline{b}, \bar{b}] \in I(\mathbb{R})$ olsun. $\tilde{A} \preceq \tilde{B}$ önermesi, üyelik fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanan bir fuzzy kümesi olarak düşünülebilir:*

$$\varphi(\tilde{A} \preceq \tilde{B}) = \begin{cases} 1 & , \ \bar{a} < \underline{b} \\ 1^{-} & , \ \underline{a} \leq \underline{b} \leq \bar{a} < \bar{b} \quad ve \quad w(a) > 0 \\ \dfrac{\bar{b} - \bar{a}}{w(b) - w(a)} & , \ \underline{b} \leq \underline{a} < \bar{a} \leq \bar{b} \quad ve \quad w(b) > w(a) \\ 0,5 & , \ w(a) = w(b) \quad ve \quad \underline{a} = \underline{b} \end{cases}$$

Burada 1^{-} değeri 1 den küçüktür ve $\tilde{A}$ aralığının $\tilde{B}$ aralığından zayıf küçük olduğunu göstermektedir.

$0 \leq \varphi(\tilde{A} \preceq \tilde{B}) \leq 1$ olduğu açıktır. Bu nedenle $\varphi(\tilde{A} \preceq \tilde{B})$, $\tilde{A} \preceq \tilde{B}$ sıralama bağıntısının kabul edilebilirlik derecesi olarak yorumlanabilir. $\varphi(\tilde{A} \preceq \tilde{B}) = 0$ ise $\tilde{A} \preceq \tilde{B}$ önermesi kabul edilmez. $0 < \varphi(\tilde{A} \preceq \tilde{B}) < 1$ ise oyuncu $\tilde{A} \preceq \tilde{B}$ önermesini 0 ile 1 arasındaki farklı memnuniyet dereceleriyle kabul etmektedir. $\varphi(\tilde{A} \preceq \tilde{B}) = 1$ ise oyuncu $\tilde{A} \preceq \tilde{B}$ önermesini kesin doğru kabul etmektedir.

Benzer şekilde $\tilde{A}$ aralığının $\tilde{B}$ aralığından küçük olmadığını belirten $\tilde{A} \succeq \tilde{B}$ önermesi de tanımlanabilir.

Tanım 3.2.2. *$\tilde{A} = [\underline{a}, \bar{a}], \tilde{B} = [\underline{b}, \bar{b}] \in I(\mathbb{R})$ olsun. $\tilde{A} \succeq \tilde{B}$ önermesi, üyelik fonksiyonu $\varphi(\tilde{A} \succeq \tilde{B}) = 1 - \varphi(\tilde{A} \preceq \tilde{B})$ şeklinde tanımlanan bir fuzzy kümesi olarak düşünülebilir:*

$$\varphi(\tilde{A} \succeq \tilde{B}) = \begin{cases} 0 & , \quad \bar{a} < \underline{b} \\ 0^- & , \quad \underline{a} \le \underline{b} \le \bar{a} < \bar{b} \quad ve \quad w(a) > 0 \\ \dfrac{\underline{a} - \underline{b}}{w(b) - w(a)} & , \quad \underline{b} \le \underline{a} < \bar{a} \le \bar{b} \quad ve \quad w(b) > w(a) \\ 0,5 & , \quad w(a) = w(b) \quad ve \quad \underline{a} = \underline{b} \end{cases}$$

Uygulamada 0^- ve 1^- sırasıyla 0 ve 1 olarak alınır.

Kolayca gösterilebilir ki φ fuzzy sıralama indeksi $\underline{a} = \underline{b}$ ve $w(a) = w(b)$ durumu dışındaki durumlarda süreklidir. Ayrıca aşağıdaki özelliklerin geçerli olduğu kolayca görülebilir.

i) $0 \le \varphi(\tilde{A} \preceq \tilde{B}) \le 1$

ii) $\varphi(\tilde{A} \preceq \tilde{A}) = 0,5$

iii) $\varphi(\tilde{A} \preceq \tilde{B}) + \varphi(\tilde{A} \succeq \tilde{B}) = 1$

iv) Keyfi $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ aralıkları olmak için $\varphi(\tilde{A} \preceq \tilde{B}) \ge 0,5$ ve $\varphi(\tilde{A} \preceq \tilde{C}) \ge 0,5$ ise $\varphi(\tilde{A} \preceq \tilde{C}) \ge 0,5$ veya $\varphi(\tilde{A} \preceq \tilde{B}) \le 0,5$ ve $\varphi(\tilde{B} \preceq \tilde{C}) \le 0,5$ ise $\varphi(\tilde{A} \preceq \tilde{C}) \le 0,5$ tir.

Tanım 3.2.3. *X kümesi üzerinde bir R fuzzy bağıntısı, $\forall x \in X$ için $xRx = 0,5$ ve $\forall x, y, z \in X$ için $xRy > 0,5$, $yRz > 0,5$ iken $xRz > 0,5$ şartlarını sağlıyor ise R bir fuzzy kısmi sıralama bağıntısıdır.*

Bu nedenle (ii) ve (iv) den $\succeq$ ve $\preceq$ bağıntıları, aralıklar için bir fuzzy kısmi sıralama bağıntısıdır.

Şimdi bu sıralama bağıntısını birkaç örnek üzerinde inceleyelim. $\varphi([-2,3] \preceq [5,6]) = 1$ olduğundan $[-2,3]$ aralığı $[5,6]$ aralığından küçüktür. Bu durumda oyuncu $[5,6]$ aralığını tercih edecektir. $\varphi([-1,4] \preceq [1,5]) = 1^-$ olduğundan $[-1,4]$ aralığı $[1,5]$ aralığına tercih edilmez. $\varphi([3,6] \preceq [2,8]) = \frac{2}{3}$ olduğundan oyuncu $\dfrac{2}{3}$ memnuniyet derecesiyle önermenin doğruluğunu kabul etmektedir.

Tanım 3.2.4. *$V = \{\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, ..., \tilde{v}_n\}$ aralıklarının kümesi verilsin.*

$$\xi(\tilde{v}_i) = \min_{1\leq j\leq n}\{\tilde{v}_i \preceq \tilde{v}_j\}$$

$\tilde{v}_i$ aralığının üyelik derecesi olmak üzere,

$$\max_{1\leq i\leq n} \xi(\tilde{v}_i)$$

*değerine sahip $\tilde{v}_i^*$ aralığı, V nin **en küçük aralığı** olarak tanımlanır. Benzer şekilde,*

$$\delta(\tilde{v}_i) = \min_{1\leq j\leq n}\{\tilde{v}_i \succeq \tilde{v}_j\}$$

$\tilde{v}_i$ aralığının üyelik derecesi olmak üzere,

$$\max_{1\leq i\leq n} \delta(\tilde{v}_i)$$

*değerine sahip $\tilde{v}_i^*$ aralığı, V nin **en büyük aralığı** olarak tanımlanır.*

Örneğin, $V = \{[-1, 3], [2, 7], [3, 5]\}$ aralıkları verilsin. Burada $[-1, 3]$ aralığı diğerleri ile kesin karşılaştırılabilirdir ve en küçük aralık olduğu Tanım 3.2.1 den açıktır. Şimdi Tanım 3.2.4 yardımıyla da aynı sonuca ulaşılacağını görelim.

$$\begin{aligned}
\xi([-1,3]) &= \min\{[-1,3] \preceq [-1,3], [-1,3] \preceq [2,7], [-1,3] \preceq [3,5]\} \\
&= \min\{\frac{1}{2}, 1^-, 1^-\} = \frac{1}{2} \\
\xi([2,7]) &= \min\{[2,7] \preceq [-1,3], [2,7] \preceq [2,7], [2,7] \preceq [3,5]\} \\
&= \min\{0^-, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\} = 0 \\
\xi([3,5]) &= \min\{[3,5] \preceq [-1,3], [3,5] \preceq [2,7], [3,5] \preceq [3,5]\} \\
&= \min\{0^-, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}\} = 0
\end{aligned}$$

olur ve $\max \xi(\cdot) = \frac{1}{2}$ olduğundan $[-1, 3]$ aralığı en küçük aralıktır.

En büyük aralık seçimi ise $[2,7]$ ve $[3,5]$ aralıkları kesin karşılaştırılabilir olmadığından belirsizdir. Tanım 3.2.4 ten

$$\begin{aligned}
\delta([-1,3]) &= \min\{[-1,3] \succeq [-1,3], [-1,3] \succeq [2,7], [-1,3] \succeq [3,5]\} \\
&= \min\{\frac{1}{2}, 0^-, 0^-\} = 0 \\
\delta([2,7]) &= \min\{[2,7] \succeq [-1,3], [2,7] \succeq [2,7], [2,7] \succeq [3,5]\} \\
&= \min\{1^-, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}\} = \frac{1}{2} \\
\delta([3,5]) &= \min\{[3,5] \succeq [-1,3], [3,5] \succeq [2,7], [3,5] \succeq [3,5]\} \\
&= \min\{1^-, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

olur ve $\max \delta(\cdot) = \frac{1}{2}$ olduğundan $[2,7]$ aralığı en büyük aralıktır.

Reel sayılardaki sıralamadan farklı olarak en büyük veya en küçük aralık tek olmak zorunda değildir. Aralıkların orta noktaları eşit olduğunda en büyük veya en küçük aralık birden fazla olabilir. Örneğin $V = \{[-1,3],[2,7],[3,6]\}$ için en küçük aralık $[-1,3]$ dır. $\delta([-1,3]) = 0, \delta([2,7]) = \delta([3,6]) = \frac{1}{2}$ olduğundan $[2,7]$ ve $[3,6]$ en büyük aralıklardır.

3.3 Aralık Matris Oyunlar

Bu bölümde iki kişilik sıfır toplamlı sonlu oyunlar, aralık matris oyunlara genişletilecektir. $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, ..., \mathrm{I}_m$ ve $\mathrm{II}_1, \mathrm{II}_2, ..., \mathrm{II}_n$ sırasıyla I. ve II. oyuncuların saf stratejileri olsun. $i = 1, 2, ..., m$ ve $j = 1, 2, ..., n$ için $\tilde{g}_{ij} = [\underline{g}_{ij}, \bar{g}_{ij}]$ olmak üzere iki kişilik aralık matris oyunun getiri matrisi

$$\tilde{\mathbf{G}} = \begin{array}{c} \\ \mathrm{I}_1 \\ \mathrm{I}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{I}_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathrm{II}_1 & \mathrm{II}_2 & \dots & \mathrm{II}_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} \tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{12} & \dots & \tilde{g}_{1n} \\ \tilde{g}_{21} & \tilde{g}_{22} & \dots & \tilde{g}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{g}_{m1} & \tilde{g}_{m2} & \dots & \tilde{g}_{mn} \end{pmatrix} \end{array} \tag{3.3.1}$$

dir. Burada I. oyuncu I_i stratejisi, II. oyuncu II_j stratejisi ile oynadığında I. oyuncunun kazancı $x \in \tilde{g}_{ij}$ kadardır. Oyun sıfır toplamlı olduğundan bu değer II. oyuncunun kaybına eşittir.

