ALEXANDER - CONWAY POLİNOMLARI

Aslı CANAL

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Ekim - 2011

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Aslı Canal'ın "**Alexander - Conway Polinomları"** başlıklı **Matematik** Anabilim Dalındaki, Yüksek Lisans Tezi 25.04.2011 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	Adı Soyadı	**İmza**
Üye (Tez Danışmanı)	**: Prof. Dr. HÜSEYİN AZCAN**	**…………………**
Üye	**: Prof. Dr. MAHİDE KÜÇÜK**	**…………………**
Üye	**: Prof. Dr. MAHMUT KOÇAK**	**..………………..**

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ……. tarih ve . . . . sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ALEXANDER-CONWAY POLİNOMLARI

Aslı CANAL

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Hüseyin AZCAN
2011, 41 sayfa

Bu çalışma, iki bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, düşük boyutta en önemli funktor olan temel grup, ve inşası çalışılmıştır. Aslında temel grup, 3 ve 4 boyutlu manifoldlar ve klasik düğüm teorisi için denklik sınıflarının (homeomorfizm ve gömülme denkliği sırasıyla) belirleyicisidir. Lakin burada elde edilen gruplar, homeomorfizm probleminin neredeyse kendisi kadar zor, grup teori problemidir. Bu nedenle temel grupları ayırt edecek invaryantlar bulma zorunluluğu vardır. Bir klasik düğümün S^3 ya da $\mathbb{R}^3$ teki tümleyeninin kapanışı kompakt manifold olduğu için gömülme denkliği birden topolojik denklik problemine dönüşür. Hatta klasik düğümler için tümleyenlerin denkliği düğümlerin denkliğine eşdeğerdir. Ama bu yüksek boyutta doğru değildir. Bu nedenle ikinci bölümde temel gruptan elde edilen bir düğüm invaryantından yani temel grup değişmezinden bahsedilmiştir. Lakin burada tanım oldukça değişik yollarla yapılabilir. Biz 1980'lerin başında Conway tarafından verilen Skein Teori kullanarak bu değişmezi tanımladık. Bu değişmez bir Laurent polinomudur ve Alexander polinomu olarak bilinir. Lakin Conway'in elde ettiği Skein polinomu da Alexander polinomuyla çok yakından ilgili olduğundan bu polinoma genelde Alexander - Conway polinomu denir. Son olarak, iki köprülü düğümler için bu değişmezi hesaplayıp çalışmayı bitirdik.

Anahtar Kelimeler : Homotopi, Temel Grup, Alexander - Conway Polinomu

ABSTRACT

Master of Science Thesis

ALEXANDER-CONWAY POLYNOMIALS

Aslı CANAL

Anadolu University

Graduate School of Sciences

Mathematics Program

Supervisor: Prof. Dr. Hüseyin AZCAN

2011, 41 pages

This work consists of two parts. In the first part of this work, the fundamental group which is the most important functor in low dimensions and its constructions has been studied. In fact, the fundamental group determines the equivalence of manifolds and knots (homeomorphisims and embedding respectively). But the group obtained here are nearly as difficult as homeomorphism problem of the spaces. That's why it is needed some new invariants to distinguish the groups. On the other hand, the closure of the complement of a tubular neighbourhood of a knot in S^3 or $\mathbb{R}^3$ is a manifold with boundary hence the embedding problem reduces to homeomorphism problem. Furthermore, for the classical knots in particular equivalence of knots equivalent with equivalence of complements. Unfortunately, this statement is not true in high dimensions. The second part of the work is devoted to an invariant of the fundamental group itself to differentiate the fundamental groups. But invariant we illustrate may be defined in various ways. The method we employ here was given by Conway in early 1980's, namely, by using Skein theory. This invariant is a Laurent polynomial and known to be Alexander polynomial. But its close relationship with the Skein polynomial of Conway, it is generally called as Alexander - Conway polynomial. End we finished this work by illustrating calculations of Alexander - Conway polynomial for two bridge knots.

Keywords : Homotopy, Fundamental Group, Alexander – Conway Polynomials.

İÇİNDEKİLER

<u>Sayfa</u>

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Bu çalışma iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda düşük boyutlu topolojinin ya da geometrik topolojinin belki de en önemli invaryantı olan temel grup, temel grubun tanımından, inşasından ve bir kısım örneklerden oluşmaktadır. Genelde düşük boyutta (2,3 ya da 4. boyutta) bilinen tüm invaryantlar temel grubun kendisinden türetilmiştir. Yani bir anlamda düğüm teoriye temel grubun teorisi demek yanlış değildir. Lakin burada elde edilen gruplar, neredeyse düğümün kendisi kadar zor ve karmaşıktırlar. Dolayısıyla bu grupları karşılaştırmak için de yeni invaryantlara ihtiyaç vardır.

Bu çalışmanın ikinci kısmında ise düğümlerin Alexander-Conway polinomundan bahsedeceğiz. Alexander 'ın orijinal tanımı yine düğüm grubu üzerindendir. Fakat daha sonra 1980 lerde Conway tarafından Alexander polinomu tamamen kombinatorik olarak tanımlanmıştır. Biz bu kombinatorik tanımı kullandık. Bilindiği gibi Alexander-Conway polinomu iki köprülü düğümlerde mümkün bütün değerlerini alır. Yani ikiden daha fazla köprülü bir düğümün Alexander-Conway polinomu mutlaka iki köprü Alexander-Conway polinomuyla aynıdır. İki köprülü düğümler, mümkün bütün değerleri alırlar. Dolayısıyla bu invaryant yeterince iyi değildir.

Şimdi temel grubu tanımlamak için gerekli kavramları tanıyalım.

2. HOMOTOPİ

Topolojide genel anlamda topolojik uzayların homeomorf olup olmadıkları sorgulanır. Fakat bu kadar genel haliyle oldukça zor bir problemdir. Bu nedenle topolojik uzaylar yerine adına manifold dediğimiz nesnelerin homeomorf ya da topolojik denk olup olmadıkları incelenebilir. Bir manifolddan kastedilen şey ise, kendisi bir Öklid uzayı olmamasına karşın, her noktasının uygun bir komşuluğu Öklid uzayı olan nesnelerdir.

İki manifold topolojik denk iseler bu topolojik denkliği bulmak biraz şans yardımıyla herkesin yapabileceği bir iştir aslında. Büyük problem, iki manifold denk değilse ne yapılacağıdır. Eğer iki manifold topolojik denk değil ise bu iki manifold arasında birebir, örten, iki yönlü sürekli bütün dönüşümleri elden geçirmek zorundayız. Bu da elbette mümkün değildir. Bu nedenle sürekli fonksiyonlar altında değişmez kanunlar özelliğini incelemek çok daha anlamlıdır. Örneğin, lisans yıllarından, kompaktlığın, bağlantılılığın sürekli fonksiyonlar altında değişmez özellikler olduğunu biliyoruz. Fakat bunlar da çok kaba değişmezlerdir. Daha fazla sayıda manifold ları ayırt etmek istiyorsak daha ince değişmezlere ihtiyaç vardır. Bu da genel anlamda, 1930lardan sonra tanımlanan, adına funktor denilen kategoriler arası dönüşümlerle sağlanır. Genel bir funktor incelemek yerine, daha düşük boyutta temel grup funktoru ile ilgileneceğiz. Bunun için, gerekli kavramlardan en önemlisi olan homotopiyi incelemek gerekir. Homotopi, homeomorfizmden daha zayıf ya da daha muğlak bir topolojik denklik kavramıdır. Yani iki uzay eğer homeomorf iseler mutlaka homotop olmalıdırlar ancak tersi doğru değildir. Şimdi bu kavramı anlayabilmek için öncelikle iki fonksiyonun homotop olması ne demek onu anlayalım.

Tanım: X ve Y topolojik uzaylar olmak üzere, $f, g: X \to Y$ şeklinde tanımlı $F(x,0) = f(x)$ ve $F(x,1) = g(x)$ durumunu sağlayan sürekli dönüşümler ve $I = [0,1]$ olmak üzere, $F: X \times I \to Y$ sürekli dönüşümüne f ve g arasındaki homotopi dönüşümü denir ve $f \simeq g$ şeklinde ifade edilir.

Sürekli fonksiyonlar arasında eşit olmaktan daha gevşek denklik ilişkileri de vardır. Homotopi, topoloji açısından bunların en önemlilerinden biridir. Başka bir deyişle, iki sürekli fonksiyon farklı bir sürekli fonksiyon yardımıyla birbirlerine deforme oluyorsa bu iki fonksiyon homotoptur denir. Yani kabaca homotopi, iki dönüşüm arasında ‘deformasyon eşdeğeri’ olmaktır. Yollar için formal bir tanım aşağıdaki şekilde verilebilir. Bizim temelde amacımız yolların homotop olduğunu anlamak olduğundan şimdi yolun ne olduğunu tanımlayalım:

Tanım: X bir topolojik uzay, $f: I \to X$ şeklinde tanımlı $f(0) = x_0$ ve $f(1) = x_1$ olan f sürekli dönüşümüne X'te x_0'dan x_1'e bir yol denir. x_0'a f yolunun başlangıç noktası, x_1'e de bitiş noktası denir.

Verilen iki yolun homotop olması da aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

Tanım: $f, g: I \to X$ iki yol olsunlar. $f(0) = x_0$, $f(1) = x_1$ ve $g(0) = x_0$, $g(1) = x_1$ olduğunda $F: X \times I \to Y$ sürekli dönüşümünde her $(s, t) \in I \times I$ için

$F(s, t) = f(s)$ ve $F(s, 1) = g(s)$,

$F(0, t) = f(0) = g(0) = x_0$ ve $F(1, t) = f(1) = g(1) = x_1$

durumları gerçekleniyor ise f ve g yolları homotoptur denir. F dönüşümüne de f ve g yolları arasında bir homotopi dönüşümü denir.

