HARMONİK BERGMAN UZAYLARI

Ömer Faruk DOĞAN

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Ağustos - 2010

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Ömer Faruk DOĞAN'ın **"Harmonik Bergman Uzayları"** başlıklı **Matematik** Anabilim Dalındaki, Yüksek Lisans Tezi 10.08.2010 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

		Adı Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	**:**	**Yard. Doç. Dr. ADEM ERSİN ÜREYEN**	....
Üye	**:**	**Yard. Doç. Dr. BARIŞ ERBAŞ**	....
Üye	**:**	**Yard. Doç. Dr. YELİZ MERT KANTAR**	....

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

HARMONİK BERGMAN UZAYLARI

Ömer Faruk DOĞAN

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yard. Doç. Dr. Adem Ersin ÜREYEN
2010, 91 sayfa

Bu çalışmada öncelikle harmonik fonksiyonlar ve harmonik polinomlar ile ilgili bazı temel özellikler ifade edilmiş ve daha sonra harmonik Bergman uzayları incelenmiştir. Bu uzayların bir çok özelliği analitik Bergman uzayları ile benzerlik göstermektedir. En önemlisi harmonik Bergman uzayları için de doğuran çekirdek ve bu çekirdekle ifade edilebilen, L^p uzaylarından bu uzaylara bir izdüşüm (Bergman izdüşümü) söz konusudur. Doğuran çekirdekler ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Altı bölümden oluşan bu tez çalışmasında öncelikle harmonik fonksiyonların temel özellikleri verilmiştir. Sınırlı harmonik ve pozitif harmonik fonksiyonların özellikleri sırasıyla üçüncü ve dördüncü bölümde incelenmiştir. Beşinci bölümde ise harmonik polinomların özellikleri üç ana başlık altında verilmiştir. İlkin homojen polinomlar için bir dekompozisyon teoremi verilmiş ve sonrasında ise $L^2(S)$ uzayı homojen harmonik polinom uzaylarının bir direkt toplamı olarak ifade edilmiştir. Bu bölüm zonal harmoniklerin incelenmesi ile sonlandırılmıştır. Harmonik Bergman uzaylarının özellikleri verilerek başlanan son kısım, birim yuvar üzerinde Bergman doğuran çekirdeği için açık bir formül elde edilerek sonlandırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Harmonik Fonksiyonlar, Harmonik Polinomlar, Zonal Harmonikler, Harmonik Bergman Uzayları, Doğuran Çekirdekler, Bergman İzdüşümleri

ABSTRACT

Master of Science Thesis

HARMONIC BERGMAN SPACES

Ömer Faruk DOĞAN

Anadolu University
Graduate School of Sciences
Mathematics Program

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Adem Ersin ÜREYEN

2010, 91 pages

In this study, firstly some fundamental properties of harmonic functions and harmonic polynomials are presented, and then the structure of harmonic Bergman spaces are investigated. Several properties of these spaces are analogues to those of the Bergman spaces of analytic functions. Most importantly, these spaces possess reproducing kernels and these kernels induce a projection (called Bergman projection) from L^p spaces into these spaces. These reproducing kernels are investigated in detail.

In this thesis, which consists of six chapters, firstly basic properties of harmonic functions, are given. The properties of bounded harmonic functions and positive harmonic functions are investigated in chapters three and four, respectively. In the fifth chapter, the properties of harmonic polynomials are given in three sections. Firstly, a decomposition theorem for homogeneous polynomials is given and then $L^2(S)$ space is written as a direct sum of spaces of homogeneous harmonic polynomials. This chapter is terminated by investigations of zonal harmonics. The last chapter, starting with properties of harmonic Bergman spaces,is terminated by derivation of an explicit formula for the Bergman reproducing kernel on the unit ball.

Keywords: Harmonic Functions, Harmonic Polynomials, Zonal Harmonics, Harmonic Bergman Spaces, Reproducing Kernels, Bergman Projections

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamda bilgi ve deneyimleriyle her konuda bana yardımcı olan ve sabırla yol gösteren değerli hocam Yard. Doç. Dr. Adem Ersin ÜREYEN'e,

Tezin yazım aşamasında yardımcı olan sevgili arkadaşlarım Melek ÖZTÜRK ve Özgür TAŞDEMİR'e,

Yüksek lisans öğrenimim boyunca bursiyeri olduğum TÜBİTAK'a,

Hayatım boyunca maddi ve manevi destekleriyle hep yanımda olan sevgili aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

Ömer Faruk DOĞAN

Ağustos 2010

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\lvert x\rvert$	:	x in öklid normu
∇u	:	u fonksiyonunun gradienti
$\bigoplus$	:	cebirsel direkt toplam
$<\cdot,\cdot>_{L^2}$	:	L^2 deki iç çarpım
$<\cdot,\cdot>_{b^2}$	:	b^2 deki iç çarpım
α	:	çoklu indeks
B	:	$\mathbb{R}^n$ de birim yuvar
$\bar{B}$	:	$\mathbb{R}^n$ de birim yuvarın kapanışı
$B(a,r)$	:	$\mathbb{R}^n$ de a merkezli r yarıçaplı açık yuvar
$\bar{B}(a,r)$	:	$B(a,r)$ nin kapanışı
B_n	:	n boyutlu uzayda birim yuvar
$\lVert\,\rVert_{b^p}$	:	b^p de tanımlı norm
$b^p(\Omega)$	:	harmonik Bergman uzayı
$C(E)$	:	E üzerinde sürekli fonksiyonlar kümesi
$C^k(\Omega)$	:	Ω da k. mertebeden sürekli diferansiyellenebilir
	:	fonksiyonlar kümesi
$d(a,E)$	:	a noktası ile E kümesi arasındaki uzaklık
D^α	:	kısmı türev operatörü
Δ	:	Laplasyen
D_m	:	m. koordinat değişkenine göre kısmı türev
D_n	:	Dış birim normal **n** yönündeki türev
H	:	üst yarıuzay
$H_m(\mathbb{R}^n)$	:	$\mathbb{R}^n$ de m. dereceden homojen harmonik polinomlar uzayı
$H_m(S)$	:	m. dereceden küresel harmonik polinomlar uzayı

$L^2(S)$	:	S de, ölçülebilir ve karesi integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$\mathbf{n}$	:	dış birim normal
Ω	:	$\mathbb{R}^n$ nin boştan farklı açık bir altkümesi
$\partial\Omega$	:	Ω nın sınırı
$P[f]$	:	f nin Poisson integrali
$P_m(\mathbb{R}^n)$	:	$\mathbb{R}^n$ de m. dereceden homojen polinomların vektör uzayı
$P(x,y)$	:	genişletilmiş Poisson çekirdeği
$P(x,\zeta)$	:	Poisson çekirdeği
s	:	$\mathbb{R}^n$ üzerindeki yüzey alanı ölçüsü
S	:	birim küre
V	:	$\mathbb{R}^n$ üzerindeki hacim ölçüsü
$Z_m(x,y)$	:	$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ üzerine genişletilmiş zonal harmonik
$Z_m(x,\eta)$	:	η kutuplu m. dereceden zonal harmonik
$\blacksquare$	:	Kanıtın sonu

1. GİRİŞ

Elemanları $\mathbb{C}^n$ uzayının birim yuvarında holomorf fonksiyonlar olan çeşitli fonksiyon uzayları (Hardy, Bergman, Besov, Bloch, Lipschitz,...) ve bu uzaylar üzerinde tanımlı çeşitli operatörler (Toeplitz, Henkel, bileşke operatörleri,...) uzun yıllar ayrıntılı olarak incelenmiştir (bkz. [10- 11]).
Buna karşılık elemanları $\mathbb{R}^n$ nin birim yuvarında harmonik olan fonksiyon u-zaylarının incelenmesine ancak son yıllarda başlanmıştır. Bu tezdeki amacımız yukarıda bahsedilen fonksiyon uzaylarından birisi olan harmonik Bergman uzayı hakkında bilinen özelliklerden en temel olanlarını özetlemektir.

Harmonik fonksiyonlar matematik, fizik ve mühendisliğin bir çok alanında önemli bir rol oynar. Bölüm 2'de n boyutlu Öklidyen uzay $\mathbb{R}^n$ de harmonik fonksiyonları tanımlanıp, bu fonksiyonların çalışmamız boyunca kullanacağımız çeşitli özellikleri kanıtlarıyla birlikte verilmiştir.

Bölüm 3'te, sınırlı harmonik fonksiyonların bazı özellikleri incelenmiştir. Kompleks analizde sınırlı holomorf fonksiyonlar için verilen Liouville teoremi, ayrık aykırılıklar ve Cauchy özelliğinin; $\mathbb{R}^n$ de sınırlı harmonik fonksiyonlar için de geçerli olduğu gösterilmiştir.

Bölüm 4'te, pozitif harmonik fonksiyonların önemli bazı özellikleri verilmiştir. Öncelikle Liouville teoreminin pozitif harmonik fonksiyonlar için de doğru olduğu gösterilmiştir. Daha sonra ise bağlantılı bir kümenin kompakt altkümeleri üzerinde tanımlı pozitif harmonik fonksiyonların geniş salınımlar yapamayacağını ifade eden Harnack eşitsizliği üzerinde durulmuştur.

Bölüm 5'te, harmonik polinomların irdelenmesine herhangi bir polinomun Poisson integralinin de bir polinom olduğu sonucu ile başlanmış ve homojen polinomlar için bir harmonik dekompozisyon teoremi verilmiştir. Diğer önemli bir sonuç olarak, $L^2(S, dV)$ Hilbert uzayının homojen harmonik polinom uzaylarının bir direkt toplamı olarak ifade edilebileceği gösterilmiştir. Bölüm zonal harmoniklerin incelenmesi ile sonlandırılmıştır.

Bölüm 6'da, harmonik Bergman uzaylarının temel özellikleri verilmiştir. Harmonik Bergman doğuran çekirdeği ve Bergman izdüşümü incelenmiş ve aralarındaki bağlantı verilmiştir. Son olarak birim yuvarda harmonik Bergman doğuran çekirdeği için açık bir formül elde edilmiştir.

2. HARMONİK FONKSİYONLAR

Bu bölümde, $\mathbb{R}^n$ de harmonik fonksiyonların temel özellikleri incelenmiştir.

2.1. Temel Tanım ve Örnekler

Bu çalışma süresince aksi belirtilmedikçe n, 1 den büyük pozitif tamsayı ve Ω, $\mathbb{R}^n$ nin boştan farklı açık bir alt kümesidir.

Tanım 2.1.1. *Bir Ω bölgesinde tanımlı kompleks değerli u fonksiyonu, ikinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip ve Laplace denklemi adı verilen $\Delta u = D_1^2 u + ... + D_n^2 u \equiv 0$ denklemini sağlıyorsa u fonksiyonuna Ω da* ***harmonik fonksiyon*** *denir. Burada $\Delta = D_1^2 + ... + D_n^2$ ya* ***Laplasyen*** *denir. Eğer herhangi $E \subset \mathbb{R}^n$ altkümesinde tanımlı u fonksiyonu, E yi kapsayan bir açık kümede harmonik olan bir fonksiyona genişletilebilirse u fonksiyonuna E de harmonik denir.*

Aşağıda bazı harmonik fonksiyon örnekleri verilmiştir. Bu kısımda $x = (x_1, ..., x_n)$, $\mathbb{R}^n$ nin bir noktasını ve $|x| = (x_1^2 + ... + x_n^2)$ ise öklid normunu belirtsin.