Oyunun saf stratejiler sınıfındaki alt ve üst değeri sırasıyla,

$$\tilde{V}_L^S = \max_{i=1,2,...,m} \min_{j=1,2,...,n} \tilde{g}_{ij} \qquad ve \qquad \tilde{V}_U^S = \min_{j=1,2,...,n} \max_{i=1,2,...,m} \tilde{g}_{ij}$$

şeklinde tanımlanır. $\tilde{V}_L^S = \tilde{V}_U^S = \tilde{V}$ ise oyunun saf stratejilerdeki değeri $\tilde{V}$ dir. Burada $\tilde{V}_L^S$ ve $\tilde{V}_U^S$ aralık değerli olduğundan oyunun değerinin de aralık değerli olacağı açıktır.

Örnek 3.3.1.

$$\mathbf{G} = \begin{array}{c} \\ \mathrm{I}_1 \\ \mathrm{I}_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathrm{II}_1 & \mathrm{II}_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} [1,2] & [2,3] \\ [3,4] & [4,5] \end{pmatrix} \end{array}$$

getiri matrisi ile verilen 2×2 *aralık matris oyununu ele alalım. Oyun sadeleştirilebilirdir.* $\mathrm{II}_1 > \mathrm{II}_2$ *ve* $\mathrm{I}_2 > \mathrm{I}_1$ *olduğundan kesin bastırılan stratejiler atıldığında*

$$\mathbf{G} = \begin{array}{c} \\ \mathrm{I}_1 \\ \mathrm{I}_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathrm{II}_1 & \mathrm{II}_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} [1,2] & [2,3] \\ [3,4] & [4,5] \end{pmatrix} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \\ \mathrm{I}_1 \\ \mathrm{I}_2 \end{array} \begin{array}{c} \mathrm{II}_1 \\ \begin{pmatrix} [1,2] \\ [3,4] \end{pmatrix} \end{array} \rightarrow \mathrm{I}_2 \begin{array}{c} \mathrm{II}_1 \\ \begin{pmatrix} [3,4] \end{pmatrix} \end{array}$$

bulunur. Böylece oyunun değeri $[3,4]$ *tür. Şimdi oyunun saf stratejilerdeki alt ve üst değerini bulalım.*

$$\begin{aligned}\tilde{V}_L^S = \max_{i=1,2}\min_{j=1,2}\tilde{g}_{ij} &= \max\left\{\min_{j=1,2}\tilde{g}_{1j}, \min_{j=1,2}\tilde{g}_{2j}\right\} = \max\left\{[1,2],[3,4]\right\}\\ &= [3,4]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{V}_U^S = \min_{j=1,2}\max_{i=1,2}\tilde{g}_{ij} &= \min\left\{\max_{i=1,2}\tilde{g}_{i1},\ \max_{i=1,2}\tilde{g}_{i2}\right\} = \min\left\{[3,4],[4,5]\right\}\\ &= [3,4]\end{aligned}$$

bulunur. $\tilde{V}_U^S = \tilde{V}_L^S$ *olduğundan oyunun değeri* $[3,4]$ *tür.*

Önerme 3.3.2. *Getiri matrisi* (3.3.1) *ile verilen bir aralık matris oyunda*

$$\tilde{V}_L^S \preceq \tilde{V}_U^S$$

dir.

Kanıt. I. oyuncunun keyfi $\mathrm{I}_{\mathrm{i}*}$ ve II. oyuncunun keyfi $\mathrm{II}_{\mathrm{j}_*}$ stratejilerini alalım ve sabitleyelim. O halde

$$\min_{j=1,2,\ldots,n}\tilde{g}_{i_*j} \preceq \tilde{g}_{i_*j_*}$$

olur. Bu eşitsizlik her sabitlenmiş $i_* = 1,2,...,m$ için doğru olduğundan

$$\max_{i=1,2,\ldots,m}\min_{j=1,2,\ldots,n}\tilde{g}_{ij} \preceq \max_{i=1,2,\ldots,m}\tilde{g}_{ij_*}$$

olduğu bulunur. Son eşitsizlikte j_* keyfi sabitlenmiş olduğundan

$$\max_{i=1,2,\ldots,m}\min_{j=1,2,\ldots,n}\tilde{g}_{ij} \preceq \min_{j=1,2,\ldots,n}\max_{i=1,2,\ldots,m}\tilde{g}_{ij}$$

elde edilir. Yani,

$$\tilde{V}_L^S \preceq \tilde{V}_U^S$$

dir. □

Matris oyunlarda olduğu gibi aralık matris oyunlarda da saf stratejiler sınıfında oyunun değeri her zaman olmayabilir.

Örnek 3.3.3. *Getiri matrisi*

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \mathrm{II}_1 & \mathrm{II}_2 \end{array} \\ \mathbf{G} = \begin{array}{c} \mathrm{I}_1 \\ \mathrm{I}_2 \end{array} & \begin{pmatrix} [\frac{1}{2}, 1] & [-2, -1] \\ [-1, -\frac{1}{2}] & [1, 2] \end{pmatrix} \end{array}$$

ile verilen oyunu ele alalım. Saf stratejiler sınıfında oyunun alt ve üst değeri sırasıyla,

$$\begin{aligned} \tilde{V}_L^S = \max_{i=1,2} \min_{j=1,2} \tilde{g}_{ij} &= \max\left\{\min_{j=1,2} \tilde{g}_{1j}, \min_{j=1,2} \tilde{g}_{2j}\right\} = \max\left\{[-2,-1], [-1, -\tfrac{1}{2}]\right\} \\ &= [-1, -\tfrac{1}{2}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{V}_U^S = \min_{j=1,2} \max_{i=1,2} \tilde{g}_{ij} &= \min\left\{\max_{i=1,2} \tilde{g}_{i1},\ \max_{i=1,2} \tilde{g}_{i2}\right\} = \min\left\{[\tfrac{1}{2}, 1], [1, 2]\right\} \\ &= [\tfrac{1}{2}, 1] \end{aligned}$$

olduğu bulunur. $V_U^S \neq V_L^S$ *olduğundan oyunun saf stratejiler sınıfında değeri yoktur.*

Şimdi karma stratejiler sınıfında oyunun getirisini, alt ve üst değerini ve oyunun değerini tanımlayalım. Yine I. ve II. oyuncunun karma stratejiler kümesi sırasıyla,

$$X_m = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_m) : \forall i = 1, 2, .., m \text{ için } x_i \geq 0 \text{ ve } \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \right\}$$

ve

$$Y_n = \left\{ \mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n) : \forall j = 1, 2, .., n \text{ için } y_j \geq 0 \text{ ve } \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \right\}$$

dir.

Tanım 3.3.4. *Getiri matrisi* (3.3.1) *ile verilen bir aralık matris oyunda* I. *oyuncunun* $\mathbf{x} \in X_m$ *ve* II. *oyuncunun* $\mathbf{y} \in Y_n$ *karma stratejilerine karşılık* ***oyunun getirisi****,*

$$\tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}\tilde{G}\mathbf{y}^T = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_i \tilde{g}_{ij} y_j$$

ile tanımlanır.

Son eşitlikten, Tanım 3.1.2 nin (i) ve (ii) özellikleri yardımıyla oyunun getirisi,

$$\tilde{g}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \Big[\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_i \underline{g}_{ij} y_j, \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_i \bar{g}_{ij} y_j\Big]$$

olur. Oyun sıfır toplamlı olduğundan II. oyuncunun getirisi $-\tilde{g}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ dir. Buradan

$$-\tilde{g}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \Big[-\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_i \bar{g}_{ij} y_j, -\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_i \underline{g}_{ij} y_j\Big]$$

elde edilir. $\tilde{g}(\mathbf{x},\mathbf{y}) : X_m \times Y_n \to I(\mathbb{R})$ olduğu açıktır.

I. oyuncu $\mathbf{x} \in X_m$ karma stratejisi ile $\tilde{g}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ getirisini maksimalleştirmeye çalışırken, II. oyuncu $\mathbf{y} \in Y_n$ karma stratejisi ile $\tilde{g}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ getirisini minimalleştirmeye çalışır.

Tanım 3.3.5.

$$\tilde{V}_L = \max_{\mathbf{x}\in X_m}\min_{\mathbf{y}\in Y_n} \tilde{g}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \quad \textit{ve} \quad \tilde{V}_U = \min_{\mathbf{y}\in Y_n}\max_{\mathbf{x}\in X_m} \tilde{g}(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

iki kişilik aralık matris oyununun alt ve üst değerleri olmak üzere,

$$\tilde{V}_L = \tilde{V}_U = \tilde{\nu}$$

*ise $\tilde{\nu}$ aralığı **oyunun değeri** olarak tanımlanır.*

Tanım 3.3.6. *$\tilde{\nu}$, verilen aralık matris oyunun değeri olsun.*

$$\min_{\mathbf{y}\in Y_n} \tilde{g}(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}) = \tilde{\nu}$$

eşitliğini sağlayan $\mathbf{x}^* \in X_m$ stratejisi I. *oyuncunun optimal stratejisi ve*

$$\max_{\mathbf{x}\in X_m} \tilde{g}(\mathbf{x},\mathbf{y}^*) = \tilde{\nu}$$

eşitliğini sağlayan $\mathbf{y}^* \in Y_n$ stratejisi de II. *oyuncunun optimal stratejisi olmak üzere, $(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*,\tilde{\nu})$ üçlüsüne **oyunun çözümü** denir.*

3.4 Aralık Matris Oyunların Çözümü

3.4.1 Denge Noktası Olan Aralık Matris Oyunlar

Tanım 3.4.1. *Getiri matrisi*

$$\tilde{\mathbf{G}} = \begin{array}{c} \\ \mathrm{I}_1 \\ \mathrm{I}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{I}_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathrm{II}_1 & \mathrm{II}_2 & \dots & \mathrm{II}_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} \tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{12} & \dots & \tilde{g}_{1n} \\ \tilde{g}_{21} & \tilde{g}_{22} & \dots & \tilde{g}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{g}_{m1} & \tilde{g}_{m2} & \dots & \tilde{g}_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

ile verilen oyunda $\tilde{g}_{ij}$ getirisi, i. satırın minimum değeri iken aynı zamanda j. sütunun maksimum değeri ise $\tilde{g}_{ij}$ ye $\tilde{\mathbf{G}}$ aralık matris oyununun denge noktası denir. $\tilde{g}_{ij}$ denge noktası ise I_i *stratejisi* I. *oyuncunun,* II_j *stratejisi* II. *oyuncunun optimal stratejisi ve $\tilde{g}_{ij}$ değeri ise oyunun değeri olarak tanımlanır.*

Örnek 3.4.2.

$$\tilde{\mathbf{G}} = \begin{array}{c} \\ \mathrm{I}_1 \\ \mathrm{I}_2 \\ \mathrm{I}_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathrm{II}_1 & \mathrm{II}_2 & \mathrm{II}_3 & \mathrm{II}_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} [1,2] & [5,7] & [-2,1] & [3,5] \\ [5,7] & [3,6] & [3,4] & [4,4] \\ [-8,-3] & [-2,-1] & [0,1] & [10,15] \end{pmatrix} \end{array}$$

getiri matrisi ile verilen oyunu ele alalım.

