BİR KÜMENİN ÇEŞİTLİ ETKİN NOKTALARI VE VEKTÖR OPTİMİZASYON

SELİN ÇELİK

Yüksek Lisans Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Şubat 2012

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Selin Çelik'in **"Bir Kümenin Çeşitli Etkin Noktaları ve Vektör Optimizasyon"** başlıklı **Matematik** Anabilim Dalındaki **Yüksek Lisans** tezi 25.01.2012 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	Adı - Soyadı	**İmza**
Üye (Tez Danışmanı)	**Prof.Dr. Yalçın KÜÇÜK**	....
Üye	**Yard.Doç.Dr. Gürkan ÖZTÜRK**	....
Üye	**Yard.Doç.Dr. Taner BÜYÜKKÖROĞLU**	....

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof.Dr. Rıdvan SAY
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BİR KÜMENİN ÇEŞİTLİ ETKİN NOKTALARI VE VEKTÖR OPTİMİZASYON

Selin ÇELİK

Anadolu Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Yalçın KÜÇÜK

2012, 102 Sayfa

Bu çalışmanın ilk bölümünde öncelikle bağıntı ve koni kavramları tanıtılıp bazı özellikleri verilmiştir. Sıralama bağıntıları ve koniler arasındaki ilişkiler kurulmuş ve çok ölçütlü karar verme problemi ve skalerizasyon tanımları yapılmıştır. Ayrıca vektör değerleri fonksiyonların bazı zayıf konvekslik tanımları ve bunların özellikleriyle ilgili teoremler kanıtsız olarak verilmiştir.

İkinci bölümde, $\mathbb{R}^n$ deki bir küme için özel adlarla anılan çeşitli etkin noktalar tanıtılmış, geometrik yorumları yapılmıştır. Bu tanımların hangilerinin birbirlerini doğrudan gerektirdiği saptanmış, gerektirmelerin olmadığı durumlarda da örnekler verilmiştir. Sonuçlar da iki şema üzerinde özetlenmiştir.

Üçüncü bölümde, Weierstrass Teoremi temel alınarak ve zayıflatılmış koni kompaktlık, koni-sınırlılık, koni-tamlık ve zayıf konvekslik kavramları kullanılarak, $\mathbb{R}^n$'den $\mathbb{R}^p$'ye tanımlı vektör değerli fonksiyonlar için koni sıralamasına göre optimallik için gerekli ve yeterli şartlar verilmiştir.

Son bölümde X, Y normlu Banach uzayları ve $f : X \to Y$ fonksiyonu için optimal elemanların varlığı çalışılmış, çeşitli varlık teoremleri verilmiştir. Bununla birlikte, $f : X \to Y$ fonksiyonunun her bir minimal elemanı için uygun skalerizasyonun varlığı normlar kullanılarak gösterilmiştir. Daha sonra $S \subset Y$ kümesinin minimal noktalarını ayıran ve koninin dual konileri içinde olan doğrusal dönüşümler yardımıyla skalerizasyonu gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Etkin Nokta, Sıralama Konisi, Vektör Optimizasyon, Skalerizasyon, Optimallik Koşulları

ABSTRACT

Master Of Science Thesis

VARİOUS EFFICIENT POINTS OF A SET AND VEKTOR OPTİMİZATİON

Selin ÇELİK

Anadolu University

Graduate School of Sciences

Mathematics Program

Supervisor: Prof. Dr. Yalçın KÜÇÜK

2012, 102 Pages

In the first part of this work, the notions of binary relation, cone and their properties are recalled. Relationships between ordering relations and cones are constructed and multi criteria optimization problems and scalarization are defined. Furthermore, some weakened convexity of vector valued functions are defined and theorems about properties of vector-valued functions are given without proofs.

In the second part, various efficient points with special names are recalled and interpreted geometrically for a subset of $\mathbb{R}^n$. Which of these definitions require to each other is determined and some examples are given in the case of absence of requirements. Results are summarized on two schemes.

In the third part, on the base of Weierstrass Theorem, necessary and sufficient optimality conditions of vector-valued functions defined from $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}^p$ are given with respect to the cone orders.

In the last part, existence of the optimal elements of a function $f : X \to Y$ studied where X and Y are normed Banach spaces and some existence theorems are given. Moreover existence of a suitable scalarization for each minimal element of a function $f : X \to Y$ proved by means of norms. Scalarization of the function f is obtained by using linear mappings which belong to dual cones of the cone and separates minimal points of the set $S \subset Y$.

Keywords: Efficient Point, Ordering Cone, Vector Optimization, Scalarization, Optimality Conditions

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında ve üzerimde büyük emekleri olan değerli hocalarım Prof. Dr. Yalçın Küçük ve Prof. Dr. Mahide Küçük'e, tezin yazımında ve hazırlama aşamasında yardımlarını esirgemeyen Dr. İlknur Atasever, Ersan Göçmen, Mustafa Ünal ve beni her zaman destekleyen sevgili eşime ve aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

Selin Çelik

Şubat 2012

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

X	:	Gerçel topolojik uzayı
X^*	:	X uzayının topolojik duali
$cor(S)$	:	S kümesinin cebirsel içi
$int(S)$	:	S kümesinin içi
$cl(S)$	:	S kümesinin kapanışı
C	:	Koni
$cone(S)$	:	S kümesinin ürettiği koni
$[x, y]$	:	x ve y arasındaki sıralı aralık
$C_{X'}$	:	C konisinin duali
$C^{\sharp}_{X'}$	:	C konisinin dualinin quasi içi
$\\|.\\|$	:	Norm
$(X, \\|.\\|_X)$	:	X normlu uzayı
X^*	:	X uzayının dual uzayı
$C_{\geqq}$	:	Cnin negatif olmayan polar konisi
$C_{>}$	:	C'nin kesin pozitif polar konisi
$T(S, \bar{x})$	:	S kümesinin $\bar{x}$'deki teğet konisi(tanjant konisi)

1 GİRİŞ

Amaç fonksiyonu, bir $f = (f_1, f_2, ..., f_p)$ vektör fonksiyonu olan, bir optimizasyon problemine, bir çok ölçütlü karar verme problemi denir.
$X \subset \mathbb{R}^n$ olsun. $x \in X$ değişkeninin bazı ek sınırlamaları sağlaması gerekebilir. Bu ek sınırlamalar genellikle fonksiyonel eşitsizliklerle verilebilir. Yani $S \subset X$ kümesi $S = \{x \in X : g_j(x) \leqq 0, j = 1, ..., m\}$ olarak ifade edilir. Bu durumda, $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ olmak üzere vektör optimizasyon problemi,

$$(V.P) \left\{ \min_{x \in S} f(x) \right.$$

biçiminde ifade edilir.
Buradaki S kümesi, uygun çözümler kümesi olarak adlandırılır.
Bir vektör optimizasyon problemi, birbirine indirgenemeyen farklı amaçları güden herhangi bir karar-verme yöntemi olarak düşünülebilir. Bu amaçların her biri diğerlerinden daha üstün olabilir. Politika, ticaret ve genel grup karar verme, birçok farklı görüş noktaları ile bağlantılıdır. Matematiğin gerçel dünya uygulamalarında, farklı ölçütlere sahip olduğunu kabul etmek şaşırtıcı değildir. Matematiksel ekonomi, oyun teorisi, üretim teorisi, denge teorisi gibi diğer birçok uygulama, vektör optimizasyon uygulamalarıdır.

Tüm amaçlar için en küçük değeri veren noktaya ideal nokta denir. Önemli olan, $f_1, ..., f_p$ fonksiyonları ile elde edilen farklı amaç fonksiyonları için bir optimallik notasyonu tanımlamaktır. Vektör optimizasyon probleminin zorluğu, alternatif bazı parçaların karşılaştırılamayacağından kaynaklanır. Matematiksel düşünce olarak, vektör optimizasyon problemi, $Z = f(S) \subset \mathbb{R}^p$ kısmi sıralı küme içinde optimal olarak tanımlanan bazı değerlerin araştırılmasıdır. Z kümesine, f dönüşümü altındaki görüntü uzayı ya da çıktı uzayı denir.
Yukarıda tanımlanan $(V.P)$ vektör optimizasyon problemi için tanımlanan ilk çözüm tipi Pareto optimumdur. Bu tanım, İtalyan matematiksel ekonomist Vifredo Pareto tarafından aşağıdaki biçimde formüle edilmiştir:
$\forall i = 1, ..., p$, $f_i(x) \leqq f_i(x^0)$ sağlayan bir $x \in S$ yoksa ve en az bir j indeksi

için $f_j(x) < f_j(x^0)$ olan $x^0 \in S$ noktasına Pareto optimum ya da Pareto etkin nokta adı verilir. Pareto optimallik notasyonları, bileşen bileşen sıralamaya dayanmaktadır.

Çalışmada kullanılacak bazı temel tanımlamalar izleyen şekilde sunulacaktır.

Tanım 1.0.1. *(Konik Tercihli Sıralama) R, keyfi $Z \subset \mathbb{R}^p$ kümesi üzerinde bir ikili bağıntı olsun. [13]*

a) *$\forall x \in Z$ için xRx oluyorsa R yansımalıdır.*

b) *$\forall x \in Z$ için $x\not{R}x$ oluyorsa, R yansımasız*

c) *$\forall x, y \in Z$ için xRy iken yRx oluyorsa, R simetriktir.*

d) *$\forall x, y \in Z$ için xRy iken $y\not{R}x$ oluyorsa R,asimetriktir.*

e) *$\forall x, y \in Z$ için xRy ve yRx iken $x = y$ oluyorsa, R antisimetriktir.*

f) *$\forall x, y, z \in Z$ için xRy ve yRz iken xRz oluyorsa, R geçişmelidir.*

g) *$\forall x, y, z \in Z$ için $x \not{R} y$ ve $y\not{R}z$ iken $x \not{R}\, z$ oluyorsa R, geçişmesizdir.*

h) *$\forall x, y \in Z$ için xRy veya yRx oluyorsa R, tamdır(ya da bağlantılıdır) denir.*

i) *$x \neq y$ olan $\forall x, y \in Z$ için xRy veya yRx oluyorsa R, zayıf tamdır(ya da zayıf bağlantılıdır) denir.*

j) *$\forall x, y, z \in Z$ olmak üzere $cx + z, cy + z \in Z$ ve $\forall c \in \mathbb{R}_+$ için xRy iken $(cx + z)R(cy + z)$ oluyorsa R, lineerdir denir.*

Tanım 1.0.2. *R, $Z \subset \mathbb{R}^p$ üzerinde ikili bir bağıntı olmak üzere;*

a) *R yansımalı ve geçişmeli ise R'ye **preorder***

b) *R antisimetrik ve geçişmeli ise R'ye **kısmi sıralama***

c) *R yansımalı, antisimetrik, geçişmeli ve tam ise R'ye **tam sıralama***

d) *R yansımasız, antisimetrik ve geçişmeli ise R'ye **kesin kısmi sıralama***

e) *R asimetrik ve geçişmesiz ise R'ye **zayıf sıralama***

f) *R yansımasız, geçişmeli ve zayıf tam ise R'ye* ***kesin tam sıralama*** *adı verilir.*

Teorem 1.0.3. *R, $Z \subset \mathbb{R}^p$ üzerinde bir bağıntı olsun. Bu durumda,*

a) *R kesin tam sıralı ise zayıf sıralıdır,*

b) *R zayıf sıralı ise kesin kısmi sıralıdır.*

Kanıt.

a) R, kesin tam sıralı olsun. Bu durumda R yansımasız, geçişmeli ve zayıf tamdır.
R bağıntısının, asimetrik ve geçişmesiz yani $\forall x, y \in Z$ için xRy iken $y\not{R}x$ ve $\forall x, y, z \in Z$ için $x\not{R}y$, $y\not{R}z$ iken $x\not{R}z$ olduğunu göstermeliyiz.
$\forall x, y \in Z$ için xRy olsun. $y\not{R}x$ olduğunu gösterelim. yRx olsaydı xRy, yRx ve R geçişmeli olduğundan xRx olurdu. Bu ise R'nin yansımasız olması ile çelişirdi. $y\not{R}x$ olmalıdır.
$x\not{R}y$, $y\not{R}z$ olsun. R zayıf tam olduğundan yRx ve zRy olur. R geçişmeli olduğundan zRx 'dir. R asimetrik olduğundan $x\not{R}z$'dir. O halde R geçişmesizdir.
R asimetrik ve geçişmesiz olduğundan zayıf sıralıdır.

b) R bağıntısı zayıf sıralı yani asimetrik ve geçişmesiz olsun. R bağıntısının kısmi sıralama yani yansımasız, antisimetrik ve geçişmeli olduğunu gösterelim.
R asimetrik olduğundan R'nin yansımasız ve antisimetrik olduğu açıktır.
$\forall x, y, z \in Z$ için xRy, yRz olsun. R asimetrik olduğundan $y\not{R}x$ ve $z\not{R}y$'dir. R geçişmesiz olduğundan $z\not{R}x$'dir.Bu durumda xRz olur. Çünkü $x\not{R}z$ olsaydı R geçişmesiz olduğundan $y\not{R}z$ olurdu ki bu yRz alınışı ile çelişirdi. □

Sıralama bağıntısı "$\geqq$"; kesin sıralama bağıntısı ise "$\geq$" ile gösterilecektir.

Örnek 1.0.4.

a) *$\mathbb{R}^p$'de $\forall x, y \in \mathbb{R}^p$ için $x \geq y$;*
$\forall i < k (1 \leqq k \leqq p)$için $x_i = y_i$ ve $x_k > y_k$ şeklindeki sıralamaya alfabetik (lexicographic) sıralama adı verilir.

b) *$\mathbb{R}^p$'de $\forall x, y \in \mathbb{R}^p$ için $x \geqq y$;*

$\forall i = 1, ..., p$ için $x_i \geqq y_i$ şeklindeki sıralamaya Pareto sıralama ya da bileşen bileşen sıralama adı verilir.

Özellikle Pareto sıralamada, $\forall i = 1, ..., p$ için $x_i > y_i$ iken $x > y$ ve $x \geqq y$ ve $\exists i : x_i > y_i$ iken $x \geq y$ yazacağız.

c) *Tüm gerçel dizilerin kümesinde, bir kısmi (bileşen bileşen) sıralama, $x = \{x^k\}, y = \{y^k\}$ olmak üzere $x \geqq y$;*

$\forall k \in \mathbb{N}$ için $x^k \geqq y^k$ olarak tanımlanır.

Eğer x-y vektörü konveks ve pointed $\mathbb{R}^p_+$ konisine ait ise, önceki bileşen bileşen sıralama örneklerinde olduğu gibi $x \geqq y$ elde ederiz.

$x \geqq y$ kısmi sıralaması ve $x - y$'nin bir konveks ve pointed koniye ait olması arasındaki bu ilişki genel bir durumdur. Bu durum Teorem 1.0.6 ile Öklidyen uzaylar için açıkça formüle edilmiştir.

Çok boyutlu uzaylarda sıralama yapabilmek için koniler kullanılır. Konilerin tanımı ve sıralama amacıyla nasıl kullanılacağı izleyen paragraflarda açıklanmaktadır.

Tanım 1.0.5. *$C \subset \mathbb{R}^p$ verilsin. $\forall x \in C$ ve $\forall \lambda \geq 0$ için $\lambda x \in C$ oluyorsa C'ye bir* ***koni*** *denir. Ek olarak $C \cap (-C) = \{0\}$ oluyorsa bu koniye* ***sivri(pointed) koni*** *denir.*

Teorem 1.0.6.

a) *$\mathbb{R}^p$, $\geqq$ bir lineer bağıntısı ile kısmi sıralı ise*

$$C = \{y \in \mathbb{R}^p : y \geqq 0\}$$

kümesi, konveks ve pointed bir konidir.

b) *$C \subset \mathbb{R}^p$ konveks ve pointed bir koni ise;*

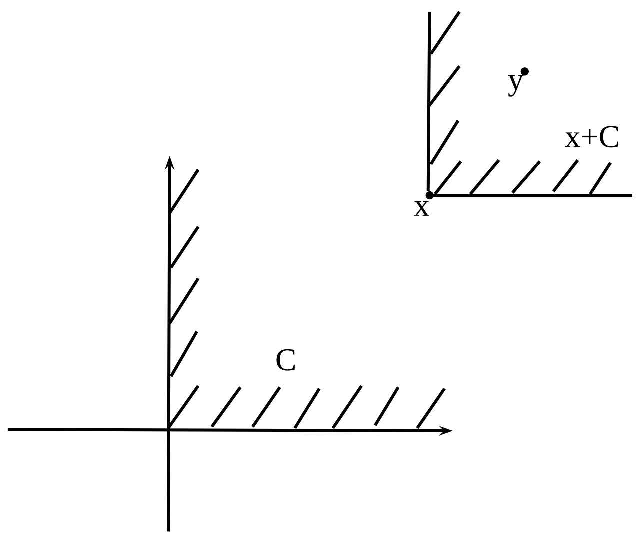
$$x \geqq y \Leftrightarrow x - y \in C$$

olarak tanımlanan "$\geqq$" ikili bağıntısı $\mathbb{R}^p$ üzerinde bir kısmi sıralamadır.

Teorem 1.0.6, "$\geqq$" bağıntısının antisimetrikliği ile C sıralama konisinin pointed olması arasındaki güçlü bağıntıyı gösterir. Benzer bağıntı, geçişmeli ve lineer özellikler ile C konisinin konveksliği ve $0 \in C$ olması arasında da mevcuttur.

$C \subset \mathbb{R}^p$ konveks ve pointed bir koni olsun. Bu koni ile bir kısmi sıralama şu şekilde verilebilir:

$$x \leq_C y \Leftrightarrow y - x \in C$$



Şekil 1.1. C'nin pozitif ve negatif polar konileri

Uyarı 1.0.7. *C, $\mathbb{R}^p$ üzerinde sıralama konisi olsun. C konisine göre yapılan sıralama "$\leqq_C$" yerine "$\leqq$" şeklinde gösterilecektir.*

Tanım 1.0.8. *S, X gerçel normlu uzayının boştan farklı bir alt kümesi ve $\bar{x} \in cl(S)$ ve $h \in X$ olsun. S kümesinin elemanlarından oluşan en az bir $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi ve pozitif gerçel sayıların en az bir $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi*

$$\bar{x} = \lim_{n\to\infty} x_n$$

$$h = \lim_{n\to\infty} \lambda_n(x_n - \bar{x})$$

*olacak şekilde varsa $h \in X$ vektörüne bir **tanjant vektör(teğet vektör)** denir. Bu durumda*

$T(S,\bar{x}) = \{h \in X : h,\ S$ *'nin* $\bar{x}'$*deki teğet vektörü*$\}$ *kümesine* S *kümesinin* $\bar{x}$*'deki* ***teğet konisi(tanjant konisi)*** *denir.*

Tanım 1.0.9. *S, X gerçel normlu uzayının boştan farklı bir alt kümesi ve $\bar{x} \in cl(S)$ verilmiş olsun. Bu durumda*

$$R(S,\bar{x}) = cl(cone(S - \{\bar{x}\}))$$

konisine S'nin $\bar{x}$'deki ***radial konisi*** *denir.*

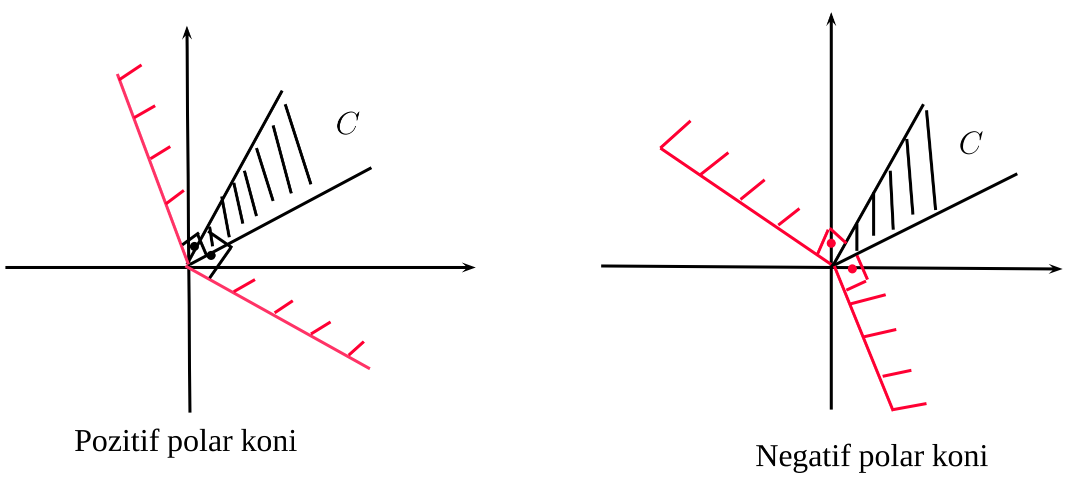
Tanım 1.0.10. *$C_{\geqq}$, C'nin negatif olmayan polar konisi ,*

$$C_{\geqq} = \{u|\ u.y \geqq 0\ ,\ \forall y \in C\}$$

$C_{>}$ C'nin kesin pozitif polar konisi ,

$$C_{>} = \{u|\ u.y > 0\ \ \forall y \in C \backslash \{0\}\}$$

şeklinde tanımlanır.



Şekil 1.2. C'nin pozitif ve negatif polar konileri

Tanım 1.0.11. *X gerçel doğrusal uzay, $\emptyset \neq S \subset X$ olsun.*

$$\left\{\bar{x} \in S : \forall x \in X \quad \textit{için} \ \ \exists \bar{\lambda}_x \in \mathbb{R}_+ \ \textit{öyle ki}\ \forall \lambda \in [0, \bar{\lambda}_x] \quad \textit{için} \ \ \bar{x} + \lambda x \in S\right\}$$

kümesine S'nin ***cebirsel içi*** *denir ve bu küme $cor(S)$ ile gösterilir.*

Tanım 1.0.12. *X gerçel doğrusal uzay, $C \neq \{0_X\}$ konveks koni ve $B \subset C$ konveks kümesi verilsin. Bu durumda $\forall x \in C \backslash \{0_X\}$ için $\exists! b \in B$ ve $\exists \lambda > 0$ olmak üzere $x = \lambda b$ şeklinde tek türlü ifade edilebiliyor ise B kümesine C konisinin bir **tabanı** denir.*

Tanım 1.0.13. *(Çok Ölçütlü Karar Problemi)*
$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ olarak tanımlı bir fonksiyon olsun. Bu durumda,
$f : (f_1, f_2, ..., f_m)$, $f_i : A \to \mathbb{R}$
$(P) \quad \min\limits_{x \in A} f(x)$
*problemine **çok ölçütlü karar problemi** denir.*

Tanım 1.0.14. *Vektör değerli bir problemi skaler bir probleme dönüştürme işlemine **skalerizasyon** denir.*
Skalerizasyonda şu üç temel soru akla gelir;

a) *Skaler problemin çözümleri orjinal problemin çözümü olur mu?*

b) *Orjinal problemin her çözümü skaler problem ile elde edilebilir mi?*

c) *Karar vericinin ek şartları varsa skaler problemde bunları ifade ederek istenilen minimal çözüm bulunabilir mi?*

Tanım 1.0.15. ***(a)*** *$f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ bir fonksiyon, X konveks küme olmak üzere $\forall t \in [0, 1]$ ve $\forall x^1, x^2 \in X$ için*

$$t.f(x^1) + (1-t).f(x^2) \in C + f(tx^1 + (1-t)x^2)$$

*oluyorsa, f'ye X üzerinde C**-konvekstir** denir.*

(b) *$f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ fonksiyonu verilsin.*
$\forall x^1, x^2 \in X$ ve $\forall t \in [0, 1]$ için $x^2 + t\eta(x^1, x^2) \in X$ iken
$tf(x^1) + (1-t)f(x^2) \in C + f(x^2 + t\eta(x^1, x^2))$
*olacak şekilde $\eta : X \times X \to X$ fonksiyonu varsa, f'ye C **pre-inveks fonksiyon** denir.*

(c) *$f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ diferensiyellenebilir fonksiyon olsun. $\forall x^1, x^2 \in X$ için $f(x^2) - f(x^1) \in C + Jf(x^1)\eta(x^1, x^2)$ olacak şekilde $\eta : X \times X \to X$ varsa, f'ye C**-inveks fonksiyon** denir.*

(d) *$f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ diferensiyellenebilir fonksiyon olsun. $f(x^2) - f(x^1) \in -C\backslash\{0\}$ olan $\forall x^1, x^2 \in X$ için $Jf(x^1)(x^2 - x^1) \in -intC$ oluyorsa, f'ye* C***-pseudoconvex*** *denir.*

(e) *$f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ diferensiyellenebilir fonksiyon olsun. $f(x^2) - f(x^1) \in -C$ olan $\forall x^1, x^2 \in X$ için $Jf(x^1)(x^2 - x^1) \in -C$ oluyorsa, f'ye* C***-quasiconvex*** *denir.*

Uyarı 1.0.16. *f diferansiyellenebilir bir fonksiyon olduğunda $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c)$ elde edilir.*

$\mathbb{R}^p$ bileşen bileşen sıralı olduğunda;

$$\begin{array}{rcl} \text{Bir vektör fonksiyonu } \mathbb{R}^P_{+-} \text{ konvekstir} & \Leftrightarrow & \text{tüm bileşenleri konvekstir} \\ \mathbb{R}^P_{+} \text{ pre-inveks} & \Leftrightarrow & \text{tüm bileşenleri pre-invekstir.} \\ \mathbb{R}^P_{-} \text{ inveks} & \Leftrightarrow & \text{tüm bileşenleri invekstir.} \end{array}$$

Bu iddia, $\mathbb{R}^p_+ -$ pseudoconvex (ya da $\mathbb{R}^p_+ -$ quasiconvex) fonksiyonları için doğru olmayabilir. Örneğin; $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f = (x_1^2 + x_2^2\ ,\ -x_1^2 - x_2^2\ ,\ -x_1 + x_2)$ fonksiyonunun $(0, 0)$ noktasında $\mathbb{R}^p_+ -$ pseudoconvex fakat ikinci bileşeninin aynı noktada pseudoconvex olmadığı kolayca görülebilir.

Tanım 1.0.17. *$Z \in \mathbb{R}^p$ kümesi için $Z + C$ kümesi konveks ise Z'ye* C***-konvekstir*** *denir.*

Uyarı 1.0.18. *f bir C-konveks fonksiyon ise, $Z = f(S)$ kümesi X üzerinde C-konvekstir.*

Tanım 1.0.19. *$f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ fonksiyonu verilsin.*
$\forall x^1, x^2 \in X$ ve $\forall t \in [0, 1]$ için $t.f(x^1) + (1 - t)f(x^2) \in C + f(\bar{x})$ olacak şekilde en az bir $\bar{x} \in X$ varsa, f fonksiyonuna ***C-konveks benzeri (C-convexlike)*** *denir.*

Teorem 1.0.20. *$f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ fonksiyonunun C-konveks benzeri olması için gerek ve yeter koşul $f(X)$ görüntü kümesinin bir C-konveks küme olmasıdır.*

Tanım 1.0.21. $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *fonksiyonu verilsin.*

$\forall c \in intC$, $\forall x^1, x^2 \in X$ *ve* $\forall t \in [0,1]$ *için*

$c + tf(x^1) + (1-t)f(x^2) \in intC + f(\bar{x})$ *olacak şekilde en az bir* $\bar{x} \in X$ *varsa,*

f *fonksiyonuna* C***-altkonveks benzeri(subconvexlike)*** *denir.*

2 BİR KÜMENİN ETKİN NOKTALARI VE BİRBİRLERİ İLE KARŞILAŞTIRILMASI

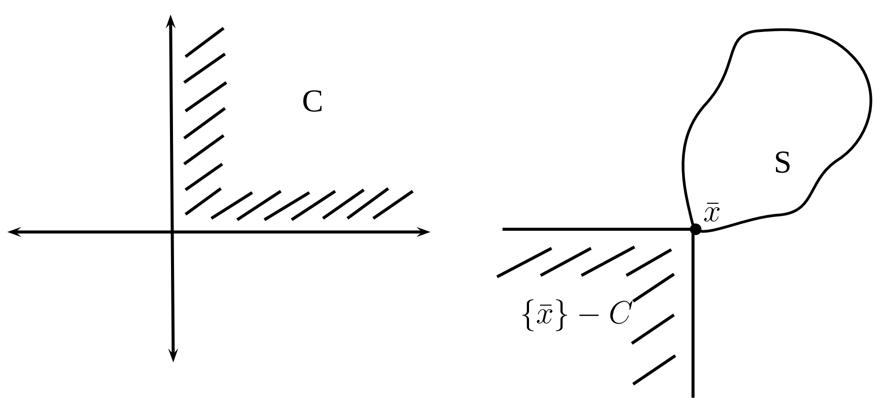
Bu bölümde öncelikle etkin nokta tanımlarına değinilecektir.

2.1 Çeşitli Etkin Nokta Tanımları

Tanım 2.1.1. *$C \subset \mathbb{R}^p$ bir sıralama konisi, $Z \subset \mathbb{R}^p$ boştan farklı bir küme ve $z^0 \in Z$ olsun.*

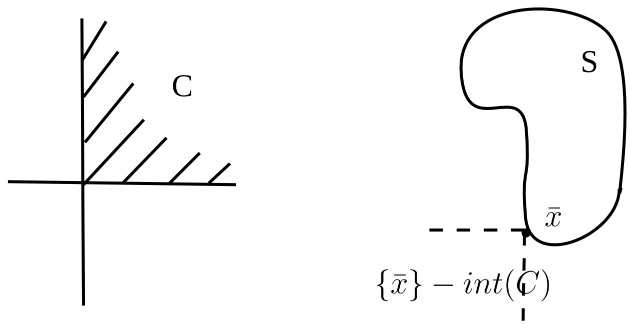
(a) *$z^0 \in Z$ olsun.$\forall z \in Z$ için $z \geqq z^0$ oluyor ise z^0 elemanına Z kümesinin bir **ideal etkin değeri (ideal minimali)** denir. Z kümesinin tüm ideal etkin değerlerinin kümesi $z^0 \in IE(Z)$ şeklinde gösterilir.*

(b) *$z^0 \in Z$ olsun. $z \geq z^0$ olan bir $z \in Z$ için $z^0 \geq z$ ($z = z^0$ iken) oluyorsa z^0 elemanına Z kümesinin bir **minimal etkin değeri** denir. Z kümesinin tüm minimal etkin değerlerinin kümesi $z^0 \in E(Z)$ şeklinde gösterilir. (Bu tanıma denk olarak Jahn J. 'nın "X, C konisi ile kısmi sıralı vektör uzayı, $\emptyset \neq S \subset X$ ve $\overline{x} \in S$ olsun. $(\{\overline{x}\} - C) \cap S = \{\overline{x}\}$ oluyorsa, $\overline{x}$ elemanına S kümesinin **minimal elemanı** denir." tanımı verilebilir.)*



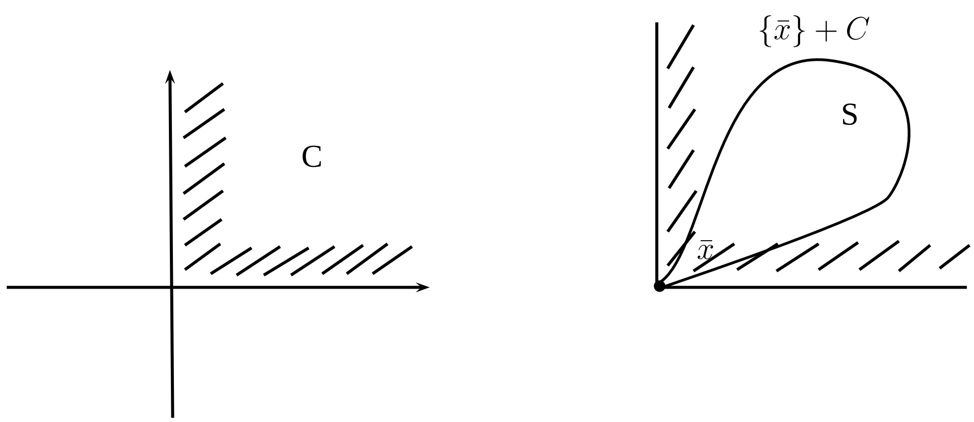
Şekil 2.3. S kümesinin $\bar{x}$ minimal elemanı

(c) *$coneK = \{0\} \cup intC$ konisi ile sıralı Z kümesinin minimal değeri z^0 ise ya da buna denk olarak $z^0 > z$ olan $z \in Z$ yoksa $z^0 \in Z$ elemanına Z kümesinin **zayıf etkin değeri** denir. Z kümesinin tüm zayıf etkin değerlerinin kümesi $z^0 \in WE(Z)$ şeklinde gösterilir. (Bu tanıma denk* *olarak Jahn J.'nın "X, C konisi ile kısmi sıralı vektör uzayı, $\emptyset \neq S \subset X$ ve $\overline{x} \in S$ olsun. $(\{\overline{x}\} - int\,(C)) \cap S = \emptyset$ oluyorsa, $\overline{x} \in X$ elemanına S kümesinin **zayıf minimal elemanı** denir." tanımı verilebilir.)*



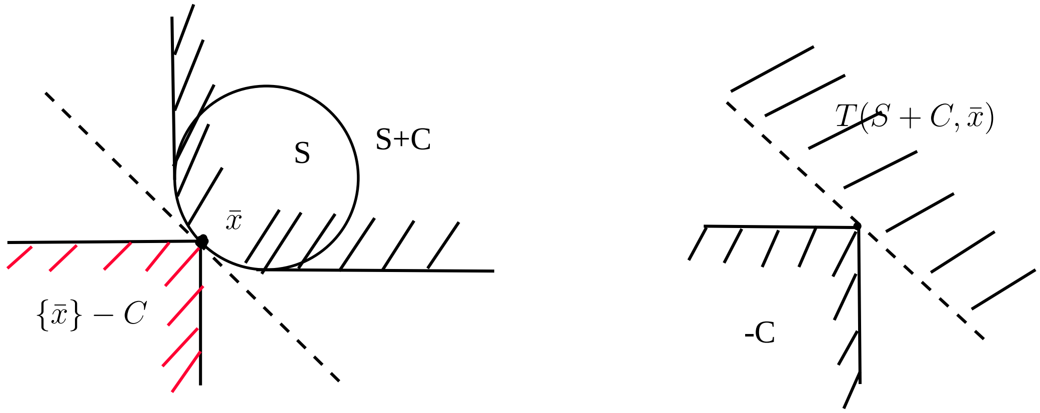
Şekil 2.4. S kümesinin $\bar{x}$ zayıf minimal elemanı

(d) *X, C konisi ile kısmi sıralı vektör uzayı, $\emptyset \neq S \subset X$ ve $\overline{x} \in S$ olsun. $S \subset \{\overline{x}\} + C$ oluyorsa, $\overline{x}$ elemanına S kümesinin **strongly(kuvvetli) minimal elemanı** denir.*



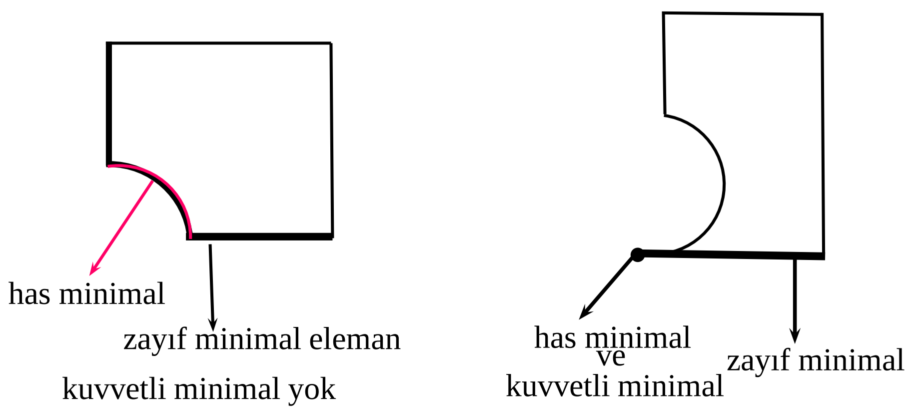
Şekil 2.5. S kümesinin $\bar{x}$ kuvvetli minimal elemanı

(e) *X, C konisi ile kısmi sıralı vektör uzayı, $\emptyset \neq S \subset X$ ve $\overline{x} \in S$ olsun. $\overline{x}$, S kümesinin minimal elemanı ve 0_X, $T\,(S + C, \overline{x})$ teğet konisinin minimal elemanı ise $\overline{x}$ elemanına, S kümesinin **has minimal elemanı** denir.*



Şekil 2.6. S kümesinin $\bar{x}$ has minimal elemanı

Örnek 2.1.2. *Kuvvetli minimal elemanlar kümesi, has minimal elemanlar kümesinin alt kümesi, has minimal elemanlar kümesinin zayıf minimal elemanlar kümesinin alt kümesi olduğu kolayca görülebilir.*



Şekil 2.7. Bir kümenin has minimal, zayıf minimal ve kuvvetli minimal elemanları

Uyarı 2.1.3. *$C \subset \mathbb{R}^p$ bir sıralama konisi, $Z \subset \mathbb{R}^p$ boştan farklı bir küme ve $z^0 \in Z$ için*

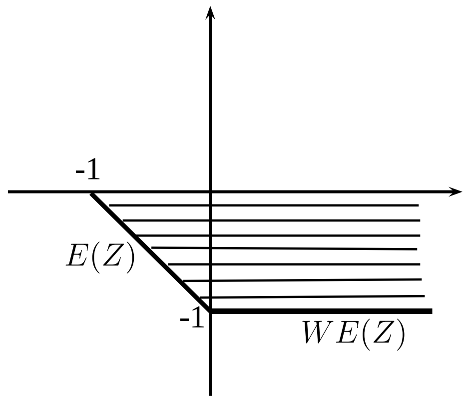
a) *$z^0 \in E(Z)$ olması için gerek ve yeter koşul $(Z - z^0) \cap (-C) = \{0\}$ ya da $Z \cap (z^0 - C) = \{z^0\}$ olmasıdır.*

b) *$K = \{0\} \cup int(C)$ ve $z^0 \in WE(Z) = E_K(Z)$ olması için gerek ve yeter koşul $Z \cap (z^0 - K) = \{z^0\}$ ya da $Z \cap (z^0 - int(C)) = \emptyset$ olmasıdır.*

Örnek 2.1.4. *$\mathbb{R}^2$ de, $C = \mathbb{R}^2_+$ sıralama konisini alalım.*

$Z = \{(z_1, z_2) : \ -1 \leqq z_2 \leqq 0 \ , \ z_2 \geqq -z_1 - 1\} \subset \mathbb{R}^2$ kümesi için,

$IE(Z) = \emptyset$, $E(Z) = \{(z_1, z_2) : \ z_2 = -z_1 - 1 \ , \ -1 \leqq z_2 \leqq 0\}$
$WE(Z) = E(Z) \cup \{(z_1, z_2) \ : \ z_2 = -1 \ , \ z_1 \geqq 0\}$ *elde edilir.*



Şekil 2.8. $Z = \{(z_1, z_2) : \ -1 \leqq z_2 \leqq 0 \ , \ z_2 \geqq -z_1 - 1\}$ kümesi için $IE(Z), E(Z)$ ve $WE(Z)$ kümeleri

2.2 Has Etkinlik

Has etkinliğin farklı bir notasyonu, ilk olarak 1951 'de A.W.Tucker ve H.W.Kuhn tarafından verilmiştir. [36]

$X \subset \mathbb{R}^n$ açık bir küme ve $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ olsun. $S \subset X$ kümesi $S = \{x \in X : g_j(x) \leqq 0, j = 1, ..., m\}$ olmak üzere

$$(V.P) \left\{ \min_{x \in S} f(x) \right.$$

şeklinde tanımlanan vektör optimizasyon problemini göz önüne alalım.