Örnek: $f, g: [0,1] \to \mathbb{R}^2$ olmak üzere,

$f(x) = (2x, 3x - 4)$ ve $g(x) = (x - 1, 2x + 1)$ şeklinde tanımlı iki yol olsunlar.

$$f(0) = (0, -4), f(1) = (2, -1)$$

$$g(0) = (-1,1),\ g(1) = (0,3)$$

$$A = (-1,1)t + (0,3)(1 - t) = (-t, 3 - 2t)$$

$$B = (2, -1)t + (0, -4)(1 - t) = (2 - 2t, -1 - 3t)$$

$$F(s, t) = As + B(1 - s) = (2 - 2s - 2t + st, -1 + 4s - 3t + st)$$

denklemlerde $2 - 2t = 2x \Longrightarrow t = 1 - x$ alarak işlem yaparsak;

$$F(0, t) = (2x, 3x - 4) = f(x)$$

$$F(1, t) = (x - 1, 2x + 1) = g(x)$$

olarak bulunur. Bu örneğin sonucundan, konveks bir uzayda, herhangi iki doğrunun birbirine homotop olduğu açıkça görülür.

Örnek: I = [0,1] olmak üzere $f, g, h: I \to \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ yolları aşağıdaki gibi tanımlansın:

$f(s) = (cos\pi s, sin\pi s)$,

$g(s) = (cos\pi s, 2sin\pi s)$,

$h(s) = (cos\pi s, -sin\pi s)$.

$f \simeq g$ ve $f \simeq h$ ilişkilerini inceleyelim:

İki homotopi için de $F: I \times I \to \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ sürekli dönüşümü tanımlanmak üzere;

$f \simeq g$ için; $F(s,t) = (1-t) \cdot f(s) + t \cdot g(s)$ olsun. Bu durumda

$F(s,0) = f(s)$ ve $F(s,1) = g(s)$,

$F(0,t) = f(0) = (cos0, sin0) = (1,0) = (cos0, 2sin0) = g(0)$

$\mathrm{F}(1,t) = f(1) = (cos\pi, sin\pi) = (-1,0) = (cos\pi, 2sin\pi) = g(1)$ dir.

$(0,0) \leq (s,t) \leq (1,1)$ iken bütün s ve t değerleri için bu eşitliklerin sağlanması gerekir.

$s = \frac{1}{2}$ olduğunda:

$$\begin{aligned} F\left(\frac{1}{2}, t\right) &= (1-t) \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) + t \cdot g\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= (1-t) \cdot (0,1) + t \cdot (0,2) \\ &= (0, 1+t) \end{aligned}$$

$t = \frac{1}{2}$ olduğunda:

$$\begin{aligned} F\left(s, \frac{1}{2}\right) &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot f(s) + \frac{1}{2} \cdot g(s) \\ &= \frac{1}{2} \cdot f(s) + \frac{1}{2} \cdot g(s) \\ &= \frac{1}{2}\big(f(s) + g(s)\big) \\ &= \frac{1}{2}(cos\pi s + cos\pi s, sin\pi s + 2sin\pi s) \\ &= \frac{1}{2}(2cos\pi s, 3sin\pi s) \end{aligned}$$

Bu durumda her iki sonuçta da dönüşümün tanımsız olduğu bir nokta olmadığından, yani $F(x,y) = (0,0)$ olan herhangi bir (x,y) çifti olmadığından $f \simeq g$ dir ve

$$F(s,t) = (1-t)\cdot f(s) + t\cdot g(s)$$

f ile g arasındaki homotopidir.

$f \simeq h$ için; $F(s,t) = (1-t)\cdot f(s) + t\cdot h(s)$ olsun. Bu durumda

$F(s,0) = f(s)$ ve $F(s,1) = h(s)$,

$F(0,t) = f(0) = (cos0, sin0) = (1,0) = (cos0, -sin0) = h(0)$

$F(1,t) = f(1) = (cos\pi, sin\pi) = (-1,0) = (cos\pi, -sin\pi) = h(1)$ dir.

Ve yine, $(0,0) \le (s,t) \le (1,1)$ iken bütün s ve t değerleri için bu eşitliklerin sağlanması gerekir.

$s = \frac{1}{2}$ olduğunda:

$$\begin{aligned} F\left(\frac{1}{2},t\right) &= (1-t)\cdot f\left(\frac{1}{2}\right) + t\cdot h\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= (1-t)\cdot(0,1) + t\cdot(0,-1) \\ &= (0,1-2t) \end{aligned}$$

$t = \frac{1}{2}$ olduğunda:

$$\begin{aligned} F\left(s,\frac{1}{2}\right) &= \left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot f(s) + \frac{1}{2}\cdot h(s) \\ &= \frac{1}{2}\cdot f(s) + \frac{1}{2}\cdot h(s) \\ &= \frac{1}{2}\big(f(s)+h(s)\big) \\ &= \frac{1}{2}(cos\pi s + cos\pi s, sin\pi s - sin\pi s) \\ &= (cos\pi s, 0) \end{aligned}$$

$F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = (0,0)$ olur. $(0,0) \notin \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ olduğundan F dönüşümü f ile h yolları arasındaki bir homotopi değildir.

Önerme: Homotopi bağıntısı ($\simeq$), X ve Y topolojik uzayları arasındaki sürekli dönüşümlerin kümesi üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

Kanıt: ($\simeq$), denklik bağıntısı olma koşullarını sağlar:

Yansıma:

$f: I \to X$ sürekli dönüşüm ve $f(0) = x_0$, $f(1) = x_1$ için $F: X \times I \to Y$ olacak şekilde, her $t \in I$ için, F dönüşümü $F(x,t) = f(t)$ şeklinde tanımlandığında $F(x,0) = x_0$ ve $F(x,1) = x_1$ koşullarını sağlayan sürekli bir dönüşüm olduğundan $f \simeq f$ dir.

Bu durumda ($\simeq$) yansıyandır.

Simetri:

$f, f': X \to Y$ dönüşümleri için $f \simeq f'$ olduğunda bir $F: X \times I \to Y$ olacak şekilde $F(x,0) = f(x)$ ve $F(x,1) = f'(x)$, $F(0,t) = x_0$ ve $F(1,t) = x_1$ durumlarını gerçekleyen sürekli bir F dönüşümü vardır.

Eğer bir $G: X \times I \to Y$ dönüşümü $G(x,t) = F(x, 1-t)$ şeklinde tanımlanırsa, $G(x,0) = f'(x)$ ve $G(x,1) = f(x)$, $G(0,t) = x_1$ ve $G(1,t) = x_0$ durumlarını gerçekleyen f' ile f arasında bir homotopi elde edilmiş olur. O zaman $f' \simeq f$ dir.

Bu durumda ($\simeq$) simetriktir.

Geçişme:

$f, f', f'': X \to Y$ dönüşümleri için f ile f' arasında $F: X \times I \to Y$, $F(x,t) = (1-t)f(t) + tf'(t)$ ve f' ile f'' arasında $G: X \times I \to Y$, $G(x,t) = F(x, 1-t)$ sürekli dönüşümleri tanımlanmış olsun. Bu durumda $F(x,0) = f(x)$ ve $F(x,1) = f'(x)$, $F(0,t) = x_0$ ve $F(1,t) = x_1$ ve $G(x,0) = f'(x)$ ve $G(x,1) = f''(x)$, $G(0,t) = x_0$ ve $G(1,t) = x_1$ durumlarını gerçekleyen F ve G homotopileri vardır.

O zaman f ile f' arasında $H(x,0) = f(x)$ ve $H(x,1) = f''(x)$, $H(0,t) = x_0$ ve $H(1,t) = x_1$ durumlarını gerçekleyen bir $H: X \times I \to Y$ dönüşümünün varlığı gösterilmelidir:

$$H(x,t)=\begin{cases} F(x,2t), t\in\left[0,\frac{1}{2}\right] \\ G(x,2t-1), t\in\left[\frac{1}{2},1\right] \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan H dönüşümü;

i. İyi tanımlıdır :

$t=\frac{1}{2}$ iken $F(x,2t)=f'(x)=G(x,2t-1)$ dir.

ii. Süreklidir:

Tanımında, $X\times\left[0,\frac{1}{2}\right]$ ve $X\times\left[\frac{1}{2},1\right]$ kümelerinde sürekli olduğundan $X\times I$ kümesinde de süreklidir.

O halde H dönüşümü f ile f'' arasında bir homotopidir.

Bu durumda ($\simeq$) geçişmelidir.

Sonuç olarak; homotopi bağıntısı ($\simeq$) , $f: X\to Y$ şeklinde tanımlı sürekli dönüşümlerin kümesi üzerinde bir denklik bağıntısıdır ve f dönüşümünün denklik sınıfı $[f]$ ile gösterilir.

Tanım: $f: I\to X$, $f(0)=x_0$, $f(1)=x_1$ ve $g: I\to X$, $g(0)=x_1$, $g(1)=x_2$ şeklinde tanımlı f, X'te x_0'dan x_1'e ve g, X'te x_1'den x_2'ye birer yol olsunlar.

$$(f*g)(s)=\begin{cases} f(2s), s\in\left[0,\frac{1}{2}\right] \\ g(2s-1), s\in\left[\frac{1}{2},1\right] \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $f*g$ sürekli dönüşümüne f ve g yollarının çarpımı denir.

Önerme: $f: I\to X$, $f(0)=x_0$, $f(1)=x_1$ ve $g: I\to X$, $g(0)=x_1$, $g(1)=x_2$ şeklinde tanımlı f, X'te x_0'dan x_1'e ve g, X'te x_1'den x_2'ye yol olmak üzere, $f*g$ dönüşümü X'te x_0'dan x_2'ye bir yoldur.

Kanıt: $f*g$ dönüşümü;

i. İyi tanımlıdır:

$s = \frac{1}{2}$ iken $f(2s) = x_1 = g(2s-1)$ olduğundan $f * g$ iyi tanımlıdır.

ii. Süreklidir :

f ve g dönüşümleri sürekli olduğundan $f * g$ de süreklidir.

Bu durumda $f * g$ dönüşümü X'te x_0'dan x_2'ye bir yoldur.

Önerme: Homotopi sınıfları üzerinde tanımlı çarpma işlemi, iyi tanımlı bir işlemdir ve $[f] * [g] = [f * g]$ eşitliği ile ifade edilir.