Burada $\tilde{g}_{23} = [3,4]$ aralığı 2. satırın minimum değeri ve aynı zamanda 3. sütunun maksimum değeri olduğundan denge noktasıdır. Böylece Tanım 3.4.1 den oyunun değeri $[3,4]$ ve optimal stratejiler ise sırasıyla I_2 ve II_3 stratejileridir.

3.4.2 Denge Noktası Olmayan Aralık Matris Oyunlar

Bu bölümde denge noktası olmayan aralık matris oyunlar için iki çözüm yöntemi verilecek ve sonuçları karşılaştırılacaktır.

Çözüm yöntemi 1 :

Tanım 3.2.1 de aralık sıralama bağıntısı aşağıdaki şekilde tanımlanmıştı:

Tanım 3.4.3. $\tilde{A} = [\underline{a}, \bar{a}], \tilde{B} = [\underline{b}, \bar{b}] \in I(\mathbb{R})$ *olmak üzere,*

$$\varphi(\tilde{A} \preceq \tilde{B}) = \begin{cases} 1 & , \ \bar{a} < \underline{b} \\ 1^- & , \ \underline{a} \leq \underline{b} \leq \bar{a} < \bar{b} \quad ve \quad w(a) > 0 \\ \dfrac{\bar{b} - \bar{a}}{w(b) - w(a)} & , \ \underline{b} \leq \underline{a} < \bar{a} \leq \bar{b} \quad ve \quad w(b) > w(a) \\ 0,5 & , \ w(a) = w(b) \quad ve \quad \underline{a} = \underline{b} \end{cases}$$

dir. Ayrıca

$$\varphi(\tilde{A} \succeq \tilde{B}) = \begin{cases} 0,5 & , \ \tilde{A} = \tilde{B} \quad \text{için} \\ 1 - \varphi(\tilde{A} \preceq \tilde{B}) & , \ \text{diğer} \end{cases}$$

dir. Bu bölümde φ fuzzy sıralama indeksi, aralık eşitsizlik bağıntılarını buna denk klasik eşitsizliklere dönüştürmek için kullanılacaktır.

Tanım 3.4.4. $\alpha \in [0, 1]$ *aralık eşitsizlik kısıtlarının kabul derecesine göre* $\tilde{A}x \preceq \tilde{B}$ *aralık eşitsizlik bağıntısı,*

$$\bar{a}x \leq \bar{b}$$

$$\varphi(\tilde{A}x \succeq \tilde{B}) \leq \alpha$$

olarak tanımlanır. Benzer şekilde $\tilde{A}x \succeq \tilde{B}$ *aralık eşitsizlik bağıntısı,*

$$\underline{a}x \geq \underline{b}$$

$$\varphi(\tilde{A}x \preceq \tilde{B}) \leq \alpha$$

şeklinde tanımlanır.

Şimdi aralık değerli amaç fonksiyonu ile verilen maksimizasyon ve minimizasyon problemlerinin tanımını verelim.

Tanım 3.4.5. $\tilde{A} = [\underline{a}, \bar{a}] \in I(\mathbb{R})$ *olsun. Amaç fonksiyonu* $\tilde{A}$ *olan maksimizasyon problemi*

$$\begin{cases} \max \{\tilde{A}\} \\ \tilde{A} \in \Omega_1 \end{cases}$$

şeklinde yazılabilir ve bu problem aşağıdaki şekilde tanımlanan bi-objective matematiksel programlama problemine denktir:

$$\begin{cases} \max \{\underline{a}, m(\tilde{A})\} \\ \tilde{A} \in \Omega_1 \end{cases}$$

Burada Ω_1, $\tilde{A}$ *değerinin sağlaması gereken kısıtlar kümesidir.*

Tanım 3.4.6. $\tilde{A} = [\underline{a}, \bar{a}] \in I(\mathbb{R})$ *olsun. Amaç fonksiyonu* $\tilde{A}$ *olan minimizasyon problemi*

$$\begin{cases} \min \{\tilde{A}\} \\ \tilde{A} \in \Omega_2 \end{cases}$$

şeklinde yazılabilir ve bu problem aşağıdaki şekilde tanımlanan bi-objective matematiksel programlama problemine denktir:

$$\begin{cases} \min \{\bar{a}, m(\tilde{A})\} \\ \tilde{A} \in \Omega_2 \end{cases}$$

Burada Ω_2, $\tilde{A}$ *değerinin sağlaması gereken kısıtlar kümesidir.*

Tanım 3.4.3- 3.4.6 aralık matris oyunların çözümünde karşılaşılacak aralık programlama problemlerinin, bi-objective lineer programlama modeline dönüştürülmesini sağlayacaktır.

Tanım 3.4.7. $\tilde{v} = [\underline{v}, \bar{v}], \tilde{\omega} = [\underline{\omega}, \bar{\omega}] \in I(\mathbb{R})$ *olsun.* $\mathbf{x}^* \in X_m$ *ve* $\mathbf{y}^* \in Y_n$ *olmak üzere herhangi* $\mathbf{x} \in X_m$ *ve* $\mathbf{y} \in Y_n$ *için* $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \tilde{v}, \tilde{\omega})$,

$$\mathbf{x}^* \tilde{\mathbf{G}} \mathbf{y}^T \succeq \tilde{v} \quad ve \quad \mathbf{x} \tilde{\mathbf{G}} \mathbf{y}^{*T} \preceq \tilde{\omega}$$

şartlarını sağlıyor ise $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \tilde{v}, \tilde{\omega})$, $\tilde{\mathbf{G}}$ *aralık matris oyununun mantıklı çözümüdür denir.*

$(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \tilde{v}, \tilde{\omega})$, $\tilde{\mathbf{G}}$ aralık matris oyununun mantıklı çözümü ise $\tilde{v}$ ve $\tilde{\omega}$ sırasıyla I. ve II. oyuncu için oyunun mantıklı değeridir. Ayrıca $\mathbf{x}^* \in X_m$ ve $\mathbf{y}^* \in Y_n$ stratejileri, sırasıyla I. ve II. oyuncunun mantıklı stratejileridir.

I. ve II. oyuncunun $\tilde{v}$ ve $\tilde{\omega}$ mantıklı değerlerinin kümesini sırasıyla V ve W ile gösterelim.

Şimdi aralık matris oyununun çözümünü Pareto optimal çözüme benzer şekilde tanımlayalım.

Tanım 3.4.8. *$\tilde{v}^* \in V$ ve $\tilde{\omega}^* \in W$ olsun. Eğer $\tilde{v}^* \preceq \tilde{v}'$ veya $\tilde{\omega}^* \succeq \tilde{\omega}'$ şartlarını sağlayan herhangi bir $\tilde{v}' \in V(\tilde{v}' \neq \tilde{v}^*)$ ve $\tilde{\omega}' \in W(\tilde{\omega}' \neq \tilde{\omega}^*)$ değeri bulunamıyor ise $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \tilde{v}, \tilde{\omega})$, $\tilde{\mathbf{G}}$ aralık matris oyununun çözümüdür denir. Bu durumda $\mathbf{x}^*$,* I. *oyuncunun maksimin (optimal) stratejisi; $\mathbf{y}^*$,* II. *oyuncunun minimaks (optimal) stratejisi; $\tilde{v}^*$ ve $\tilde{\omega}^*$ değerleri sırasıyla* I. *ve* II. *oyuncu için $\tilde{\mathbf{G}}$ aralık matris oyununun değeridir.*

Teorem 3.4.9. *$\tilde{\mathbf{G}}$ aralık matris oyunu için,*

$$\max_{\mathbf{x}\in X_m} \min_{\mathbf{y}\in Y_n} \tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{\mathbf{x}\in X_m} \min_{1\leq j\leq n} \left\{ \sum_{i=1}^{m} \tilde{g}_{ij} x_i \right\} \tag{3.4.1}$$

ve

$$\min_{\mathbf{y}\in Y_n} \max_{\mathbf{x}\in X_m} \tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \min_{\mathbf{y}\in Y_n} \max_{1\leq i\leq m} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \tilde{g}_{ij} y_j \right\} \tag{3.4.2}$$

olur.

Teorem 3.4.9 un kanıtı için öncelikle aşağıdaki yardımcı teorem verilecektir.

Yardımcı Teorem 3.4.10. *Her bir $\tilde{C}_j (j = 1, 2, ..., n)$ bir aralık olmak üzere $\{\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, ..., \tilde{C}_n\}$ aralıklar kümesi verilsin.*

$$\min_{\mathbf{y}\in Y_n} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \tilde{C}_j y_j \right\} = \min_{1\leq j\leq n} \{\tilde{C}_j\} \tag{3.4.3}$$

eşitliği geçerlidir.

Kanıt. Fuzzy sıralama indeksi yardımıyla $\min\limits_{1\leq j\leq n} \tilde{C}_j$ bulunur.

$$\min_{1\leq j\leq n} \tilde{C}_j = \tilde{C}_l$$

olduğunu varsayalım. Buradan

$$\tilde{C}_j \succeq \tilde{C}_l \ (j = 1, 2, ..., n)$$

olduğu açıktır. Herhangi bir $y_j \geq 0$ için,

$$\tilde{C}_j y_j \succeq \tilde{C}_l y_j \ (j = 1, 2, ..., n)$$

dir. $y_j \geq 0 \ (j = 1, 2, ..., n)$ ve $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$ olduğundan

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{C}_j y_j \succeq \sum_{j=1}^{n} \tilde{C}_l y_j = \tilde{C}_l$$

olur. Buradan

$$\min_{\mathbf{y} \in Y_n} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \tilde{C}_j y_j \right\} \succeq \tilde{C}_l \tag{3.4.4}$$

elde edilir.

