C_1-**MODÜLLER**

VE

GENELLEMELERİ

Özgür TAŞDEMİR

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Haziran - 2010

JÜRİ ve ENSTİTÜ ONAYI

Özgür Taşdemir'in **"C_1-Modüller ve Genellemeleri"** başlıklı **Matematik** Anabilim Dalındaki Yüksek Lisans tezi 07.06.2010 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	Adı - Soyadı	**İmza**
Üye (Tez Danışmanı)	**Yard. Doç. Dr. FATİH KARABACAK**	....
Üye	**Yard. Doç. Dr. FİGEN TAKIL MUTLU**	....
Üye	**Yard. Doç. Dr. ABİDİN KILIÇ**	....

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof.Dr. Rıdvan SAY
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

C_1−MODÜLLER
VE
GENELLEMELERİ

Özgür TAŞDEMİR

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yard. Doç. Dr. Fatih KARABACAK
2010, 66 sayfa

R bir halka olmak üzere, R üzerinde tanımlı bir M modülünün, her alt modülünü essential olarak kapsayan bir dik toplanan varsa bu M modülüne C_1 (CS ya da extending) modül denir. C_1-modül tanımına denk olarak her komplement alt modülü bir dik toplanan modül olarak da ifade edebiliriz. C_1-modül ailesinin farklı genellemeleri vardır. Bunlardan ikisi C_{11}-modül ve FI-extending modül aileleridir. Bir M modülüne, her alt modülü bir dik toplanan olan bir komplemente sahip ise C_{11}-modül denir. Bir M modülü, her fully invariant alt modülü bir dik toplananda essential olarak kapsanıyorsa FI-extending modül olarak adlandırılır. Açıkça FI-extending modüller, C_{11} modüllerin bir genellemesidir. Bu çalışmada bu üç modül ailesinin temel özellikleri incelenmiş ve birbirleri arasındaki ilişkilere bakılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Komplement Alt Modül, Diktoplanan,
CS-modül, C_{11}-modül, FI-extending modül

ABSTRACT

Master of Science Thesis

C_1-MODULES
AND
GENERALIZATIONS

Özgür TAŞDEMİR

Anadolu University
Graduate School of Sciences
Mathematics Program

Supervisor: Yard. Doç. Dr. Fatih KARABACAK
2010, 66 pages

R as a ring, a module M defined on R is called C_1 (CS or extending) module if every submodule of M is essential in a direct summand. It can be expressed as equivalence of this definiton that every complement submodule of M is a direct summand of M. There are various generalizations for C_1-module family. C_{11}-modules and FI-extending modules are two of them. A module M is a C_{11}-module if every submodule has a complement which is a direct summand of M. A module M is called FI-extending if every fully invariant submodule is essential in a direct summand. Clearly, FI-extending modules are one of the generalization of C_{11}-modules. In this study, basic properties of these three module families are examined and the relationship among them is studied.

Keywords: Complement Submodule, Direct Summand,
CS-module, C_{11}-module, FI-extending module

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamda bilgi ve deneyimleriye her konuda bana yardımcı olan ve sabırla yol gösteren değerli hocam Yard. Doç. Dr. Fatih KARABACAK'a,

Çalışmalarım esnasında benden bilgisini, yardımını ve desteğini esirgemeyen saygı değer hocam Yard. Doç. Dr. Figen TAKIL MUTLU'ya,

Hayatım boyunca maddi ve manevi destekleriyle hep yanımda olan sevgili aileme ve özellikle Eskişehir'de her anlamda bana destek olan sevgili ablam Saniye TAŞDEMİR'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Özgür TAŞDEMİR

Haziran 2010

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$=$	:	eşit
$\neq$	:	eşit değil
$\in$	:	eleman
$\notin$	:	elemanı değil
$\subseteq$	:	alt küme
$\exists$	:	en az bir
$\forall$	:	her
$\cap$	:	kesişim
$\Longrightarrow$	:	ise
$\Longleftrightarrow$	:	ancak ve ancak
$\cong$	:	izomorf
$kerf$	:	f nin çekirdeği
Imf	:	f nin görüntüsü
$\leq$	:	alt modül
$\nleq$	:	alt modül değil
$\lneqq$	:	has alt modül
$\leq_e$	:	essential alt modül
$\nleq_e$	:	essential alt modül değil
$\leq_d$	:	dik toplanan alt modül
$\nleq_d$	:	dik toplanan alt modül değil
$\leq_c$	:	komplement alt modül
$\nleq_c$	:	komplement alt modül değil
$\leq_e^{\ell}$	:	sol ideal ve sol essential
$\leq_e^{r}$	:	sağ ideal ve sağ essential
$\prod\limits_{i\in\Lambda} M_i$	:	M_i lerin dik çarpımı
$\bigoplus\limits_{i\in\Lambda} M_i$	:	M_i lerin dik toplamı

$Soc(M)$	:	M nin socle'u
$E(M)$	:	M nin injektif zarfı
$Hom_R(M,N)$	:	M den N ye R-homomorfizmaların kümesi
$End_R(M)$	:	M nin R-homomorfizmalar halkası
ACC	:	Artan Zincir Koşulu
DCC	:	Azalan Zincir Koşulu
$udimM$	:	M modülünün uniform boyutu
$\mathbb{Z}$	:	Tam sayılar halkası
$\mathbb{Q}$	:	Rasyonel sayılar halkası
$Z(M)$	:	Singular alt modül
$Z_2(M)$	:	2. singular alt modül
$\chi(S^2)$	:	Kürenin euler karakteristiği
$\lhd$	:	fully invariant alt modül
$\unlhd$	:	ideal
$\ell(A)$	:	A nın sol sıfırlayıcıları kümesi
$r(A)$	:	A nın sağ sıfırlayıcıları kümesi
$S_\ell(R)$	:	Tüm sol yarımerkez (semicentral) idempotentlerin kümesi
$S_r(R)$	:	Tüm sağ yarımerkez (semicentral) idempotentlerin kümesi
$\mathcal{B}(R)$	:	Merkez (central) idempotentlerin kümesi
$\blacksquare$	:	Kanıtın sonu

1. GİRİŞ

Bu çalışma boyunca, tüm halkalar birimli ve birleşmelidir ve R, bir halkayı gösterecektir. Aksi belirtilmedikçe tüm modüller birimsel sağ R-modüllerdir.

Bir modüle, her alt modülü bir dik toplananda essential olarak kapsanıyorsa, CS-modül, extending modül veya (C_1) koşulunu sağlar dendiğini hatırlayalım. Bir modüle, her alt modülü dik toplanan olan bir kompelemente sahip ise, (C_{11}) koşulunu sağlar veya (C_{11})-modül denir. Açıktır ki, her CS-modül bir (C_{11})-modüldür. Bir modüle, her fully invariant alt modülü bir dik toplananda essential olarak kapsanıyorsa FI-extending modül denir. Yine açıktır ki, her (C_{11})-modül bir FI-extending modüldür.

Bu çalışmada, (C_1)-modül ailesinin genellemelerinden olan (C_{11})-modül ailesi ve FI-extending modül ailesinin yapısal özellikleri incelenmiştir.

Bölüm 2'de, bilinmesinde fayda gördüğümüz ve çalışmamız boyunca da kullanacağımız bazı temel tanım ve sonuçlar kanıtlarıyla birlikte verilmiştir.

Bölüm 3'te, (C_1), sürekli ve yarı sürekli modüllerin tanımları verilmiş ve bazı temel özelliklerine değinilmiştir. (C_1)-modüllerin dik toplananlarının bir (C_1)-modül olduğunu kanıtlayan önerme verilmiş ve (C_1)-modüllerin herhangi diktoplamlarının her zaman (C_1)-modül olmadığına ilişkin ters örnek verilmiştir. Bölümün sonunda hangi durumlarda bu özelliğin sağlanacağına dair önermeler verilmiştir.

Bölüm 4'te, (C_{11})-modüllerin tanımı ve bu tanıma denk koşullar verilmiştir. (C_1)-modüllerin aksine (C_{11})-modüllerin dik toplamlarının bir (C_{11})-modül olduğunu gösteren teorem verilmiş ve (C_{11})-modüllerin dik toplananlarının bir (C_{11})-modül olmadığına ilişkin örnek verilmiştir. Bu bölümün sonunda hangi durumlarda bu özelliğin var olacağına ilişkin önermeler verilmiştir.

Bölüm 5'te, FI-extending modüllerin tanımı ve FI-extending modüllerin herhangi diktoplamınında FI-extending olduğunu gösteren teorem verilmiştir. Dik toplananlarının FI-exteding olup olmadığı açık bir soru olup araştırmacılar bununla ilgili çalışmalara halen devam etmektedir.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, bilinmesinde fayda gördüğümüz ve çalışmamızda kullandığımız temel tanım ve teoremleri vereceğiz. Daha ayrıntılı bilgi için [1- 8] önerilir.

2.1. Ayrıştırılamaz (Indecomposable) Modüller

Tanım 2.1.1. *M bir R-modül ve $A \leq M$ olsun. Eğer $\exists\, B \leq M$ için $A \cap B = 0$ ve $M = A + B$ ise M ye A ile B nin dik toplamı denir ve $M = A \oplus B$ ile gösterilir. A ve B alt modüllerine de M nin dik toplananları denir. $A, B \leq_d M$ şeklinde gösterilir.*

Tanım 2.1.2. *Herhangi bir M R-modülünün sıfırdan ve kendisinden başka dik toplananı yoksa M_R ye ayrıştırılamaz modül denir.*

Tanım 2.1.3. *M bir R-modül ve $A, B \leq M$ olsun. A ve B alt modüllerinin toplamı*

$$A + B = \{\ a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

olarak ifade edilir.

Modüler Kuralı: M bir R-modül, $A \leq M$ ve $C \leq B \leq M$ olsun. Bu durumda

$$B \cap (A + C) = C + (A \cap B)$$

dir.

Kanıt. $(A \cap B) \leq A$ ve $(A \cap B) \leq B$ olduğundan

$$C + (A \cap B) \leq B \cap (A + C) \tag{1}$$

dir. Tersine $b \in B \cap (A + C)$ alalım. Bu durumda $b = a + c$ olacak biçimde $a \in A$ ve $c \in C$ vardır.

$$\begin{aligned} b = a + c \quad &\Longrightarrow \quad a = b - c \in A \cap B \\ &\Longrightarrow \quad b = a + c \in C + (A \cap B) \end{aligned}$$

olduğundan

$$B \cap (A + C) \leq C + (A \cap B) \tag{2}$$

dir. (1) ve (2) den $B \cap (A + C) = C + (A \cap B)$ olduğu görülür. ∎

2.2. Büyük (Essential) Alt Modüller

Tanım 2.2.1. *M bir R-modül ve $N \leq M$ olsun. Her $0 \neq K \leq M$ için $N \cap K \neq 0$ ise N ye M de büyük (essential) alt modül denir. M ye N nin essential genişlemesi denir ve $N \leq_e M$ şeklinde gösterilir.*

Önerme 2.2.2. *M bir $R-$modül olsun. Aşağıdakidaki özellikler doğrudur.*

(i) $N \leq_e M \Longleftrightarrow 0 \neq m \in M$ için $N \cap mR \neq 0$

(ii) $K \leq N \leq M$ için $K \leq_e M$ dir $\Longleftrightarrow K \leq_e N$ ve $N \leq_e M$ dir.

(iii) $N \leq_e M$ ve $K \leq M \Longrightarrow N \cap K \leq_e K$ dır.

(iv) $N_i \leq_e K_i$ $(1 \leq i \leq t) \Longrightarrow (N_1 \cap ... \cap N_t) \leq_e (K_1 \cap ... \cap K_t)$ dir.

(v) Boş kümeden farklı bir Λ indis kümesi için

$$N_\lambda \leq_e M_\lambda (\lambda \in \Lambda) \Longleftrightarrow \bigoplus_\Lambda N_\lambda \leq_e \bigoplus_\Lambda M_\lambda$$

dır.

(vi) $f : M \to N$ bir homomorfizma ve $B \leq_e N$ ise $f^{-1}(B) \leq_e M$ dir.

Kanıt. **(i)** $N \leq_e M$ ve $0 \neq m \in M$ iken $mR \neq 0$ olduğundan $N \cap mR \neq 0$ dır. Tersine, $0 \neq L \leq M$ olsun. Öyleyse $0 \neq m \in L$ vardır. $mR \leq L$ ve kabulden dolayı $N \cap L \neq 0$ elde edilir. $N \leq_e M$ dir.

(ii) $K \leq N \leq M$ için $K \leq_e M$ olsun. $0 \neq X \leq N$ alalım. Bu durumda $0 \neq X \leq M$ olur. $K \leq_e M$ olduğundan $K \cap X \neq 0$ dır. Öyleyse $K \leq_e N$ dir. Şimdi $0 \neq T \leq M$ alalım. Bu durumda $0 \neq K \cap T \leq N \cap T$ dir. Yani $N \leq_e M$ dir.

Tersine, $K \leq N \leq M$ için $K \leq_e N$ ve $N \leq_e M$ olsun. $0 \neq Z \leq M$ için $0 \neq N \cap Z \leq N$ dir. $K \leq_e N$ olduğundan $0 \neq K \cap (N \cap Z) = K \cap Z$ dir. Yani, $K \leq_e M$ dir.

(iii) $N \leq_e M$, $K \leq M$ olsun. $0 \neq S \leq K$ alalım. $(N \cap K) \cap S = N \cap S \neq 0$ dır. Dolayısıyla, $(N \cap K) \leq_e K$ dır.

(iv) $t = 2$ için $N_1 \leq_e K_1$ ve $N_2 \leq_e K_2 \Longrightarrow (N_1 \cap N_2) \leq_e (K_1 \cap K_2)$ olduğunu görelim. $X \leq K_1 \cap K_2$ olsun. Kabul edelim ki $(N_1 \cap N_2) \cap X = 0$ olsun. Bu durumda

$$(N_1 \cap N_2) \cap X = N_1 \cap (N_2 \cap X) = 0 \Longrightarrow N_2 \cap X = 0 \Longrightarrow X = 0$$

bulunur. O halde $(N_1 \cap N_2) \leq_e (K_1 \cap K_2)$ dir. İndüksiyon yöntemi ile genel durum elde edilir.

Bu özellik sonlu olmayan bir indeks kümesi için doğru değildir. Örneğin; $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ modülünü gözönüne alalım. $\forall\, n \in \mathbb{Z}$ için $n\mathbb{Z} \leq_e \mathbb{Z}$ dir. Fakat

$$\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} n\mathbb{Z} = 0 \nleq_e \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$$

dir.

(v) Keyfi $0 \neq m \in \bigoplus_{\Lambda} M_\lambda$ alalım. $m = m_{\lambda_1} + m_{\lambda_2} + ... + m_{\lambda_n}$; $m_{\lambda_i} \in M_{\lambda_i}$ biçiminde yazabiliriz. n ye göre tümevarımla; $0 \neq mr \in \bigoplus_{\Lambda} N_\lambda$ olacak biçimde $r \in R$ olduğunu gösterelim.

$n = 1$ için açıktır. $n = i$ için

$$N_\lambda \leq_e M_\lambda \ (1 \leq \lambda \leq i) \Longrightarrow \bigoplus_{\Lambda} N_\lambda \leq_e \bigoplus_{\Lambda} M_\lambda$$

doğru olduğunu varsayarak $n = i + 1$ için doğruluğunu görelim;

$m' = m_{\lambda_1} + m_{\lambda_2} + ... + m_{\lambda_i}$ için

$$0 \neq m's \in N_{\lambda_1} \oplus ... \oplus N_{\lambda_i} \leq \bigoplus_{\Lambda} N_\lambda$$

olacak biçimde $s \in R$ vardır. Eğer $m_{\lambda_{i+1}} s \in N_{\lambda_{i+1}}$ ise

$$ms \in \bigoplus_{\Lambda} N_\lambda \quad \text{ve} \quad N_{\lambda_{i+1}} \cap (N_{\lambda_1} \oplus ... \oplus N_{\lambda_i}) = 0$$

olduğundan $ms \neq 0$ dır. Eğer $m_{\lambda_{i+1}} s \notin N_{\lambda_{i+1}}$ ise $N_{\lambda_{i+1}} \leq_e M_{\lambda_{i+1}}$ olduğundan $0 \neq (m_{\lambda_{i+1}} s)t \in N_{\lambda_{i+1}}$ olacak şekilde bir $t \in R$ vardır. O halde $r = st \in R$

için $mr \in \bigoplus_{\Lambda} N_\lambda$ ve $\bigoplus_{\Lambda} N_\lambda$ dik toplam olduğundan $mr \neq 0$ dır. Sonuç olarak $\bigoplus_{\Lambda} N_\lambda \leq_e \bigoplus_{\Lambda} M_\lambda$ dır.

(vi) $f : M \to N$ bir homomorfizma ve $B \leq_e N$ olsun. $f^{-1}(B) \cap U = 0$ olacak şekilde bir $U \leq M$ alalım. $x \in B \cap f(U)$ için $x = f(u)$ olacak biçimde $u \in U$ vardır. $x = f(u) \in B$ olduğundan $u \in U \cap f^{-1}(B) = 0$ dır. Bu durumda $x = f(u) = f(0) = 0$ dır. Yani $B \cap f(U) = 0$ dır. $B \leq_e N$ olduğundan $f(U) = 0$ dır. O halde

$$U \leq Kerf = f^{-1}(0) \leq f^{-1}(B)$$

olduğundan $U = f^{-1}(B) \cap U = 0$ dır. ■

2.3. Komplement Alt Modüller

Tanım 2.3.1. *M bir $R-$modül ve $K \leq M$ olsun. K nın öz essential genişlemesi yoksa (yani $K \leq_e N \leq M \Longrightarrow K = N$) K ya M de kapalı (closed) alt modül denir.*

Tanım 2.3.2. *M bir $R-$modül ve $A \leq M$ olsun. $A \cap B = 0$ özelliğine göre maksimal olan bir B alt modülüne A nın M deki bir komplementi denir ve $B \leq_c M$ ile gösterilir.*

Önerme 2.3.3. *$A, B \leq M$ olmak üzere $A \cap B = 0$ olsun. Bu durumda A nın bir C komplementi vardır öyle ki $B \leq C$ dir.*

Kanıt. $\Delta = \{X \leq M \mid B \leq X \text{ ve } A \cap X = 0\}$ kümesini tanımlayalım. $B \in \Delta$ olduğundan $\Delta \neq \emptyset$. Alt modüller arasında bir sıralama bağıntısı vardır. Zorn Lemma'dan Δ nın bir maksimal elemanı vardır. Bunu C alısak istenilen sonuç elde edilmiş olur. ■

Açıkça herhangi bir M modülünde her alt modülün M de bir komplementi vardır. Ayrıca $0, M \leq_c M$ olduğu açıktır.

Önerme 2.3.4. *Herhangi bir M modülünün her diktoplananı M nin bir komplement alt modülüdür.*

Kanıt. $M = A \oplus B$, $A \leq N \leq M$ ve $N \cap B = 0$ olsun. Modüler Kuralından

$$N = N \cap M = N \cap (A \oplus B) = A \oplus (N \cap B) = A$$

dır. Yani, A, B nin M deki bir komplementi olup $A \leq_c M$ dir. ■

Örnek 2.3.5. *Önerme 2.3.4'ün tersi herzaman doğru değildir. Örneğin; F bir cisim ve V de F üzerinde 2 boyutlu bir vektör uzayı olsun. $V = v_1F \oplus v_2F$ alalım. Bu durumda*

$$R = \{ \left[\begin{smallmatrix} f & v \\ 0 & f \end{smallmatrix} \right] \mid f \in F, v \in V\}$$

matris işlemleri ile birimli, değişmeli ve ayrıştırılamaz bir halkadır.

$$I = \{ \left[\begin{smallmatrix} 0 & v_1f \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \right] \mid f \in F\} \leq R_R$$

alalım.

$$J = \{ \left[\begin{smallmatrix} 0 & v_2f \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \right] \mid f \in F\} \leq R_R$$

olmak üzere I, J nin komplementidir. Yani $I \leq_c R_R$ dir. Ancak $I \nleq_d R_R$ dir.

Teorem 2.3.6. *M bir R-modül, $A, B \leq M$ ve $A \cap B = 0$ olsun. B nin M de A nın komplementi olması için gerek ve yeter koşul*

$$\frac{A+B}{B} \leq_e \frac{M}{B}$$

olmasıdır.

Kanıt. B, M de A nın komplementi olsun. $\frac{A+B}{B} \cap \frac{U}{B} = 0$ olacak biçimde bir $B \leq U \leq M$ alalım. Böylece $(A+B) \cap U = B$ dir. Modüler kuralından, $(A \cap U) + B = B$ dir. Buradan $A \cap U \leq B$ bulunur. Böylece $A \cap U \leq A \cap B = 0$ elde edilir. B, M de A ile arakesiti maksimal olan alt modül olduğundan $U = B$ olup $\frac{A+B}{B} \leq_e \frac{M}{B}$ bulunur.