Önerme: f ve f' arasındaki homotopi F , g ve g' arasındaki homotopi G olsun.

$$H(s,t) = \begin{cases} \mathrm{F}(2\mathrm{s},\mathrm{t}), \mathrm{s} \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \mathrm{G}(2\mathrm{s}-1,\mathrm{t}), \mathrm{s} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

şeklinde iyi tanımlı, sürekli bir H dönüşümü tanımlandığında bu dönüşüm $f * g$ ve $f' * g'$ arasındaki homotopidir.

Önerme: Homotopi sınıfları üzerinde tanımlı $*$ işlemi grup olma özelliklerini taşır. Bu özellikler her eleman için değil sadece $f(1) = g(0)$ özelliğini taşıyan $([f],[g])$ denklik sınıfı çiftleri için geçerlidir.

Teorem: $*$ işlemi aşağıdaki özellikleri taşır:

i. Birleşme:

Eğer $[f] * ([g] * [h])$ tanımlıysa $([f] * [g]) * [h]$ ile eşittir.

ii. Sağ - Sol Birim:

$e_x : I \to X$ şeklinde tanımlı e_x dönüşümü I daki tüm noktaları $x \in X$ elemanına taşıyan sabit bir yol olsun. Eğer f, X te, x_0 dan x_1 e bir yol ise $[f] * [e_{x_1}] = [f]$ ve $[e_{x_0}] * [f] = [f]$ olur.

iii. Sağ - Sol Ters:

f , X te x_0 dan x_1 e bir yol , f^{-1} de $f^{-1}(s) = f(1-s)$ şeklinde tanımlı bir yol olsun. f^{-1} e , f nin tersi denir ve $[f] * [f^{-1}] = [e_{x_0}]$ ve $[f^{-1}] * [f] = [e_{x_1}]$ olur.

3. TEMEL GRUP

Tanım: X bir topolojik uzay, x_0, X'e ait bir nokta olsun. x_0 noktasında başlayıp yine o noktada biten X'teki bir yola x_0 tabanlı bir basit kapalı eğri denir.

Lemma: x_0 tabanlı basit kapalı eğrilerin yol homotopları sınıflarının kümesi çarpma $(*)$ işlemi ile birlikte bir grup teşkil eder.

Kanıt: Söz konusu grup G olsun.

Kapalılık:

$f, g \in G$ olsun. Bu durumda $f * g \in G$ midir?

$$f, g: [0,1] \to X$$

$f(0) = f(1) = x_0$ ve $g(0) = g(1) = x_0$

$$f * g(s) = \begin{cases} f(2s), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ g(2s-1), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$(f * g)(0) = f(0) = x_0 \qquad (f * g)(1) = g(1) = x_0$$

$f * g \in G$ dir.

O halde çarpma $(*)$ işlemi kapalıdır.

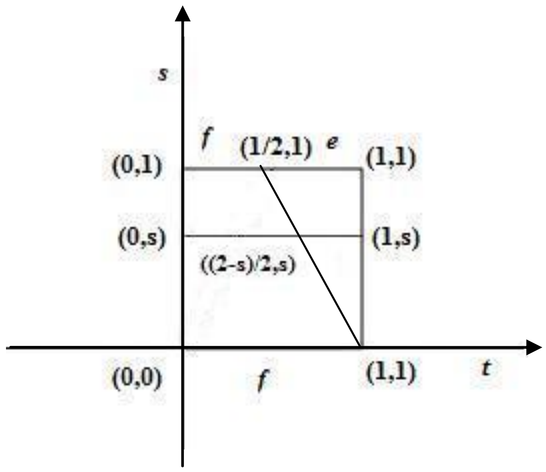
Birim Eleman:

i. $f * e \simeq f$

$$(f * e)(s) = \begin{cases} f(2s), 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ e(2s-1), \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} f(2s), 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ x_0, \quad \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$f * e$ ile f arasında $F: I \times I \to X$ ile tanımlanan $F(t,0) = f(t)$ ve $F(t,1) = (f * e)(t)$ koşullarını sağlayan sürekli F dönüşümünü grafikle ifade etmek gerekirse:



Şekil 3. 1 . $\boldsymbol{f * e}$ ile $\boldsymbol{f}$ arasındaki homotopiyi gösteren grafik

$$\alpha: \left[0, \left(\frac{2-s}{2}\right)\right] \rightarrow [0,1]$$

$$\alpha(x) = \frac{2}{2-s}x$$

$$\beta: \left[\frac{2-s}{2}, 1\right] \rightarrow [0,1]$$

$$\beta(x) = \frac{2}{s}x + \frac{s-2}{s}$$

$$F(t,s) = \begin{cases} f\left(\frac{4}{2-s}t\right), 0 \leq t \leq \frac{2-s}{2} \\ e\left(\frac{2}{s}t + \frac{s-2}{s}\right), \frac{2-s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

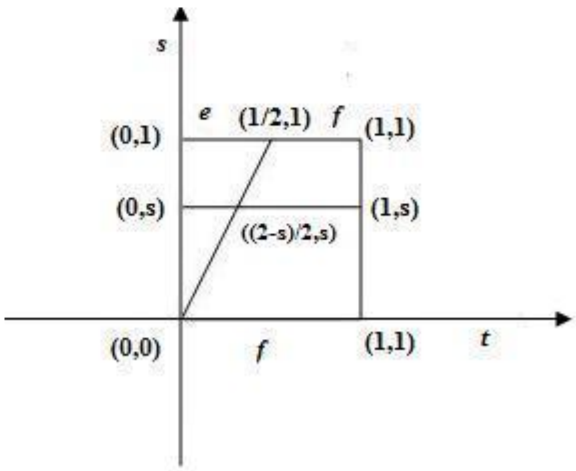
$F(t,0) = f(2t) = f(t)$ ve $F(t,1) = e(2t-1) = (f * e)(t)$

$\boldsymbol{ii}.\ e * f \simeq f$

$$(e * f)(s) = \begin{cases} e(2s), 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ f(2s-1), \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x_0, 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ f(2s-1), \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$e * f$ ile f arasında $F: I \times I \rightarrow X$ ile tanımlanan $F(t,0) = (e * f)(t)$ ve $F(t,1) = f(t)$ koşullarını sağlayan sürekli F dönüşümünü grafikle ifade etmek gerekirse:



Şekil 3. 2 . $e * f$ ile **f** arasındaki homotopiyi gösteren grafik

Yine aynı işlemler yapılarak:

$$F(t,s) = \begin{cases} e\left(\dfrac{4}{2-s}t\right), 0 \leq t \leq \dfrac{2-s}{2} \\ f\left(\dfrac{2}{s}t + \dfrac{s-2}{s}\right), \dfrac{2-s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x_0, 0 \leq t \leq \dfrac{2-s}{2} \\ f\left(\dfrac{2}{s}t + \dfrac{s-2}{s}\right), \dfrac{2-s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

elde edilir.

$F(t,0) = f(2t-1) = (e * f)(t)$ ve $F(t,1) = f(t)$

Bu durumda çarpma $(*)$ işlemi birim elemana sahiptir.

Ters Eleman:

i. $f * f^{-1} \simeq e$

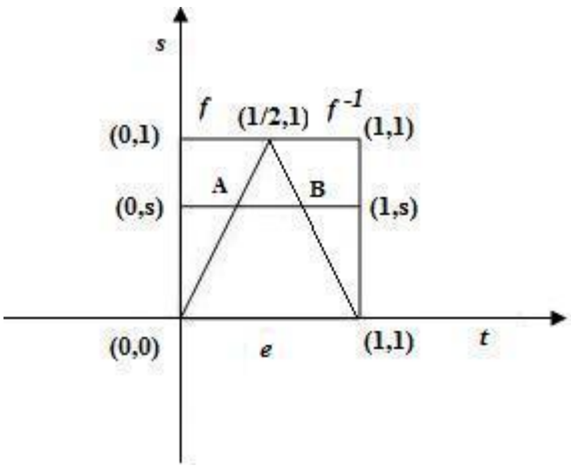
$f^{-1}(t) = f(1-t)$ olmak üzere

$$(f * f^{-1})(t) = \begin{cases} f(2t), 0 \leq t \leq \dfrac{1}{2} \\ f^{-1}(2t-1), \dfrac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} f(2t), 0 \leq t \leq \dfrac{1}{2} \\ f(1-(2t-1)), \dfrac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} f(2t), 0 \leq t \leq \dfrac{1}{2} \\ f(2-2t), \dfrac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

f ile f^{-1} arasında $F: I \times I \to X$ olarak tanımlanan $F(t,0) = e(t)$ ve $F(t,1) = (f * f^{-1})(t)$ koşullarını sağlayan sürekli F dönüşümünü grafikle ifade etmek gerekirse:



Şekil 3. 3 . $\boldsymbol{f * f^{-1}}$ ile $\boldsymbol{e}$ arasındaki homotopiyi gösteren grafik

$A = \left(\frac{s}{2}, s\right)$, $B = \left(\frac{2-s}{2}, s\right)$ olmak üzere yine benzer işlemleri yaparak

$$\alpha: \left[0, \frac{s}{2}\right] \to [0,1]$$

$$\alpha(x) = mx + n$$

$$\alpha(x) = \frac{2}{s} x$$

$$\beta: \left[\frac{s}{2}, \frac{2-s}{2}\right] \to [0,1]$$

$$\beta(x) = mx + n$$

$$\beta(x) = \frac{1}{1-s} x + \frac{s}{2s-2}$$

$$\gamma: \left[\frac{2-s}{2}, 1\right] \to [0,1]$$

$$\gamma(x) = mx + n$$

$$\gamma(x) = \frac{2}{s} x + \frac{s-2}{s}$$

$$F(t,s)=\begin{cases} f\left(\frac{2}{s}t\right), 0\leq t\leq \frac{2}{s} \\ e\left(\frac{1}{1-s}t+\frac{s}{2s-2}\right), \frac{2}{s}\ \leq t\leq \frac{2-s}{2} \\ f^{-1}\left(\frac{2}{s}t+\frac{s-2}{s}\right), \frac{2-s}{2}\leq t\leq 1 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} f\left(\frac{2}{s}t\right), 0\leq t\leq \frac{s}{2} \\ e\left(\frac{1}{1-s}t+\frac{s}{2s-2}\right), \frac{s}{2}\leq t\leq \frac{2-s}{2} \\ f\left(1-\left(\frac{2}{s}t+\frac{s-2}{s}\right)\right), \frac{2-s}{2}\leq t\leq 1 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} f\left(\frac{2}{s}t\right), 0\leq t\leq \frac{s}{2} \\ e\left(\frac{1}{1-s}t+\frac{s}{2s-2}\right), \frac{s}{2}\leq t\leq \frac{2-s}{2} \\ f\left(-\frac{2}{s}t+\frac{2}{s}\right), \frac{2-s}{2}\leq t\leq 1 \end{cases}$$

elde edilir.