Öte yandan $\mathbf{y} = (0, 0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ için

$$\tilde{C}_l = \tilde{C}_1 \times 0 + \tilde{C}_2 \times 0 + ... + \tilde{C}_l \times 1 + ... + \tilde{C}_n \times 0 \succeq \min_{\mathbf{y} \in Y_n} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \tilde{C}_j y_j \right\} \tag{3.4.5}$$

dir. (3.4.4) ve (3.4.5) ten

$$\min_{\mathbf{y} \in Y_n} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \tilde{C}_j y_j \right\} = \tilde{C}_l = \min_{1 \leq j \leq n} \{\tilde{C}_j\}$$

olur. □

Yardımcı Teorem 3.4.11. *Her bir $\tilde{D}_i (i = 1, 2, ..., m)$ bir aralık olmak üzere $\{\tilde{D}_1, \tilde{D}_2, ..., \tilde{D}_m\}$ aralıklar kümesi verilsin.*

$$\max_{\mathbf{x} \in X_m} \left\{ \sum_{i=1}^{m} \tilde{D}_i x_i \right\} = \max_{1 \leq i \leq m} \{\tilde{D}_i\} \tag{3.4.6}$$

eşitliği geçerlidir.

Kanıt. Yardımcı Teorem 3.4.10 e benzer şekilde (3.4.6) eşitliğinin de doğru olduğu gösterilebilir. □

Şimdi Teorem 3.4.9 un kanıtını verelim.

Kanıt. (3.4.3) ve (3.4.6) den

$$\max_{\mathbf{x}\in X_m}\min_{\mathbf{y}\in Y_n}\tilde{g}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \max_{\mathbf{x}\in X_m}\min_{\mathbf{y}\in Y_n}\left\{\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}\tilde{g}_{ij}x_i\right)y_j\right\} = \max_{\mathbf{x}\in X_m}\min_{1\leq j\leq n}\left\{\sum_{i=1}^{m}\tilde{g}_{ij}x_i\right\}$$

$$\min_{\mathbf{y}\in Y_n}\max_{\mathbf{x}\in X_m}\tilde{g}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \min_{\mathbf{y}\in Y_n}\max_{\mathbf{x}\in X_m}\left\{\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}\tilde{g}_{ij}y_j\right)x_i\right\} = \min_{\mathbf{y}\in Y_n}\max_{1\leq i\leq m}\left\{\sum_{j=1}^{n}\tilde{g}_{ij}y_j\right\}$$

olduğu elde edilir.

□

Tanım 3.4.7- 3.4.8 ve Teorem 3.4.9 uyarınca, $\tilde{\mathbf{G}}$ aralık matris oyununun $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \tilde{\upsilon}^*, \tilde{\omega}^*)$ çözümü,

$$\begin{gathered}\max\ \{[\underline{\upsilon},\bar{\upsilon}]\}\\ \sum_{i=1}^{m}[\underline{g}_{ij},\bar{g}_{ij}]x_i \succeq [\underline{\upsilon},\bar{\upsilon}],\quad j=1,2,...,n,\\ \sum_{i=1}^{m}x_i = 1\\ x_i \geq 0 \quad i=1,2,...,m\end{gathered}\tag{3.4.7}$$

ve

$$\begin{gathered}\min\ \{[\underline{\omega},\bar{\omega}]\}\\ \sum_{j=1}^{n}[\underline{g}_{ij},\bar{g}_{ij}]y_j \preceq [\underline{\omega},\bar{\omega}],\quad i=1,2,...,m,\\ \sum_{j=1}^{n}y_j = 1\\ y_j \geq 0 \quad j=1,2,...,n\end{gathered}\tag{3.4.8}$$

aralık programlama problemlerinin çözümü ile bulunur. Şimdi bu problemlerin çözümü için bir yöntem geliştirelim.

Tanım 3.4.3, 3.4.4 ve 3.4.5 yardımıyla (3.4.7) denklemi, aşağıdaki şekilde bi-objective programlama modeline dönüştürülebilir.

$$\begin{aligned}
\max \; & \left\{ \underline{\upsilon}, \frac{\underline{\upsilon}+\bar{\upsilon}}{2} \right\} \\
\sum_{i=1}^{m} \underline{g}_{ij} x_i & \geq \underline{\upsilon} \quad j=1,2,...,n, \\
\frac{\bar{\upsilon} - \sum\limits_{i=1}^{m} \bar{g}_{ij} x_i}{(\bar{\upsilon}-\underline{\upsilon}) - \left(\sum\limits_{i=1}^{m} \bar{g}_{ij} x_i - \sum\limits_{i=1}^{m} \underline{g}_{ij} x_i \right)} & \leq \alpha \quad j=1,2,...,n, \\
\underline{\upsilon} & \leq \bar{\upsilon} \\
\sum_{i=1}^{m} x_i & = 1 \\
x_i & \geq 0 \quad i=1,2,...,m
\end{aligned} \tag{3.4.9}$$

Buradan,

$$\begin{aligned}
\max \; & \left\{ \underline{\upsilon}, \frac{\underline{\upsilon}+\bar{\upsilon}}{2} \right\} \\
\sum_{i=1}^{m} \underline{g}_{ij} x_i & \geq \underline{\upsilon} \quad j=1,2,...,n, \\
(1-\alpha) \sum_{i=1}^{m} \bar{g}_{ij} x_i + \alpha \sum_{i=1}^{m} \underline{g}_{ij} x_i & \geq (1-\alpha)\bar{\upsilon} + \alpha \underline{\upsilon} \quad j=1,2,...,n, \\
\underline{\upsilon} & \leq \bar{\upsilon} \\
\sum_{i=1}^{m} x_i & = 1 \\
x_i & \geq 0 \qquad i=1,2,...,m
\end{aligned} \tag{3.4.10}$$

şeklinde yazılabilir. Bu bi-objective programlama problemi, ağırlıklı ortalama yöntemi yardımıyla standart lineer programlama problemine aşağıdaki şekilde dönüştürülür.

$$
\begin{aligned}
\max \ & \left\{ \frac{3\underline{\upsilon}+\bar{\upsilon}}{4} \right\} \\
\sum_{i=1}^{m} \underline{g}_{ij} x_i &\geq \underline{\upsilon} \quad j=1,2,...,n, \\
(1-\alpha)\sum_{i=1}^{m} \bar{g}_{ij} x_i + \alpha \sum_{i=1}^{m} \underline{g}_{ij} x_i &\geq (1-\alpha)\bar{\upsilon} + \alpha \underline{\upsilon} \quad j=1,2,...,n, \\
\underline{\upsilon} &\leq \bar{\upsilon} \\
\sum_{i=1}^{m} x_i &= 1 \\
x_i &\geq 0 \quad i=1,2,...,m
\end{aligned}
\tag{3.4.11}
$$

Simpleks yöntem ile (3.4.11) denkleminin optimal çözümü bulunur. Bu çözümü $(\mathbf{x}^*, \underline{\upsilon}^*, \bar{\upsilon}^*)$ ile gösterelim. Kolayca gösterilebilir ki, $\tilde{\upsilon}^* = [\underline{\upsilon}^*, \bar{\upsilon}^*]$ olmak üzere $(\mathbf{x}^*, \tilde{\upsilon}^*)$, (3.4.10) denkleminin bir Pareto optimal çözümüdür. Bu nedenle $\mathbf{x}^*$, I. oyuncunun maksimin(optimal) stratejisi ve $\tilde{\upsilon}^*$, I. oyuncu için oyunun değeridir.

Şimdi benzer düşünce ile, Tanım 3.4.1, 3.4.4 ve 3.4.6 yardımıyla, (3.4.8) denklemi aşağıdaki şekilde bi-objective programlama modeline dönüştürülebilir.

$$
\begin{aligned}
\min \ & \left\{ \bar{\omega}, \frac{\underline{\omega}+\bar{\omega}}{2} \right\} \\
\sum_{j=1}^{n} \bar{g}_{ij} y_j &\leq \bar{\omega} \quad i=1,2,...,m, \\
\frac{\sum_{j=1}^{n} \underline{g}_{ij} y_j - \underline{\omega}}{(\bar{\omega}-\underline{\omega}) - \left(\sum_{j=1}^{n} \bar{g}_{ij} y_j - \sum_{j=1}^{n} \underline{g}_{ij} y_j \right)} &\leq \alpha \quad i=1,2,...,m, \\
\underline{\omega} &\leq \bar{\omega} \\
\sum_{j=1}^{n} y_j &= 1 \\
y_j &\geq 0 \quad j=1,2,...,n
\end{aligned}
\tag{3.4.12}
$$

Buradan,

$$
\begin{aligned}
\min \ & \left\{\bar{\omega}, \frac{\underline{\omega}+\bar{\omega}}{2}\right\} \\
\sum_{j=1}^{n} \bar{g}_{ij} y_j &\leq \bar{\omega} \quad i=1,2,...,m, \\
(1-\alpha)\sum_{j=1}^{n} \underline{g}_{ij} y_j + \alpha \sum_{j=1}^{n} \bar{g}_{ij} y_j &\leq (1-\alpha)\underline{\omega} + \alpha\bar{\omega} \quad i=1,2,...,m, \\
\underline{\omega} &\leq \bar{\omega} \\
\sum_{j=1}^{n} y_j &= 1 \\
y_j &\geq 0 \quad j=1,2,...,n
\end{aligned}
\tag{3.4.13}
$$

şeklinde yazılabilir. Benzer şekilde ağırlıklı ortalama metodu yardımıyla (3.4.13) denklemi aşağıdaki şekilde standart lineer programlama problemine dönüştürülür.

$$
\begin{aligned}
\min \ & \left\{\frac{3\bar{\omega}+\underline{\omega}}{4}\right\} \\
\sum_{j=1}^{n} \bar{g}_{ij} y_j &\leq \bar{\omega} \quad i=1,2,...,m, \\
(1-\alpha)\sum_{j=1}^{n} \underline{g}_{ij} y_j + \alpha \sum_{j=1}^{n} \bar{g}_{ij} y_j &\leq (1-\alpha)\underline{\omega} + \alpha\bar{\omega} \quad i=1,2,...,m, \\
\underline{\omega} &\leq \bar{\omega} \\
\sum_{j=1}^{n} y_j &= 1 \\
y_j &\geq 0 \quad j=1,2,...,n
\end{aligned}
\tag{3.4.14}
$$

Simpleks yöntem ile (3.4.14) denkleminin optimal çözümü bulunur. Bu çözümü $(\mathbf{y}^*, \underline{\omega}^*, \bar{\omega}^*)$ ile gösterelim. Kolayca gösterilebilir ki, $\tilde{\omega}^* = [\underline{\omega}^*, \bar{\omega}^*]$ olmak üzere $(\mathbf{y}^*, \tilde{\omega}^*)$, (3.4.13) denkleminin bir Pareto optimal çözümüdür. Bu nedenle $\mathbf{y}^*$, II. oyuncunun minimaks(optimal) stratejisi ve $\tilde{\omega}^*$, II. oyuncu için oyunun değeridir.