Tersine, $\frac{A+B}{B} \leq_e \frac{M}{B}$ olsun. $A \cap U = 0$ ve $B \leq U \leq M$ olmak üzere keyfi bir U ve $x \in (A+B) \cap U$ alalım. Bu durumda $x = a + b$ olacak biçimde $a \in A$ ve $b \in B$ vardır. $a = x - b \in A \cap U = 0$ olup $a = 0$ bulunur. Böylece $x = b \in B$ olup $(A+B) \cap U = B$ elde edilir. Dolayısıyla $\frac{A+B}{B} \cap \frac{U}{B} = 0$ olup, varsayımdan $\frac{U}{B} = 0$ yani $U = B$ olur. Böylece B, M de A nın komplementidir. ■

Önerme 2.3.7. *M bir $R-$modül ve $A \leq M$ olsun. Bu durumda;*

$$B \leq M,\ A \text{ nın bir komplementi ise } A \oplus B \leq_e M \text{ dir.}$$

Kanıt. $A \cap B = 0$ olduğundan $A + B = A \oplus B \leq M$ dir. $C \leq M$ ve $(A \oplus B) \cap C = 0$ olsun. Bu durumda $(A \oplus B) + C = (A \oplus B) \oplus C$ dir. Böylece $A \cap (B \oplus C) = 0$ olur. B, A nın komplementi olduğundan $B \oplus C = B$ olmalıdır. Buradan $C = 0$ dır. O halde $A \oplus B \leq_e M$ dir. ■

Yardımcı Teorem 2.3.8. *$N \leq M$ ve $K \leq_d M$ olsun. Bu durumda, K nın N nin komplementi olması için gerek ve yeter koşul $K \cap N = 0$ ve $K \oplus N \leq_e M$ olmasıdır.*

Kanıt. ($\Longrightarrow$) : Varsayalım K, N nin komplementi olsun. Buradan,
$K \cap N = 0$ dır. $0 \neq x \in M$ alalım. Eğer $x \in K$ ise $0 \neq xR = xR \cap K \subseteq xR \cap (K \oplus N)$ dir. Eğer $x \notin K$ ise $N \cap (xR + K) \neq 0$ ve böylece $xR \cap (K \oplus N) \neq 0$ dır. Her iki durumda da her $0 \neq x \in M$ için $xR \cap (K \oplus N) \neq 0$ dır. Böylece $K \oplus N \leq_e M$ dir.
($\Longleftarrow$) : Tersine, $K \cap N = 0$ ve $K \oplus N \leq_e M$ olsun. $K \leq_d M$ olduğundan bir $K' \leq M$ vardır öyle ki $M = K \oplus K'$ dür. Kabul edelim ki $K \subseteq K_1$ ve $K_1 \cap N = 0$ koşulunu sağlayan bir $K_1 \leq M$ olsun. Bu durumda

$$K_1 = K_1 \cap M = K_1 \cap (K \oplus K') = K \oplus (K_1 \cap K')$$

dür. $0 \neq y \in (K_1 \cap K')$ alalım. Bu durumda bazı $n \in N,\ k \in K$ ve $r \in R$ için $0 \neq yr = n + k$ dır (çünkü $N \oplus K \leq_e M$). Buradan $yr - k = n \in K_1 \cap N = 0$ dır. Böylece $yr = k \in K' \cap K = 0$ dır ki bu da $yr \neq 0$ olmasıyla çelişir. O halde $K_1 \cap K' = 0$ ve $K = K_1$ dir. Yani, K, N nin komplementidir. ■

Önerme 2.3.9. *M bir $R-$modül ve $N \leq M$ olsun. Bu durumda bir $K \leq M$ vardır öyle ki $N \leq_e K \leq_c M$ dir. Burada, K ya N nin M deki kapanışı (closure) denir.*

Kanıt. N', N nin M deki bir komplementi olsun. Bu durumda N' nün M de $N \leq K$ olacak şekilde bir K komplementi vardır. $0 \neq L \leq K$ olsun. $N' \subseteq L + N'$ dür. Böylece

$$(L + N') \cap N \neq 0$$

dır (çünkü N', N nin komplementi). O halde bir $x \in L$, $n' \in N'$ ve $0 \neq n \in N$ vardır ki $n = x + n'$ dür.

$$n' = n - x \in N' \cap K = 0$$

olduğundan $0 \neq n = x \in L \cap N$ dir. Böylece $N \leq_e K \leq_c M$ dir. ■

Önerme 2.3.10. *M bir $R-$modül ve $K \leq M$ olsun.*

$$K \leq_c M \iff K \leq_e L \leq M \text{ ise } K = L \text{ dir.}$$

Kanıt. $K \leq_c M$ ve $K \leq_e L \leq M$ olsun. Bu durumda bir $X \leq M$ vardır ki K, X in komplementidir. Yani K, $K \cap X = 0$ özelliğine göre maksimal alt modüldür.

$$0 = K \cap X \leq_e L \cap X \Longrightarrow L \cap X = 0$$

olduğundan $K = L$ dir.

Tersine, $K \leq M$ olduğundan Önerme 2.3.9'dan bir $L \leq M$ vardır ve $K \leq_e L \leq_c M$ dir. Varsayımdan $K = L$ dir. Yani $K \leq_c M$ dir. ■

Teorem 2.3.11. *M bir $R-$modül olsun. B, A nın M de komplementi, A' de $A \leq A'$ olmak üzere B nin M de komplementi ise*

$$A \leq_e A'$$

ve A', M nin A yı essential alt modül olarak içeren alt modüller kümesinde maksimal elemandır (yani $A \leq_e K$ ve $A' \leq K \leq M \Longrightarrow A' = K$ dır).

Kanıt. $A \cap U = 0$ olmak üzere keyfi $U \leq A'$ alalım. $a \in A \cap (B + U)$ için $a = b + u$ olacak biçimde $b \in B$ ve $u \in U$ vardır. $b = a - u \in B \cap A' = 0$ olduğundan $a = u \in A \cap U = 0$ dır. Buradan $A \cap (B + U) = 0$ bulunur. B, A ile kesişimi sıfır olan maksimal alt modül olduğundan $B = B + U$ dur. O halde $U \leq B$ dir. Ayrıca $U \leq A'$ olduğundan $U \leq A' \cap B = 0$ dan $U = 0$ bulunur. O halde $A \leq_e A'$ dür.

Şimdi A' nün A yı essential olarak kapsayan maksimal alt modül olduğunu görmek için $A \leq_e K$ ve $A' \leq K$ olan bir $K \leq M$ alalım. $A \leq_e K$ olduğundan

$$(K \cap B) \cap A = 0 \Longrightarrow (K \cap B) = 0$$

olur. A', B ile kesişimi sıfır olan maksimal alt modül olduğundan $K = A'$. ■

Önerme 2.3.12. *M bir $R-$modül olsun. $K \leq_c N$ ve $N \leq_c M$ ise $K \leq_c M$ dir.*

Kanıt. $K \leq_c N$ ve $N \leq_c M$ olduğundan bir $K^{'} \leq N$ ve $N^{'} \leq M$ vardır ki K, $K^{'}$ nün bir komplementi ve N de $N^{'}$ nün bir komplementidir. Ayrıca $K \cap (K^{'} + N^{'}) = 0$ ve $K^{'} + N^{'} \leq M$ dir. Gerçekten; bir $k \in K \cap (K^{'} + N^{'})$ alırsak $k = k^{'} + n^{'}$ olacak biçimde $k^{'} \in K^{'}$ ve $n^{'} \in N^{'}$ vardır. $k - k^{'} = n^{'} \in N \cap N^{'} = 0$ olduğundan $k = k^{'} \in K \cap K^{'} = 0$ dır. O halde $k = k^{'} = n^{'} = 0$ bulunur.

Şimdi farzedelim ki $K \leq_e L \leq M$ olacak şekilde bir $L \leq M$ olsun. Bu durumda

$$K \cap (K^{'} + N^{'}) \leq_e L \cap (K^{'} + N^{'})$$

olduğundan $L \cap (K^{'} + N^{'}) = 0$ dır. Böylece

$$[N \cap (L + N^{'})] \cap K^{'} = [(N \cap K^{'}) \cap (L + N^{'})] = K^{'} \cap (L + N^{'}) = 0$$

olur. $K \leq N \cap (L + N^{'}) \leq (L + N^{'})$ ve K, $K^{'} \cap K = 0$ özelliğine göre maksimal alt modül olduğundan $K = [N \cap (L + N^{'})]$ dır. $K = [N \cap (L + N^{'})] \leq_e L$ olduğundan

$$0 = [N \cap (L + N^{'})] \cap N^{'} \leq_e L \cap N^{'}$$

yani $L \cap N^{'} = 0$ dır. Böylece

$$(N + L) \cap N^{'} = L \cap N^{'} = 0$$

dır. $N \leq N + L$ ve N $N^{'}$ nün komplementi olduğundan $N + L = N$ dir. O halde $L \leq N$ dir. Sonuç olarak $K \leq_e L \leq N$ ve $K \leq_c N$ olduğundan Önerme 2.3.10'dan $K = L$ dir. Buradan $K \leq_c M$ olduğu görülür. ■

2.4. Yarı Basit (Semisimple) Modüller - Socle

Tanım 2.4.1. *0 ve kendisinden başka alt modülü olmayan bir modüle basit (simple) modül denir.*

Tanım 2.4.2. *Herhangi bir A modülü için A nın tüm sıfır olmayan basit alt modüllerinin toplamına A nın socle'ı denir ve $Soc(A)$ ile gösterilir.*

Örnek olarak; $Soc(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) = 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ dir.

Tanım 2.4.3. *$(T_\alpha)_{\alpha\in A}$, M nin basit alt modüllerinin bir indeks kümesi olsun. Eğer M, bu kümemin dik toplamı ise, $M = \oplus_A T_\alpha$, M nin bir semisimple ayrışımıdır. Bir M modülü semisimple ayrışıma sahip olması durumunda, M modülüne semisimple modül denir.*

Açıkça, her basit modül semisimple'dır.

Tanım 2.4.4. *Herhangi bir M modülü için $Soc(M) = M$ oluyorsa M modülüne semisimple denir. Yani; M, onun basit alt modüllerinin toplamıdır.*

Bu tanıma göre 0 bir semisimple modüldür ve $Soc(2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) = 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ olduğundan $(2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ $\mathbb{Z}$-modülü bir semisimple modüldür.

Teorem 2.4.5.
Bir A_R modülünün semisimple olması için gerek ve yeter koşul A nın her alt modülünün bir dik toplanan olmasıdır.

Kanıt. $(\Longrightarrow)$: A_R semisimple modül olsun. $B \le A$ alalım.

$$S = \{\ X \le A \mid B \cap X = 0\}$$

kümesini tanımlayalım. $0 \in S$ olduğundan $S \neq \emptyset$ dir. $(S, \le)$ bir kısmi sıralı kümedir. Ayrıca S den alınan her zincirin bir üst sınırı olduğundan Zorn Lemma'dan S de bir maksimal C elemanı vardır. Böylece $B \cap C = 0$ dır. Eğer

$$B \oplus C \lneqq A \text{ ise } Soc(B \oplus C) \neq A = Soc(A)$$

dır. Bu durumda en az bir $N \le A$ basit alt modülü vardır öyle ki $N \nleq B \oplus C$ dir. O halde $N \cap (B \oplus C) \neq N$ olduğundan $N \cap (B \oplus C) = 0$ dır. Böylece $\{N, B, C\}$ bağımsız bir ailedir. Buradan, $B \cap (C \oplus N) = 0$ bulunur ki bu da C nin maksimalliği ile çelişir. O halde $A = B \oplus C$ olur.
$(\Longleftarrow)$: Tersine, A nın her alt modülü bir dik toplanan olsun. Özellikle; bir $B \le A$ için $A = Soc(A) \oplus B$ dir. Eğer $B \neq 0$ ise bir $0 \neq c \in B$ vardır öyle ki $cR = C \le B$ dir. $S = \{\ X \le C \mid c \notin X\}$ kümesini tanımlayalım. $0 \in S$ olduğundan $S \neq \emptyset$ dir. Zorn Lemma'dan S nin bir maksimal T elemanı vardır.

O halde $c \notin T \lneqq C$ dir. Şimdi; $A = T \oplus N$ olacak biçimde bir $N \leq A$ olduğundan

$$C = C \cap A = C \cap (T \oplus N) = T \oplus (C \cap N)$$

dir. C/T basit ve $C/T \cong C \cap N$ olduğundan $C \cap N \leq A$ basit alt modüldür. Böylece $C \cap N \leq Soc(A)$ dır. Diğer yandan $C \cap N \leq B$ olduğundan

$$C \cap N \leq Soc(A) \cap B = 0$$

olur. Buradan $C \cap N = 0$ olup $C = T$ bulunur ki bu da $c \notin T$ olmasıyla çelişir. Sonuç olarak $B = 0$ yani $A = Soc(A)$ olmalıdır. ■

Önerme 2.4.6. *M_R bir modül olsun. $Soc(M) = \bigcap \{ N \mid N \leq_e M\}$ dir.*

Kanıt. U, M nin bir basit alt modülü olsun. $N \leq_e M$ alalım. Bu durumda $U \cap N \neq 0$ dır. U basit olduğundan $U \cap N = U$ olur. Buradan $U \leq N$ dir. Böylece her $N \leq_e M$ için $U \leq N$ olur. O halde

$$SocM \subseteq \bigcap \{ N \mid N \leq_e M\}$$

dir.

Şimdi, $X = \bigcap \{ N \mid N \leq_e M\}$ diyelim. $Y \leq X$ alalım. Bu durumda en az bir $Z \leq M$ vardır öyle ki $Y \cap Z = 0$ ve $Y \oplus Z \leq_e M$ dir. O halde $X \leq Y \oplus Z$ dir. Bundan dolayı, her $x \in X$ için $x = y + z$ olacak biçimde $y \in Y$ ve $z \in Z$ vardır. $x - y = z \in X \cap Z$ olduğundan $x \in Y \oplus (X \cap Z)$ dir. Böylece $X \subseteq Y \oplus (X \cap Z) \leq X$ olup $X = Y \oplus (X \cap Z)$ dir. Teorem 2.4.5'ten X_R semisimpledir. O halde $X = SocX \leq SocM$ bulunur. ■

Önerme 2.4.7. *M ve N sağ R-modüller olsun. $f : M \longrightarrow N$ bir R-modül homomorfizması ise $f(Soc(M)) \subseteq Soc(N)$ dir.*

Kanıt. $S \leq M$ basit bir alt modül olsun. Bu durumda $f(S) = 0$ ya da $f(S)$, basit alt modül olur. Her iki durumda da $f(S) \leq Soc(N)$ dir. Dolayısıyla $f(Soc(M)) \subseteq Soc(N)$ dir. ■

Önerme 2.4.8. *M bir R-modül ve $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ ise $Soc(M) = \bigoplus_{i \in I} Soc(M_i)$ dir.*

Önerme 2.4.9. *M bir R-modül ve $N \leq M$ olsun. Bu durumda*

$$Soc(N) = N \cap Soc(M)$$

dir. Özel olarak; $Soc(Soc(M)) = Soc(M)$ dir.

Kanıt. $Soc(N) \leq N$ ve $Soc(N) \leq Soc(M)$ olduğundan $Soc(N) \leq N \cap Soc(M)$ dir. Şimdi, S, M nin bir basit alt modülü ve $S \leq N$ olsun. Bu durumda $S \leq Soc(N)$ olduğundan $N \cap Soc(M) \leq Soc(N)$ bulunur. Böylece $Soc(N) = N \cap Soc(M)$ elde edilir. Özel olarak;

$$Soc(Soc(M)) = Soc(M) \cap Soc(M) = Soc(M)$$

olur. ■

Sonuç 2.4.10. *M ve N sağ R-modüller olsun. $\varphi : M \longrightarrow N$ bir R-modül homomorfizması ve $Im(\varphi) \leq_e N$ ise $\varphi(Soc(M)) = Soc(N)$ dir.*

Kanıt. K, N nin bir basit alt modülü olsun. $Im(\varphi) \leq_e N$ olduğundan $K \leq Im(\varphi)$ dir. Böylece $\varphi^{-1}(K) \leq Soc(M)$ olup $\varphi(\varphi^{-1}(K)) \leq \varphi(Soc(M))$ olur. Buradan $Soc(N) \subseteq \varphi(Soc(M))$ elde edilir. Ayrıca Önerme 2.4.7'den $\varphi(Soc(M)) \subseteq Soc(N)$ olduğundan $\varphi(Soc(M)) = Soc(N)$ bulunur. ■

2.5. Düzgün (Uniform) Modüller ve Düzgün Boyut

Tanım 2.5.1. *M sıfırdan farklı bir R-modül olsun. M nin sıfırdan farklı her alt modülü bir essential alt modül ise M ye düzgün (uniform) modül denir.*

Örneğin; $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ ve $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ birer uniform modüldür.

Önerme 2.5.2. *U, M nin düzgün alt modülü olsun.*

$$U \leq_c M \text{ dir.} \Longleftrightarrow U, M \text{ nin maksimal düzgün alt modülüdür.}$$

Kanıt. $(\Longrightarrow)$: $U \leq_c M$, $U \leq N \leq M$ ve N düzgün alt modül olsun. Bu durumda $U \leq_e N$ dir ve $U \leq_c M$ olduğundan Önerme 2.3.10'dan $U = N$ elde edilir. O halde U maksimal düzgün alt modüldür.
$(\Longleftarrow)$: Tersine, U, M nin maksimal düzgün alt modülü olsun. Önerme 2.3.9'dan $U \leq_e K \leq_c M$ olacak biçimde bir $K \leq M$ vardır. Şimdi K nın

düzgün alt modül olduğunu görelim. $X \leq K$ alalım. $Y \leq K$ için $X \cap Y = 0$ olsun. Bu durumda $(U \cap X) \cap (U \cap Y) = 0$ dır. U düzgün olduğundan $U \cap Y = 0$ ve $U \leq_e K$ olduğundan $Y = 0$ bulunur. Yani K düzgün alt modüldür. Varsayımımız olan U nun M de maksimal düzgün alt modül olmasından dolayı $U = K$ elde edilir. Sonuç olarak $U \leq_c M$ dir. ■

Tanım 2.5.3. *Bir M modülü sıfırdan farklı alt modüllerin sonsuz bir dik toplamını kapsamıyorsa M ye sonlu uniform (Goldie) boyutlu denir.*

Örneğin; $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ modül sonlu Goldie boyutludur.

Teorem 2.5.4. *M_R bir modül ve $i = 1, 2, ..., n$ için $U_i \leq M$ düzgün alt modüller olmak üzere $U_1 \oplus U_2 \oplus U_3 \oplus ... \oplus U_n \leq_e M$ olsun. Bu durumda*

(1) *M nin sıfırdan farklı alt modüllerinin herhangi bir dik toplamı en fazla n tane dik toplam kapsar.*

(2) *$V_i \leq M$ düzgün alt modüller olmak üzere, $V_1 \oplus V_2 \oplus ... \oplus V_k \leq_e M$ ise $n = k$ dır.*

Kanıt. **(1)** Her $i \in I$ için $0 \neq K_i \leq M$ olmak üzere $K_1 \oplus K_2 \oplus ... \oplus K_{n+1} \subseteq M$ olsun. $K_1 \cap (K_2 \oplus ... \oplus K_{n+1}) = 0$ olduğundan $K_2 \oplus ... \oplus K_{n+1} \nleq_e M$ dir. O halde en az bir $i \leq n$ için $U_i \cap (K_2 \oplus ... \oplus K_{n+1}) = 0$ dır. Genelliği bozmadan $i = 1$ alırsak $U_1 \oplus K_2 \oplus ... \oplus K_{n+1} \leq M$ olur. Ayrıca $K_2 \neq 0$ ve $K_2 \cap (U_1 \oplus K_3 \oplus ... \oplus K_{n+1}) = 0$ dır. Böylece $U_1 \oplus K_3 \oplus ... \oplus K_{n+1} \nleq_e M$ olduğundan en az bir $1 < i \leq n$ için $U_i \cap (U_1 \oplus K_3 \oplus ... \oplus K_{n+1}) = 0$ dır. Bu seçim için genelliği bozmadan $i = 2$ alırsak $U_1 \oplus U_2 \oplus K_3 \oplus ... \oplus K_{n+1} \leq M$ olur. Bir önceki adımdaki gibi işlemlere devam edilirse

$$U_1 \oplus U_2 \oplus U_3 \oplus ... \oplus U_n \oplus K_{n+1} \leq M$$

elde edilir. Ancak $U_1 \oplus U_2 \oplus U_3 \oplus ... \oplus U_n \leq_e M$ olduğundan

$$K_{n+1} \cap (U_1 \oplus U_2 \oplus U_3 \oplus ... \oplus U_n) \neq 0$$

olur ki bu da dik toplam tanımı ile çelişir.

(2) (1)'den açıktır. ■

Tanım 2.5.5. *Bir önceki teoremdeki* n *doğal sayısı modüller için bir değişmezdir (invariant). Bu* n *sayısına* M *nin Goldie boyutu (Goldie rankı) denilir ve* $udimM$ *ile gösterilir.*

Özel olarak; bir M *modülünün sonlu Goldie boyutu sıfırdır.* $\iff M = 0$
Sonlu Goldie boyutu bir olan bütün modüller düzgündür.