$F(t,0)=e(t)$ ve $F(t,1)=\begin{cases} f(2t), 0\leq t\leq \frac{1}{2} \\ f^{-1}(2t-1),\ \frac{1}{2}\leq t\leq 1 \end{cases} = (f*f^{-1})(t)$

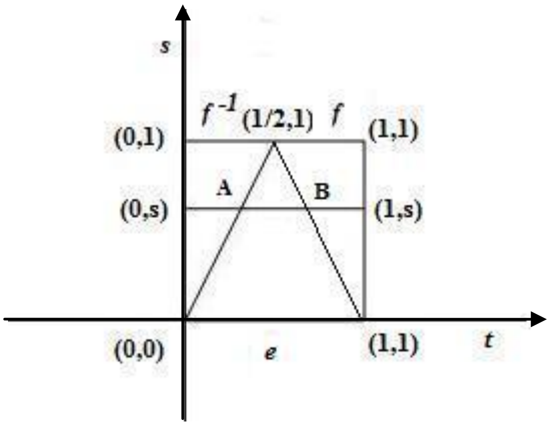
O halde çarpma $(*)$ işlemi sağ terse sahiptir.

ii. $f^{-1}*f\simeq e$

$$(f^{-1}*f)(t)=\begin{cases} f^{-1}(2t), 0\leq t\leq \frac{1}{2} \\ f(2t-1)\ , \frac{1}{2}\leq t\leq 1 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} f(1-2t), 0\leq t\leq \frac{1}{2} \\ f(2t-1), \frac{1}{2}\leq t\leq 1 \end{cases}$$

f ile f^{-1} arasında $F: I\times I\to X$ olarak tanımlanan $F(t,0)=e(t)$ ve $F(t,1)=(f*f^{-1})(t)$ koşullarını sağlayan sürekli F dönüşümünü grafikle ifade etmek gerekirse:



Şekil 3. 4 . $\boldsymbol{f^{-1} * f}$ ile $\boldsymbol{e}$ arasındaki homotopiyi gösteren grafik

$A = \left(\frac{s}{2}, s\right)$, $B = \left(\frac{2-s}{2}, s\right)$ olmak üzere yine benzer işlemleri yaparak

$$\alpha\colon \left[0, \frac{s}{2}\right] \to [0,1]$$

$$\alpha(x) = \frac{2}{s}x$$

$$\beta\colon \left[\frac{s}{2}, \frac{2-s}{2}\right] \to [0,1]$$

$$\beta(x) = \frac{1}{1-s}x + \frac{s}{2s-2}$$

$$\gamma\colon \left[\frac{2-s}{2}, 1\right] \to [0,1]$$

$$\gamma(x) = \frac{2}{s}x + \frac{s-2}{s}$$

$$F(t,s) = \begin{cases} f^{-1}\left(\frac{2}{s}t\right), 0 \le t \le \frac{s}{2} \\ e\left(\frac{1}{1-s}t + \frac{s}{2s-2}\right), \frac{s}{2} \le t \le (\frac{2-s}{2}) \\ f\left(\frac{2}{s}t + \frac{s-2}{s}\right), \frac{2-s}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} f\left(1 - \frac{2}{s}t\right), 0 \le t \le \frac{s}{2} \\ e\left(\frac{1}{1-s}t + \frac{s}{2s-2}\right), \frac{s}{2} \le t \le \frac{2-s}{2} \\ f\left(\frac{2}{s}t + \frac{s-2}{s}\right), \frac{2-s}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

elde edilir.

$$F(t,0)=e(t) \text{ ve } F(t,1)=\begin{cases} f(2t), 0\le t\le \frac{1}{2} \\ f^{-1}(2t-1), \frac{1}{2}\le t\le 1\end{cases} = (f * f^{-1})(t)$$

O halde çarpma $(*)$ işlemi sol terse sahiptir.

Bu durumda çarpma $(*)$ işlemi tersinirdir.

Birleşmelilik:

$f, g, h \in G$ olsun. Bu durumda çarpma $(*)$ işlemi birleşmeli midir? Yani $f * (g * h) \simeq (f * g) * h$ mıdır?

$$f, g, h: [0,1] \to X$$

$$f(0)=f(1)=x_0 \quad g(0)=g(1)=x_0 \quad h(0)=h(1)=x_0$$

$$(f*(g*h))(s)=\begin{cases} f(2s), 0\le s\le \frac{1}{2} \\ (g*h)(2s-1), \frac{1}{2}\le s\le 1\end{cases}$$

$$(g*h)(s) = \begin{cases} g(4s-1), \frac{1}{2}\le s\le \frac{3}{4} \\ h(4s-3), \frac{3}{4}\le s\le 1\end{cases}$$

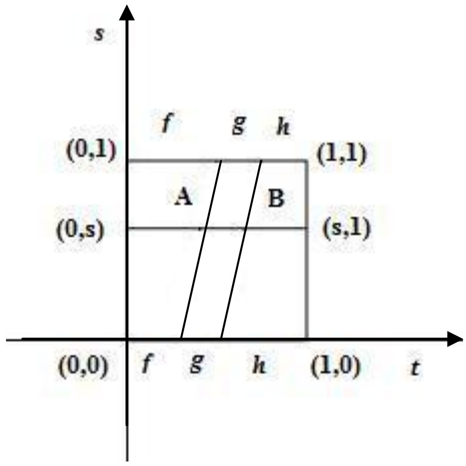
$$\Rightarrow (f*(g*h))(s)=\begin{cases} f(2s), 0\le s\le \frac{1}{2} \\ g(4s-1), \frac{1}{2}\le s\le \frac{3}{4} \\ h(4s-3), \frac{3}{4}\le s\le 1\end{cases}$$

$$\big((f*g)*h\big)(s)=\begin{cases} (f*g)(2s), 0\le s\le \frac{1}{2} \\ h(2s-1), \frac{1}{2}\le s\le 1\end{cases}$$

$$(f*g)(s)=\begin{cases} f(4s), 0\le s\le \frac{1}{4} \\ g(4s-2), \frac{1}{4}\le s\le \frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow ((f*g)*h)(s)=\begin{cases} f(4s), 0\le s\le \frac{1}{4} \\ g(4s-2), \frac{1}{4}\le s\le \frac{1}{2} \\ h(2s-1), \frac{1}{2}\le s\le 1\end{cases}$$

$f * (g * h)$ ile $(f * g) * h$ arasında $F: I \times I \to X$ olarak tanımlanan $F(t,0) = ((f * g) * h)(t)$ ve $F(t,1) = (f * (g * h))(t)$ koşullarını sağlayan sürekli bir F dönüşümünü grafikle ifade etmek gerekirse:



Şekil 3. 5. $\boldsymbol{f * (g * h)}$ ile $\boldsymbol{(f * g) * h}$ arasındaki homotopiyi gösteren grafik

$A = \left(\frac{s+1}{4}, s\right)$, $B = \left(\frac{s+2}{4}, s\right)$ olmak üzere

$$p: \left[0, \frac{s+1}{4}\right] \to [0,1]$$

$$p(x) = \frac{4}{s+1}x$$

$$q: \left[\frac{s+1}{4}, \frac{s+2}{4}\right] \to [0,1]$$

$$q(x) = 4x - s - 1$$

$$r: \left[\frac{s+2}{4}, 1\right] \to [0,1]$$

$$r(x) = \frac{4}{2-s}x - \frac{s+2}{2-s}$$

$$F(t,s) = \begin{cases} f\left(\frac{4}{1+s}t\right), 0 \leq t \leq \frac{s+1}{4} \\ g(4t - s - 1), \frac{s+1}{4} \leq t \leq \frac{s+2}{4} \\ h\left(\frac{4}{2-s}t - \frac{s+2}{2-s}\right), \frac{s+2}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

elde edilir.

Çarpma $(*)$ işleminde

$$F(t,0) = f\left(\frac{4}{1+0}t\right) \qquad F(t,1) = h\left(\frac{4}{2-1}t - \frac{1+2}{2-1}\right)$$
$$= f(4t) \qquad = h(4t-3)$$
$$= \big((f*g)*h\big)(t) \qquad = \big(f*(g*h)\big)(t)$$

olacak şekilde bir F dönüşümü olduğundan $f*(g*h) \simeq (f*g)*h$ dir.
O halde çarpma $(*)$ işlemi birleşmelidir.

Tanım : $x_0 \in X$ tabanlı loopların yol homotopları sınıfının çarpma $(*)$ işlemiyle oluşturduğu gruba **X'in x_0 tabanlı temel grubu** denir. $(\boldsymbol{\pi_1(X,x_0)},*)$ şeklinde ifade edilir.

Örnek (Çemberin Temel Grubu) : Öklid uzayında (veya Kompleks düzlem $\mathbb{C}$ de)
$S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ birim çemberi için $f: I \to S^1$ olacak şekilde
$f(t) = (cos2\pi t, sin2\pi t)$, $0 \leq t \leq 1$ dönüşümü çember etrafında 1 defa dolanan kapalı bir yoldur.

Teorem: Çemberin temel grubu $\pi\big(S^1,(1,0)\big)$, α denklik sınıfı ile üretilen sonsuz devirli bir gruptur.