Açıktır ki, $\tilde{\mathbf{G}}$ aralık matrisindeki tüm $\tilde{g} = [\underline{g}_{ij}, \bar{g}_{ij}]$ aralıkları reel sayılar ise bir başka deyişle $\underline{g}_{ij} = \bar{g}_{ij} = g_{ij}$ ise $\tilde{\upsilon}$ ve $\tilde{\omega}$ değerleri de reel sayılardır. Yani $\underline{\upsilon} = \bar{\upsilon} = \upsilon$ ve $\underline{\omega} = \bar{\omega} = \omega$ dir. Bu durumda (3.4.11) ve (3.4.14) denklemleri sırasıyla aşağıdaki şekilde lineer programlama problemlerine dönüştürülür.

$$\begin{gathered} \max\ \{\upsilon\} \\ \sum_{i=1}^{m} g_{ij}x_i \geq \upsilon \quad j = 1, 2, ..., n, \\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, ..., m \end{gathered}$$

ve

$$\begin{gathered} \min\ \{\omega\} \\ \sum_{j=1}^{n} g_{ij}y_j \leq \omega \quad i = 1, 2, ..., m, \\ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \\ y_j \geq 0 \quad j = 1, 2, ..., n \end{gathered}$$

Bu da, klasik matris oyunların lineer programlama ile çözümüdür. Yani aralık matris oyunlar, matris oyunların bir genişlemesi olarak düşünülebilir.

Şimdi bu çözüm yöntemini, daha önce Örnek 3.4.2 de verdiğimiz denge noktası yani çözümü $[3, 4]$ olan aralık matris oyunu için inceleyelim.

Örnek 3.4.12.

$$\tilde{\mathbf{G}}_1 = \begin{array}{c} \\ \mathrm{I}_1 \\ \mathrm{I}_2 \\ \mathrm{I}_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathrm{II}_1 & \mathrm{II}_2 & \mathrm{II}_3 & \mathrm{II}_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} [1, 2] & [5, 7] & [-2, 1] & [3, 5] \\ [5, 7] & [3, 6] & [3, 4] & [4, 4] \\ [-8, -3] & [-2, -1] & [0, 1] & [10, 15] \end{pmatrix} \end{array} \qquad (3.4.15)$$

olmak üzere (3.4.11) *den* I. *oyuncu için standart lineer programlama problemi aşağıdaki şekilde yazılır.*

$$
\begin{aligned}
\max \ & \left\{\frac{3\underline{\upsilon}+\bar{\upsilon}}{4}\right\} \\
1x_1+5x_2-8x_3 &\geq \underline{\upsilon} \\
5x_1+3x_2-2x_3 &\geq \underline{\upsilon} \\
-2x_1+3x_2+0x_3 &\geq \underline{\upsilon} \\
3x_1+4x_2+10x_3 &\geq \underline{\upsilon} \\
(1-\alpha)(2x_1+7x_2-3x_3)+\alpha(1x_1+5x_2-8x_3) &\geq (1-\alpha)\bar{\upsilon}+\alpha\underline{\upsilon} \\
(1-\alpha)(7x_1+6x_2-1x_3)+\alpha(5x_1+3x_2-2x_3) &\geq (1-\alpha)\bar{\upsilon}+\alpha\underline{\upsilon} \\
(1-\alpha)(1x_1+4x_2+1x_3)+\alpha(-2x_1+3x_2+0x_3) &\geq (1-\alpha)\bar{\upsilon}+\alpha\underline{\upsilon} \\
(1-\alpha)(5x_1+4x_2+15x_3)+\alpha(3x_1+4x_2+10x_3) &\geq (1-\alpha)\bar{\upsilon}+\alpha\underline{\upsilon} \\
\underline{\upsilon} &\leq \bar{\upsilon} \\
x_1+x_2+x_3 &= 1 \\
x_1\geq 0, x_2\geq 0, x_3\geq 0 &
\end{aligned}
$$

Simpleks yöntem yardımıyla bazı $\alpha \in [0,1]$ değerleri için bu lineer programlama probleminin çözümü Çizelge 3.1 de gösterilmiştir.

Benzer şekilde (3.4.14) *ten* II. *oyuncu için lineer programlama problemi aşağıdaki şekilde yazılır.*

$$
\begin{aligned}
\min \ & \left\{\frac{3\bar{\omega}+\underline{\omega}}{4}\right\} \\
2y_1+7y_2+1y_3+5y_4 &\leq \bar{\omega} \\
7y_1+6y_2+4y_3+4y_4 &\leq \bar{\omega} \\
-3y_1-1y_2+1y_3+15y_4 &\leq \bar{\omega} \\
(1-\alpha)(1y_1+5y_2-2y_3+3y_4)+\alpha(2y_1+7y_2+1y_3+5y_4) &\leq (1-\alpha)\underline{\omega}+\alpha\bar{\omega} \\
(1-\alpha)(5y_1+3y_2+3y_3+4y_4)+\alpha(7y_1+6y_2+4y_3+4y_4) &\leq (1-\alpha)\underline{\omega}+\alpha\bar{\omega} \\
(1-\alpha)(-8y_1-2y_2+0y_3+10y_4)+\alpha(-3y_1-1y_2+1y_3+15y_4) &\leq (1-\alpha)\underline{\omega}+\alpha\bar{\omega} \\
(1-\alpha)(-8y_1-2y_2+0y_3+10y_4)+\alpha(-3y_1-1y_2+1y_3+15y_4) &\leq (1-\alpha)\underline{\omega}+\alpha\bar{\omega} \\
\underline{\omega} &\leq \bar{\omega} \\
y_1+y_2+y_3+y_4 &= 1 \\
y_1\geq 0, y_2\geq 0, y_3\geq 0, y_4\geq 0 &
\end{aligned}
$$

Simpleks yöntem yardımıyla bazı $\alpha \in [0,1]$ değerleri için bu lineer programlama probleminin çözümü Çizelge 3.1 de gösterilmiştir.

Çizelge 3.1: $\tilde{\mathbf{G}}_1$ aralık matris oyununun çözümü

α	$\mathbf{x}^*$	$\tilde{\upsilon}^*$	$\mathbf{y}^*$	$\tilde{\omega}^*$
0	(0,1,0)	[3,4]	(0,0,1,0)	[3,4]
0.1	(0,1,0)	[3,4]	(0,0,1,0)	[3,4]
0.2	(0,1,0)	[3,4]	(0,0,1,0)	[3,4]
0.3	(0,1,0)	[3,4]	(0,0,1,0)	[3,4]
0.4	(0,1,0)	[3,4]	(0,0,1,0)	[3,4]
0.5	(0,1,0)	[3,4]	(0,0,1,0)	[3,4]
0.55	(0,1,0)	[3,4]	(0,0,1,0)	[3,4]
0.56	(0,1,0)	[3,4]	(0,0,1,0)	[3,4]
0.58	(0,1,0)	[3,4]	(0,0,1,0)	[3,4]
0.6	(0,1,0)	[3,4]	(0,0,1,0)	[3,4]
0.7	(0,1,0)	[3,4]	(0,0,1,0)	[3,4]

Örnek 3.4.2 de olduğu gibi bu çözüm yöntemiyle de aynı sonuca ulaşılmıştır. Yani oyunun çözümü $[3,4]$ aralığı ve I. ve II. oyuncunun optimal stratejileri sırasıyla $\mathbf{x}^* = (0,1,0)$ ve $\mathbf{y}^* = (0,0,1,0)$ dir.

Şimdi denge noktası olmayan bir aralık matris oyunu için bu çözüm yöntemini inceleyelim ve daha sonra vereceğimiz çözüm yöntemiyle elde edilen sonucu karşılaştıralım.

Örnek 3.4.13. *Getiri matrisi*

$$\tilde{\mathbf{G}}_2 = \begin{array}{c} \\ \mathrm{I}_1 \\ \mathrm{I}_2 \\ \mathrm{I}_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathrm{II}_1 & \mathrm{II}_2 & \mathrm{II}_3 & \mathrm{II}_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} [12,17] & [11,16] & [8,12] & [7,13] \\ [18,22] & [12,15] & [7,14] & [5,15] \\ [4,4] & [4,4] & [4,4] & [4,4] \end{pmatrix} \end{array} \tag{3.4.16}$$

olan iki kişilik sıfır toplamlı aralık matris oyununu ele alalım.

(3.4.11) *den* I. *oyuncu için lineer programlama problemi aşağıdaki şekilde yazılır.*

$$
\begin{aligned}
\max \left\{ \frac{3\underline{v}+\bar{v}}{4} \right\} & \\
12x_1 + 18x_2 + 4x_3 &\geq \underline{v} \\
11x_1 + 12x_2 + 4x_3 &\geq \underline{v} \\
8x_1 + 7x_2 + 4x_3 &\geq \underline{v} \\
7x_1 + 5x_2 + 4x_3 &\geq \underline{v} \\
(1-\alpha)(17x_1 + 22x_2 + 4x_3) + \alpha(12x_1 + 18x_2 + 4x_3) &\geq (1-\alpha)\bar{v} + \alpha\underline{v} \\
(1-\alpha)(16x_1 + 15x_2 + 4x_3) + \alpha(11x_1 + 12x_2 + 4x_3) &\geq (1-\alpha)\bar{v} + \alpha\underline{v} \\
(1-\alpha)(12x_1 + 14x_2 + 4x_3) + \alpha(8x_1 + 7x_2 + 4x_3) &\geq (1-\alpha)\bar{v} + \alpha\underline{v} \\
(1-\alpha)(13x_1 + 15x_2 + 4x_3) + \alpha(7x_1 + 5x_2 + 4x_3) &\geq (1-\alpha)\bar{v} + \alpha\underline{v} \\
\underline{v} &\leq \bar{v} \\
x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\
x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 &
\end{aligned}
$$

Simpleks yöntem yardımıyla bazı $\alpha \in [0,1]$ *değerleri için bu lineer programlama probleminin çözümü olan* $\mathbf{x}^*$ *maksimin (optimal) stratejileri ve* $\tilde{v}^* = [\underline{v}^*, \bar{v}^*]$ *değeri bulunur. Bu değerler Çizelge 3.2 de gösterilmiştir.*

Benzer şekilde (3.4.14) *ten* II. *oyuncu için lineer programlama problemi aşağıdaki şekilde yazılır.*

$$\begin{aligned}
&\min\left\{\frac{3\bar{\omega}+\underline{\omega}}{4}\right\} && \\
17y_1+16y_2+12y_3+13y_4 &\leq \bar{\omega} \\
22y_1+15y_2+14y_3+15y_4 &\leq \bar{\omega} \\
4y_1+4y_2+4y_3+4y_4 &\leq \bar{\omega} \\
(1-\alpha)(12y_1+11y_2+8y_3+7y_4)+\alpha(17y_1+16y_2+12y_3+13y_4) &\leq (1-\alpha)\underline{\omega}+\alpha\bar{\omega} \\
(1-\alpha)(18y_1+12y_2+7y_3+5y_4)+\alpha(22y_1+15y_2+14y_3+15y_4) &\leq (1-\alpha)\underline{\omega}+\alpha\bar{\omega} \\
(1-\alpha)(4y_1+4y_2+4y_3+4y_4)+\alpha(4y_1+4y_2+4y_3+4y_4) &\leq (1-\alpha)\underline{\omega}+\alpha\bar{\omega} \\
\underline{\omega} &\leq \bar{\omega} \\
y_1+y_2+y_3+y_4 &= 1 \\
y_1\geq 0, y_2\geq 0, y_3\geq 0, y_4\geq 0 &
\end{aligned}$$

Simpleks yöntem yardımıyla bazı $\alpha \in [0,1]$ değerleri için bu lineer programlama probleminin çözümü olan $\mathbf{y}^*$ minimaks (optimal) stratejileri ve $\tilde{\omega}^* = [\underline{\omega}^*, \bar{\omega}^*]$ değeri bulunur. Bu değerler Çizelge 3.2 de gösterilmiştir.