Kuhn ve Tucker, bir skaler minimizasyon problemi ile karakterize edilemeyen çözümlerden kurtulmayı ve bazı istenilmeyen durumlardan kaçınmayı tasarlamışlardır. Kuhn-Tucker 'ın has etkinlik tanımı Pareto sıralamayı düşündürür. $x^0 \in S$ üzerindeki etkin sınırlamayı gösteren $I(x^0)$ kümesi, $I(x^0) = \{j : g_j(x^0) = 0\}$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.1. *$f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ ve $g : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ olmak üzere $f, g = (g_1, ..., g_m)$ diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsun. x^0 etkin ve*

$$\left. \begin{array}{l} Jf(x^0)y \leq 0 \\ Jg(x^0)y \leqq 0 \end{array} \right\}$$ *sağlayan bir $y \in \mathbb{R}^n$ vektörü yoksa, $x^0 \in S$ noktasına S'nin* ***Kuhn-Tucker*** *has etkin noktası denir. Kuhn-Tucker has etkin noktalar kümesi $x^0 \in PE(S)_{KT}$ şeklinde gösterilir.*

Örnek 2.2.2. *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$,$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = (-x, x^2 - 2x)$ ve $g(x) = -x$ olarak tanımlansın. Herhangi bir $x \geqq 1$ noktası, bu $(V.P)$ için etkindir, fakat $x^0 = 1$ Kuhn-Tucker has etkinlik tanımını sağlamaz, çünkü herhangi bir $y > 0$ sistemin bir çözümüdür.*

Tanım 2.2.3. *$f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $g : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ve f diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. x^0 etkin, 0'a yakınsayan bir $\{t_k\} \subset \mathbb{R}_+$ dizisi ile $g(x^0 + t_k y) \leqq 0$ ve $Jf(x^0)y \leq 0$ sağlayacak şekilde $y \in \mathbb{R}^n$ bulunamıyor ise $x^0 \in S$ noktasına* ***Klinger*** *has etkin denir. Klinger has etkin noktalar kümesi $x^0 \in PE(S)_K$ şeklinde gösterilir.*

Uyarı 2.2.4. *$F(S,x^0), x^0$ daki S'nin radial konisini gösteriyorsa, yukarıdaki özellik $Jf(x^0)y \leq 0$ olan $y \in F(S,x^0)$ vektörü bulunamamasına denktir.*

Tanım 2.2.5. *x^0 etkin olsun. $f_i(x) < f_i(x^0)$ sağlayan herhangi bir i ve $x \in S$ için*

$$f_i(x^0) - f_i(x) \leqq M.[f_j(x) - f_j(x^0)]$$

*olan en az bir $j = j(i,x)$ ve en az bir gerçel $M > 0$ varsa, $x^0 \in S$ noktasına bir **Geoffrion** has etkin denir. Geoffrion has etkin noktalar kümesi $x^0 \in PE(S)_G$ şeklinde gösterilir.*

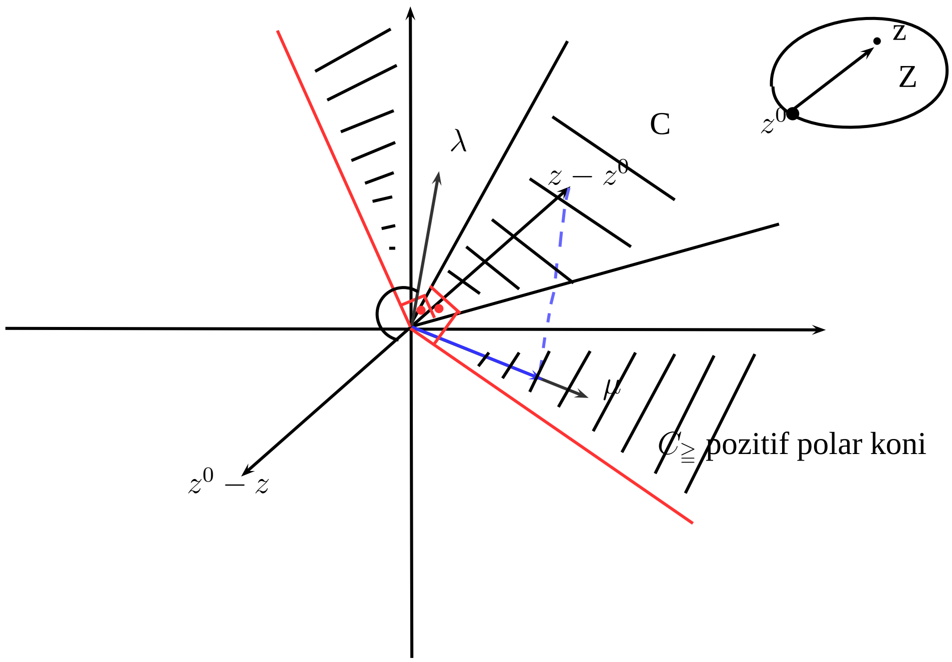
Örnek 2.2.6. *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (x^3, -x^2)$ ve $g(x) = -x$ olsun. Orjin, Geoffrion has etkin değildir. Çünkü $\forall x \geqq 0$, $x^2 \leqq M.x^3$ olacak şekilde $M > 0$ yoktur.*

Bununla birlikte $x^0 = 0$ noktası, Kuhn-Tucker ve Klinger has etkin tanımlarını sağlar.

Tanım 2.2.7. *z^0 etkin olsun. Herhangi bir $z \in Z$ ve $\lambda(z - z^0) < 0$ sağlayan $\lambda \in C_{\geqq}$, $\mu \in C_{\geqq}$ için,*

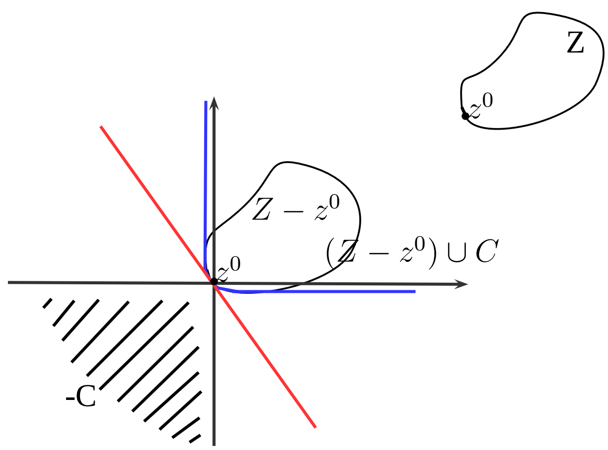
$$\frac{\lambda}{\|\lambda\|}(z^0 - z) \leqq M\frac{\mu}{\|\mu\|}(z - z^0)$$

*sağlayan $M > 0$ varsa $z^0 \in Z$ değerine **Hartley** has etkin denir. Hartley has etkin değerler kümesi $z^0 \in PE(Z)_{Ha}$ şeklinde gösterilir.*

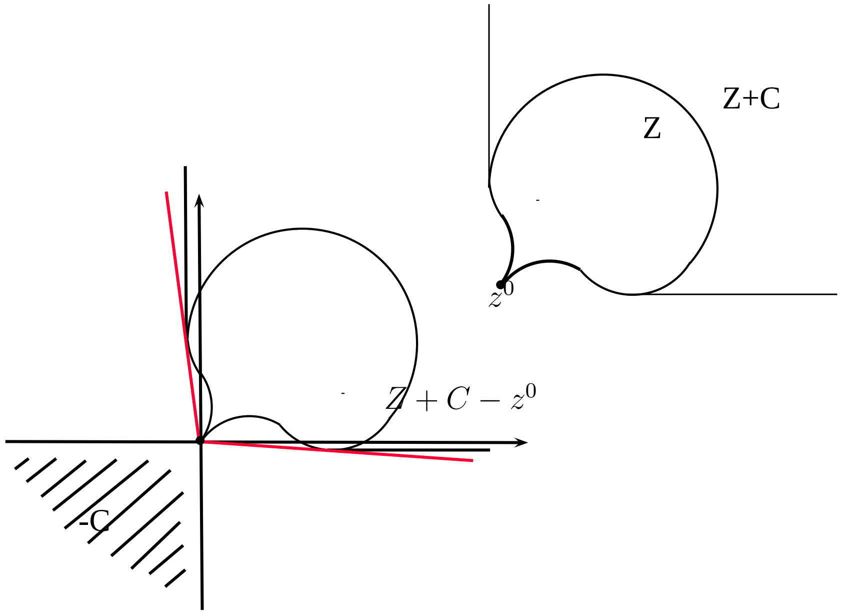


Şekil 2.9. Bir Z kümesinin Hartley has etkin noktalarının kümesi

Tanım 2.2.8. *z^0 etkin ve cl(conv(cone $[(Z - z^0) \cup C]$)) $\cap (-C) = \{0\}$ oluyorsa, $z^0 \in Z$ değerine **Hurwicz** has etkin nokta denir. Hurwicz has etkin değerler kümesi $z^0 \in PE(Z)_{Hu}$ şeklinde gösterilir.*



Şekil 2.10. Bir Z kümesinin Hurwicz has etkin noktalarının kümesi

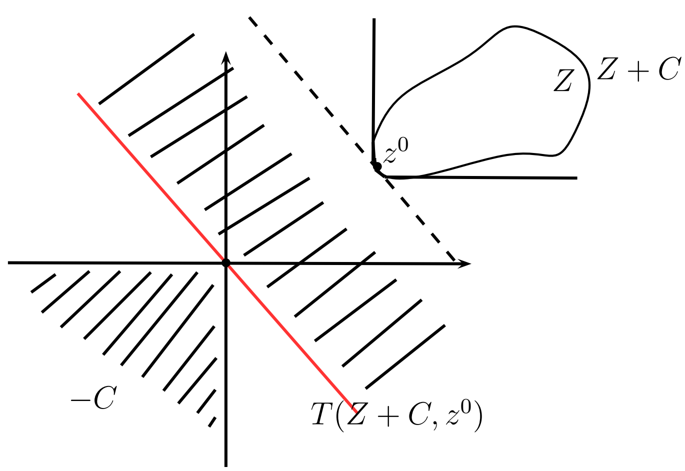


Şekil 2.11. Bir Z kümesinin Benson has etkin noktalarının kümesi

Tanım 2.2.9. *z^0 etkin ve clcone $[Z + C - z^0] \cap (-C) = \{0\}$ oluyorsa, $z^0 \in Z$ değerine **Benson** has etkin denir. Benson has etkin değerler kümesi $z^0 \in PE(Z)_{Be}$ şeklinde gösterilir.*

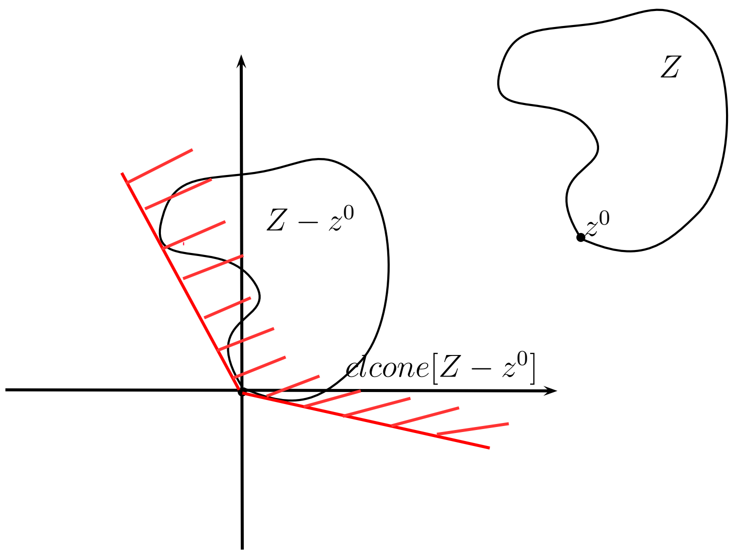
Tanım 2.2.10.

*(a) z^0 etkin ve T Bouligand tanjant konisi olmak üzere $T(Z + C, z^0) \cap (-C) = \{0\}$ oluyorsa, $z^0 \in Z$ değerine **Borwein** has etkin denir. Borwein has etkin değerler kümesi $z^0 \in PE(Z)_{Bo}$ şeklinde gösterilir.*



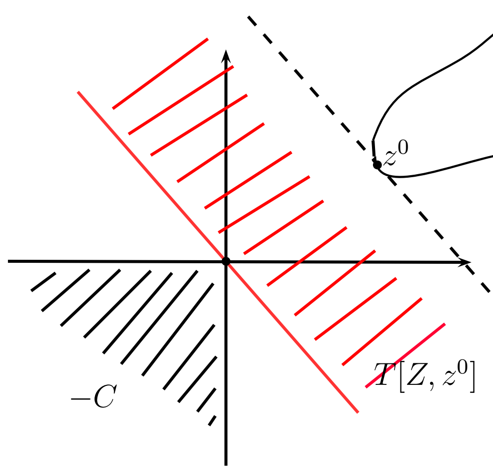
Şekil 2.12. Bir Z kümesinin Borwein has etkin noktalarının kümesi

(b) z^0 *etkin ve* $clcone\,[Z - z^0] \cap (-C) = \{0\}$ *oluyorsa* $z^0 \in Z$ *değerine* ***global Borwein*** *has etkin denir. Global Borwein has etkin değerler kümesi* $z^0 \in PE(Z)_{GBo}$ *şeklinde gösterilir.*



Şekil 2.13. Bir Z kümesinin Global Borwein has etkin noktalarının kümesi

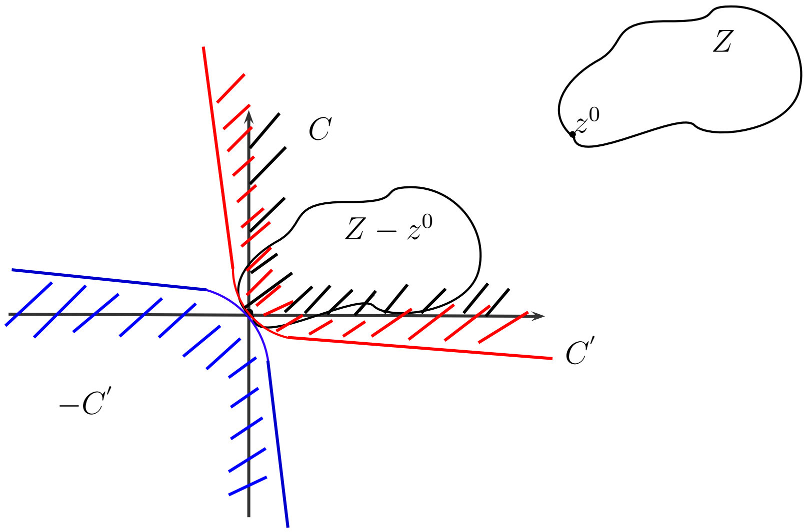
(c) z^0 *etkin ve* $T(Z, z^0) \cap (-C) = \{0\}$ *oluyorsa* $z^0 \in Z$ *değerine* ***yerel Borwein*** *has etkin denir. Yerel Borwein has etkin değerler kümesi* $z^0 \in PE(Z)_{LBo}$ *şeklinde gösterilir.*



Şekil 2.14. Bir Z kümesinin yerel Borwein has etkin noktalarının kümesi

Tanım 2.2.11. *C' kapalı, pointed ve konveks konisi, $C \backslash \{0\} \subset int(C')$ kapsamını sağlayan bir koni olmak üzere, $z^0 \in E_{C'}(Z)$ oluyorsa, $z^0 \in Z$ değerine*

***Henig** has etkin nokta denir. Henig has etkin değerler kümesi* $z^0 \in PE(Z)_{He}$ *şeklinde gösterilir.*

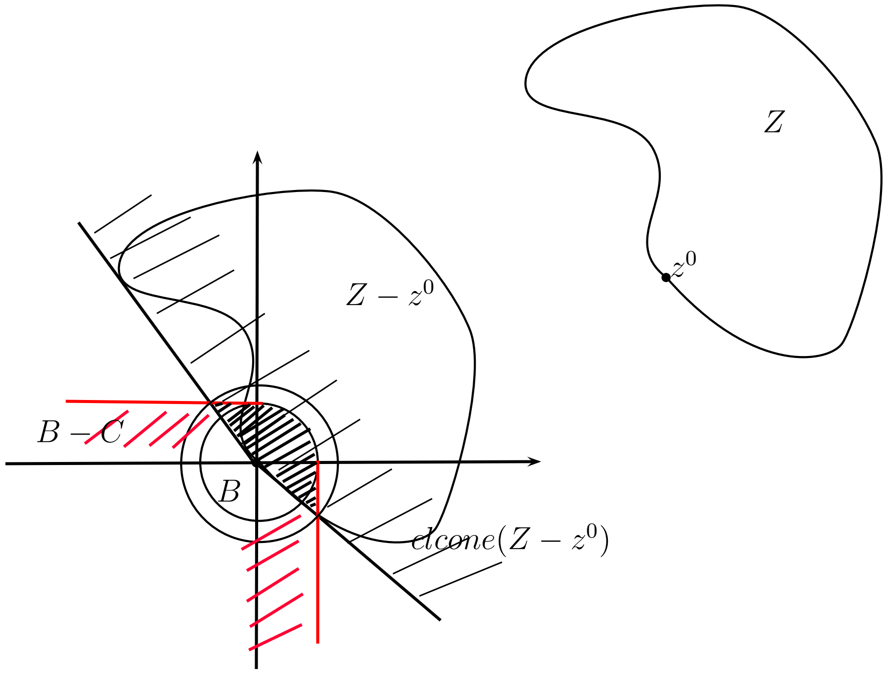


Şekil 2.15. Bir Z kümesinin Henig has etkin noktalarının kümesi

Teorem 2.2.12. *$K = intC \cup \{0\}$ olsun. Bu durumda $WE_C(Z) = PE_K(Z)_{LBo}$ olur.*

Kanıt. $WE_C(Z) = E_K(Z)$ olduğunu biliyoruz. O halde $E_K(Z) \subset PE_K(Z)_{LBo}$ olduğunu göstermek gerekir. Varsayalım ki $z^0 \in E_K(Z)$ fakat $z^0 \notin PE_K(Z)_{LBo}$ olsun. Bu durumda, $(-intC) \cap T(Z, z^0) \neq \emptyset$ ya da $y = \lim_{k \to \infty} \lambda_k(z^0 - z^k)$ ve $\lim_{k \to +\infty} z^k = z^0$ olacak şekilde $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}^2_+$ ve $\{z^k\} \subset Z$ dizileri ve $y \in intC$ vardır. Bununla birlikte, $y = \lim_{k \to \infty} \lambda_k(z^0 - z^k)$ olduğundan $\forall k \geq N$ için $\lambda_k(z^0 - z^k) \in K \backslash \{0\}$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ vardır. Dolayısıyla $z^0 - z^k \in K \backslash \{0\}$ olur. Tanımdan, $z^0 \notin E_K(Z)$ olur. Çünkü $z^0 \in E_K(Z)$ olsaydı $(Z - z^0) \cap (-K) = \{0\}$ olmalıydı ama $z^k \in (Z - z^0) \cap (-K)$ 'dır. Dolayısıyla $z^0 \notin E_K(Z)$ olur. Bu ise varsayım ile çelişir. O halde $z^0 \in PE_K(Z)_{LBo}$ 'dir. $\square$

Tanım 2.2.13. *$B, \mathbb{R}^p$ 'nin kapalı birim yuvarı olmak üzere, $clcone(Z - z^0) \cap (B - C) \subset \mu B$ olacak şekilde $\mu > 0$ varsa $z^0 \in Z$ değerine **süper etkin** denir. $z^0 \in PE(Z)_{SE}$ şeklinde gösterilir.*



Şekil 2.16. Bir Z kümesinin süper etkin noktalarının kümesi

2.3 Bir Kümenin Etkin Noktalarının Karşılaştırılması

Yardımcı Teorem 2.3.1. *$C \subset \mathbb{R}^p$ bir sıralama konisi, $Z \subset \mathbb{R}^p$ boştan farklı bir küme olmak üzere,*

$$IE(Z) \subset E(Z)'dir.$$

Teorem 2.3.2. *$C \subset \mathbb{R}^p$ bir sıralama konisi, $Z \subset \mathbb{R}^p$ boştan farklı bir küme olmak üzere, Z kümesi için $IE(Z) \subset E(Z) \subset WE(Z)$ olur.*

Kanıt. $IE(Z) \subset E(Z)$ olduğu açıktır. $E(Z) \subset WE(Z)$ olduğunu gösterelim. $z^0 \in E(Z)$ alalım. Bu durumda, $Z \cap (z^0 - C) = \{z^0\}$ olur. $K = \{0\} \cup int(C)$ konisi için, $Z \cap (z^0 - K) \subset Z \cap (z^0 - C) = \{z^0\}$ elde edilir. Dolayısıyla $z^0 \in WE(Z)$'dir.

□

Teorem 2.3.3. *$C \subset \mathbb{R}^p$ bir sıralama konisi, $Z \subset \mathbb{R}^p$ boştan farklı bir küme olsun. $IE(Z)$ boş kümeden farklı ise, $IE(Z) = E(Z)$ olur.*

Kanıt. Eşitliği göstermek için, $IE(Z) \subset E(Z)$ olduğundan $E(Z) \subset IE(Z)$ olduğunu göstermek yeterlidir. $z \in E(Z)$ ve $z^0 \in IE(Z)$ olsun. Bu durumda

$z \geqq z^0$ olur. $z \in E(Z)$ ve $z^0 \geqq z$ olduğundan $z = z^0$ elde ederiz.

□

Teorem 2.3.4. *$C \subset \mathbb{R}^p$ bir sıralama konisi, $f : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ bir fonksiyon ve $f(S) \subseteq Z \subset \mathbb{R}^p$ boştan farklı bir küme olsun.*

a) $PE(Z)_{Hu} \subset PE(Z)_{GBo}$

b) $PE(Z)_{Ha} = PE(Z)_G = PE(Z)_{Be} = PE(Z)_{GBo} = PE(Z)_{He} = PE(Z)_{SE}$

c) $PE(Z)_{Be} \subset PE(Z)_{Bo}$

d) $PE(Z)_{Bo} \subset PE(Z)_{LBo}$

e) *Eğer f ve g_i $(i \in I(x^0))$ diferansiyellenebilir ve kısıt düzenlik koşulu(Abadie constraint qualification)*

$$T(S, x^0) = C(x^0) = \{y : \ y\nabla g_i(x^0) \leqq 0 \ , \ i \in I(x^0)\}$$

sağlanıyorsa, $PE(Z)_{LBo} \subset PE(Z)_{KT}$ olur.

f) *f ve $g_i(i \in I(x^0))$ diferansiyellenebilir ise,*

$$PE(Z)_{KT} \subset PE(Z)_K$$

olur.

Kanıt. $C \subset \mathbb{R}^p$ bir sıralama konisi ve $Z \subset \mathbb{R}^p$ boştan farklı bir küme olsun.

a) $z^0 \in PE(Z)_{Hu}$ olsun. Bu durumda $cl(conv(cone[(Z - z^0) \cup C])) \cap (-C) = \{0\}$ olur.

$$clcone(Z - z^0) \cap (-C) \subset cl(conv(cone[(Z - z^0) \cup C])) \cap (-C) = \{0\}$$

kapsamından $clcone(Z - z^0) \cap (-C) = \{0\}$ elde edilir. O halde $z^0 \in PE(Z)_{GBo}$'dur.

b) $PE(Z)_{Ha} = PE(Z)_G \subset PE(Z)_{Be} \subset PE(Z)_{GBo} \subset PE(Z)_{He} \subset PE(Z)_{SE}$ $\subset PE(Z)_{Ha}$ olduğunu kanıtlayalım.

b1) $PE(Z)_{Ha} \subset PE(Z)_G$ olduğunu gösterelim.

$z^0 \in PE(Z)_{Ha}$ olsun ve $\{e^k\}$, $\mathbb{R}^p$ 'nin canonical tabanı olmak üzere $z \in Z$ $z_i = f_i(x) < f_i(x^0) = z_i^0$ ya da $e^i(z - z^0) < 0$ olacak şekilde seçilsin.

Hartley'in tanımı,

J^+ (boştan farklı) indeks kümesi,

$z_j - z_j^0 > 0$ ve $z_{jo} - z_{jo}^0 = \max\limits_{j \in J^+}(z_j - z_j^0)$ olan j'lerin kümesi olmak üzere

$$e^i(z^0 - z) \leqq M.\ \mu(z - z^0) = M.\ \sum_{j=1}^{p} \mu_j(z_j - z_j^0)$$
$$\leqq M.\sum_{j \in J^+} \mu_j(z_j - z_j^0) \leqq M.\sum_{j \in J^+}(z_j - z_j^0)$$
$$\leqq M.p.(z_{j_0} - z_{j_0}^0)$$

olacak şekilde $\mu \geqq 0$ $(\|\mu\| = 1)$ 'in varlığını garanti eder. Böylece, $z^0 \in PE(Z)_G$ olur.

Şimdi, $PE(Z)_G \subset PE(Z)_{Ha}$ olduğunu gösterelim.

$f(x^0) = z^0 \in PE(Z)_G$, $z \in Z$ olsun ve $\lambda \geqq 0$ sayısı $\|\lambda\| = 1$ ve $\lambda(z - z^0) < 0$ olacak şekilde seçilsin.

i. koordinat için $z_i < z_i^0$ ise

$$(z_i^0 - z_i) \leqq M(z_j - z_j^0) \tag{2.1}$$

olacak şekilde $j = j(i, z^0)$ indeksini bulabiliriz.

$z_i \geqq z_i^0$ olması durumunda, $j = i$ alınabilir. 2.1 eşitsizliğinin $\lambda_i \geqq 0$ katlarını alıp i'ler üzerinden toplam alınırsa $\mu \geqq 0$ ve $\|\mu\| = 1$ olmak üzere

$$\lambda(z^0 - z) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i(z_i^0 - z_i) \leqq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i M(z_{j(i,z^0)} - z_{j(i,z^0)}^0) = M.\mu(z - z^0)$$

elde edilir. Buradan $z^0 \in PE(Z)_{Ha}$'dır.

Sonuç olarak $PE(Z)_G = PE(Z)_{Ha}$ olur.

b2) $PE(Z)_G \subset PE(Z)_{Be}$ olduğunu kanıtlayalım.

Varsayalım ki $z^0 \in PE(Z)_G$ ve $z^0 \notin PE(Z)_{Be}$ olsun. Bu durumda clcone $(Z+\mathbb{R}^p_+ - z^0)\cap\mathbb{R}^p_- \neq \{0\}$ yani $y = \lim_{k\to\infty} \lambda_k(z^k + c^k - z^0) \neq 0$ olacak şekilde $y \in \mathbb{R}^p_-$, $\{z^k\} \subseteq Z$, $\{c^k\} \subseteq \mathbb{R}^p_+$, $\{\lambda_k\} \subseteq \mathbb{R}_+$ vardır. Genelliği bozmadan, $y = (y_1, ..., y_p)$'de $y_1 = -1$ alarak kabul edebiliriz. Dolayısıyla, yeterince büyük herhangi bir k için;

$$z^k - z^0 \leqq \frac{y + o(1)}{\lambda_k}$$

eşitsizliğinden
$z_1^k - z_1^0 < \dfrac{-1}{2\lambda_k}$ ve $\forall M > 0$ ve $j = 2, ...p$ için $z_j^k - z_j^0 \leqq \dfrac{1}{2M\lambda_k}$ olur.
z^0 etkin değer olduğundan, $J_k = \{j : z_j^k > z_j^0\} \neq 0$ yazabiliriz.
Buradan, $\forall j \in J_k$ için $0 \leqq z_j^k - z_j^0 \leqq \dfrac{1}{2M\lambda_k}$ ve

$$\frac{z_1^0 - z_1^k}{z_j^k - z_j^0} > \frac{\dfrac{1}{2\lambda_k}}{\dfrac{1}{2M\lambda_k}} = M$$

elde edilir. Bu ifade, her $M > 0$ için doğru olduğundan, $z^0 \in PE(Z)_G$ kabulü ile çelişir.

b3) $PE(Z)_{Be} \subset PE(Z)_{GBo}$ ifadesinin kanıtı,
$clcone(Z - z^0) \cap (-C) \quad \subset \quad clcone(Z + C - z^0) \cap (-C) = \{0\}$ kapsamından kolaylıkla görülür.

b4) $PE(Z)_{GBo} \quad \subset \quad PE(Z)_{He}$ olduğunu gösterelim.
$z^0 \in PE(Z)_{GBo}$ olsun. Bu durumda, $clcone(Z - z^0) \cap (-C) = \{0\}$ olur. Koniler arasındaki ayırma teoreminden;
$(-C)\backslash\{0\} \subset int(-C')$ ve $clcone \ (Z - z^0) \cap (-C') = \{0\}$ olan kapalı konveks ve pointed bir C' konisi vardır . Dolayısıyla, $(Z - z^0) \cap (-C') = \{0\}$ yani $z^0 \in PE(Z)_{He}$ elde edilir.

b5) $PE(Z)_{He} \subset PE(Z)_{SE}$ olduğunu gösterelim.
$z^0 \in PE(Z)_{He}$ ve Henig has etkin tanımındaki C' kapalı, pointed ve konveks koni ise B kapalı birim yuvar ve Λ, C nin bir tabanı olmak üzere

$$(Z - z^0) \cap \ clcone \ (-\Lambda + \varepsilon B) = \{0\}$$

olacak şekilde $\varepsilon > 0$ vardır. Buradan,

$$cone(Z - z^0) \cap (-\Lambda + \varepsilon B) = \emptyset$$

elde edilir.

Şimdi herhangi bir sabitlenmiş $z \in Z$ için, keyfi bir $\sigma \in C + (z - z^0)$ seçelim. En az bir $t \geqq 0$ ve $\lambda \in \Lambda$ için $z - z^0 = \sigma - t\lambda$ olduğundan $t = 0$ için $\|z - z^0\| = \|\sigma\|$ elde edilir.
$t > 0$ için $\dfrac{\|\sigma\|}{t} \geqq \varepsilon$ olur. Gerçekten, $\dfrac{\|\sigma\|}{t} < \varepsilon$ olsaydı,

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{z - z^0}{t} = & \dfrac{\sigma}{t} & -\lambda \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ cone(Z - z^0) & (\varepsilon B) & (-\Lambda) \end{array}$$

eşitliğinden $cone\ \ (Z - z^0) \cap (\varepsilon B - \Lambda) \neq \emptyset$ olurdu.

$M = \sup\limits_{\lambda \in \Lambda} \|\lambda\| < +\infty$ alalım.

$\|z - z^0\| = \|\sigma - t\lambda\| \leqq \|\sigma\| + tM \leqq \|\sigma\|(1 + \dfrac{M}{\varepsilon}) \leqq m\|\sigma\|$ olur.

Buradan, herhangi bir $z \in Z$ ve $\sigma \in C + (z - z^0)$ için;

$cone(Z - z^0) \cap (B - C) \subset mB$ elde edilir. Gerçekten, $t > 0$, $z \in Z$, $b \in B$, $y \in C$ olmak üzere herhangi bir $w = t(z - z^0) = b - y$ için $\dfrac{1}{t}b \in C + (z - z^0)$ 'dır ve dolayısıyla

$$\|z - z^0\| \leqq m\|\frac{1}{t}b\|$$

ya da

$$\|t(z - z^0)\| \leqq m$$

elde edilir.

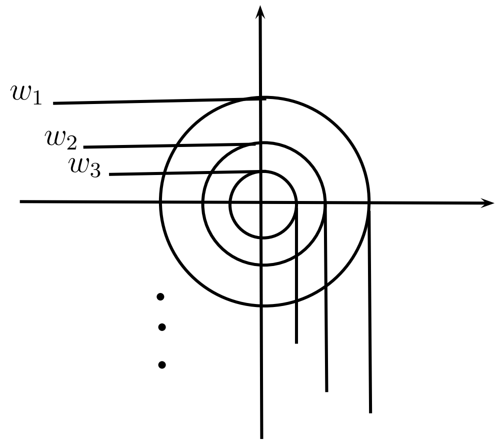
Son olarak, $clcone\ \ (Z - z^0) \cap (B - C) \ \ \subset \ \ mB$'dir.

$w \in clcone\ \ (Z - z^0) \cap (B - C)$ olsun. $w \in mB$ yani $\|w\| \leqq m$ olduğunu göstermeliyiz.

Varsayalım ki $\|w\| > m$ olsun.

$w = w_k + o(1) = b - y\ \ (w_k \in\ \ cone\ \ (Z - z^0)\ ,\ b \in B\ ,\ y \in C)$ olduğundan

$w_k \in B - C + \dfrac{1}{k}B = \dfrac{k+1}{k}B - C$ ya da
$\dfrac{k}{k+1}w_k \in B - C$ olur.



Dolayısıyla, $\dfrac{k}{k+1}w_k \in (B - C) \cap \; cone(Z - z^0)$ ya da $\|\dfrac{k}{k+1}w_k\| \leqq m$ elde ederiz. Fakat $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{k}{k+1}w_k = w$ olduğundan ve $\|w\| > m$ kabul ettiğimizden çelişki elde edilir. O halde $w \in mB$'dir.

b6) $PE(Z)_{SE} \subset PE(Z)_{Ha}$ olduğunu kanıtlayalım.

Varsayalım ki $z^0 \in PE(Z)_{SE}$ fakat $z^0 \notin PE(Z)_{Ha}$ olsun. Bu durumda, $\forall \varepsilon > 0$ için $\|\lambda\| = 1$ olan $\lambda \in C_{\geqq}$ elemanı en az bir $z \in Z$ ve $\|\mu\| = 1$ olan $\forall \mu \in C_{\geqq}$ için $\lambda(z - z^0) < 0$ ve $\lambda(z - z^0) < -(m + \varepsilon)\mu(z - z^0)$ olacak şekilde vardır. (Burada m, z^0'ın süper etkin nokta oluşundan elde edilen sayıdır.)

Bu eşitsizlikten;
$\dfrac{\mu(z - z^0)}{\|z - z^0\|} < \dfrac{1}{m + \varepsilon}$ olur. Dolayısıyla
$z - z^0 \in \dfrac{\|z - z^0\|}{m + \varepsilon}(B - C) \subset \dfrac{\|z - z^0\|}{m + \frac{\varepsilon}{2}}(B - C)$ elde edilir.