Kanıt: g, S^1 de $g: I \to S^1, g(0) = g(1) = (1,0)$ şeklindeki kapalı bir yol olsun.
Önce, g nin bir m tam sayısı için α^m denklik sınıfına ait olduğunu gösterelim.
$U_1 = \{(x,y) \in S^1 : y > -\frac{1}{10}\}$ ve $U_2 = \{(x,y) \in S^1 : y < \frac{1}{10}\}$ herbiri yarı çemberden daha geniş olan, S^1 in bağlantılı açık alt kümeleri olup, $U_1 \cup U_2 = S^1$ dir. Burada U_1 ve U_2 nin herbirinin reel eksende bir açık aralığa homeomorf olduğu açıktır.
$g(I) \subset U_1$ veya $g(I) \subset U_2$ olmadığını kabul edelim. g sabit bir yola eşit ve α^0 denklik sınıfına aittir.
$g(I) \subseteq U_1$ ve $g(I) \subseteq U_2$ olduğunu kabul edelim.

Sonra, birim aralığın, $0 = t_0 < t_1 < t_2 <\ldots< t_{n-1} < t_n = 1$ olmak üzere,
"$(\boldsymbol{a})$ $g([t_i, t_{i+1}]) \subset U_1$ veya $g([t_i, t_{i+1}]) \subset U_2$ $(0 \leq i < n)$ olacak
$(\boldsymbol{b})$ $g([t_{i-1}, t_i])$ ve $g([t_i, t_{i+1}])$ aralıkları aynı anda hem U_1de hem de U_2 de bulunmayacak"
koşullarını sağlayan $[0, t_1], [t_1, t_2], [t_2, t_3], \ldots, [t_{n-1}, 1]$ şeklinde bölüntüsünün olduğunu gösterelim.
Bu iddia, I kompakt uzayının bir açık örtüsü olan $\{g^{-1}(U_1), g^{-1}(U_2)\}$ için bir *Lebesque sayısı* ε varlığı ile görülür.
Burada *Lebesque sayısı* nın kısa bir tanımını vermek yaralı olacaktır:

Bir (X, d) metrik uzayının, sınırlı ve boştan farklı bir A alt kümesi için kümenin çapı $diamA = sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}$ şeklinde tanımlanır. (X, d) metrik uzayının bir açık örtüsü için, eğer X kompakt ise X in her alt kümesi için, o örtüde çapı $\varepsilon > 0$'dan daha küçük olan bir eleman vardır.Yani, çapı ε dan küçük olan bir X metrik uzayının bir alt kümesi X in bazı örtüleri tarafından içerilir. Bu ε a A örtüsünün *Lebesque sayısı* denir.

Birim aralığı, uzunluğu ε'dan küçük alt aralıklara bölelim. Bu ayrışımda, (a) koşulu sağlanıp (b) koşulu sağlanmayabilir. Eğer iki bölüntü g dönüşümüyle aynı U_j kümesine resmedilirse, o zaman bu iki bölüntüdeki ortak noktayı atarak, tek bir bölüntü haline getirmek için birleştirilir. Bu birleştirme işlemi (b) koşulu sağlanana kadar devam edilir.

β, g yollarının denklik sınıfını, β_i ler de $(1 \leq i \leq n)$ $g|_{[t_{i-1}, t_i]}$ lerin denklik sınıfını göstersin. O zaman $\beta = \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot\ldots\cdot \beta_n$ şeklindeki çarpımdır. β_i ler U_1 veya U_2 deki yollardır.(b) koşulundan, $g(t_i) \in U_1 \cap U_2$ dir. $U_1 \cap U_2$ nin iki bileşeni vardır. Biri $(1{,}0)$ noktasını, diğeri $(-1{,}0)$ noktasını içerir. Her i için $(0 < i < n), g(t_i), U_1 \cap U_2$ nin elemanlarından birine ait olduğu için $U_1 \cap U_2$ de başlangıç noktası $g(t_i)$ ve bitiş noktası $(1{,}0)$ veya $(-1{,}0)$ olan bir γ_i yol sınıfı seçilsin.

δ_i ler, başlangıç ve bitiş noktaları $\{(1{,}0), (-1{,}0)\}$ kümesinde olan, U_1 veya U_2 deki yol sınıfları olsunlar.

$\delta_1 = \beta_1 \cdot \gamma_1$

$\delta_2 = {\gamma_1}^{-1} \cdot \beta_2 \cdot \gamma_2$

$\delta_3 = {\gamma_2}^{-1} \cdot \beta_3 \cdot \gamma_3$

...

$\delta_{n-1} = \gamma_{n-2}^{-1} \cdot \beta_{n-1} \cdot \gamma_{n-1}$

$\delta_n = \gamma_{n-1}^{-1} \cdot \beta_n$

$\Rightarrow \ \delta_1 \cdot \delta_2 \cdot \delta_3 \cdot \dots \cdot \delta_{n-1} \cdot \delta_n =$

$= \beta_1 \cdot \gamma_1 \cdot {\gamma_1}^{-1} \cdot \beta_2 \cdot \gamma_2 \cdot {\gamma_2}^{-1} \cdot \beta_3 \cdot \gamma_3 \cdot \dots \cdot \gamma_{n-2}^{-1} \cdot \beta_{n-1} \cdot \gamma_{n-1} \cdot \gamma_{n-1}^{-1} \cdot \beta_n$

$= \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \beta_3 \cdot \dots \cdot \beta_{n-1} \cdot \beta_n$

$= \beta$

Herhangi bir i için, U_1 ve U_2 basit bağlantılı olduğundan, δ_i kapalı yol sınıfı ise 1 e eşittir.

U_1 basit bağlantılı olduğundan, U_1 de başlangıç noktası $(1,0)$, bitiş noktası $(-1,0)$ olan tek bir η_1 yol sınıfı vardır ve başlagıç noktası $(-1,0)$, bitiş noktası $(1,0)$ olan tek bir ${\eta_1}^{-}$ yol sınıfı vardır. Aynı şekilde, U_2 de de başlagıç noktası $(-1,0)$, bitiş noktası $(1,0)$ olan tek bir η_2 yol sınıfı vardır.

Buradan $\eta_1 \cdot \eta_2 = \alpha$ yazılabilir.

δ_i=${\eta_1}^{\pm 1}$ veya δ_i=${\eta_2}^{\pm 1}$

(b) koşulundan dolayı, δ_i=${\eta_2}^{\pm 1}$ iken δ_{i+1}=${\eta_1}^{\pm 1}$ olduğunda δ_i=${\eta_1}^{\pm 1}$ iken δ_{i+1}=${\eta_2}^{\pm 1}$ olur. Buradan aşağıdaki olasılıklar oluşur:

1. $\beta = 1$,
2. $\beta = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \dots \cdot \eta_1 \cdot \eta_2$ veya
3. $\beta = {\eta_2}^{-1} \cdot {\eta_1}^{-1} \cdot {\eta_2}^{-1} \cdot {\eta_1}^{-1} \cdot \dots \cdot {\eta_2}^{-1} \cdot {\eta_1}^{-1}$

2.olasılıkta, $\eta_1 \cdot \eta_2 = \alpha$ olduğundan, $m > 0$ tamsayıları için $\beta = \alpha^m$ ve 3.olasılıkta da $m < 0$ tamsayıları için olduğundan bütün durumlar için $\beta = \alpha^m$ yazılabilir.

Bundan sonra $\pi(S^1)$ in devirli grup olduğunu göstermek gerekir.

$\pi(S^1)$ nin sonlu grup olmadığını göstermek için, $\pi(S^1)$ de kapalı bir yolun derecesinin nasıl tanımlandığını bilmek gerekir. Bir yolun derecesi, o yolun çember etrafında kaç tur attığını belirleyen tam sayıdır. Yolun derecesini tanımlamak için, S^1 i $\mathbb{C}$ kompleks düzlemindeki bir birim çember olarak alınsın: $S^1 = \{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$

Mutlak değerleri 1 olan iki kompleks sayının, çarpımlarının ve bölümlerinin mutlak değerleri de 1 olduğundan, S^1 , çarpma işlemine göre bir gruptur.

$z \in S^1$ iken z nin açısı, z nin $x-ekseni$ ile pozitif yönde yaptığı açıdır ve $a(z)$ ile gösterilir. $a(z)$ reel sayı olmasına rağmen tek türlü belirlenemez. Her k tam sayısı için $\theta + 2k\pi$ değeri aslında θ açısına karşılık gelen değerdir.

$z = e^{i\theta} = cos\theta + isin\theta$, buradaki θ, $a(z)$ nin açısıdır.

$a(z_1) = \theta_1$ ve $a(z_2) = \theta_2$ olduğunda $a(z_1 \cdot z_2) = \theta_1 + \theta_2$ ve $a\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \theta_1 - \theta_2$ dir.

$h: I \to S^1$ tanımlı ve $h(0) = h(1) = 1$ olan bir yol olsun. Birim aralığın, "t ve t' nün aynı $[t_{i-1}, t_i]$ alt aralığına ait olma" özelliğini taşıyan, $0 = t_0 < t_1 <\ldots< t_n = 1$ ayrışımı seçilsin. Bu durumda $|h(t') - h(t)| < 1$ dir. Bu eşitsizlik h nin düzgün sürekliliği veya I nın bir örtüsünün *Lebesque sayısı* nın varlığı kullanılarak gösterilebilir.

Her i $(1 \leq i \leq n)$ için, θ_i ler, $-\frac{\pi}{2} < \theta_i < \frac{\pi}{2}$ eşitsizliğini sağlayan $\frac{h(t_i)}{h(t_{i-1})}$ nin tek türlü belirli açısıdır.