Çizelge 3.2: $\tilde{\mathbf{G}}_2$ aralık matris oyununun çözümü

α	$\mathbf{x}^*$	$\tilde{v}^*$	$\mathbf{y}^*$	$\tilde{\omega}^*$
0	(1,0,0)	[7,12]	(0,0,1,0)	[8,14]
0.1	(1,0,0)	[7,12.111]	(0,0,1,0)	[7.778,14]
0.2	(1,0,0)	[7,12.250]	(0,0,1,0)	[7.5,14]
0.3	(1,0,0)	[7,12.429]	(0,0,1,0)	[7.143,14]
0.4	(1,0,0)	[7,13]	(0,0,1,0)	[7,14]
0.5	(1,0,0)	[7,13]	(0,0,1,0)	[7,14]
0.55	(1,0,0)	[7,13]	(0,0,1,0)	[7,14]
0.56	(1,0,0)	[7,13]	(0,0,1,0)	[7,14]
0.58	(1,0,0)	[7,13]	(0,0,1,0)	[7,14]
0.6	(1,0,0)	[7,13]	(0,0,1,0)	[7,14]
0.7	(1,0,0)	[7,13]	(0,0,1,0)	[7,14]

Şimdi aralık matris oyunların çözümü için diğer bir yöntem verilecektir.

Çözüm Yöntemi 2 :

Bu çözüm yöntemine geçmeden önce, denge noktası olmayan matris oyunlar için verdiğimiz çözüm yöntemini kısaca hatırlayalım.

Verilen **G** matris oyunu için

$$\min_{\mathbf{y}\in Y_n} g(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \min_{j=1,\dots,n} \left\{ \sum_{i=1}^{m} x_i g_{ij} \right\} = \mu(\mathbf{x})$$

olmak üzere

$$\upsilon = \mu(\mathbf{x}^*) = \max_{\mathbf{x}\in X_m} \{\mu(x)\} = \max_{\mathbf{x}\in X_m} \min_{j=1,\dots,n} \left\{ \sum_{i=1}^{m} x_i g_{ij} \right\} \tag{3.4.17}$$

eşitliğini sağlayan $\mathbf{x}^* \in X_m$, I. oyuncunun optimal stratejisi ve $\upsilon = \mu(\mathbf{x}^*)$, I. oyuncu için oyunun değeridir. I. oyuncunun optimal stratejisini ve oyunun değerini hesaplamak

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_m \geq 0, \\ \sum_{i=1}^{m} g_{ij} x_i \geq \mu, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ \mu \to \max \end{gathered} \tag{3.4.18}$$

lineer programlama problemini çözmek ile eşdeğerdir. Benzer şekilde

$$\max_{\mathbf{x}\in X_m} g(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \max_{i=1,\dots,m} \left\{ \sum_{j=1}^{n} g_{ij} y_j \right\} = \nu(\mathbf{y})$$

olmak üzere

$$\omega = \nu(\mathbf{y}^*) = \min_{\mathbf{y}\in Y_n} \{\nu(y)\} = \min_{\mathbf{y}\in Y_n} \max_{i=1,\dots,m} \left\{ \sum_{j=1}^{n} g_{ij} y_j \right\}$$

eşitliğini sağlayan $\mathbf{y}^* \in Y_n$, II. oyuncunun optimal stratejisi ve $\omega = \nu(\mathbf{y}^*)$, II. oyuncu için oyunun değeridir. Böylece II. oyuncu

$$\begin{gathered} y_1 + y_2 + \dots + y_n = 1 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \dots, y_n \geq 0, \\ \sum_{j=1}^{n} g_{ij} y_j \leq \nu, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ \nu \to \min \end{gathered} \tag{3.4.19}$$

problemini çözmeye çalışır. Kolayca görülebilir ki bu iki problem bir primal-dual çifti oluşturur. Bu yüzden $\max \mu = \min \nu$ olur. Yani $V = \upsilon = \omega$ oyunun değeridir.

Şimdi bu çözüm yöntemini aralık matris oyunlara genişletelim. $\tilde{\mathbf{G}} = \tilde{g}_{ij} = ([\underline{g}_{ij}, \bar{g}_{ij}])_{m\times n}$ verilen aralık matris oyununun getiri matrisi olsun. Bu aralıklardan alınan herhangi g_{ij} ler için oluşturulacak getiri matrisi $\mathbf{G} = (g_{ij})_{m\times n}$ dir. (3.4.17) den açıktır ki I. oyuncu için $\mathbf{G}$ matris oyununun değeri, g_{ij} değerlerine bağlı olacaktır. Diğer bir açıdan υ, $\tilde{g}_{ij}$ getiri aralıklarındaki g_{ij} $(i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n)$ değerlerinin bir fonksiyonudur ve $\upsilon = \mu((g_{ij}))$ ya da $\upsilon = \mu(\mathbf{G})$ ile gösterilir. Yine $\mathbf{G}$ matris oyununda I. oyuncunun $\mathbf{x}^* \in X_m$ optimal stratejisi de g_{ij} değerlerinin bir fonksiyonudur ve $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*((g_{ij}))$ veya $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*(\mathbf{G})$ ile gösterilir. Benzer şekilde II. oyuncu için de $\mathbf{G}$ matris oyununda $g_{ij} \in \tilde{g}_{ij}$ olmak üzere oyunun değeri $\omega = \nu((g_{ij}))$ ve optimal strateji $\mathbf{y}^* = \mathbf{y}^*((g_{ij}))$ şeklinde g_{ij} değerlerinin bir fonksiyonu olarak düşünülebilir.

Ayrıca (3.4.17) den $\mathbf{G}$ matris oyununun I. oyuncu için değeri $\upsilon = \mu((g_{ij}))$, $g_{ij} \in \tilde{g}_{ij}$ değerlerinin azalmayan bir fonksiyonudur. Gerçekten, herhangi g_{ij} ve $\acute{g}_{ij} \in \tilde{g}_{ij}$ değerleri için $g_{ij} \leq \acute{g}_{ij}$ ise $\mathbf{x} \in X_m$, I. oyuncunun karma stratejisi olmak üzere $x_i \geq 0$ $(i = 1, ..., m)$ ve $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$ olduğundan

$$\sum_{i=1}^{m} x_i g_{ij} \leq \sum_{i=1}^{m} x_i \acute{g}_{ij}$$

olur. Böylece

$$\min_{j=1,\dots,n} \left\{ \sum_{i=1}^{m} x_i g_{ij} \right\} \leq \min_{j=1,\dots,n} \left\{ \sum_{i=1}^{m} x_i \acute{g}_{ij} \right\}$$

dir. Buradan

$$\max_{\mathbf{x}\in X_m} \min_{j=1,\dots,n} \left\{ \sum_{i=1}^{m} x_i g_{ij} \right\} \leq \max_{\mathbf{x}\in X_m} \min_{j=1,\dots,n} \left\{ \sum_{i=1}^{m} x_i \acute{g}_{ij} \right\}$$

elde edilir. Bir başka deyişle $\mu((g_{ij})) \leq \mu((\acute{g}_{ij}))$ veya $\mu(\mathbf{G}) \leq \mu(\acute{\mathbf{G}})$ dir.

Herhangi $g_{ij} \in \tilde{g}_{ij}$ değerleri için lineer programlamanın dualite teoreminden $\mu((g_{ij})) = \nu((g_{ij}))$ dir veya $(\mu(\mathbf{G}) = \nu(\mathbf{G}), \mathbf{G} = (g_{ij})_{m\times n})$. Böylece $\mathbf{G}$ matris oyununun değeri vardır ve $V = V((g_{ij}))$ veya $V = V(\mathbf{G})$ ile gösterilir.

Yukarıdaki tartışmalardan $\mathbf{G}$ matris oyununun $V = V((g_{ij}))$ (veya $V = V(\mathbf{G})$) değeri de $g_{ij} \in \tilde{g}_{ij}$ değerlerinin azalmayan bir fonksiyonudur.