Gerçekten $\dfrac{z - z^0}{\|z - z^0\|} \notin \dfrac{1}{m + \varepsilon}(B - C)$ olsaydı, $b \in B$ ve $y \in C$ için $\mu\dfrac{z - z^0}{\|z - z^0\|} > \dfrac{1}{m + \varepsilon}\mu(b - y)$ eşitsizliğini sağlayan ve $\|\mu\| = 1$ olan bir μ vardır.

$\mu \in C_{\geqq}$ olduğunu göstermek kolaydır. Önceki eşitsizlikten $\forall b \in$

B ve $\forall y \in C$ için $\mu\dfrac{z-z^0}{\|z-z^0\|} > \dfrac{1}{m+\varepsilon}$ çelişkisi elde edilir. Bu yüzden,
$\dfrac{m+\dfrac{\varepsilon}{2}}{\|z-z^0\|}(z-z^0) \in (B-C) \cap cone(Z-z^0)$ 'dır.

$z^0 \in PE(Z)_{SE}$ olduğundan,

$\left\| \dfrac{m+\dfrac{\varepsilon}{2}}{\|z-z^0\|}(z-z^0) \right\| \leqq m$ dolayısıyla

$\|z-z^0\| \leqq m\dfrac{\|z-z^0\|}{m+\dfrac{\varepsilon}{2}} < \|z-z^0\|$ olur. Bu ise bir çelişkidir.
O halde $z^0 \in PE(Z)_{Ha}$ olmalıdır.

c) $PE(Z)_{Be} \subset PE(Z)_{Bo}$ ifadesinin kanıtı,
$T(Z+C, z^0) \cap (-C) \subset clcone(Z+C-z^0) \cap (-C) = \{0\}$ kapsamından kolaylıkla görülür.

d) $PE(Z)_{Bo} \subset PE(Z)_{LBo}$ kapsamının doğruluğu
$T(Z, z^0) \cap (-C) \subset T(Z+C-z^0) \cap (-C)$ kapsamından elde edilir.

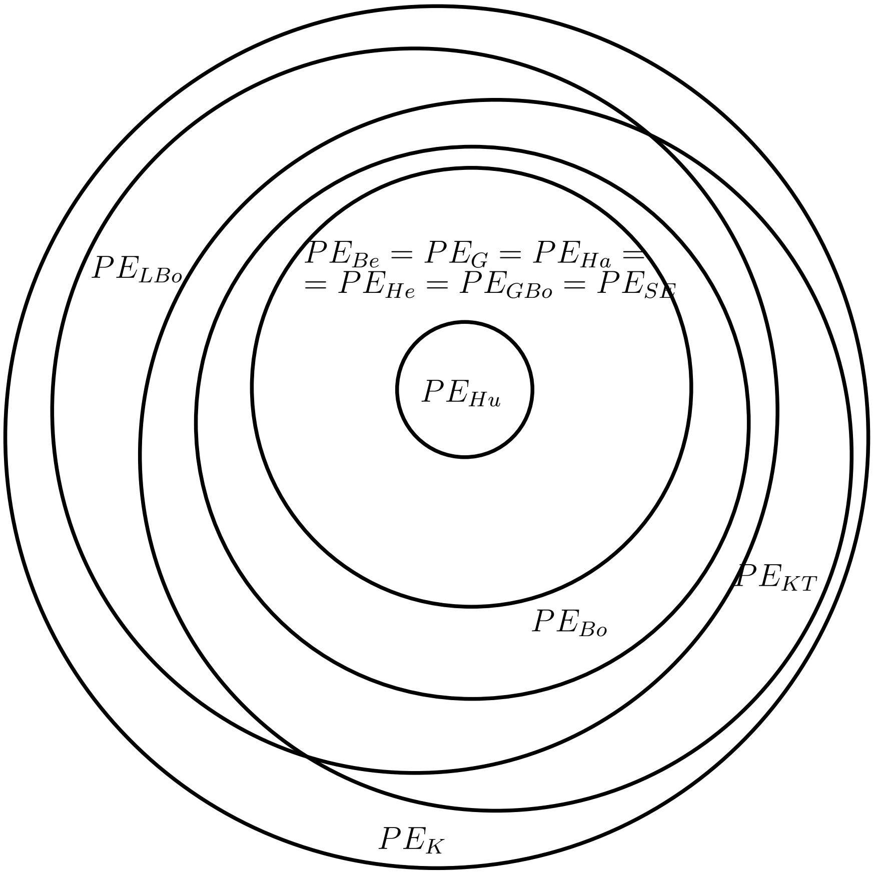
e) $PE(Z)_{LBo} \subset PE(Z)_{KT}$ olduğunu gösterelim.
$[Jf(x^0) \,.\, C(x^0)] \cap \mathbb{R}^p_- = [Jf(x^0) \,.\, T(S, x^0)] \cap \mathbb{R}^p_- \subset T(Z, z^0) \cap \mathbb{R}^p_- = \{0\}$ olduğundan $\forall j \in I(x^0)$ için $\nabla g_j(x^0)y \leqq 0$ ve $Jf(x^0)y \leq 0$ olan hiçbir $y \in \mathbb{R}^n$ yoktur. Dolayısı ile $z^0 \in PE(Z)_{KT}$ elde edilir.

f) $PE(Z)_{KT} \subset PE(Z)_K$ olduğunu gösterelim.
Varsayalım ki $z^0 \in PE(Z)_{KT}$ fakat $z^0 \notin PE(Z)_K$ olsun. Bu durumda 0'a yakınsayan en az bir $\{t_k\} \subset \mathbb{R}_+$ dizisi için
$Jf(x^0)y \leq 0$ ve $g(x^0+t_k y) \leqq 0$ olan en az bir $y \in \mathbb{R}^n$ vektörü vardır. Buradan her $j \in I(x^0)$ için $g_j(x^0+t_k y) - g_j(x^0) \leq 0$ elde edilir. ($I(x_0)$ 'ın tanımından $g_j(x^0) = 0$ 'dır.)
$\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{g_j(x^0+t_k y) - g_j(x^0)}{t_k} = \nabla g_j(x^0)y$ olduğundan

$\nabla g_j(x^0)y \leqq 0$ olur. Bu sonuç, $z^0 \in PE(Z)_{KT}$ hipotezi çelişir.

□

Şekil 2.17.'da has etkin noktalar arasındaki kapsama ilişkileri gösterilmiştir.



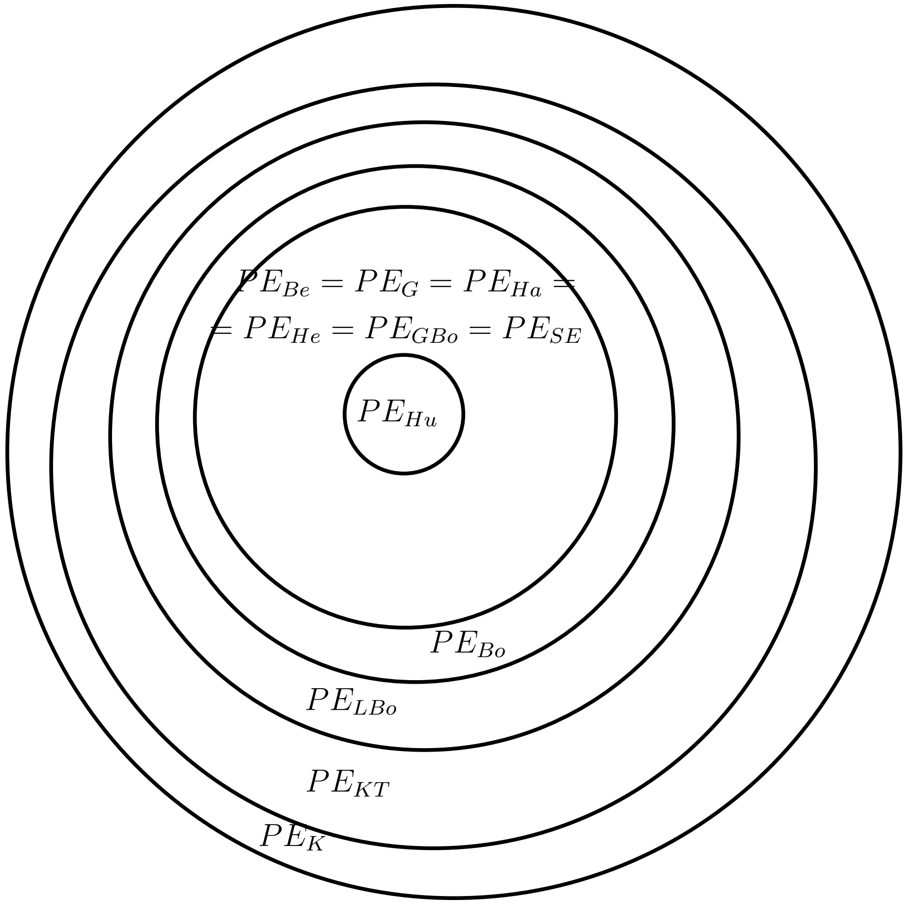
Şekil 2.17. Has etkin noktalar arasındaki kapsam ilişkisi

Tanım 2.3.5. *Eğer f ve g_i $(i \in I(x^0))$ differansiyellenebilir ise*

$$T(s, x^0) = C(x^0) = \{y : \ y \nabla g_i(x^0) \leqq 0 \ , \ i \in I(x^0)\}$$

eşitliğine kısıt düzenlik koşulu denir.

Şekil 2.18., f ve g fonksiyonlarının diferansiyellenebilme ve kısıt düzenlik koşulunun sağlanması durumunda has etkin noktalar arasındaki kapsam ilişkisi gösterilmiştir.



Şekil 2.18. f ve g fonksiyonlarının diferansiyellenebilme ve kısıt düzenlik koşulunun sağlanması durumunda has etkin noktalar arasındaki kapsam ilişkisi

Uyarı 2.3.6. *Sonlu boyutlu uzaylarda, has etkinliğin farklı tanımları arasındaki ilişki Guerraggio- Molho- Zafforoni tarafından verilmiştir. [14]*

Uyarı 2.3.7. *Kısıt düzenlik koşulu olmadığı durumda da* $PE(Z)_{LBo} \subset PE(Z)_K$ *kapsamı ispatlanabilir.*
Gerçekten $T(Z\ ,\ z^0) \cap \mathbb{R}^p_- = \{0\}$ *olduğundan ve* S*'nin* x^0*'daki Radial konisi Bouligand konisi tarafından kapsandığından*

$$Jf(x^0)\ .\ T(S, x^0) \cap \mathbb{R}^p_- = \{0\}$$

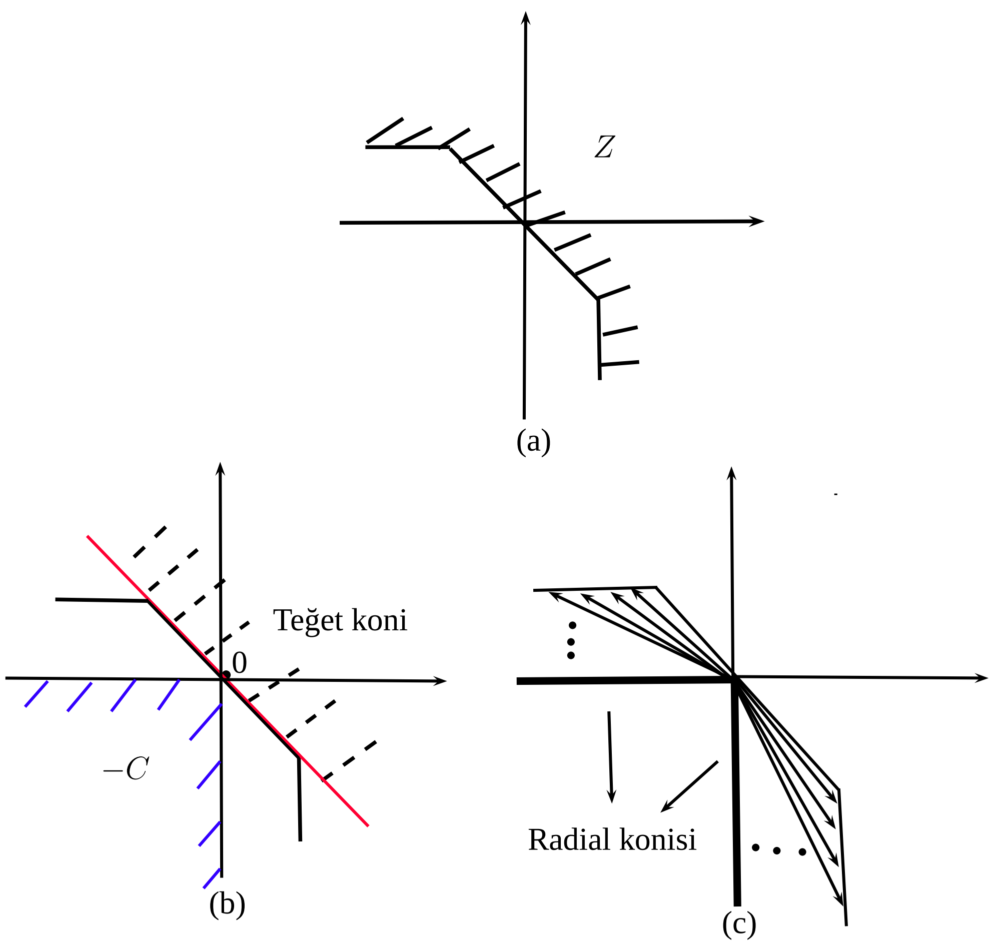
ve

$$Jf(x^0)\ .\ F(S, x^0) \cap \mathbb{R}^p_- = \{0\}$$

elde edilir. Bu durumda $z^0 \in PE(Z)_K$ *olur.*

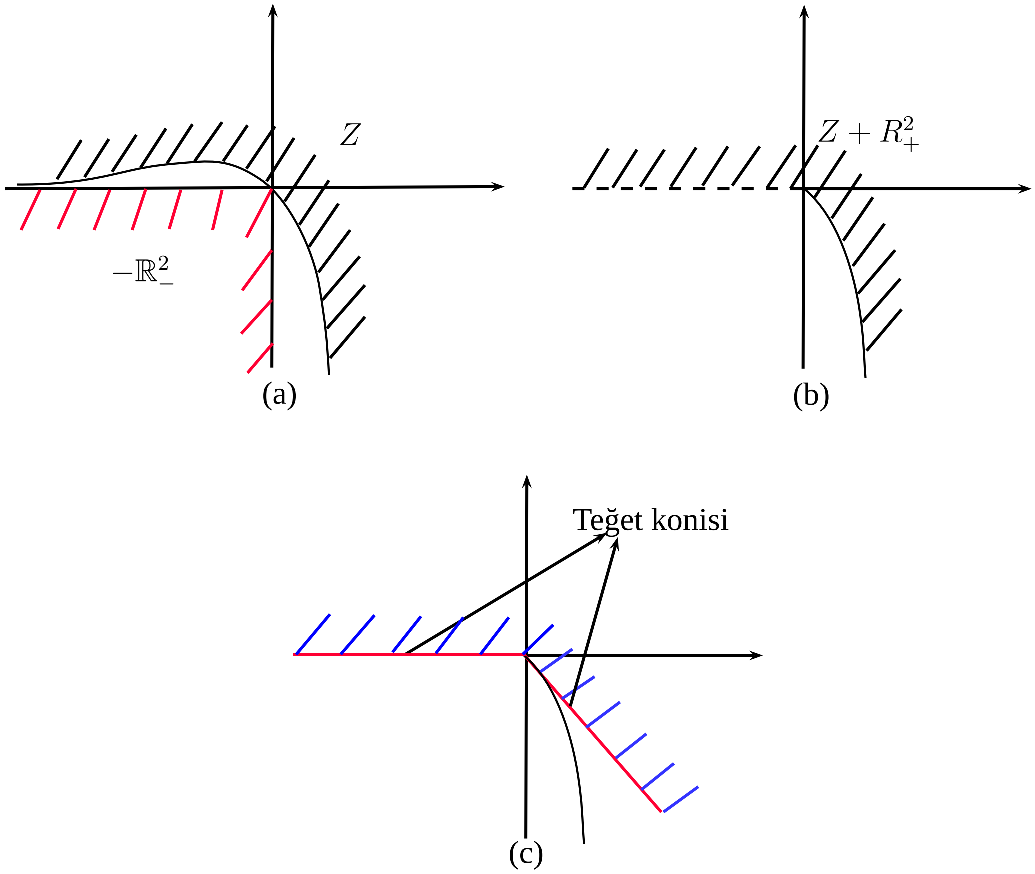
Örnek 2.3.8, Örnek 2.3.9, Örnek 2.3.10 ve Örnek 2.3.11 Teorem 2.3.4'deki kapsamların kesin olabileceğini göstermektedir.

Örnek 2.3.8. *Z, Şekil 2.19.(a)'da verilen küme olmak üzere* $clcone(Z+\mathbb{R}^2_+)\cap \mathbb{R}^2_- = \{(z_1,z_2) : z_1 \leqq 0\ ,\ z_2 = 0\} \cup \{(z_1,z_2) : z_1 = 0\ ,\ z_2 \leqq 0\}$ *'dır. Buradan z^0 Borwein has etkin tanımını sağladığı için $z^0 = 0 \in PE(Z)_{Bo}$ olur. Fakat* $clcone(Z+\mathbb{R}^2_+)\cap\mathbb{R}^2_- = \{(z_1,z_2) : z_1 \leqq 0\ ,\ z_2 = 0\}\cup\{(z_1,z_2) : z_1 = 0\ ,\ z_2 \leqq 0\}$ *olduğundan $z^0 = 0 \notin PE(Z)_{Be}$ elde edilir. Bu açıklamalar Şekil 2.19.'de görülmektedir.*



Şekil 2.19. (a) Z kümesi (b) $z^0 = 0$ 'ın Z kümesinin Borwein has etkin noktası oluşunun gösterimi (c) Z kümesinin Radial konisi

Örnek 2.3.9. *$Z = \{(z_1,z_2) : z_2 \geqq -z_1 e^{z_1}\}$ olsun. $(z_1,z_2) = (0,0)$ için, $(0,0) \in PE(Z)_{LBo}$ fakat $T(Z+\mathbb{R}^2_+,0)\cap\mathbb{R}^2_- = \{(z_1,z_2) : z_1 \leqq 0\ ,\ z_2 = 0\}$ olduğundan, $(0,0) \notin PE(Z)_{Bo}$ olur. Bu durum Şekil 2.20.'da gösterilmiştir.*

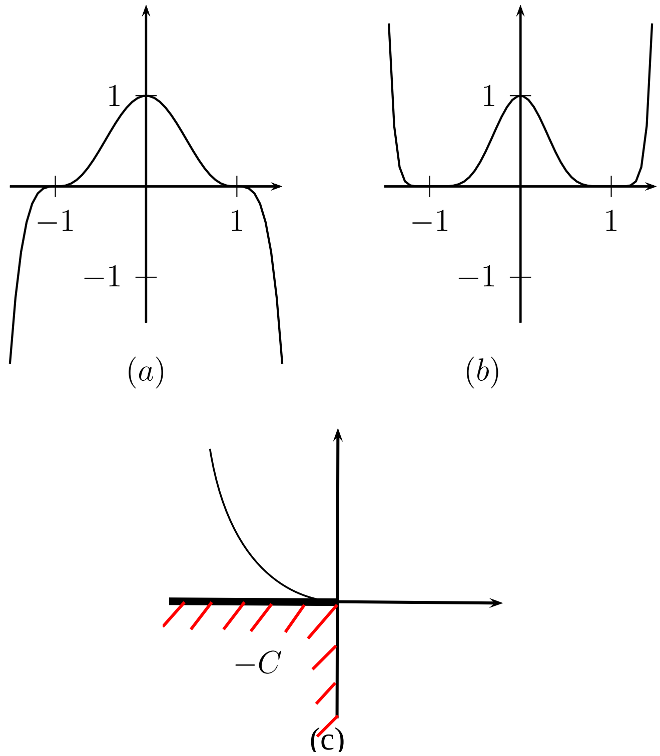


Şekil 2.20. (a)$Z = \{(z_1, z_2) : z_2 \geqq -z_1 e^{z_1}\}$ kümesi (b)$Z + \mathbb{R}^2_+$ kümesi (c) $T(Z + \mathbb{R}^2_+, 0)$ kümesi

Örnek 2.3.10. $f(x) = (f_1(x), f_2(x)) = ((1-x^2)^3, (1-x^2)^6)$
$S = \{x \in \mathbb{R} : g(x) = 1 - x \leqq 0\}$ *olmak üzere*

$$(V.P) \left\{ \min_{x \in S} f(x) \right.$$

vektör optimizasyon problemini göz önüne alalım. $x^0 = 1$ *noktası* $f_1'(1) = f_2'(1) = 0$ *ile Kuhn-Tucker has etkindir.* $Z = \{(z_1, z_2) : z_1 \leqq 0 \ , \ z_2 = z_1^2\}$ *kümesinin* 0 *noktasındaki tanjant konisi* $T(Z, 0) = \{(z_1, z_2) : z_1 \leqq 0 \ , \ z_2 = 0\}$*'dır.* $T(Z, 0) \cap (-C) \neq \{0\}$ *olduğundan* $z^0 = 0 \notin PE(Z)_{LBo}$ *elde edilir.*



Şekil 2.21. (a) $(1-x^2)^3$ fonksiyonunun grafiği (b) $(1-x^2)^6$ fonksiyonunun grafiği (c) $Z = \{(z_1, z_2) \ : \ z_1 \leqq 0 \ , \ z_2 = z_1^2\}$ kümesi ve $T(Z, 0) = \{(z_1, z_2) \ : \ z_1 \leqq 0 \ , \ z_2 = 0\}$ teğet konisi

Örnek 2.3.11. *$f(x) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)) = (-x_1, -x_2)$ $g(x) = (g_1(x_1, x_2), g_2(x_1, x_2), g_3(x_1, x_2)) = (x_1^2 + x_2^2 - 1, -x_1, -x_2)$ ve $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : g(x) \leqq 0\}$ olmak üzere $x^0 = (1, 0)$ noktası*

$$(V.P) \left\{ \min_{x \in S} f(x) \right.$$

optimizasyon probleminin Klinger has etkin noktasıdır. Fakat $x^0 \notin PE(S)_{KT}$'dir.

Teorem 2.3.12. *f fonksiyonu C-konveks benzeri ya da Z kümesi C-konveks ise $PE(Z)_{Bo} = PE(Z)_{Hu}$ olur.*

Kanıt. $PE(Z)_{Hu} \subset PE(Z)_{Bo}$ olduğunu biliyoruz. O halde $PE(Z)_{Bo} \subset PE(Z)_{Hu}$ kapsamını göstermeliyiz. $z^0 \in PE(Z)_{Bo}$ ise $z^0 \in PE(Z)_{Be}$ olur. $Z + C$ konveks olduğundan, $clcone(Z + C - z^0) = T(Z + C, z^0)$ elde edilir. Buradan $(Z - z^0) \cup C \ \subset Z + C - z^0$ dolayısıyla $cone[(Z - z^0) \cup C] \ \subset \ cone(Z + C - z^0)$

olur. $Z+C$ ve $Z+C-z^0$ kümeleri konveks olduğundan $cone(Z+C-z^0)$ konvekstir. Böylece

$cl(conv(cone[(Z-z^0)\cup C])) \subset clcone(Z+C-z^0)$ elde edilir.

$cl(conv(cone[(Z-z^0)\cup C]))\cap(-C) \subset clcone(Z+C-z^0)\cap(-C)=\{0\}$ olduğundan $z^0\in PE(Z)_{Hu}$ olur. $\square$

Teorem 2.3.13. *Eğer f fonksiyonu C-altkonveks benzeri ise $PE(Z)_{Be} = PE(Z)_{Bo}$ olur.*

Kanıt. $PE(Z)_{Be} \subset PE(Z)_{Bo}$ olduğundan $PE(Z)_{Bo} \subset PE(Z)_{Be}$ olduğunu göstermeliyiz.

$\underbrace{clcone[Z+C-z^0]}_{Be} \subset \underbrace{T(Z+C,z^0)}_{Bo}$ olduğu yani tanjant koni kapalı olduğundan $cone[Z+C-z^0] \subset T(Z+C,z^0)$ olduğu kanıtlanmalıdır.

$z\in cone[Z+C-z^0]$ olsun. Bu durumda $z=t(f(x)+c-f(x^0))$ olacak şekilde $t \geqq 0$, $x\in S$ ve $c\in C$ vardır. f'nin C-altkonveks benzeri olmasından dolayı, herhangi bir $\bar{c}_k=\dfrac{\bar{c}}{k^2}$ $(\bar{c}\in intC$, $k=1,2,...)$ için $\bar{c}_k=\dfrac{1}{k}f(x)+(1-\dfrac{1}{k})f(x^0) \in intC+f(x^k)$ sağlayan $x_k\in X$ vardır.
Ayrıca yeterince büyük k doğal sayıları için,

$$c_k=\frac{1}{k}c+\bar{c}_k+\frac{1}{k}f(x)+(1-\frac{1}{k})f(x^0)-f(x^k) \in intC$$

olur. Bu durumda,

$\tau_k=t.k \geqq 0$ olmak üzere $z=\lim\limits_{k\to\infty}\tau_k(f(x^k)+c^k-f(x^0))$ olduğundan $z\in T(Z+C,z^0)$ olur. Dolayısıyla,

$cone[Z+C-z^0] \subset T(Z+C,z^0)$ olur. Buradan $PE(Z)_{Bo} \subset PE(Z)_{Be}$ elde edilir. $\square$

Teorem 2.3.14. *f ve g fonksiyonları, aynı fonksiyona göre $\mathbb{R}^p_+-$ invex ise ve kısıt düzenlik koşulu sağlanıyorsa, $PE(Z)_{KT}=PE(Z)_{Hu}$ olur.*

Kanıt. $PE(Z)_{Hu} \subset PE(Z)_{KT}$ olduğundan $PE(Z)_{KT} \subset PE(Z)_{Hu}$ olduğu gösterilmelidir.

$z^0 = f(x^0) \in PE(Z)_{KT}$ ise Jg, $j \in I(x^0)$ olan g_j fonksiyonlarının Jacobianlerini göstermek üzere;

$$\begin{cases} \nabla f_i(x^0)y < 0 \\ \nabla f_j(x^0)y \leqq 0 \quad (j \neq i) \\ Jg(x^0)y \leqq 0 \quad (j \in I(x^0)) \end{cases}$$

sistemini sağlayan $y \in \mathbb{R}^n$ çözümü yoktur.

Her biri için, Motzkin'nin alternative teoreminden ;

$\nabla f_i(x^0) + \sum\limits_{j \neq i} u_j^i \nabla f_j(x^0) + \sum\limits_{j \in I(x^0)} v_j^i \nabla g_j(x^0) = 0$ sağlayacak şekilde $u_j^i \geqq 0$ ve $v_j^i \geqq 0$ sayıları vardır.

i üzerinden toplam alırsak,

$\sum\limits_{j=1}^{p} (1 + \sum\limits_{i \neq j} u_j^i) \nabla f_j(x^0) + \sum\limits_{j \in I(x^0)} (\sum\limits_{i=1}^{p} v_j^i) \nabla g_j(x^0) = 0$

elde edilir. Buradan

$\lambda_i = 1 + \sum\limits_{i \neq j} u_j^i$ ve $\mu_j = \sum\limits_{i=1}^{P} v_j^i$, $\forall j \in I(x^0)$ ve $j \notin I(x^0)$ için $\mu_j = 0$ iken $\nabla \left(\lambda f(x^0) + \mu g(x^0)\right) = 0$ olur.

$L(x) = \lambda f(x) + \mu g(x)$ fonksiyonu η 'ye göre invex olduğundan x^0'da global bir minimum değerini alır. Üstelik, $\lambda > 0$, $\mu \geqq 0$ ve $\mu g(x^0) = 0$ olur.

$L(x) \geqq L(x^0)$ olduğundan, $\lambda f(x) \geqq \lambda f(x^0)$ elde ederiz. Bu durumda x^0 noktası,

$$(SP1) \left\{ \min_{x \in S} \lambda f(x) \right.$$

skaler problemin bir çözümü olur. Buradan, $f(x^0) = z^0$ olduğundan $z^0 \in PE(Z)_{Hu}$ olur. $\square$

Teorem 2.3.15. *$j \in I(x^0)$ iken g_j fonksiyonları x^0'da pseudo-konkav ve $j \notin I(x^0)$ iken g_j fonksiyonları x^0'da sürekli ise $PE(S)_{KT} = PE(S)_K$ olur.*

Kanıt. $PE(S)_{KT} \subset PE(S)_K$ olduğundan $PE(S)_K \subset PE(S)_{KT}$ olduğunu göstermeliyiz.

Çelişki elde edebilmek için, $x^0 \in PE(S)_K$ fakat $x^0 \notin PE(S)_{KT}$ olan bir x^0 noktasını alalım. Bu durumda, $Jf(x^0)y \leq 0$ ve $\nabla g_j(x^0)y \leqq 0$ $(j \in I(x^0))$

olacak şekilde bir $y \in \mathbb{R}^n$ vektörü vardır. g üzerindeki hipotezden, yeterince küçük herhangi $t \in \mathbb{R}_+$ için $Jf(x^0)y \leq 0$ ve $g(x^0 + ty) \leqq 0$ elde edilir. Bu ise Klinger has etkin tanımı ile çelişir. $\square$

Uyarı 2.3.16. *Teorem 2.3.15'de g_j 'nin x^0 'daki quasi-konkavlığı ve $-g_j$ 'nin invexlik kabulünün gerekli olduğu pseudo-konkavlık kabullerini hafifletmek mümkün değildir. Örneğin, $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -x_1^3 - x_2 \leqq 0\}$ olmak üzere,*

$$(V.P)\left\{ \min_{(x_1,x_2)\in S} f(x) = \min_{(x_1,x_2)\in S} (f_1(x_1, x_2)\ ,\ f_2(x_1, x_2)) = \min_{(x_1,x_2)\in S} (x_1, x_2) \right.$$

vektör optimizasyon problemini göz önüne alalım. $(0,0) \in PE(S)_K$ fakat $(0,0) \notin PE(S)_{KT}$ 'dir. $-g(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2$ fonksiyonunun pseudo-konveks olmadığı, ancak $\eta = (\eta_1, \eta_2) = (x_1, x_1^3 + x_2)$ 'e göre invex olduğu açıktır.
$x^0 = 0$ ve $g(x) = -x^3$ quasikonkav fonksiyonu kullanılarak
$S = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \leq 0\}$ olmak üzere $\min\limits_{x\in S} f(x) = \min\limits_{x\in S}(f_1(x), f_2(x)) = \min\limits_{x\in S}(-x^3)$ problemi için benzer sonuç elde edilir.

Teorem 2.3.17. *Eğer f_i ve g_j $(j \in I(x^0))$ fonksiyonları, x^0'da pseudo-konkav ve g_j $(j \notin I(x^0))$ fonksiyonu x^0'da sürekli ise $PE(Z)_{KT} = E(Z)$ olur.*

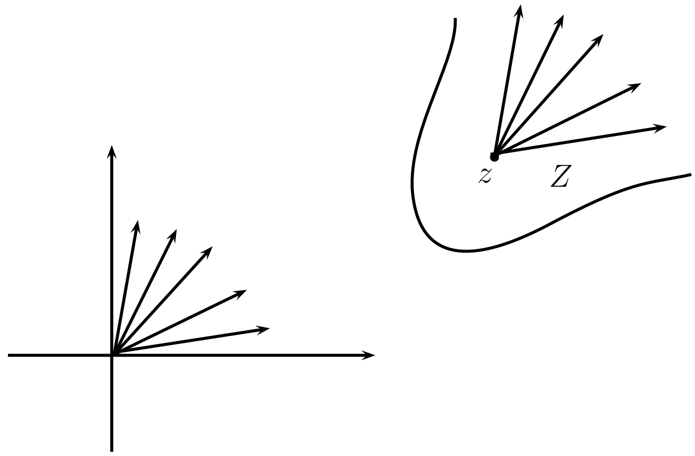
Teorem 2.3.18. *Eğer Z bir konveks küme ise, $PE(Z)_{LBo} = PE(Z)_{Hu}$ olur.*

Kanıt. Z konveks olduğundan, $T(Z, z^0) = clcone(Z - z^0)$ olur. Teorem 2.3.12'den $PE(Z)_{Bo} = PE(Z)_{Hu} = PE(Z)_{LBo}$ elde edilir.

$\square$

$PE(Z)_{LBo}$ ve $PE(Z)_{Be}$ arasındaki ilşkinin analiz edilebilmesi için asymptotic koni kavramına ihtiyaç duyulmaktadır.

Tanım 2.3.19. *$Z \subset \mathbb{R}^p$ kümesi verilsin.*
$As(Z) = \{y \in \mathbb{R}^p : \exists\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+\ ,\ \lim\limits_{k\to+\infty} \lambda_k = 0\ ; \exists\{z_k\} \subset Z,\ y = \lim\limits_{k\to+\infty} \lambda_k z^k\}$
*olarak tanımlanan $As(Z)$ konisine Z'nin **asymptotic konisi** denir.*
$As(Z)$ kapalı bir koni ve $\forall\alpha \in \mathbb{R}^p$ için $As(Z) = As(Z + \alpha)$ olduğu açıktır.
$Z_1 \subset Z_2$ ise $As(Z_1) \subset As(Z_2)$'dir.
$O^+(Z)$, Z kümesinin Recession konisi olmak üzere
$O^+(Z) = As(Z) = \{y : z + \alpha y \in Z\ ,\ \forall z \in Z\ ,\ \forall\alpha \geqq 0\}$'dır.



Şekil 2.22. Z kümesinin asymptotic konisi

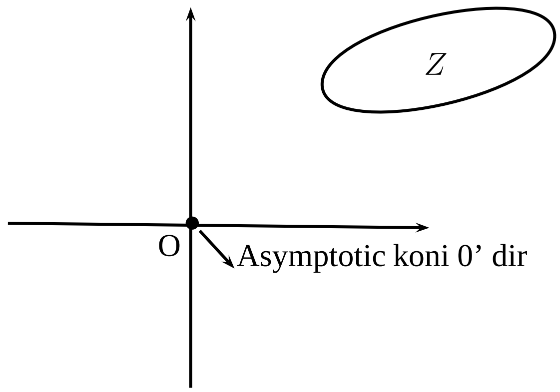
Yardımcı Teorem 2.3.20. *Bir $Z \subset \mathbb{R}^p$ kümesinin sınırlı olması için gerek ve yeter koşul $As(Z) = \{0\}$ olmasıdır.*

Kanıt. $Z \subset \mathbb{R}^p$ olsun.

($\Rightarrow$) Z, sınırlı bir küme ve $\bar{z} \in As(Z)$ olsun. Bu durumda $\forall z \in Z$ için $\|z\| \leq K$ olacak şekilde $K > 0$ ve $\bar{z} = \lim\limits_{k\to\infty} t_k z^k$, $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = 0$ olacak şekilde $\{z^k\} \subset Z$ ve $\{t^k\} \subset \mathbb{R}_+$ vardır.
$\|t_k z^k\| < t_k K$ ve $t_k z^k \to \bar{z}$ olduğundan $\|\bar{z}\| = 0$ dolayısıyla $\bar{z} = 0$'dır. Buradan $As(Z) \subset \{0\}$ elde edilir. Bu ise $As(Z) = \{0\}$ olması demektir.

($\Leftarrow$) $As(Z) = \{0\}$ olsun. Varsayalım ki Z sınırlı olmasın. Bu durumda $\lim\limits_{k\to\infty} z^k = \infty$ olacak şekilde bir $\{z^k\} \subset Z$ dizisi vardır. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\lambda_k = \dfrac{1}{\|z_k\|}$ olarak tanımlayalım. Bu durumda $\lambda_k \to \infty$ ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\|\lambda_k z^k\| = \left\|\dfrac{z^k}{\|z^k\|}\right\| = 1$ olduğundan $\lambda_k z^k \in B(0,1)$ elde edilir. $B(0,1)$ kapalı ve sınırlı olduğundan $\left\{\dfrac{z^k}{\|z^k\|}\right\}$'nın $B(0,1)$ içindeki bir noktaya yakınsayan bir alt dizisi vardır. Genelliği bozmadan $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{z^k}{\|z^k\|} = z$ diyelim. Buradan $0 \neq z = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{z^k}{\|z^k\|} \in As(Z)$ elde edilir. Bu ise $As(Z) = \{0\}$ olması ile çelişir.

$\square$



Şekil 2.23. Z kümesinin sınırlı olması durumunda asymptotic koni

Yardımcı Teorem 2.3.21. *$Z_1, Z_2 \subset \mathbb{R}^p$ için $As(Z_1 \cap Z_2) \subset As(Z_1) \cap As(Z_2)$ olur.*

Uyarı 2.3.22. *$As(Z_1 \cap Z_2) = As(Z_1) \cap As(Z_2)$ eşitliği her zaman sağlanmaz. $Z_1 \cap Z_2$ boştan farklı olması ile Z_1 ve Z_2 kümelerinin kapalı konveks kümeler olma gerekliliği ile yeterli bir şart sağlanır.*

Teorem 2.3.23. *Z kapalı bir küme ve $As(Z) \cap (-C) = \{0\}$ ise $PE(Z)_{LBo} = PE(Z)_{Be}$ olur.*

Kanıt. $PE(Z)_{Be} \subset PE(Z)_{LBo}$ olduğundan $PE(Z)_{LBo} \subset PE(Z)_{Be}$ olduğu gösterilmelidir.