$a\left(\frac{h(t_i)}{h(t_{i-1})}\right) = \theta_i$ olmak üzere, h nin derecesi,

$$der(h) = \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{n}\theta_i$$

şeklinde tanımlanır ve $der(h)$ her zaman bir tamsayıdır:

$$\begin{aligned} a\left(\frac{h(t_n)}{h(t_0)}\right) &= a\left\{\left(\frac{h(t_1)}{h(t_0)}\right)\cdot\left(\frac{h(t_2)}{h(t_1)}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{h(t_{n-1})}{h(t_{n-2})}\right)\cdot\left(\frac{h(t_n)}{h(t_{n-1})}\right)\right\} \\ &= a\left(\frac{h(t_1)}{h(t_0)}\right) + a\left(\frac{h(t_2)}{h(t_1)}\right) + \cdots + a\left(\frac{h(t_{n-1})}{h(t_{n-2})}\right) + a\left(\frac{h(t_n)}{h(t_{n-1})}\right) \\ &= \theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_{n-1} + \theta_n \\ &= \sum_{i=1}^{n}\theta_i \end{aligned}$$

$$\Rightarrow der(h) = \frac{1}{2\pi}2k\pi = k \in \mathbb{Z}$$

$0 = t_0 < t_1 <\ldots< t_n = 1$ ayrışımı, bir $\{t\}$ elemanı ekleyerek

$0 = t_0 < t_1 <\ldots< t_{i-1} < t < t_i \ldots < t_n = 1$ şeklinde genişletilirse;

$$a\left(\frac{h(t_n)}{h(t_0)}\right) = a\left(\frac{h(t_1)}{h(t_0)}\right) + a\left(\frac{h(t_2)}{h(t_1)}\right) + \cdots + a\left(\frac{h(t)}{h(t_{i-1})}\right) + a\left(\frac{h(t_i)}{h(t)}\right) + \cdots$$

$$+a\left(\frac{h(t_{n-1})}{h(t_{n-2})}\right) + a\left(\frac{h(t_n)}{h(t_{n-1})}\right)$$

$$= \theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_{i-1} + a\left(\frac{h(t)}{h(t_{i-1})}\right) + a\left(\frac{h(t_i)}{h(t)}\right) + \theta_{i+1} + \ldots + \theta_{n-1} + \theta_n$$

$a\left(\frac{h(t_i)}{h(t_{i-1})}\right) = a\left(\frac{h(t)}{h(t_{i-1})}\right) + a\left(\frac{h(t_i)}{h(t)}\right) = \theta_i$ olduğundan ;

$$= \sum_{i=1}^{n} \theta_i$$

Buradan bir yolun derecesinin, I aralığındaki bölüntülerin seçiminden bağımsız olduğu görülür.

Bu işlemlerden sonra, acaba $h \simeq g$ iken $der(h) = der(g)$ denilebilr mi sorusunu cevaplandırmak gerekir.

$h \simeq g$ olduğunda $F: I \times I \to S^1$ ile tanımlı $F(t,0) = h(t)$, $F(t,1) = g(t)$, $F(0,s) = F(1,s) = 1$ olan sürekli bir F dönüşümü vardır.

$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ ve $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_m = 1$ ayrışımları seçildiğinde, F dönüşümü $[t_{i-1}, t_i] \times [s_{j-1}, s_j]$ dikdörtgenlerinin her birini S^1 in çapı 1'den küçük olan bir alt kümesine götürür. Yani, $(t,s) \in [t_{i-1}, t_i] \times [s_{j-1}, s_j]$ olduğunda $|F(t,s) - F(t',s')| < 1$ olur.

$\theta_i{}' = a\left(\frac{F(t_i, s_{j-1})}{F(t_{i-1}, s_{j-1})}\right)$, $|\theta_i{}'| < \left(\frac{\pi}{2}\right)$, $\theta_i{}'' = a\left(\frac{F(t_i, s_j)}{F(t_{i-1}, s_j)}\right)$, $|\theta_i{}''| < \left(\frac{\pi}{2}\right)$ olsunlar .

$\phi_i = a\left(\frac{F(t_i, s_j)}{F(t_i, s_{j-1})}\right)$, $|\phi_i| < \left(\frac{\pi}{2}\right)$ $(i = 0,1,2,\ldots,n)$ olduğunda

$$\phi_i - \phi_{i-1} = a\left(\frac{F(t_i, s_j)}{F(t_i, s_{j-1})}\right) - a\left(\frac{F(t_{i-1}, s_j)}{F(t_{i-1}, s_{j-1})}\right)$$

$$= a\left(\frac{F(t_i, s_j) \cdot F(t_{i-1} s_j)}{F(t_i, s_{j-1}) \cdot F(t_{i-1}, s_{j-1})}\right)$$

$$= \theta_i{}'' - \theta_i{}'$$

$$\sum_{i=1}^{n} (\phi_i - \phi_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (\theta_i'' - \theta_i') = \sum_{i=1}^{n} \theta_i{}'' - \sum_{i=1}^{n} \theta_i$$

$$\phi_n = a\left(\frac{F(1, s_j)}{F(1, s_{j-1})}\right) = 0, \quad \phi_0 = a\left(\frac{F(0, s_j)}{F(0, s_{j-1})}\right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} (\phi_i - \phi_{i-1}) = 0$$

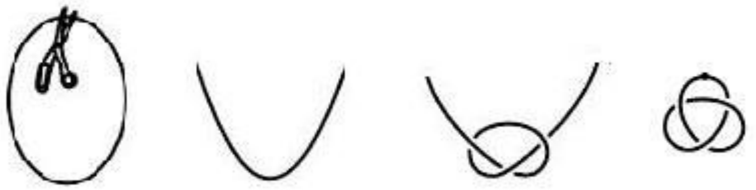
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \theta_i{}'' = \sum_{i=1}^{n} \theta_i$$

olduğundan $der(h) = der(g)$dir.

4. ALEXANDER POLİNOMUNUN HESAPLANMASI

İki manifoldun homeomorf olup olmadığı kadar, iki manifold çiftinin homeomorf olup olmadığı da çok önemli bir sorudur ve bu soru ilkinden çok daha zordur. Yani Y_1, X_1in Y_2, X_2 nin birer alt manifoldu ve olsun. (X_1, Y_1) ve (X_2, Y_2) manifold çiftlerinin homeomorf olmasından şunu kastediyoruz:

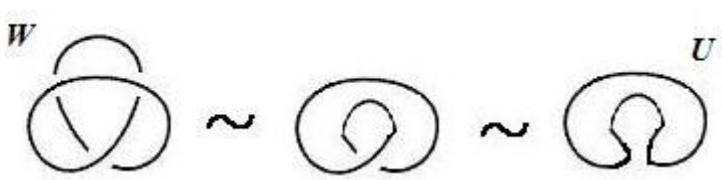
Eğer X_1 den X_2 ye bir f homeomorfizmi var ve bu homeomorfizma Y_1e kısıtlandığında Y_1 den Y_2 ye bir homeomorfizma oluyorsa bu iki manifold çiftine homeomorftur denir. Bu anlamda düğüm teorisi $(\mathbb{R}^3, S^1)$lerin ya da (S^1, S^3) lerin teorisidir. Yani çemberin $\mathbb{R}^3$e ya da S^3e gömülmesidir.
Şekil 4.1, bir düğümün nasıl oluşturulduğu hakkında bir fikir verebilir:



Şekil 4. 1 . Bir düğümün elde edilişi

Özel olarak, en son elde edilen şekle "Üç $Yapraklı\ Yonca$" adı verilir.

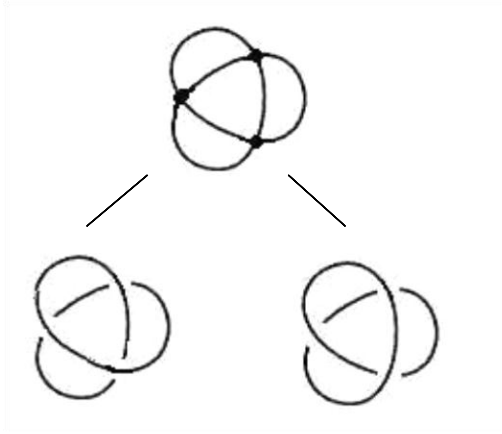
Tanım: Bir düğüm kesmeden düğümsüz hale getirilebiliyorsa o düğüme "düğümlenmemiştir" denir.



Şekil 4. 2 . Bir düğümün düğümsüz hale gelişi

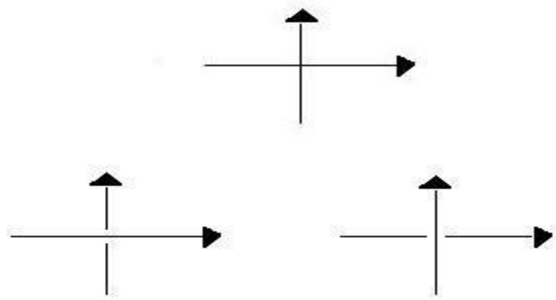
Şekil 4.2'de görüldüğü üzere, W, U'ya dönüştürülebildiği için W'ye düğümlenmemiştir denilir. Ancak şekil 4.1'deki Üç $Yapraklı\ Yonca$, U'ya dönüştürülemediği için düğümlenmemiş denemez.

Herhangi bir planar iki şekilde düğüm haline getirilebilir.



Şekil 4. 3 . Bir planarın düğüm haline getirilme seçenekleri

Yani geçiş iki şekilde olur:



Şekil 4. 4 . Bir düğümde görülebilecek geçiş seçenekleri

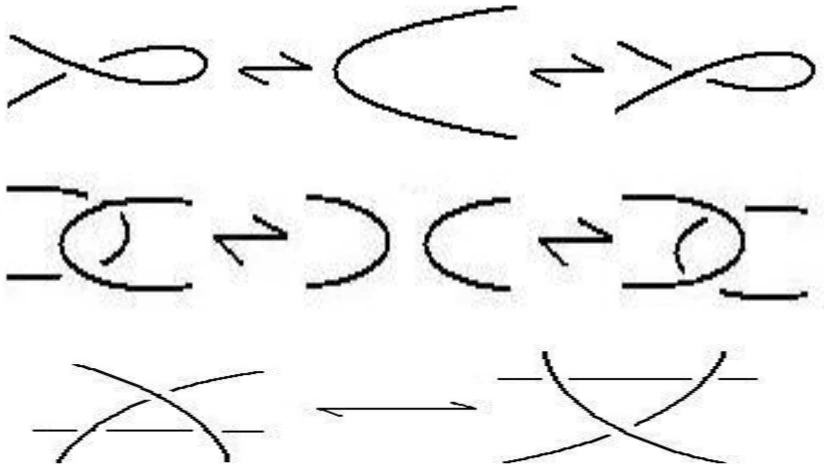
Bu durumda, n tane geçişi olan bir planardan 2^n tane düğüm elde edilebilir.