$\tilde{\mathbf{G}}$ aralık değerli matris oyununun değerinin de kapalı aralık olacağı açıktır. $\mathbf{G}$ matris oyununun $v = \mu((g_{ij}))$ değerinin $g_{ij} \in \tilde{g}_{ij}$ değerlerinin azalmayan bir fonksiyonu olduğunu biliyoruz. Böylece $\tilde{\mathbf{G}}$ aralık değerli matris oyununun $\bar{v}$ üst sınırı ve I. oyuncunun buna karşılık gelen $\bar{\mathbf{x}}^* \in X_m$ optimal stratejisi sırasıyla $\bar{v} = \mu((\bar{g}_{ij}))$ ve $\bar{\mathbf{x}}^* = \mathbf{x}^*((\bar{g}_{ij}))$ dir. (3.4.18) den, $(\bar{v}, \bar{\mathbf{x}}^*)$ aşağıdaki lineer programlama probleminin optimal çözümüdür.

$$\begin{gathered}\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + ... + \bar{x}_m = 1\\ \bar{x}_1 \geq 0, \bar{x}_2 \geq 0, ..., \bar{x}_m \geq 0,\\ \sum_{i=1}^{m} \bar{g}_{ij}\bar{x}_i \geq \bar{\mu}, \quad (j = 1, 2, ..., n),\\ \bar{\mu} \to \max\end{gathered} \tag{3.4.20}$$

Burada $\bar{x}_i (i = 1, 2, ..., m)$ ve $\bar{\mu}$ değişkenlerdir. Genelliği bozmadan $\bar{\mu} > 0$ kabul edilebilir. $\bar{X}_i = \dfrac{\bar{x}_i}{\bar{\mu}}$ alınırsa $\bar{X}_i \geq 0$ $(i = 1, 2, ..., m)$ ve

$$\sum_{i=1}^{m} \bar{X}_i = \sum_{i=1}^{m} (\frac{\bar{x}_i}{\bar{\mu}}) = \frac{1}{\bar{\mu}}$$

olur. Böylece (3.4.20) problemi

$$\begin{gathered}\min \{\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + ... + \bar{X}_m\}\\ \sum_{i=1}^{m} \bar{g}_{ij}\bar{X}_i \geq 1, \quad j = 1, 2, ..., n,\\ \bar{X}_1 \geq 0, \bar{X}_2 \geq 0, ..., \bar{X}_m \geq 0,\end{gathered} \tag{3.4.21}$$

lineer programlama problemine dönüşür. Simpleks yöntem yardımıyla bu problemin $\bar{\mathbf{X}}^* = (\bar{X}_1^*, \bar{X}_2^*, ..., \bar{X}_m^*)$ optimal çözümü elde edilir. Böylece $\tilde{\mathbf{G}}$ aralık matris oyununda I. oyuncu için oyunun değerinin $\bar{v}$ üst sınırı ve $\bar{\mathbf{x}}^*$ optimal stratejisi,

$$\bar{v} = 1/\sum_{i=1}^{m} \bar{X}_i^* \quad \text{ve} \quad \bar{x}_i^* = \bar{v}\bar{X}_i^* \quad (i = 1, 2, ..., m)$$

dir.

Benzer şekilde $\tilde{\mathbf{G}}$ aralık matris oyununda I. oyuncu için oyunun değerinin $\underline{v}$ alt sınırı ve optimal stratejisi sırasıyla $\underline{v} = \mu((\underline{g}_{ij}))$ ve $\underline{\mathbf{x}}^* = \mathbf{x}^*((\underline{g}_{ij}))$ dir. (3.4.18) den, $(\underline{v}, \underline{\mathbf{x}}^*)$ aşağıdaki lineer programlama probleminin optimal çözümüdür.

$$\begin{gathered} \underline{x}_1 + \underline{x}_2 + ... + \underline{x}_m = 1 \\ \underline{x}_1 \geq 0, \underline{x}_2 \geq 0, ..., \underline{x}_m \geq 0, \\ \sum_{i=1}^{m} \underline{g}_{ij} \underline{x}_i \geq \underline{\mu}, \quad j = 1, 2, ..., n, \\ \underline{\mu} \to \max \end{gathered} \tag{3.4.22}$$

$\underline{X}_i = \dfrac{\underline{x}_i}{\underline{\mu}} i = (1, 2, ..., m)$ ve $\underline{v} > 0$ olsun. Bu durumda $\underline{X}_i \geq 0$ ve

$$\sum_{i=1}^{m} \underline{X}_i = \sum_{i=1}^{m} (\frac{\underline{x}_i}{\underline{\mu}}) = \frac{1}{\underline{\mu}}$$

olur. Böylece (3.4.22) problemi

$$\begin{gathered} \min \{\underline{X}_1 + \underline{X}_2 + ... + \underline{X}_m\} \\ \sum_{i=1}^{m} \underline{g}_{ij} \underline{X}_i \geq 1, \quad (j = 1, 2, ..., n), \\ \underline{X}_1 \geq 0, \underline{X}_2 \geq 0, ..., \underline{X}_m \geq 0, \end{gathered} \tag{3.4.23}$$

lineer programlama problemine dönüşür. Simpleks yöntem yardımıyla bu problemin $\underline{\mathbf{X}}^* = (\underline{X}_1^*, \underline{X}_2^*, ..., \underline{X}_m^*)$ optimal çözümü elde edilir. Böylece $\tilde{\mathbf{G}}$ aralık matris oyununda I. oyuncu için oyunun değerinin $\underline{v}$ alt sınırı ve $\underline{\mathbf{x}}^* \in X_m$ optimal stratejisi sırasıyla,

$$\underline{v} = 1/\sum_{i=1}^{m} \underline{X}_i^* \quad \text{ve} \quad \underline{x}_i^* = \underline{v}\underline{X}_i^* \quad (i = 1, 2, ..., m)$$

dir.

Böylece I. oyuncu için oyunun değeri $[\underline{v}, \bar{v}]$ kapalı aralığıdır.

Benzer şekilde $\tilde{\mathbf{G}}$ aralık matris oyununda II. oyuncu için oyunun değerinin $\bar{\omega}$ üst sınırı ve II. oyuncunun optimal stratejisi sırasıyla $\bar{\omega} = \nu((\bar{g}_{ij}))$ ve $\bar{\mathbf{y}}^* = \mathbf{y}^*((\bar{g}_{ij}))$ olur. (3.4.19) ten, $(\bar{\omega}, \bar{\mathbf{y}}^*)$ aşağıdaki lineer programlama probleminin optimal çözümüdür.

$$
\begin{gathered}
\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + ... + \bar{y}_n = 1 \\
\bar{y}_1 \geq 0, \bar{y}_2 \geq 0, ..., \bar{y}_n \geq 0, \\
\sum_{j=1}^{n} \bar{g}_{ij}\bar{y}_j \leq \bar{\nu}, \quad (i = 1, 2, ..., m), \\
\bar{\nu} \to \min
\end{gathered}
\tag{3.4.24}
$$

Burada $\bar{y}_j (j = 1, 2, ..., n)$ ve $\bar{\nu}$ değişkenlerdir. Genelliği bozmadan $\bar{\nu} > 0$ kabul edilebilir. $\bar{Y}_j = \dfrac{\bar{y}_j}{\bar{\nu}}$ alınırsa $\bar{Y}_j \geq 0$ $(j = 1, 2, ..., n)$ ve

$$
\sum_{j=1}^{n} \bar{Y}_j = \sum_{j=1}^{n} (\frac{\bar{y}_j}{\bar{\nu}}) = \frac{1}{\bar{\nu}}
$$

olur. Böylece (3.4.24) problemi

$$
\begin{gathered}
\max \{\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 + ... + \bar{Y}_n\} \\
\sum_{j=1}^{n} \bar{g}_{ij}\bar{Y}_j \leq 1, \quad i = 1, 2, ..., m, \\
\bar{Y}_1 \geq 0, \bar{Y}_2 \geq 0, ..., \bar{Y}_n \geq 0,
\end{gathered}
\tag{3.4.25}
$$

lineer programlama problemine dönüşür. Simpleks yöntem yardımıyla bu problemin $\bar{\mathbf{Y}}^* = (\bar{Y}_1^*, \bar{Y}_2^*, ..., \bar{Y}_n^*)$ optimal çözümü elde edilir. Böylece $\tilde{\mathbf{G}}$ aralık matris oyununda II. oyuncu için oyunun değerinin $\bar{\omega}$ üst sınırı ve $\bar{\mathbf{y}}^*$ optimal stratejisi sırasıyla,

$$
\bar{\omega} = 1/\sum_{j=1}^{n} \bar{Y}_j^* \quad \text{ve} \quad \bar{y}_j^* = \bar{\omega}\bar{Y}_j^* \quad (j = 1, 2, ..., n)
$$

dir.

$\tilde{\mathbf{G}}$ aralık matris oyununda II. oyuncu için oyunun değerinin $\underline{\omega}$ alt sınırı ve II. oyuncunun optimal stratejisi sırasıyla $\underline{\omega} = \nu((\underline{g}_{ij}))$ ve $\bar{\mathbf{y}}^* = \mathbf{y}^*((\underline{g}_{ij}))$ dir. (3.4.19) ten, $(\underline{\omega}, \underline{\mathbf{y}}^*)$ aşağıdaki lineer programlama probleminin optimal çözümüdür.

$$
\begin{gathered}
\underline{y}_1 + \underline{y}_2 + ... + \underline{y}_n = 1 \\
\underline{y}_1 \geq 0, \underline{y}_2 \geq 0, ..., \underline{y}_n \geq 0, \\
\sum_{j=1}^{n} \underline{g}_{ij}\underline{y}_j \leq \bar{\nu}, \quad (i = 1, 2, ..., m), \\
\underline{\nu} \to \min
\end{gathered}
\tag{3.4.26}
$$

Genelliği bozmadan $\underline{\nu} > 0$ kabul edilebilir. $\underline{Y}_j = \dfrac{\underline{y}_j}{\underline{\nu}}$ alınırsa $\underline{Y}_j \geq 0$ $(j = 1, 2, ..., n)$ ve

$$\sum_{j=1}^{n} \underline{Y}_j = \sum_{j=1}^{n} (\frac{\underline{y}_j}{\underline{\nu}}) = \frac{1}{\underline{\nu}}$$

olur. Böylece (3.4.26) problemi

$$\begin{gathered} \max \{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + ... + \underline{Y}_n\} \\ \sum_{j=1}^{n} \underline{g}_{ij} \underline{Y}_j \leq 1, \quad (i = 1, 2, ..., m), \\ \underline{Y}_1 \geq 0, \underline{Y}_2 \geq 0, ..., \underline{Y}_n \geq 0, \end{gathered} \tag{3.4.27}$$

lineer programlama problemine dönüşür. Simpleks yöntem yardımıyla bu problemin $\underline{\mathbf{Y}}^* = (\underline{Y}_1^*, \underline{Y}_2^*, ..., \underline{Y}_n^*)$ optimal çözümü elde edilir. Böylece $\tilde{\mathbf{G}}$ aralık matris oyununda II. oyuncu için oyunun değerinin $\underline{\omega}$ üst sınırı ve $\underline{\mathbf{y}}^*$ optimal stratejisi sırasıyla,

$$\underline{\omega} = 1 / \sum_{j=1}^{n} \underline{Y}_j^* \quad \text{ve} \quad \underline{y}_j^* = \underline{\omega} \underline{Y}_j^* \quad (j = 1, 2, ..., n)$$

dir.