Örnek 2.1.2. *En basit harmonik fonksiyonlar koordinat fonksiyonlarıdır. Örneğin, $u(x) = x_1$ fonksiyonu için $\Delta u = D_1^2 u + ... + D_n^2 u \equiv 0$ olduğundan u fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ de harmoniktir.*

Örnek 2.1.3. *$\mathbb{R}^4$ de tanımlı $u(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 3x_4^2 + ix_1x_2$ fonksiyonu harmoniktir.*

Aşağıdaki iki örnek harmonik fonksiyon teorisinde önemli bir yere sahiptir.

Örnek 2.1.4. *$n = 2$ için $u(x) = \log |x|$ fonksiyonu $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ da harmoniktir. Gerçekten, u fonksiyonu $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ da ikinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip ve*

$$D_1 u(x) = \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) = \frac{x_1}{|x|^2} \ , \ D_2 u(x) = \frac{\partial u}{\partial x_2}(x) = \frac{x_2}{|x|^2}$$

buradan,

$$D_1^2 u(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) = \frac{|x|^2 - 2x_1^2}{|x|^4} \;,\; D_2^2 u(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x) = \frac{|x|^2 - 2x_2^2}{|x|^4}$$

olur. $\Delta u = D_1^2 u + D_2^2 u$ *olduğundan,*

$$\Delta u(x) = D_1^2 u(x) + D_2^2 u(x) = \frac{2|x|^2 - 2|x|^2}{|x|^4} = 0$$

dır.

Örnek 2.1.5. $n > 2$ *için* $u(x) = |x|^{2-n}$ *fonksiyonu* $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ *da harmoniktir. Gerçekten,* $u \in C^2(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ *ve* $m \in (1, ..., n)$ *iken*

$$D_m u(x) = \frac{\partial u}{\partial x_m}(x) = (2-n) x_m |x|^{-n}$$

buradan,

$$D_m^2 u(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2}(x) = (2-n)|x|^{-n} - n(2-n) x_m^2 |x|^{-n-2}$$

$\Delta u = \sum_{m=1}^{n} D_m^2 u$ *olduğundan,*

$$\Delta u(x) = \sum_{m=1}^{n} D_m^2 u(x) = n(2-n)|x|^{-n} - n(2-n)|x|^{-n-2}|x|^2 = 0$$

dır.

Daha sonra ispatlanacağı üzere harmonik fonksiyonlar her mertebeden türevlenebilirdir. Üstelik harmonik fonksiyonların kısmi türevleri harmoniktir. Böylelikle harmonik fonksiyon örneklerini arttırmak mümkündür.

Tanım 2.1.6. *k pozitif tamsayı olmak üzere $C^k(\Omega)$, Ω da k. mertebeden sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlar kümesidir.*

Önerme 2.1.7. *Harmonik fonksiyonların toplamları ve skalerle çarpımları da harmoniktir.*

Tanım 2.1.8. *$y \in \mathbb{R}^n$ ve u, Ω da bir fonksiyon olsun. u nun y kadar ötelenmişi $\Omega + y$ de x deki değeri $u(x-y)$ olan bir fonksiyondur.*

Önerme 2.1.9. *Harmonik fonksiyonların ötelenmişleri de harmoniktir.*

Tanım 2.1.10. *r pozitif tamsayı ve u, Ω da harmonik bir fonksiyon olsun. u nun r kadar genişletilmişi u_r ile gösterilir ve $(1/r)\Omega = \{(1/r)w : w \in \Omega\}$ daki x ler için $u_r(x) = u(rx)$ olarak tanımlanır.*

Önerme 2.1.11. *Harmonik fonksiyonların genişletilmişleri de harmoniktir.*

Kanıt. u, Ω bölgesinde harmonik bir fonksiyon olsun.u_r fonksiyonu $(1/r)\Omega$ da tanımlı ve $x \in (1/r)\Omega$ için $u_r(x) = u(rx)$ dir. O halde

$$D_m u_r = r(D_m u)_r$$

$$D_m^2 u_r = r^2(D_m^2 u)_r$$

dir. $\Delta(u_r) = \sum_{m=1}^{n} D_m^2(u_r)$ olduğundan,

$$\Delta(u_r)(x) = r^2(\Delta u)_r(x)$$

dir. u harmonik olduğundan $(\Delta u)_r \equiv 0$ dolayısıyla $\Delta(u_r) \equiv 0$ dır. ∎

T, $\mathbb{R}^n$ den $\mathbb{R}^n$ ye bir lineer dönüşüm olsun. Eğer her $x \in \mathbb{R}^n$ için $|T(x)| = |x|$ ise, T ye ortogonal dönüşüm denir. $\mathbb{R}^n$ nin standart tabanına göre T nin matrisi A olsun. T nin ortogonal olması için gerek ve yeter koşul A nın sütun vektörlerinin ortonormal olmasıdır.

Önerme 2.1.12. *$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ortogonal bir dönüşüm ve u, Ω da harmonik bir fonksiyon olsun. $u \circ T$ fonksiyonu $T^{-1}(\Omega)$ da harmoniktir.*

Kanıt. $i, j \in (1, ..., n)$ olmak üzere $[t_{ij}]_{n\times n}$, T nin $\mathbb{R}^n$ nin standart tabanına göre matrisini ifade etsin.

$$\begin{aligned} D_m(u \circ T) &= t_{1m}(D_1 u) \circ T + ... + t_{nm}(D_n u) \circ T \\ &= \sum_{i=1}^{n} t_{im}(D_i u) \circ T \end{aligned}$$

buradan,

$$\begin{aligned} D_m^2(u \circ T) &= \sum_{i=1}^{n} t_{im} D_m((D_i u) \circ T) \\ &= \sum_{i=1}^{n} t_{im}(\sum_{j=1}^{n} t_{jm}(D_j D_i u) \circ T) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} t_{im} t_{jm}(D_j D_i u) \circ T \end{aligned}$$

dır.

$$\begin{aligned}
\Delta(u \circ T) &= \sum_{m=1}^{n} D_m^2(u \circ T) \\
&= \sum_{m=1}^{n} (\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} t_{im} t_{jm} (D_j D_i u) \circ T) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (\sum_{m=1}^{n} t_{im} t_{jm}) (D_j D_i u) \circ T
\end{aligned}$$

T ortogonal dönüşüm olduğundan $i = j$ ve $i \neq j$ iken sırasıyla

$$\sum_{m=1}^{n} t_{im} t_{jm} = 1 \ ve \ \sum_{m=1}^{n} t_{im} t_{jm} = 0$$

dır. Bu durumda

$$\Delta(u \circ T) = \sum_{i=j=1}^{n} (D_i D_i u) \circ T = (\Delta u) \circ T$$

dır. Buradan u harmonik olduğundan $\Delta u \equiv 0$ dolayısıyla $\Delta(u \circ T) \equiv 0$ olur. ■

2.2. Ortalama Değer Özelliği

Harmonik fonksiyonların birçok temel özelliğinde olduğu gibi ortalama değer özelliğinde de Green eşitliği önemli bir rol oynadığından öncelikle bu özellik verilmiştir.

Teorem 2.2.1. ***(Green Eşitliği)***

Ω, $\mathbb{R}^n$ nin sınırlı açık bir alt kümesi ve $\partial\Omega$ düzgün olsun. Eğer u ve v fonksiyonları $\bar{\Omega}$ yı (Ω nın kapanışı) kapsayan açık bir kümede 2. mertebeden sürekli diferansiyellenebilir ise

$$\int_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u) \, dV = \int_{\partial\Omega} (uD_{\mathbf{n}}v - vD_{\mathbf{n}}u) \, ds, \qquad (2.2.1)$$

eşitliği geçerlidir.

Burada V, $\mathbb{R}^n$ üzerindeki hacim ölçüsünü, s, $\partial\Omega$ üzerindeki yüzey alanı ölçüsünü ve D_n sembolü dış birim normal $\mathbf{n}$ yönündeki türevi belirtir.

$\nabla u = (D_1 u, ..., D_n u)$, u nun gradientini ve $\cdot$ standart öklid iç çarpımını belirtmek üzere $(D_n u)(\zeta) = (\nabla u)(\zeta) \cdot \mathbf{n}(\zeta)$ dır.

Green eşitliği, aşağıdaki divergence teoreminin bir sonucudur.

Teorem 2.2.2. *$\boldsymbol{w} = (w_1, ..., w_n)$, $\bar{\Omega}$ nın komşuluğunda bir düzgün vektör cismini ve $div\boldsymbol{w} = D_1 w_1 + ... + D_n w_n$, $\boldsymbol{w}$ nın Divergence'ını belirtmek üzere* ***Divergence teoremi****,*

$$\int_\Omega divw \; dV = \int_{\partial\Omega} w \cdot \boldsymbol{n} \; ds,$$

dır.

Green eşitliğinin kanıtı:

Divergence teoreminde $\mathbf{w} = u\nabla v - v\nabla u$ alınırsa,

$$\begin{aligned} u\nabla v &= (uD_1 v, ..., uD_n v) \\ v\nabla v &= (vD_1 u, ..., vD_n u) \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} div(u\nabla v) &= (D_1 u D_1 v + uD_1^2 v) + ... + (D_n u D_n v + uD_n^2 v) \\ div(v\nabla u) &= (D_1 v D_1 u + vD_1^2 u) + ... + (D_n v D_n u + vD_n^2 u) \end{aligned}$$

olur. $div(u\nabla v - v\nabla u) = div(u\nabla v) - div(v\nabla u)$ olduğundan,

$$\begin{aligned} div(u\nabla v - v\nabla u) &= u(D_1^2 v + ... + D_n^2 v) - v(D_1^2 u + ... + D_n^2 u) \\ &= u\Delta v - v\Delta u \end{aligned} \tag{1}$$

dır. Diğer yandan,

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} &= [u\nabla v - v\nabla u] \cdot \mathbf{n} \\ &= u(\nabla v \cdot \mathbf{n}) - v(\nabla u \cdot \mathbf{n}) \\ &= uD_{\mathbf{n}} v - vD_{\mathbf{n}} u \end{aligned} \tag{2}$$

olur. (1) ve (2) Divergence teoreminde yerine yazılırsa,

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u) \; dV = \int_{\partial\Omega} (uD_{\mathbf{n}} v - vD_{\mathbf{n}} u) \; ds,$$

elde edilir.

Önerme 2.2.3. *u, $\bar{\Omega}$ da harmonik bir fonksiyon ise,*

$$\int_{\partial\Omega} D_{\boldsymbol{n}} u \; ds = 0 \tag{2.2.2}$$

dır.