Önerme 2.5.6. A *bir* R*-modül olsun.*
(1) *Eğer* B*, bir* A *modülünün bir kapalı alt modülü ise*

$$udimA = udimB + udimA/B$$

(2) $udim(A_1 \oplus \ldots \oplus A_n) = udimA_1 \oplus \ldots \oplus udimA_n$
(3) $B \leq A$ *ve* B *sonlu Goldie boyutlu olsun.* $udimA = udimB \iff B \leq_e A$

2.6. Noetherian ve Artinian Modüller

Tanım 2.6.1. *Bir* M*-modülün alt modülleri üzerinde artan zincir koşulunun (ACC) sağlanması için gerek ve yeter koşul, alt modüllerin her*

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq ...$$

zinciri için $A_{n+i} = A_n$ $(i = 1, 2, 3, ...)$ *olacak biçimde en az bir* $n \in \mathbb{N}$ *olmasıdır.*

Tanım 2.6.2. *Bir* M*-modülün alt modülleri üzerinde azalan zincir koşulunun (DCC) sağlanması için gerek ve yeter koşul, alt modüllerin her*

$$B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq ...$$

zinciri için $B_{n+i} = B_n$ $(i = 1, 2, 3, ...)$ *olacak biçimde en az bir* $n \in \mathbb{N}$ *olmasıdır.*

Tanım 2.6.3. *Herhangi bir* M *modülünün alt modüllerinin boştan farklı her alt kümesinin kapsama sıralamasına göre bir maksimal elemanı varsa ya da denk olarak tüm alt modüllerinin kümesi artan zincir koşulunu (ACC) sağlarsa* M *modülüne Noetherian denir. Bir* R *halkası, sağ* R*-modül olarak Noether ise sağ Noether halka denir. Örneğin,* $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ *modülü Noetherdir.*

Tanım 2.6.4. *Herhangi bir M modülünün alt modüllerinin boştan farklı her alt kümesinin kapsama sıralamasına göre bir minimal elemanı varsa ya da denk olarak tüm alt modüllerinin kümesi azalan zincir koşulunu (DCC) sağlarsa M modülüne Artinian denir. Bir R halkası, sağ R-modül olarak Artin ise sağ Artin halka denir.*

Teorem 2.6.5. *B bir A_R modülünün alt modülü olsun. A modülünün Noetherian (Artinian) olması için gerek ve yeter koşul B ve A/B nin Noetherian (Artinian) olmasıdır.*

Kanıt. Kanıtı Noetherian için yapacağız. Artinian için benzer şekildedir.
$(\Longrightarrow)$: A Noetherian olsun. B nin her alt modülü A nın alt modülü olduğundan, B nin kesin artan her zinciri A nın kesin artan zinciridir ve buradan sonludur. B Noetherian' dır. Şimdi,

$$A_1' \subseteq A_2' \subseteq A_3' \subseteq \ldots$$

A/B nin alt modüllerinin sonsuz artan bir zinciri olsun. A nın $\exists$ $A_1, A_2, \ldots$ alt modülleri vardır, herbiri B yi içerir. $A_i/B = A_i'$, $(i \in \mathbb{N})$ ve A içinde artan zincir koşulundan, $\exists n \in \mathbb{N} \ni A_n = A_{n+1} = \ldots$ bundan dolayı A/B Noetherian dır.
$(\Longleftarrow)$: B ve A/B Noetherian olsun. A nın alt modüllerinin sonsuz artan

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots$$

zincirini göz önüne alalım.

$$A_1 \cap B \subseteq A_2 \cap B \subseteq A_3 \cap B \subseteq \ldots$$

ve

$$\frac{A_1 + B}{B} \subseteq \frac{A_2 + B}{B} \subseteq \frac{A_3 + B}{B} \subseteq \ldots$$

sırasıyla B ve A/B nin alt modüllerinin sonsuz artan zinciridir. Buradan $\exists k, l \in \mathbb{N} \ni$

$$A_k \cap B = A_{k+1} \cap B = \ldots$$

$$\frac{A_\ell + B}{B} = \frac{A_{\ell+1} + B}{B} = \dots$$

$n = min\{k, \ell\}$ alalım. O zaman

$$A_n \cap B = A_{n+1} \cap B = \dots$$
$$\frac{A_n + B}{B} = \frac{A_{n+1} + B}{B} = \dots$$

Bunlardan ikincisinden,

$$A_n + B = A_{n+1} + B = \dots$$

$a_n \in A_n$ olsun. Bu durumda $a_n \in A_n + B = A_{n+1} + B$ ve buradan $\exists a_{n+1} \in A_{n+1}$ ve $b \in B \ni a_n = a_{n+1} + b$ dir. $a_n \in A_n \subset A_{n+1}$ olduğundan $a_n \in A_{n+1}$ ve buradan $b = a_n - a_{n+1} \in A_{n+1} \cap B = A_n \cap B$.

Özellikle $b \in A_n$ dir. Böylece $a_{n+1} = a_n + b \in A_n$ bundan dolayı $A_{n+1} \subset A_n$ ve buradan

$$A_n = A_{n+1}$$

Benzer şekilde,

$$A_{n+1} = A_{n+2} = \dots$$

Buradan A Noetherian'dır. ■

Teorem 2.6.6. *(Hilbert Taban Teoremi) R bir sağ Noether halka olsun. Bu durumda $R[x_1, ..., x_n]$ polinomlar halkası da sağ Noether'dir.*

2.7. Singular ve Nonsingular Modüller

Tanım 2.7.1. *M bir R-modül olsun.*

$$Z(M) = \{\ m \in M \mid mE = 0,\ \forall\ E \leq_e R_R\} = \{\ m \in M \mid r(m) \leq_e R\}$$

kümesine (alt modülüne) M nin singular (tekil) alt modülü denir. Eğer $Z(M) = M$ ise M ye singular, $Z(M) = 0$ ise M ye nonsingular modül denir.

Örneğin; U bir düzgün modül olmak üzere,

$Z(\mathbb{Z}_\mathbb{Z}) = Z(\mathbb{Q}_\mathbb{Z}) = Z(U_R) = 0$

Önerme 2.7.2. *M ve A R-modüller olsun.*

(i) *M nonsinguler'dir.(Yani $Z(M) = 0$) $\Longleftrightarrow$ tüm singular A_R modülleri için*

$$Hom(A_R, M_R) = 0$$

(ii) *$A \leq_e M \Longrightarrow M/A$ singuler'dir. ($Z(M/A) = M/A$)*

(iii) *M singular ve $A \leq M$ olsun. M/A singuler'dir. $\Longleftrightarrow A \leq_e M$ dir.*

Tanım 2.7.3. *M bir R-modül olsun. $M/Z(M)$ nin singuler alt modülü olan*

$$Z(M/Z(M)) = \frac{Z_2(M)}{Z(M)}$$

bölüm modülündeki $Z_2(M)$'ye 2. singular (Goldie Torsion) alt modül denir.

Önerme 2.7.4. *Bir M modülü için,*

(i) *$Z(M) \leq_e Z_2(M) \leq_c M$*

(ii) *$Z_2(\bigoplus\limits_I M_i) = \bigoplus\limits_I Z_2(M_i)$ ve $Z(\bigoplus\limits_I M_i) = \bigoplus\limits_I Z(M_i)$*

(iii) *$Z(M/Z_2(M)) = 0$ dir.*

2.8. Modül Dizileri

Tanım 2.8.1. *R bir halka olsun.*

$$\ldots \xrightarrow{\alpha_{i-2}} A_{i-1} \xrightarrow{\alpha_{i-1}} A_i \xrightarrow{\alpha_i} A_{i+1} \xrightarrow{\alpha_{i+1}} \ldots$$

$A_i \xrightarrow{\alpha_i} A_{i+1}$ sağ R-modüllerinin sonlu yada sonsuz bir dizisi olsun.

(a) *Her $A_{i-1} \xrightarrow{\alpha_{i-1}} A_i \xrightarrow{\alpha_i} A_{i+1}$ alt dizisi için $Im\alpha_{i-1} \leq Ker\alpha_i$ sağlanıyorsa bu diziye kompleks dizi denir.*

(b) *Her $A_{i-1} \xrightarrow{\alpha_{i-1}} A_i \xrightarrow{\alpha_i} A_{i+1}$ alt dizisi için $Im\alpha_{i-1} = Ker\alpha_i$ sağlanıyorsa bu diziye (yada komplekse) tam dizi denir.*

(c) *Her $A_{i-1} \xrightarrow{\alpha_{i-1}} A_i \xrightarrow{\alpha_i} A_{i+1}$ alt dizisi için $Im\alpha_{i-1} = Ker\alpha_i$, A_i nin bir diktoplananı ise bu tam diziye split tam dizi denir.*

Tanım 2.8.2. $0 \longrightarrow A \longrightarrow M \longrightarrow B \longrightarrow 0$ *şeklindeki tam diziye kısa tam dizi adı verilir.*

2.9. Serbest (Free) Modüller

Teorem 2.9.1. *$F = F_R$ ve $X = \{ x_i \mid i \in I\}$ de F nin bir alt kümesi olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:*

i) Her $0 \neq a \in F$ elemanı sadece sonlu sayıda $r_i \in R$ sıfırdan farklı olmak üzere, tek türlü olarak $a = \sum\limits_{i \in I} x_i r_i$ şeklinde yazılır.

ii) Her $i \in I$ için $f_i(r) = x_i r$ şeklinde tanımlanan $f_i : R \longrightarrow x_i R$ fonksiyonu bir izomorfizma olup $F = \bigoplus\limits_{i \in I} x_i R \cong \bigoplus\limits_{i \in I} R_i$, $R_i = R$ dir.

Kanıt. **i) $\Rightarrow$ ii)** f_i fonksiyonunun örten olduğu açıktır. Eğer $r, \ s \in R$ olmak üzere $f_i(r) = f_i(s)$ ise $x_i r = x_i s$ dır. Kabulümüzden $r = s$ olur. O halde f_i bire-bir bir fonksiyondur. Şimdi $i \in I$ olmak üzere f_i nın bir modül homomorfizma olduğunu görelim. $r, \ s \in R$ olmak üzere

$$f_i(r + s) = x_i(r + s) = x_i r + x_i s = f_i(r) + f_i(s)$$

ve

$$f_i(rs) = x_i(rs) = (x_i r)s = f_i(r)s$$

olduğundan f_i bir izomorfizmadır. O halde her $i \in I$ için $R \cong Rx_i$ dır. Ayrıca her bir $a \in F$ elemanı tek türlü olarak Rx_i modüllerinin $r_i x_i$ elemanlarının sonlu toplamı şeklinde yazılabildiğinden $F = \bigoplus\limits_{i \in I} Rx_i$ dir.
ii) $\Rightarrow$ i) $F = \bigoplus\limits_{i \in I} Rx_i$ olduğundan her $a \in F$ elemanı, $r_i \in R$ olmak üzere $a = \sum\limits_{i \in I} x_i r_i$ sonlu toplamı şeklinde gösterilebilir ve

$$a = \sum_{i \in I} x_i r_i^{'} = \sum_{i \in I} x_i r_i$$

ise her $i \in I$ için $x_i r_i^{'} = x_i r_i$ dır. f_i bir monomorfizma olduğundan $r_i = r_i^{'}$ olup, yazılış tektir. ■

Tanım 2.9.2. *Teorem 2.9.1'deki koşullardan birini sağlayan F_R modülüne serbest modül denir ve $X = \{ x_i \mid i \in I\}$ kümesine de F nin Tabanı denir. Örneğin, $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ bir serbest modüldür ancak $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ bir serbest modül değildir.*

2.10. Projektif ve İnjektif Modüller

Tanım 2.10.1. *R bir halka ve P bir R-modül olsun. Her $\beta : M \longrightarrow N$ epimorfizması ve $\alpha : P \longrightarrow N$ homomorfizması için $\beta \circ \alpha' = \alpha$ olacak biçimde bir $\alpha' : P \longrightarrow M$ homomorfizması varsa P ye Projektif modül denir. Diğer bir deyişle*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dotted, "\alpha'"'] \arrow[d, "\alpha"] \\ M \arrow[r, "\beta"'] & N \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli (yani $\beta \circ \alpha' = \alpha$) olacak şekilde bir α' homomorfizması varsa P ye Projektif modül denir.

Tanım 2.10.2. *A bir R-modül $X \leq A$ olsun. Herhangi $\varphi : N \longrightarrow A/X$ homomorfizması, $\omega : N \longrightarrow A$ homomorfizmasına genişliyorsa N ye $A-$projektif modül denir ve her A modülü $A-$projektif ise A ya quasi projektif modül denir.*

Tanım 2.10.3. *R bir halka ve I bir R-modül olsun. Her $\alpha : K \longrightarrow L$ monomorfizması ve $\beta : K \longrightarrow I$ homomorfizması için $\gamma \circ \alpha = \beta$ olacak biçimde bir $\gamma : L \longrightarrow I$ homomorfizması varsa I ya İnjektif modül denir. Diğer bir deyişle*

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & L \arrow[dl, dotted, "\gamma"] \\ I & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli (yani $\gamma \circ \alpha = \beta$) olacak şekilde bir γ homomorfizması varsa I ya İnjektif modül denir.

Tanım 2.10.4. *A bir R-modül $X \leq A$ olsun. Herhangi $\varphi : X \longrightarrow N$ homomorfizması, $\gamma : A \longrightarrow N$ homomorfizmasına genişliyorsa N ye $A-$injektif modül denir.*

Teorem 2.10.5. *$\{I_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ bir R-modüller ailesi olsun.*

$$I = \prod_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda \text{ injektif modüldür} \Longleftrightarrow \text{ Her } \lambda \in \Lambda \text{ için } I_\lambda \text{ injektif modüldür.}$$

Kanıt. $(\Longrightarrow) : I = \prod\limits_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ injektif modül olsun.
$f : A \longrightarrow B$ bir monomorfizma ve $g : A \longrightarrow I_\lambda$ bir homomorfizma olsun. I

injektif modül olduğundan, $i_\lambda : I_\lambda \longrightarrow \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ gömme homomorfizması olmak üzere $i_\lambda \circ g : A \longrightarrow I = \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ homomorfizması için $i_\lambda \circ g = h \circ f$ olacak şekilde bir $h : B \longrightarrow I$ homomorfizması bulunur. Yani

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[ldd, dotted, "h"] \\
I_\lambda \arrow[d, shift left, "i_\lambda"] & \\
I \arrow[u, shift left, "\pi_\lambda"] &
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir. O halde $\pi_\lambda : I \longrightarrow I_\lambda \quad \lambda$ .ncı izdüşüm dönüşümü olmak üzere $\pi_\lambda \circ h : B \longrightarrow I_\lambda$ homomorfizması için, $a \in A$ olmak üzere

$$((\pi_\lambda \circ h) \circ f)(a) = (\pi_\lambda \circ i_\lambda \circ g)(a) = g(a)$$

dır. O halde $\forall \lambda \in \Lambda$ için I_λ injektif modüldür.

($\Longleftarrow$) : $I_\lambda (\lambda \in \Lambda)$ injektif modül, $\psi : A \longrightarrow B$ bir monomorfizma ve $f : A \longrightarrow I$ bir homomorfizma olsun. Her $\lambda \in \Lambda$ için I_λ injektif modül olduğundan bir $g_\lambda : B \to I_\lambda$ homomorfizması vardır ki öyle ki aşağıdaki diyagramı değişmeli yapar, yani $g_\lambda \circ \psi = \pi_\lambda \circ f$ dir.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[ldd, dotted, "g_\lambda"] \\
I \arrow[d, "\pi_\lambda"'] & \\
I_\lambda &
\end{tikzcd}$$

Şimdi $g : B \to I$, $g(b) = \{g_\lambda(b)\}_{\lambda\in\Lambda}$ $(b \in B)$ fonkiyonunu tanımlayalım. g bir modül homomorfizmasıdır. $b \in B$ için

$$(\pi_\lambda \circ g)(b) = \pi_\lambda(g(b)) = g_\lambda(b)$$

olduğundan

$$(\pi_\lambda \circ g) = g_\lambda$$

dır. O halde

$$\pi_\lambda \circ f = g_\lambda \circ \psi = \pi_\lambda \circ g \circ \psi$$

olduğundan $f = g \circ \psi$ dır. Yani I injektif modüldür. ■

Teorem 2.10.6. *(Baer Kriteri) I bir R-modül olsun. I modülünün injektif olması için gerek ve yeter koşul her U (sağ) ideali için her $k : U \longrightarrow I_R$ modül homomorfizmasının bir $m : R \longrightarrow I_R$ modül homomorfizmasına genişletilebilmesidir (yani $m_{|U} = k$ olmasıdır).*

Teorem 2.10.7. *Bir M $\mathbb{Z}$-modülünün injektif olması için gerek ve yeter şart M nin bölünebilir (yani, her $x \in M$ ve her $n \in \mathbb{Z}$ için $x = na$ olacak biçimde bir $a \in M$ vardır) olmasıdır.*

Kanıt. ($\Longrightarrow$) : $M_{\mathbb{Z}}$ injektif olsun. $x \in M$ ve $n > 0$, $n \in \mathbb{Z}$ alalım. Her $m \in \mathbb{Z}$ için $f(m) = nm$ olmak üzere $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ ve her $m \in \mathbb{Z}$ için $g(m) = mx$ olmak üzere $g : \mathbb{Z} \longrightarrow M$ fonksiyonlarını tanımlayalım. f nin bir monomorfizma , g nin bir homomorfizma olduğu açıktır. $M_{\mathbb{Z}}$ injektif olduğundan

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & \mathbb{Z} \arrow[dl, dotted, "h"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapacak biçimde bir $h : \mathbb{Z} \longrightarrow M$ homomorfizması vardır. Bu durumda

$$x = g(1) = (h \circ f)(1) = h(f(1)) = h(n) = h(n.1) = nh(1)$$

olup $M_{\mathbb{Z}}$ bölünebilirdir.

($\Longleftarrow$) : $M_{\mathbb{Z}}$ bölünebilir olsun. Baer Kriterinden M nin injektif olduğunu gösterelim:
$\mathbb{Z}$ nin herhangi bir $0 \neq I$ idealinden M ye keyfi bir $f : I \longrightarrow M$ homomorfizmasını alalım. $n > 0$, $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $I = n\mathbb{Z}$ dir. M divisible olduğundan $f(n) = nx$ olacak biçimde bir $x \in M$ vardır. Her $m \in \mathbb{Z}$ için $g(m) = mx$ olmak üzere $g : \mathbb{Z} \longrightarrow M$ fonsiyonunu tanımlayalım. g bir homomorfizmadır. Her $nk \in n\mathbb{Z} = I$ için

$$g(nk) = nkx = knx = kf(n) = f(nk)$$

olduğundan $g_{|I} = f$ olur. Böylece Baer Kriterinden $M_{\mathbb{Z}}$ injektiftir. ■

Teorem 2.10.8. *R bir Noether halka ve $\{I_i \mid i \in \Lambda\}$ keyfi injektif R-modüllerin bir ailesi olsun. Bu durumda $\bigoplus\limits_{i\in\Lambda} I_i$ injektiftir.*

Kanıt. $\bigoplus\limits_{i\in\Lambda} I_i$ nin injektif olduğunu Baer Kriterini kullanarak gösterelim. L, R nin bir sağ ideali ve $h : L \to \bigoplus\limits_{i\in\Lambda} I_i$ bir homomorfizma olsun. R Noether halka olduğundan L sonlu üretilmiştir. Dolayısıyla Imh de sonlu üretilmiştir. Bu durumda I index kümesinin sonlu bir F altkümesi vardır ki Im$h \subseteq \bigoplus\limits_{i\in F} I_i$ dir. $\{I_i \mid i \in F\}$ injektif modüllerin sonlu bir ailesi olduğundan $\bigoplus\limits_{i\in F} I_i$ injektiftir. O halde bir $g : R \to \bigoplus\limits_{i\in F} I_i$ homomorfizması vardır ki aşağıdaki diyagramı değişmeli yapar, yani $g_{|L} = h$ dir.

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "i"] \arrow[d, "h"'] & R \arrow[dl, dotted, "g"] \\ \bigoplus\limits_{i\in F} I_i & \end{tikzcd}$$

Böylece $\bigoplus\limits_{i\in\Lambda} I_i$ modülü injektif olur. ∎

Teorem 2.10.9. *Her modül bir injektif modülde alt modül olarak kapsanır.*

Teorem 2.10.10. *A bir R-modül olsun. Bu durumda A modülünün injektif olması için gerek ve yeter koşul A nın A yı kapsayan her R-modülün bir dik toplananı olmasıdır.*

Kanıt. $(\Longrightarrow)$: A injektif bir R-modül ve $A \leq A'_R$ olsun. O halde

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "1_A"'] & A' \arrow[dl, dotted, "\phi"] \\ A & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde bir $\phi : A' \longrightarrow A$ homomorfizması vardır. Bir $a' \in A'$ alalım.

$$\begin{aligned} \phi(a') \in A &\Longrightarrow \phi(a') = \phi(\phi(a')) \\ &\Longrightarrow \phi(a' - \phi(a')) = 0 \\ &\Longrightarrow a' - \phi(a') \in Ker\phi \\ &\Longrightarrow a' \in Ker\phi + A \\ &\Longrightarrow A' = A + Ker\phi \end{aligned}$$

dır. Şimdi bir $x \in Ker\phi \cap A$ alalım. $x \in A$ ve $\phi(x) = x = 0$ olduğundan $Ker\phi \cap A = 0$ dır. O halde $A' = A \oplus Ker\phi$ dir. Yani $A \leq_d A'$ dür.

$(\Longleftarrow)$: Teorem 2.10.9'dan $A \leq I$ olacak biçimde bir I injektif modülü vardır. Kabulümüzden $I = A \oplus X$ olacak biçimde bir $X \leq I$ vardır. O halde A injektiftir. ■

Önerme 2.10.11. *Bir $0 \neq M_R$ modülünün injektif olması için gerek ve yeter koşul M nin hiç bir essential genişlemesinin olmamasıdır (yani $M \leq_e N$ ise $M = N$ dir).*

Kanıt. $(\Longrightarrow)$: M_R injektif bir modül ve V de M nin bir essential genişlemesi olsun. Teorem 2.10.10'dan $V = M \oplus T$ olacak şekilde bir $T \leq V$ vardır. $M \cap T = 0$ ve $M \leq_e V$ olduğundan $T = 0$ dır. O halde $V = M$ dir.