Çelişki elde etmek için, $z^0 \in PE(Z)_{LBo}$ fakat $z^0 \notin PE(Z)_{Be}$ veya $T(Z, z^0) \cap (-C) = \{0\}$ iken $clcone(Z + C - z^0) \cap (-C) \neq \{0\}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $\lim_{k \to \infty} \lambda_k (z^k - z^0) = z \in -C \backslash \{0\}$ olacak şekilde $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$ ve $\{z^k\} \subset Z$ vardır. $\{z^k\}$ dizisi z^0'a yakınsamaz, çünkü yakınsasaydı $z \in T(Z, z^0)$ olurdu bu ise $z^0 \in PE(Z)_{LBo}$ ile çelişirdi. Aynı zamanda, $\{\lambda_k\}$ dizisinin, 0'a yakınsayan bir alt dizisi yoktur. Çünkü olsaydı $z \in As(Z - z^0) \cap (-C) = As(Z) \cap (-C)$ elde edilirdi. Bu ise kabulümüzle çelişir. Dolayısıyla $\{z^k\}$ sınırlı bir dizidir. Her durumda $\{z^k\}$'nın bir alt dizisini seçerek, bu alt dizinin $z^* \neq z^0$ noktasına yakınsadığını kabul edebiliriz. Bu yüzden, $\{\lambda_k\}$, $\lambda_0 > 0$ 'a yakınsar. Fakat, Z kapalı bir küme olduğundan $\lim_{k \to \infty} z^k = z^0 + \dfrac{z}{\lambda_0} \in Z$ elde edilir. Bu sonuç, z^0'ın etkin olma hipotezi ile çelişir. $\square$

3 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ FONKSİYONUNUN OPTİMALLİK KOŞULLARI İÇİN VARLIK TEOREMLERİ

Bilinen skaler optimizasyon problemlerinde, varlık teoremleri için temel alınan teorem Weierstrass Teoremi'dir. Bu teorem S kompakt küme ve $f : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyon olduğunda f'nin optimal noktalarının varlığını garanti eder. Bunun iyi bilinen bir genellemesi, S kompakt ve f alttan yarı sürekli fonksiyon olduğunda f'nin minimal noktalarının olacağının garanti edildiği teoremdir. $Z = f(S)$'yi gözönüne alırsak $Z + \mathbb{R}_+$'nın kapalı ve alttan sınırlı olduğu durumda Z'nin minimal değerlere sahip olacağı söylenebilir. Benzer durum Vektör optimizasyon problemleri için de gerçekleşir. Uygulama için kompaktlık kabulü çok ağır bir koşul olduğundan Weierstrass teoreminin genellemelerinde olduğu gibi zayıf kompaktlık arayışlarına gidilmiştir.

Sıralama konisi üzerine bazı topolojik kısıtlar koyarak ve Zorn Lemma'yı kullanarak, C-yarıkompakt, C-kompakt, C-kapalı, C-sınırlı ve C-quasisınırlılık kavramlarıyla amaca ulaşma yolları araştırılmıştır. Bütün bu kompaktlık tanımlarının yapılmasının dayandığı nokta $E(Z) = E(Z+C)$ eşitliğinin sağlanmasıdır. Bu bölüme biraz önce bahsettiğimiz çeşitli kompaktlık genellemeleri yaparak başlayacağız. Daha sonra Luc tarafından tanımlanan C-tam küme verilecek ve dolayısıyla $Z \neq \emptyset$ ve C-tam ise $E(Z) \neq \emptyset$ biçiminde ifade edilen varlık teoremi kanıtlanacaktır.

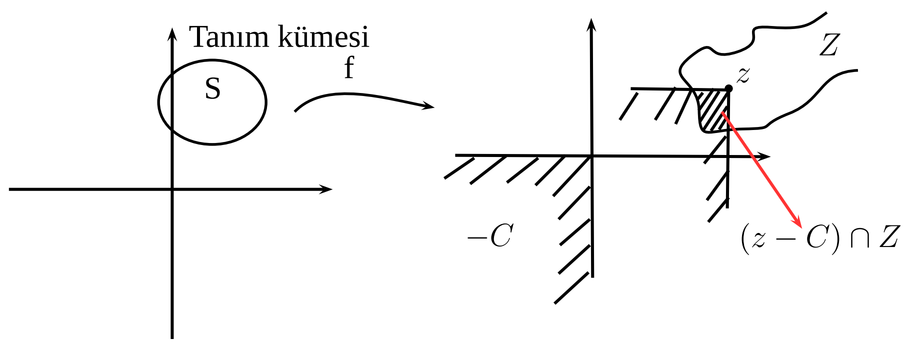
Bu bölümdeki örnekler, Wagner'in [46] zayıf bir genellemesi olan yarıkompaktlığı veren Corley'e [9], C-kompaktlığı tanımlayan Hartley'e [16] ve C-quasisınırlılığın tanımının bulunabileceği Sawaragi-Nakayama-Tanino'nun [44] ve Cambini–Martein'in [8] makalelerine dayanmaktadır.

Süpernormal konilerle sıralanmış özel sonsuz boyutlu uzaylardaki son gelişmeler–le ilgili bilgileri Isac [22] ve Postolica'nın [43] bulunabilir. Ha'nın [15] Z'nin bir tam alt kümesi tarafından kapsanan koni tanımını yapmıştır.

3.1 C-kompaktlık, C-yarıkompaktlık, C-kapalılık, C-sınırlılık, C-quasisınırlılık ve C-tamlık

Tanım 3.1.1. *$S \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : S \to \mathbb{R}^p$ ve $Z = f(S)$ olmak üzere $Z \subset \mathbb{R}^p$ kümesi verilsin.*

a) *$\forall z \in Z$ için, $(z - C) \cap Z$ kompakt küme ise, Z'ye C-**kompakt** denir.*



Şekil 3.24. Bir Z kümesinin C-kompaktlığı

b) *I bir indeks kümesi olmak üzere Z'nin $\{(z^\alpha - C)^c : \alpha \in I, z^\alpha \in Z\}$ formundaki herhangi bir örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa Z'ye C-**yarıkompakt** denir.*

Teorem 3.1.2. *$Z \subseteq \mathbb{R}^p$ kümesi C-kompakt ise Z, C-yarıkompakttır.*

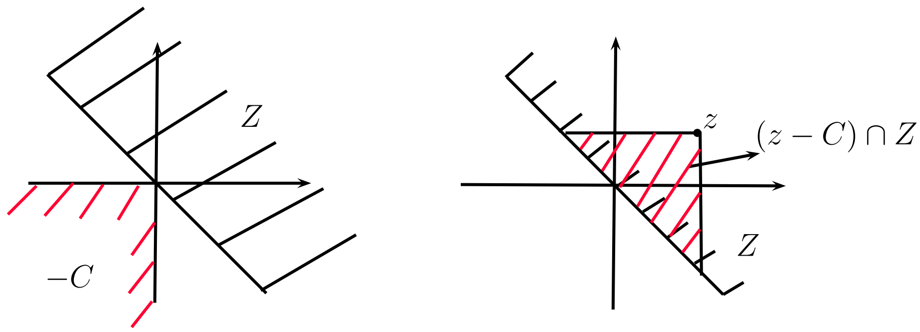
Kanıt. Keyfi $z^0 \in Z$ için Z'nin $\{(z^\alpha - C)^c : \alpha \in I, z^\alpha \in Z\}$ formundaki herhangi bir açık örtüsünü alalım.
$\{(z^\alpha - C)^c : \alpha \in I, z^\alpha \in Z, z^\alpha \neq z^0\}$ alt ailesi, $(z^0 - C) \cap Z$'nin bir açık örtüsüdür. Z, C-kompakt olduğundan $(z^0 - C) \cap Z$ kompakttır ve bu yüzden alınan örtü sonlu bir alt örtüye sahiptir. Eğer bu alt örtüye $(z^0 - C)^c$ eklenirse, Z kümesinin sonlu bir alt örtüsü elde edilir. □

$\{(z^\alpha - C)^c\}$ formunun belirli örtülerine bağlı olduğundan C-yarıkompaktlık şartı hala zayıftır.

Uyarı 3.1.3. *Z kompakt küme ise Z'nin C-kompakt olduğu açıktır. Fakat tersi doğru değildir.*

Örnek 3.1.4, C-kompakt fakat kompakt olmayan bir Z kümesi örneği vermektedir.

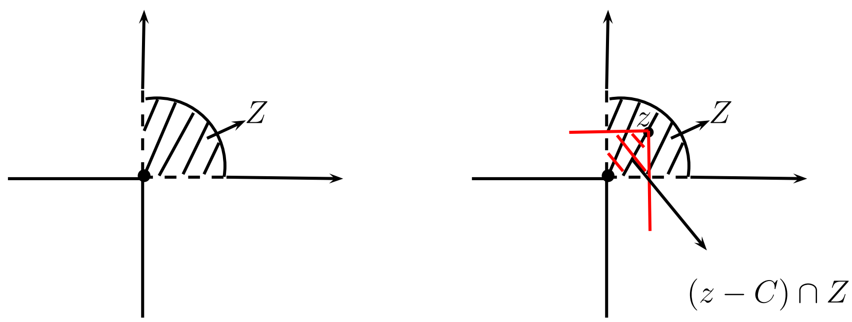
Örnek 3.1.4. *$C = \mathbb{R}^2_+$ olsun. Bu durumda $Z = \{(z_1, z_2) : z_1 + z_2 \geqq 0\}$ kümesi kapalı fakat sınırlı olmadığından kompakt değildir. Ancak bir $z \in Z$ alındığında $(z - C) \cap Z$ kompakt küme olduğundan Z kümesi C-kompakttır.*



Şekil 3.25. $Z = \{(z_1, z_2) : z_1 + z_2 \geqq 0\}$ kümesinin C-kompakt fakat kompakt olmadığının gösterimi

Örnek 3.1.5, C-kompakt olmayan fakat C-yarıkompakt olan bir küme örneği vermektedir.

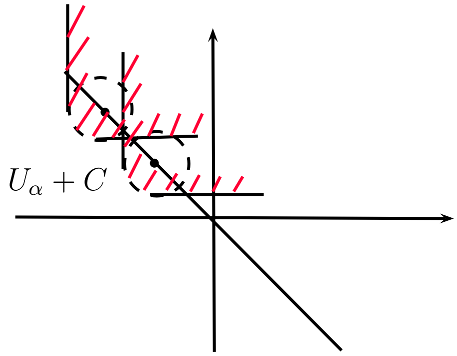
Örnek 3.1.5. *$Z = \{(z_1, z_2) : z_1^2 + z_2^2 \leq 1, z_1 > 0, z_2 > 0\} \cup \{(0,0)\}$ kümesi C-yarıkompakttır fakat $C = \mathbb{R}^2_+$ konisine göre C-kompakt değildir. $(0,0)$ noktası için $((0,0) - C)^c$ örtüsü tüm Z kümesini örttüğü için C-yarıkompakttır. Ancak, Şekil 3.26.'de görüldüğü gibi bir $z \in Z$ için $(z - C) \cap Z$ kümesi sınırlı fakat kapalı olmadığından Z kümesi, C-kompakt değildir.*



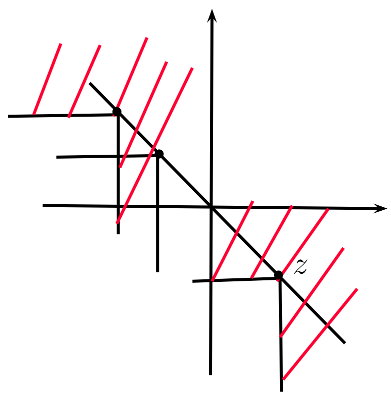
Şekil 3.26. $Z = \big\{(z_1, z_2) : z_1^2 + z_2^2 \leq 1, z_1 > 0, z_2 > 0\big\} \cup \{(0,0)\}$ kümesinin C-kompakt olmadığının gösterimi

Uyarı 3.1.6. *Luc, C-kompaktlığın diğer bir tanımını şu şekilde vermiştir: [41]*
*$Z \subseteq \mathbb{R}^p$'nin $\{U_\alpha + C : \alpha \in I, U_\alpha \text{açık}\}$ formundaki her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa Z kümesine **C-kompakt** denir.*
Bu iki tanım karşılaştırılamazlar.

Örnek 3.1.7. *$Z = \{(z_1, z_2) : z_1 = -z_2\}$ kümesi $C = \mathbb{R}^2_+$ konisine göre $z \in Z$ için $(z - C) \cap Z = \{z\}$ tek bir noktadan oluştuğundan ve tek nokta kümesi kompakt olduğundan Z, C-kompakttır. Ancak $\{U_\alpha + C : \alpha \in I, U_\alpha \text{açık}\}$ formundaki sonlu örtülerle Z örtülemediğinden Luc'un tanımına göre $\mathbb{R}^2_+$-kompakt değildir.*



Şekil 3.27. $Z = \{(z_1, z_2) : z_1 = -z_2\}$ kümesinin Luc'un tanımına göre C-kompakt olmadığının gösterimi



Şekil 3.28. $Z = \{(z_1, z_2) : z_1 = -z_2\}$ kümesinin C-kompaktlığının gösterimi

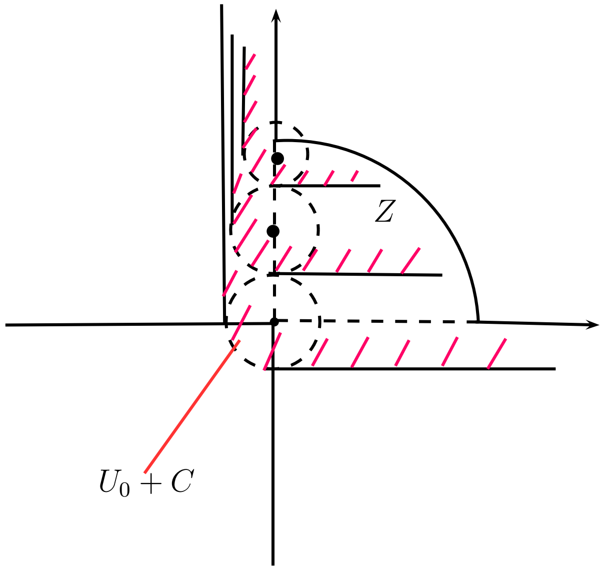
Ters yöndeki bir örnek, Örnek 3.1.5'deki $Z = \{(z_1, z_2) : z_1^2 + z_2^2 \leq 1, z_1 > 0, z_2 > 0\} \cup \{(0,0)\}$ kümesi ile verilir. 0'ın U_0 komşuluğu için $Z \subset U_0$ olduğundan Z kümesi sonlu bir örtüye sahiptir.

Luc'un C-kompaktlık tanımı, kompaktlığa genişletilebilir.

Önerme 3.1.8. *$Z \subseteq \mathbb{R}^p$ kümesi Luc anlamında C-kompakt ise C-yarıkompakttır.*

Kanıt. Z kümesinin $\{(z^\alpha - C)^c : \alpha \in I, z^\alpha \in Z\}$ formunda verilen bir açık örtüsünü gözönüne alalım.

$(z^\alpha - C)^c + C$ kümelerinin ailesi, Z kümesinin bir örtüsü olduğundan ve Z Luc anlamında C-kompakt olduğundan bu örtünün sonlu bir alt örtüsü vardır. Bu



Şekil 3.29. $Z = \{(z_1, z_2) : z_1^2 + z_2^2 \leq 1, z_1 > 0, z_2 > 0\} \cup \{(0,0)\}$ kümesinin Luc'un tanımına göre C-kompakt oluşunun geometrik ifadesi

alt örtü $i = 1, ..., s$ olmak üzere $(z^{\alpha_i} - C)^c + C$ kümelerinden oluşsun. Bu durumda

$$Z \subset \bigcup_{i=1}^{s} (z^{\alpha_i} - C)^c$$

elde edilir. Dolayısıyla Z C-yarıkompakttır. $\square$

Varlık teoremlerindeki Z kümesinin C-yarıkompaktlığı koşulunun yerine Z'nin C-kapalı ve C-sınırlılık koşulları yazılabilir. Dolayısıyla kompaktlık kavramının ikinci bir genelleştirmesi elde edilmiş olur.

Tanım 3.1.9. *$Z \subset \mathbb{R}^p$ ve C, $\mathbb{R}^p$ üzerinde bir sıralama konisi olsun. Bu durumda,*

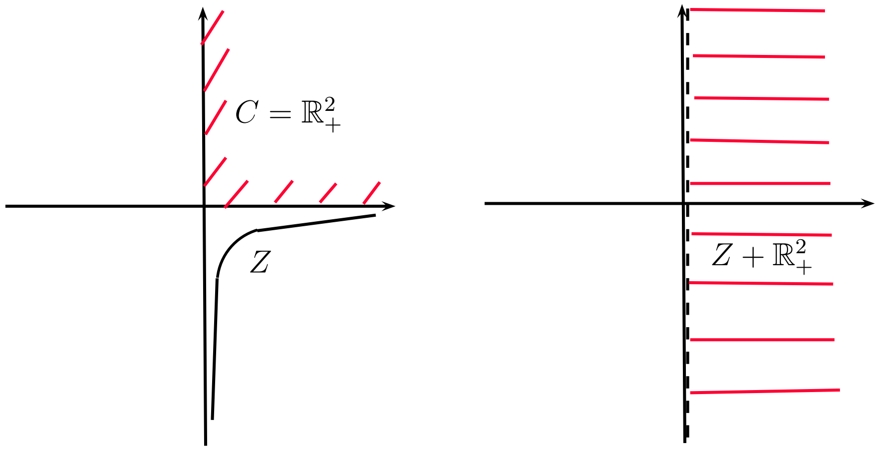
a) *$Z + C$ kapalı ise Z kümesine C**-kapalıdır** denir.*

b) *$As(Z) \cap (-C) = \{0\}$ ise Z kümesine C**-sınırlıdır** denir.*

Uyarı 3.1.10. *Z kümesinin kapalılığı ile C-kapalılığı bağımsız kavramlardır, biri diğerini gerektirmez.*

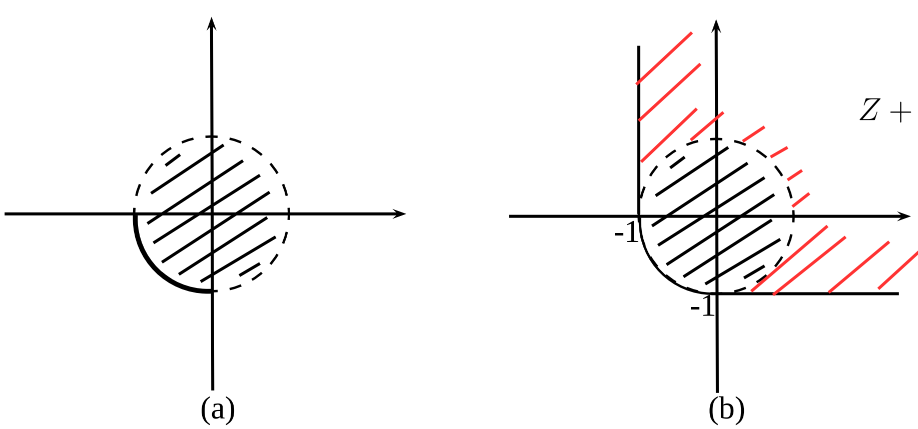
Örnek 3.1.11.

a) *$Z = \{(z_1, z_2) : z_1.z_2 = -1, z_1 > 0\}$ kümesinin sınırı $\partial Z = Z$ olduğundan Z kümesi kapalıdır fakat $Z + \mathbb{R}^2_+$ kapalı olmadığı için $\mathbb{R}^2_+$-kapalı değildir.*



Şekil 3.30. $Z = \{(z_1, z_2) : z_1.z_2 = -1, z_1 > 0\}$ kümesinin C-kapalı olmamasının geometrik ifadesi

b) *$Z = \{(z_1, z_2) : z_1^2 + z_2^2 < 1\} \cup \{(z_1, z_2) : z_1^2 + z_2^2 = 1, z_1 \leqq 0, z_2 \leqq 0\}$ kümesinin sınırı $\partial Z = \{(z_1, z_2) : z_1^2 + z_2^2 = 1\} \nsubseteq Z$ olduğundan Z kümesi kapalı değildir. Ancak $C = \mathbb{R}^2_+$ için,*
$\partial(Z + C) = \{(z_1, z_2) : z_1^2 + z_2^2 = 1, z_1 \leq 0, z_2 \leq 0\} \cup$
$\{(z_1, z_2) : z_1 = -1 \;\; ve \;\; z_2 \geq 0\} \cup \{(z_1, z_2) : z_2 = -1 \;\; ve \;\; z_1 \geq 0\} \subset Z + C$ olduğundan Z kümesi C-kapalıdır.



Şekil 3.31. (a)$Z = \{(z_1, z_2) : z_1^2 + z_2^2 < 1\} \cup \{(z_1, z_2) : z_1^2 + z_2^2 = 1, z_1 \leqq 0, z_2 \leqq 0\}$ kümesi (b) Z kümesinin C-kapalı oluşunun geometrik ifadesi

Sınırlı bir küme C-sınırlıdır. Z_1 ve Z_2 kümeleri kapalı iken $Z_1 + Z_2$ kapalı olmak zorunda değildir. Şimdi verilecek olan Önerme 3.1.12, kapalı ve C-sınırlı bir kümenin C-kapalı olduğunu gösterecektir.

Önerme 3.1.12. *Z_1 ve Z_2 kapalı kümeleri için $As(Z_1) \cap As(-Z_2) = \{0\}$ sağlanıyorsa, $Z_1 + Z_2$ kapalıdır.*

Kanıt. $k \in \mathbb{N}$ için $\{z_1^k\} \subset Z_1$, $\{z_2^k\} \subset Z_2$ olmak üzere $\{z_1^k + z_2^k\}_{k \in N} \subset Z_1 + Z_2$ ve $z = \lim_{k \to +\infty} (z_1^k + z_2^k)$ alalım.

Eğer $\{z_1^k\}$ yakınsak bir alt diziye sahip değil ise $k \to +\infty$ iken $\|z_1^k\| \to +\infty$ ve $\dfrac{z_1^k + z_2^k}{\|z_1^k\|} \to 0$ olur. Bir alt dizi alarak, $\dfrac{z_1^k}{\|z_1^k\|} \to z_1 \in As(Z_1)$ olduğunu kabul edebiliriz.

$\dfrac{z_2^k}{\|z_1^k\|} \to -z_1 \in As(Z_2)$ ($z_1 \in As(-Z_2)$) olur. Bu sonuç, $z_1 \neq 0$ olduğundan geçerli değildir. Bu yüzden $\{z_1^k\}$ en az bir $\bar{z}_1$'ye yakınsar. Bu durumda, $\{z_2^k\}$, $z - \bar{z}_1$'e yakınsar. Z_1 ve Z_2 kapalı kümeler olduğundan, $z = \bar{z}_1 + (z - \bar{z}_1) \in Z_1 + Z_2$ olur. $\square$

Uyarı 3.1.13. *Luc, C-sınırlılığın diğer bir tanımını aşağıdaki biçimde vermiştir: [41]*

*Orjinin herhangi bir U komşuluğu için, $Z \subset tU + C$ olacak şekilde $t > 0$ varsa $Z \subset \mathbb{R}^p$ kümesine **C-sınırlıdır** denir. C-sınırlılığın iki tanımı birbirinden bağımsızdır, biri diğerini gerektirmez.*

Örnek 3.1.14. *$Z = C = \{(z_1, z_2) : z_1 = z_2\}$ kümesi Luc'un tanımına göre C-sınırlıdır. Ancak $\exists z \in As(Z)$, $z \in (-C) \backslash \{0\}$ olacak şekilde bulunduğundan Z, C-sınırlı değildir.*

$Z = \{(z_1, z_2) : z_1 \geqq 0, z_2 \geqq 0\}$ kümesi $C = \{(z_1, z_2) : z_1 = z_2 \geqq 0\}$ konisine göre $As(Z) \cap (-C) = \{0\}$ olduğundan C-sınırlı fakat Luc'un tanımına göre C-sınırlı değildir.

Tanım 3.1.9, kompaktlık notasyonuna ilave bir genelleme verir. Aslında kompakt (dolayısıyla sınırlı) bir Z kümesi için, $As(Z) = \{0\} = As(Z) \cap (-C)$ ve Önerme 3.1.12'dan, Z kümesinin C-kapalı küme olduğu elde edilir.

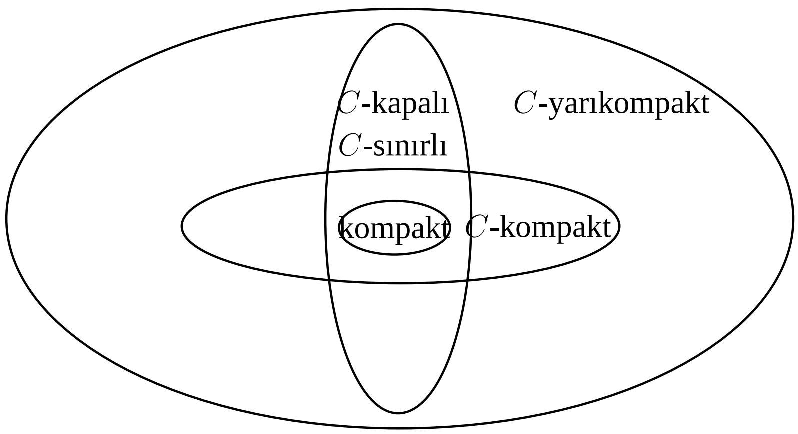
Teorem 3.1.17, C-sınırlı ve C-kapalı bir kümenin C-yarıkompakt küme olduğunu verecektir.

Bunun aksine, C-kompaktlık ile ilgili hiçbir gerektirme yoktur. Örneğin;

$Z = \{(z_1, z_2) : z_1^2 + z_2^2 < 1\} \cup \{(z_1, z_2) : z_1^2 + z_2^2 = 1, z_1 \leqq 0, z_2 \leqq 0\}$ kümesi $\mathbb{R}^2_+$-kapalı ve $\mathbb{R}^2_+$-sınırlı fakat $\mathbb{R}^2_+$-kompakt değildir.

$Z = \{(z_1, z_2) : z_1^2 + z_2^2 \leqq 1, z_1 < 0, z_2 > 0\}$ kümesi $\mathbb{R}^2_+$-kompakt ve $\mathbb{R}^2_+$-sınırlı fakat $\mathbb{R}^2_+$-kapalı değildir. Son olarak, $Z = \{(z_1, z_2) : z_1.z_2 = 1, z_1 < 0\}$ kümesi $\mathbb{R}^2_+$-kompakt ve $\mathbb{R}^2_+$-kapalı fakat $\mathbb{R}^2_+$-sınırlı değildir.

Aşağıdaki Şekil 3.32., kompaktlık, C-kompaktlık, C-kapalılık, C-sınırlılık ve C-yarıkompaktlık arasındaki ilişkiyi göstermektedir.



Şekil 3.32. Kompaktlık, C-kompaktlık, C-kapalılık, C-sınırlılık ve C-yarıkompakt-
lık kavramları arasındaki ilişki

Yardımcı Teorem 3.1.15. *$Z \subset \mathbb{R}^p$ ve C, $\mathbb{R}^p$ üzerinde bir sıralama konisi olsun. Z kümesinin C-sınırlı olması için gerek ve yeter koşul $Z+C$ kümesinin C-sınırlı olmasıdır.*

Kanıt. ($\Leftarrow$) $Z+C$, C-sınırlı olsun. Bu durumda $As(Z+C)\cap(-C) = \{0\}$ olur. $As(Z) \subset As(Z+C)$ olduğundan Z kümesinin C-sınırlı olduğu elde edilir.
($\Rightarrow$) Z kümesi C-sınırlı olsun. Varsayalım ki $Z + C$, C-sınırlı olmasın. Bu durumda $As(Z + C) \cap (-C) \neq \{0\}$ olur. Buradan,
$\lim\limits_{k\to+\infty} t_k(z^k + c^k) = -c \in (-C)\backslash\{0\}$ ve $\lim\limits_{k\to+\infty} t_k = 0$ olacak şekilde $\{z^k + c^k\} \subset Z + C$ sağlayan $\{t_k\} \subset \mathbb{R}_+$ dizileri vardır.
İlk olarak $\{t_k c^k\}$ dizisinin yakınsak bir alt diziye sahip ve genelliği bozmadan $\lim\limits_{k\to+\infty} t_k c^k = c^{'} \in C$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $\{t_k z^k\}$, C pointed bir koni olduğundan $As(Z) \cap (-C)$ içinde sıfırdan farklı $-c - c^{'}$ noktasına yakınsar. Dolayısıyla $As(Z) \cap (-C) \neq \{0\}$ elde edilir. Bu ise Z'nin C-sınırlı oluşu ile çelişir.
Eğer $\{t_k c^k\}$ 'nın hiçbir yakınsak alt dizisi yoksa $\{t_k c^k\}$ sınırsız olur. Bu durumda, $As(\{t_k c^k\}) \neq \{0\}$ elde edilir. Buradan $\{t_k c^k\}$'nın bir alt dizisini alarak, $\lim\limits_{k\to+\infty} \tau_k(t_k c_k) = \bar{c} \neq 0$ ve $\lim\limits_{k\to+\infty} \tau_k = 0$ olacak şekilde bir $\{\tau_k\}$ alt dizisi olduğunu kabul edelim. Açıkça görülür ki, $\bar{c} \in C$'dır.

$$\begin{aligned}
\|\tau_k t_k z^k + \bar{c}\| &= \|\tau_k[t_k(z^k + c^k) + c] - (\tau_k t_k c^k - \bar{c}) - \tau_k c\| \\
&\leq \tau_k\|t_k(z^k + c^k) + c\| + \|\tau_k t_k c^k - \bar{c}\| + \tau_k\|c\|
\end{aligned}$$

olduğundan $\lim\limits_{k\to+\infty} \tau_k t_k z^k = -\bar{c}$ yani $As(Z) \cap (-C) \neq \{0\}$ olur. □

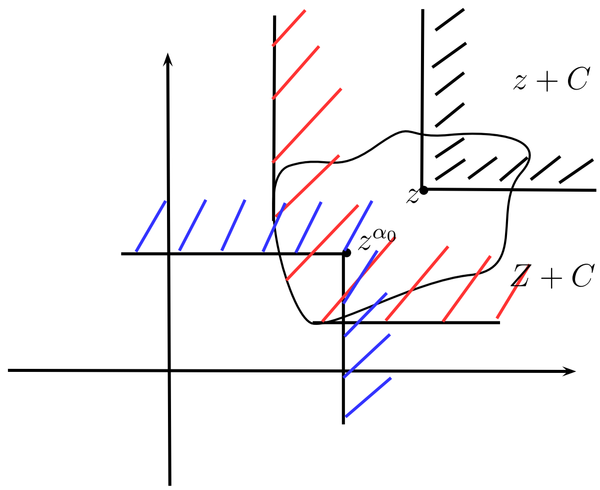
Yardımcı Teorem 3.1.16. *$Z \subset \mathbb{R}^p$ ve C, $\mathbb{R}^p$ üzerinde bir sıralama konisi olsun. $Z + C$ kümesi C-yarıkompakt ise Z, C-yarıkompakttır.*

Kanıt. $\{(z^\alpha - C)^c : \alpha \in I, z^\alpha \in Z\}$, Z kümesinin açık bir örtüsü ve herhangi $z \in Z$ için, $z^{\alpha_0} \in Z$ olmak üzere $z \in (z^{\alpha_0} - C)^c$ olsun. C konveks bir koni olduğundan, $z + C \subset (z^{\alpha_0} - C)^c$ elde edilir. Gerçekten, en az bir $c \in C$ için $z + c \in z^{\alpha_0} - C$ olsaydı bu durumda $z \in z^{\alpha_0} - C$ olurdu, bu ise $z \in (z^{\alpha_0} - C)^c$ oluşu ile çelişir. Dolayısıyla, $\{(z^\alpha - C)^c : \alpha \in I, z^\alpha \in Z\}$, $Z + C$ kümesinin bir

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

açık örtüsüdür. $Z+C$ C-yarıkompakt olduğundan, bu örtü sonlu bir alt örtüye sahiptir ki bu sonlu örtü Z kümesinin de bir alt örtüsüdür.

$\square$



Şekil 3.33. Yardımcı Teorem 3.1.16'nin geometrik yorumu

Teorem 3.1.17. *$Z \subset \mathbb{R}^p$ ve C, $\mathbb{R}^p$ üzerinde bir sıralama konisi olsun. Z, C-kapalı ve C-sınırlı bir küme ise Z kümesi C-yarıkompakttır.*

Kanıt. Herhangi $z \in Z+C$ için $(z-C)\cap(Z+C)$ kümesini gözönüne alalım. Yardımcı Teorem 2.3.21 ve Yardımcı Teorem 3.1.15 kullanılarak Z kümesi C-sınırlı olduğundan,

$$As[(z-C\cap(Z+C))] \subset As(z-C)\cap As(Z+C) = (-C)\cap As(Z+C) = \{0\}$$

elde edilir. Bu yüzden, $(z-C)\cap(Z+C)$ kümesi kapalı, sınırlıdır yani $\forall z \in Z+C$ için kompakt bir kümedir. Tanım 3.1.1(b)'den C-yarıkompakttır. Dolayısıyla Yardımcı Teorem 3.1.16'den Z'nin C-yarıkompakt olduğu elde edilir. $\square$

C-sınırlılık kavramı, Cambini-Martein, tarafından C-quasisınırlı kümelerin tanımı ifade edilerek genelleştirilmiştir. [8]

Tanım 3.1.18. *$Z \subset \mathbb{R}^p$ ve C, $\mathbb{R}^p$ üzerinde bir sıralama konisi olsun. Herhangi bir $z \in Z$ için $(z-C)\cap Z$ kümesi sınırlı bir küme ise $Z \subset \mathbb{R}^p$ kümesine **C-quasisınırlı küme** adı verilir.*

Teorem 3.1.19. *$Z \subset \mathbb{R}^p$, C-sınırlı ise Z kümesi C-quasisınırlıdır.*

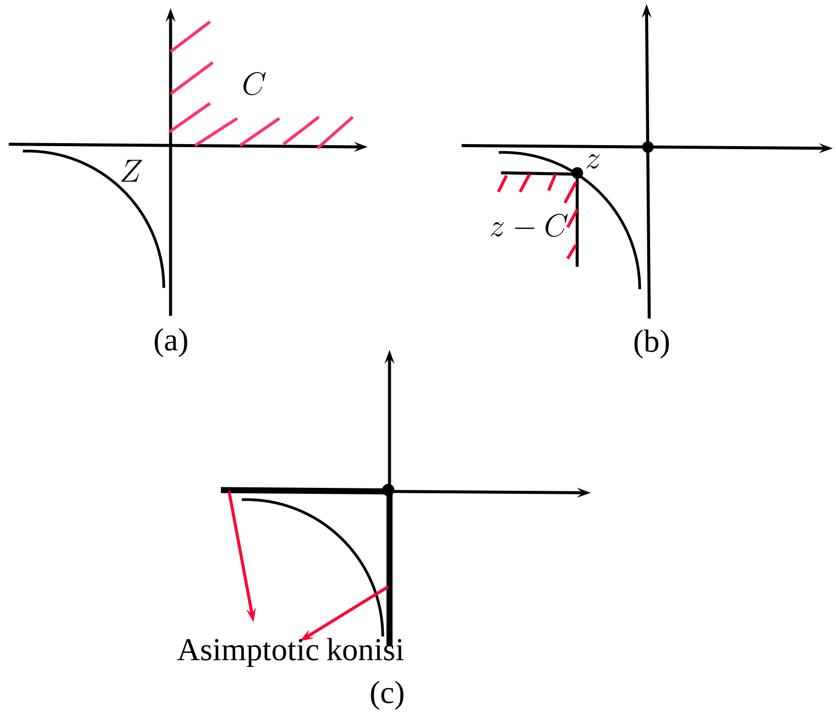
Kanıt. Z, C-sınırlı yani $As(Z) \cap (-C) = \{0\}$ olsun. Kabul edelim ki Z kümesi C-quasisınırlı olmasın. Bu durumda $\exists z^0 \in Z$ için $(z^0 - C) \cap Z$ arakesiti sınırsız olur. O halde, $\{c^k\} \subseteq C$ ve $\lim\limits_{k \to +\infty} \|z^k\| = +\infty$ olacak şekilde bir $\{z^k\} = \{z^0 - c^k\}$ dizisi vardır. Genelliği bozmadan $\lim\limits_{k \to +\infty} \dfrac{z^k}{\|z^k\|} = z^*$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\left\{ -\dfrac{c^k}{\|z^k\|} \right\}$ da aynı elemana yakınsar. Hipotezin aksine, $z^* \neq 0$ olan bir $z^* \in -C \cap As(Z)$ noktası bulmuş olduk. O halde Z kümesi C-quasisınırlıdır. $\square$

Teoremin tersi doğru değildir. Örnek 3.1.20 C-quasisınırlı olan fakat C-sınırlı olmayan bir küme örneği verecektir.