5. LINKING SAYISI VE REIDEMESTER HAREKETLERİ

İki manifold çiftinin homeomorf olduğunu görmek oldukça zor bir iştir. Fakat 20.yy başlarında Reidemester'in verdiği bir teoremle teori, bir kombinatorial teoriye indirgenebilir. Daha açık ifade edilirse, aşağıda tanımlanan üç tür Reidemester hareketinin sonlu bir dizisi ile bir düğümden diğer bir düğüm elde edilebiliyorsa bu iki düğüm gömülme anlamında denktirler. Tersine, 2 düğüm gömülme anlamında denk iseler bu iki düğümün birer diagramında, birinden diğerine Reidemester hareketleri ile geçilebilir. Şimdi Reidemester hareketlerini tanımlayalım:

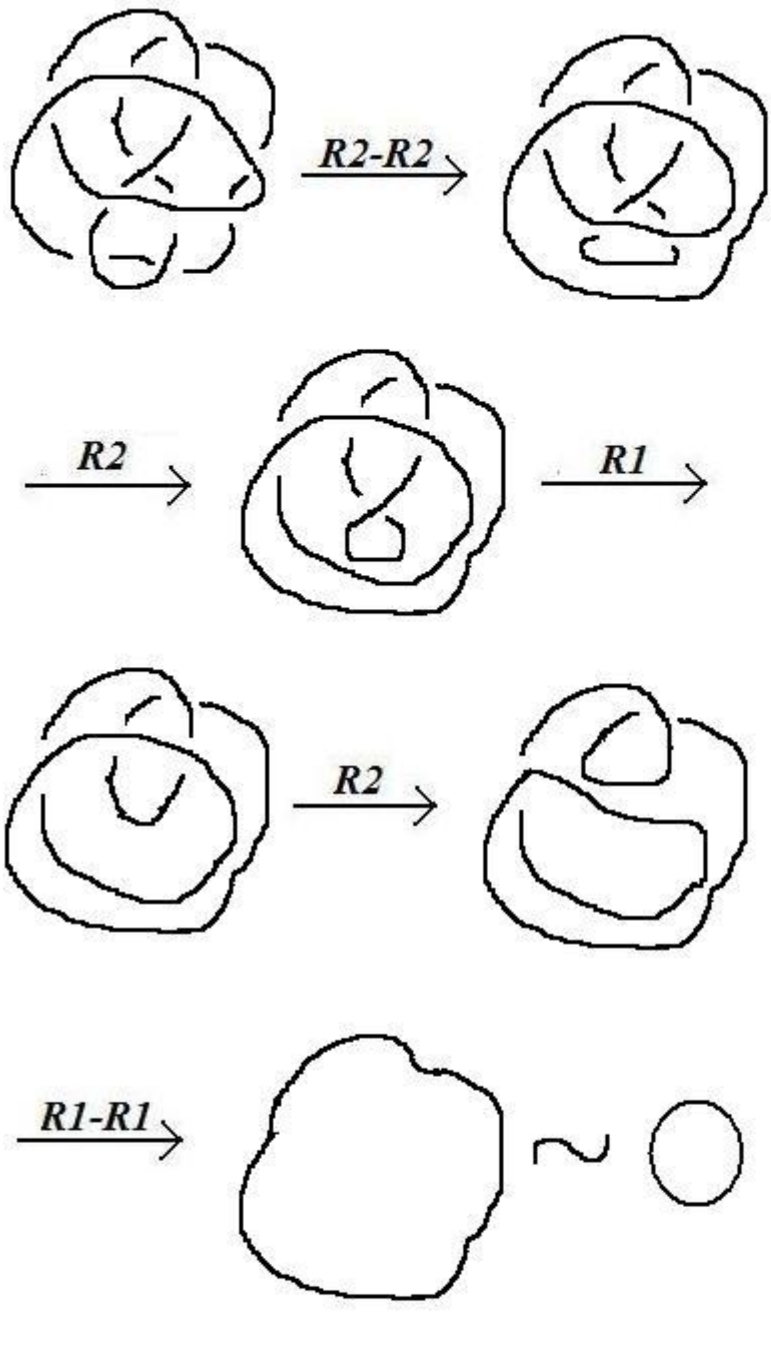
Tanım: K ve K' birer düğüm veya link olsunlar. K ve K' birbirine eşittir diyebilmek için K dan K' elde edilebiliyor olması gerekir. Bunun için de bazı dönüşümler kullanılır. Kullanılan bu dönüşümlerin tümüne Reidemester Hareketleri denir. Bunlar:

1.
2.
3.



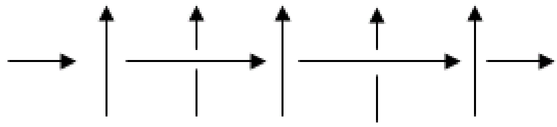
K ya bu dönüşümler uygulandığında K' elde edilebiliyorsa K ve K' birbirine eşittir. $K \simeq K'$ şeklinde ifade edilir.

Örnek: Aşağıdaki örnekteki şeklin Reidemester Hareketleri kullanılarak çembere dönüştürülebildiğini görelim:



Şekil 5. 1 . Reidemester Hareketleri'nin kullanımı

Tanım: Bir düğüm veya linkin geçişleri bir alt bir üst şeklinde devam ediyorsa o düğüm veya link **altenedir** denir.



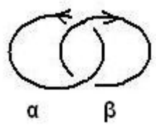
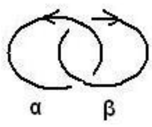
Şekil 5. 2 . Bir düğüm veya linkin alterne oluşu

Bileşenleri α ve β olan bir linki ele alalım. α ve β yı yönlendirdiğimizde iki çeşit geçiş ortaya çıkar:

Şekil 5. 3 . Yönlendirilmiş link seçenekleri

Bu geçişleri belirlemek için bir linking sayısı tanımına ihtiyaç olacak.

Tanım: $L = \alpha \cup \beta \subset S^3$ olmak üzere α ve β arasındaki geçişlerin sayısına linking sayısı denir ve $\ell k(\alpha, \beta) = \ell k(L)$ şeklinde ifade edilir.

lk  $= +1$ ℓk  $= -1$

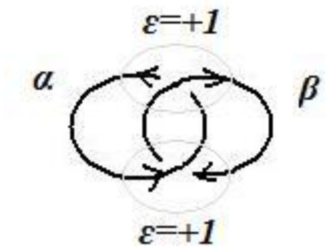
Yani:

Şekil 5. 4 . Bir linkte olması mümkün geçişlerin sayıyla ifadesi

Tanım: $L = \alpha \cup \beta$ şeklindeki $2-$bileşenli L linki için $\alpha \cap \beta$ kümesi $L = \{\alpha \ ve \ \beta \ nın \ geçişlerinin \ kümesi\}$ olduğunda aşağıdaki eşitliğe diyagramın linking sayısı denir.

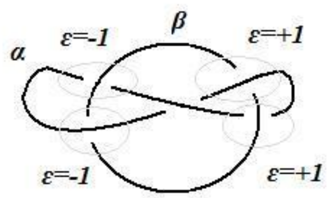
$$\ell k(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \sum_{p \in \alpha \cap \beta} \varepsilon(p)$$

Örnek: Aşağıdaki link için linking sayısı verilen formüle göre hesaplanır:



$$\ell k(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}(+1+1)=1$$

Örnek: Aşağıdaki linkin linking sayısı verilen formüle göre hesaplanır:



$$\ell k(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}(+1+1-1-1)=0]$$

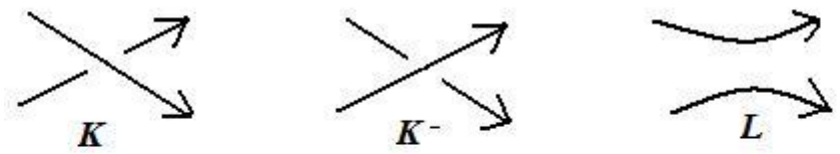
6. ALEXANDER-CONWAY POLİNOMU

Yönlendirilmiş düğüm veya linkleri belirlemek için Alexander-Conway polinomlarından faydalanılır. Bu polinomlar üç aksiyomla tanımlanabilir:

Aksiyom 1: Her yönlendirilmiş K düğüm veya linki için $\nabla_K(z) \in \mathbb{Z}(z)$ şeklinde bir polinom vardır. Birbirine eşit düğüm veya linkler aynı polinomlara sahiptirler: $K \simeq K' \Rightarrow \nabla_K = \nabla_{K'}$

Aksiyom 2: Eğer K düğümsüz $(K \simeq 0)$ ise $\nabla_K = 1$ dir.

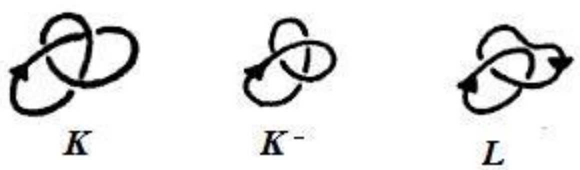
Aksiyom 3: $\nabla_K - \nabla_{\overline{K}} = z\nabla_L$



Şekil 6. 1 . Aksiyom 3'ün görsel ifadesi

Lemma: L eğer split link ise $\nabla_L = 0$ dır.

Örnek: Yukarıdaki aksiyomlar kullanılarak "Üç $Yapraklı\ Yonca$" nın polinomu hesaplanabilir.