Kolayca görülebilir ki (3.4.21) ve (3.4.25) lineer programlama problemleri bir primal-dual çifti oluşturur. Bu yüzden dualite teoreminden $\sum_{i=1}^{m} \bar{X}_i$ minimumu yani $\bar{\mu}$ değerinin maksimumu, $\sum_{j=1}^{n} \bar{Y}_j$ değerinin maksimumuna yani $\bar{\nu}$ değerinin minimumuna eşittir. Bir başka deyişle $\bar{\upsilon} = \bar{\omega}$ dir. Benzer şekilde (3.4.23) ve (3.4.27) lineer programlama problemleri de bir primal-dual çifti oluşturur. Yani $\underline{\upsilon} = \underline{\omega}$ dir. Böylece $\underline{V} = \underline{\upsilon} = \underline{\omega}$ ve $\bar{V} = \bar{\upsilon} = \bar{\omega}$ olmak üzere $\tilde{\mathbf{G}}$ aralık matris oyununun değeri $[\underline{V}, \bar{V}]$ dir; ve bu değer (3.4.21) ve (3.4.25) veya (3.4.23) ve (3.4.27) lineer programlama problemlerinin çözümünden elde edilir.

Şimdi bu çözüm yöntemi ile Örnek 3.4.16 te verilen aralık matris oyununun çözümünü bulalım.

Örnek 3.4.14. *Getiri matrisi*

$$\mathbf{G} = \begin{array}{c} \\ \mathrm{I}_1 \\ \mathrm{I}_2 \\ \mathrm{I}_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathrm{II}_1 & \mathrm{II}_2 & \mathrm{II}_3 & \mathrm{II}_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} [12, 17] & [11, 16] & [8, 12] & [7, 13] \\ [18, 22] & [12, 15] & [7, 14] & [5, 15] \\ [4, 4] & [4, 4] & [4, 4] & [4, 4] \end{pmatrix} \end{array} \tag{3.4.28}$$

olan iki kişilik sıfır toplamlı aralık matris oyununu ele alalım.

(3.4.21) *ve* (3.4.23) *den sırasıyla,*

$$\begin{cases} \min\ \{\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \bar{X}_3\} \\ 17\bar{X}_1 + 22\bar{X}_2 + 4\bar{X}_3 \geq 1 \\ 16\bar{X}_1 + 15\bar{X}_2 + 4\bar{X}_3 \geq 1 \\ 12\bar{X}_1 + 14\bar{X}_2 + 4\bar{X}_3 \geq 1 \\ 13\bar{X}_1 + 15\bar{X}_2 + 4\bar{X}_3 \geq 1 \\ \bar{X}_i \geq 0\ (i = 1, 2, 3) \end{cases} \tag{3.4.29}$$

ve

$$\begin{cases} \min\ \{\underline{X}_1 + \underline{X}_2 + \underline{X}_3\} \\ 12\underline{X}_1 + 18\underline{X}_2 + 4\underline{X}_3 \geq 1 \\ 11\underline{X}_1 + 12\underline{X}_2 + 4\underline{X}_3 \geq 1 \\ 8\underline{X}_1 + 7\underline{X}_2 + 4\underline{X}_3 \geq 1 \\ 7\underline{X}_1 + 5\underline{X}_2 + 4\underline{X}_3 \geq 1 \\ \underline{X}_i \geq 0\ (i = 1, 2, 3) \end{cases} \tag{3.4.30}$$

olur.

Bu lineer programlama problemlerinin optimal çözümleri $\bar{\mathbf{X}}^* = (\bar{X}_1^*, \bar{X}_2^*, \bar{X}_3^*)$ *ve* $\underline{\mathbf{X}}^* = (\underline{X}_1^*, \underline{X}_2^*, \underline{X}_3^*)$*, Simpleks yöntem yardımıyla*

$$\bar{\mathbf{X}}^* = (0, 0.071, 0) \quad ve \quad \underline{\mathbf{X}}^* = (0.143, 0, 0)$$

bulunur. $\bar{v} = 1/\sum_{i=1}^{3} \bar{X}_i^*$ *ve* $\bar{x}_i^* = \bar{v}\bar{X}_i^*$ *olduğundan*

$$\bar{v} = 14.085, \quad \bar{x}_1^* = 0, \quad \bar{x}_2^* = 1, \quad \bar{x}_3^* = 0$$

dir. $\underline{v} = 1/\sum_{i=1}^{3} \underline{X}_i^*$ *ve* $\underline{x}_i^* = \underline{vX}_i^*$ *olduğundan*

$$\underline{v} = 6.993, \quad \underline{x}_1^* = 1, \quad \underline{x}_2^* = 0, \quad \underline{x}_3^* = 0$$

bulunur. Böylece verilen aralık matris oyununun I. *oyuncu için değeri* $[\underline{v}, \bar{v}] = [6.993, 14.085]$ *kapalı aralığıdır.*

Benzer şekilde (3.4.25) *ve* (3.4.27) *den sırasıyla,*

$$\begin{cases} \max\ \{\bar{Y}_1+\bar{Y}_2+\bar{Y}_3+\bar{Y}_4\} \\ 17\bar{Y}_1+16\bar{Y}_2+12\bar{Y}_3+13\bar{Y}_4 \leq 1 \\ 22\bar{Y}_1+15\bar{Y}_2+14\bar{Y}_3+15\bar{Y}_4 \leq 1 \\ 4\bar{Y}_1+4\bar{Y}_2+4\bar{Y}_3+4\bar{Y}_4 \leq 1 \\ \bar{Y}_j \geq 0\ (j=1,2,3,4) \end{cases} \tag{3.4.31}$$

ve

$$\begin{cases} \max\ \{\underline{Y}_1+\underline{Y}_2+\underline{Y}_3+\underline{Y}_4\} \\ 12\underline{Y}_1+11\underline{Y}_2+8\underline{Y}_3+7\underline{Y}_4 \leq 1 \\ 18\underline{Y}_1+12\underline{Y}_2+7\underline{Y}_3+5\underline{Y}_4 \leq 1 \\ 4\underline{Y}_1+4\underline{Y}_2+4\underline{Y}_3+4\underline{Y}_4 \leq 1 \\ \underline{Y}_j \geq 0\ (j=1,2,3,4) \end{cases} \tag{3.4.32}$$

olur. Simpleks yöntem yardımıyla

$$\bar{\mathbf{Y}}^* = (0,0,0.071,0) \quad ve \quad \underline{\mathbf{Y}}^* = (0,0,0,0.143)$$

optimal çözümleri bulunur. $\bar{\omega} = 1/\sum_{j=1}^{4}\bar{Y}_j^*$ *ve* $\bar{y}_j^* = \bar{\omega}\bar{Y}_j^*$ *olduğundan*

$$\bar{\omega} = 14.085, \quad \bar{y}_1^* = 0, \quad \bar{y}_2^* = 0, \quad \bar{y}_3^* = 1, \quad \bar{y}_4^* = 0$$

dir. $\underline{\omega} = 1/\sum_{j=1}^{4}\underline{Y}_j^*$ *ve* $\underline{y}_j^* = \underline{\omega Y}_j^*$ *olduğundan*

$$\underline{\omega} = 6.993, \quad \underline{y}_1^* = 0, \quad \underline{y}_2^* = 0, \quad \underline{y}_3^* = 0 \quad \underline{y}_4^* = 1$$

bulunur. Böylece verilen aralık matris oyununun II. *oyuncu için değeri* $[\underline{\omega},\bar{\omega}] = [6.993, 14.085]$ *kapalı aralığıdır.*

Sonuç olarak, $[\underline{v},\bar{v}] = [\underline{\omega},\bar{\omega}] = [\underline{V},\bar{V}]$ *oyunun değeridir.*

Sonuç olarak, bu çalışmada iki kişilik sıfır toplamlı sonlu oyunlar, aralık matris oyunlara genişletilmiştir. İki kişilik sıfır toplamlı sonlu oyunlarda geçerli olan bazı tanım ve teoremler aralık matris oyunlar için verilmiştir. Denge noktası olan matris ve aralık matris oyunların çözümü incelenmiştir. Denge noktası olmayan matris oyunların çözümünde kullanılan lineer programlama yöntemi, aralık matris oyunların çözümü için genişletilmiştir. Aralık matris oyunların çözümünde karşılaşılan aralık lineer programlama problemlerini standart lineer programlama problemine dönüştürmek için iki yöntem verilmiştir. Çözüm yöntemi 1'de aralık lineer programlama problemi öncelikle bi-objective lineer programlama problemine dönüştürülmüş ve φ fuzzy sıralama indeksi, aralık eşitsizliklerini bilinen klasik eşitsizliklere dönüştürmek için kullanılmıştır. Bu şekilde elde edilen standart lineer programlama problemleri yardımıyla denge noktası olan oyunun değerinin yine $[3, 4]$ aralığı çıktığı gösterilmiştir. Denge noktası olmayan bir oyun örneği verilmiş ve Çözüm yöntemi 1 ile oyunun değerinin $[7, 14]$ aralığı olduğu bulunmuştur. Çözüm yöntemi 2'de aralık lineer programlama problemleri üst sınır ve alt sınırların yardımıyla standart lineer programlama problemine dönüştürülmüştür. Denge noktası olmayan oyun örneği için bu yöntem yardımıyla oyunun değeri $[6.993, 14.085]$ aralığı bulunmuştur.

KAYNAKLAR

[1] Guseinov, K.G., Akyar, E. ve Düzce S.A., *Oyun Teorisi Çatışma ve Anlaşmanın Matematiksel Modelleri*, Seçkin Yayınları, Ankara, 2010.

[2] Robinson, J., "An iterative method of solving a game", The Annals of Mathematics, **54(2)**, 296-301, 1951

[3] Moore, R.E., *Methods and Applications of Interval Analysis*, SIAM, Philadelphia, 1979.

[4] Ishibuchi, H. ve Tanaka, H., "Multiobjective programming in optimization of the interval objective function", EJOR, **48(2)**, 219-225, 1990.

[5] Collins, W.D.ve Hu, C., "Interval matrix games", Knowledge Processing with Interval and Soft Computing- Chapter7, Springer, London, 2008.

[6] Li, D-F., Nan, J-X. ve Zhang, M-J., "Interval programming models for matrix games with interval payoffs", Optimization Methods and Software, 1-16, 2010.

[7] Li, D-F.,"Linear programming approach to solve interval-valued matrix games", Omega **39(6)**, 655-666, 2011.

[8] Liu, S-T. ve Kao, C., "Matrix games with interval data", Computers and Industrial Engineering,**56(4)**, 1697-1700, 2009.

[9] Sengupta, A., Pal, T.K. ve Chakraborty, D., "Interpretation of inequality constraints involving interval coefficients and a solution to interval linear programming", Fuzzy Sets and Systems, **119**, 129-138, 2001.

[10] Nayak, P.K., Pal M., "Linear programming technique to solve two person matrix games with interval pay-offs", Asia-Pasific Journal of Operational Research, **26(2)**, 285-305, 2009.

[11] Zadeh, L.A., "Fuzzy Sets", Information and Control, **8(3)**, 338-353, 1965.