Kanıt. Green eşitliğinde $v \equiv 1$ alınırsa (2.2.2) elde edilir. ■

Tanım 2.2.4. *$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x-a| < r\}$ ye a merkezli, r yarıçaplı açık yuvar denir. Kapanışı $\bar{B}(a,r)$ dir. Birim yuvar B,kapanışı $\bar{B}$ ve Bnin sınırı (birim küre) S ile gösterilmiştir.*

Önerme 2.2.5. *$V(B)$, B nin hacmini ve $A(S)$, S nin alanını belirtmek üzere $A(S) = nV(B)$ dir.*

Kanıt. Green eşitliğinde (2.2.1) $\Omega = B$,$u \equiv 1$ ve $v(x) = |x|^2$ alınsın. $\Delta v \equiv 2n$ ve $D_n v \equiv 2$ dir. Buradan $2nV(B) = 2A(S)$ ve $nV(B) = A(S)$ dir. ■

S üzerindeki normalleştirilmiş yüzey alanı ölçüsü σ ile gösterilir. $d\sigma = ds/A(S)$ ve böylece $\sigma(S) = 1$ dir.

Şimdi Harmonik fonksiyonlar teorisinde önemli bir yer tutan ortalama değer özelliği verilecektir.

Teorem 2.2.6. ***(Ortalama değer özelliği)***

u, $\bar{B}(a,r)$ de harmonik bir fonksiyon olsun. $u(a)$, u nun $\partial B(a,r)$ deki değerlerinin ortalamasına eşittir. Yani,

$$u(a) = \frac{1}{A(\partial B(a,r))} \int_{\partial B(a,r)} u(x) \; ds(x) \tag{2.2.3}$$

dir.

(2.2.3) ifadesinde $\zeta \in S$ için $x = a + r\zeta$ $(ds(x) = r^{n-1} ds(\zeta))$ değişken değişimi yapılırsa, $A(\partial B(a,r)) = r^{n-1}A(S)$ olduğundan,

$$\begin{aligned} u(a) &= \frac{1}{r^{n-1}A(S)}\int_S u(a+r\zeta)r^{n-1}\,ds(\zeta) \\ &= \frac{1}{A(S)}\int_S u(a+r\zeta)\,ds(\zeta) \\ &= \int_S u(a+r\zeta)\,\frac{ds(\zeta)}{A(S)} \\ &= \int_S u(a+r\zeta)\,d\sigma(\zeta) \end{aligned}$$

olacağından, ortalama değer özelliği

$$u(a) = \int_S u(a+r\zeta)\,d\sigma(\zeta) \tag{2.2.4}$$

şeklinde de ifade edilebilir.

Kanıt. Öncelikle $n > 2$ olsun. Genellliği bozmadan $B(a,r) = B$ kabul edelim. Sabit bir $\varepsilon \in (0,1)$ için $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \varepsilon < |x| < 1\}$ ve $v(x) = |x|^{2-n}$ olmak üzere Green eşitliğine (2.2.1) başvurulursa,

$$0 = \int_\Omega u\Delta v - v\Delta u\,dV = \int_S uD_nv - vD_nu\,ds + \int_{\varepsilon S} uD_nv - vD_nu\,ds$$

elde edilir. Buradan S için $\mathbf{n} = (x_1,...,x_n)$ ve $\nabla v = (2-n)|x|^{-n}(x_1,...,x_n)$ olup, $D_nv = \nabla v\cdot\mathbf{n} = (2-n)|x|^{-n}|x|^2$ dir. O halde,

$$\begin{aligned} \int_S uD_nv - vD_nu\,ds &= \int_S u(2-n)|x|^{-n}|x|^2 - |x|^{2-n}D_nu\,ds \\ &= \int_S u(2-n)|x|^{2-n}\,ds - \int_S |x|^{2-n}D_nu\,ds \end{aligned}$$

dır. S de $|x|^{2-n} = 1$ olduğundan ve Önerme (2.2.3) den,

$$\int_S uD_nv - vD_nu\,ds = (2-n)\int_S u\,ds \tag{1}$$

dir. Öte yandan εS' de $\mathbf{n} = -\frac{1}{\varepsilon}(x_1,...,x_n)$ olup, Önerme (2.2.3) den

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon S} uD_nv - vD_nu\,ds &= -\tfrac{1}{\varepsilon}\int_{\varepsilon S} u(2-n)|x|^{-n}|x|^2\,ds - \int_{\varepsilon S}|x|^{2-n}D_nu\,ds \\ &= (2-n)(-\tfrac{1}{\varepsilon})\varepsilon^{-n}\varepsilon^2\int_{\varepsilon S} u\,ds - \varepsilon^{2-n}\int_{\varepsilon S} D_nu\,ds \\ &= -(2-n)\varepsilon^{1-n}\int_{\varepsilon S} u\,ds \end{aligned} \tag{2}$$

dır. (1) ve (2) den

$$0 = (2-n)\int_S u\ ds - (2-n)\varepsilon^{1-n}\int_{\varepsilon S} u\ ds$$

dır. Yani

$$\int_S u\ ds = \varepsilon^{1-n}\int_{\varepsilon S} u\ ds$$

elde edilir. Ancak ulaşılmak istenen ifade,

$$\frac{1}{A(S)}\int_S u\ ds = u(0)$$

dır. O halde $\varepsilon \to 0$ iken

$$\varepsilon^{1-n}\int_{\varepsilon S} u\ ds \to u(0)A(S)$$

olduğunun gösterilmesi yeterlidir. Öncelikle,

$$u(0)A(S) = \varepsilon^{1-n}\int_{\varepsilon S} u(0)\ ds$$

yazılabilir. Diğer yandan u, 0 da sürekli olduğundan $\forall\mu > 0$ için $\exists\delta > 0$ vardır öyle ki $|s| < \delta$ iken $|u(s) - u(0)| < \mu$ dır. Bu iki durumdan $\varepsilon < \mu$ iken ,

$$\begin{aligned} |\varepsilon^{1-n}\int_{\varepsilon S} u(s) - u(0)\ ds| &\leq \varepsilon^{1-n}\int_{\varepsilon S} |u(s) - u(0)|\ ds \\ &\leq \varepsilon^{1-n}\int_{\varepsilon S} \mu\ ds \\ &= \varepsilon^{1-n}\mu\varepsilon^{n-1}A(S) = \mu A(S) \end{aligned}$$

dir. $A(S)$ sabit bir değer olduğundan istenilen sonuç elde edilmiş olur.

$n = 2$ için ispat $v(x) = |x|^{2-n}$ yerine $\log|x|$ alınması dışında aynıdır.

■

Harmonik fonksiyonlar için ortalama değer özelliği hacim ölçüsüne göre de verilebilir.

Yardımcı Teorem 2.2.7. f, *$\mathbb{R}^n$ üzerinde integrallenebilir bir fonksiyon olsun.*
$\mathbb{R}^n$ üzerindeki integral için polar koordinat formülü;

$$\frac{1}{nV(B)}\int_{\mathbb{R}^n} f\ dV = \int_0^\infty r^{n-1}\int_S f(r\zeta)\ d\sigma(\zeta)\ dr$$

dir.

Teorem 2.2.8. ***(Ortalama değer özelliği, Hacim versiyonu)***

u, $\bar{B}(a,r)$ de harmonik bir fonksiyon olsun. $u(a)$, u nun $B(a,r)$ deki değerlerinin ortalamasına eşittir. Yani,

$$u(a) = \frac{1}{V(B(a,r))} \int_{B(a,r)} u \, dV$$

dir.

Kanıt. Geneliği bozmadan $B(a,r) = B$ kabul edilsin. Polar koordinat formülünde f yerine u yazılıp B üzerinden integral alınırsa,

$$\frac{1}{nV(B)} \int_B u \, dV = \int_0^1 r^{n-1} \int_S u(r\zeta) \, d\sigma(\zeta) \, dr$$

elde edilir. Ortalama değer özelliği (2.2.4) gereği $r \in (0,1)$ için u, $B(a,r)$ de harmonik olacağından,

$$\int_S u(r\zeta) \, d\sigma(\zeta) = u(0)$$

olur. O halde ifade

$$\frac{1}{nV(B)} \int_B u \, dV = u(0) \int_0^1 r^{n-1} \, dr = u(0)\frac{1}{n}$$

halini alır ki buradan,

$$u(0) = \frac{1}{V(B)} \int_B u \, dV$$

elde edilir. ■

Daha sonra harmonik fonksiyonların ortalama değer özelliği ile karakterize edilebildiği görülecektir. Başka bir deyişle harmonik fonksiyonlar, ortalama değer özelliği ile de tanımlanabilir.

Aşağıda, ortalama değer özelliğinin bir uygulaması verilmiştir.

Sonuç 2.2.9. *Reel değerli harmonik bir fonksiyonun sıfırları ayrık olamaz.*

Kanıt. u, bir Ω bölgesinde reel değerli ve harmonik bir fonksiyon olsun. Bir $a \in \Omega$ için $u(a) = 0$ olsun. $\bar{B}(a,r) \subset \Omega$ olacak şekilde $r > 0$ seçilsin. Ortalama değer özelliği (2.2.4) gereği;

$$\int_S u(a + r\zeta) \, d\sigma(\zeta) = u(a) = 0$$

dır. Bu durumda ya $\forall\zeta \in S$ için $u(a + r\zeta) = 0$ dır ya da $\partial B(a, r)$ de u pozitif ve negatif değerler alır. Ancak $\partial B(a, r)$ bağlantılı bir küme ve u, $\partial B(a, r)$ de sürekli olduğundan $u(\partial B(a, r))$ de bağlantılı olacaktır. Bu durum u fonksiyonunun ikinci durumda da $\partial B(a, r)$ de enaz bir kez 0 değeri almasını gerektirir. O halde r ($\bar{B}(a, r) \subset \Omega$ olacak şekilde) keyfi olduğundan, u fonksiyonu a merkezli yeterince küçük her yuvarın sınırında 0 değerini alır. Bu durum ise a nın u fonksiyonunun ayrık bir sıfırı olamayacağını kanıtlar. ■

Örnek 2.2.10. $\mathbb{R}^2$ *de tanımlı* $u(x, y) = x^2 - y^2$ *reel değerli harmonik fonksiyonunun sıfırları ayrık değildir. Çünkü* u *fonksiyonu* 0 *değerini* $x = y$ *ve* $x = -y$ *doğruları boyunca alır.*

Bu sonuç kompleks değerli harmonik fonksiyonlar için geçerli değildir.

Örnek 2.2.11. $\mathbb{R}^3$ *de tanımlı* $u(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + z^2 + iy$ *harmonik fonksiyonu sıfır değerini sadece orijinde alır.*

2.3. Maksimum ilkesi

Harmonik fonksiyonlar için maksimum ilkesi ortalama değer özelliğinin önemli sonuçlarından biridir.

Teorem 2.3.1. ***(Maksimum İlkesi)***

Ω bağlantılı bir küme ve u, Ω da reel değerli harmonik bir fonksiyon olsun. u fonksiyonu maksimum yada minimum değerini Ω da alıyorsa, u sabittir.