$(\Longleftarrow)$: M nin has essential genişlemesi olmasın. E de M yi içeren bir injektif modül olsun. M nin E de $M \cap T = 0$ olacak biçimde bir T komplementi vardır. Teorem 2.3.6'dan

$$M \cong \frac{M \oplus T}{T} \leq_e \frac{E}{T}$$

dir. M nin has essential genişlemesi olmadığından

$$\frac{M \oplus T}{T} = \frac{E}{T} \quad \text{veya} \quad M \oplus T = E$$

dir. Böylece M, E injektif modülünün bir dik toplananı olduğundan Teorem 2.10.10'dan injektiftir. ■

Önerme 2.10.12. *A bir R-modül ve E, A yı essential olarak kapsayan bir modül ve N de A yı kapsayan bir injektif modül olsun. Bu durumda $i : A \to N$ içerme monomorfizması olmak üzere, bir $g : E \to N$ monomorfizması vardır ki $g_{|A} = i$ dir.*

Kanıt. N injektif modül olduğundan bir $g : E \to N$ homomorfizması vardır ki aşağıdaki diyagramı değişmeli yapar, yani $g_{|A} = i$ dir.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[dl, dotted, "g"] \\ N & \end{tikzcd}$$

Bundan dolayı $A \cap Kerg = 0$ dır. Gerçekten;

herhangi bir $a \in A \cap Kerg$ alırsak,

$$a \in A \text{ ve } g(a) = a = 0$$

dır. $A \leq_e E$ ve $Kerg \leq E$ olduğundan

$$Kerg = 0$$

dır. O halde g bir monomorfizmadır. ■

Önerme 2.10.13. *A bir R-modül ve N de A yı kapsayan bir injektif modül olsun. Bu durumda N nin bir E alt modülü vardır ki E, A nın maksimal essential genişlemesidir.*

Kanıt. $\Omega = \{N' \mid A \leq_e N' \leq N\}$ olsun. $A \in \Omega$ olduğundan $\Omega \neq \emptyset$ dır. Ω kapsama bağıntısıyla bir kısmen sıralı kümedir. O halde Zorn Lemma'dan Ω nın bir maksimal E elemanı vardır. Şimdi E nin A nın maksimal essential genişlemesi olduğunu gösterelim. Farzedelim ki $E \leq_e E'$ olsun. Bu durumda Önerme 2.10.12'den, $i : E \to N$ içerme monomorfizması olmak üzere, bir $\theta : E' \to N$ monomorfizması vardır ki aşağıdaki diyagramı değişmeli yapar, yani $\theta_{|E} = i$ dir.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"'] & E' \arrow[dl, dotted, "\theta"] \\ N & \end{tikzcd}$$

Buradan $E = \theta(E) \leq \theta(E') \leq N$ ve $E \leq_e N$ olduğundan $\theta(E') \leq_e N$ dir, yani $\theta(E') \in \Omega$ dır. E, Ω nın maksimal elemanı olduğundan $\theta(E') = E$ dir, yani $E = E'$ dür. ■

Önerme 2.10.14. *A bir R-modül ve $A \leq E$ olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir;*

(a) E, A yı kapsayan essential injektif modüldür.

(b) E, A yı kapsayan maksimal essential modüldür.

(c) E, A yı kapsayan minimal injektif modüldür.

Kanıt. (a) ve (b) nin denkliği Önerme 2.10.11'den açıktır.
(b) $\Longrightarrow$ *(c)* Önerme 2.10.11'den E injektiftir. Varsayalım E' injektif olmak üzere $A \leq E' \leq E$ olsun. $A \leq_e E$ olduğundan $E' \leq_e E$ dir. Önerme

2.10.11'den $E^{'} = E$ olmalıdır. Böylece E, A yı kapsayan minimal injektif modüldür.

$(c) \Longrightarrow (b)$ Önerme 2.10.13'ten E nin bir $E^{''}$ alt modülü vardır ki $E^{''}$, A nın maksimal essential genişlemesidir ve böylece Önerme 2.10.11'den injektiftir. O halde varsayımdan $E = E^{''}$ dür. Böylece (b) koşulu sağlanır. ■

Tanım 2.10.15. *A bir R-modül olsun. Aşağıdaki Teoremdeki koşullardan birini sağlayan bir E $R-$modülüne A modülünün $injektif$ zarfı (hull) denir ve*
$E(A) = E$ ile gösterilir.

Teorem 2.10.16. *A bir R-modül olsun. Bu durumda bir E $R-$modülü vardır ki aşağıdaki koşullar sağlanır;*

(a) E, A yı kapsayan essential injektif modüldür.

(b) E, A yı kapsayan maksimal essential modüldür.

(c) E, A yı kapsayan minimal injektif modüldür.

Ayrica E_1 ve E_2, A yı essential olarak kapsayan iki injektif modül ise bir $\theta : E_1 \to E_2$ izomorfizması vardır ki aşağıdaki diyagramı değişmeli yapar.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"'] & E_1 \arrow[dl, dotted, "\theta"] \\ E_2 & \end{tikzcd}$$

Kanıt. Teorem 2.10.9, Önerme 2.10.13 ve Önerme 2.10.14'ten bu koşulları sağlayan bir E modülü vardır. Şimdi E_1 ve E_2, A yı essential olarak kapsayan iki injektif modül olsun. Önerme 2.10.12'den, $i : A \to E_2$ içerme monomorfizması olmak üzere, bir $\theta : E_1 \to E_2$ monomorfizması vardır ki $\theta_{|A} = i$ dir. O halde $E_1 \cong \theta(E_1)$ dir. E_1 injektif modül olduğundan $\theta(E_1)$ de injektiftir. $A \leq_e E_2$ ve $A = \theta(A) \leq \theta(E_1) \leq E_2$ olduğundan

$$\theta(E_1) \leq_e E_2$$

dir. $\theta(E_1)$ injektif olduğundan Önerme 2.10.11'den $\theta(E_1) = E_2$ dir. Sonuç olarak θ örten monomorfizma olduğundan izomorfizmadır. ■

Tanım 2.10.17. *M ve X R-modüller ve $N \leq M$ olsun. Her $\phi : N \to X$ homomorfizması bir $\psi : M \longrightarrow X$ homomorfizmasına genişlerse X modülüne M-injektif modül denir.*

Teorem 2.10.18. *M bir R-modül ve $K \leq M$ olsun.*

Bir X modülü $M -$ injektiftir $\Longleftrightarrow$ Aşağıdaki üç koşul sağlanır;

1. *X modülü $K-$injektiftir.*
2. *X modülü $\frac{M}{K}-$injektiftir.*
3. *Herhangi bir $\phi : K \longrightarrow X$ homomorfizması $\varphi : M \longrightarrow X$ homomorfizmasına genişler.*

Önerme 2.10.19. *R bir halka, $M = \bigoplus\limits_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ $(M_\lambda \leq M)$ ve X $R-$modül olsun.*

X modülü $M -$ injektiftir $\Longleftrightarrow$ X modülü $M_\lambda -$ injektiftir $(\lambda \in \Lambda)$.

Önerme 2.10.20. *R bir halka, $M = \prod\limits_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ ve A $R-$modül olsun.*

$$\prod_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha \; A - \textit{injektiftir} \Longleftrightarrow \textit{Her } \alpha \in \Lambda \textit{ için } M_\alpha \; A - \textit{injektiftir.}$$

Teorem 2.10.21. *R bir halka ve M bir $R-$modül olsun. Bir X $R-$modülünün $M-$injektif olması için gerek ve yeter koşul her $\varphi \in Hom(E(M), E(X))$ için $\varphi(M) \leq X$ olmasıdır.*

Kanıt. $E(X)$ injektif olduğundan, $\varphi \in Hom(M, E(X))$ i gözönüne almak yeterlidir.

$(\Longleftarrow)$: $N \leq M$ ve $\alpha \in Hom(N, X)$ olsun. $E(X)$ injektif olduğundan bir $\varphi \in Hom(M, E(X))$ vardır ki aşağıdaki diyagramı değişmeli yapar, yani $\varphi_{|N} = \alpha$ dır.

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\alpha"'] & M \arrow[ddl, dotted, "\varphi"] \\ X \arrow[d, "i"'] & \\ E(X) & \end{tikzcd}$$

Kabulümüzden, $\varphi(M) \subseteq X$ olduğundan $\varphi : M \longrightarrow X$ dir. Yani $\varphi_{|N} = \alpha$ dır. Böylece X modülü $M-$injektiftir.

$(\Longrightarrow)$: $N = \{\ m \in M \mid \varphi(m) \in X\}$ olsun. Açıktır ki $N \leq M$ dir. X modülü $M-$injektif olduğundan bir $\theta \in Hom(M, X)$ vardır ki aşağıdaki diyagramı değişmeli yapar, yani $\theta_{|N} = \varphi_{|N}$ dir.

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\varphi_{|N}"'] & M \arrow[dl, dotted, "\theta"'] \arrow[ddl, "\varphi"] \\
X \arrow[d, "i"'] & \\
E(X) &
\end{tikzcd}$$

Şimdi iddiamız $X \cap (\theta - \varphi)(M) = 0$ olduğudur. Gerçekten; $x \in X$ ve $m \in M$ için $x = (\theta - \varphi)(m)$ olsun. Bu durumda $\varphi(m) = \theta(m) - x \in X$ dir ve sonuç olarak $m \in N$ dir. O halde $x = \theta(m) - \varphi(m) = \varphi(m) - \varphi(m) = 0$ dır. $X \leq_e E(X)$ ve $(\theta - \varphi)(M) \leq E(X)$ olduğundan $(\theta - \varphi)(M) = 0$ dır. Böylece $\theta(M) = \varphi(M) \leq X$ dir. ■

Tanım 2.10.22. *Bir M modülü M-injektif ise M ye quasi-injektif modül denir.*

Açıktır ki, M modülü injektif ise quasi-injektiftir. Ancak tersi doğru değildir.

Örnek 2.10.23. *$M_R = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})_{\mathbb{Z}}$ modülü quasi-injektif olmasına karşın injektif değildir.*

Kanıt. $\bar{1} = 4.\bar{b}$ olacak biçimde bir $\bar{b} \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ olmadığından $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})_{\mathbb{Z}}$ modülü divisible değildir. Dolayısıyla injektif değildir.

Şimdi $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})_{\mathbb{Z}}$ modülünün quasi-injektif olduğunu görmek için; $N \leq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ olmak üzere her $f : N \longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ homomorfizması için $h : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $h_{|N} = f$ olacak biçimde bir h homomorfizmasının varlığını göstermeliyiz.
$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})_{\mathbb{Z}}$ nin alt modülleri: 0, kendisi ve $2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ dir.

$$Hom(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) = \left\{\ I_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}, f_2, f_3, 0 \mid f_2(\bar{1}) = \bar{2}, f_3(\bar{1}) = \bar{3}\right\}$$

dir. Bu homomorfizmalardan monomorfizma olanlar f_3 ve birim dönüşüm $I_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}$ dır.

1.Durum: $f : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ herhangi bir homomorfizma ise

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \arrow[r, "I"] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \arrow[dl, dotted, "h"] \\ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$

olup $h = f$ homomorfizması diyagramı değişmeli yapar.

2.Durum: Aşağıdaki diyagramı göz önüne alalım:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "I"'] & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \arrow[dl, dotted, "h"] \\ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$

$h(\bar{1}) = \bar{3}$ koşulunu sağlayan h homomorfizması diyagramı değişmeli yapar.

3.Durum: Aşağıdaki diyagramı göz önüne alalım:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "f_2"'] & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \arrow[dl, dotted, "h"] \\ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$

$h(\bar{1}) = \bar{2}$ koşulunu sağlayan h homomorfizması diyagramı değişmeli yapar.

4.Durum: Aşağıdaki diyagramı göz önüne alalım:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "f_3"'] & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \arrow[dl, dotted, "h"] \\ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$

$h = I_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}$ homomorfizması diyagramı değişmeli yapar.

5.Durum: Aşağıdaki diyagramı göz önüne alalım:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "0"'] & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \arrow[dl, dotted, "h"] \\ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$

$h = 0$ homomorfizması diyagramı değişmeli yapar.

4.Durum: $Hom(2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) = \{i(\text{içerme dönüşümü})\}$ dür.

$$\begin{tikzcd}
2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"'] & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \arrow[dl, dotted, "h"] \\
\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} &
\end{tikzcd}$$

$h = I_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}$ homomorfizması diyagramı değişmeli yapar.

Sonuç olarak $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})_{\mathbb{Z}}$ quasi-injektif modüldür. ■

Sonuç 2.10.24. *Bir M modülünün quasi-injektif olması için gerek ve yeter koşul her $f \in End(E(M))$ için $f(M) \subseteq M$ olmasıdır.*

Tanım 2.10.25. $\{M_i \mid i \in I\}$ *herhangi R-modüller ailesi olsun. Eğer her farklı $i, j \in I$ için M_i M_j-injektif ise $\{M_i \mid i \in I\}$ ailesine göreceli (relatively) injektif denir.*

Önerme 2.10.26. $M = \bigoplus\limits_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha$ *bir $R-$modül olsun. Aşağıdakiler denktir;*

(i) *M modülü quasi-injektiftir.*

(ii) *Her $\alpha \in \Lambda$ için M_α alt modülü quasi-injektif ve $M(\Lambda - \alpha)$ alt modülü $M_\alpha-$injektiftir.*

Kanıt. **(i) $\Longrightarrow$ (ii)** M modülü quasi-injektif olsun. Önerme 2.10.19'dan her $\alpha \in \Lambda$ için $\bigoplus\limits_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha$ $M_\alpha-$injektiftir. O halde Önerme 2.10.20'den her $\alpha \in \Lambda$ için M_α $M_\alpha-$injektif ve $\bigoplus\limits_{i \in \Lambda - \alpha} M_i = M(\Lambda - \alpha)$ $M_\alpha-$injektiftir.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Her $\alpha \in \Lambda$ için M_α alt modülü quasi-injektif ve $M(\Lambda - \alpha)$ alt modülü $M_\alpha-$injektif olsun. O halde Önerme 2.10.20'den $\bigoplus\limits_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha$ $M_\alpha-$injektif olduğundan Önerme 2.10.19'dan $\bigoplus\limits_{a \in \Lambda} M_\alpha$ quasi-injektiftir. ■

3. SÜREKLİ, YARI SÜREKLİ VE CS MODÜLLER

Bu bölümde, CS modüller ile CS modüller yardımıyla tanımlanan sürekli modüller tanımlanıp bu tür modüller için yapısal özellikler verilecektir. Daha ayrıntılı bilgi için [7- 10] önerilir.

Tanım 3.1. *M bir R-modül olsun.*

(C_1) *M nin her alt modülü M nin bir diktoplananı içinde essential olarak kapsanır.*

(C_2) *M nin her A alt modülü için A, M nin bir diktoplananına izomorfik iken A da M nin bir diktoplananıdır.*

(C_3) *M nin $M_1 \cap M_2 = 0$ olacak biçimdeki her M_1 ve M_2 diktoplanan alt modülleri için $M_1 \oplus M_2$ de M nin bir diktoplananıdır.*

Önerme 3.2. *Herhangi bir (quasi-) injektif M modülü (C_1) özelliğini sağlar.*

Kanıt. $N \leq M$, $E_1 = E(N)$ olmak üzere $E(M) = E_1 \oplus E_2$ olsun. M (quasi-) injektif modül olduğundan

$$M = M \cap E(M) = M \cap (E_1 \oplus E_2) = (M \cap E_1) \oplus (M \cap E_2)$$

dir. $N \leq_e E_1$ ve $N \leq M$ olduğundan $N \leq M \cap E_1 \leq E_1$ dir. O halde, Önerme 2.2.2 (ii)'den $N \leq_e M \cap E_1$ dir. ■

Örnek 3.3. *$\mathbb{Z}$ bir düzgün modül olduğundan CS-modüldür. Ancak quasi-injektif (dolayısıyla da injektif) değildir. Çünkü $E(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$ olup, $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$, $f(m) = \frac{1}{2}m$ ($m \in \mathbb{Q}$) modül homomorfizması için $f(\mathbb{Z}) \nsubseteq \mathbb{Z}$ olduğundan Sonuç* 2.10.24*'ten $\mathbb{Z}$ quasi-injektif değildir.*

Burada $E(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$ olduğunu gösterelim: $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ modülü için $E(\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}) = \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ dir. Gerçekten; $\mathbb{Z}$ nin bir $0 \neq I$ idealinden $\mathbb{Q}$ ya keyfi bir $f : I \to \mathbb{Q}$ homomorfizması alalım. I, $\mathbb{Z}$ nin bir ideali olduğundan $n > 0$ ve $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$I = n\mathbb{Z}$ dir. $\mathbb{Q}$ nun her $\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$ elemanı ve her $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ için

$$\frac{a}{b} = n.\frac{c}{d}$$

olacak şekilde bir $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ bulunabildiğinden

$$f(n) = n\frac{p}{q}$$

olacak biçimde bir $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ vardır. Her $m \in \mathbb{Z}$ için

$$g(m) = m\frac{p}{q}$$

olmak üzere $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ fonksiyonunu tanımlayalım. g bir homomorfizmadır. Her $nk \in n\mathbb{Z} = I$ için

$$g(nk) = nk\frac{p}{q} = kn\frac{p}{q} = kf(n) = f(nk)$$

olduğundan $g_{|I} = f$ dir. Yani $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ injektiftir.

Yardımcı Teorem 3.4. *Bir M modülü (C_2) özelliğini sağlıyor ise (C_3) özelliğini de sağlar.*

Kanıt. $M = K \oplus L$ ve $\pi : K \oplus L \longrightarrow L$ izdüşüm dönüşümü epimorfizma olsun. Buradan $N \leq M$ için

$$K \oplus L = K \oplus \pi(N)$$

dir. $\pi|_N$ dönüşümü monomorfizma olduğunda (C_2) özelliğinden $\pi(N) \leq_d M$ dir. Öyleyse, $\pi(N) \leq L$ ve $K \oplus \pi(N) \leq_d M$ dir. ■

Tanım 3.5. *Bir M R-modülüne ;*

(a) *(C_1) özelliğini sağlıyorsa CS (ya da extending) modül,*

(b) *(C_1) ve (C_2) özelliklerini sağlıyorsa sürekli modül,*

(c) *(C_1) ve (C_3) özelliklerini sağlıyorsa yarı sürekli modül adı verilir.*

Yardımcı Teorem 3.4'ten bir sürekli modülün yarı sürekli olduğu açıktır. Ancak tersi doğru değildir. Örneğin; $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ modül yarı sürekli olmasına karşın sürekli değildir.

Önerme 3.6. *M bir R-modül olsun. M nin CS modül olması için gerek ve yeter koşul M nin her kapalı alt modülünün M nin diktoplananı olmasıdır.*

Kanıt. $(\Longrightarrow)$: $L \leq M$ kapalı bir alt modül ve M modülü (C_1) özelliğini sağlasın. Hipotezden $L \leq_e K \leq_d M$ olacak biçimde bir $K \leq M$ vardır. L, kapalı bir alt modül olduğundan essential genişlemesi yoktur,
yani $L = K \leq_d M$ dir.
$(\Longleftarrow)$: $A \leq M$ alalım. Önerme 2.3.9'dan $A \leq_e B \leq_c M$ olacak şekilde bir $B \leq M$ vardır. Hipotezden $B \leq_d M$ dir. Böylece M modülü (C_1) özelliğini sağlar. ■

Yardımcı Teorem 3.7. *M bir R-modül ve $A \leq M$ olsun. Eğer, A, M nin bir diktoplananında kapalı ise M de de kapalıdır.*

Kanıt. $A \leq_c B \leq_d M$ olsun. Bir modülde her diktoplanan bir komplement alt modül olduğundan $A \leq_c B \leq_c M$ Önerme 2.3.12'den $A \leq_c M$ dir. ■

Önerme 3.8. *M_R bir ayrıştırılamaz modül olsun. M modülünün CS olması için gerek ve yeter koşul M modülünün düzgün olmasıdır.*

Kanıt. $(\Longrightarrow)$: M ayrıştırılamaz CS modül olsun. $0 \neq K \leq M$ için $K \leq_e L \leq_d M$ olacak şekilde $L \leq_d M$ vardır. M ayrıştırılamaz olduğundan $L = 0$ veya $L = M$ dir. $L \neq 0$ olduğundan $L = M$ olup $K \leq_e M$ dir. Yani M düzgündür.
$(\Longleftarrow)$: M düzgün olsun. $N \leq_c M$ ise $N = 0$ veya $N = M$ dir. Öyleyse $N \leq_d M$ dir. Dolayısıyla M, CS tir. ■

Önerme 3.9. *Bir M modülünün CS olması için gerek ve yeter koşul $N \cap L = 0$ koşulunu sağlayan her N ve L alt modülleri için $L \leq K$ ve $N \cap K = 0$ olacak şekilde bir $K \leq_d M$ var olmasıdır. Üstelik, bu durumda $N \oplus K \leq_e M$ dir.*

Kanıt. $(\Longrightarrow)$: M modülü CS, N ve L de M nin $N \cap L = 0$ koşulunu sağlayan alt modülleri olsunlar. Bu durumda N nin $L \leq K$ olacak biçimde bir komplementi vardır. Hipotezden $K \leq_d M$ olur.
$(\Longleftarrow)$: $L \leq_c M$ olsun. Bu durumda bir $N \leq M$ vardır öyle ki L, N nin komplementidir. Hipotezden bir $K \leq_d M$ vardır öyle ki $L \leq K$ ve $N \cap K = 0$ dır. Böylece $L = K$ elde edilir. Son kısım Önerme 2.3.7'den görülür. ■

Önerme 3.10. *M, (C_i) $(i = 1, 2, 3)$ özelliklerini sağlayan bir modül ve $N \leq_d M$ olsun. Bu durumda N de (C_i) $(i = 1, 2, 3)$ koşulunu sağlar.*

Kanıt. M, CS olsun. $N \leq_d M$ ve $K \leq_c N$ alalım. Önerme 2.3.12'den $K \leq_c M$ dir. M, CS olduğundan $K \leq_d M$ dir. Dolayısıyla $M = K \oplus L$ olacak şekilde $L \leq M$ vardır. Buradan

$$N = N \cap M = N \cap (K \oplus L) = K \oplus (N \cap L)$$

olup $K \leq_d N$ dir. Yani N, CS modüldür. M, (C_2) özelliğini sağlasın. $N \leq_d M$ ve $K \leq N$ alalım. K, N nin bir diktoplananına izomorfik olsun. Öyleyse K, M nin bir diktoplananına izomorfiktir. M, (C_2) olduğundan $K \leq_d M$ dir. Dolayısıyla $K \leq_d N$ dir. N, (C_2) özelliğine sahiptir.