Örnek 3.1.20. *$Z = \{(z_1, z_2) : z_1.z_2 = 1, z_1 < 0\}$ olsun.*

$$As(Z) \cap -C = As(Z) = \{(z_1, z_2) : (z_1 = 0 \wedge z_1 \leq 0) \vee (z_2 = 0 \wedge z_2 \leq 0)\} \neq \{0\}$$

olduğundan $Z = \{(z_1, z_2) : z_1.z_2 = 1, z_1 < 0\}$ kümesi $\mathbb{R}^2_+$-sınırlı değildir, fakat bu küme C-quasisınırlıdır.



Şekil 3.34. (a)$Z = \{(z_1, z_2) : z_1.z_2 = 1, z_1 < 0\}$ kümesi ve C konisi (b) $Z = \{(z_1, z_2) : z_1.z_2 = 1, z_1 < 0\}$ kümesinin C-quasisınırlı olmasının geometrik ifadesi (c) $Z = \{(z_1, z_2) : z_1.z_2 = 1, z_1 < 0\}$ kümesinin asymptotic konisi

Teorem 3.1.21. *$Z \subset \mathbb{R}^p$ ve C, $\mathbb{R}^p$ üzerinde bir sıralama konisi olsun. Bu durumda,*

a) *Z, bir kompakt ya da C-kompakt kümedir*

b) *Z, bir C-yarıkompakt kümedir*

c) *Z, C-kapalı ve C-sınırlı kümedir*

şartlarından biri sağlanırsa, $E(Z) \neq \emptyset$ olur.

Bazı ek cebirsel ve topolojik kabuller altında, önceki tüm kavramlar (C-kompaktlık, C-yarıkompaktlık, C-sınırlılık, C-kapalılık, C-quasisınırlılık) aynı anda sağlanır. Teorem 3.1.22, C-yarıkompakt bir kümenin C-kompakt olması için yeterli bir şartı verecektir.

Teorem 3.1.22. *$Z \subset \mathbb{R}^p$ kapalı ve konveks bir küme ve C, $\mathbb{R}^p$ üzerinde bir sıralama konisi olsun. Bu durumda, aşağıdakiler denktir.*

a) *Z, C-quasisınırlıdır.*

b) *Z, C-kapalı ve C-sınırlıdır.*

c) *Z, C-kompakttır.*

d) *Z, C-yarıkompakttır.*

Kanıt.

(a $\Rightarrow$ b) Kabul edelim ki Z kümesi C-quasisınırlı olsun ancak C-kapalı ve C-sınırlı olmasın. Bu durumda, $\exists c \in As(Z) \cap (-C \backslash \{0\})$ vardır. Z kapalı ve konveks olduğundan $As(Z) = 0^+(Z)$ olur. Dolayısıyla $\forall z \in Z$ ve $\forall t \geqq 0$ için $z + tc \in Z$ dolayısıyla $z + tc \in z - C$ olur. Buradan $z + tc \in Z \cap (z - C)$ kümesinin sınırsız olduğu elde edilir. Bu ise, Z kümesinin C-quasisınırlılığı ile çelişir. Z kümesi, kapalı ve C-sınırlı olduğundan C-kapalıdır.

(b $\Rightarrow$c) $\forall z \in Z$ için $(z - C) \cap Z$ kümesinin sınırlı olduğunu Teorem 3.1.19'de gösterilmiştir. Dolayısıyla, bu küme kompakt ve Z kümesi, C-kompakttır.

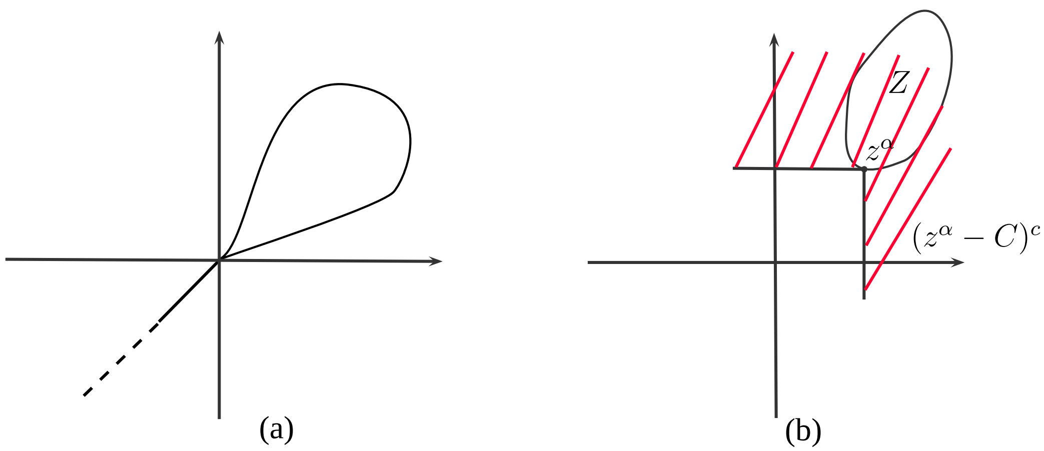
(c $\Rightarrow$ d) C-kompakt bir kümenin C-yarıkompakt olduğunu Teorem 3.1.2'de kanıtlanmıştır.

(d $\Rightarrow$ b) Kabul edelim ki Z kümesi C-yarıkompakt olsun, ancak C-kapalı ve C-sınırlı olmasın. Bu durumda $As(Z) \cap (-C)$ kümesine ait olan en az bir $-c \neq 0$ vardır. $As(Z) = 0^+(Z)$ olmasından dolayı her bir $z \in Z$ için $z - c \in Z$ elde edilir. Buradan, $E(Z) = \emptyset$ olur. Fakat Teorem 3.1.21'den, Z, C-yarıkompakt bir küme olduğundan $E(Z) \neq \emptyset$ olmalıdır. O halde kabulümüz yanlıştır. Z kümesi, C-kapalı ve C-sınırlıdır. □

Tanım 3.1.23'da verilecek olan C-tamlık kavramı, kompaktlık şartlarının önceki genellemelerinden farklıdır. Fakat genel olarak bu notasyon, etkin noktaların varlığını garanti eder.

Tanım 3.1.23. *$Z \subset \mathbb{R}^p$ ve C, $\mathbb{R}^p$ üzerinde bir sıralama konisi olsun. I bir index kümesi, $\alpha, \beta \in I$ ve $\alpha < \beta$ için $z^\alpha - z^\beta \in C \backslash \{0\}$ sağlayan $\{z^\alpha\} \subset Z$ azalan ağ olduğunda, Z kümesi $\{(z^\alpha - C)^c : \alpha \in I\}$ formunda hiçbir örtüye sahip değil ise $Z \subset \mathbb{R}^p$ kümesine C-**tam** denir.*

Şekil 3.35.'de sırasıyla $\mathbb{R}^2$'de $C = \mathbb{R}^2_+$ olması durumunda C-tam olmayan ve C-tam olan iki küme örneği verilmiştir. Şekil 3.35.(a)'deki Z kümesi Tanım 3.1.23'da belirtilen formda bir açık örtüye sahip olmadığından Z, C-tamdır. Benzer şekilde 3.35.(b)'deki Z kümesinin tanımda verilen formda açık örtüsü bulunduğundan Z, C-tam değildir.



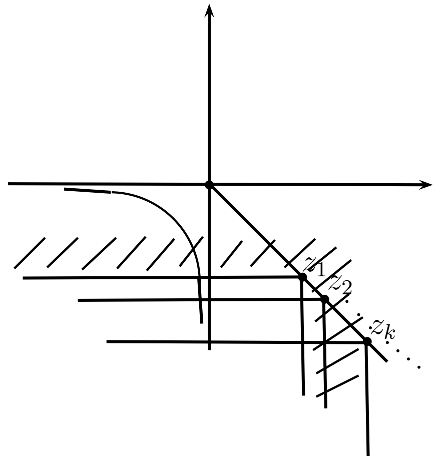
Şekil 3.35. (a)C-tam olan küme örneği (b) C-tam olmayan küme örneği

Teorem 3.1.24. *$Z \subset \mathbb{R}^p$ kümesi C-yarıkompakt ise Z, C-tam kümedir.*

Kanıt. Z kümesi C-yarıkompakt olsun. Kabul edelim ki, Z kümesi C-tam olmasın yani $\{z^\alpha\}$ azalan ağ olmak üzere $\{(z^\alpha - C)^c\}$ formunda bir örtüye sahip olsun. Z, C-yarıkompakt olduğundan $Z \subset \bigcup_1^n (z^\alpha - C)^c$ ya da $\exists n \in \mathbb{N}$ için $Z \subset (z^n - C)^c$ elde edilir. $\{z^\alpha\}$ azalan bir ağ olduğundan $z^n \notin \{z^n\} + C \backslash \{0\}$'dır. Dolayısıyla, $z^n \notin (z^n - C)$ olur bu ise bir çelişkidir. O halde Z, C-tamdır. $\square$

Teorem 3.1.24'nin tersi her zaman doğru değildir. Örnek 3.1.25'de C-tam olup C-yarıkompakt olmayan küme örneği verilmiştir.

Örnek 3.1.25. $Z = \{(z_1, z_2) : z_2 < 0, z_1 z_2 = 1\} \cup \{(z_1, z_2) : z_2 \leqq 0, z_2 = -z_1\}$ *olsun. Z kümesi $\mathbb{R}^2_+$-tamdır, fakat $z^n = (n, -n)$ olmak üzere $\left\{(z^n - \mathbb{R}^2_+)^c\right\}$ örtüsü hiçbir sonlu örtüye sahip olmadığından Z kümesi C-yarıkompakt değildir. Bu açıklama geometrik olarak Şekil 3.36.'de verilmiştir.*



Şekil 3.36. Sonlu örtüye sahip olmayan $Z = \{(z_1, z_2) : z_2 < 0, z_1 z_2 = 1\} \cup \{(z_1, z_2) : z_2 \leqq 0, z_2 = -z_1\}$ kümesinin C-yarıkompakt olmadığının geometrik yorumu

Teorem 3.1.26. *$Z \subset \mathbb{R}^p$ ve C, $\mathbb{R}^p$ üzerinde bir sıralama konisi olsun. Z kümesi boştan farklı bir C-tam küme ise $E(Z) \neq \emptyset$ olur.*

Kanıt. Z kümesi içindeki azalan ağlardan oluşan P kümesini düşünelim. $a, b \in P$ için, a'yı içeren b ağı olduğunda, aRb yazarsak, kısmi sıralama özelliklerini sağlayan R ikili bağıntısını elde ederiz. Dolayısıyla P kısmi sıralı bir kümedir. P kümesinin üstten sınırlı bir altkümesi olmadığından, P tümevarımsal sıralıdır(yani bir zincirdir). Zorn Lemma dan dolayı, maksimum bir $\{\bar{z}^\alpha\}$ elemanını elde ederiz.

Şimdi, $E(Z) \neq \emptyset$ olduğunu kanıtlayalım. Varsayalım ki, etkin noktaların kümesi boş küme olsun. $\{(\bar{z}^\alpha - C)^c\}$ ağını düşünelim. Bu Z kümesinin bir örtüsüdür. Gerçekten Z'nin bir örtüsü olmasaydı, herhangi bir α veya $\bar{z}^\alpha \geqq z$ için $z \in \bar{z}^\alpha - C$ olacak şekilde $z \in Z$ bulunurdu. $z \notin E(Z)$ olduğundan $z \geq z_1$ olan en az bir $z_1 \in Z$ vardır. O halde, $\forall \alpha$ için $\bar{z}^\alpha \geq z_1$ olur. Buradan $\{\bar{z}^\alpha\} \cup \{z_1\}$ azalan ağı elde edilir. Bu ise $\{\bar{z}^\alpha\}$'nın maksimalliği ile çelişir. $Z \subset \bigcup_\alpha \{(\bar{z}^\alpha - C)^c\}$ olduğundan Z kümesinin C-tam olmadığı çelişkisine ulaşılır. □

Teorem 3.1.27. *$Z \subset \mathbb{R}^p$ ve C, $\mathbb{R}^p$ üzerinde bir sıralama konisi olsun. $E(Z) \neq \emptyset$ olması için gerek ve yeter koşul $Z \cap (z - C)$ kesiti C-tam olacak şekilde en* *az bir $z \in Z$ var olmasıdır.*

Kanıt.

($\Leftarrow$) En az bir $z \in Z$ için $Z \cap (z - C)$ kesiti C-tam olsun. Bu durumda $E(Z \cap (z - C)) \neq \emptyset$ olur. Şimdi $E(Z \cap (z - C)) \subset E(Z)$ olduğunu gösterelim. $z_0 \in E(Z \cap (z - C))$ olsun. $z_0 \geq \bar{z}$ olan en az bir $\bar{z} \in Z$ varsa bu durumda $\bar{z} \in Z \cap (z - C)$ ve dolayısıyla $\bar{z} \geq z_0$ olur. Buradan $E(Z \cap (z - C)) \subseteq E(Z)$ elde edilir. $E(Z \cap (z - C)) \neq \emptyset$ olduğundan $E(Z) \neq \emptyset$'dir.

($\Rightarrow$) $E(Z) \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda $\exists z \in E(Z)$ vardır. $Z \cap (z - C)$ kesiti hiçbir azalan ağa sahip olmadığından C-tam kümedir. □

Teorem 3.1.28. *$Z \subset \mathbb{R}^p$ konveks küme ve C, $\mathbb{R}^p$ üzerinde bir sıralama konisi olsun.*

a) *Z kümesi kapalı ve C-quasisınırlı bir küme veya*

b) *Z kümesi C-kapalı ve C-quasisınırlı bir küme ise $E(Z) \neq \emptyset$'dır.*

Kanıt.

a) Z kümesi kapalı ve C-quasisınırlı olsun. Bu durumda Teorem 3.1.22'den Z, C-kompakttır. O halde Teorem 3.1.21'den $E(Z) \neq \emptyset$'dır.

b) Z kümesi C-kapalı ve C-quasisınırlı bir küme olsun. Herhangi bir $z \in Z$ için $(z - C) \cap (Z + C)$ kümesini gözönüne alalım. İlk olarak bu kümenin sınırlı olduğunu kanıtlayalım. Varsayalım ki bu küme sınırlı olmasın. Bu durumda $z^k \in Z$, $c^k, \gamma^k \in -C$ ve $\lim\limits_{k \to +\infty} \|c^k\| = +\infty$ olan bir $\{z + c^k\} = \{z^k - \gamma^k\}$ dizisi vardır. Bununla birlikte, $\forall c \in -C \backslash \{0\}$ için $\alpha c < 0$ olacak şekilde en az bir $\alpha \in \mathbb{R}^p$ vardır. B kapalı birim yuvar ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\bar{c}^k = \dfrac{c^k}{\|c^k\|}$, $\bar{\gamma}^k = \dfrac{\gamma^k}{\|\gamma^k\|}$ olsun. $\forall c \in B \cap (-C)$, $\alpha c^0 \geqq \alpha c$ olacak şekilde $c^0 \in B \cap (-C)$ var olduğundan,

$$\alpha z^k = \alpha(z + c^k + \gamma^k) = \alpha z + \alpha \bar{c}^k \|c^k\| + \alpha \bar{\gamma}^k \|\gamma^k\| \leqq \alpha z + \alpha c^0(\|c^k\| + \|\gamma^k\|)$$

olur. $k \to -\infty$ limit alındığında $\lim\limits_{k \to +\infty} \|c^k\| = \infty$ olduğundan $\lim\limits_{k \to +\infty} \|\alpha z^k\| = -\infty$ elde edilir. Buradan $\lim\limits_{k \to +\infty} \|z^k\| = +\infty$ olur. Bu ise bir çelişkidir, çünkü $z^k \in Z \cap (z - C)$ ve Z, C-quasisınırlı bir kümedir. O halde, $(z - C) \cap (Z + C)$

kümesi kapalı ve sınırlıdır. Bu yüzden $E(Z+C) \neq \emptyset$ olur. $E(Z+C) \subset E(Z)$ olduğundan $E(Z) \neq \emptyset$ elde edilir. $\square$

Sonuç 3.1.29. *$Z \subset \mathbb{R}^p$ kapalı ve konveks bir küme olsun. Bu durumda, $E(Z) \neq \emptyset$ olması için gerek ve yeter koşul Teorem 3.1.22'deki koşullardan herhangi birinin sağlanmasıdır.*

Tanım 3.1.30. *$Z \subset \mathbb{R}^p$ kümesi ve $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ fonksiyonu verilsin. $\forall z \in Z$ için $f^{-1}(z - C)$ kümesi kapalı ise f fonksiyonuna C-**yarısüreklidir** denir.*

Uyarı 3.1.31. *$p = 1$ ve $C = \mathbb{R}^2_+$ ($C = \mathbb{R}^2_-$) için, C-yarısürekliliğin tanımı, üstten (alttan) yarısürekliliğin tanımına indirgenir.*

Teorem 3.1.32. *$S \subset \mathbb{R}^n$ kompakt bir küme ve $f : S \to \mathbb{R}^p$ olsun. f, C-yarısürekli bir fonksiyon ise $E(Z) \neq \emptyset$ olur.*

Kanıt. $\bigcup\limits_{\alpha} \{(z^\alpha - C)^c : \alpha \in I, z^\alpha \in Z\}$, Z kümesinin bir açık örtüsü olsun. f, C-yarısürekli olduğundan $\bigcup\limits_{\alpha} \left\{f^{-1}[(z^\alpha - C)^c] : \alpha \in I, z^\alpha \in Z\right\}$, S kümesinin bir açık örtüsüdür. S kompakt olduğundan bu örtünün sonlu bir alt örtüsü vardır ve bu alt örtünün f altındaki görüntüsü, Z'nin sonlu bir alt örtüsüdür. Dolayısıyla, Z kümesi C-yarıkompakttır. Teorem 3.1.21(b)'den $E(Z) \neq \emptyset$'dir. $\square$

Şimdiye kadar, $E(Z)$ kümesi için varlık teoremleri üzerinde çalışıldı. $WE(Z) \neq \emptyset$ ve $PE(Z)_{He} \neq \emptyset$ olması için gerekli koşul Asymptotic koni yardımı ile verilebilir.

Yardımcı Teorem 3.1.33. *$Z \subset \mathbb{R}^p$ olsun. 0'dan farklı bir z vektörü için, $z \in As(Z)$ olması için gerek ve yeter koşul 0'ın her U komşuluğu ve ∞'un her V komşuluğu için $cone(z+U) \cap Z \cap V \neq \emptyset$ olmasıdır.*

Kanıt. Tanımın basit bir sonucu olarak,
$z \in As(Z) \backslash \{0\}$ olması için gerek ve yeter koşul ∞'un her V komşuluğu için $z \in clcone(Z+V)$ ya da her $U(0)$ ve her V için $(z+U) \cap cone(Z+V)$ olmasıdır. $\square$

Teorem 3.1.34. *$Z \subset \mathbb{R}^p$ ve C, $\mathbb{R}^p$ üzerinde bir sıralama konisi olsun.*

a) *$WE(Z) \neq \emptyset$ ise $As(Z) \cap (-intC) = \emptyset$'dir.*

b) *$PE(Z)_{He} \neq \emptyset$ ise $As(Z) \cap (-C) = \{0\}$'dır.*

Kanıt.

(a) $WE(Z) \neq \emptyset$ olsun. Varsayalım ki $As(Z) \cap (-intC) \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda, en az bir $z \in As(Z) \cap (-intC)$ vardır. Her $z^0 \in Z$ için $z \in As(Z - z^0)$ olur. Bu durumda, Yardımcı Teorem 3.1.33'den ∞'un her V komşuluğu için,

$$cone(z + U) \cap (Z - z^0) \cap V \neq \emptyset \tag{3.1}$$

olur. $z \in -intC$ olduğundan,

$$cone(Z + U) \backslash \{0\} \subset (-intC) \tag{3.2}$$

olacak şekilde yeterince küçük bir $U(0)$ komşuluğunu seçebiliriz. V, 0'ı içermediğinden, 3.1 ve 3.2'den $(Z - z^0) \cap (-intC) \neq \emptyset$ olur. Bu ise Z'nin hiçbir z^0 elemanının zayıf etkin olamayacağını gösterir.

(b) $PE(Z)_{He} \neq \emptyset$ yani $z^0 \in PE(Z)_{He}$ olsun. Bu durumda $z^0 \in E_{C'}(Z)$ ve $C \backslash \{0\} \subset intC'$ olan bir C' konisi vardır. (a)'dan dolayı $As(Z) \cap (-intC') = \emptyset$ olur ve buradan $As(Z) \cap (-C) = \{0\}$ elde edilir. □

Yardımcı Teorem 3.1.35. *$Z \subset \mathbb{R}^p$ ve C, $\mathbb{R}^p$ üzerinde bir sıralama konisi olsun. Z kümesi, C-sınırlı ve C-kapalı bir küme ise $Z \subset E(Z) + C$ olur.*

Kanıt. $Z \subset \mathbb{R}^p$ kümesi, C-sınırlı ve C-kapalı bir küme olsun. Bu durumda herhangi $z \in Z$ için $Z' = (z - C) \cap (Z + C)$ kümesi kompakttır. Z' kümesi kompakt olduğundan Teorem 3.1.21'den $E(Z') \neq \emptyset$ olur. Bununla birlikte $E(Z') \subset E(Z)$'dir. Çünkü $E(Z') \not\subset E(Z)$ yani bir $\tilde{z} \in E(Z') \backslash E(Z)$ elemanı olsaydı, $\tilde{z} - z' \in C$ olacak şekilde bir $z' \in Z$ var olurdu. Aynı zamanda $z' \in Z'$ olur. Bu ise $\tilde{z} \in E(Z')$ oluşu ile çelişir.
$\emptyset \neq E(Z') \subset E(Z)$ ve $E(Z') \subset Z'$ olduğundan $Z' \cap E(Z) \neq \emptyset$ elde edilir. Bu durumda, herhangi bir $z \in Z$ için $\bar{z} \in z - C$ olacak şekilde bir $\bar{z} \in E(Z)$ vardır yani $Z \subset E(Z) + C$'dir. □

Yardımcı Teorem 3.1.36. *A konisi, $A \cap C = \{0\}$ olacak şekilde kapalı bir koni olsun.Bu durumda,*

a) *$\forall k \in \mathbb{N}$ için $C_{k+1} \subset C_k$*

b) $\bigcap_{k=1}^{+\infty} C_k = C$

c) *$\forall k \in \mathbb{N}$ için $A \cap C_k = \{0\}$*

d) *$\forall k \in \mathbb{N}$ için $C \backslash \{0\} \subset intC_k$ özelliklerini sağlayan $C_k \neq C$ olan kapalı konveks pointed konilerin bir $\{C_k\}$ dizisi vardır.*

Kanıt. $D = \left\{ d : d = \dfrac{c}{\|c\|}, c \in C, c \neq 0 \right\}$ olsun. Bu durumda $C = coneD$, $D \cap A = \emptyset$ ve D kompakt bir kümedir. Bunun yanında, A kapalı kümesinden D kümesine olan ε uzaklığı pozitiftir. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $C_k = clcone(D + U_{\frac{\varepsilon}{k}}(0)) = \emptyset$ olarak tanımlayalım.

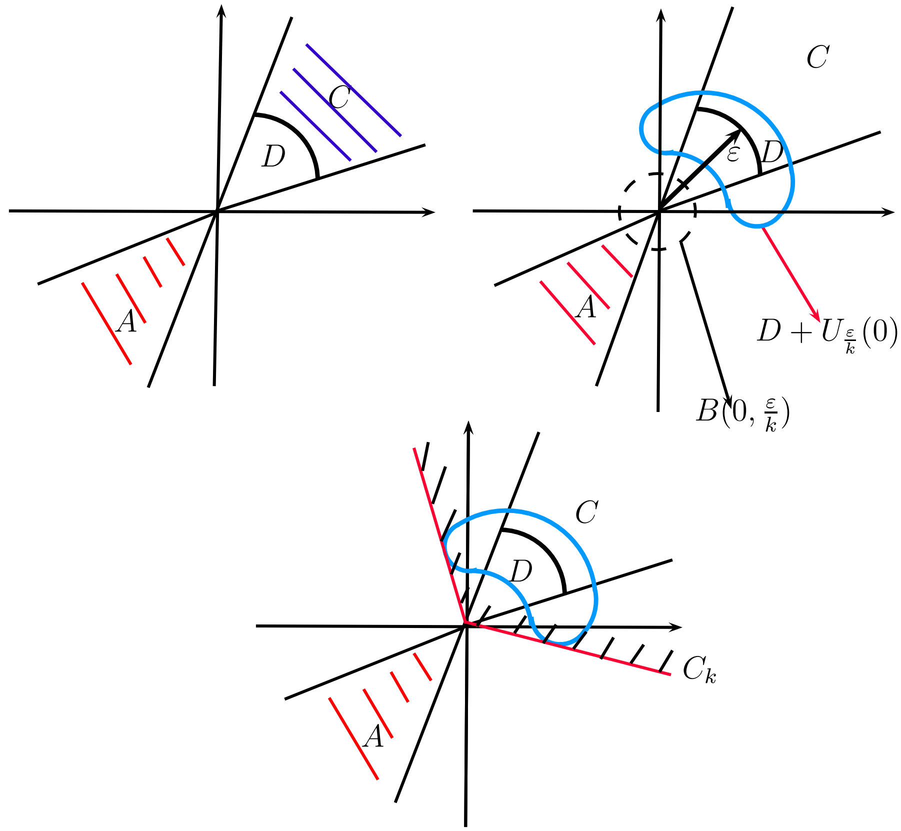
a)$\forall k \in \mathbb{N}$ alalım. $U_{\frac{\varepsilon}{k+1}}(0) \subset U_{\frac{\varepsilon}{k}}(0)$ olduğundan $C_{k+1} = clcone(D + U_{\frac{\varepsilon}{k+1}}(0)) \subset clcone(D + U_{\frac{\varepsilon}{k}}(0)) = C_k$ elde edilir.

b) $C \subset \bigcap_{k=1}^{+\infty} C_k$ olduğu açıktır. $\bigcap_{k=1}^{+\infty} C_k \subset C$ olduğunu gösterelim. $x \in \bigcap_{k=1}^{+\infty} C_k$ olsun. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $x \in C_k = clcone(D + U_{\frac{\varepsilon}{k}}(0))$. O halde $k \to \infty$ düşünülürse $x \in clcone(D) = cone(D) = C$ elde edilir. Dolayısıyla $\bigcap_{k=1}^{+\infty} C_k \subset C$ olur.

c) A kapalı bir koni olduğundan, yeterince büyük k doğal sayıları için $A \cap (D + U_{\frac{\varepsilon}{k}}(0)) = \emptyset$ elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \{0\} &= A \cap clcone(D + U_{\frac{\varepsilon}{k}}(0)) \\ &= A \cap C_k \end{aligned}$$

olur. O halde (c) sağlanmış olur. $\square$



Şekil 3.37. Yardımcı Teorem 3.1.36'nin geometrik yorumu

Teorem 3.1.37. *$Z \subset \mathbb{R}^p$, C-sınırlı ve C-kapalı bir küme olsun. Bu durumda, $E(Z) \subset clPE(Z)_{He}$ olur.*

Kanıt. Z kümesi C-sınırlı ise $Z + C$ kümesi de C-sınırlıdır. Dolayısıyla C-sınırlılık tanımından, $As(Z + C) \cap (-C) = \{0\}$ olur. Bu durumda, Yardımcı Teorem 3.1.36'den $A = As(Z + C)$ ve $C_k = -C_k$ olmak üzere $\forall k \in \mathbb{N}$ için $C_{k+1} \subset C_k$, $\bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} C_k = C$, $As(Z+C) \cap (-C_k) = \{0\}$, $C \backslash \{0\} \subset intC_k$ özelliklerine sahip pointed kapalı konilerin bir $\{C_k\}$ dizisi vardır.

$Z+C+C_k$ kümesi kapalı olduğundan, $Z+C$ kümesi, C_k-kapalı ve C_k-sınırlıdır. Bu durumda, Yardımcı Teorem 3.1.35'den $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$Z \subset E_{C_k}(Z) + C_k \tag{3.3}$$

olur.

Şimdi, $\tilde{z} \in E(Z)$ olsun. 3.3 kapsamından $\forall k \in \mathbb{N}$ için $z^k \in E_{C_k}(Z) \cap (\tilde{z} - C_k)$ olacak şekilde bir $\{z^k\}$ dizisini elde edilir. Bu durumda, $z^k \in PE(Z)_{He}$ olur.

$\{z^k\}$ dizisinin bir altdizisinin $\tilde{z}$'ya yakınsadığını gösterelim.

$C_{k+1} \subset C_k$ olduğundan $\forall k \in \mathbb{N}$ için,

$$z^k \in (Z + C) \cap (\tilde{z} - C_1) \tag{3.4}$$

olur.

$$As[(Z + C) \cap (\tilde{z} - C_1)] \subset As(Z + C) \cap (-C_1)$$

olduğundan 3.4'da verilen küme kapalı ve sınırlıdır. Dolayısıyla $\{z^k\}$'nın bu küme içindeki bir noktaya yakınsayan bir alt dizisi vardır. Genelliği bozmadan, $\{z^k\} \to \bar{z} \in (Z+C) \cap (\tilde{z} - C_1)$ diyelim. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\tilde{z} - z^k \in C_k$ ve $\bigcap_{k=1}^{+\infty} C_k = C$ olduğundan $\tilde{z} - \bar{z} \in C$ yani $\bar{z} \leq \tilde{z}$ olur. $\tilde{z} \in E(Z)$ alındığından $\tilde{z} = \bar{z}$ olmalıdır. $z^k \in PE(Z)_{He}$, $\{z^k\} \to \bar{z} = \tilde{z}$ olduğundan $\tilde{z} \in clPE(Z)_{He}$'dir. Dolayısıyla

$$E(Z) \subset clPE(Z)_{He}$$

elde edilir. □

3.2 Optimallik Şartları

Bu bölümde skaler optimizasyonun işleyişine uygun Optimallik Notasyonları ile ilgili gerekli ve yeterli şartları üretilecektir. Tüm bu şartlar için f ve g fonksiyonlarının diferansiyellenebilir olduğu varsayılacaktır. Diferansiyellenememe durumunda, zayıf varsayımlar düşünülecektir. Bu bölümdeki tüm şartlar I. türev şartlarıdır. Kaynaklarda, hem düzgün hem de düzgün olmayan durumlar için II. türev şartları da verilmiştir. Bunun için genelde Hessian matrisi, ikinci mertebeden tanjant konisi veya bazı diğer özel koni notasyonları kullanılır. Düzgün olmayan durumlarda, $C^{1,1}$ fonksiyonel sınıfı veya türevleri yerel Lipschitz olan fonksiyonlar kullanılır.

Öncelikle skaler fonksiyonlar için iyi bilinen bir gereklilik koşulu ifade edelim. Bunu kısıtsız Vektör Optimizasyon Problemleri için düşünelim.

x^0 , $f : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ için bir yerel minimum nokta ise, bu durumda $\forall y \in T(S, x^0)$ için $\nabla f(x^0)y \geqq 0$ olur.

Teorem 3.2.1. *$(V.P)$ verilsin. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, x^0'da diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve x_0 , $(V.P)$ için zayıf yerel etkin nokta ise $\forall y \in T(S, x^0)$ için $Jf(x^0)y \notin -intC$ olur.*

Kanıt. f, x^0'da diferansiyellenebilir fonksiyon ve x_0 , zayıf yerel etkin nokta olsun. Keyfi bir $y \in T(S, x^0)$ alalım. Bu durumda

$\lim_{k\to+\infty} \dfrac{x^k - x^0}{\|x^k - x^0\|} = y$ ve $\lim_{k\to+\infty} x^k = x^0$ olan bir $\{x^k\} \subset S$ dizisi vardır.

Taylor açılımından $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$f(x^k) - f(x^0) = Jf(x^0)(x^k - x^0) + o(\|x^k - x^0\|)$$

$\dfrac{f(x^k) - f(x^0)}{\|x^k - x^0\|} = Jf(x^0)\dfrac{x^k - x^0}{\|x^k - x^0\|} + o(1)$ elde edilir. Buradan

$\lim_{k\to+\infty} \dfrac{f(x^k) - f(x^0)}{\|x^k - x^0\|} = Jf(x^0)y$ olur.

Dolayısıyla, $f(x^k) - f(x^0) \notin -intC$ olduğundan $Jf(x^0)y \notin -intC$ elde edilir.

$\square$

Teorem 3.2.2. *$(V.P)$ ve $f : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $\forall y \in T(S, x^0)\backslash\{0\}$ için $Jf(x^0)y \notin -C$ ise, x^0 noktası $(V.P)$'nun bir yerel etkin noktasıdır.*

Kanıt. $\forall y \in T(S,x^0)\backslash\{0\}$ için $Jf(x^0)y \notin -C$ olsun.

Varsayalım ki x^0'ın bir yerel etkin nokta olmasın. Bu durumda, $\forall k \in \mathbb{N}$ için $f(x^k) - f(x^0) \in -C\backslash\{0\}$ olan ve x^0'a yakınsayan bir $\{x^k\} \subset S$ dizisi vardır.

$$\underbrace{\frac{f(x^k) - f(x^0)}{\|x^k - x^0\|}}_{\text{negatif olduğundan} Jf(x^0) \text{negatif olur.}} = Jf(x^0)\frac{x^k - x^0}{\|x^k - x^0\|} + o(1)$$

$k \to +\infty$ için limit alarak ve $\{x^k\}$'nın yakınsak bir alt dizisi seçilerek, $\exists y \in T(S,x^0)\backslash\{0\}$ için $Jf(x^0)y \in -C$ elde edilir. Bu ise kabulümüzle çelişir.

$\square$

Teorem 3.2.3, Teorem 3.2.1 ve Teorem 3.2.2'de ele alınan problemin optimalliği için yeterli bir şart vermektedir. Kanıtı, Teorem 3.2.2'dekine benzer olarak yapılabilir.

Teorem 3.2.3. *$f : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ olsun. $\forall y \in T(S,x^0)\backslash\{0\}$ için $\sup\limits_{\nu \in C_{\geqq}} \nu Jf(x^0)y > 0$ ise x^0 noktası $(V.P)$ için bir yerel etkin çözümdür.*

Teorem 3.2.4. *$(V.P)$ ve $f : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. f, x^0'da diferansiyellenebilir ve S açık küme olsun. Eğer x^0, $(V.P)$ için bir zayıf yerel etkin nokta ise $\nu^0 Jf(x^0) = 0$ olan $\exists \nu^0 \in C_{\geqq}\backslash\{0\}$ vardır.*

Kanıt. Teorem 3.2.1'dan $\forall y \in \mathbb{R}^n$ için $Jf(x^0)y \notin -intC$'dır. $\{Jf(x^0)y : y \in \mathbb{R}^n\}$ ve $-intC$ kümeleri bir hiperdüzlem ile ayrılabildiğinden, $\forall y \in \mathbb{R}^n$ için $\nu^0 Jf(x^0)y \geqq 0$ sağlayan $\exists \nu^0 \in C_{\geqq}\backslash\{0\}$ elemanı vardır. Bu eşitsizlik $\forall y \in \mathbb{R}^n$ için sağlandığından $\nu^0 Jf(x^0) = 0$ olur. $\square$

Şimdiki örnek, genelde Teorem 3.2.4'ün x^0 'ın bir yerel minimal nokta olması için yeterli bir koşul olmadığını gösterecektir. Uygun bir genelleştirilmiş konvekslik kabulü altında Teorem 3.2.4 optimallik için yeterli bir şart verecektir.