Kanıt. u fonksiyonunun bir $a \in \Omega$ noktasında M maksimum değerini aldığı varsayılsın. $\bar{B}(a, r) \subset \Omega$ olacak şekildeki $\forall r > 0$ için ortalama değer özelliği (hacim versiyonu) 2.2.8 gereği,

$$u(a) = \frac{1}{V(B(a, r))} \int_{B(a,r)} u(x)dV(x)$$

dir. Buradan

$$\frac{1}{V(B(a, r))} \int_{B(a,r)} (u(a) - u(x))dV(x) = 0$$

olur. $u(a)-u(x)$, $B(a, r)$ de sürekli ve negatif olmayan bir fonksiyon olduğundan $x \in B(a, r)$ için $u(a) = u(x)$ dır. O halde u, $B(a, r)$ de sabittir. Bu durum

$A = \{x \in \Omega : u(x) = M\}$ kümesinin Ω da açık olduğunu kanıtlar. Yani $\forall x \in A$ için $\exists r > 0$ vardır öyle ki $B(x,r) \subset A$ dır. Diger yandan u sürekli bir fonksiyon olduğundan M tek nokta kümesinin u altındaki tersi olan A kümesi kapalıdır. O halde A hem açık hem kapalı bir kümedir. Ω bağlantılı bir küme olduğundan A alt kümesi ya $\emptyset$ dir yada Ω dır. Ancak baştaki kabul gereği $\exists a \in A$ olduğundan $A = \Omega$ dır. Bu nedenle u fonksiyonu Ω da sabittir.

u fonksiyonu Ω da minimum değerini alıyor olsun. Bu değerin negatifi $-u$ nun Ω daki maksimum değeri olur. Yukarıdaki tartışmadan $-u$ dolayısıyla u fonksiyonu Ω da sabit olur. ■

Aşağıda maksimum ilkesinin Ω nın bağlantılı olmasını gerektirmeyen bir sonucu verilmiştir.

Sonuç 2.3.2. *Ω sınırlı bir bölge ve u, Ω da harmonik , $\bar{\Omega}$ da sürekli olan reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu durumda u, $\bar{\Omega}$ üzerindeki maksimum ve minimum değerlerini $\partial\Omega$ da alır.*

Kanıt. $\bar{\Omega}$ kompakt bir küme ve u fonksiyonu bu kümede süreklidir. Ekstremum değer teoremi gereği u fonksiyonu maksimum ve minimum değerlerini bu küme üzerinde alır. Varsayalım ki, u nun maksimum değeri M olsun ve u bu değeri $a \in \Omega$ noktasında alsın. Ω nın a yı içeren en büyük bağlantılı alt kümesi (component) A olsun. Maksimum ilkesi 2.3.1 gereği $\forall x \in A$ için $u(x) = M$ dir. u, $\bar{A}$ da sürekli olduğundan $\forall x \in \bar{A}$ için $u(x) = M$ dir. $\partial A \subseteq \partial\Omega$ olduğundan, $\partial\Omega$ da u nun M değerini aldığı bir nokta vardır. O halde u fonksiyonu maksimum ve minimum değerlerini $\partial\Omega$ da alır. ■

Sonuç 2.3.3. *u, Ω sınırlı bölgesinde harmonik ve $\bar{\Omega}$ da sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. $\forall x \in \partial\Omega$ için $u(x) = K$ (K sabit) ise u fonksiyonu Ω da sabittir.*

Kanıt. Sonuç 2.3.2 gereği u fonksiyonu maksimum ve minimum değerlerini $\partial\Omega$ da alır. u nun Ω daki maksimum değeri M ve minimum değeri m olmak üzere $M = m = K$ dır. O halde $\forall z \in \Omega$ için $u(z) = K$ dır. Yani u, Ω da sabittir. ■

Sonuç 2.3.4. *u_1 ve u_2, Ω sınırlı bölgesinde harmonik ve $\bar{\Omega}$ da sürekli olan iki reel değerli fonksiyon olsun. Eğer $\partial\Omega$ da $u_1 \equiv u_2$ ise $\bar{\Omega}$ da $u_1 \equiv u_2$ dir.*

Kanıt. u fonksiyonu $u(z) = u_1(z) - u_2(z)$ olarak tanımlanır ve sonuç 2.3.3 ye başvurulursa $\partial\Omega$ da $u \equiv 0$ dolayısıyla $\bar{\Omega}$ da $u \equiv 0$ dır. O halde $\bar{\Omega}$ da $u_1 - u_2 \equiv 0$ olup $u_1 \equiv u_2$ dir. ∎

Bu sonuçlarla sınırlı bölgede harmonik olan bir fonksiyonun sınırda aldığı değerlerle belirlendiği söylenmiş oldu. Ancak bu sonuçlar sınırlı olmayan bölgeler için verilemez .

Örnek 2.3.5. *$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ yarı uzayının sınırı $\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$ dır. $u(x) = x_n$ ve $v(x) \equiv 0$ fonksiyonları Ω da harmonik, $\bar{\Omega}$ da süreklidir. u ve v, $\partial\Omega$ da aynı oldukları halde Ω da bu iki fonksiyon birbirinden farklıdır.*

Aşağıda maksimum ilkesinin Ω nın sınırlı ve u nun $\partial\Omega$ da sürekli olmasını gerektirmeyen bir hali verilmiştir.

Önerme 2.3.6. *u, Ω da reel değerli harmonik bir fonksiyon olsun. $\partial\Omega$ da bir noktaya veya ∞ a ($|a_k| \to \infty$) yakınsayan Ω daki her (a_k) dizisi için*

$$\limsup_{k\to\infty} u(a_k) \leq M$$

olduğu varsayılsın. Bu durumda Ω da $u \leq M$ dir.

Not: $\liminf$ durumunda da eşitsizlikler yön değiştirmek kaydıyla önerme geçerlidir.

Kanıt. $M' = \sup\{u(x) : x \in \Omega\}$ olsun. Ω da bir (b_k) dizisi $u(b_k) \to M'$ olacak şekilde seçilsin.

Eğer (b_k) dizisinin $b \in \Omega$ ya yakınsayan bir altdizisi varsa u nun sürekliliğinden $u(b) = M'$ olur. Bu durum maksimum ilkesi gereği 2.3.1 u fonksiyonunun Ω nın b yi içeren bağlantılı bileşeni üzerinde sabit olmasını gerektirir. O halde $u \equiv M$ olan Ω nın bağlantılı bileşeninde bir (a_k) dizisi Ω nın bir sınır noktasına veya ∞ a yakınsayacak şekilde vardır. Böylece,

$$\lim_{k\to\infty} u(a_k) = M' \leq \limsup_{k\to\infty} u(a_k) \leq M$$

yani $M' \leq M$ olur. Dolayısıyla Ω da $u \leq M$ dir.

Aksine (b_k) dizisinin Ω da bir noktaya yakınsayan bir altdizisi olmasın. O halde (b_k) dizisi $\partial\Omega$ da bir noktaya veya ∞ a yakınsayan bir (a_k) altdizisine sahiptir. Böylece yine $M' \leq M$ elde edilir ki Ω'da $u \leq M$ dir. ■

Maksimum ilkesi şimdiye kadar reel değerli harmonik fonksiyonlar için verildi. Kompleks değerli harmonik fonksiyonlar için maksimum ilkesi aşağıdaki şekilde geçerlidir.

Sonuç 2.3.7. *Ω bağlantılı ve u, Ω da harmonik bir fonksiyon olsun. $|u|$, Ω da maksimum değerini alıyorsa u sabittir.*

Kanıt. $|u|$ fonksiyonu $a \in \Omega$ da maksimum değerini alsın.$|u(a)| = M$ olsun.$\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$ ve $\lambda u(a) = M$ olacak şekilde seçilsin. O halde $\mathrm{Re}(\lambda u)$ reel değerli harmonik fonksiyonu a da M maksimum değerini alır. Bu durumda maksimum ilkesi 2.3.1 gereği Ω da $\mathrm{Re}(\lambda u) = M$ dir.$|\lambda u| = |u| \leq M$ olduğundan Ω da $\mathrm{Im}(\lambda u) \equiv 0$ dır. Böylece λu dolayısıyla u fonksiyonu Ω da sabittir. ■

Diğer sonuçlar içinde kompleks değerli harmonik fonksiyonlar için buna benzer uyarlamalar yapılabilir. Ancak bu uyarlamalar sadece maksimum ilkesi için geçerlidir. Çünkü $|u|$ için minimum ilkesi gerçeklenmez .

Örnek 2.3.8. *$B(0,1)$ de tanımlı $u(x) = ix_n$ harmonik fonksiyonu gözönüne alınsın. $B(0,1)$ de $|u|$ fonksiyonunun minimum değeri 0 dır. Yani $|u|$ minumum değerini bir iç noktada alır.*

2.4. Birim Yuvar İçin Poisson Çekirdeği

Ortalama değer özelliğinde, harmonik bir fonksiyonun a noktasındaki değerinin, a merkezli bir yuvarın sınırı(küre) üzerindeki değerlerinin bir ortalaması olduğu söylenmişti. Benzer bir sonuç yuvarın içindeki herhangi bir x noktası için de geçerlidir. Ancak bu durumda u nun sınırdaki değerlerini uygun bir fonksiyon ile çarpmak ve bu çarpımın ortalamasını almak gerekir.

Tanım 2.4.1. $P : B \times S \to \mathbb{R}$,

$$P(x,\zeta) = \frac{1-|x|^2}{|x-\zeta|^n}$$

fonksiyonuna ***birim yuvar için Poisson çekirdeği*** *denir.*

Teorem 2.4.2. ***(Poisson integral formülü)***
u, $\bar{B}$ de harmonik bir fonksiyon olsun. $\forall x \in B$ için

$$u(x) = \int_S u(\zeta) P(x,\zeta) d\sigma(\zeta),$$

dır.

Burada $P(x,\zeta)$ fonksiyonuna **Yuvar için Poisson çekirdeği** denir.

Öncelikle, şimdi ve daha sonra da kullanılacak bir sonuç verelim.

Önerme 2.4.3. ***(Simetri Önermesi)***
Sıfırdan farklı her $x, y \in \mathbb{R}^n$ için

$$\Big| \frac{y}{|y|} - |y|x \Big| = \Big| \frac{x}{|x|} - |x|y \Big|$$

dir.