M, (C_3) özelliğini sağlasın. $N \leq_d M$, K_1 ve K_2 de N nin $K_1 \cap K_2 = 0$ olacak biçimde iki dik toplananı olsun. O halde $M = K_1 \oplus K_2 \oplus L$ olacak biçimde bir $L \leq M$ vardır.

$$N = N \cap M = N \cap (K_1 \oplus K_2 \oplus L) = K_1 \oplus (N \cap (K_2 \oplus L)) = K_1 \oplus K_2 \oplus (N \cap L)$$

olduğundan N, (C_3) özelliğini sağlar. ■

Önerme 3.10'dan (yarı) sürekli bir M modülünün her diktoplananı (yarı) süreklidir.

CS-modüllerin dik toplamının her zaman CS olması gerekmez. Buna ilişkin örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek 3.11. *([11]) p asal bir tamsayı olmak üzere $M_1 = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus 0$, $M_2 = 0 \oplus \mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z}$ ve $M_{\mathbb{Z}} = M_1 \oplus M_2$ olsun. Bu durumda,*

i) $K \leq_c M_{\mathbb{Z}} \Leftrightarrow K = 0,\ M_1,\ M_2,\ M$ ya da $b \in \mathbb{Z}$ için, $b \notin p^3\mathbb{Z}$ olmak üzere $K = (1 + p\mathbb{Z}, b + p^3\mathbb{Z})$ dür.

ii) $M_{\mathbb{Z}}$, CS-modül değildir.

Kanıt. **(i)** $0,\ M_1,\ M_2,\ M \leq_d M$ olduğundan bunlar M nin komplementleridir. Şimdi $b \notin p^3\mathbb{Z}$ için $K = (1 + p\mathbb{Z}, b + p^3\mathbb{Z}) \leq_c M$ olduğunu gösterelim: K devirli bir alt modül ve

$$\begin{aligned} p^3K &= p^3\mathbb{Z}(1+p\mathbb{Z}, b+p^3\mathbb{Z}) \\ &= \mathbb{Z}(p^3+p\mathbb{Z}, p^3b+p^3\mathbb{Z}) \;=\; \mathbb{Z}(0+p\mathbb{Z}, 0+p^3\mathbb{Z}) \;=\; 0 \end{aligned}$$

olup

$$p^3M = p^3(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z}) = 0$$

dır. $M_{\mathbb{Z}}$ nin Goldie boyutu 2 olduğundan K nın Goldie boyutu 0, 1 veya 2 dir. K nın Goldie boyutu, 0 ve 2 olamayacağından 1 olmalıdır. Yani K düzgün alt modüldür. $L \leq M$ için $K \leq_e L$ olsun. M sonlu üretilmiş olduğundan L düzgündür ve böylece devirlidir (bakınız, [5]). O halde $L = (c+p\mathbb{Z}, d+p^3\mathbb{Z})\mathbb{Z}$ olan $c, d \in \mathbb{Z}$ vardır. $K \leq_e L$ olduğundan,

$$(1+p\mathbb{Z}, b+p^3\mathbb{Z}) = n(c+p\mathbb{Z}, d+p^3\mathbb{Z})$$

olacak biçimde $n \in \mathbb{Z}$ vardır. O halde $1 \equiv nc \ (modp)$ ve $b \equiv nd \ (modp^3)$ dür. $p \nmid n$ dir. Eğer $p \mid n$ olsaydı $1 \equiv 0(modp)$ çelişkisine varılırdı. Öyleyse $1 = nc + sp$ olacak biçimde $s \in \mathbb{Z}$ vardır. Böylece, $(1-nc)^3 = s^3p^3$ olup $1 - nt = s^3p^3$ olacak biçimde $t \in \mathbb{Z}$ vardır. Buradan

$$\begin{aligned} t(1+p\mathbb{Z}, b+p^3\mathbb{Z}) \;=\; nt(c+p\mathbb{Z}, d+p^3\mathbb{Z}) &= (1-s^3p^3)(c+p\mathbb{Z}, d+p^3\mathbb{Z}) \\ &= (c+p\mathbb{Z}, d+p^3\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

olur. Yani $K = L$ bulunur. Sonuç olarak, K nın hiçbir essential genişlemesi olmadığından $K \leq_c M$ dir.

Şimdi $0 \neq N,\ M_1,\ M_2,\ M \leq_c M$ olsun. O halde Önerme 2.5.2'den N, M de maksimal düzgün alt modüldür. Böylece, $(a+p\mathbb{Z}, b+p^3\mathbb{Z}) \in N$ olacak biçimde $a \notin p\mathbb{Z}$ ve $b \notin p^3\mathbb{Z}$ vardır. Genelliği bozmadan $a = 1$ alabiliriz. Böylece $(1+p\mathbb{Z}, b+p^3\mathbb{Z})\mathbb{Z} \subseteq N$ ve $(1+p\mathbb{Z}, b+p^3\mathbb{Z})\mathbb{Z} \leq_e N$ dir. $(1+p\mathbb{Z}, b+p^3\mathbb{Z})\mathbb{Z} \leq_c M$ olduğundan $N = (1+p\mathbb{Z}, b+p^3\mathbb{Z})\mathbb{Z}$ olur. Böylece istenilen sonuç elde edilir.

(ii) Şimdi $N = (1+p\mathbb{Z}, p+p^3\mathbb{Z})\mathbb{Z} \leq M$ alalım. (i)'den $N \leq_c M$ dir ve N nin mertebesi p^2 dir. Eğer $N \leq_d M$ olsaydı $M = N \oplus N'$ olacak biçimde p^2 mertebeli $N' \leq M$ olurdu ki bu da $p^2M = p^2(N \oplus N') = 0$ ile çelişirdi. O halde N, M nin dik toplananı değildir. Dolayısıyla M, CS değildir. ■

Aşağıda hangi koşullar altında CS-modüllerin (sonlu) dik toplamının bir CS-modül olduğunu gösteren önermeler verilecektir.

Yardımcı Teorem 3.12. *M, her maksimal düzgün alt modülü bir dik toplanan olan bir modül olsun. $K \leq_c M$ ve K, sonlu Goldie boyutlu ise $K \leq_d M$ dir.*

Kanıt. U, K nın bir maksimal düzgün alt modülü olsun. Önerme 2.5.2'den U, M nin bir maksimal düzgün alt modülüdür. O halde hipotezden, $M = U \oplus V$ olacak şekilde $V \leq M$ vardır. Buradan;

$$K = K \cap M = K \cap (U \oplus V) = U \oplus (K \cap V)$$

dir. Bu durumda $U \leq_d K$ dır. $K \cap V \leq_c K \leq_c M$ için Önerme 2.3.12'den $K \cap V \leq_c M$ dir ve $K \cap V$ nin Goldie boyutu K nın Goldie boyutundan küçüktür. K nın Goldie boyutu üzerinden tümevarımla $K \cap V$, M nin ve böylece V nin bir diktoplananıdır. Öyleyse K, M nin dik toplananıdır. ■

Sonuç 3.13. *M sonlu Goldie boyutlu bir modül olsun.*
M nin her maksimal düzgün alt modülü bir dik toplanan ise M, CS-modüldür.

Kanıt. Yardımcı Teorem 3.12'den açıktır. ■

Yardımcı Teorem 3.14. *A ve B CS modüller olmak üzere $M = A \oplus B$ olsun. Bu durumda, M nin CS modül olması için gerek ve yeter koşul M nin $K \cap A = 0$ veya $K \cap B = 0$ özelliğindeki K komplement alt modülünün M nin bir dik toplananı olmasıdır..*

Kanıt. $(\Longrightarrow)$: Açık.
$(\Longleftarrow)$: M nin $K \cap A = 0$ veya $K \cap B = 0$ özelliğindeki K komplement alt modülü M nin bir diktoplananı ve $L \leq_c M$ olsun. Şimdi $L \cap B \leq_e H$ olacak şekilde $H \leq_c L$ vardır. Önerme 2.3.12'den $H \leq_c M$ dir ve $H \cap A = 0$ dır. Öyleyse $H \leq_d M$ dir. Buradan $M = H \oplus H'$ olacak şekilde $H' \leq M$ vardır. Böylece, $L = L \cap M = L \cap (H \oplus H') = H \oplus (L \cap H')$. Böylece
Önerme 2.3.12'den $L \cap H' \leq_c M$ dir ve $(L \cap H') \cap B = 0$ dır. Hipotezden $L \cap H' \leq_d M$ dir ve böylece $L \cap H' \leq_d H'$ olur. Buradan $L \leq_d M$ dir. Yani M, CS tir. ■

Yardımcı Teorem 3.15. *M_1, M_2 R-modüller ve $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. M_1, M_2-injektiftir. $\Longleftrightarrow$ $\forall\ N \leq M$ ve $N \cap M_1 = 0$ için $M = M_1 \oplus M^{'}$ ve $N \leq M^{'}$ olacak biçimde $M^{'} \leq M$ vardır.*

Kanıt. ($\Longrightarrow$) : M_1, M_2-injektif olsun. $i = 1, 2$ için $\pi_i : M \longrightarrow M_i$ kanonik izdüşüm olsun. $N \leq M$ alalım öyleki $N \cap M_1 = 0$ olsun. Şimdi

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & M_2 \\ & M_1 & \end{tikzcd}$$

diyagramını düşünelim. Buradan $\alpha = \pi_2|_N$ ve $\beta = \pi_1|_N$ dir. Hipotezden en az bir $\theta : M_2 \longrightarrow M_1$ vardır öyle ki $\theta\alpha = \beta$ dır.

$$M^{'} = \{\ \theta(m) + m \mid m \in M_2\}$$

kümesini tanımlayalım. O halde $M^{'} \leq M$ dir. $m \in M$ için $m = m_1 + m_2$ olacak şekilde $m_1 \in M_1$, $m_2 \in M_2$ vardır. O halde,

$$m = m_1 + m_2 = (m_1 - \theta(m_2)) + (m_2 + \theta(m_2)) \in M_1 + M^{'}$$

dür. Öyleyse $M = M_1 + M^{'}$ dür. Diğer yandan, $x \in M_1 \cap M^{'}$ olsun. Öyleyse $x \in M_1$ ve $x = \theta(n) + n$ olacak şekilde $n \in M_2$ vardır. Buradan, $x - \theta(n) = n \in M_1 \cap M_2 = 0$ dır. Yani $n = 0$ dır. Böylece,

$$x = \theta(0) + 0 = 0 + 0 = 0$$

dır. Yani $M = M_1 \oplus M^{'}$ dür. Ayrıca $N \leq M^{'}$ dür.

($\Longleftarrow$) : $N \cap M_1 = 0$ olan her $N \leq M$ için $M = M_1 \oplus M^{'}$ ve $N \leq M^{'}$ olacak şekilde $M^{'} \leq M$ olsun. $L \leq M_2$ ve $\phi : L \longrightarrow M_1$ bir R homomorfizma olsun. $H = \{\ x - \phi(x) \mid x \in L\}$ denirse $H \leq M$ ve $H \cap M_1 = 0$ olur. O halde hipotezden $M = M_1 \oplus H^{'}$ ve $H \leq H^{'}$ olacak şekilde $H^{'} \leq M$ vardır. Şimdi $\pi : M \longrightarrow M_1$ kanonik izdüşüm olsun. Öyleyse $Ker\pi = H^{'}$ dür. O halde $\pi|_{M_2} = M_2 \longrightarrow M_1$ dir ve $x \in L$ için,

$$\pi(x) = \pi(\phi(x) + (x - \phi(x))) = \phi(x)$$

dir. Böylece M_1, M_2-injektiftir. ■

Teorem 3.16. *M_i ler $(1 \leq i \leq n)$ göreceli injektif modüller ve M, M_i lerin sonlu diktoplamı olsun. Bu durumda,*

$$M,\ CS\ tir. \Longleftrightarrow Her\ bir\ 1 \leq i \leq n\ için\ M_i,\ CS\ tir.$$

Kanıt. $(\Longrightarrow)$: Açıktır.
$(\Longleftarrow)$: Her bir $1 \leq i \leq n$ için M_i ler CS olsun. O halde n üzerinden tümevarımla $n = 2$ için M nin CS olduğunu ispatlamamız yeterlidir.
$K \cap M_1 = 0$ olan $K \leq_c M$ alalım. Yardımcı Teorem 3.15'den $K \leq M'$ ve $M = M_1 \oplus M'$ olacak şekilde $M' \leq M$ vardır. O halde $M' \cong M_2$ ve böylece M' bir CS modül olur. (CS izomorfizmada korunur.) $K \leq_c M'$ olduğu açıktır. Buradan $K \leq_d M'$ ve dolayısıyla $K \leq_d M$ dir. Benzer şekilde $H \cap M_2 = 0$ olan herhangi bir $H \leq_c M$ için $H \leq_d M$ dir. Yardımcı Teorem 3.14'den M, CS-modüldür. ■

Teorem 3.17. *Bir M modülünün CS olması için gerek ve yeter koşul M' ve $Z_2(M)$, CS modüller ve $Z_2(M)$, M'-injektif olacak biçimde $M' \leq M$ için $M = Z_2(M) \oplus M'$ olmasıdır.*

Kanıt. $(\Longleftarrow)$: M' ve $Z_2(M)$, CS modüller ve $Z_2(M)$, M'-injektif olsun. $M = Z_2(M) \oplus M'$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $M' \cong M/Z_2(M)$ ise $Z(M') = Z(M/Z_2(M)) = 0$ olduğundan M' nonsingulerdir. Burdan $Hom(Z_2(M), M') = 0$ bulunur. Böylece M', $Z_2(M)$-injektiftir. Teorem 3.16'dan M, CS-modüldür.
$(\Longrightarrow)$: M, CS olsun. Önerme 2.7.4'ten $M/Z_2(M)$ nonsinguler ve $Z_2(M) \leq_c M$ dir. Böylece $Z_2(M) \leq_d M$ dir. Buradan bir $M' \leq M$ için $M = Z_2(M) \oplus M'$ dür. Yardımcı Teorem 3.10'dan M' ve $Z_2(M)$ CS tir. Şimdi $N \leq M'$ için $\phi : N \longrightarrow Z_2(M)$ bir homomorfizma olsun. $L = \{\ x - \phi(x) \mid x \in N\}$ diyelim. O halde $L \leq M$ ve $L \cong N$ dir. $M = M_1 \oplus M_2$ ve $L \leq_e M_1$ olacak biçimde M_1, $M_2 \leq M$ vardır. $L \cong N$ olduğunda

$$Z_2(N) = Z_2(L) \text{ ve } Z_2(N) \leq Z_2(M) = 0$$

olduğundan $Z_2(L) = 0$ olur ki buradan $L \leq_e M_1$ olduğundan $Z_2(M_1) = 0$ olur.

$$Z_2(M) = Z_2(M_1) \oplus Z_2(M_2) = Z_2(M_2) \subseteq M_2$$

olur. $M = Z_2(M) \oplus M'$ olduğundan $M_2 = Z_2(M) \oplus (M_2 \cap M')$ bulunur. Bundan dolayı da $M = M_1 \oplus Z_2(M) \oplus (M_2 \cap M')$ olur. $\pi : M \longrightarrow Z_2(M)$ kanonik projeksiyon olsun. $Ker\pi = M_1 \oplus (M_2 \cap M')$ olup $\pi|_{M'} = \theta$ ile gösterelim. O halde $\theta : M' \longrightarrow Z_2(M)$ homomorfizmadır. Üstelik herhangi bir $x \in L$ için $x = \phi(x) + x - \phi(x)$ olduğundan $\phi(x) = \theta(x)$ dir. Yani; $\theta|_N = \phi$ olur. $Z_2(M)$, M'-injektiftir. ■

Sonuç 3.18. *M_1 injektif modül ve M_2 de nonsinguler CS-modül olsun. Bu durumda $M = M_1 \oplus M_2$ bir CS-modüldür.*

Kanıt. Teorem 3.17'nin genelliğini bozmadan M_1 inde nonsinguler olduğunu kabul edebiliriz. Şimdi $K \leq_c M$ olsun. Eğer $K \cap M_1 = 0$ ise Yardımcı Teorem 3.15'ten $K \leq A$ ve $M = M_1 \oplus A$ olacak biçimde $A \leq M$ vardır. $A \cong M_2$ olduğundan A, CS tir ve $K \leq_d A$ olur. O halde $K \leq_d M$ dir. Eğer $K \cap M_1 \neq 0$ ise $K \cap M_1 \leq_e L \leq_d M_1$ olacak biçimde $L \leq M_1$ vardır. M nonsinguler olduğundan $K + (K \cap M_1) \leq_e K + L$ ve böylece $K = K + L$ dir. Yani $L \leq K$ olur. O halde öyle bir $L' \leq M_1$ için $M_1 = L \oplus L'$ ve $M = L \oplus L' \oplus M_2$ dir. Modüler kuralından, $K = L \oplus [K \cap (L' \oplus M_2)]$ olur. $K' = K \cap (L' + M_2)$ olsun. O halde $K' \leq_c L' \oplus M_2$ ve $K' \cap L' = 0$ dır. Böylece ispatın ilk kısmından $K' \leq_d L' \oplus M_2$ ve böylece $K \leq_d M$ dir. Yani, M, CS tir. ■

4. (C_{11})-MODÜLLER

Bu bölümde (C_1)-modüllerin bir genellemesi olan (C_{11})-modül ailesinden bahsedeceğiz. Daha ayrıntılı bilgi için [11- 15] önerilir.

Tanım 4.1. *M bir R-modül olsun. Eğer M nin her alt modülü, M nin bir dik toplananı olan bir komplemente sahipse M ye (C_{11})-modül (veya (C_{11}) koşulunu sağlar) denir.*

Önerme 4.2. *Bir M_R modülü için aşağıdaki koşullar denktir:*

(1) M modülü (C_{11}) koşulunu sağlar.

(2) M deki herhangi bir L komplement alt modülü için, $K \leq_d M$ olacak biçimde L nin bir K komplementi vardır.

(3) Herhangi bir $N \leq M$ için bir $K \leq_d M$ vardır öyle ki $N \cap K = 0$ ve $N \oplus K \leq_e M$ dir.

(4) Herhangi bir $L \leq_c M$ için bir $K \leq_d M$ vardır öyle ki $L \cap K = 0$ ve $L \oplus K \leq_e M$ dir.

Kanıt. **(1)**$\Rightarrow$ **(2)** , **(3)**$\Rightarrow$ **(4)** Açıktır.

(1)$\Leftrightarrow$ **(3)**, **(2)**$\Leftrightarrow$ **(4)** Yardımcı Teorem 2.3.8'den açıktır.

(4)$\Rightarrow$ **(1)** $A \leq M$ olsun. Bu durumda $A \leq_e B \leq_c M$ olacak biçimde bir $B \leq M$ vardır. Hipotezden, bir $K \leq_d M$ vardır öyle ki $B \cap K = 0$ ve $B \oplus K \leq_e M$ dir. Böylece Yardımcı Teorem 2.3.8'den K, M de B nin bir komplementidir. Ayrıca $A \cap K \leq_e B \cap K = 0$ olduğundan $A \cap K = 0$ dır. Varsayalım $K < K' \leq M$ olsun. Bu durumda $K' \cap B \neq 0$ dır ve böylece $K' \cap B \cap A \neq 0$ dır. Yani $K' \cap A \neq 0$ dır. Sonuç olarak K, M de A nın komplementidir. ■

Önerme 4.3. *M_R modülü CS-modül ise (C_{11})-modüldür.*

Kanıt. $A, B \leq M$ ve $A \cap B = 0$ olsun. Bu durumda A nin $B \leq C$ olacak biçimde bir C komplementi vardır. M, CS-modül olduğundan $C \leq_d M$ dir. O halde M, (C_{11})-modüldür. ■

Özel olarak düzgün modüller, semisimple modüller ve injektif modüller (C_{11}) özelliğini sağlar. Öte yandan (C_{11}) özelliğini sağlayan herhangi bir ayrıştırılamaz modül düzgündür.