Örnek 3.2.5. *$S = \mathbb{R}^2$, $C = \mathbb{R}^2_+$ ve $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ fonksiyonu $f(x) = f(x_1,x_2) = (x_1 - x_2\ ,\ 1 - x_1 - e^{-x_2})$ olmak üzere $(V.P)$ problemini düşünelim. $\nu^0 = (1,1) \in C_{\geqq}\backslash\{0\}$ noktasını alalım.*

$$\mathbf{Jf} = \begin{bmatrix} f_{1_{x_1}} & f_{1_{x_2}} \\ f_{2_{x_1}} & f_{2_{x_2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

olduğundan

$v^0 Jf(x^0) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ *elde edilir.*

Fakat $x_1 \neq 0$ *olan* $\forall x_1 \in \mathbb{R}$ *için* $f(x_1, x_1) = (0, 1 - x_1 - e^{-x_1}) \leq (0,0)$ *olduğundan* $f(x_1, x_1) \in f(0,0) - (C \backslash \{0\})$ *olur. O halde* $(0,0)$ *bir yerel etkin nokta değildir.*

Teorem 3.2.6. *$f : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. f, x^0'da C-pseudoconvex ve en az bir $v^0 \in C_{\geqq} \backslash \{0\}$ için $v^0 Jf(x^0) = 0$ olsun. Bu durumda, x^0 $(V.P)$'nin bir etkin noktasıdır.*

Kanıt. Varsayalım ki x, $(V.P)$'nin bir etkin noktası olmasın. Bu durumda $f(x) - f(x^0) \in -C \backslash \{0\}$ olan $\exists x \in S$ vardır. f, x^0'da C-pseudoconvex olduğundan $Jf(x^0)(x - x^0) \in -intC$ olur. Dolayısıyla,
$\forall v \in C_{\geqq} \backslash \{0\}$ için $v \; Jf(x^0)(x - x^0) < 0$ elde edilir. Bu ise hipotezimiz ile çelişir. $\square$

Bölümün geri kalanında, $g_j(x) \leqq 0$ eşitsizliği ile sınırlanmış $(V.P)$ problemlerine yoğunlaşacağız. Sırasıyla etkin, has etkin ve zayıf etkin nokta tanımları, F. John ya da Kuhn-Tucker şartları ile verilecektir. Bu şartlar, uygun bir genelleştirilmiş konvekslik hipotezi altında yeterli olacaktır. Teorem 3.2.6'nın hipotezindeki şartlar global etkin noktalar için de yeterlidir. Has etkin noktalar için gerekli (ve yeterli) şartlar, Kuhn-Tucker'ın genişletilmiş tanımı dikkate alınarak verilecektir. Bu durumda $C = \mathbb{R}^p_+$ olarak alınacaktır.

Teorem 3.2.7. *$f, g : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonları verilsin. f ve g'nin x^0'da diferansiyellenebilir olsun. x^0 , $(V.P)$ için bir zayıf yerel etkin nokta ise, bu durumda $v^0 \; Jf(x^0) + \lambda^0 Jg(x^0) = 0$, $\lambda^0 g(x^0) = 0$ ve $(v^0, \lambda^0) \neq 0$ olan $v^0 \in C_{\geqq}$ ve $\lambda^0 \in \mathbb{R}^m_+$ vardır.*

Kanıt. $\left.\begin{array}{l} Jf(x^0)(x-x^0) \in -intC \\ g(x^0) + Jg(x^0)(x-x^0) \in int\mathbb{R}^m_- \end{array}\right\}$
sisteminin $\mathbb{R}^n$ 'de çözümü yoktur. Her $x \in \mathbb{R}^n$ ve yeterince küçük t pozitif sayısı için $f(x^0+t(x-x^0)) - f(x^0) \in -intC$ ve $g(x^0+t(x-x^0)) < 0$ olur. Buradan $f(x^0+t(x-x^0)) < f(x^0)$ olur. Bu ise x^0'ın zayıf yerel etkinlik hipotezi ile çelişir. Bu durumda, $\{Jf(x^0)(x-x^0) \ : \ x \in \mathbb{R}^n\} \times \{g(x^0)+Jg(x^0)(x-x^0) \ : \ x \in \mathbb{R}^n\}$ ve $-intC \ \times \ int \ \mathbb{R}^m_-$ kümelerini ayıran bir hiperdüzlem vardır yani $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için

$$v^0 Jf(x^0)(x-x^0) + \lambda^0[Jg(x^0)(x-x^0) + g(x^0)] \geqq 0$$

ve

$\forall(c,u) \in (C \ \times \mathbb{R}^m_-)$ için $-v^0 + \lambda^0 u \leqq 0$ olan bir $(v^0, \lambda^0) \neq 0$ vektörü vardır. Son eşitsizlikte sırasıyla $c = 0$ ve $u = 0$ yazarsak, $\lambda^0 \in \mathbb{R}^m_+$ ve $v^0 \in C_{\geqq}$ elde ederiz. İlk eşitsizlikte, $x = x^0$ için $\lambda^0 g(x^0) = 0$ olur. Herhangi $x \in \mathbb{R}^n$ için doğru olan aynı eşitsizlikten
$v^0 Jf(x^0) + \lambda^0 Jg(x^0) = 0$ elde edilir. □

Teorem 3.2.8. *$f, g : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonları verilsin. f, x^0'da C-pseudoconvex ve $\lambda^0 g$, x^0 'da quasiconvex olsun. $v^0 Jf(x^0) + \lambda^0 Jg(x^0) = 0$ ve $\lambda^0 g(x^0) = 0$, $v^0 \in C_{\geqq}$, $\lambda^0 \in \mathbb{R}^m_+$ olan bir $(v^0 \ , \ \lambda^0) \neq 0$ vektörü varsa bu durumda, x^0 bir etkin noktadır.*

Kanıt. Kabul edelim ki $f(x) - f(x^0) \in -C\backslash\{0\}$ sağlayan bir $x \in S$ noktası var olsun. f, x^0 'da C-pseudeconvex olduğundan, $Jf(x^0)(x-x^0) \in -intC$ ya da $v^0 Jf(x^0)(x-x^0) < 0$ elde edilir.
$\lambda^0 g$'nin quasiconvex'liğinden ve $g(x) \leqq 0$ veya
$\lambda^0 g(x) = \lambda^0 g(x) - \lambda^0 g(x^0) \leqq 0$ olduğundan $\lambda^0 Jg(x^0)(x-x^0) \leqq 0$ elde edilir. Bu durumda, $[v^0 Jf(x^0) + \lambda^0 Jg(x^0)](x-x^0) < 0$ olur. Bu ise $v^0 Jf(x^0) + \lambda^0 Jg(x^0) = 0$ hipotezi ile çelişir. □

Uyarı 3.2.9. *Teorem 3.2.8'ye benzer teoremlerin kanıtı, genelleştirilmiş konvekslik hipotezleri ve çarpanlar üzerindeki kabullere bağlı olarak sağlanırlar.*

Özel olarak, $v^0 \in C_>$ iken $v^0 f$ skaler fonksiyonunun pseudoconvex hipotezi ile f'nin C-pseudoconvex kabulü yer değiştirirse kanıt aynı olur.

Uyarı 3.2.10. *$v^0 \in C_>$ ve f ve g fonksiyonlarının aynı η 'a göre x^0'da C-invex olma şartı ile f'nin x^0 'da C-pseudoconvex ve $\lambda^0 g$ 'nin x^0'da quasiconvexlik kabulü yer değiştirilirse, aynı sonuç elde edilir.*

Gerçekten, $\forall x \in S$ için $f(x) - f(x^0) - Jf(x^0)\eta(x - x^0) \in C$ olduğundan

$$\begin{aligned} v^0[(f(x) - f(x^0))] &\geqq v^0 Jf(x^0)\eta(x, x^0) = -\lambda^0 Jg(x^0)\eta(x, x^0) \\ &\geqq -\lambda^0 g(x) + \lambda^0 g(x^0) \\ &= -\lambda^0 g(x) \\ &\geqq 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda, x^0 noktası, $v^0 f$ skaler fonksiyonu için minimal noktadır.

Teorem 3.2.11. *$f, g : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonları verilsin. $x^0 \in S$, $(V.P)$'nun Kuhn-Tucker açısından has etkin çözümü ise*

$$\begin{cases} v^0 Jf(x^0) + \lambda^0 Jg(x^0) = 0 \\ \lambda^0 g(x^0) = 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

olan $v^0 \in int\mathbb{R}^p_+$ ve $\lambda^0 \in \mathbb{R}^m_+$ vardır.

Kanıt. Kuhn-Tucker has etkin çözüm tanımından, $Jf(x^0)y \leq 0$ ve $j \in I(x^0)$ olmak üzere $\nabla g_j(x^0)y \leqq 0$ olacak şekilde $y \in \mathbb{R}^n$ yoktur. Bu durumda, Tucker'in alternative teoreminden;
$\sum_{1}^{P} v_i^0 \nabla f_i(x^0) + \sum_{j \in I(x^0)} \lambda_j^0 \nabla g_j(x^0) = 0$ olacak şekilde $v^0 > 0$ ve $\lambda^0 \geqq 0$ vardır.
$j \notin I(x^0)$ için $\lambda_j^0 = 0$ alındığında istenen elde edilmiş olur. □

Uyarı 3.2.12. *Klinger anlamında has etkinlik ve Borwein anlamında yerel has etkinlik tanımları hariç, diğer tüm has etkinlik tanımları için Teorem3.2.11'in şartları yeterlidir.*

Teorem 3.2.13. *f ve g, x^0'da diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsun. $v^0 f$ ve $\lambda^0 g$ sırasıyla x^0 'da pseudocovex ve quasiconvex ve 3.5 koşulu geçerli olsun. Bu durumda $x^0 \in S$ 'nin (V.P)'nun bir Kuhn-Tucker has etkin çözümüdür.*

Kanıt. $f, g : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ olmak üzere f ve g, x^0'da diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsun. $v^0 f$ ve $\lambda^0 g$ sırasıyla x^0'da pseudocovex ve quasiconvex ve 3.5 koşulu geçerli olsun. $\lambda^0 g$ fonksiyonunun quasiconvexliğinden ve $\lambda^0 g(x) \leqq 0 = \lambda^0 g(x^0)$ olduğundan $\forall x \in S$ için $\lambda^0 Jg(x^0)(x - x^0) \leqq 0$ elde edilir. $(\underbrace{Jf(x^0)}_{pozitif} + \underbrace{Jg(x^0)}_{negatif} = 0)$

Bu durumda, $v^0 Jf(x^0)(x - x^0) \geqq 0$ ve $v^0 f$'nın pseudoconvex'liğinden $v^0 f(x) \geqq v^0 f(x^0)$ olur. $\square$

Uyarı 3.2.14. *$v^0 f$ 'nin pseudoconvex'liği ve $\lambda^0 g$ 'nın quasiconvex'liği yerine f_i ve $g_j (i = 1, ..., p \quad j = 1, ..., m)$ 'nin aynı η 'ya göre invexliği kabul edilirse, Teorem 3.2.13'nin aynı sonucunu elde ederiz.*

Örnek 3.2.15. *$f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f = (f_1, f_2)$, $f_1(x, y, z) = y - z$ ve $f_2(x, y, z) = x + y + y^2 + z^2$*
$g_1(x, y, z) = -x - y + z \leqq 0$ ve $g_2(x, y, z) = -y + z^4 \leqq 0$ olsun. (0,0,0) noktası, $v^0 = \lambda^0 = (1, 1)$ için Teorem 3.2.11'deki 3.5 şartı sağlanır. Bu yüzden, (0,0,0) bir Kuhn-Tucker has etkin nokta olabilir. Bu tahmin;

$$v^0 f(x, y, z) = f_1(x, y, z) + f_2(x, y, z) = x + 2y - z + y^2 + z^2$$
$$\lambda^0 g(x, y, z) = g_1(x, y, z) + g_2(x, y, z) = -x + 2y + z^4$$

fonksiyonlarının konveks fonksiyonlar olmasından dolayı Teorem 3.2.13'den (0,0,0) bir Kuhn-Tucker has etkin noktadır.
$z^0 \in E(Z)$ olduğunda, $v^0 \geqq 0$ elde ederiz. $z^0 \in PE(Z)_{KT}$ olduğunda ise $v^0 > 0$ olur.

Teorem 3.2.16'da $z^0 \in WE(Z)$ iken $v^0 \neq 0$ elde etmek için, bir sınırlama şartı eklenmesi gerektiği ifade edilmektedir.

Teorem 3.2.16. *$(V.P)$'nin $x^0 \in S$ noktasında Kuhn-Tucker kısıt koşulu (constraint qualification) sağlansın. Bu durumda, x^0, $(V.P)$ için zayıf yerel mini-*

mal nokta ise

$$\left.\begin{array}{c} v^0 Jf(x^0) + \lambda^0 Jg(x^0) = 0 \\ \lambda^0 g(x^0) = 0 \\ v^0 \geq 0 \\ \lambda^0 \geqq 0 \end{array}\right\} \textit{sağlayan } v^0 \in \mathbb{R}^P \textit{ve } \lambda^0 \in \mathbb{R}^m \textit{olmasıdır.} \tag{3.6}$$

Kanıt. x^0 , $(V.P)$'nun zayıf yerel minimum noktası olsun.
$i = 1, ..., p$ ve $j \in I(x^0)$ olmak üzere $\nabla f_i(x^0)y < 0$ ve $g_j(x^0)y \leqq 0$ sağlayan $y \in \mathbb{R}^n$ olmadığını kanıtlayalım. Bu durumda, Motzkin'in alternative teoreminden istenilen çıkacaktır.
Varsayalım ki 3.6 eşitsizliklerini sağlayan bir y vektörü var olsun. Kuhn-Tucker'ın kısıt koşulundan herhangi bir $t \in [0, \bar{t}]$ ve $\alpha > 0$ için $w'(0) = \alpha y$ ve $w(0) = x^0$, $g(w(t)) \leqq 0$ olacak şekilde bir $w \in C^1[0, \bar{t}]$ fonksiyonu vardır.

$$f_i(w(t)) = f_i(x^0) + t\nabla f_i(x^0)\alpha y + o(t)$$

$\forall i = 1, ..., p$ için $\nabla f_i(x^0)y < 0$ olduğundan

$$\frac{f_i(w(t)) - f_i(x^0)}{\alpha t} = \underbrace{\nabla f_i(x^0)y} + \frac{o(t)}{\alpha t} < 0$$

elde edilir. $t \to 0$ için limit alırsak $f_i(w(t)) \leq f_i(x_0)$ olur. Bu ise x^0 'ın yerel zayıf optimal oluşu ile çelişir. □

Teorem 3.2.17. *$f, g : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonları verilsin. f ve g fonksiyonları aynı η'ya göre x^0 noktasında $\mathbb{R}^P_+$-invex ve Teorem 3.2.16'daki 3.6 koşulları sağlanıyor ise x^0 noktası zayıf minimaldir.*

Kanıt. Varsayalım ki $f(x) - f(x^0) \in -int\mathbb{R}^p_+$ sağlayan bir x uygun çözümü var olsun. Bu durumda
$v^0[f(x) - f(x^0)] < 0$ olur. Kanıt, 3.2.10'deki gibi devam eder.

□

($g_j(x) \leqq 0$ eşitsizlik sınırlaması) Bilinen vektör problemleri kısıt problemleri göz önüne alındığında benzer yapıya sahiptir. Genelde, problemimizin bir çözümü en az bir ν ve λ için $\nu Jf(x) + \lambda Jg(x) = 0$ ya da kısaca $JL(x) = 0$,

$L = vf + \lambda g$ eşitliğini sağlar. Bazı ek konvekslik şartları kabul edilerek, gerekli koşullar aynı zamanda yeterli koşullar haline dönüştürülebilir. Aslında, $(V.P)$ çözümleri, $JL(x) = 0$ eşitliğinin çözüm kümesi tarafından kapsanır ki bu da bölümün bir sonucu olarak, bazı duallik teoremlerini tanıtmada yararlı olur.
Vektör değerli duallik teorisi genel olarak geliştirilmiştir. Çeşitli yaklaşımlar tanıtılmış ve bir çok duallik problemleri çözümleri ile ilgili ilave bilgiler bulmak veya orjinal problemleri çözmek için incelenmiştir. Bu yaklaşımlar, asıl problem ile dual problem arasında bir eşitsizlik verir ve kuvvetli duallik teoremi bunların eşitliğini garanti eden şartları verir. Bu bölümde multiobjective programlama konusunda genel duallik teorisini incelemeyeceğiz. Primal problem gibi aynı objective fonksiyonunun avantajlarına sahip, Mond-Weir vektör duality asıl problem ile dual problemin objective fonksiyonun aynı olma avantajına sahiptir ki; bu duallik şüphesiz genelleştirilmiş konveksliğin bazı durumlarına başvurur. Dolayısıyla bu bölümde, primal problem $(V.P)$'ni bir dual probleme benzeteceğiz.
f ve g differansiyellenebilir fonksiyonlar ve $S' = \{(u, v, \lambda) : vJf(u) + \lambda Jg(u) = 0\ ;\ v \in C_{\geqq} \backslash \{0\}\ ,\ \lambda \in \mathbb{R}^m_+\ ,\ \lambda g(u) \geqq 0\}$ olmak üzere $(V.P)$'nin dual problemi

$$\max_{(u,v,\lambda) \in S'} f(u) \qquad (D.V.P)$$

olarak tanımlanır.

Teorem 3.2.18. *(Zayıf Duallik Teoremi)*
$f, g : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonları verilsin. x, $(V.P)$'nin ve (u, v, λ), $(D.V.P)$'nin herhangi uygun çözümleri olsunlar. vf fonksiyonu x noktasında pseudoconvex ve λg, u'da quasiconvex ise bu durumda $f(x) - f(u) \notin -intC$ olur.

Kanıt. x ve (u, v, λ) sırasıyla $(V.P)$ ve $(D.V.P)$ için uygun noktalar olduğundan, $\lambda g(x) - \lambda g(u) \leqq 0$ elde edilir. λg, u'da quasiconvex olduğundan

$$\nabla \lambda g(u)(x - u) = \lambda Jg(u)(x - u) \leqq 0$$

buradan

$$vJf(u)(x - u) = \nabla vf(u)(x - u) \geqq 0$$

elde edilir.

vf fonksiyonu pseudoconvex olduğundan $v(f(x)-f(u)) \geqq 0$ olur. $v \in C_{\geqq}$, $v \neq 0$ olduğundan, $f(x) - f(u) \notin -intC$ 'dir. □

Uyarı 3.2.19. *Eğer f, u'da C-convex ve $\forall j = 1, ..., m$ için g_j, u'da convex ise önceki teoremin genelleştirilmiş konvekslik kabulleri sağlanır ve $\forall j = 1, ..., m$ için g_j'ler u noktasında aynı η fonksiyonuna bağlı olarak sırasıyla C-invex ve invex ya da $vf + \lambda g$ Langrangion fonksiyonu u'da invex (ya da pseudoconvex) ise Teorem 3.2.18 ile aynı sonuç elde edilir.*

Güçlü duallik teoremleri adı verilen teoremler şu şekilde ifade edilir:

x^0, bazı optimallik notasyonlarını sağlayan $(V.P)$ için uygun çözüm ise bu durumda öyle v^0 ve λ^0 vardır ki; (x^0, v^0, λ^0), $(D.V.P)$ için uygun bir çözümdür. Ek olarak, genelleştirilmiş konvekslik kabulleri altında (x^0, v^0, λ^0), $(D.V.P)$ için bazı optimallik şartlarını sağlar.

Teorem 3.2.20. *(Güçlü Duallik Teoremi)*

$f, g : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonları verilsin. $x^0 \in WE(S)$ ise $(v^0, \lambda^0) \neq 0$ ve (x^0, v^0, λ^0), $(D.V.P)$ için uygun çözüm olacak şekilde $v^0 \in C_{\geqq}$ ve $\lambda^0 \in \mathbb{R}^m_+$ vardır. Aynı zamanda $v^0 f$ ve $\lambda^0 g$ sırasıyla pseudoconvex ve quasiconvex fonksiyonlar ise (x^0, v^0, λ^0) , $(D.V.P)$ için bir zayıf etkin noktadır ve asıl ve dual problemin optimal değerleri eşittir.

Kanıt. Teorem 3.2.7'dan teoremin ilk kısmını elde ederiz. Varsayalım ki x^0, (V.P)'nin bir zayıf etkin çözümü olsun. Bu durumda Teorem 3.2.7'dan (v^0, λ^0)–$\neq 0$, $v^0 Jf(x^0) + \lambda^0 Jg(x^0) = 0$ ve $\lambda^0 g(x^0) = 0$ olacak şekilde $v^0 \in C_{\geqq}$ ve $\lambda^0 \in \mathbb{R}^m_+$ vardır. Dual problemin uygun çözüm kümesinin tanımından (x^0, v^0, λ^0)'ın bir uygun çözüm olduğu elde edilir. $v^0 f$ ve $\lambda^0 g$ sırasıyla pseudoconvex ve quasiconvex olsunlar. Varsayalım ki (x^0, v^0, λ^0) $(D.V.P)$ için zayıf etkin olmasın. Bu durumda

$$f(x^0) - f(u) \in -intC$$

olacak şekilde $(u, v, \lambda) \in S'$ vardır. Bu ise Zayıf Duallik Teoremi ile çelişir. O halde (x^0, v^0, λ^0) $(D.V.P)$'nin zayıf minimal elemanıdır. Asıl ve dual problemlerin optimal değerlerinin eşit olduğu açıktır. □

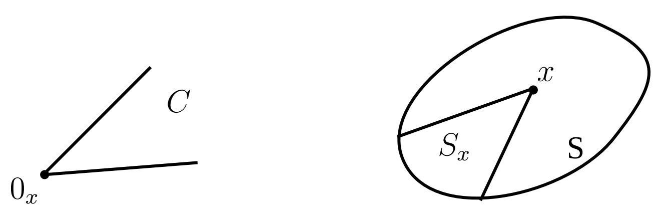
4 $f : X \to Y$ FONKSİYONUNUN OPTİMALLİK KOŞULLARI İÇİN VARLIK TEOREMLERİ

Bu bölümde, kısmi sıralı bir lineer uzayının bir alt kümesinin en az bir optimal elemanının varlığını garanti eden varsayımlar ile çalışacağız. Bu incelemeler minimallik, has minimallik ve zayıf minimallik kavramları için gerekli olacaktır. Ancak optimallik notasyonu kısıtlayıcı olan kuvvetli minimal elemanlar üzerine bu çalışma yapılmayacaktır.

Zorn Lemma, bir kümenin minimal bir elemanının varlığı için yeterli şartın sağlandığı en önemli sonuçtur. Zorn Lemma yardımı ile bazı özel varlık sonuçları ve kısmi sıralı sublineer fonksiyoneller kümesinin minimal elemana sahip olduğu kanıtlanmıştır. Bu düşünce Hahn Banach teoreminin kanıtında kullanılmıştır.

Bir kümenin zayıf kabuller altında varlık sonuçlarını elde edebilmek için, bazı tanımlar vereceğiz.

Tanım 4.0.21. *C sıralama konisi ile kısmi sıralı X lineer uzayının boştan farklı bir S alt kümesini alalım. En az bir $x \in X$ için $S_x = (\{x\} - C) \cap S$ kümesi boş kümeden farklı ise S_x kümesine, S 'nin bir* ***kesiti(section)*** *denir.*



Şekil 4.38. S kümesinin bir S_x kesiti

Yardımcı Teorem 4.0.22. *S, C sıralama konisi ile kısmi sıralı X lineer uzayının boş olmayan bir alt kümesi olsun.*

(a) *S kümesinin bir kesitinin her minimal elemanı, S kümesinin de minimal elemanıdır.*

(b) *Eğer $cor(C) \neq \emptyset$ ise S kümesinin bir kesitinin her zayıf minimal elemanı, S kümesinin de zayıf minimal elemanıdır.*

Has minimallik kavramı için benzer durum genelde doğru değildir.

Tanım 4.0.23. *X gerçel topolojik uzayı, C konveks sıralama konisi ile kısmi sıralı olsun. Eğer C'nin her alttan sınıra sahip azalan ağı, infimumuna yakınsı– yor ise ($i \leq j \Rightarrow x_j \leq x_i$) C konisine **Daniell** denir.*
*X uzayının her sınırlı azalan ağı bir infimuma sahip ise X uzayına **sınırlı sıralı tamdır** denir.*

Teorem 4.0.24, Zorn Lemma'nın sonucu olan bir varlık teoremidir.

Teorem 4.0.24. *S, C kapalı sıralama konisi ile kısmi sıralı X topolojik lineer uzayının boş olmayan bir alt kümesi olsun. Bu durumda,*

(a) *S kümesi alttan sınırlı kapalı bir kesite sahip ve C sıralama konisi Daniell ise S kümesi en az bir minimal elemana sahiptir.*

(b) *S kümesi kapalı sınırlı bir kesite sahip, C sıralama konisi Daniell ve sınırlı sıralı tam ise S kümesi en az bir minimal elemana sahiptir.*

(c) *S kümesi kompakt bir kesite sahipse S'nin en az bir minimal elemanı vardır.*

Kanıt. En az bir $x \in X$ için S_x, S kümesinin uygun bir kesiti olsun. Eğer S_x kesitinin alttan tümevarımsal sınırlı olduğunu gösterirsek Zorn Lemma'dan S_x'in en az bir minimal elemana sahip olduğunu ve Yardımcı Teorem 4.0.22(a)'dan bu elemanın S kümesinin de minimal elemanı olduğunu söyleyebiliriz.
$\{s_i\}_{i\in I}$, S_x kesitinin keyfi bir tam sıralı (zincir) alt kümesi ve $\mathfrak{F}$, kısmi sıralı olan I'nın iç içe geçmiş sonlu alt kümelerinin ailesi olsun. Bu durumda, her $F \in \mathfrak{F}$ minimumu,

$$x_F := \min\{s_i : i \in F\}$$

vardır ve S_x'e aittir. Sonuç olarak, $(x_F)_{F\in\mathfrak{F}}$, S_x içinde azalan bir ağdır.

(a) S_x alttan sınıra sahip olduğundan, $(x_F)_{F\in\mathfrak{F}}$ bir infimuma sahiptir. S_x kapalı ve C Daniell olduğundan, $(x_F)_{F\in\mathfrak{F}}$, S_x'e ait olan infimuma yakınsar. Bu ise S_x kesitinin alttan tümevarımsal sıralı olduğunu gösterir.

(b) S_x sınırlı ve C sınırlı sıralı tam olduğundan, $(x_F)_{F\in\mathfrak{F}}$ ağı bir infimuma sahiptir. C sıralama konisi Daniell'dır ve dolayısıyla $(x_F)_{F\in\mathfrak{F}}$, infimumuna yakınsar. S_x kapalı olduğundan bu infimum S_x'e aittir. Bu yüzden S_x alttan tümevarımsal sıralıdır.

(c) S_x kompakt olsun ve $\{s_i\}_{i\in I}$ verilsin. Buna bağlı $(\{s_i\}-C)\cap S_x = S_{s_i}$ olmak üzere S_{s_i} sonlu arakesit özelliğine sahip kümeler ailesini alalım. S_x kompakt olduğundan S_{s_i} $(i \in I\ )$ alt kümeler ailesi, boştan farklı kesişime sahiptir.

$$\hat{x} \in \bigcap_{i\in I} S_{s_i} = \bigcap_{i\in I} (\{s_i\}-C)\cap S_x$$

elemanı vardır. Bu yüzden $\hat{x}$, $\{s_i\}_{i\in I}$ alt kümesinin bir alt sınırıdır ve S_x'e aittir. Bu yüzden S_x alttan tümevarımsal sıralıdır.

□

Teorem 4.0.25. *S, X gerçel yerel konveks uzayının boş olmayan bir alt kümesi olsun.*

(a) S zayıf kompakt ise X içindeki her kapalı konveks C konisi için S kümesi C'nin belirlediği kısmi sıralamaya göre en az bir minimal elemana sahiptir.

(b) Ek olarak, X quasi-tam olsun. S sınırlı, zayıf kapalı ve X içindeki her kapalı konveks C konisi için S kümesi C'nin belirlediği kısmi sıralamaya göre en az bir minimal elemana sahip ise S zayıf kompakttır.

Kanıt.

(a) Her kapalı konveks C konisi zayıf kapalı ve S zayıf kompakt olduğundan, Teorem 4.0.24(c)'den S kümesi C'nin belirlediği kısmi sıralamaya göre en az bir minimal elemana sahiptir.

(b) Açıktır ki 0_{X^*} fonksiyoneli, S kümesi üzerinde supremumunu alır. Bu yüzden keyfi bir $l \in X^*\backslash\{0_{X^*}\}$ sürekli lineer fonksiyonelini alalım ve $C := \{x \in X : l(x) \leq 0\}$ kapalı konveks konisini tanımlayalım.
$\bar{x} \in S$, C'nin belirlediği kısmi sıralamaya göre S'nin minimal elemanı olsun.

$$(\{\bar{x}\}-C)\cap S \subset \{\bar{x}\}+C \tag{4.7}$$

Bu yüzden,

$$\{\bar{x}\} - C = \{x \in X : l(x) \geq l(\bar{x})\}$$

ve

$$\{\bar{x}\} + C = \{x \in X : l(x) \leq l(\bar{x})\}$$

olduğundan 4.7 kapsamı $x \in S$ olmak üzere,

$$l(x) \geq l(\bar{x}) \Rightarrow l(x) = l(\bar{x})$$

ifadesine denktir. Bu ifadeyi $\forall x \in S$ için,

$$l(\bar{x}) \geq l(x)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu, l fonksiyonelinin, S üzerindeki supremumunu $\bar{x}$'de aldığını gösterir. James teoreminden, S kümesi zayıf kompakttır.

□

Teorem 4.0.25, bir küme üzerindeki zayıf kompaktlık kabulünün, minimal elemanların varlığında önemli bir rol oynadığını gösterir. Bu teorem, bir Banach uzayının kapalı birim yuvarına uygulanabilir.

Sonuç 4.0.26. *Gerçel bir Banach uzayının yansımalı (reflexive) olması için gerek ve yeter koşul kapalı konveks bir koninin belirlediği her kısmi sıralamaya göre, kapalı birim yuvarın en az bir minimal elemana sahip olmasıdır.*

Kanıt. Teoremin kanıtı, Teorem 4.0.25'in bir sonucudur. Gerçel bir Banach uzayının yansımalı olması için gerek ve yeter koşul kapalı birim yuvarın zayıf kompakt olmasıdır. Dolayısıyla Teorem 4.0.25'den kanıt tamamlanır. □

Tanım 4.0.27. $(X, \|.\|_X)$ *normlu uzayının boştan farklı bir* S *alt kümesini alalım. Eğer her* $x \in X$*,* S *kümesinden en az bir en iyi yaklaşıma sahip yani* $\forall x \in X$ *ve* $\forall s \in S$ *için*

$$\|x - \bar{s}\| \leq \|x - s\|$$

olacak şekilde bir $\bar{s} \in S$ *varsa* S *kümesine* ***proximinaldir*** *denir.*

Teorem 4.0.28. *Kabul edelim ki aşağıdaki (a) veya (b) kabullerinden biri sağlansın.*

(a) $S \neq \emptyset$, C pointed sıralama konisi ile kısmi sıralı $(X, \|.\|_X)$ normlu uzayının alt kümesi ve X, $(Y, \|.\|_Y)$ gerçel normlu uzayının topolojik dual uzayı olsun. Ayrıca, en az bir $x \in X$ için zayıf *-kapalı S_x kesiti verilsin.

(b) $S \neq \emptyset$, C pointed sıralama konisi ile kısmi sıralı $(X, \|.\|_X)$ yansımalı Banach uzayının alt kümesi olsun. Üstelik, en az bir $x \in X$ için zayıf-kapalı S_x kesiti verilsin.

Ek olarak S_x kesiti $\hat{x} \in X$ alttan sınırına sahip yani $S_x \subset \{\hat{x}\} + C$ ve $\|.\|_X$ normu C üzerinde kuvvetli monoton artan ise S kümesi en az bir minimal elemana sahiptir.

Kanıt. (a) kabulü sağlanıyor ise $(Y, \|.\|_Y)$ normlu uzayının, X dual uzayına ait boştan farklı her S_x zayıf *-kapalı kesiti proximinal olur.
(b) kabulü sağlanıyor ise gerçel yansımalı banach uzayının her zayıf alt kümesi proximinal olacağından S_x kesiti proximinaldir.
Bu durumda $\forall s \in S_x$ için,

$$\|\bar{x} - \hat{x}\|_x \leq \|s - \hat{x}\|_x$$

olan bir $\bar{x} \in S_x$ vardır. $\|.\|_X$ normu, C üzerinde kuvvetli monoton artan olduğundan $\bar{x}$, S_x kesitinin minimal elemanıdır. Sonuç olarak Yardımcı Teorem 4.0.22(a)'dan kanıt tamamlanır. □

Teorem 4.0.29. *Kapalı pointed sıralama konisi ile kısmi sıralı ayrılabilir norm–lu bir uzayın her zayıf kompakt alt kümesi en az bir has minimal elemana sahiptir.*

Kanıt. Krein-Rutman teoreminden, topolojik dual koninin quasi-içi boştan farklıdır. Quasi-içine ait her sürekli lineer fonksiyonel, zayıf kompakt bir küme üzerinde minimumunu alır. □

Teorem 4.0.30. *Kabul edelim ki aşağıdaki (a) veya (b) kabullerinden biri sağlansın.*

(a) $S \neq \emptyset$, boştan farklı cebirsel içe sahip pointed C sıralama konisi ile kısmi sıralı $(X, \|.\|_X)$ normlu uzayının alt kümesi ve X, $(Y, \|.\|_Y)$ gerçel normlu uzayının topolojik dual uzayı olsun. Bunnunla birlikte S zayıf *-kapalı olsun.

(b) $S \neq \emptyset$, boştan farklı cebirsel içe sahip pointed C sıralama konisi ile kısmi sıralı $(X, \|.\|_X)$ yansımalı Banach uzayının alt kümesi olsun ve bu S kümesi zayıf kapalı olsun.

Ek olarak, $S \subset \{\hat{x}\} + cor(C)$ sağlayan $\hat{x} \in X$ varsa ve $\|.\|_X$ normu C üzerinde kuvvetli monoton artan ise S kümesi en az bir has minimal elemana sahiptir.

Kanıt. Teorem 4.0.28'nin kanıtına benzer şekilde ispat tamamlanır. □

Örnek 4.0.31. *$C_X \subset C_{X^*}$ olacak şekilde boştan farklı cebirsel içe sahip C_X sıralama konisi ile kısmi sıralı $(X, <.,.>)$ Hilbert Uzayının boştan farklı bir S alt kümesini alalım.*
Eğer S zayıf kapalı ve $S \subset \{\hat{x}\} + cor(C_X)$ sağlayan $\hat{x} \in X$ varsa, S kümesi en az bir has minimal elemana sahiptir.

Her minimal eleman bir has minimal olacağından, boştan farklı cebirsel içe sahip ve X'den farklı $C \subset X$ sıralama konisinin olduğu kabul edilirse, minimal elemanlarla ilgili varlık teoremleri, zayıf minimal elemanlara kolaylıkla genişletilebilir.

Teorem 4.0.32. *S, cebirsel içi boştan farklı $C_X \neq X$ olacak şekilde kapalı sıralama konisi ile kısmi sıralı X yerel konveks uzayının boş kümeden farklı bir alt kümesini olsun. Eğer S kümesi, zayıf kompakt kesite sahipse, S kümesi en az bir zayıf minimal elemana sahiptir.*

Kanıt. C_X sıralama konisi kapalı ve X uzayından farklı olduğundan,(ayırma teoreminden) en az bir $l \in C_{X^*} \backslash \{0_{X^*}\}$ sürekli lineer fonksiyoneli vardır. Bu fonksiyonel, S kümesinin bir zayıf kompakt kesiti üzerinde infimumunu alır.(bu infimum, kesitin zayıf minimal elemanıdır.) Yardımcı Teorem 4.0.22(b) 'den kanıt tamamlanır. □

Teorem 4.0.33. *Kabul edelim ki aşağıdaki (a) veya (b) kabullerinden biri sağlansın.*

(a) $S \neq \emptyset$, boştan farklı cebirsel içe sahip C sıralama konisi ile kısmi sıralı $(X, \|.\|_X)$ normlu uzayının alt kümesi ve X, $(Y, \|.\|_Y)$ gerçel normlu uzayının topolojik dual uzayı olsun. Ayrıca, en az bir $x \in X$ için S_x zayıf *-kapalı kesiti verilsin.

(b) $S \neq \emptyset$, boştan farklı cebirsel içe sahip C sıralama konisi ile kısmi sıralı $(X, \|.\|_X)$ yansımalı banach uzayının alt kümesi olsun. Ayrıca, en az bir $x \in X$ için S_x zayıf- kapalı kesiti verilsin.

Ek olarak, S_x kesiti $\hat{x} \in X$ alttan sınırına sahipse yani $S_x \subset \{\hat{x}\} + C$ ve $\|.\|_X$ normu C üzerinde kesin monoton artan ise, S kümesi en az bir zayıf minimal elemana sahiptir.