Kanıt. Her iki tarafın karesi alınır ve iç çarpımın özelliği kullanılırsa sonuç görülür. ■

Teoremi $n > 2$ için ispatlayalım. $n = 2$ durumunda ispat $|x|^{2-n}$ yerine $\log|x|$ fonksiyonu kullanılarak benzer şekilde yapılabilir.

u, $\bar{B}$ de harmonik bir fonksiyon olsun. $x \in B \backslash \{0\}$ sabitlensin ($x = 0$ için ortalama değer özelliği geçerlidir). $0 < r < 1$ olmak üzere $\Omega = \{y \in \mathbb{R}^n : r < |y - x| < 1\}$ olarak tanımlansın. $v(y) = |y - x|^{2-n}$ fonksiyonu ele alınsın. Bu fonksiyon $\mathbb{R}^n \backslash \{x\}$ de harmoniktir. Simetri önermesi 2.4.3'den $\zeta \in S$ için $|\zeta - x| = \big|\frac{\zeta}{|\zeta|} - |\zeta|x\big| = \big||x|\zeta - \frac{x}{|x|}\big| = |x|\big|\zeta - \frac{x}{|x|^2}\big|$ dir.
Bu nedenle S üzerinde v ve $w(y) = |x|^{2-n}|y - \frac{x}{|x|^2}|^{2-n}$ fonksiyonu denktir.

w fonksiyonu $\bar{B}$ de harmoniktir. (Çünkü $\frac{x}{|x|^2}$, $\bar{B}$ nin dışındadır.). O halde $\bar{B}$ de harmonik u ve w fonksiyonları için Green eşitliği (2.2.1)'den ,

$$0 = \int_S (uD_n w - wD_n)u\ ds$$

dir. Ayrıca S üzerinde $w = v$ olduğundan,

$$\int_S uD_n w\ ds = \int_S wD_n u\ ds = \int_S vD_n u\ ds \tag{1}$$

olur. Diğer yandan u ve v fonksiyonları için $B \backslash \bar{B}(x,r)$ üzerinden yine Green eşitliğinden faydalanılarak,

$$0 = \int_S (uD_n v - vD_n u)\ ds - \int_{\partial B(x,r)} (uD_n v - vD_n u)\ ds$$

elde edilir. Yani

$$\int_S (uD_n v - vD_n u)\ ds = \int_{\partial B(x,r)} (uD_n v - vD_n u)\ ds$$

dır. $x \in \partial B(x,r)$ için $\nabla v(x) = (2-n)|y-x|^{-n}(y-x)$ ve $D_n v = (2-n)r^{1-n}$'dir. O halde ifade,

$$\begin{aligned}
\int_S (uD_n v - vD_n u)\ ds &= \int_{\partial B(x,r)} (uD_n v - vD_n u)\ ds \\
&= (2-n)r^{1-n} \int_{\partial B(x,r)} u\ ds - \int_{\partial B(x,r)} |y-x|^{2-n} D_n u\ ds \\
&= (2-n)r^{1-n} \int_{\partial B(x,r)} u\ ds - r^{2-n} \int_{\partial B(x,r)} D_n u\ ds
\end{aligned}$$

halini alır. Ortalama değer özelliğinden $\int_{\partial B(x,r)} uds = r^{n-1}A(S)u(x)$ ve önerme 2.2.3 gereği $\int_{\partial B(x,r)} D_n u\ ds = 0$ olduğundan,

$$\int_S (uD_n v - vD_n u) ds = (2-n)A(S)u(x)$$

olur. Ayrıca (1)'den,

$$\int_S (uD_n v - uD_n w)\ ds = (2-n)A(S)u(x)$$

dir. O halde herhangi bir $x \in B \backslash \{0\}$ noktası için

$$\begin{aligned}
u(x) &= \frac{1}{A(S)} \int_S u[(2-n)^{-1}(D_n v - D_n w)]\ ds \\
&= \int_S u[(2-n)^{-1}(D_n v - D_n w)]\ d\sigma
\end{aligned}$$

dır. $P(x,\zeta) = (2-n)^{-1}(D_n v - D_n w)$ dersek, arzu edilen

$$u(x) = \int_S u(\zeta)P(x,\zeta)\, d\sigma(\zeta),$$

sonucuna ulaşılır.

Son olarak $D_n v$ ve $D_n w$ bulunarak $P(x,\zeta)$ nın tam formülüne ulaşılmış olur.

Öncelikle $\nabla v = (2-n)|\zeta - x|^{-n}(\zeta - x)$ ve $\vec{n} = \zeta$ olup

$$D_n v = (2-n)|\zeta - x|^{-n}(\zeta - x)\cdot\zeta = (2-n)\frac{1 - x\cdot\zeta}{|\zeta - x|^n} \tag{2}$$

dir. Diğer yandan $D_n w$ için $\nabla w = (2-n)|x|^{2-n}|\zeta - \frac{x}{|x|^2}|^{-n}(\zeta - \frac{x}{|x|^2})$ ve $\vec{n} = \zeta$ olup simetri önermesinden de yararlanılarak,

$$\begin{aligned} D_n w &= (2-n)|x|^{2-n}|\zeta - \tfrac{x}{|x|^2}|^{-n}(\tfrac{1-x\cdot\zeta}{|x|^2}) \\ &= (2-n)\tfrac{1}{|x|^n|\zeta - \frac{x}{|x|^2}|^n}(|x|^2 - x\cdot\zeta) \\ &= (2-n)\tfrac{1}{|\zeta|x| - \frac{x}{|x|}|^n}(|x|^2 - x\cdot\zeta) \\ &= (2-n)\tfrac{1}{|\zeta - x|^n}(|x|^2 - x\cdot\zeta) \end{aligned} \tag{3}$$

olur. (2) ve (3), $P(x,\zeta)$ da yerine yazılırsa,

$$P(x,\zeta) = \frac{1-|x|^2}{|\zeta - x|^n}$$

elde edilir.

Önerme 2.4.4. *Poisson çekirdeği aşağıdaki özellikleri sağlar.*

(i) $\forall x \in B$ ve $\forall \zeta \in S$ için $P(x,\zeta) > 0$ dır.

(ii) $\forall \eta \in S$ ve $\forall \delta > 0$ için $x \to \eta$ iken

$$\int_{|\zeta-\eta|>\delta} P(x,\zeta)d\sigma(\zeta) \to 0$$

dır.

(iii) $\forall x \in B$ için $\int_S P(x,\zeta)d\sigma(\zeta) = 1$ dir.

Kanıt. **(i)**, $P(x,\zeta) = \frac{1-|x|^2}{|\zeta-x|^n}$ formülünden açıktır.

(ii), $|x-\eta| < \delta/2$ olsun. Buradan $|\zeta-\eta| > \delta$ için $|x-\zeta| = |(x-\eta)-(\zeta-\eta)| \geq \delta - \delta/2 = \delta/2$ olur. O halde $|x-\eta| < \delta/2$ iken $P(x,\zeta)$ yerine yazılır ve C sabit alınırsa,

$$\begin{aligned}\int_{|\zeta-\eta|>\delta} \frac{1-|x|^2}{|x-\zeta|^n} d\sigma(\zeta) &\leq \int_{|\zeta-\eta|>\delta} \frac{1-|x|^2}{(\delta/2)^n} d\sigma(\zeta) \\ &\leq C \int_{|\zeta-\eta|>\delta} 1-|x|^2 d\sigma(\zeta)\end{aligned}$$

dır. Diğer yandan $x \to \eta$ iken $|x| \to 1$ olacağından istenilen elde edilmiş olur.

(iii) Poisson integral formülü 2.4.2'de, $\forall x \in \bar{B}$ için $u(x) = 1$ alınarak görülür. ■

Önerme 2.4.5. *$\zeta \in S$ için $P(x,\zeta)$ fonksiyonu $\mathbb{R}^n \backslash \{\zeta\}$ da harmoniktir.*

Kanıt. Poisson çekirdeği $P(x,\zeta) = (1-|x|^2)|\zeta - x|^{-n}$ olarak yazılabilir.$u(x) = 1 - |x|^2$ ve $v(x) = |\zeta - x|^{-n}$ olarak alınsın. u, $\mathbb{R}^n$ de ve v ise $\mathbb{R}^n \setminus \{\zeta\}$ da her mertebeden sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlardır. Reel değerli ikinci mertebeden sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlar için çarpım kuralı uygulanarak $P(\cdot,\zeta)$ nın laplasyeni hesaplanırsa;

$$\Delta(uv) = u\Delta v + 2\nabla u \nabla v + v\Delta u$$

dolayısıyla,

$$\Delta(uv) = (1-|x|^2)(2n|x-\zeta|^{-n-2}) + 2(-2x)(-n|x-\zeta|^{-n-2}(x-\zeta)) + |x-\zeta|^{-n}(-2n)$$

dir. $K = |x-\zeta|^{-n-2}$ denilirse,

$$\begin{aligned}\Delta(uv) &= (1-|x|^2)(2nK) + 4nKx\cdot(x-\zeta) - 2n|x-\zeta|^2 K \\ &= 2nK - 2nK|x|^2 + 4nK|x|^2 - 4nKx\cdot\zeta - 2nK|x-2|^2 \\ &= 2nK(1+|x|^2 - 2x\cdot\zeta - |x-\zeta|^2 \\ &= 2nK(|x-\zeta|^2 - |x-\zeta|^2) = 0\end{aligned}$$

elde edilir. O halde $P(x,\zeta)$, $\mathbb{R}^n \setminus \{\zeta\}$ da harmoniktir. ■

$B_n \times S$ üzerinde tanımladığımız Poisson çekirdeğinin tanım kümesini aşağıdaki şekilde genişletilebilir. Bunun için öncelikle $\zeta \in S$ için Poisson çekirdeği

$$P(x,\zeta) = \frac{1-|x|^2}{|x-\zeta|^n} = \frac{1-|x|^2}{(1-2x\cdot\zeta+|x|^2)^{n/2}}$$

şeklinde yazılabilir.

Tanım 2.4.6. *Paydayı sıfır yapmayan* $\forall x, y \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ *için*

$$P(x,y) = \frac{1 - |x|^2|y|^2}{(1 - 2x \cdot y + |x|^2|y|^2)^{n/2}} \tag{2.4.5}$$

olarak tanımlı $P(x,y)$ *fonksiyonuna* ***Genişletilmiş Poisson çekirdeği*** *denir.* $y \in S$ *olması durumunda bu tanım Poisson çekirdeği ile aynı olur.*

Önerme 2.4.7. *Genişletilmiş Poisson çekirdeği* $P(x,y)$ *aşağıdaki özellikleri sağlar.*

(i) $P(x,y) = P(y,x)$

(ii) $P(x,y) = P(x|y|, y/|y|)$

(iii) Sabit bir $y \in B$ için $P(\cdot, y)$, $\bar{B}$ da harmoniktir.

(iv) Sabit bir $x \in B$ için $P(x, \cdot)$, $\bar{B}$ da harmoniktir.

Kanıt. **(i)** ve **(ii)**, Genişletilmiş Poisson integral formülü (2.4.5) den açıkça görülmektedir.

(iii) Önerme 2.4.5 den $\zeta \in S$ için $P(\cdot, \zeta)$ nın B de harmonik olduğu ve (ii) den $P(x,y) = P(x|y|, y/|y|)$ olduğu biliniyor. Sabit $y \in B$ için $x \to P(x, y/|y|)$, B de ve dolayısıyla $x \to P(x|y|, y/|y|)$, $\frac{1}{|y|}B$ de harmoniktir.

(iv) simetri gereği $P(x,y) = P(y,x)$ alınabileceğinden ispat **(iii)** ile aynıdır. ■

2.5. Yuvar için Dirichlet Problemi

Harmonik fonksiyon teorisinde önemli bir yere sahip olan Dirichlet problemi söyle ifade edilebilir.