Teorem 4.4. *(C_{11})-modüllerin herhangi bir dik toplamı da (C_{11})-modüldür.*

Kanıt. Λ bir index kümesi olmak üzere, $\lambda \in \Lambda$ için M_λ lar C_{11}-modüller ve $M = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ olsun. $N \leq M$ olsun. Bu durumda $N \cap M_\lambda \leq M_\lambda$ dır. M_λ (C_{11})-modül olduğundan Önerme 4.2'den bir $K_\lambda \leq_d M_\lambda$ vardır öyle ki

$$(N \cap M_\lambda) \cap K_\lambda = 0 \text{ ve } (N \cap M_\lambda) \oplus K_\lambda \leq_e M_\lambda$$

dır. Buradan

$$N \cap (M_\lambda \cap K_\lambda) = N \cap K_\lambda = 0$$

ve

$$(N \cap M_\lambda) \oplus K_\lambda = (N \oplus K_\lambda) \cap M_\lambda \leq_e M_\lambda$$

dır. Şimdi $\Lambda^{'}$ "en az bir $K^{'} \leq_d M^{'} = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda^{'}} M_\lambda$ vardır öyle ki $N \cap K^{'} = 0$ ve $(N \oplus K^{'}) \cap M^{'} \leq_e M^{'}$ dür" özelliğini sağlayan λ ları içeren Λ nın boştan farklı bir alt kümesi olsun. Farzedelim ki $\Lambda^{'} \neq \Lambda$ olsun. O halde bir $\mu \in \Lambda$ vardır öyle ki $\mu \notin \Lambda^{'}$ dür.

$$L = (N \oplus K^{'}) \cap M_\mu \leq M_\mu$$

olduğundan bir $K_\mu \leq_d M_\mu$ vardır öyle ki $K_\mu \cap L = 0$ ve $K_\mu \oplus L \leq_e M_\mu$ dür. Şimdi

$$\Lambda^{''} = \Lambda^{'} \cup \{\mu\} \text{ ve } M^{''} = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda^{''}} M_\lambda = M^{'} \oplus M_\mu$$

olsun. Açıktır ki $K^{'} \cap K_\mu = 0$ dır. $K^{''} = K^{'} \oplus K_\mu$ olsun. Böylece $K^{'} \leq_d M^{'}$ ve $K_\mu \leq_d M_\mu$ olduğundan $K^{''} \leq_d M^{''}$ dür. Üstelik

$$K_\mu \cap N \leq K_\mu \cap L = K_\mu \cap (N \oplus K^{'}) \cap M_\mu = K_\mu \cap (N \oplus K^{'}) = 0$$

olup $K_\mu \cap N = 0$ dır. Diğer taraftan $K^{'} \cap N = 0$ olduğundan

$$N \cap (K_\mu \oplus K^{'}) = N \cap K^{''} = 0$$

dır.

Şimdi $N \oplus K^{''}$ alt modülünü göz önüne alalım.

$$(N \oplus K^{'}) \cap M^{'} \leq (N \oplus K^{''}) \cap M^{'}$$

olduğundan

$$(N \oplus K^{''}) \cap M^{'} \leq_e M^{'}$$

dür. Üstelik,

$$(N \oplus K^{''}) \cap M_\mu = (N \oplus K^{'} \oplus K_\mu) \cap M_\mu = [(N \oplus K^{'}) \cap M_\mu] \oplus K_\mu = L \oplus K_\mu \leq_e M_\mu$$

dür. Buradan

$$(N \oplus K^{''}) \cap M^{''} \leq_e M^{''}$$

elde edilir. Bu uygulamayı tekrarlayarak,

$$N \cap K = 0 \text{ ve } N \oplus K \leq_e M$$

olacak biçimde bir $K \leq_d M$ bulunur. Böylece M (C_{11})-modüldür. ■

Sonuç 4.5. *CS-modüllerin herhangi bir dik toplamı (C_{11}) koşulunu sağlar.*

Kanıt. Teorem 4.4'ten hemen görülür. ■

Sonuç 4.6. *Düzgün modüllerin herhangi bir dik toplamı (C_{11}) koşulunu sağlar.*

Kanıt. Sonuç 4.5'ten hemen görülür. ■

Örnek 4.7. *p bir asal tamsayı olmak üzere $M_{\mathbb{Z}} = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z})$ modülü (C_{11}) koşulunu sağlar. Fakat CS değildir.*

Kanıt. Sonuç 4.5'ten (C_{11}) koşulunu sağlar. CS olmadığı Örnek 3.11'de gösterilmişti. ■

(C_{11})-modüllerin herhangi bir dik toplananı her zaman bir (C_{11})-modül olması gerekmez. Bu özelliğe ilişkin örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek 4.8. *([16], Örnek 17.36)*
$\mathbb{R}$ bir reel cisim ve S polinom halkası $\mathbb{R}[x,y,z]$ olmak üzere;
$s = x^2+y^2+z^2-1$ iken $R = S/Ss$ halkası, bir Krull dimension 2 nin değişmeli Noetherian domaindir. Dahası free R-modül $M = R \oplus R \oplus R$, (C_{11}) koşulunu sağlar ama M, (C_{11}) koşulunu sağlamayan bir K diktoplananı içerir.

Kanıt. $\mathbb{R}$ Noetherian olduğundan Teorem 2.6.6'dan $S = \mathbb{R}[x,y,x]$ de Noetherian'dır. Teorem 2.6.5'den $R = S/Ss$ halkası da Noetherian'dır. Bunun yanında $x^2+y^2+z^2-1$ polinomu indirgenemez (irreducible) olduğundan $Ss =< x^2+y^2+z^2-1 >$ asal idealdir. $S = \mathbb{R}[x,y,z]$ birimli ve değişmeli bir halka olduğundan dolayı $R = S/Ss$ bir tamlık bölgesidir. O halde R, her idealini essential olarak kapsar. Bundan dolayı R düzgün olup Sonuç 4.6'dan M, (C_{11})-modüldür.

$$\begin{array}{rcl} \phi : M = R \oplus R \oplus R & \longrightarrow & R \\ e_1 = (1+Ss, 0+Ss, 0+Ss) & \mapsto & x+Ss \\ e_2 = (0+Ss, 1+Ss, 0+Ss) & \mapsto & y+Ss \\ e_3 = (0+Ss, 0+Ss, 1+Ss) & \mapsto & z+Ss \end{array}$$

dönüşümünü tanımlansın. Bu durumda $(a+Ss, b+Ss, c+Ss) \in R \oplus R \oplus R$ için $\phi(a+Ss, b+Ss, c+Ss) = ax+by+cz+Ss$ dir. Açıktır ki ϕ bir homomorfizmadır. $Ker\phi = K$ diyelim. Ayrıca $R = xR+yR+zR$ olduğundan ϕ örtendir. Dolayısıyla

$$0 \longrightarrow K = Ker\phi \xrightarrow{i} R \oplus R \oplus R \xrightarrow{\Phi} R$$

tam dizisi splittir. O halde en az bir $K' \leq M$ vardır öyle ki $M = K \oplus K'$ ve $K' \cong R$ dir. Buradan K nın boyutu 2 olup, K düzgün değildir.

Dikkat edersek, K, 2-küre S^2 nin tanjant demetinin regüler sectionunun R-modülüdür. Euler karakteristik $\chi(S^2) = 2 \neq 0$ olduğundan [17, Sonuç VI.13.3]'den onun tanjant demetinin bir regüler sectionuna sahip olamaz. Bu yüzden K bir ayrıştırılamaz modüldür. K, (C_{11}) koşulunu sağlamaz. ■

Bu kısmın devamında (C_{11})-modüllerin dik toplananlarının hangi koşullar altında bir (C_{11})-modül olduğu açıklanacaktır.

Tanım 4.9. *(P), modüllerin herhangi bir özelliği olsun. M nin her dik toplananı (P) özelliğini sağlıyorsa M modülü (P^+) özelliğini sağlar denir.*

Teorem 4.10. *Bir M modülünün (C_{11}) koşulunu sağlaması için gerek ve yeter koşul M nin herhangi bir (nonsinguler) K altmodülü için $M = Z_2(M) \oplus K$ olmak üzere $Z_2(M)$ ve K nın (C_{11}) koşulununu sağlamasıdır.*

Kanıt. $(\Longleftarrow)$: Teorem 4.4'ün sonucundan hemen görülür.
$(\Longrightarrow)$: M, (C_{11}) koşulunu sağlasın. İlk olarak $Z_2(M)$ nin M nin bir dik toplananı olduğunu kanıtlayacağız. $L = Z_2(M)$ olsun. $Z_2(M) \leq M$ olduğundan ve M, (C_{11}) koşulunu sağladığından Teorem 4.2'den $M = K \oplus K^{'}$, $L \cap K = 0$ ve $L \oplus K \leq_e M$ olacak şekilde M nin K ve $K^{'}$ alt modülleri vardır. Şimdi

$$L = Z_2(M) = Z_2(K \oplus K^{'}) = Z_2(K) \oplus Z_2(K^{'}).$$

$L \cap K = 0$ yani

$$Z_2(M) \cap K = 0 \Longrightarrow Z_2(K \oplus K^{'}) \cap K = 0 \Longrightarrow (Z_2(K) \oplus Z_2(K^{'})) \cap K = 0$$

ama $Z_2(K) \leq K$ olduğunu biliyoruz öyleyse açıktır ki $Z_2(K) = 0$ dır. Bu yüzden $L = Z_2(K^{'}) \subseteq K^{'}$. $L \oplus K \leq_e M$ olduğundan $L \leq_e K^{'}$ ve bundan dolayı Önerme 2.7.2'den $K^{'}/L$ singulerdir. Yani Önerme 2.7.2'den,

$$Z(K^{'}/Z_2(K^{'})) = K^{'}/Z_2(K^{'}) = 0.$$

Buradan $L = Z_2(K^{'}) = K^{'}$ ve $L \leq_d M$ dir. $M = L \oplus K$ olduğunu kanıtladık. Şimdi L nin (C_{11}) koşulunu sağladığını kanıtlayacağız. N, L nin herhangi bir alt modülü olsun. Buradan $N \oplus K \leq M$ dır. M, (C_{11}) koşulunu sağladığından Teorem 4.2'den $M = P \oplus P^{'}$, $(N \oplus K) \cap P = 0$ ve $N \oplus K \oplus P \leq_e M$ olacak şekilde M nin P ve $P^{'}$ alt modülleri vardır. Dikkat edersek $P \cap K = 0$ ve bundan dolayı P, $M/K \cong L$ içinde gömülüdür. Bu yüzden

$$P = P \cap L = P \cap Z_2(M) = P \cap (Z_2(P \oplus P^{'})) = P \cap (Z_2(P) \oplus Z_2(P^{'})) = \\ Z_2(P) \oplus (P \cap Z_2(P^{'})) = Z_2(P).$$

Yani $P = Z_2(P)$ ve $P \leq L$. Bunu takiben $P \leq_d L$ (gerçekten $L = P \oplus (L \cap P^{'})$) ve $N \oplus P \leq_e L$ dir. Önerme 4.2'den L, (C_{11}) koşulunu sağlar.

Son olarak K nın (C_{11}) koşulunu sağladığını kanıtlayalım. $\pi : M \longrightarrow K$ bir kanonik izdüşüm dönüşümü olsun. H, K nın herhangi bir alt modülü olsun. Buradan

$$L \cap H = 0 \text{ ve } M = Q \oplus Q', \ (L \oplus H) \cap Q = 0 \text{ ve } L \oplus H \oplus Q \leq_e M$$

olacak şekilde M nin Q ve Q' altmodülleri vardır. Dikkat edersek

$$L = Z_2(M) = Z_2(Q \oplus Q') = Z_2(Q) \oplus Z_2(Q') = Z_2(Q')$$

dür. Çünkü $Q \cap L = 0$ olduğundan $Z_2(Q) = 0$ dır. Bu yüzden $L \leq Q'$ ve $Q' = L \oplus (Q' \cap K)$. Şimdi

$$M = Q \oplus Q' = Q \oplus L \oplus (Q' \cap K)$$

dır. Bundan dolayı $Q \oplus L \leq_d M$ dir. Kolayca görülür ki $L \oplus Q = L \oplus \pi(Q)$. Bu yüzden K nın $\pi(Q)$ altmodülü M nin bir diktoplananıdır ve dolayısıyla K nın bir diktoplananıdır. Ancak $H \oplus \pi(Q) \oplus L \leq_e M$. Bu yüzden $H \oplus \pi(Q) \leq_e K$. Teorem 4.2'ten K, (C_{11}) koşulunu sağlar. ■

Yardımcı Teorem 4.11. *M, (C_{11}) koşulunu sağlayan bir modül olsun. M_1, M nin essential socle'a sahip bir alt modülü ve M_2, M nin sıfır socle'a sahip bir alt modülü olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2$.*

Kanıt. $Soc(M) = S$ ile gösterelim. $Soc(M) \leq M$ olduğundan ve M, (C_{11}) koşulunu sağladığından Önerme 4.2'den

$$M = K \oplus K', \ S \cap K = 0 \text{ ve } S \oplus K \leq_e M$$

olacak şekilde M nin K ve K' altmodülleri vardır. Önerme 2.4.8'den

$$S = Soc(M) = (Soc(K)) \oplus (Soc(K'))$$

dür. $S \cap K = 0$ olduğundan açık olarak $Soc(K) = 0$ dır. Bu yüzden $S \leq K'$. $S \leq K'$ ve $M = K \oplus K'$ olduğundan $S \oplus K \leq_e M$ buda gösterir ki $S \leq_e K'$ dür ve sonuç kanıtlanmış olur. ■

M bir nonsinguler modül olsun. M nin herhangi bir N altmodülü için $N \leq_e c(N)$ olacak şekilde M de bir tek $c(N)$ komplementi vardır. Yani;

$$c(N) = \{\ m \in M \mid \text{ R nin herhangi essential sağ ideali E için } mE \leq N\}$$

Teorem 4.12. *Bir nonsinguler M modülünün (C_{11}) koşulunu sağlaması için gerek ve yeter koşul M_1, (C_{11}) koşulunu sağlayan, essential socle'a sahip bir modül ve M_2, (C_{11}) koşulunu sağlayan, sıfır socle'a sahip bir modül olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2$ olmasıdır.*

Kanıt. $(\Longleftarrow)$: Teorem 4.4'ten açıktır.

$(\Longrightarrow)$: M, (C_{11}) koşulunu sağlasın. Yardımcı Teorem 4.11'den M_1 essential socle'a sahip ve M_2 sıfır socle'a sahip bir modül olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2$ dir. $Soc(M)$ yi S ile gösterelim. Açıkça $M_1 = c(S)$ dir. M_1 in C_{11} koşulunu sağladığını göstereceğiz. Herhangi bir $N \leq M_1$ alalım.. Önerme 4.2'den

$$(N \oplus M_2) \cap P = 0 \text{ ve } N \oplus M_2 \oplus P \leq_e M$$

olacak şekilde $P \leq_d M$ vardır. P, M_1 içinde gömülüdür ve bundan dolayı P essential socle $S \cap P$ ye sahiptir (Önerme 2.4.9). Bu yüzden $P = c(S \cap P) \leq c(S) = M_1$. Bundan dolayı $P \leq_d M_1$ dir ve $N \oplus P \leq_e M_1$. Önerme 4.2'den M_1, (C_{11}) koşulunu sağlar. Şimdi M_2 yi düşünelim. $\pi : M \longrightarrow M_2$ kanonik izdüşüm dönüşümü olsun. Herhangi bir $H \leq M_2$ alalım. Önerme 4.2'den

$$M = Q \oplus Q', \ (M_1 \oplus H) \cap Q = 0 \text{ ve } M_1 \oplus H \oplus Q \leq_e M$$

olacak şekilde M nin Q ve Q' alt modülleri vardır. Şimdi Önerme 2.4.8'den $S \cap Q = 0$ olduğundan $S \subseteq Q'$ dür. $M_1 = c(S) \subseteq Q'$. Bunu takiben M_1, Q' nün bir diktoplananıdır ve bundan dolayı $M_1 \oplus Q \leq_d M$ dir. Buda gösteriyor ki

$$M_1 \oplus \pi(Q) \leq_d M, \ \pi(Q) \leq_d M_2 \text{ ve } H \oplus \pi(Q) \leq_e M_2.$$

Önerme 4.2'den M_2 in (C_{11}) koşulunu sağlar. ■

Yardımcı Teorem 4.13. *N herhangi bir M modülünün bir dik toplananı olsun ve K, $N \cap K = 0$ olacak şekilde M nin bir injektif alt modülü olsun. $N \oplus K \leq_d M$ dir.*

Kanıt. $M = N \oplus N'$ olacak şekilde M nin N' alt modülü vardır.
$\pi : M \longrightarrow N'$ bir kanonik izdüşüm dönüşümü olsun. $N \cap K = 0$ olduğundan $K \leq N'$ dür. Öyleyse $K \cong \pi(K)$. Bu yüzden $\pi(K)$ injektiftir ve buradan $\pi(K) \leq_d N'$. Ama $N \oplus K = N \oplus \pi(K)$ ve bundan dolayı $N \oplus K \leq_d M$. ■

Önerme 4.14. *M, (C_{11}) koşulunu sağlayan bir modül olsun. M/N bir injektif modül olacak şekilde M nin bir N diktoplananı olsun. N, (C_{11}) koşulunu sağlar.*

Kanıt. L, N nin herhangi bir alt modülü olsun. $M = N \oplus N'$ olacak şekilde M nin N' injektif alt modülü vardır. $L \oplus N'$ alt modülünü düşünelim. $L \oplus N' \leq M$ ve M (C_{11}) koşulunu sağladığından Teorem 4.2'den

$$(L \oplus N') \cap K = 0 \text{ ve } L \oplus N' \oplus K \leq_e M$$

olacak şekilde bir $K \leq_d M$ vardır. Yardımcı Teorem 4.13'den $N' \oplus K \leq_d M$ dir.$\pi : M \longrightarrow N$ kanonik izdüşüm dönüşümü olmak üzere $N' \oplus K = N' \oplus \pi(K)$ dır. $\pi(K) \leq_d N$ olur. Ancak,

$$L \oplus N' \oplus \pi(K) \leq_e M.$$

Bunu takiben $L \oplus \pi(K) \leq_e N$ dir. Önerme 4.2'den N, (C_{11}) koşulunu sağlar. ■

Yardımcı Teorem 4.15. *M, U ve V düzgün modüllerinin bir dik toplamı olsun. Bu takdirde M, (C_{11}^{+}) özelliğini sağlar.*

Kanıt. K, M nin sıfırdan farklı bir diktoplananı olsun. Eğer $K = M$ ise Sonuç 4.6'dan K, (C_{11}) koşulunu sağlar. Eğer $K \neq M$ ise K düzgün ve bundan dolayı K, (C_{11}) koşulunu sağlar. Bu yüzden M, (C_{11}^{+}) özelliğini sağlar. ■

Teorem 4.16. *M, (C_{11}) ve (C_3) özelliklerini sağlayan bir modül olsun. M, (C_{11}^{+}) özelliğini sağlar.*

Kanıt. M, (C_{11}) ve (C_3) özelliklerini sağlasın. N, M nin bir diktoplananı olsun. $M = N \oplus N'$ olacak şekilde M nin N' alt modülü vardır. $\pi : M \longrightarrow N$ kanonik izdüşüm dönüşümü olsun. K, N nin herhangi bir alt modülü olsun. $K \leq N \leq M$ olduğundan $K \leq M$ dir. M, (C_{11}) koşulunu sağladığından, $(K \oplus N') \cap L = 0$ ve $K \oplus N' \oplus L \leq_e M$ olacak şekilde M nin bir L diktoplananı vardır. M, (C_3) ü sağladığından $K \oplus N' \oplus L \leq_d M$ dir yani $N' \oplus L$, M nin bir diktoplananandır. Dikkat edersek $N^{'} \oplus L = N^{'} \oplus \pi(L)$ ve bundan dolayı $\pi(L)$, N nin bir diktoplananıdır. Dahası

$$K \oplus N^{'} \oplus L = K \oplus N^{'} \oplus \pi(L) \leq_e M$$

dır. Öyleyse $K \oplus \pi(L) \leq_e N$ dir. N, (C_{11}) koşulunu sağlar. Bu yüzden M, (C_{11}^{+}) özelliğini sağlar. ■

Tanım 4.17. *M bir R-modül olsun. M nin herhangi iki dik toplananının arakesiti de, M nin bir diktoplananı oluyorsa M_R, SIP (Summand İntersection Property) özelliğine sahiptir denir. (K, $L \leq_d M$ iken $K \cap L \leq_d M$)*

Teorem 4.18. *([14, Teorem 2.1.(2)]) N sağ R-modül olsun.*
N, (C_{11}) özelliğine sahip ve E, N nin bir altmodülü olsun. Eğer N nin bir diktoplananı ile E nin arakesiti, E nin bir diktoplananı ise E, (C_{11}) özelliğine sahiptir.
Özel olarak; Eğer N, SIP ye sahip ise N nin her diktoplananı (C_{11}) özelliğine sahiptir.

Kanıt. $A \leq E$ olsun. N, (C_{11}) olduğundan $N_2 \cap A = 0$, N_2, N de A nın bir komplementi ve $N_2 \oplus A \leq_e N$ olacak şekilde $N = N_1 \oplus N_2$ dekompozisyonu vardır. Bu yüzden

$$(N_2 \cap E) \cap A = E \cap (N_2 \cap A) = 0$$

dır. Buradan,

$$(N_2 \cap E) \oplus A = E \cap (N_2 \oplus A) \leq_e E \cap N = E$$

dir. Hipotezden $N_2 \cap E \leq_d E$, Yardımcı Teorem 2.3.8'den $E \cap N_2$, E de A nın bir komplementidir. Bu yüzden E, (C_{11}) özelliğine sahiptir. ■

Zhou D. [14, Teorem 2.1.(2)] yukarıdaki teoremi 2002 yılında kanıtlamıştır. Karabacak F. ve Tercan A. [15, Teorem 8] 2007 yılında SIP modüllerin genellemesi olan SIP-extending modülleri tanımlamıştır ve Zhou'nun [14, Teorem 2.1.(2)] teoremini bu yeni modül ailesine taşımışlardır.