Kanıt. Teorem 4.0.28'nin kanıtına benzer şekilde kanıtlanır. □

4.1 Gerekli Şartlar

Tanım 4.1.1. *T, C_X sıralama konisi ile kısmi sıralı bir lineer uzayın alt kümesi, $S \neq \emptyset$, T kümesinin alt kümesi olsun.*

1. *$f : T \to \mathbb{R}$ dönüşümü, $\forall \overline{x} \in S$ için $x \in (\{\overline{x}\} - C) \cap S$ iken $f(x) \leq f(\overline{x})$ oluyorsa, f dönüşümüne S üzerinde* ***monoton artandır*** *denir.*

2. *$f : T \to \mathbb{R}$ dönüşümü, $\forall \overline{x} \in S$ için, $x \neq \overline{x}$ ve $x \in (\{\overline{x}\} - C) \cap S$ iken $f(x) < f(\overline{x})$ oluyorsa f dönüşümüne S üzerinde* ***strongly (kuvvetli) monoton artandır*** *denir.*

3. *$f : T \to \mathbb{R}$ dönüşümü, $\forall \overline{x} \in S$ için, $cor(C) \neq \emptyset$ ve $x \in (\{\overline{x}\} - cor(C)) \cap S$ iken $f(x) < f(\overline{x})$ oluyorsa f dönüşümüne S üzerinde* ***strictly (kesin) monoton artandır*** *denir.*

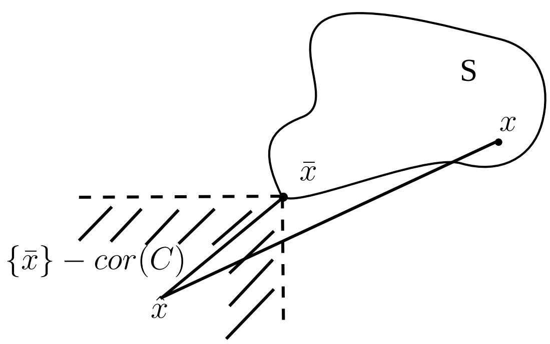
Örnek 4.1.2. *S kümesi, C_X sıralama konisi ile kısmi sıralı X lineer uzayının herhangi bir alt kümesi olsun.*

$C_{X'} = \left\{ l \in X' : \forall c \in C_X \text{ iken } l(c) \geq 0 \right\}$ *kümesindeki her lineer fonksiyonel, S üzerinde monoton artandır.*

$C^{\sharp}_{X'} = \left\{ l \in X' : \forall c \in C_X - \{0\} \text{ ikenl } (c) > 0 \right\}$ *kümesindeki her lineer fonksiyonel, S üzerinde kuvvetli monoton artandır.*

$cor(C_X) \neq \emptyset$ ise $C_{X'} - \{0_{X'}\}$ kümesindeki her lineer fonksiyonel S üzerinde kesin monoton artandır.

Teorem 4.1.3. *$cor(C_X) \neq \emptyset$ olacak şekilde cebirsel kapalı C_X sıralama konisi ile kısmi sıralı X lineer uzayının $S \neq \emptyset$ bir alt kümesini alalım.*
Eğer $\overline{x} \in S$, S kümesinin bir minimal elemanı ise $\forall \widehat{x} \in \{\overline{x}\} - cor(C_X)$ için C_X üzerinde monoton artan ve $\forall x \in S - \{\overline{x}\}$ için,
$1 = \| \overline{x} - \widehat{x} \|_{\widehat{x}} < \| x - \widehat{x} \|_{\widehat{x}}$ olacak şekilde $\| \,.\, \|_{\widehat{x}}$ normu vardır.



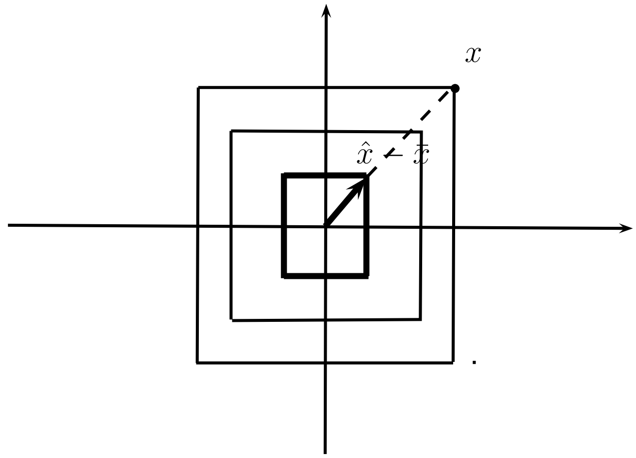
Şekil 4.39. Teorem 4.1.3'ün geometrik yorumu

Kanıt. $\bar{x}$, S kümesinin minimal elemanı ve $\hat{x} \in \{\bar{x}\} - cor(C_X)$ olsun. $\forall x \in X$ için,

$$\|x\| = \inf_{\lambda > 0} \{\lambda : \frac{1}{\lambda} x \in [\hat{x} - \bar{x}, \bar{x} - \hat{x}]\}$$

$$\|x\| = \inf_{\lambda > 0} \{\lambda : x \in \lambda[\hat{x} - \bar{x}, \bar{x} - \hat{x}]\}$$

$[\hat{x} - \bar{x}, \bar{x} - \hat{x}]$ sıralı aralığı, bu norma göre kapalı biri yuvarı verir.



Şekil 4.40. $\|x\| = \inf\limits_{\lambda>0}\{\lambda : x \in \lambda[\hat{x}-\bar{x}, \bar{x}-\hat{x}]\}$ normunun geometrik yorumu

$\bar{x}$, S kümesinin minimal elemanı olduğundan,

$$[\hat{x}-\bar{x}, \bar{x}-\hat{x}] \cap (S - \{\bar{x}\}) = \{\bar{x}-\hat{x}\}$$

olur. Bu durumda, $\forall x \in S \backslash \{\bar{x}\}$ için,

$$1 = \|\bar{x}-\hat{x}\| < \|x-\hat{x}\|$$

olur. C_X üzerinde monoton artanlığı göstermek için bir $c \in C_X$ ve $x \in [0_X, c]$ alalım. Bu durumda, $\|x\| \leq \|c\|$ olur.

$\square$

Yardımcı Teorem 4.1.4. *$cor(C) \neq \emptyset$, C cebirsel kapalı ve pointed ise X üzerindeki $\|.\|$ normu, $\forall y \in C$ için*

$$x \in [0_x, y] \Rightarrow \|x\| \leq \|y\|$$

eşitsizliğini sağlar.

Teorem 4.1.5. *$S \neq \emptyset$ kümesi, aşikar olmayan pointed C_X sıralama konisi ile kısmi sıralı X lineer uzayının bir alt kümesi olsun.*
$S + C_X$ konveks ve $cor(S + C_X) \neq \emptyset$ ise $\forall \bar{x} \in S$ minimal elemanı ve $\forall x \in S$ için $l(\bar{x}) \leq l(x)$ sağlayan $l \in C_{X'} \backslash \{0_{X'}\}$ vardır.

Kanıt. $\bar{x} \in S$ minimal eleman ise, $\bar{x}$, $S+C_X$ kümesinin de minimal elemanıdır. Bu durumda,

$$(\{\bar{x}\} - C_X) \cap (S + C_X) = \{\bar{x}\}$$

olur. $\{\bar{x}\} - C_X$ ve $S + C_X$ konveks, $cor(S + C_X) \neq \emptyset$ ve $\bar{x} \notin cor(S + C_X)$ olduğundan, ayırma teoremi yardımıyla bir $l \in X^{'}\backslash\{0\}$ lineer fonksiyoneli ve bir $\alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in S$, $\forall c_1, c_2 \in C_X$ için

$$l(\bar{x} - c_1) \leq \alpha \leq l(x + c_2)$$

olacak şekilde vardır. C_X koni olduğundan $l \in C_{X'}\backslash\{0\}$ olur. $c_1, c_2 = 0_X$ alırsak, $\forall x \in S$ için $l(\bar{x}) \leq l(x)$ elde ederiz.

□

Teorem 4.1.5'nin sonucu şu şekilde yorumlanabilir:
Uygun şartlar altında, her $\bar{x}$ minimal elemanı için $\bar{x}$, $\min\limits_{x \in S} l(x)$ skaler optimizasyon probleminin bir minimal çözümü olacak şekilde $l \in C_{X'}\backslash\{0_{X'}\}$ lineer dönüşümü vardır.

Yardımcı Teorem 4.1.6. *$\forall x \in C_X\backslash\{0_X\}$ ve $\forall l \in X^*\backslash\{0_{X^*}\}$ için $0 < l(x)$ olur.*

Kanıt. Bir $x \in C_X\backslash\{0_X\}$ alalım. B, C_X konisinin bir tabanı olsun. B taban olduğundan $0_X \notin B$ olur. Ayırma teoreminden,

$\forall b \in B$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere $0 < \alpha \leq l(b)$ sağlayan bir $l \in X^*\backslash\{0_{X^*}\}$ vardır. Her $x \in C_X\backslash\{0_X\}$ elemanı $\lambda > 0$ ve $b \in B$ olmak üzere $x = \lambda.b$ şeklinde yazılabildiğinden $x \in C_X\backslash\{0_X\}$ için $0 < l(x)$ olur.

□

Teorem 4.1.5'deki konvekslik şartını kaldırarak, lineer fonksiyonellerle ilgili gerekli ve yeterli şartı aşağıdaki teoremle vermeye çalışalım.

Teorem 4.1.7. *Kapalı ve pointed C_X sıralama konisi ile kısmi sıralı yerel konveks X lineer uzayının boş kümeden farklı bir S alt kümesini alalım.*

$\bar{x}$ elemanının S kümesinin minimal elemanı olması için gerek ve yeterli koşul $\forall x \in S \backslash \{\bar{x}\}$ için $l(\bar{x}) < l(x)$ eşitsizliğini sağlayan $\exists l \in C_{X^*} \backslash \{0_{X^*}\}$ var olmasıdır.

Kanıt. ($\Rightarrow$) $\bar{x} \in S$ minimal eleman yani $(\{\bar{x}\} - C_X) \cap S = \{\bar{x}\}$ olsun. $\forall x \in S \backslash \{\bar{x}\}$ için,

$$x \notin \{\bar{x}\} - C_X \tag{4.8}$$

olur. C_X kapalı ve konveks olduğundan, $\{\bar{x}\} - C_X$ kümesi kapalı ve konvekstir. Ayırma teoreminden 4.8 ifadesi,
$\forall \hat{x} \in \{\bar{x}\} - C_X$ için $l(\hat{x}) < \alpha \leq l(x)$ olacak şekilde $\exists l \in X^* \backslash \{0_{X^*}\}, \alpha \in \mathbb{R}$ vardır.
$0 \in C_X$ olduğundan $\bar{x} \in \{\bar{x}\} - C_X$ olur. Bu durumda, $\forall x \in S \backslash \{\bar{x}\}$ için,

$$l(\bar{x}) < l(x)$$

olur. $l(\hat{x}) < \alpha \leq l(x)$ ifadesinde $\exists c \in C_X$ için $\hat{x} = \bar{x} - c$ olacağından $l(\bar{x}) - l(c) < \alpha$'dır. C_X koni olduğundan bu eşitlik sadece $\forall c \in C_X$ için $l(c) \geq 0$ durumunda olabilir. Dolayısıyla $l \in C_{X^*} \backslash \{0_{X^*}\}$ elde edilir. □

Teorem 4.1.7 şu şekilde yorumlayabiliriz,
$\bar{x}$ elemanının, S kümesinin minimal elemanı olması için gerek ve yeterli koşul $C_{X^*} \backslash \{0_{X^*}\}$ konisinin, $\bar{x}$ elemanını S kümesindeki diğer elemanlardan ayırması–dır.
Teorem 4.1.7 tam olarak bir skalerizasyon sonucu değildir. Şimdi, Teorem 4.1.7'dekine benzer, kuvvetli minimal elemanlar için bir skalerizasyon sonucu elde etmeye çalışacağız.

Teorem 4.1.8. *Kapalı C_X sıralama konisi ile kısmi sıralı yerel konveks X lineer uzayının boş kümeden farklı bir S alt kümesini alalım. $\bar{x}$ elemanının S kümesinin kuvvetli minimal elemanı olması için gerek ve yeter koşul $\forall l \in C_{X^*}$ ve $\forall x \in S$ için $l(\bar{x}) \leq l(x)$ olmasıdır.*

Kanıt. ($\Rightarrow$) $\bar{x} \in S$, S kümesinin minimal elemanı olsun.

$$S \subset \{\bar{x}\} + C_X \tag{4.9}$$

C_X kapalı konveks koni ve X yerel konveks olduğundan

$$C_X = \{x \in X : l(x) \geq 0, \forall l \in C_{X^*}\}$$

yazılabilir. Dolayısıyla, 4.9 kapsamı,

$$S - \{\bar{x}\} \subset \{x \in X : l(x) \geq 0, \forall l \in C_{X^*}\}$$

olacağından, $\forall x \in S$ ve $\forall l \in C_{X^*}$ için $x - \bar{x} \in S - \{\bar{x}\}$ iken,

$$l(x - \bar{x}) \geq 0$$

$$l(x) - l(\bar{x}) \geq 0$$

$$l(\bar{x}) \leq l(x)$$

bulunur.

($\Leftarrow$) $\forall x \in S$ için $l(\bar{x}) \leq l(x)$ olacak şekilde $l \in C_{X^*}$ var olsun, ancak $\bar{x} \in S$ kuvvetli minimal eleman olmasın. (yani $S \not\subset \{\bar{x}\} + C_X$). Bu durumda,
$\tilde{x} \notin \{\bar{x}\} + C_X$ yani $\tilde{x} - \{\bar{x}\} \notin C_X$ olan $\exists \tilde{x} \in S$ vardır.
$C_X = \{x \in X : l(x) \geq 0, \forall l \in C_{X^*}\}$ ve $\tilde{x} - \{\bar{x}\} \notin C_X$ olduğundan ;
$l(\tilde{x} - \bar{x}) < 0$ yani $l(\tilde{x}) < l(\bar{x})$ olur. Bu ifade, $\tilde{x} \in S$ olmak üzere,
$\forall x \in S$ için $l(\bar{x}) \leq l(x)$ kabulü ile çelişir. $\square$

Dikkat edilirse, Teorem 4.1.8'da konvekslik kabulüne ihtiyaç duyulmamıştır. Bu yüzden, kuvvetli bir minimal eleman, skaler optimizasyon probleminin herhangi bir sınıfı için bir minimal çözümdür. Bu ifade, optimallik fikri için oldukça güçlüdür.

Teorem 4.1.9. *Zayıf kompakt tabana sahip C_X sıralama konisi ile kısmi sıralı $(X, \|.\|_X)$ normlu uzayının boştan farklı bir S alt kümesini alalım. Bir $\bar{x} \in S$ için,*

$$cone(T(S + C_X, \bar{x}) \cup (S - \{\bar{x}\}))$$

zayıf kapalı olsun. Eğer, $\bar{x}$, S kümesinin has minimal elemanı ise $\forall \hat{x} \in \{\bar{x}\} - C_X$, $\hat{x} \neq \bar{x}$ için X üzerinde sürekli, C_X üzerinde kuvvetli monoton artan ve $\forall x \in S \backslash \{\bar{x}\}$ için,

$$1 = \|\bar{x} - \hat{x}\| \leq \|x - \hat{x}\|$$

olacak şekilde bir $\|.\|$ normu vardır.

Kanıt. Bu teoremin kanıtı dört bölümden oluşmaktadır.

1. Bölüm : $-C_X$'in tabanı ile $C := cone(T(S+C_X, \bar{x}) \cup (S - \{\bar{x}\}))$ arasında bir $\varepsilon > 0$ uzaklığı olduğu gösterilecektir.

2. Bölüm : ε uzaklığı kullanılarak C_X'i kapsayan daha geniş kapalı, konveks, pointed, $int(\hat{C}) \neq \emptyset$ ve $(-\hat{C}) \cap C = \{0_X\}$ olan bir $\hat{C}$ konisi oluşturulacaktır.

3. Bölüm : Uygun bir sıralı ile bahsedilen norm Minkowski Fonksiyoneli yardımıyla oluşturulacaktır.

4. Bölüm : Oluşturulan normun özellikleri incelenecektir.

1. Bölüm : B , C_X sıralama konisinin zayıf kompakt tabanı ve $C := cone\,(T(S + C_X, \bar{x}) \cup (S - \{\bar{x}\}))$ olsun. B zayıf kompakt ve $\forall x \in C$ için $\|x - .\|_x : X \to \mathbb{R}$ zayıf alttan yarı sürekli olduğundan

$$\inf_{y \in -B} \|x - y\|_x$$

gerçel değerli optimizasyon probleminin bir çözümü vardır. Yani, $\forall x \in C$ için, bir $y(x) \in -B$, her $y \in -B$ için

$$\|x - y(x)\|_x \leq \|x - y\|_x$$

olacak şekilde vardır.

Şimdi

$$\varepsilon := \inf_{x \in C} \|x - y(x)\|_x$$

olarak tanımlayalım ve $\varepsilon > 0$ olduğunu gösterelim.

Eğer $\varepsilon = 0$ olsaydı $i \in I$ ve $x_i \in C$ için,

$$(\|x_i - y(x_i)\|_{i \in I}) \to 0 \tag{4.10}$$

olacak şekilde azalan bir ağ olurdu.

B zayıf kompakt ve C zayıf kapalı olduğundan $C+B$ zayıf kapalıdır.

$\forall i \in I$ için $x_i - y(x_i) \in C+B$ olduğundan

$$0 \in cl(C+B) = C+B \quad \text{olur.} \tag{4.11}$$

$\bar{x}$, S kümesinin minimal elemanı olduğundan, 0, $T(S+C_X,\bar{x})$ konisinin ve $(S-\{\bar{x}\})$ kümesinin minimal elemanıdır. Her iki minimallikten,

$$\{0\} = ((-C_X)\cap T(S+C_X,\bar{x})) \cup ((-C_X)\cap(S-\{\bar{x}\}))$$

$$= (-C_X)\cap(T(S+C_X,\bar{x})\cup(S-\{\bar{x}\}))$$

$$(-B)\cap C \subset (-C_X)\cap(T(S+C_X,\bar{x})\cup(S-\{\bar{x}\})) = \{0\}$$

ve $0 \notin B$ olduğundan $-B$ ve C kümelerinin ortak elemanı yoktur. Yani, $0 \notin C+B$ olur. Bu ifade 4.11 ile çelişir. Dolayısıyla $\varepsilon > 0$ olmalıdır.

2. Bölüm : Şimdi, $-B$ ve C kümelerini bir $\hat{C}$ konisi ile ayıracağız.

B zayıf kompakt olduğundan ve $0_X \notin B$ olduğundan,

$$0 < \delta := \inf_{y\in B} \|y\|_X$$

olarak seçersek, $\beta = min\left\{\frac{\varepsilon}{2},\frac{\delta}{2}\right\} > 0$ için $N(0,\beta)$, 0 'ın β yarıçaplı kapalı komşuluğu olmak üzere $U := B + N(0,\beta)$ tanımlarsak, U'nun kapalı konveks olduğu açıktır. Bu durumda, U 'nun ürettiği $\hat{C} := cl\,(cone(U))$ konisi konvekstir.

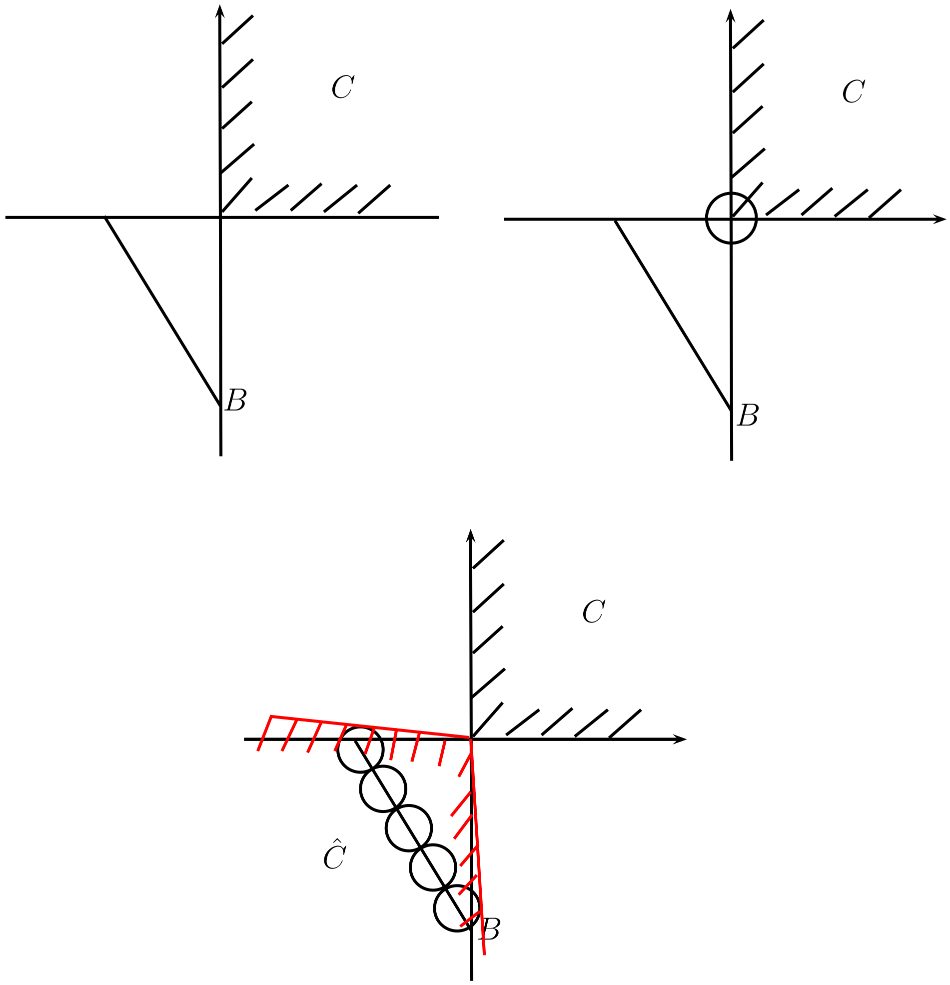
Tanımdan, $int(\hat{C}) \neq \emptyset$ olduğu açıktır.

Pointed olduğunu gösterelim :

$0 \neq \tilde{x} \in (-\hat{C})\cap\hat{C}$ olsun. $\tilde{x} \in \hat{C}$ olduğundan ve $x \in B+N(0,\beta)$ için $\tilde{x} = \lambda x$ olacak şekilde bir $\lambda > 0$ vardır. $-\tilde{x} = \lambda(-x) \in \hat{C}$ olacağından bir $\mu > 0$ için $-\mu x \in B + N(0_X,\beta)$ olur.

x ve $-\mu x$, $B+N(0_X,\beta$ konveks kümesinin elemanları olduğundan $\frac{\mu}{1+\mu} \in [0,1]$ için

$$0 = \frac{\mu}{1+\mu}x + \left(1-\frac{\mu}{1+\mu}\right)(-\mu x) \in B + N(0_X,\beta)$$



Şekil 4.41. Teorem 4.1.9'nin geometrik yorumu

olur. Fakat bu $\beta \leq \frac{\delta}{2}$ ile çelişir. Yani, $\hat{C}$ pointed olur.

3. Bölüm : Herhangi bir $\hat{x} \in \{\bar{x}\} - C_X$, $\hat{x} \neq \bar{x}$ olarak seçelim. ($\hat{C}$'nın belirlediği kısmi sıralamaya bağlı olarak),

$$[\hat{x} - \bar{x}, \bar{x} - \hat{x}] := \left(\{\hat{x} - \bar{x}\} + \hat{C}\right) \cap \left(\{\bar{x} - \hat{x}\} - \hat{C}\right)$$

şeklinde tanımlayalım. $\hat{C}$ ve U'nun tanımlanışından $\bar{x} - \hat{x} \in int(\hat{C})$ olur. Ek olarak, $\hat{C}$ kapalı ve pointed'tır.

Sonuç olarak,

$$\|x\| := \left\{\lambda : \frac{1}{\lambda} x \in [\hat{x} - \bar{x}, \bar{x} - \hat{x}]\right\}$$

olarak tanımlanan $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ Minkowski fonksiyoneli X üzerinde bir normdur ve

$$[\hat{x}-\bar{x},\bar{x}-\hat{x}] = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}\, olur. \tag{4.12}$$

4. Bölüm : $\|.\|$ normunun özelliklerini gösterelim:

$0_X \in int\,([\hat{x}-\bar{x},\bar{x}-\hat{x}])$ olduğundan, bir $\alpha > 0$ için,

$$N(0_X,\alpha) \subset [\hat{x}-\bar{x},\bar{x}-\hat{x}]$$

olur.
4.12 kapsamı ile $\forall x \in X$ için $\|x\| \leq \|x\|_X$ olur. Bu eşitsizlikle birlikte, $\forall x, y \in X$ için,

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x-y\| \leq \alpha.\|x-y\|_X$$

olur. Bu ise normun sürekliliğini gösterir.
$\|.\|$ normunun C_X üzerinde kuvvetli monoton artan olduğunu göstermek için, bu normun $\hat{C}$ üzerinde monoton artan olduğuna dikkat edelim.
$\bar{x} \in \hat{C}$,

$$x \in \left(\{\bar{x}\} - \hat{C}\right) \cap \hat{C} \Rightarrow \|x\| \leq \|\bar{x}\|$$

Her $\bar{x} \in C_X \subset \hat{C}$ ve $x \in (\{\bar{x}\} - (C_X \backslash \{0_X\})) \cap C_X$ için $C_X \backslash \{0_X\} \subset int(\hat{C})$ olduğundan $\|x\| \leq \|\bar{x}\|$ elde edilir. Dolayısıyla, $\|.\|$ normu C_X üzerinde güçlü monoton artandır.
Son olarak, $\bar{x}$'nin belirli bir yaklaşım probleminin tek çözümü olduğunu göstere– ceğiz. $\bar{x}-\hat{x}$ birim yuvarın kapanışında olduğundan $\|\bar{x}-\hat{x}\| = 1$ olur.
Ayrıca $(-\hat{C}) \cap C = \{0_X\}$ olduğunu gösterelim.
U'nun tanımlanışından ve her $x \in C\backslash\{0_X\}$ için $\beta \leq \frac{\varepsilon}{2}$ seçiminden dolayı, $x \notin cl(cone(U)) = \hat{C}$ olacak şekilde $N(x,\mu) \cap cone(U) = \emptyset$ olan bir $\mu > 0$ vardır. Bu yüzden,

$$(-\hat{C}) \cap (C\backslash\{0_X\}) = \emptyset$$

olur ve $(-\hat{C}) \cap C = \{0_X\}$ eşitliği çıkar. Üstelik bu eşitlik ve 4.12 eşitliğinden,

$$[\hat{x}-\bar{x},\bar{x}-\hat{x}] \cap (\{\bar{x}-\hat{x}\} + C) = \{\bar{x}-\hat{x}\}$$

ve $\forall x \in C \backslash \{0_X\}$ için,

$$1 = \|x - \bar{x}\| < \|\bar{x} - \hat{x} + x\|$$

'dır.

$S - \{\bar{x}\} \subset C$ olduğundan $\forall \in S \backslash \{\bar{x}\}$ için,

$$1 = \|\bar{x} - \hat{x}\| < \|x - \hat{x}\|$$

elde edilir. $\square$

Yardımcı Teorem 4.1.10. $(X, \|.\|_X)$ *aşikar olmayan, kapalı* C_X *sıralama konisi ile kısmi sıralı yansımalı bir Banach uzayı olsun.*

C_X *konisinin zayıf kompakt tabana sahip olması için gerek ve yeterli koşul* $\{x \in C_X : l(x) = 1\}$ *sınırlı olacak şekilde sürekli ve lineer bir* $l \in C^{\sharp}_{X^*}$ *dönüşümün var olmasıdır.*

Kanıt. Teoremin kanıtı için bazı yardımcı teoremlerden yararlanmamız gerekir. Bunlar,

Bir gerçel Banach uzayının yansımalı olması için gerek ve yeter koşul kapalı birim yuvarının zayıf kompakt olmasıdır.

B, C_X konisinin bir tabanı olması için gerek ve yeter koşul $B = \{x \in C_X : l(x) = 1\}$ olan bir $l \in C^{\sharp}_{X^*}$ olmasıdır.

Bir l lineer dönüşümünün, sublineer dönüşüm ile üstten sınırlı olduğunu bildiği–mizden l'nin sürekli ve sınırlı olduğunu buradan söyleyebiliriz. $\square$

Yardımcı Teorem 4.1.11. *S, C_X sıralama konisi ile kısmi sıralı* $(X, \|.\|_X)$ *normlu uzayının boş olmayan bir alt kümesi olsun.*

Eğer $S + C_X$ *bir* $\bar{x} \in S$*'de yıldız biçimli ve* $T(S + C_X, \bar{x})$ *zayıf kapalı ise*

$$\mathit{cone}\,(T(S + C_X, \bar{x}) \cup (S - \{\bar{x}\}))$$

zayıf kapalıdır.

Kanıt. $S + C_X$, $\bar{x} \in S$'de yıldız biçimli ve $T(S + C_X, \bar{x})$ zayıf kapalı olsun.

$0 \in C_X$ olduğundan $S - \{\bar{x}\} \subset S + C_X - \{\bar{x}\}$'dır.

$S + C_X$, $\bar{x}$'de yıldız biçimli olduğundan,

$$S - \{\bar{x}\} \subset S + C_X - \{\bar{x}\} \subset T(S + C_X, \bar{x})$$

olur ve dolayısıyla

$$cone\,(T(S + C_X, \bar{x}) \cup (S - \{\bar{x}\})) = cone\,(T(S + C_X, \bar{x})) = T(S + C_X, \bar{x})$$

elde edilir. $cone\,(T(S + C_X, \bar{x}) \cup (S - \{\bar{x}\}))$ zayıf kapalı olduğundan, $T(S + C_X, \bar{x})$ zayıf kapalıdır. □

Yardımcı Teorem 4.1.12. *S, C_X sıralama konisi ile kısmi sıralı $(X, \|.\|_X)$ normlu uzayının boş olmayan bir alt kümesi olsun.*
Eğer $S + C_X$ kümesi konveks ise $\forall x \in S$ için

$$cone\,(T(S + C_X, \bar{x}) \cup (S - \{\bar{x}\}))$$

kümesi zayıf kapalıdır.

Kanıt. $S + C_X$ kümesi konveks olsun. Bu durumda, $\forall \bar{x} \in S$ için $T(S + C_X, \bar{x})$ konvekstir ve $\forall \bar{x} \in cl(S + C_X)$ için $T(S + C_X, \bar{x})$ kapalıdır. Ayrıca S kümesi konveks olduğundan
S kümesinin kapalı olması için gerek ve yeterli koşul S kümesinin zayıf kapalı olmasıdır. Sonuç olarak, teoremin kanıtı tamamlanır. □

Şimdi, kesin lineer fonksiyoneller kullanılarak oluşan skaler bir sonuç elde etmeye çalışacağız.

Teorem 4.1.13. *S, $int(C_X) \neq \emptyset$ olacak şekildeki C_X kapalı sıralama konisi ile kısmi sıralı $(X, \|.\|_X)$ normlu uzayının boş olmayan bir alt kümesi olsun. X^* , X uzayının topolojik duali olsun. Eğer $S + C_X$ konveks ise S'nin her $\bar{x}$ has minimal elemanı ve $\forall x \in S$ için*

$$l(\bar{x}) \leq l(x)$$

eşitsizliğini sağlayan sürekli, lineer bir $l \in C^{\sharp}_{X^*}$ dönüşümü vardır.

Kanıt. $S + C_X$ konveks ve $\bar{x}$, S'nin has minimal elemanı olsun. Bu durumda 0, $T(S + C_X, \bar{x})$'in minimal elemanıdır.

$$(-C_X) \cap T(S + C_X, \bar{x}) = \{0\} \tag{4.13}$$

$S+C_X$ konveks olduğundan $cone(S+C_X-\{\bar{x}\})$ kümesi konvekstir. Dolayısıyla $cl\,(cone(S + C_X, \{\bar{x}\}))$ kümesi konveks olur. $S+C_X$ yıldız biçimli iken $cone(S+C_X - \{\bar{x}\}) \subset T(S + C_X, \bar{x})$ ve $T(S + C_X, \bar{x}) \subset cl\,(cone(S + C_X - \{\bar{x}\}))$ olduğundan,

$$T(S + C_X, \bar{x}) = cl\,(cone(S + C_X - \{\bar{x}\}))$$

elde edilir. Yani, $T(S + C_X, \bar{x})$ teğet konisi konvekstir.
Kapalı, konveks koniler için Ayırma teoreminden 4.13 küme eşitliği
Bir $l \in X^*\backslash\{0_{X^*}\}$, $\forall c \in C_X$ ve $\forall t \in T(S + C_X, \bar{x})$ için

$$l(-c) \leq 0 \leq l(t) \tag{4.14}$$

ve $\forall c \in C_X\backslash\{0_X\}$ iken

$$l(c) > 0 \tag{4.15}$$

'dır. Buradan, $l \in C^{\sharp}_{X^*}$ elde edilir.

$$S - \{\bar{x}\} \subset S + C_X - \{\bar{x}\} \subset T(S + C_X, \bar{x})$$

olduğundan $\forall x \in S$ olmak üzere 4.14 eşitsizliğinden,

$$0 \leq l(x - \bar{x})$$

$$l(\bar{x}) \leq l(x)$$

olur. □

Aşağıdaki teoremle zayıf minimal elemanlar için gerekli bir şart vermeye çalışacağız.

Teorem 4.1.14. *$cor(C_X) \neq \emptyset$ olacak şekildeki C_X sıralama konisi ile kısmi sıralı X lineer uzayının boştan farklı bir S alt kümesini alalım.*

Eğer $\bar{x} \in S$, S kümesinin zayıf minimal elemanı ise $\forall \hat{x} \in \{\bar{x}\} - cor(C_X)$ ve $\forall x \in S$ için,

$$1 = \|\bar{x} - \hat{x}\|_{\hat{x}} \leq \|x - \hat{x}\|_{\hat{x}}$$

olacak şekilde X üzerinde tanımlı, $cor(C_X)$ üzerinde kesin monoton artan bir $\|.\|_{\hat{x}}$ yarı normu vardır.

Kanıt. $\bar{x}$, S kümesinin zayıf minimal elemanı ve $\hat{x} \in \{\bar{x}\} - cor(C_X)$ olsun. $\forall x \in X$ için,

$$\|x\| = \inf_{\lambda > 0} \left\{ \lambda : \frac{1}{\lambda} x \in [\hat{x} - \bar{x}, \bar{x} - \hat{x}] \right\}$$

olacak şekilde tanımlayalım. Bu durumda,

$$cor\left([\hat{x} - \bar{x}, \bar{x} - \hat{x}]\right) = \{x \in X : \|x\| < 1\}$$

$\bar{x}$ zayıf minimal eleman olduğundan

$$\{x \in X : \|x\| < 1\} \cap S - \{\bar{x}\} = \emptyset$$

'dır. Buradan, $\forall x \in S$ için,

$$1 \leq \|x - \hat{x}\|$$

ve $\bar{x} - \hat{x}$, $[\hat{x} - \bar{x}, \bar{x} - \hat{x}]$ sıralı aralığın cebirsel sınırına ait olduğundan, $\|\bar{x} - \hat{x}\| = 1$ elde edilir.

$\forall c \in cor(C)$ için

$$x \in cor\left([0_X, c]\right) \Rightarrow \|x\| < \|c\|$$

olur ve bu eşitsizlik ile $\|.\|$ normunun $cor(C)$ üzerinde kesin monoton artan olduğu kanıtlanır.

□

Zayıf minimallik kavramını, konvekslik ile vermeye çalışalım.

Teorem 4.1.15. *S, $cor(C_X) \neq \emptyset$ olacak şekildeki C_X sıralama konisi ile kısmi sıralı X lineer uzayının boş olmayan bir alt kümesi olsun.*

Eğer $S + C_X$ konveks ise S kümesinin her $\bar{x}$ zayıf minimal elemanı ve $\forall x \in S$ için

$$l(\bar{x}) \leq l(x)$$

olacak şekilde bir $l \in C_{X'} \backslash \{0_{X'}\}$ dönüşümü vardır.

Kanıt. $S + C_X$ konveks ve $\bar{x}$, S kümesinin zayıf minimal elemanı olsun. Bu durumda, $\bar{x}$, $S + C_X$ kümesinin zayıf minimal elemanıdır. Bu durum,

$$(\{\bar{x}\} - cor(C_X)) \cap (S + C_X) = \emptyset$$

olarak yazılabilir.

Ayırma teoreminden; $\forall c_1, c_2 \in C_X$, $\forall s \in S$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$l(\bar{x} - c_1) \leq \alpha \leq l(s + c_2)$$

olacak şekilde bir $l \in X^{'} \backslash \{0\}$ vardır.

C_X koni olduğundan, $c_1 = c_2 = 0$ alınırsa

$$l(\bar{x}) \leq l(s)$$

elde edilir.

$\bar{x} \in S$ olmak üzere $s = \bar{x}$ ve $c_1 = 0$ alınırsa,

$$0 \leq \alpha \leq l(c_2)$$

elde edilir. Bu ifade $l \in C_{X'} \backslash \{0_{X'}\}$ olduğunu gösterir. □

Bu bölümde iki tür skalerizasyon sonucu göstermeye çalıştık. Yaklaşım problemleri yardımı ile konveks olmayan türler (Teorem 4.1.3, Teorem 4.1.9, Teorem 4.1.14), lineer fonksiyoneller yardımı ile konveks türler (Teorem 4.1.5, Teorem 4.1.13, Teorem 4.1.15). Teorem 4.1.7 ve Teorem 4.1.8, $S + C$ kümesinin konveks varsayımı olmadan, lineer fonksiyoneller yardımı ile bulunan sonuçlardır.