Tanım 2.5.1. *f, S üzerinde sürekli bir fonksiyon olsun. $\bar{B}$ de sürekli, B de harmonik ve S de f ye denk olacak şekilde bir fonksiyonun varlığını ve varsa nasıl hesaplanacağını bulma problemine* ***Yuvar için Dirichlet problemi*** *denir.*

Önerme 2.5.2. *Dirichlet probleminin çözümü varsa tektir.*

Kanıt. f, S de sürekli bir fonksiyon olsun. u ve v fonksiyonları ise Dirichlet probleminin iki farklı çözümü olsun. Maksimum ilkesi sonuç 2.3.4 gereği S de $u \equiv v \equiv f$ olduğundan B de $u \equiv v$ olur. ■

Eğer u, $\bar{B}$ da harmonik ise Poisson integral formülü 2.4.2'de f fonksiyonu, u fonksiyonunun S ye kısıtlanmışı olarak düşünülebilir. Bu durumda $\forall x \in B$ için

$$u(x) = \int_S u(\zeta)P(x,\zeta)\ d\sigma(\zeta) = \int_S f(\zeta)P(x,\zeta)\ d\sigma(\zeta)$$

olarak yazılabilir. İşte bu formülden hareketle f nin B ye bir genişlemesi tanımlanacak ve Dirichlet probleminin şartlarını sağlaması beklenecektir.

Tanım 2.5.3. *Herhangi $f \in C(S)$ fonksiyonunun* ***Poisson integrali****, $P[f]$ ile gösterilir ve $x \in B$ için*

$$P[f](x) = \int_S f(\zeta)P(x,\zeta)\ d\sigma(\zeta),$$

olarak tanımlanır.

Teorem 2.5.4. *(Yuvar için Dirichlet probleminin çözümü)*
f, S de sürekli bir fonksiyon olsun. u fonksiyonu $\bar{B}$ üzerinde şöyle tanımlansın;

$$u(x) = \begin{cases} P[f](x) & x \in B \ ise \\ f(x) & x \in S \ ise \end{cases}$$

Bu durumda u, $\bar{B}$ de sürekli ve B de harmonik bir fonksiyondur.

Kanıt. Öncelikle u fonksiyonunun B de harmonik olması durumu incelenecektir. $x \in B$ için

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= \Delta P[f](x) \\ &= \Delta\left(\int_S f(\zeta)P(x,\zeta)d\sigma(\zeta)\right) \\ &= \int_S f(\zeta)\Delta P(x,\zeta)d\sigma(\zeta) \end{aligned}$$

dır. Önerme 2.4.5 den $\forall x \in B$ için $\Delta P(x,\zeta) \equiv 0$ olduğundan, $\Delta u(x) \equiv 0$ dır. Dolayısıyla u fonksiyonu B de harmoniktir.

Şimdi u fonksiyonunun $\bar{B}$ de sürekli olması durumu incelensin. u fonksiyonu B de harmonik olduğundan süreklidir. O halde geriye u nun S de sürekli olduğunu göstermek kalır. Herhangi bir $\eta \in S$ noktası alınsın. f, S üzerinde sürekli oldugundan $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ vardır öyle ki,

a) $\zeta \in S$ ve $|\zeta - \eta| < \delta \Rightarrow |f(\zeta) - f(\eta)| < \varepsilon$ dur.

b) $M = maks_{\zeta \in S} |f(\zeta)|$ olsun. $x \in B$ için, önerme 2.4.4 (i) ve (iii)'den

$$\begin{aligned} |u(x) - u(\eta)| &= |\int_S f(\zeta) P(x,\zeta)\ d\sigma(\zeta) - f(\eta)| \\ &= |\int_S [f(\zeta) - f(\eta)] P(x,\zeta)\ d\sigma(\zeta)| \\ &\leq \int_S |f(\zeta) - f(\eta)| P(x,\zeta)\ d\sigma(\zeta) \end{aligned}$$

eşitsizlikteki son ifade,

$$\int_{|\zeta-\eta|\leq\delta} |f(\zeta) - f(\eta)| P(x,\zeta) d\sigma(\zeta) + \int_{|\zeta-\eta|>\delta} |f(\zeta) - f(\eta)| P(x,\zeta)\ d\sigma(\zeta)$$

olarak yazılırsa

$$|u(x) - u(\eta)| \leq \varepsilon + 2M \int_{|\zeta-\eta|>\delta} P(x,\zeta)\ d\sigma(\zeta)$$

elde edilir. Önerme 2.4.4 (ii)'den $x \to \eta$ iken $\int_{|\zeta-\eta|>\delta} P(x,\zeta)\ d\sigma(\zeta) \to 0$ olduğu biliniyor. Dolayısıyla x, η ya yeterince yakın iken $|u(x) - u(\eta)| < 2\varepsilon$ olur. Yani u, S de dolayısıyla $\bar{B}$ da süreklidir.

O halde u fonksiyonu Dirichlet probleminin bir çözümüdür. ■

Dirichlet probleminden yararlanılarak Poisson integral formülü 2.4.2 için daha zayıf şartlar altında bir sonuç verilebilir.

Teorem 2.5.5. *u, $\bar{B}$ de sürekli ve B de harmonik bir fonksiyon olsun. Bu durumda B de $u \equiv P[u|_S]$ dir.*

Kanıt. Dirichlet problemi 2.5.4 den $u - P[u|_S]$, B de harmonik bir fonksiyon olup S üzerinde 0 olacak şekilde sürekli genişletilebilir. O halde maksimum ilkesi sonuç 2.3.3 gereği B de $u \equiv P[u|_S]$ dir. ■

Şimdiye kadar Poisson integral formülü 2.4.2 ve Dirichlet problemi 2.5.4, B birim yuvar iken verildi. Ancak bu sonuçlar herhangi bir $B(a, r)$ yuvarı üzerine kolaylıkla taşınabilir. Çünkü öteleme ve genişletme altında harmonik fonksiyonlar korunur.

Artık harmonik fonksiyonların **Düzgün(C^∞)** fonksiyonlar oldukları gösterilebilir. Ancak öncesinde çok değişkenli fonksiyonlar için birtakım diferansiyel notasyonları vermek uygun olacaktır. $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $\forall i = 1, ..., n$ için $\alpha_i \geq 0$ ve $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ olmak üzere bir çoklu indeks olsun; Kısmi diferansiyel operatörü ise D^α ile gösterilip, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1}...D_n^{\alpha_n}$ olarak tanımlansın. Burada $j = 1, ..., n$ için D_j^0 birim operatördür.

Önerme 2.5.6. *u, Ω da harmonik bir fonksiyon olsun. Bu durumda u fonksiyonu düzgündür ($u \in C^\infty$).*

Kanıt. Öncelikle u fonksiyonunun $\bar{B}$ de sürekli ve B de harmonik olduğu varsayılsın. Bu durumda teorem 2.5.5 gereği $\forall x \in B$ için,

$$u(x) = \int_S u(\zeta) P(x, \zeta)\ d\sigma(\zeta)$$

dır. u, S de sürekli olduğundan sınırlıdır. O halde integral altında türev alınırsa $\forall x \in B$ ve $\forall \alpha$ çoklu indeksi için

$$D^\alpha u(x) = \int_S u(\zeta) D^\alpha P(x, \zeta)\ d\sigma(\zeta) \tag{2.5.7}$$

olur. Sabit bir $\zeta \in S$ için $P(\cdot, \zeta)$ fonksiyonu $\mathbb{R}^n \setminus \{\zeta\}$ da dolayısıyla B de düzgündür ($P(\cdot, \zeta) \in C^\infty(B)$). O halde $u \in C^\infty(B)$ dir.

Bu durum u nun herhangi bir yuvar üzerinde harmonik olması halinde de doğrudur. Çünkü düzgün bir fonksiyon ötelenir ya da genişletilirse yine düzgün bir fonksiyon elde edilir. Şimdi u, Ω da harmonik olsun. Herhangi $y \in \Omega$ için $r > 0$, $B(y, r) \subseteq \Omega$ olacak şekilde seçilsin. u fonksiyonu $B(y, r)$ de harmonik olup düzgündür. y keyfi olduğundan Ω da düzgündür ($u \in C^\infty(\Omega)$). ■

Bu kısımda son olarak harmonik fonksiyon dizileriyle ilgili bir sonuç verilmiştir.

Teorem 2.5.7. *(u_m), Ω da harmonik fonksiyonların bir dizisi olsun. Üstelik bu dizi Ω nın her kompakt altkümesinde bir u fonksiyonuna düzgün yakınsasın. Bu durumda u fonksiyonu Ω da harmoniktir. Dahası $\forall\alpha$ çoklu indeksi için $D^\alpha u_m$ dizisi $D^\alpha u$ fonksiyonuna Ω nın her kompakt alt kümesinde düzgün yakınsar.*

Kanıt. Herhangi $a \in \Omega$ ve $r > 0$ için $\bar{B}(a,r) \subset \Omega$ olsun. Bu durumda u nun $B(a,r)$ de harmonik olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Genelliği bozmadan $B(a,r) = B$ alınsın. $\forall m$ için u_m, B de harmonik olduğundan Poisson integral formülü 2.4.2 gereği $\forall x \in B$ ve $\forall m$ için

$$u_m(x) = \int_S u_m(\zeta)P(x,\zeta)\ d\sigma(\zeta)$$

dır. $m \to \infty$ iken $u_m(x) \to u(x)$ dir. Şimdi sağdaki integralin limitine bakalım. Sabit bir $x \in B$ için $P(x,\zeta)$ sınırlı olduğundan ve u_m, S üzerinde u ya düzgün yakınsadığında sağdaki integralin limiti $\int_S u(\zeta)P(x,\zeta)\ d\sigma(\zeta)$ olur. Buradan

$$u(x) = \int_S u(\zeta)P(x,\zeta)\ d\sigma(\zeta)$$

eşitliği elde edilir. Bu da u nun B de harmonik olduğunu gösterir.

Diğer yandan, $\forall\alpha$ çoklu indeksi için $D^\alpha u_m$ nın B nin her bir kompakt altkümesinde $D^\alpha u$ ya düzgün yakınsadığını göstermek yeterlidir. $x \in B$ olmak üzere

$$\begin{aligned} |D^\alpha u_m(x) - D^\alpha u(x)| &= \Big| \int_S u_m(\zeta) - u(\zeta) D^\alpha P(x,\zeta)\ d\sigma(\zeta) \Big| \\ &\leq \int_S |u_m(\zeta) - u(\zeta)| D^\alpha P(x,\zeta)\ d\sigma(\zeta) \end{aligned}$$

dır. Burada m yeterince büyük ise $|u_m(\zeta) - u(\zeta)| < \varepsilon$ dur. $D^\alpha P(x,\zeta)$ ise $K \in B$ kompakt alt kümesi için $K \times S$ de düzgün sınırlıdır. Böylece M sabit olmak üzere $\forall x \in K$ için $|D^\alpha u_m(x) - D^\alpha u(x)| \leq \varepsilon M$ olur. Bu nedenle K da $D^\alpha u_m$ fonksiyonu $D^\alpha u$ fonksiyonuna düzgün yakınsar. ■

2.6. Ortalama Değer Özelliğinin Tersi

Daha önce harmonik fonksiyonların Ortalama değer özelliğini sağladığı gösterilmişti (2.2.6). Bu kısımda ise harmonik fonksiyonların ortalama değer özelliğini sağlayan yegane sürekli fonksiyonlar oldukları ifade edilecektir. Yani harmonik fonksiyonlar ortalama değer özelliğiyle karakterize edilebilirler.