Tanım 4.19. *M bir R-modül olsun. M nin herhangi iki dik toplananının arakesiti, M nin bir diktoplananında essential ise M ye SIP-extending modül denir.*

Eğer R_R bir SIP-extending modül ise R bir sağ SIP-extending halkadır. Yani, R deki her e, c idempotent çifti için $eR \cap cR$, gR de essential olacak şekilde $g = g^2 \in R$ vardır.

Tanımdan da anlaşılacağı üzere SIP-extending modüller hem SIP hemde CS-modüllerin ortak bir genellemesidir.

Bir modül, herhangi iki komplementin arakesiti yine bir komplement olma özelliğine (unique closure) sahipse, o modülde SIP ve SIP-extending özellikleri birbirini gerektirir.

Örnek 4.20. *F bir cisim ve V de F üzerinde $dimV_F \geq 2$ bir vektör uzayı olsun. Bu durumda*

$$R = \{ \left[\begin{smallmatrix} f & v \\ 0 & f \end{smallmatrix}\right] \mid f \in F, v \in V\}$$

matris işlemleri ile birimli, değişmeli ve ayrıştırılamaz bir halkadır.Açıkça R bir sağ SIP-extending halkadır. $dimV_F \geq 2$ olduğundan R bir sağ extending halka değildir.

Örnek 4.21. *([18], Örnek 1.5) F bir cisim olsun.*

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} a & x & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & y \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix} : a, b, x, y \in F \right\}.$$

$$e = e^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$c = c^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olsun. $eT \cap cT$ nilpotenttir. $eT \cap cT$, T nin bir dik toplananı değildir. Bu yüzden T, SIP ye sahip değildir. Ancak T bir SIP-extending halkadır.

Yardımcı Teorem 4.22. *M bir SIP-extending modül ve N, M nin bir dik toplananı olsun. N, M nin essential alt modüllerinin herhangi birinin M deki unique closure'u olsun. Bu durumda N de SIP-extending modüldür.*

Kanıt. M nin herhangi bir $N^{'}$ alt modülü için $M = N \oplus N^{'}$ olsun. K ve L, N nin diktoplananı olsun. Bundan dolayı K ve L, M nin de diktoplananıdır. Hipotezden $K \cap L \leq_e T_1$ ve M nin bir $T_1^{'}$ alt modülü için $M = T_1 \oplus T_1^{'}$ olacak şekilde M nin bir T_1 diktoplananı vardır. Buradan $K \cap L \cap N^{'} = 0$ ve bundan dolayı $T_1 \cap N^{'} = 0$ olur. $K \cap L \subseteq N \cap T_1$ olduğundan $N \cap T_1 \leq_e T_1$ dir.

$p : M \longrightarrow T_1$ $T_1^{'}$ boyunca kanonik izdüşüm dönüşümü olsun. Buradan $g : N \longrightarrow T_1$ p izdüşüm dönüşümünün N ye kısıtlanmışını alalım.
$K = g^{-1}(N \cap T_1)$ olsun. Öyleyse $N \cap T_1 \leq_e T_1$ olduğundan K, N nin bir essential alt modülüdür. Kolayca görülür ki $K = (N \cap T_1) \oplus (N \cap T_1^{'})$.
Gerçekten ilk kısım açıktır. Diğeri için $x \in K$ olsun. $y \in T_1$, $z \in T_1^{'}$ olmak üzere $x = y + z$. Ama $g(x) = y \in N$ ve Bundan dolayı $z \in N$ dir. Bu da $x \in (N \cap T_1) \oplus (N \cap T_1^{'})$ olduğunu gösterir.

$N \cap T_1^{'} = Y$. Buradan $N \cap T_1 \leq_e T_1$ olduğundan K, $T_1 \oplus Y$ nin bir essential alt modülüdür. Ancak $K \leq_e N$ olduğundan N, M de K nın unique closure'udur. Bu takdirde N, $T_1 \oplus Y$ yi içerir. Özel olarak $T_1 \subseteq N$ dir. T_1, N nin bir diktoplananıdır ve $K \cap L$, N nin bir diktoplananında essential olur. ■

Teorem 4.23. *([15, Teorem 8]) M bir (C_{11})-modül ve E, M nin bir alt modülü olsun. M nin her D diktoplananı için $E \cap D$, E nin bir diktoplananında essential ise E bir (C_{11})-modüldür.*

Kanıt. A, E nin bir alt modülü olsun. (C_{11}) koşulundan, M nin herhangi N_1 alt modülü için $M = N_1 \oplus N_2$ olacak şekilde M de A nın bir N_2 komplementi vardır. Bu yüzden $N_2 \cap A = 0$ ve $N_2 \cap A \leq_e M$ dir. Böylece

$$(N_2 \cap E) \cap A = E \cap (N_2 \cap A) = 0$$

ve bundan dolayı $(N_2 \cap E) \oplus A = E \cap (N_2 \oplus A) \leq_e E$ olur. Varsayımımızdan $N_2 \cap E \leq_e T$ olacak şekilde E nin bir T diktoplananı vardır. $A \cap T = 0$ ve $(N_2 \cap E) \oplus A \leq_e E$ olduğundan $T \oplus A \leq_e E$. Yardımcı Teorem 2.3.8'den T, E deki A nın bir komplementidir. Öyleyse E bir (C_{11})-modüldür. ■

Sonuç 4.24. *M bir R-modül olsun. M nin her diktoplanananı M nin essential alt modülünün M de unique closure'u olsun. M SIP-extending modül ise M nin herhangi bir diktoplananı da bir (C_{11})-modüldür.*

Kanıt. Yardımcı Teorem 4.22 ve Teorem 4.23'den hemen elde edilir. ■

Yardımcı Teorem 4.25. *$M = M_1 \oplus M_2$ olsun. Bu takdirde; M modülünün (C_{11}) koşulunu sağlaması için gerek ve yeter şart M_1 in herhangi bir N alt modülü için $M_2 \subseteq K$, $K \cap N = 0$, $K \oplus N \leq_e M$ olacak şekilde M nin bir K diktoplananının var olmasıdır.*

Kanıt. $(\Longrightarrow)$: Varsayalım M, (C_{11}) koşulunu sağlasın. N, M_1 in herhangi bir alt modülü olsun. Teorem 4.2'den $N \cap L = 0$ ve $N \oplus L \leq_e M_1$ olacak şekilde M_1 in bir L diktoplananı vardır. Açıkça $(L \oplus M_2) \cap N = 0$ ve $(L \oplus M_2) \oplus N \leq_e M$.
$(\Longleftarrow)$: Varsayalım M_1 verilen özelliği sağlasın. H, M_1 in herhangi bir alt modülü olsun. Hipotezden $M_2 \subseteq K$, $K \cap H = 0$, $K \oplus H \leq_e M$ olacak şekilde M nin bir K diktoplananı vardır. Şimdi,

$$K = K \cap (M_1 \oplus M_2) = (K \cap M_1) \oplus M_2$$

dir ve bu yüzden $K \cap M_1$, M nin bir dik toplananıdır ve hemde M_1 in dik toplananıdır. Bundan dolayı, $H \cap (K \cap M_1) = 0$ ve $H \oplus (K \cap M_1) = M_1 \cap (H \oplus K)$, M_1 de essential alt modüldür. Teorem 4.2'den M_1, (C_{11}) koşulunu sağlar. ■

Teorem 4.26. *$K \cap M_2 = 0$ ile M nin bir K diktoplananı için $K \oplus M_2$, M nin bir diktoplananı olacak şekilde $M = M_1 \oplus M_2$ bir (C_{11})-modüldür. M_1, (C_{11})-modüldür.*

Kanıt. N, M_1 in herhangi bir alt modülü olsun. Hipotezden ve Teorem 4.2'den $(N \oplus M_2) \cap K = 0$ ve $N \oplus M_2 \oplus K \leq_e M$, olacak şekilde M nin bir K diktoplananı vardır. Dahası $M_2 \oplus K$, M nin bir diktoplananıdır. Yardımcı Teorem 4.25'ten sonuç elde edilir. ■

Sonuç 4.27. *M bir (C_{11})-modül ve M/K, K-injektif olacak şekilde M nin bir K diktoplananı olsun. K, (C_{11}) koşulunu sağlar.*

Kanıt. $M = K \oplus K'$ olacak şekilde M nin bir K' alt modülü vardır, hipotezden K', K-injektiftir. $L \cap K' = 0$ olacak şekilde M nin bir L diktoplananı vardır. Yardımcı Teorem 3.15'ten $H \cap K' = 0$, $M = H \oplus K'$ ve $L \subseteq H$ olacak şekilde M nin bir H alt modülü vardır. Şimdi L, H nin bir diktoplananıdır ve bundan dolayı $L \oplus K'$, $M = H \oplus K'$ nün bir diktoplananıdır. Teorem 4.26'dan K, (C_{11}) koşulunu sağlar. ∎

Sonuç 4.28. *$M = M_1 \oplus M_2$, bir M_1 alt modülü ve bir M_2 injektif alt modülünün bir diktoplamı olsun. Bu takdirde;*

$$M, (C_{11}) \text{ koşulunu sağlar.} \iff M_1, (C_{11}) \text{ koşulunu sağlar.}$$

Kanıt. $(\Longrightarrow)$: Eğer M, (C_{11}) koşulunu sağlıyor ise Sonuç 4.27'den M_1, (C_{11}) koşulunu sağlar.

$(\Longleftarrow)$: M_1, (C_{11}) koşulunu sağlıyor ise Teorem 4.4 ve Sonuç 4.6'dan M, (C_{11}) koşulunu sağlar. ∎

5. FI-EXTENDING MODÜLLER

Son bölümde (C_1)-modüllerin başka bir genellemesi olan FI-extending modüllerden bahsedeceğiz. Daha ayrıntılı bilgi için [19- 22] önerilir.

Tanım 5.1. *M bir modül ve $N \leq M$ olsun. Eğer her $\varphi \in End(M_R)$ için $\varphi(N) \subseteq N$ oluyorsa N ye M nin fully invariant alt modülü denir ve $N \lhd M$ ile gösterilir.*
Örneğin, $Soc(M)$, M modülünün semisimple fully invariant alt modülüdür.

Tanım 5.2. *M bir modül olsun. Eğer M deki her fully invariant alt modül bir dik toplanan da essential olarak kapsanıyorsa M ye FI-extending modül denir.*

Yardımcı Teorem 5.3. *M bir modül olsun. Aşağıdaki koşullar denktir:*

(i) *M, FI-extending modüldür.*

(ii) *M nin her fully invariant alt modülü, M nin bir dik toplananı olan bir komplemente sahiptir.*

Kanıt. **(i)$\Longrightarrow$ (ii)** $X \lhd M$ olsun. M modülünün FI-extending olduğunu kabul edelim. Bu durumda bir $e^2 = e \in End(M)$ vardır öyle ki $X \leq_e eM$ dir. Böylece istenen komplement $(1-e)M$ dir.
(ii)$\Longrightarrow$ (i) Tersine, $c^2 = c \in End(M)$ olmak üzere cM, X in bir komplementi olsun. Bu durumda herhangi bir $x \in X$ için $x = cx + (1-c)x$ dir. $X \lhd M$ olduğundan $cx \in X \cap cM = 0$ dır. Bundan dolayı $X \subseteq (1-c)M$ dir. Böylece Teorem 2.3.11'den $X \leq_e (1-c)M$ dir. ■

Tanım 5.4. *R bir domain (yani, sıfır bölensiz halka) olsun. Her $0 \neq x, y \in R$ için $xR \cap yR \neq 0$ ise R ye sağ Ore domain denir. Değişmeli her domain bir Ore domaindir.*

Yardımcı Teorem 5.5.

(i) *D_D bir domain ise D_D, FI-extending modüldür.*

(ii) *D_D herhangi bir domain olsun. Bu durumda*

$$D_D,\ C_{11} \textit{ koşulunu sağlar} \Longleftrightarrow D_D \textit{ sağ Ore domaindir.}$$

Kanıt. **(i)** $0 \neq F \trianglelefteq D_D$ alalım. D_D bir domain olduğundan ayrıştırılamazdır. Bir $d \in D$ için $F \cap dD = 0$ olsun. Şimdi $g(x) = dx$ olarak tanımlanan $g : D \longrightarrow D$ modül homomorfizmasını göz önüne alalım. $F \leq D$ fully invariant alt modül olduğundan $g(F) \subseteq F$ dir. O halde $df \in F \cap dD = 0$ olur. D domain olduğundan $d = 0$ elde edilir. Bu da $F \leq_e D$ olduğunu gösterir. Yani D_D, FI-extending modüldür.

(ii) $(\Longrightarrow)$: D_D, C_{11} modül olsun. $N \leq D_D$ alalım. Bu durumda bir $U \leq_d D$ vardır öyle ki $U \cap N = 0$ ve $U \oplus N \leq_e D$ dir. D_D ayrıştırılamaz olduğundan $U = 0$ elde edilir. Buradan $N \leq_e D$ olup, D nin düzgün olduğu görülür. Böylece D_D sağ Ore domaindir.

$(\Longleftarrow)$: Tersine, D_D sağ Ore domain olsun. O halde D nin her sağ ideali essentialdir. Böylece D_D düzgündür. Dolayısıyla CS'tir. Yardımcı Teorem 4.3'den D_D, C_{11}-modüldür. ■

Yardımcı Teorem 5.5'ten , C_{11} koşulunu sağlayan bir modülün FI-extending olduğu görülür. Ancak bunun tersi doğru değildir. Örneğin; yukarıdaki Yardımcı Teoremden, sağ Ore olmayan herhangi bir domain, kendi üzerinde bir modül olarak, C_{11} koşulunu sağlamamasına rağmen FI-extending modüldür.

Yardımcı Teorem 5.6. *M bir modül olsun.*

(i) M nin fully invariant alt modüllerinin herhangi bir toplamı veya kesişimi yine bir fully invariant alt modüldür.

(ii) $Y \trianglelefteq M$ ve $X \trianglelefteq Y$ olmak üzere $X \leq Y \leq M$ ise $X \trianglelefteq M$ dir.

(iii) $M = \oplus_{i \in I} X_i$ ve $S \trianglelefteq M$ ise, π_i, M nin i'inci projeksiyon homomorfizması olmak üzere $S = \oplus_{i \in I} \pi_i(S) = \oplus_{i \in I}(X_i \cap S)$ dir.

Önerme 5.7. *M bir modül ve $X \lhd M$ olsun. Eğer M, FI-extending ise X de FI-extending modüldür.*

Kanıt. Kabul edelim ki M, FI-extending modül ve $S \lhd X$ olsun. Yardımcı Teorem 5.6 (ii)'den $S \lhd M$ dir. Böylece bir $D \leq_d M$ vardır öyle ki $S \leq_e D$ dir. $\pi : M \longrightarrow D$ projeksiyon endomorfizması olsun. Bu durumda

$$S = \pi(S) \leq \pi(X) \cap D = \pi(X) \cap \pi(M) = \pi(X)$$

dir. $S \leq \pi(X) \leq D$ ve $S \leq_e D$ olduğundan $S \leq_e \pi(X)$dir. Ayrıca $\pi(X) \leq_d X$ dir. ■

Bir CS-modülün her diktoplananı CS-modül olup herhangi iki CS-modülün diktoplamları CS-modül olması gerekmediğini biliyoruz. C_{11}-modüllerde ise diktoplananları C_{11}-modül olması gerekmezken iki C_{11}-modülün diktoplamları C_{11}-modüldür.

FI-extending modüllerde de, FI-extending modüllerin herhangi diktoplamı yine bir FI-extending modül olduğu aşağıdaki teoremde kanıtlanmıştır. Ancak bu özelliğin diktoplananlarına taşınıp taşınmadığı hala açık bir sorudur.

Teorem 5.8. *$M = \oplus_{i\in I} X_i$ olsun. Eğer her bir X_i FI-extending modül ise M de FI-extending modüldür.*

Kanıt. Farzedelim ki her bir X_i modülü FI-extending ve $S \lhd M$ olsun. $\pi_i(S) \neq 0$ olan her bir i için $\pi_i(S) \lhd X_i$ olduğundan bir $D_i \leq_d X_i$ vardır öyle ki $\pi_i(S) \leq_e D_i$ dir. Yardımcı Teorem 5.6 (iii)'yi kullanırsak,

$$S = \bigoplus_{i\in I} \pi_i(S) \leq_e \bigoplus_{i\in I} D_i$$

olduğunu elde ederiz. $\bigoplus_{i\in I} D_i \leq_d M$ olduğundan M modülü FI-extending olur. ■

Sonuç 5.9. *M modülü, extending (ya da düzgün) modüllerin bir dik toplamı ise FI-extending modüldür.*

Sonuç 5.10. *M bir $\mathbb{Z}$-modül (yani bir Abelian grup) olsun. Eğer M, aşağıdaki koşullardan herhangi birini sağlarsa, FI-extending $\mathbb{Z}$-modül olur.*

(i) M, sonlu üretilmiştir.

(ii) M sınırlı derecedendir (yani, bazı pozitif n tamsayıları için $nM = 0$ dır).

(iii) M bölünebilirdir (yani, her bir $a \in M$ ve $n \in \mathbb{Z}$ için $a = nb$ olacak biçimde bir $b \in M$ vardır).

Kanıt. **(i)** Her sonlu üretilmiş Abelian grup, düzgün $\mathbb{Z}$-modüllerin bir dik toplamıdır. Dolayısıyla Sonuç 5.9'dan M, FI-extending modüldür.
(ii) ([23], p.262)'den M, devirli torsion grupların bir dik toplamıdır. Böylece M, yine düzgün $\mathbb{Z}$-modüllerin bir dik toplamıdır.
(iii) M bölünebilir olduğundan extending $\mathbb{Z}$-modüldür. ■

Aşağıdaki örnek FI-extending olmayan bir M $\mathbb{Z}$-modülüne ilişkindir.

Örnek 5.11. *$P = \{ p \in \mathbb{Z} \mid p$ asal tamsayı$\}$ olmak üzere $M = \prod_{p \in P} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ olsun. M nin torsion alt grubu τM, açıkça M de fully invariant bir alt modüldür. τM, M nin bir dik toplananı değil ve M nin hiçbir dik toplananında essential olarak kapsanmaz ([23], p.244). Böylece M, FI-extending değildir. Bu örnek ayrıca FI-extending modüllerin dik çarpımlarının FI-extending modül olması gerekmediğini de gösterir.*

Önerme 5.12. *M bir modül olsun. Bu durumda M nin FI-extending olması için gerek ve yeter şart her bir $S \lhd M$ için bir $e = e^2 \in End_R(E(M))$ vardır öyle ki $S \leq_e e(E(M))$ ve $e(M) \subseteq M$ olmasıdır.*

Kanıt. $(\Longrightarrow)$: Kabul edelim ki M FI-extending olsun. Bu durumda bir $X \leq_d M$ vardır öyle ki $S \leq_e X$, ve $M = X \oplus Y$ olacak biçimde bir $Y \leq M$ vardır. Böylece $E(X)$ ve $E(Y)$ injektif zarfları vardır öyle ki

$$E(M) = E(X) \oplus E(Y)$$

dir. $e : E(M) \longrightarrow E(X)$ projeksiyon endomorfizması olsun. Bu durumda $e(M) \leq M$ ve $S \leq_e e(E(M))$ dir.
$(\Longleftarrow)$: Tersine, $S \lhd M$ olsun. Bu durumda

$$e(M) \cap S \leq M \cap S = S \leq e(M) \cap e(E(M)) = e(M)$$

ve

$$e(M) \cap S \leq_e e(M) \cap e(E(M)) = e(M)$$

olduğundan

$$S \leq_e M \cap e(E(M)) = e(M)$$

dir. Ayrıca $e(M) \leq_d M$ olduğundan M FI-extending modüldür. ■

Önerme 5.13. *M modülü FI-extending ve I, $E(M)$ nin fully invariant dik toplananı olmak üzere $S = M \cap I$ olsun. Bu durumda S, M nin bir fully invariant dik toplananıdır.*

Kanıt. $f \in End_R(M)$ olsun. Bu durumda bir $\bar{f} \in End_R(E(M))$ vardır öyle ki $\bar{f}_{|M} = f$ dir. $s \in S$ olsun. Buradan $f(s) \in M$ ve

$$\bar{f}(s) \in \bar{f}(M \cap I) \subseteq \bar{f}(M) \cap \bar{f}(I) \subseteq E(M) \cap I = I$$

olduğundan $f(s) = \bar{f}(s) \in I$ dır. Böylece $f(s) \in S$ dir. Dolayısıyla $S \lhd M$ dir. M modülü FI-extending olduğundan bir $X \leq_d M$ vardır öyle ki $S \leq_e X$ dir. Ayrıca $M \leq_e E(M)$ olduğundan

$$S = M \cap I \leq_e E(M) \cap I = I$$

olup $E(S) = I$ ve $E(X) \cong I$ dır. I fully invariant olduğundan $E(X) = I$ dır. Böylece $X \subseteq M \cap E(X) = M \cap I = S$ olur. O halde $S = X$ dir. ■

Tanım 5.14. *R bir halka ve $X \subseteq R$ olsun. $\{\ r \in R \mid rx = 0,\ (x \in X)\}$ kümesine R nin bir X alt kümesinin sol sıfırlayıcısı denir ve $\ell(X)$ şeklinde gösterilir. Benzer şekilde; $r(X) = \{\ r \in R \mid xr = 0,\ (x \in X)\}$ kümesine R nin bir X alt kümesinin sağ sıfırlayıcısı denir.*

Tanım 5.15. *R bir halka ve $e = e^2 \in R$ olsun. $\forall x \in R$ için $xe = exe$ ($ex = exe$) ise e ye sol (sağ) yarı merkez (semicentral) denir.*

Tüm sol yarı merkez idempotentlerin kümesini $S_\ell(R)$ ile gösteriyoruz. Diğer bir deyişle,

$$S_\ell(R) = \{\ e \in R \mid xe = exe,\ \forall x \in R\}$$

şeklinde tanımlanır.
Benzer şekilde; sağ yarı merkez idempotentlerin kümesi,

$$S_r(R) = \{\ e \in R \mid ex = exe,\ \forall x \in R\}$$

şeklinde tanımlanır.

$$\mathcal{B}(R) = S_\ell(R) \cap S_r(R)$$

kümesine merkez idempotentlerin kümesi adı verilir.