4.2 Yeterli Şartlar

Bu bölümde, verilen gerekli şartların kabulleri altında, bir kümenin optimal elemanları için yeterli koşulları vermeye çalışacağız.

Yardımcı Teorem 4.2.1. *S, C pointed sıralama konisi ile kısmi sıralı lineer uzayın boş olmayan bir alt kümesi olsun. Ek olarak,*
$\forall x \in S$ ve bir $\bar{x} \in S$ için $f : S \to \mathbb{R}$ fonksiyoneli,

$$f(\bar{x}) \leq f(x) \tag{4.16}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda,

(a) *Eğer f fonksiyoneli S üzerinde monoton artansa ve $\bar{x}$, S kümesinin 4.16 eşitsizliğini sağlayan tek elemanı ise $\bar{x}$, S kümesinin minimal elemanıdır.*

(b) *Eğer f fonksiyoneli S kümesi üzerinde kuvvetli monoton artan ise $\bar{x}$, S kümesinin minimal elemanıdır.*

Kanıt. Her iki durum için, kabul edelim ki $\bar{x}$, S kümesinin minimal elemanı olmasın. Bu durumda, minimallik tanımından, bir $\tilde{x} \in [S \cap (\{\bar{x}\} - C)] \backslash \{\bar{x}\}$ vardır. $\tilde{x} \in \{\bar{x}\} - C$ olduğundan,

(a) f, S üzerinde monoton artan olduğundan, $f(\tilde{x}) \leq f(\bar{x})$ olur. Bu ifade, $\bar{x}$ elemanının, S kümesinin 4.16 eşitsizliğini sağlayan tek elemanı olması ile çelişir.

(b) f, S kümesi üzerinde kuvvetli monoton artan olduğundan, $f(\tilde{x}) \leq f(\bar{x})$ olur. Bu ifade, 4.16 ile çelişir.

□

Kesin yarı norm ve lineer fonksiyoneller olarak adlandırılan f fonksiyonellerinin özel bir sınıfı için Yardımcı Teorem 4.2.1'den yararlanacağız.

Teorem 4.2.2. *S, C pointed sıralama konisi ile kısmi sıralı X lineer uzayın boş olmayan bir alt kümesi olsun. Ek olarak, $\|.\|$, X üzerinde bir yarı norm, $\hat{x} \in X$, $\bar{x} \in S$ için,*

$$S \subset \{\bar{x}\} + C \tag{4.17}$$

ve $\forall x \in S$ için,

$$\|\bar{x} - \hat{x}\| \leq \|x - \hat{x}\|$$

ifadeleri sağlansın.

(a) *Eğer $\|.\|$ yarı normu, C üzerinde monoton artan ve $\bar{x}$, S kümesinden $\hat{x}$ 'ya tek en iyi yaklaşım ise $\bar{x}$, S kümesinin minimal elemanıdır.*

(b) *Eğer $\|.\|$ yarı normu, C üzerinde kuvvetli monoton artan ise $\bar{x}$, S kümesinin bir minimal elemanıdır.*

Kanıt. (a) Yardımcı teorem 4.2.1'den yararlanabilmek için $\|. - \hat{x}\|$ fonksiyonelinin S üzerinde monoton artan olduğunu göstermeliyiz. Bunun için bir $\bar{s} \in S$ alalım.

S kümesi üzerinde $\bar{s}$'den daha küçük elemanların kümesi,

$$(\{\bar{s} - C\}) \cap S \subset (\{\bar{s} - C\}) \cap (\{\hat{x} + C\})$$

$$= [\hat{x}, \bar{x}]$$

$$= \{\hat{x}\} + [0_X, \bar{s} - \hat{x}]$$

Bu durumda, S kümesinde $\bar{s}$'den daha küçük her x elemanı için,

$$\forall x \in (\{\bar{s}\} - C) \cap S$$

$$x \in \{\hat{x}\} + [0_X, \bar{s} - \hat{x}] \Rightarrow x - \hat{x} \in [0_X, \bar{s} - \hat{x}] \subset C$$

elde edilir. Yani, $x - \hat{x}$, $\bar{s} - \hat{x}$'dan daha küçük olur. $\|.\|$, C üzerinde monoton artan olduğundan,

$$\|x - \hat{x}\| \leq \|\bar{s} - \hat{x}\|$$

'dır. Böylece $\|. - \hat{x}\|$ fonksiyonelinin S üzerinde monoton artan olduğu görülür. Sonuç olarak Yardımcı Teorem 4.2.1'den kanıt tamamlanır.

(b) Benzer şekilde kanıtlanır.

□

Sonuç 4.2.3. *S, $cor(C) \neq \emptyset$ olacak şekildeki cebirsel kapalı C pointed konisi ile kısmi sıralı X lineer uzayının boş olmayan bir alt kümesi olsun. Ek olarak, bir $\hat{x} \in X$ için $S \subset \{\bar{x}\} + cor(C)$ sağlansın. Bu durumda,*
$\bar{x}$'nin S kümesinin minimal elemanı olması için gerek ve yeterli koşul $\forall x \in S \backslash \{\bar{x}\}$ için $\|\bar{x} - \hat{x}\| < \|x - \hat{x}\|$ olacak şekilde C üzerinde monoton artan bir $\|.\|$ normunun var olmasıdır.

Kanıt. (⇒) Teorem 4.1.3 ile kanıtlanır.

(⇒) Teorem 4.2.2(a) ile kanıtlanır.

□

S kümesi $\hat{x}$ ile alttan sınıra sahip değil ise, $S \subset \{\bar{x}\} + C$ kapsamı gerekli olmadığında, yaklaşım problemleri, S kümesinin minimal elemanlarının belirlenmesinde kısıtlıdır.

Teorem 4.2.4. *C pointed sıralama konisi ile kısmi sıralı X lineer uzayının boştan farklı bir S alt kümesini alalım. Bir $\tilde{x} \in S$, $\exists \bar{x} \in S \cap (\{\tilde{x}\} - C)$ ve $\forall x \in S \cap (\{\tilde{x}\} - C)$ için*

$$\|\bar{x} - \tilde{x}\| \geq \|x - \tilde{x}\| \tag{4.18}$$

olacak şekilde X üzerinde bir $\|.\|$ yarı normu var olsun. Bu durumda,

(a) Eğer $\|.\|$ yarı normu C üzerinde monoton artan ve $\bar{x}$, S kümesinin 4.18 eşitsizliğini sağlayan tek elemanı ise $\bar{x}$, S kümesinin bir minimal elemanıdır.

(b) Eğer $\|.\|$ yarı normu C üzerinde kuvvetli monoton artan ise $\bar{x}$, S kümesinin bir minimal elemanıdır.

Kanıt. **(a)** $\|.\|$ yarı normu C üzerinde monoton artan ve $\bar{x}$, S kümesinin 4.18 eşitsizliğini sağlayan tek elemanı olsun.

Öncelikle $-\|. - \tilde{x}\|$ fonksiyonelinin $\{\tilde{x}\} - C$ üzerinde monoton artan olduğunu göstereceğiz. Bunun için keyfi bir $\bar{y} \in \{\tilde{x}\} - C$ ve $x \in (\{\bar{y}\} - C) \cap (\{\tilde{x}\} - C) = \{\bar{y}\} - C$ alalım.

Bu durumda,

$$\tilde{x} - x \in \{\tilde{x} - \bar{y}\} + C$$

$$\tilde{x} - \bar{y} \in \{\tilde{x} - x\} - C$$

olur.

Ayrıca, $\bar{y} \in \{\tilde{x}\} - C$ olduğundan $\tilde{x} - \bar{y} \in C$ 'dır. $\|.\|$ yarı normu C üzerinde monoton artan olduğundan,

$$\|\tilde{x} - \bar{y}\| \leq \|\tilde{x} - x\|$$

olur.

Bu durumda,

$$-\|\bar{y}-\tilde{x}\| \geq -\|x-\tilde{x}\|$$

elde edilir. Bu ise $-\|.-\tilde{x}\|$ fonksiyonelinin $\{\tilde{x}\}-C$ üzerinde monoton artan olduğunu gösterir.

Yardımcı Teorem 4.2.1(a)'dan $\bar{x}$, $S \cap (\{\tilde{x}\}-C)$ kümesinin minimal elemanı olur. Yani,

$$(\{\bar{x}\}-C) \cap S \cap (\{\tilde{x}\}-C) = \{\bar{x}\}$$

Sonuç olarak

$$(\{\bar{x}\}-C) \cap S \subset (\{\tilde{x}\}-C)$$

kapsamı

$$(\{\bar{x}\}-C) \cap S = \{\bar{x}\}$$

elde edilir ve bu ifade $\bar{x}$'nin S kümesinin minimal elemanı olması demektir.

□

Dikkat edilirse Teorem 4.2.2'da S kümesi ile $\hat{x}$ arasındaki minimal uzaklığı, Teorem 4.2.4'de ise $S \cap (\{\bar{x}\}-C)$ ile $\bar{x}$ arasındaki maksimal uzaklığı belirlemeye çalıştık.

Şimdi kesin lineer fonksiyonellerle ilgili bir teorem vermeye çalışacağız.

Teorem 4.2.5. *S, C_X pointed sıralama konisi ile kısmi sıralı X lineer uzayının boş olmayan bir alt kümesi olsun.*

(a) *Eğer bir $\bar{x} \in S$ ve $\forall x \in S \backslash \{\bar{x}\}$ için*

$$l(\bar{x}) < l(x)$$

olacak şekilde bir $l \in C_{X'}$ varsa $\bar{x}$, S kümesinin minimal elemanıdır.

(b) *Eğer bir* $\bar{x} \in S$ *ve* $\forall x \in S \backslash \{\bar{x}\}$ *için*

$$l(\bar{x}) \leq l(x)$$

olacak şekilde $l \in C^{\sharp}_{X'}$ *varsa* $\bar{x}$*,* S *kümesinin minimal elemanıdır.*

Kanıt. Örnek 4.1.2'den, $\forall l \in C_{X'}$ lineer fonksiyonel S üzerinde monoton artandır.
$\forall l \in C^{\sharp}_{X'}$ lineer fonksiyoneli S üzerinde kuvvetli monoton artandır.
Dolayısıyla Yardımcı Teorem 4.2.1 yardımı ile kanıt tamamlanır. □

Teorem 4.2.6. *(Krein - Rutman Teoremi)*
$(X, \|.\|_X)$*,* C_X *kapalı, pointed konveks konisi ile kısmi sıralı gerçel normlu uzay ise* $C^{\sharp}_X \neq \emptyset$*'dır.*

Krein-Rutman teoreminde $C^{\sharp}_X \neq \emptyset$ olduğu durumda şartlar verilmiştir. Eğer Teorem 4.1.5 ve Teorem 4.2.5'e bakılırsa, Teorem 4.1.5'de formüle edilen gerekli şartın yeterliliğinin kanıtlanamaz olduğu görülür. Bu yüzden normun yerine Sonuç 4.2.3'ya benzer bir karakterizasyon, lineer fonksiyoneller yardımı ile gösterilemez.

Şimdiki teorem ile has minimallik kavramını inceleyelim.

Teorem 4.2.7. $cor(C) \neq \emptyset$ *olacak şekildeki* C *pointed sıralama konisi ile kısmi sıralı* $(X, \|.\|_X)$ *normlu uzayının boştan farklı bir* S *alt kümesini alalım. Ek olarak bir* $\hat{x} \in X$ *için* $S \subset \{\hat{x}\} + cor(C)$ *olsun.*
Eğer bir $\bar{x} \in S$ *ve* $\forall x \in S$ *için*

$$\|\bar{x} - \hat{x}\| \leq \|x - \hat{x}\| \tag{4.19}$$

olacak şekilde X *üzerinde sürekli ve* C *üzerinde kuvvetli monoton artan bir norm varsa* $\bar{x}$*,* S *kümesinin has minimal elemanıdır.*

Kanıt. $\|.\|$, C üzerinde kuvvetli monoton artan olduğundan ve $S - \{\bar{x}\} \subset cor(C)$ olduğundan Yardımcı teorem 4.2.1(b)'den $\bar{x}$, S kümesinin minimal elemanıdır. 0'ın $T(S+C, \bar{x})$ teğet konisinin minimal elemanı olduğunu gösterirsek kanıt tamamlanır.

$\|.\|$ C üzerinde kuvvetli monoton artan olduğundan 4.19 eşitsizliği ile birlikte $\forall x \in S$ ve $c \in C$ için

$$\|\bar{x} - \hat{x}\| \leq \|x - \hat{x}\| \leq \|x + c - \hat{x}\|$$

$\forall x \in S + C$ için

$$\|\bar{x} - \hat{x}\| \leq \|x - \hat{x}\| \tag{4.20}$$

olur.

$\|. - \hat{x}\|$ fonksiyonelinin $\|.\|$ normunun ürettiği topolojiye göre konveks ve süreklidir. Dolayısıyla

$\forall h \in T(S + C, \bar{x})$ için

$$\|\bar{x} - \hat{x}\| \leq \|\bar{x} - \hat{x} + h\| \tag{4.21}$$

yazılabilir.

$$T := T(S + C, \bar{x}) \cap (\{\hat{x} - \bar{x}\})$$

olarak tanımlarsak 4.21 eşitsizliği $\forall h \in T$ için geçerlidir.

$\forall \in T$ için $\|\bar{x} - \hat{x} + 0\| \leq \|\bar{x} - \hat{x} + h\|$ olduğundan ve $\|\bar{x} - \hat{x} + .\|$, $\{\hat{x} - \bar{x}\} + C$ üzerinde kuvvetli monoton artan olduğundan, 0_X, T kümesinin minimal elemanıdır.

0_X, $T(S + C, \bar{x})$ kümesinin minimal elemanı olmadığını kabul edelim. Bu durumda $x \neq 0_X$ olan bir $x \in (-C_X) \cap T(S + C, \bar{x})$ elemanı vardır. $S \subset \{\hat{x}\} + cor(C)$ olduğundan $\lambda x \in \{\hat{x} - \bar{x}\} + C$ olacak şekilde bir $\lambda > 0$ vardır. Bu durumda,

$$\lambda x \in (-C) \cap T(S + C, \bar{x}) \cap (\{\hat{x} - \bar{x}\} + C)$$

$$= (-C) \cap T$$

olur. Bu ifade 0'ın T kümesinin minimal elemanı olması ile çelişir. Böylece, 0_X, $T(S + C, \bar{x})$ teğet konisinin minimal elemanıdır. Sonuç olarak, $\bar{x}$, S kümesinin has minimal elemanıdır. $\square$

Teorem 4.1.9'de, Teorem 4.2.7'da önemli rol oynayan $cor(C) \neq \emptyset$ ve $\hat{x} \in \{\bar{x}\} - cor(C)$ kabullerine gerek görülmemiştir. Diğer yandan, Teorem 4.2.7'da $\bar{x}$'nin tek olarak belirlendiği 4.19 eşitsizliği gerekli değildir. Teorem 4.1.9 ve Teorem 4.2.7, has minimal elemanların bir karakterizasyonunu elde etmemizi sağlamıştır.

Sonuç 4.2.8. *S, $cor(C) \neq \emptyset$ ve zayıf kompakt tabana sahip C sıralama konisi ile kısmi sıralı $(X, \|.\|_X)$ normlu uzayının boş olmayan bir alt kümesi olsun. Ek olarak, bir $\hat{x} \in X$ için $S \subset \{\hat{x}\} + cor(C)$ ve $\bar{x} \in S$ olmak üzere $cone\,(T(S+C, \bar{x}) \cup (S - \{\bar{x}\}))$ kümesi zayıf kapalı olsun. Bu durumda, $\bar{x}$ elemanının S kümesinin has minimal elemanı olması için gerek ve yeterli koşul $\forall x \in S \backslash \{\bar{x}\}$ için*

$$1 = \|\bar{x} - \hat{x}\| < \|x - \hat{x}\|$$

olacak şekilde X üzerinde sürekli ve C üzerinde kuvvetli monoton artan olan bir $\|.\|$ normu vardır.

Teorem 4.2.9. *S, $C^{\sharp}_{X^*} \neq \emptyset$ olacak şekildeki C_X pointed sıralama konisi ile kısmi sıralı X normlu uzayının boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer bir $\bar{x} \in S$ ve $\forall x \in S$ için*

$$l(\bar{x}) \leq l(x) \tag{4.22}$$

olacak şekilde sürekli ve lineer bir $l \in C^{\sharp}_{X^*}$ varsa $\bar{x}$, S kümesinin has minimal elemanıdır.

Kanıt. $l \in C^{\sharp}_{X^*}$ için 4.22 eşitsizliği sağlansın. Teorem 4.2.5(b)'den $\bar{x}$, S kümesinin minimal elemanıdır.

0'ın $T(S + C_X, \bar{x})$ teğet konisinin minimal elemanı olduğunu göstermeliyiz.

Bir $h \in T(S + C_X, \bar{x})$ alalım. Teğet koninin tanımından, $\bar{x} = \lim_{n \in N} x_n$ ve $h = \lim_{n \in N} \lambda_n (x_n - \bar{x})$ olacak şekilde bir $(x_n)_{n \in N} \subset S + C_X$ ve bir $(\lambda_n)_{n \in N} \subset \mathbb{R}^+$ vardır.

l sürekli olduğundan $l(\bar{x}) = \lim_{n \in N} l(x_n)$ olur.

l, X üzerinde kuvvetli monoton artan olduğundan ($l \in C^{\sharp}_{X^*}$ olduğundan) 4.22

eşitsizliği $\forall x \in S + C_X$ için

$$l(\bar{x}) \leq l(x)$$

olmasını gerektirir. Bu durumda, $x_n \in S + C_X$ olduğundan

$$l(x_n - \bar{x}) \geq 0$$

'dır. Buradan

$$l(h) = \lim_{n \in N} l\left(\lambda_n (x_n - \bar{x})\right)$$

$$= \lim_{n \in N} \lambda_n \left(l(x_n) - l(\bar{x})\right) \geq 0$$

elde edilir. Dolayısıyla $\forall h \in T(S + C_X, \bar{x})$ olmak üzere

$$0 = l(0) \leq l(h)$$

'dır. Sonuç olarak, Teorem 4.2.5(b)'den
l, X üzerinde kuvvetli monoton artan olduğundan, 0, $T(S + C_X, \bar{x})$ teğet konisinin minimal elemanıdır. Buradan, $\bar{x}$'nin S kümesinin has minimal olduğu sonucu çıkar. □

Teorem 4.1.13 ve Teorem 4.2.9 ile konvekslik şartı altında has minimal elemanların bir karakterizasyonunu vermeye çalıştık. Bu iki teorem yardımı ile has minimal elemanlar için bir sonuç verelim.

Sonuç 4.2.10. *S, $int(C_{X^*}) \neq \emptyset$ olacak şekilde kapalı C_X sıralama konisi ile kısmi sıralı X normlu uzayının boş olmayan bir alt kümesi olsun. X^*, X uzayının topolojik duali ve $S + C_X$ konveks olsun.*
$\bar{x} \in S$ elemanının S kümesinin has minimal elemanı olması için gerek ve yeter koşul $\forall x \in S$ olmak üzere

$$l(\bar{x}) \leq l(x)$$

olacak şekilde bir $l \in C^{\sharp}_{X^*}$ sürekli ve lineer fonksiyonelinin var olmasıdır.

Kanıt. ($\Rightarrow$) Teorem 4.1.13 ile kanıtlanır.
($\Leftarrow$) Teorem 4.2.9 ile kanıtlanır.

□

Sonuç 4.2.10'nın kabulleri altında $int(C_{X^*}) = C^{\sharp}_{X^*}$ elde edilir.

Sonuç 4.2.10'daki karakterizasyon sonucu önemli olmasına rağmen, kabuller sınırlayıcıdır. Bu yüzden, has minimallik notasyonunu değiştireceğiz.

Tanım 4.2.11. *S, $C^{\sharp}_{X^*} \neq \emptyset$ olacak şekilde C_X sıralama konisi ile kısmi sıralı X topolojik lineer uzayının boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer bir $\bar{x} \in S$ ve $\forall x \in S$ için*

$$l(\bar{x}) \leq l(x)$$

*olacak şekilde bir $l \in C^{\sharp}_{X^*}$ lineer fonksiyoneli varsa, $\bar{x}$'ye S kümesinin **neredeyse has minimal elemanıdır** denir.*

Krein-Rutman teoreminde, C_X kapalı ve pointed konisi ile kısmi sıralı ayrılabilir $(X, \|.\|)$ normlu uzayı için $C^{\sharp}_{X^*} \neq \emptyset$'dır. Sonuç 4.2.10'nın kabulleri altında "has minimallik" ve " neredeyse has minimallik " kavramları aynıdır. Üstelik, Teorem 4.2.5(b)'den, her neredeyse has minimal eleman, bir minimal elemandır.

Yardımcı Teorem 4.2.12. *S, $cor(C_X) \neq \emptyset$ olacak şekilde C_X sıralama konisi ile kısmi sıralı lineer uzayının boş olmayan bir alt kümesi olsun. S üzerinde kesin monoton artan olan $f : S \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için*

$$f(\bar{x}) \leq f(x)$$

özelliğini sağlayan bir $\bar{x} \in S$ varsa $\bar{x}$, S kümesinin zayıf minimal elemanıdır.

Kanıt. Kabul edelim ki $\bar{x} \in S$, S kümesinin zayıf minimal elemanı olmasın. Bu durumda,

$f(x) < f(\bar{x})$ sağlayan $\exists x \in (\{\bar{x}\} - cor(C)) \cap S$ vardır. Bu ifade, f'nin $\bar{x}$'deki minimalliği ile çelişir. Dolayısıyla, $\bar{x} \in S$, S kümesinin zayıf minimal elemanıdır. □

Teorem 4.2.13. *S, $cor(C_X) \neq \emptyset$ olacak şekilde C sıralama konisi ile kısmi sıralı X lineer uzayının boş olmayan bir alt kümesi olsun. $\|.\|$, C üzerinde kesin* *monoton artan X uzayının bir yarı normu olsun ve bir $\hat{x} \in X$ için $S \subset \{\hat{x}\}+C$ verilsin. Eğer $\forall x \in S$ için*

$$\|\bar{x} - \hat{x}\| \leq \|x - \hat{x}\|$$

olacak şekilde $\bar{x} \in S$ varsa, $\bar{x}$, S kümesinin zayıf minimal elemanıdır.

Kanıt. Teorem 4.2.2'in kanıtına benzer şekilde kanıtlayalım.
$S \subset \{\hat{x}\} + C$ verildiğinde, $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ fonksiyoneli C üzerinde kesin monoton artan olduğundan, $\|. - \hat{x}\| : X \to \mathbb{R}$'nın S üzerinde kesin monoton artan olduğunu göstermemiz yeterlidir.
Bir $\bar{s} \in S$ alalım. $\bar{s}$'den küçük elemanların kümesi,

$$(\{\bar{s}\} - C) \subset (\{\bar{s}\} - C) \cap (\{\hat{x}\} + C) = [\hat{x}, \bar{s}] = \hat{x} + [0, \bar{s} - \hat{x}]$$

$$\forall x \in (\{\bar{s}\} - C) \cap S$$

$$\Rightarrow x \in \hat{x} + [0, \bar{s} - \hat{x}]$$

$$\Rightarrow x - \hat{x} \in [0, \bar{s} - \hat{x}] \subset C$$

olur. Bu durumda $x - \hat{x}$, $\bar{s} - \hat{x}$'dan küçük olur.
$\|.\|$, C üzerinde kesin monoton artan olduğundan,

$$\|x - \hat{x}\| < \|\bar{s} - \hat{x}\|$$

olur ki bu S üzerinde $\|. - \hat{x}\|$ normunun kesin monoton artan olduğunu gösterir.

$\square$

Sonuç 4.2.14. *S, $cor(C) \neq \emptyset$ olacak şekilde C sıralama konisi ile kısmi sıralı X lineer uzayının boş olmayan bir alt kümesi olsun. Ek olarak, bir $\hat{x} \in X$ için $S \subset \{\hat{x}\} + cor(C)$ verilsin. Bu durumda, $\bar{x}$'nin S kümesinin zayıf minimal elemanı olması için gerek ve yeterli koşul $cor(C)$ üzerinde kesin monoton artan olan ve $\forall x \in S$ için*

$$\|\bar{x} - \hat{x}\| \leq \|x - \hat{x}\|$$

olacak şekilde X üzerinde bir $\|.\|$ yarı normu vardır.

Kanıt. ($\Rightarrow$) Teorem 4.1.14'dan kanıtlanır.

($\Leftarrow$) Teorem 4.2.13'dan kanıtlanır. $\square$

Minimal elemanlarla ilgili, Sonuç 4.2.3'nin aksine Sonuç 4.2.14'da $\bar{x}$'nin, S kümesinden $\hat{x}$'ya en iyi yaklaşım olmasına gerek duymadık.
Şimdi vereceğimiz Teorem 4.2.15'de, " $\hat{x}$ ile kesin alttan sınırlı " kabulüne ihtiyacımız olmayacaktır.

Teorem 4.2.15. *S, $cor(C) \neq \emptyset$ olacak şekilde C sıralama konisi ile kısmi sıralı X lineer uzayının boş olmayan bir alt kümesi olsun. Ayrıca, $\tilde{x} \in S$ ve X üzerindeki $\|.\|$ yarı normu, C üzerinde kesin monoton artan olsun. $\forall x \in S \cap (\{\tilde{x}\} - C)$ için,*

$$\|\bar{x} - \tilde{x}\| \geq \|x - \tilde{x}\|$$

sağlayan bir $\bar{x} \in S$ varsa, $\bar{x}$'ye S kümesinin zayıf minimal elemanıdır.

Teorem 4.2.16. *S, $cor(C_X) \neq \emptyset$ olacak şekilde C_X sıralama konisi ile kısmi sıralı X lineer uzayının boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer $\forall x \in S$ ve $\exists \bar{x} \in S$ için,*

$$l(\bar{x}) \leq l(x)$$

olacak şekilde bir $l \in C_{X'} \backslash \{0_{X'}\}$ lineer fonksiyoneli varsa, $\bar{x}$, S kümesinin zayıf minimal elemanıdır.

Lineer fonksiyoneller yardımı ile minimal elemanların tamamlanmış bir karakterizasyonunu formüle edememize rağmen zayıf minimaller için bu yapılabilir.

Sonuç 4.2.17. *S, $cor(C_X) \neq \emptyset$ olacak şekilde C_X sıralama konisi ile kısmi sıralı X lineer uzayının boş olmayan bir alt kümesi olsun. Ek olarak, $S + C_X$ konveks olsun. Bu durumda,*
$\bar{x}$'nin S kümesinin zayıf minimal elemanı olması için gerek ve yeterli koşul $\forall x \in S$ için

$$l(\bar{x}) \leq l(x)$$

olacak şekilde bir $l \in C_{X'} \backslash \{0_{X'}\}$ lineer fonksiyonelinin var olmasıdır.

Kanıt. ($\Rightarrow$) Teorem 4.1.15'den kanıtlanır.

($\Leftarrow$) Teorem 4.2.16'den kanıtlanır. □

5 SONUÇ

Genel anlamda skaler değerli bir kısıtsız optimizasyon problemi, X gerçel normlu uzay ve $f : X \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$(P) : \begin{cases} \min\limits_{x \in X}(\max) f(x) \end{cases}$$

biçiminde verilebilir. Skaler değerli kısıtlı bir optimizasyon problemi ise $i = 1, 2, \ldots, m$ için $g : X \to \mathbb{R}$ gerçel değerli fonksiyonları yardımıyla oluşturulan

$$S = \{x \in X \mid g_i(x) \leq 0,\ i = 1, 2, \ldots, m\}$$

kısıt kümesi kullanılarak

$$(P) : \begin{cases} \min\limits_{x \in S}(\max) f(x) \end{cases}$$

biçiminde verilebilir.

Belli kriterlere göre alternetifler arasından "iyi" ya da "en iyi" seçimini yapmayı amaçlayan çok ölçütlü optimizasyon problemleri, matematiksel olarak, $\mathbb{R}^n$ 'den $\mathbb{R}^p$ 'ye ya da daha genel anlamda X normlu vektör uzayından Y normlu vektör uzayına tanımlanan f vektör değerli fonksiyonlarının $f(X) = Z$ görüntü kümeleri ile ilişkilendirilip vektör optimizasyon problemleri olarak adlandırılırlar. Genellikle bu ilişkilendirme Y kümesinin elemanlarını sıralayan bir C konisi kullanılarak gerçekleştirilir. Böylece bir vektör optimizasyon problemi; C konisi Y uzayı üzerinde bir sıralama konisi ve $Z = f(X) \subseteq Y$ olmak üzere $Z = f(X)$ 'in, C sıralama konisine göre çeşitli minimal (maksimal) noktalarına giden X 'in elemanlarını bulma problemi olur.

Benzer düşünceyle $S \subseteq X$ herhangi bir yolla oluşturulmuş kısıt kümesi ve $Z = f(S) \subseteq Y$ kümesinin C sıralama konisine göre çeşitli minimal (maksimal noktalarına giden X 'in elemanlarını bulma problemine de kısıtlı vektör optimizasyon problemi denir.

Çeşitli skalerleştirme yöntemleri kullanılarak ve skaler optimizasyon problemlerinin çözümlerinden yararlanılarak bir vektör optimizasyon probleminin çözümlerinin bulunuşu, yani skalerizasyon yöntemiyle çözüm, günlük yaşantımızdaki bir çok problemi çözmek için kullanılmaya başlanmıştır.

Vektör optimizasyon problemlerinin skalerleştirilmesinde iki önemli soru karşımıza çıkar: Bunlardan biri, vektör optimizasyon probleminin çözüm kümesindeki her bir çözüm, çözümlerin bir kısmı ya da tamamı, vektör optimizasyon problemi skalerleştirildiğinde, skaler optimizasyon problemlerinin çözümlerinden elde edilip edilemeyeceği sorusudur. Diğeri de tersine bir vektör optimizasyon problemi skalerleştirilip, skaler problemin çözümü yapıldığında, bu çözümlerin vektör optimizasyon probleminin çözümleri olup olmadığı sorusudur. Bu iki sorunun yanıtı olumlu olmadıkça tutarlı bir skalerizasyondan söz edilemez.

Bu konularda matematiksel taban oluşturma çabaları son 60 yılda hiç de küçümsenmeyecek bir noktaya gelmiştir ve genişleyerek çoğalmaktadır. Ancak bu bilgileri biraraya getiren çalışmalar çok değildir.

Bu tezde, bilgisayara bilimleri, mühendislik, uygulamalı matematik, iktisat, işletme ve sağlık bilimleri gibi uygulama alanlarında çalışan araştırmacıları, yukarıda sözü edilen skaler ve vektör optimizasyon problemlerinin temel matematiksel alt yapısı ve kuruluşu hakkında bilgilendirmek amaçlanmıştır.

KAYNAKLAR

[1] Benson, H.P. (1978), “Existence of efficient solutions for vector maximization problems”, *J.O.T.A.*, 569-580.

[2] Benson, H.P. (1979), “An improved definition of proper efficiency for vector minimization with respect to cones”, *J.Math.Anal.Appl.*, 232-241.

[3] Benson, H.P. (1983), “Efficiency and proper efficiency in vector optimization with respect to cones”, *J.Math.Anal.Appl.*, 173-189.

[4] Borwein, J.M. (1977), “Proper efficiency for minimization with respect to cones”, *SIAM J. Control Optim.*, 57-63.

[5] Borwein, J.M. (1980), “The geometry of Pareto efficiency over cones”, *Math. Operationsforsch. Stat. Ser. Optim.*, 235-248.

[6] Borwein, J.M. (1983), “On the existence of Pareto efficient points”, *Math. Operationsforsch. Stat. Ser. Optim.*, 64-73.

[7] Cambini, A. ve Martein, L. (1992), “Generalized concavity and optimality conditions in vector and scalar optimization”, *Proceedings of the IVth International Workshop on Generalized Convexity,Pecs.*.

[8] Cambini, A. ve Martein, L. (1994), “On the existence of efficient points”, *Optimization* , 283-290.

[9] Corley, H.W. (1980a), “An existence result for maximization with respect to cones”, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 277-281.

[10] Corley, H.W. (1980b), “A new scalar equivalence for Pareto optimization ”, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 829-830.

[11] Corley, H.W. (1985), “On optimality conditions for maximization with respect to cones”, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 67-78.

[12] Geoffrion, A.M. (1968), "Proper efficiency and the theory of vector maximization", *J. Math. Anal. Appl.*, 618-630.

[13] Giorgi, G., Guerraggio, A. ve Thierfelder, J. (2004), "Mathematics of optimization: Smooth and Nonsmooth case", *Elsevier Science and Technology Books*

[14] Guerraggio, A. , Molho, A. ve Zaffaroni A. (1994), "On the notion of proper efficiency in vector optimization", *J.O.T.A*, 1-21.

[15] HA, T.X.D. (1994), "A note on the class of cones ensuring the existence of efficient points in bounded complete sets", *Optimization*, 141-152.

[16] Hartley, R. (1978), "On cone efficiency, cone-convexity and cone-compactness", *SIAM J. Appl. Math.*, 211-222.

[17] Henig, M.I. (1982a), "Proper efficiency with respect to cones", *Journal of Optimization Theory and Applications*, 387-407.

[18] Henig, M.I. (1982b), "A cones Seperation Theorem", *Journal of Optimization Theory and Applications*, 451-455.

[19] Henig, M.I. (1988), "Characterizing the nondominated set by separable functions", *Journal of Optimization Theory and Applications*, 423-444.

[20] Henig, M.I. (1990), "Value functions, domination cones and proper efficiency in multicriteria optimization", *Math. Programming*, 205-217.

[21] Hurwicz, L. (1958), "Programming in linear space", *Studies in Linear and Nonlinear Programming.*

[22] Isac, G. (1983), "Sur l'existence de l'optimum de Pareto", *Riv. Mat. Univ. Parma*, 303-325.

[23] Jahn, J. (1984), "Scalarization in vector optimization", *Math. Programming*, 203-218.

[24] Jahn, J. (1985a), "Scalarization in multiobjective optimization", *Mathematics of multiobjective optimization*, 45-88.

[25] Jahn, J. (1985b), "A characterization of properly minimal elements of a set", *SIAM J. Control and Opt.*, 649-656.

[26] Jahn, J. (1986), "Mathematical vector optimization in partially ordered linear spaces", *Lang.*.

[27] Jahn, J. ve Sachs, E. (1986), "Generalized quasi-convex mappings and vector optimization", *SIAM J. Control and Opt.*, 306-322.

[28] Jahn, J. (1987), "Parametric approximation problems arising in vector optimization", *J.O.T.A.*, 503-516.

[29] Jahn, J. (2004), *Vector Optimization*, Springer, Heidelberg.

[30] Jeyakumar, V. (1986), "A generalization of a minimax theorem of Fan via theorem of alternative", *Journal of Optimization Theory and Applications*, 525-533.

[31] Jeyakumar, V. ve Mond, B. (1992), "On generalized convex mathematical programming", *J. Austral. Math. Soc.*, 43-53.

[32] Jeyakumar, V. ve Yang, X.Q. (1993), "Convex composite multiobjective nonsmooth programming", *Math. Programming*, 325-343.

[33] Jeyakumar, V. ve Luc, D.T. (1998), "Approximate Jacobian matrices for nonsmooth continuous maps and C^1-optimization", *SIAM J. Control and Opt.*, 1815-1832.

[34] Khanh, R.Q. (1995), "Sufficient optimality conditions in vector optimization with invex-convexlike functions", *Journal of Optimization Theory and Applications*, 359-378.

[35] Klinger, A. (1967),"İn proper solution of the vector maximum problems", *Oper. Res.*, 570-572.

[36] Kuhn, H.W. ve Tucker, A.W. (1951), “Nonlinear Programming”, *Proc. 2^{nd} Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, University of California Press, Berkeley, California.

[37] Luc, D.T. (1984), “On duality theory in multiobjective programming”, *J.O.T.A*, 557-582.

[38] Luc, D.T. (1987a), “Scalarization of vector optimization problems”, *J.O.T.A*, 85-102.

[39] Luc, D.T. (1987b), “Convexity and closedness of sets with respect to cones”, *Optimization*, 785-789.

[40] Luc, D.T. (1989a), “An existence theorem in vector optimization”, *Math. Oper. Res.*, 693-699.

[41] Luc, D.T. (1989b), “Theory of vector optimization”, *Springer Verlag.*.

[42] Luc, D.T. (1990), “Recession cones and the domination property in vector optimization”, *Math. Prog.*, 113-122.

[43] Postolica, V. (1993), “New existence results for efficient points in locally convex spaces ordered by supernormal cones”, *J. Global Opti.*, 233-242.

[44] Sawaragi, Y. , Nakayama, H. ve Tanino, T. (1985), “Theory of multiobjective optimization”, *Academic Press.*.

[45] Singh, C. ve Hanson, M.A. (1991), “Generalized proper efficiency in multiobjective programming”, *J. Inf. and Opt. Sc.*, 139-144.

[46] Wagner, D.H. (1977), “Semicompactness with respect to a Euclidean cone”, *Canadian J. Math.*, 29-36.