Teorem 2.6.1. *u, Ω da sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall x \in \Omega$ için*

$$u(x) = \int_S u(x + r_j\zeta) d\sigma(\zeta)$$

olacak şekilde bir $r_j \to 0$ dizisi varsa, u fonksiyonu Ω da harmoniktir.

Kanıt. Genelliği bozmadan u reel değerli kabul edilebilir. $a \in \Omega$ ve $R > 0$ için $\bar{B}(a, R) \subseteq \Omega$ olsun. u fonksiyonu $\partial B(a, R)$ de sürekli bir fonksiyondur. Dirichlet problemi 2.5.4 gereği $\bar{B}(a, R)$ de sürekli , $B(a, R)$ de harmonik ve $\partial B(a, R)$ de u ya denk bir v fonksiyonu vardır. O halde $B(a, R)$ de $u \equiv v$ olduğunu göstermek yeterlidir. Çünkü bu durumda u fonksiyonu $B(a, R)$ de harmonik olur ve a keyfi olduğundan Ω da harmonik olacaktır.

$\bar{B}(a, R)$ de $v - u \equiv 0$ olmadığı varsayılsın. O halde $\bar{B}(a, R)$ nin bazı noktalarında $v - u$ pozitif veya negatif değerler alır. Öncelikle bazı noktalarda pozitif değerler aldığı kabul edilsin. Bu durumda $v - u$, $\bar{B}(a, R)$ de sürekli olduğundan maksimum değerini alır. Bu maksimum değere M diyelim. $E = \{y \in \bar{B}(a, R) : (v - u)(y) = M\}$ olsun. E kompakt bir küme olduğundan a noktasına en uzakta bulunan enaz bir $x \in E$ noktası vardır. $\partial B(a, R)$ de $v - u \equiv 0$ olduğundan $x \in B(a, R)$ dir. $B(x, r) \subseteq B(a, R)$ olacak şekilde bir $B(x, r)$ yuvarı alınsın, öyle ki $r = r_j$ için

$$u(x) = \int_S u(x + r\zeta) d\sigma(\zeta)$$

sağlansın. O halde hipotez gereği $u(x)$ değeri u nun $\partial B(a, R)$ üzerinde aldığı değerlerin bir ortalamasıdır. Diğer yandan v fonksiyonu $B(a, R)$ de harmonik olduğundan,

$$(v - u)(x) = \int_S (v - u)(x + r\zeta)\ d\sigma(\zeta)$$

buradan,

$$0 = \int_S (v - u)(x) - (v - u)(x + r\zeta)\ d\sigma(\zeta) \qquad (1)$$

dır. Ancak $v - u$ sürekli ve $\forall \zeta \in S$ için $(v - u)(x + r\zeta) \leq (v - u)(x)$ olduğundan (1) deki eşitliğin gerçeklenmesi için $\forall \zeta \in S$ için $(v - u)(x + r\zeta) = (v - u)(x)$

olmalıdır. Ancak bu E kümesinde a noktasına x'den daha uzak noktaların olmasını gerektirir. Bu ise çelişkidir. O halde $v-u$, $\bar{B}(a,R)$ de pozitif değerler alamaz.

İkinci durumda $v-u$ nun $\bar{B}(a,R)$ nin bazı noktalarında negatif değerler aldığı varsayılsın. Birinci duruma benzer olarak bu defa $\tilde{E}$ kümesi $u-v$ nin $\bar{B}(a,R)$ deki minimum değerlerini aldığı kompakt küme olsun. $\tilde{E}$ nin a ya en uzak noktası y olsun. Yine $y \in B(a,R)$ olur.

$$u(y) = \int_S u(y + r\zeta)\ d\sigma(\zeta)$$

olacak şekilde $B(y,r) \subseteq B(a,R)$ yuvarı alınsın. v harmonik olduğundan ,

$$(v-u)(y) = \int_S (v-u)(y + r\zeta)\ d\sigma(\zeta)$$

buradan,

$$0 = \int_S (v-u)(y) - (v-u)(y + r\zeta)\ d\sigma(\zeta) \tag{2}$$

dır. $v-u$ sürekli ve $\forall \zeta \in S$ için $(v-u)(y+r\zeta) \geq (v-u)(y)$ olacağından (2)'deki eşitlik için $(v-u)(y+r\zeta) = (v-u)(y)$ olmalıdır. Ancak bu durum $\tilde{E}$ kümesinde a noktasına x den daha uzak noktaların olmasını gerektirir ki bu bir çelişkidir.

Sonuç olarak $\bar{B}(a,R)$ de $u \equiv v$ olur ki u, $B(a,r)$ de dolayısıyla Ω da harmoniktir. ■

Bu ispat kolaylıkla ortalama değer özelliğinin hacim versiyonuna uyarlanabilir.

Önerme 2.6.2. *u, Ω da sürekli bir fonksiyon olsun. $\forall x \in \Omega$ için*

$$u(x) = \frac{1}{V(B(x,r_j))} \int_{B(x,r_j)} u\ dV$$

olacak şekilde bir $r_j \to 0$ dizisi var ise u fonksiyonu Ω da harmoniktir.

Teorem 2.6.1 de u fonksiyonunun sürekli olması hipotezi bir gerekliliktir. Aşağıda bu duruma bir örnek verilmiştir.

Örnek 2.6.3. $\mathbb{R}^2$ *de tanımlı bir u fonksiyonu* $x = (x_1, x_2)$ *için*

$$u(x) = \begin{cases} 1 & x_2 > 0 \\ 0 & x_2 = 0 \\ -1 & x_2 < 0 \end{cases}$$

olarak ifade edilsin. Her $x \in \mathbb{R}^2$ *için* $u(x)$*, yeterince küçük* r *ler için,* u *nun* x *merkezli* r *yarıçaplı küre üzerindeki ortalamasına eşittir:* $H = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}$ *olsun.* $x = (x_1, x_2) \in H$ *ise* u*,* H *de harmonik olduğundan her* $r < x_2$ *için*

$$u(x) = 1 = \int_S u(x + r\zeta)\ d\sigma(\zeta)$$

olur. Benzer durum $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 < 0\}$ *kümesi için de geçerlidir.* $\tilde{H} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}$ *durumunda ise* x *merkezli her küre için ,yani* $r > 0$ *olmak üzere*

$$\int_S u(x + r\zeta)\ d\sigma(\zeta) = \int_{S^+} u(x + r\zeta)\ d\sigma(\zeta) + \int_{S^-} u(x + r\zeta)\ d\sigma(\zeta)$$

buradan,

$$\int_S u(x + r\zeta) d\sigma(\zeta) = \int_{S^+} \frac{1}{2}\ d\sigma(\zeta) + \int_{S^-} (-\frac{1}{2})\ d\sigma(\zeta) = 0$$

ve $u(x) = 0$ *olduğundan ortalama değer özelliği sağlanır.*

Böylece u fonksiyonu yerel olarak ortalama değer özelliğini sağlamış olur. Ancak u fonksiyonu, harmonik olmak bir yana sürekli dahi değildir.

2.7. Reel Analitiklik ve Homojen Açılımlar

Daha önceki bölümlerde harmonik fonksiyonların düzgün (C^∞) oldukları gösterilmişti. Şimdi daha da ileri gidilerek harmonik fonksiyonların reel analitik oldukları söylenecektir.

Genel olarak bir fonksiyon yerel olarak bir kuvvet serisi ile ifade edilebiliyorsa reel analitiktir denir. Reel analitikliğin çok değişkenli fonksiyonlar için açık bir tanımı aşağıda verilecektir. Ancak öncesinde çok değişkenli kuvvet serileri ile ilgilenirken kullanışlı olacak bir notasyon verilsin.

$x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ ve $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ bir çoklu indeks olmak üzere;

$$\begin{aligned} x^\alpha &= x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n}, \\ \alpha! &= \alpha_1! \alpha_2! ... \alpha_n!, \\ |\alpha| &= \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n \end{aligned}$$

olarak ifade edilsin.

Tanım 2.7.1. *f, Ω da bir fonksiyon olsun. Eğer her $a \in \Omega$ için*

$$f(x) = \sum c_\alpha (x-a)^\alpha, c_\alpha \in \mathbb{C},$$

*olacak şekilde a nın bir komşuluğu varsa f fonksiyonu Ω da **reel analitiktir** denir.*

Şimdi çok değişkenli kuvvet serileri ile ilgili birtakım temel özellikler verilecektir. Burada $a = 0$ ve $y \in \mathbb{R}^n$ için $R(y) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_j| < |y_j|, j = 1, 2, ...n\}$ olarak tanımlı , 0 merkezli n-boyutlu açık dikdörtgeni almak kullanışlı olacaktır. Aşağıdaki önermenin kanıtı [1]'da bulunabilir.

Önerme 2.7.2. *$\{c_\alpha y^\alpha\}$ sınırlı bir küme olsun.*

(i) $\forall \beta$ çoklu indeksi için,

$$\sum_\alpha D^\beta (c_\alpha x^\alpha)$$

serileri $R(y)$ de mutlak ve $R(y)$ nin kompakt altkümelerinde düzgün yakınsaktır.

(ii) $x \in \mathbb{R}^n$ için $f(x) = \sum c_\alpha x^\alpha$ olarak tanımlı f fonksiyonu $R(y)$ de sonsuz diferansiyellenebilirdir. Dahası $\forall x \in R(y)$ ve p çoklu indeksi için

$$D^\beta f(x) = \sum_\alpha D^\beta (c_\alpha x^\alpha)$$

dır ve $\forall \alpha$ çoklu indeksi için

$$c_\alpha = D^\alpha f(0)/\alpha! \tag{2.7.8}$$

dır.

Sonuç 2.7.3. *Reel analitik bir fonksiyonun her mertebeden kısmi türevi de reel analitiktir (**i** ve **ii**'den).*

*Eğer iki kuvvet serisi eşit ve merkezleri de aynı ise katsayılarıda eşit olmak zorundadır (**ii**).*

Teorem 2.7.4. *u, Ω da harmonik bir fonksiyon olsun. O halde u fonksiyonu Ω da reel analitiktir.*

Kanıt için [1]'e bakınız.

Aşağıda reel analitik fonksiyonlar için bir özellik verilmiştir. Aşikar olarak bu özellik harmonik fonksiyonlar içinde geçerli olacaktır.