Yardımcı Teorem 5.16. *Bir R halkasının bir e idempotenti için aşağıdakiler denktir:*

(i) $e \in S_\ell(R)$

(ii) $1 - e \in S_r(R)$

(iii) $Re = eRe$

(iv) $(1 - e)Re = 0$

(v) *eR, R nin bir idealidir.*

(vi) *eR(1-e), R nin bir ideali ve $eR = eR(1 - e) \oplus Re$, sol ideallerin bir diktoplamı gibi.*

Kanıt. Elementer işlemler yapılarak kanıtlanır. ■

Tanım 5.17. *R bir halka olsun. Herhangi $a \in R$ için $aRa = (0)$ iken $a = 0$ oluyorsa R halkasına semiprime halka denir.*

Yardımcı Teorem 5.18. *A, R nin bir ideali ve $A \leq_e^r eR$ olacak şekilde $e \in S_l(R)$ olsun. Eğer $\ell(A) \cap A = 0$ ise $\ell(A) = R(1-e)$.*

Kanıt. $r \in R$ için $r(1-e) \in R(1-e)$ ve $r_1 \in R$ olacak şekilde $a = er_1 \in A$ alalım. $r(1-e)a = r(1-e)er_1 = rer_1 - reer_1 = 0$ olur. O halde $R(1-e) \subseteq \ell(A)$ dır. Yardımcı Teorem 5.16 (v)'ten $eR \lhd R$ ve bu yüzden $\ell(A) \cap eR = 0$ dır. Yardımcı Teorem 5.16 (vi)'dan $eR = Re \oplus eR(1-e)$ dir. Bundan dolayı $\ell(A) \cap Re = 0$ dır. Bu yüzden $\ell(A) = R(1-e)$ dir. ■

Teorem 5.19. *A, R nin bir ideali olsun.*

(i) R sağ FI-extending ve $A \cap \ell(A) = 0$ ise $A \leq_e^r eR$ olacak şekilde $e \in S_r(R)$ vardır.

(ii) R sol FI-extending ve $A \cap r(A) = 0$ ise $A \leq_e^\ell Rf$ olacak şekilde $f \in S_\ell(R)$ vardır.

(iii) R sağ ve sol FI-extending, $A \cap \ell(A) = 0$ ve $A \cap r(A) = 0$ ise $A \leq_e^{r,\ell} cR$ ve $\ell(A) = r(A) = (1-c)R$ olacak şekilde $c \in \mathcal{B}(R)$ vardır.

Kanıt. **(i)** $A \leq_e^r eR$ olacak şekilde $e = e^2$ vardır. $0 \neq y \in eR(1-e)$ olsun. $0 \neq ys \in A$ olacak şekilde $s \in R$ vardır. Ama $ysA \subseteq eR(1-e)A = 0$. Bundan dolayı $ys \in A \cap \ell(A) = 0$ bir çelişkidir. Bu yüzden $eR(1-e) = 0$, Yardımcı Teorem 5.16'dan $e \in S_r(R)$ dir.

(ii) $A \leq_e^\ell Rf$ olacak şekilde $f = f^2$ vardır. $0 \neq y \in (1-f)Rf$ olsun. $0 \neq sy \in A$ olacak şekilde $s \in R$ vardır. Ama $Asy \subseteq A(1-f)Rf = 0$. Bundan dolayı $sy \in A \cap r(A) = 0$ bir çelişkidir. Bu yüzden $(1-f)Rf = 0$, Yardımcı Teorem 5.16'dan $f \in S_\ell(R)$

(iii) (i) ve (ii)'den sırasıyla $e \in S_r(R)$ ve $f \in S_\ell(R)$ iken $A \leq_e^r eR$ ve $A \leq_e^\ell Rf$ dir. $e \in S_r(R)$ olduğundan $(1-e)R \subseteq r(A)$ dır. Hemde $e(r(A)) \subseteq eR \cap r(A) = 0$ dır. Bundan dolayı $r(A) = (1-e)R$. Benzer şekilde $\ell(A) = R(1-f)$. Bu yüzden $(1-e) \in \ell(A)$ ve $(1-f) \in r(A)$ olduğundan $\ell(A) = r(A)$ dır. Bu yüzden $(1-e)R = R(1-f)$ tir. $e = f \in S_r(R) \cap S_\ell(R) = \mathcal{B}(R)$. $e = c$ olsun. Yardımcı Teorem 5.18'den sonuç elde edilir. ■

Sonuç 5.20. *R sol ve sağ FI-extending ve A, R nin bir ideali olsun.*
A, R nin bir halka diktoplananıdır. $\Longleftrightarrow$ $A \cap \ell(A) = 0 = A \cap r(A)$ *ve* $A = \ell r(A)$.

Kanıt. Açık olarak A, R nin bir halka diktoplananı ise $A \cap \ell(A) = 0 = A \cap r(A)$ ve $A = \ell r(A)$.
Tersi, Teorem 5.19 (iii)'nin bir sonucudur. ■

Tanım 5.21. *R bir halka olsun. Herhangi sol idealin R deki sağ sıfırlayıcısı, R nin bir idempotent elemanı tarafından bir sağ ideal gibi üretiliyorsa R halkasına bir Baer halka denir. ($e = e^2 \in R$ iken $\forall I \leq_R R$ için $r_R(I) = eR$)*

Tanım 5.22. *R bir halka olsun. Herhangi çift taraflı idealin R deki sağ sıfırlayıcısı, R nin bir idempotent elemanı tarafından bir sağ ideal gibi üretiliyorsa R halkasına bir quasi-Baer halka denir. ($e = e^2 \in R$ iken $\forall I \lhd R$ için $r_R(I) = eR$)*

Tanım 5.23. *R bir halka ve P, R nin bir ideali (has olması gerekmeyen) olsun. Her $a, b \in P$ için $ab \in P$ iken $a \in P$ ya da $b \in P$ ($a^2 \in P$ iken $a \in P$) oluyorsa P ye asal (prime) ideal denir.*

R deki tüm asal ideallerin arakesitine asal (prime) radical denir.

Önerme 5.24. *Bir R halkası quasi-Baer dir.* $\Longleftrightarrow$ *I, R nin bir ideali olmak üzere $I \subseteq eR$ ve $\ell(I) \cap eR = eR(1 - e)$ olacak şekilde $e \in S_\ell(R)$ vardır.*

Kanıt. ($\Longrightarrow$) : R quasi-Baer ve I, R nin bir ideali olsun. $\ell(I) = Rc$ olacak şekilde bir $c \in S_r(R)$ vardır. Öyleyse $I \subseteq (1-c)R$ dir. $e = 1-c$ olsun. Yardımcı Teorem 5.16'dan $e \in S_\ell(R)$. Şimdi $\ell(I) \cap eR = eR \cap R(1 - e) = eR(1 - e)$.
($\Longleftarrow$) : I, R nin bir ideali olmak üzere $I \subseteq eR$ ve $\ell(I) \cap eR = eR(1 - e)$ olacak şekilde $e \in S_\ell(R)$ var olsun. $\alpha \in \ell(I)$ olsun. Buradan $\alpha = \alpha e + \alpha(1 - e)$. Bu yüzden $e\alpha = e\alpha e + e\alpha(1 - e)$ dir. Ama $e\alpha \in \ell(I) \cap eR$ dir. Bundan dolayı $e\alpha = e\alpha(1 - e)$ burdan $e\alpha e = 0$ dır. Ama $e \in S_\ell(R)$ ve Yardımcı Teorem 5.16'dan $0 = e\alpha e = \alpha e$ dir. Bu yüzden $\alpha = \alpha(1 - e) \in R(1 - e)$. Bundan dolayı da $\ell(I) = R(1 - e)$ dir. R quasi-Baer dir. ■

Sonuç 5.25. *R bir quasi-Baer halka ve I, R nin bir ideali ise $I \subseteq eR$ ve $I + eR(1-e)$, eR de sağ essential ve $eR(1-e)$, R nin bir ideali olacak şekilde $e \in S_\ell(R)$ vardır.*
Özel olarak; I, R nin asal (prime) radicalini içeriyor (yani R semiprime) ya da e merkez ise I, eR de sağ essentialdır. Dahası I, eR de sağ essential değilse $I \cap X = 0$ ve $I \oplus X \leq_e^r eR$ olacak şekilde bir $0 \neq X = eX = eX(1-e)$ kapalı ideali vardır.

Tanım 5.26. *M bir modül olsun.*

(i) $X \leq D$,

(ii) $K \cap D \neq 0$ olacak şekildeki $K \lhd M$ ise $K \cap X \neq 0$.
(Denk olarak, $< Y >$, Y tarafından üretilen M nin fully invariant alt modülünü göstermek üzere $0 \neq Y \leq D$ iken $< Y > \cap X \neq 0$)

özellikleri sağlanacak şekilde M nin bir D diktoplananı varsa M nin bir X alt modülü quasi-extending özelliğine sahiptir denir.

Eğer M nin her sıfırdan farklı X alt modülü quasi-extending özelliğine sahipse M modülüne quasi-extending modül denir.

Önerme 5.27.

(i) M bir quasi-extending modül ise M, FI-extending modüldür.

(ii) R nin her ideali, bir merkez idempotent tarafından üretilen bir idealde sağ essential ise R_R quasi-extending tir.

Kanıt. **(i)** $A \lhd M$ olsun. Eğer A, M de essential ise sonuç görülür. Bu yüzden X, M de A nın bir sıfırdan farklı relative komplementi olduğunu varsayalım. Buradan $X \subseteq eM$ ve $A \cap eM = 0$ olacak şekildeki $e = e^2 \in End_R(M)$ vardır. Bundan dolayı $A \subseteq (1-e)M$ dir. $Y \subseteq (1-e)M$ ve $A \cap Y = 0$ olacak şekilde $Y \leq M$ var ise $(X+Y) \cap A = 0$. Bundan dolayı $Y \subseteq X$, ve bu yüzden $Y = 0$. $A \leq_e (1-e)M$ dir.

(ii) $X \leq R_R$ olsun. Eğer her $0 \neq K \lhd R$ için $X \cap K \neq 0$ ise biter. Bu yüzden $X \cap C = 0$ olacak şekilde R nin idealleri arasında $0 \neq C$ maksimal olsun. $C \leq_e^r cR$ olacak şekilde $c \in \mathcal{B}(R)$ vardır. Buradan $X \cap cR = 0$ dır. Bu yüzden $e = 1 - c$ iken $C = cR$ ve $X \subseteq eR$. Varsayalım $K \cap eR \neq 0$ olacak şekilde $K \lhd R$ olsun. C nin maksimalliğinden $K \cap X \neq 0$. Bu yüzden R_R quasi-extending tir. ∎

R bir değişmeli halka (yani bir idempotent merkez) ise Sonuç 5.25 quasi-Baer koşulu $\Longrightarrow$ FI-extending koşulu olduğunu gösterir.

Önerme 5.27 FI-extending ve quasi-extending koşullarının denkliğini gösteriyor. Ancak Baer olmayan değişmeli self-injektif halkalar vardır (Örnek: $\mathbb{Z}_4$). Bu yüzden Sonuç 5.25'in tersi yoktur.

Örnek 5.28. *Değişmeli self-injektif bir halka olan $\mathbb{Z}_4$'ün bir Baer halka olmadığını gösterelim:*

$\mathbb{Z}_4$'ün alt modülleri 0, kendisi ve $I = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ dir.

$\mathbb{Z}_4$'ün idempotent elemanları $\bar{0}$, $\bar{1}$ dir.

$r(I) = \{r \in R \mid \forall a \in I, ar = 0\} = \{r \in \mathbb{Z}_4 \mid \forall a \in \{\bar{0}, \bar{2}\},\ ar = 0\}$

$r(I) = \{\bar{0}, \bar{2}\} = I \neq eR$ *olur.*

Yani, $r(I)$ kümesi hiç bir idemptent eleman tarafından üretilemez.

Dolayısıyla $\mathbb{Z}_4$ Baer değildir.

Önerme 5.29. *R sağ nonsingular olsun.*

R sağ FI-extending tir. $\Longleftrightarrow$ R quasi-Baer ve her $A \lhd R$ için $A_R \leq_e r\ell(A)$ dir.

Kanıt. R sağ FI-extending ve $A \lhd R$ olsun. $A_R \leq_e eR$ olacak şekilde $e = e^2$ var olsun. R sağ nonsingular olduğundan $\ell(A) = \ell(eR) = R(1 - e)$. Bundan dolayı R quasi-Baer dir. Dahası $A_R \leq_e eR = r\ell(eR) = r\ell(A)$.

Tersi açıktır. ∎

Önerme 5.30. *R bir quasi-Baer halka olsun.*

$$R \text{ semiprime} \Longleftrightarrow S_\ell(R) = \mathcal{B}(R)$$

Kanıt. ($\Longrightarrow$) : Yardımcı Teorem 5.16'dan herhangi $e \in S_\ell(R)$ için $eR(1-e)$, R nin bir ideali ve $(1-e)Re = 0$ dır. Dikkat edersek $eR(1-e)$ nilpotenttir. Eğer R semiprime ise $eR(1-e) = 0$ ve bu yüzden $e \in \mathcal{B}(R)$ dir. Bu yüzden $S_\ell(R) = \mathcal{B}(R)$ dir.

($\Longleftarrow$) : $S_\ell(R) = \mathcal{B}(R)$ olsun. Varsayalım $I^2 = 0$ olacak şekilde R nin sıfırdan farklı bir I ideali vardır. Buradan $r(I) = eR$ olacak şekilde $0 \neq e \in \mathcal{B}(R)$ vardır. Ama $I \subseteq r(I)$ dır. Bu yüzden $I = eI = Ie = 0$ bir çelişkidir. Bu yüzden R semiprime dır. ■

Tanım 5.31. *R bir halka olsun. Eğer sıfırdan farklı her sağ (sol) komplement (Yani, R nin essential olarak kapalı sağ (sol) ideali) sıfırdan farklı bir çift taraflı ideal içeriyorsa R halkasına komplement sınırlı (complement bounded) halka denir.*

Önerme 5.32. *M bir komplement sınırlı bir modül olsun.*

$$M \text{ quasi-extending tir.} \Longleftrightarrow M \text{ extending tir.}$$

Kanıt. ($\Longrightarrow$) : M quasi-extending ve $X \leq M$ olsun. $X \leq D$ olacak şekilde bir D diktoplananı vardır ve $K \cap D \neq 0$ ile $K \lhd M$ ise $K \cap X \neq 0$ dır. Eğer X, D de essential değilken, C, D de X in bir komplementi olsun. D, M nin bir komplement altmodülü olduğundan, C, M nin bir komplement altmodülüdür. Bundan dolayı $H \subseteq C \subseteq D$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $H \lhd M$ vardır. Bundan dolayı $X \cap H \neq 0$, bu bir çelişkidir. Bu yüzden M extending tir.

($\Longleftarrow$) : Açıktır. ■

Tanım 5.33. *R bir değişmeli halka olsun. Eğer R halkası sıfırdan farklı bir nilpotent eleman içermiyorsa, R halkasına reduced halka denir.*

Teorem 5.34. *Bir R halkası üzerinde,*

(a) R sağ $R-$modül FI-extending

(b) R sol $R-$modül FI-extending

(c) R, quasi-Baer

(d) Her ideal, halka diktoplananında sağ (sol) essentialdır.

(e) Sağ (sol) essential olarak kapalı olan her ideal, bir diktoplanandır.

(f) R_R, quasi extending

(g) R_R, extending

(h) R, Baer

Aşağıdaki ifadeler R için doğrudur.

(i) R semiprime ise (a) ile (f) arası denktir.

(ii) R semiprime ve R_R komplement sınırlı ise (a) ile (g) arası denktir.

(iii) R_R nonsingular ve R_R komplement sınırlı ise (a) ile (h) arası denktir.

Kanıt. **(i)** Yardımcı Teorem 5.16'dan $S_\ell(R) = S_r(R) = \mathcal{B}(R)$, Teorem 5.19'i kullanarak (a), (b) ve (d) denktirler. [24, Lemma 2.2]'den (c), (d) ve (e) denktirler. Önerme 5.27 (i) gösteriyor ki $(f) \Rightarrow (a)$, ve (ii) kısmı gösteriyor ki $(d) \Rightarrow (f)$.

(ii) Bu, (i)'nin ve Önerme 5.32'nin bir sonucudur.

(iii) [25, Teorem 10]'dan R bir reduced halkadır. Bundan dolayı (ii) kısmı (a) ile (g) arasındaki denkliği gösterir. R reduced olduğundan, (c) ve (h) denktir [26, Lemma 1]. ■

6. TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmamızda, C_1-modüller ve bu modül ailesinin genellemelerinden olan C_{11}-modüller ile FI-extending modüllere yer verilmiştir. Bu modül ailelerinin temel özellikleri incelenmiş olup birbirleri arasındaki gerektirmelere bakılmıştır. Verilen bir özelliğin diktoplananlarına taşınıp taşınmaması en temel özelliklerden biridir. Bu özellik C_1-modül ailelerinde doğru iken, C_{11}-modül ailelerinde yanlıştır. Ancak, FI-extending modüllerde bu özellik karşımıza açık soru olarak gelmiştir. Bu sorunun cevaplanması, FI-extending modül ailelerinin karakterizasyonu için oldukça önemlidir.

KAYNAKLAR

1. Anderson, F.W. ve Fuller, K.R., *Rings and Categories of Modules*, Springer-Verlag, New York, 1974.

2. Goodearl, K.R., *Ring Theory*, Marker Dekker, 1976.

3. Kasch, F., *Modules and Rings*, Academic Press, London, 1982.

4. Sharpe, D.W. ve Vamos, P., *Injective Modules*, Cambridge University Press, 1972.

5. Fuchs, L., *Infinite Abelian Groups*, Academic Press, London, 1970.

6. Dauns, J., *Modules and Rings*, Cambridge University Press, New York, 1994.

7. Mohamed, S.H. ve Muller, B.J., *Continuous and Discrete Modules*, London Math. Soc. Lecture Note Series, **147**,Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.

8. Dung, N.V., Huynh, D.V., Smith, P.F. ve Wisbauer, R., *Extending Modules*, Pitman RN Mathematics 313, Longman, Harlow, 1994.

9. Harmancı, A. ve Smith, P.F., "Finite direct sums of CS-modules", *Houston Journal Math.* **19**, 523-532, 1993.

10. Kamal, M.A. ve Muller, B.J., "Extending modules over commutative domains", *Osaka Journal Math.* **25**, 531-538, 1988.

11. Smith, P.F. ve Tercan, A., "Generalizations of CS-modules", *Comm. Algebra*, **21**, 1809-1847, 1993.

12. Smith, P.F. ve Tercan, A., "Direct summands of modules which satisfy (C_{11})", *Algebra Colloq.* **11(2)**, 231-237, 2004.

13. Tercan, A., "On the endomorphism ring of modules", *Hacettepe Bull. of Natural Science and Engineering* **22**, 1-7, 1993.

14. Zhou, D., "On Non-M-Singular modules with (C_{11}^{+})", *Acta Math. Hungar* **97(3)**, 265-271, 2002.

15. Karabacak, F. ve Tercan, A., "On modules and matrix rings with SIP-extending", *Taiwanese Journal of Mathematics* **11(4)**, 1037-1044, 2007.

16. Lam, T.Y., *Lectures on Modules and Rings*, Springer-Verlag, New York, 1999.

17. Bredon, G.E., *Topology and Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1993.

18. Birkenmeier, G.F., Kim, J.Y. ve Park, J.K., "When is the CS condition hereditary?", *Comm. Algebra* **27**, 3875-3885, 1999.

19. Birkenmeier, G.F., Müller, B.J., Rizvi, S.T., "Modules in which every fully invariant submodule is essential in a direct summand", *Comm. Algebra*, **30(3)**, 1395-1415, 2002.

20. Birkenmeier, G.F., Călugăreanu, G., Fuchs, L. ve Goeters, H.P., "The Fully-Invariant-Extending Property for Abelian Groups", *Comm. Algebra*, **29**, 673-685, 2001.

21. Birkenmeier, G.F., Kim, J.Y., Park J.K., "Quasi-Baer ring extensions and biregular rings", *Bull. Austral. Math. Soc.* **61**, 39-52, 2000.

22. Rizvi, S.T. ve Roman, C.S., "Baer and Quasi-Baer Modules", *Comm. Algebra*, **32**, 103-123, 2004.

23. Rotman, J.J., *Introduction to the Theory of Groups (3rd ed.)*, Wm. C. Brown, Dubuque, 1980.

24. Birkenmeier, G.F., "A Generalization of FPF rings", *Comm. Algeb.* **17**, 855-884, 1989.

25. Abulkheir, H.E., Birkenmeier, G.F., "Right complement bounded semiprime rings", *Acta Math. Hungar.* **70**, 227-235, 1996.

26. Birkenmeier, G.F., "Baer rings and quasi-continuous rings have a MDSN", *Pasific J. Math.* **97**, 283-292, 1981.