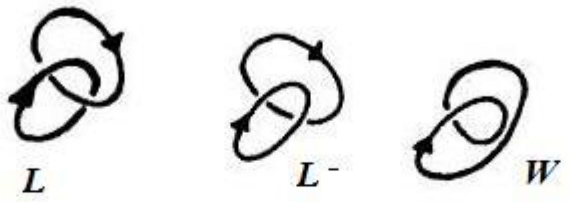


Şekil 6. 2 . Aksiyomların kullanımıyla ilgili örnek

$$\nabla_K - \nabla_{\overline{K}} = z\nabla_K$$

$$K^- \simeq 0 \Rightarrow \nabla_{\overline{K}} = 1$$

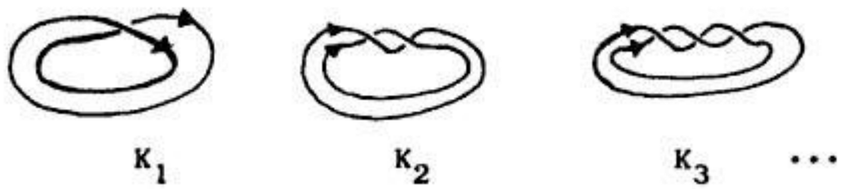
$$\nabla_K = 1 + z\nabla_L$$



Şekil 6. 3 . Aksiyomların kullanımıyla ilgili örnek (devamı)

$$\nabla_L - \nabla_{\bar{L}} = z\nabla_W$$
$$W \simeq 0 \Rightarrow \nabla_W = 1$$
$$\bar{L} \text{ split } \Rightarrow \nabla_{\bar{L}} = 0$$
$$\therefore = z$$
$$\Rightarrow \nabla_K = 1 + z^2$$

Tanım: Aşağıdaki şekiller alterne düğüm ve linklerdir:



Şekil 6. 4 . Alterne düğüm ve linklerin gösterimi

$$\nabla_n = \nabla_{K_n}$$
$$\nabla_1 = 1$$
$$\nabla_2 = z$$
$$\nabla_n = z\nabla_{n-1} + \nabla_{n-2} \text{ dir.}$$

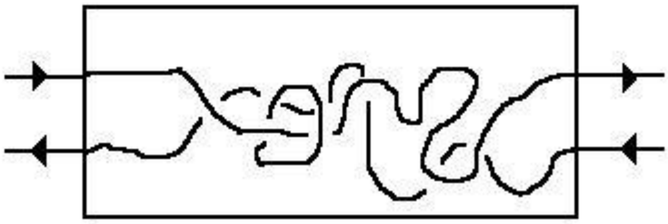
$z = 1$ için polinomları yazmanın kolay yolu olarak Fibonacci Serisinden faydalanılabilinir:

$\nabla_1 = 1$	1						
$\nabla_2 = z$	1	1					
$\nabla_3 = z^2+1$	1	2	1				
$\nabla_4 = z^3+2z$	1	3	3	1			
$\nabla_5 = z^4+3z^2+1$	1	4	6	4	1		
$\nabla_6 = z^5+4z^3+3z$	1	5	10	10	5	1	
...	...						

Tanım: Girişi ve çıkışı aşağıdaki gibi olan düğüm diyagramına bir "tangle" denir.

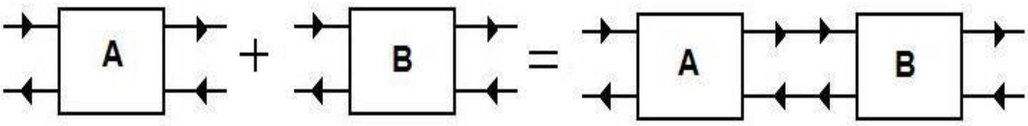
Şekil 6. 5 . Bir tangle

Şekil 6.6 basit bir tangle örneğidir:



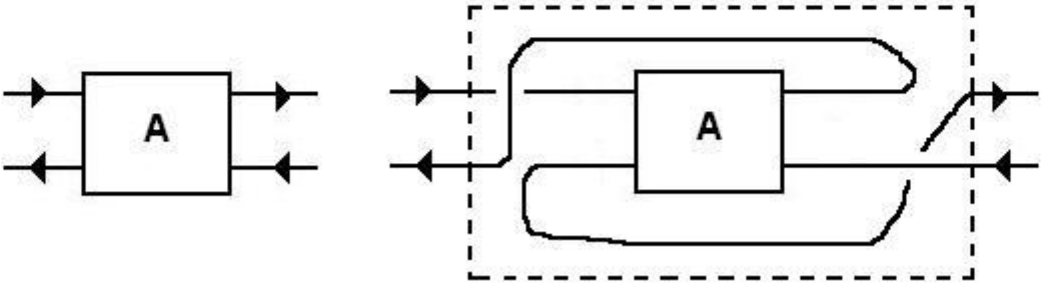
Şekil 6. 6 . Bir tangle örneği

İki tangle için toplama işlemi şekil 6.7'deki gibidir:



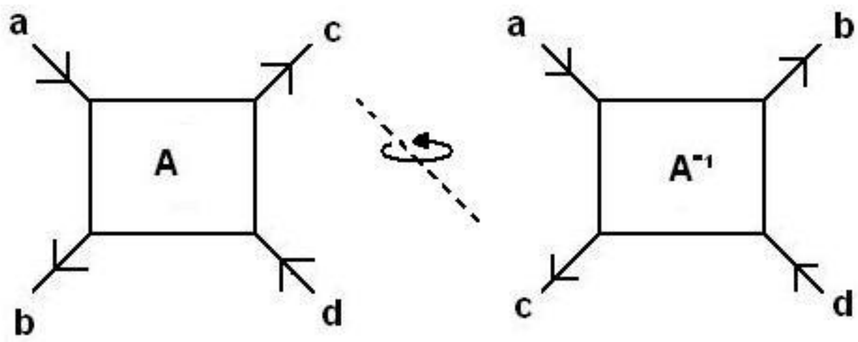
Şekil 6. 7 . İki tangle için toplama işlemi

Bir tangle'ın tersi şekil 6.8' deki gibi bulunur:



Şekil 6. 8 . Bir tangle'ın tersi

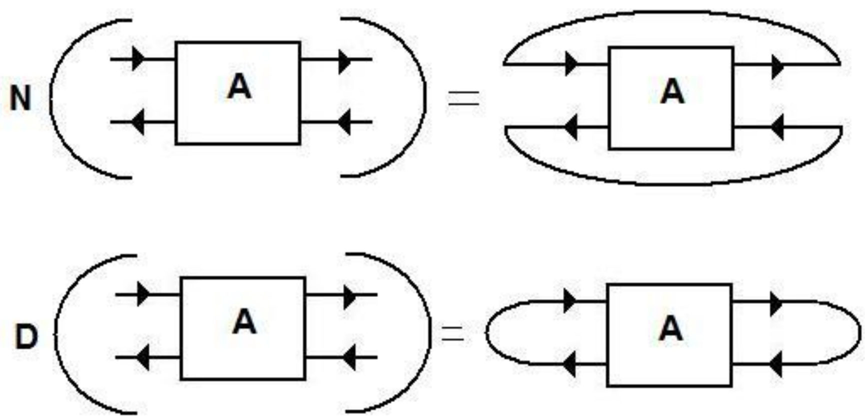
Bir başka yöntem de şekil 6.9'daki gibidir:



Şekil 6. 9 . Bir tangle'ın tersini bulmanın başka yöntemi

Tangle A nın oklarına yön verip isimlendirdikten sonra $a - d$ -doğrultusunda 90° döndürüp okların ismi değiştirildiğinde A^{-1} elde edilir.

Düğüm veya linkler, tangle'lara A' nın nominatörü $N(A)$ veya denominatörü $D(A)$ ile olmak üzere iki şekil de bağlanır:



Şekil 6. 10 . Düğüm veya linklerin birbirlerine bağlanış biçimleri

Tanım: $N(A)$ ve $D(A)$ polinomlarının bölümüne A nın nominatör ve denominatör kesri denir ve $F(A) = \frac{\nabla_{NA}}{\nabla_{DA}}$ şeklinde ifade edilir.

Ayrıca A tangle'ının tersi de $F(A^{-1}) = \frac{1}{F(A)}$ şeklinde ifade edilir.

Tanım: Bir tangle ın nominatör ve denominatör polinomları kesrine, A nın nominatör ve denominatörlerinin Conway polinomları denir.

Teorem: Tangle ların toplamının kesri, kesirlerin toplamına eşittir.

$\nabla_{N(A+B)} = \nabla_{NA}\nabla_{DB} + \nabla_{DA}\nabla_{NB}$

$\nabla_{D(A+B)} = \nabla_{DA}\nabla_{DB}$

Kanıt:

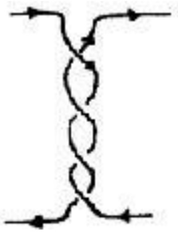
$$\left.\begin{aligned} F(A) &= \frac{\nabla_{NA}}{\nabla_{DA}} \\ F(B) &= \frac{\nabla_{NB}}{\nabla_{DB}} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow\ F(A+B) = \frac{\nabla_{NA}}{\nabla_{DA}} + \frac{\nabla_{NB}}{\nabla_{DB}} = \left(\frac{\nabla_{NA}\nabla_{DB} + \nabla_{DA}\nabla_{NB}}{\nabla_{DA}\nabla_{DB}}\right)$$

$$F(A+B) = \frac{\nabla_{N(A+B)}}{\nabla_{D(A+B)}}$$

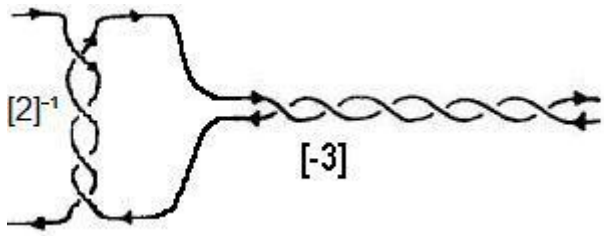
$$\Rightarrow \frac{\nabla_{N(A+B)}}{\nabla_{D(A+B)}} = \frac{\nabla_{NA}\nabla_{DB} + \nabla_{DA}\nabla_{NB}}{\nabla_{DA}\nabla_{DB}}$$

7. İKİ KÖPRÜLÜ DÜĞÜMLERİN CONWAY POLİNOMLARINI BULMA

Örnek: $T_1 =$  $= [-3]$ $\nabla_{NT_1} = -3z$ ve $\nabla_{DT_1} = 1$

$T_2 =$  $= [2]^{-1}$ $\nabla_{NT_2} = 1$ ve $\nabla_{DT_2} = 2z$

$A = T_1 + T_2$

$A =$ 

$$F(A) = F([2]^{-1}) + F([3]) = \left(\frac{1}{2z}\right) - \left(\frac{3z}{1}\right) = \left(\frac{1-6z^2}{2z}\right)$$

$$\therefore \nabla_{NA} = 1 - 6z^2$$

$$\nabla_{DA} = 2z$$

KAYNAKLAR

Kauffman, L. H. (1987), *On Knot,* Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

Massey, W. S. (1967), *Algebraic Topology: An Introduction,* New Heaven, Connecticut: Springer-Verlag.