Teorem 2.7.5. *Ω bağlantılı ve f, Ω da reel analitik bir fonksiyon olsun. Eğer Ω nın boştan farklı açık bir altkümesinde $f \equiv 0$ ise tüm Ω da $f \equiv 0$ dır.*

Kanıt. $\{x \in \Omega : f(x) = 0\}$ kümesinin içine W denilsin , yani,

$$W = int\{x \in \Omega : f(x) = 0\}$$

olsun. Aşikar olarak W açıktır. Diğer yandan $a \in \Omega$, W nin bir limit noktası olsun. Bu durumda bir $(b_n) \in W$ dizisi $b_n \to a$ olacak şekilde vardır. $\forall \alpha$ çoklu indeksi için $D^\alpha f$ reel analitik olduğundan $D^\alpha f$ sürekli bir fonksiyondur. O halde $b_n \to a$ için $D^\alpha f(b_n) \to D^\alpha f(a)$ dır. Üstelik W de $f \equiv 0$ olduğundan $D^\alpha f \equiv 0$ dır. Dolayısıyla her α ve n için $D^\alpha f(b_n) = 0$ böylece $D^\alpha f(a) = 0$ dır. O halde f nin a civarındaki kuvvet serisi $\sum_\alpha c_\alpha (x-a)^\alpha$ için $c_\alpha = \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!} = 0$, yani $\sum_\alpha c_\alpha (x-a)^\alpha = f(x) = 0$ dır. O halde $a \in W$ dur. Bu da W nun Ω da kapalı olması demektir. Ω bağlantılı bir bölge W ise hem açık hem kapalı altkümesi olduğundan $W = \emptyset$ veya $W = \Omega$ dır. Hipotez gereği W boştan farklı bir kümedir. O halde $W = \Omega$ dır. Yani Ω da $f \equiv 0$ dır. ∎

Teorem 2.7.6. *Ω bağlantılı ve u, Ω da reel değerli harmonik bir fonksiyon olsun. u, Ω da bir yerel maksimuma sahip ise sabittir.*

Kanıt. $a \in \Omega$ noktası u fonksiyonunun bir yerel maksimumu olsun. Bu durumda öyle bir $B(a,r) \subset \Omega$ yuvarı vardır ki $x \in B(a,r)$ için $u(x) \leq u(a)$ dır.

Maksimum ilkesi 2.3.1 gereği u fonksiyonu $B(a,r)$ de sabit olur. u fonksiyonu Ω da reel analitik olduğundan, 2.7.5 gereği Ω da sabittir. Dolayısıyla her $x \in \Omega$ için $u(x) = u(a)$ dır. ■

Homojen Açılımlar

Harmonik fonksiyonların yerel olarak kuvvet serilerine açılabilecekleri söylendi. Harmonik fonksiyonların bu özelliklerinden hareketle, yerel olarak homojen harmonik polinomların sonsuz toplamı olarak ifade edilebilecekleri gösterilecektir.

Tanım 2.7.7. *α bir çoklu indeks ve $x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere x^α tek terimlilerinin sonlu lineer kombinasyonuna* ***polinom*** *denir. Diğer bir ifadeyle, m negatif olmayan tamsayı ve $x \in \mathbb{R}^n$ için*

$$p(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha x^\alpha$$

olarak tanımlı p fonksiyonuna polinom denir. Polinomun derecesi ise m dir.

Polinomlar herhangi a merkezi civarında belli bir terimden sonraki terimlerinin katsayıları (c_α) sıfır alınarak bir kuvvet serisi olarak yazılabilir.

Örnek 2.7.8. *$\mathbb{R}^2$ de ikinci dereceden $p(x,y) = 4 + 5x + 6y + x^2 + 2xy + y^2$ polinomu $a = (1,1)$ merkezi civarında*

$$\begin{aligned} p(x,y) = \;& 19 + 9(x-1) + 10(y-1) + (x-1)^2 + 2(x-1)(y-1) + (y-1)^2 + \\ & 0(x-1)^3 + 0(x-1)^2(y-1)^2 + ... \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Bu yönleriyle kuvvet serileri sonsuz dereceli polinomlar olarak görülebilir.

Tanım 2.7.9. *$x \in \mathbb{R}^n$ ve m negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere,*

$$p(x) = \sum_{|\alpha| = m} c_\alpha x^\alpha$$

olarak tanımlı p polinomuna ***m.dereceden homojen polinom*** *denir. Denk bir ifade ile, eğer bir p polinomu $\forall t \in \mathbb{R}$ ve $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için $p(tx) = t^m p(x)$ eşitliğini gerçekliyorsa homojendir.*

Sonuç 2.7.10. *p ve q, m.dereceden homojen polinomlar olsunlar. Eğer S üzerinde $p \equiv q$ ise $\mathbb{R}^n$ de $p \equiv q$ olur.*

Kanıt. Herhangi $x \in \mathbb{R}^n$ noktası için $\zeta = \frac{x}{|x|} \in S$ dir. O halde $p(x) = p(|x|\zeta) = |x|^m p(\zeta)$ ve $q(x) = q(|x|\zeta) = |x|^m q(\zeta)$ dır. Hipotezden $\zeta \in S$ için $p(\zeta) = q(\zeta)$ olacağından herhangi bir $x \in \mathbb{R}^n$ noktası için $p(x) = q(x)$ olur. ■

Bu sonuçta homojen bir polinomun S üzerine kısıtlanmışları üzerinden belirlendiği ifade edildi. Ancak bu durum herhangi bir polinom için geçerli değildir.

Örnek 2.7.11. *$p(x) = 1 - |x|^2 = 1 - (x_1^2 + ... + x_n^2)$ homojen olmayan bir polinomdur. p, S üzerinde sıfırdır. Ancak $\mathbb{R}^n$ de sıfırdan farklıdır.*

Aşağıda homojen polinomlar için önemli bir teklik sonucu verilmiştir.

Önerme 2.7.12. *$r > 0$ ve her $m = 0, 1, ...$ için p_m ve q_m, m.dereceden homojen polinomlar olsun. Eğer $\forall x \in rB$ için*

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m(x) = \sum_{m=0}^{\infty} q_m(x)$$

(her iki seride rB de noktasal yakınsak) oluyorsa $\forall m$ için

$$p_m \equiv q_m$$

dir.

Kanıt. $\zeta \in S$ sabit alınsın. Her iki seride rB nin her bir noktasında yakınsak ve eşittir. Bu nedenle $\forall t \in (-r, r)$ için $t\zeta \in rB$ olup

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m(t\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} q_m(t\zeta)$$

dır. $\forall m$ için p_m ve q_m, m.dereceden homojen polinomlar olduklarından

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m(\zeta) t^m = \sum_{m=0}^{\infty} q_m(\zeta) t^m$$

elde edilir. ζ sabit ve dolayısıyla $\forall m$ için $p_m(\zeta) = a_m$ ve $q_m(\zeta) = b_m$ sabit olup tek değişkenli (t) bir kuvvet serisinin katsayılarını oluştururlar. Tek değişkenli kuvvet serilerindeki katsayıların tekliğinden (yani $\forall t \in (-r, r)$ için

$$f(t) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m t^m = \sum_{m=0}^{\infty} b_m t^m$$

ise $\forall m$ için (2.7.8)'e benzer olarak $a_m = \frac{f^m(0)}{m!} = b_m$) dir. Her m için $p_m(\zeta) = q_m(\zeta)$ dır. $\zeta \in S$ keyfi seçildiğinden $\forall m$ için S de $p_m \equiv q_m$ dir. Sonuç 2.7.10 gereği $\forall m$ için $\mathbb{R}^n$ de $p_m \equiv q_m$ dir. ■

Tanım 2.7.13. *u fonksiyonu 0 noktasının bir komşuluğunda harmonik olsun. Teorem 2.7.4 ve önerme 2.7.2'den dolayı, 0 ın yakınında*

$$u(x) = \sum_{\alpha} c_\alpha x^\alpha, c_\alpha = \frac{D^\alpha u(0)}{\alpha!}$$

eşitliği geçerlidir. Her m için p_m homojen polinomu

$$p_m(x) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{D^\alpha u(0)}{\alpha!} x^\alpha$$

olarak tanımlansın. Bu durumda 0 ın civarındaki x ler için

$$u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m(x) \tag{1}$$

dir. Eşitlikte $\forall m$ için p_m polinomu m.dereceden homojen olduğundan $\sum_{m=0}^{\infty} p_m(x)$ serisine u harmonik fonksiyonunun 0 noktasındaki ***homojen açılımı*** *denir.*

Önerme 2.7.14. *u, 0 ın komşuluğunda harmonik ve $u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m(x)$, u nun homojen açılımı olsun. Her $m = 0, 1, 2, ...$ için p_m homojen polinomu harmoniktir.*

Kanıt. 0 noktasının bir komşuluğunda

$$\Delta u \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \Delta p_m \equiv 0$$

dır. Burada $m \geq 2$ için Δp_m, (m-2).dereceden homojen polinomdur. $m = 0, 1$ için ise $\Delta p_m \equiv 0$ dır. 2.7.12'den dolayı $\sum_{m=0}^{\infty} \Delta p_m \equiv 0$ ise $\forall m$ için $\Delta p_m \equiv 0$ dır. Bu da $\forall m$ için p_m homojen polinomunun harmonik olması anlamına gelir. ■

Sonuç olarak, u harmonik fonksiyonu 0'ın bir civarında homojen harmonik polinomların sonsuz bir toplamı olarak yazılmış olur.

Bu sonuç u harmonik fonksiyonunun tanım kümesindeki herhangi bir a noktasına genellenebilir.

Teorem 2.7.15. *u, Ω da harmonik bir fonksiyon ve $a \in \Omega$ olsun. a nın bir komşuluğunda*

$$u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m(x-a) \tag{2.7.9}$$

olacak şekilde m.dereceden p_m homojen harmonik polinomları vardır. Yukarıdaki seri a nın civarında mutlak ve düzgün yakınsaktır.

Harmonik fonksiyonlar açısından homojen açılım kuvvet serisi açılımından daha kullanışlı ve düzgün davranışlıdır. Örneğin u, Ω da harmonik, $a \in \Omega$ ve a nın $\partial\Omega$ ya uzaklığı r olsun. u nun a nın yeterince yakınında geçerli bir kuvvet serisi açılımı olmasına rağmen tüm $B(a, r)$ de geçerli bir kuvvet serisi açılımı olmayabilir. Diğer yandan u nun tüm $B(a, r)$ de geçerli bir homojen açılımı vardır. Bu ilerde 5.3.11'da ispatlanacaktır. Yani harmonik fonksiyonların homojen açılımı kompleks analizde holomorfik fonksiyonların kuvvet serisi açılımına karşılık gelmektedir.

3. SINIRLI HARMONİK FONKSİYONLAR

Bu bölümde, sınırlı harmonik fonksiyonların özellikleri üzerinde durulacaktır.

Tanım 3.0.1. *u, $\mathbb{R}^n$ de harmonik bir fonksiyon olsun. $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için $|u| \leq M$ olacak şekilde bir M sabiti varsa u ya $\mathbb{R}^n$ de* ***sınırlı harmonik fonksiyon*** *denir.*

3.1. Liouville Teoremi

Kompleks analizde Liouville teoremi, $\mathbb{C}$ de analitik (tam) ve sınırlı her fonksiyonun sabit olduğunu ifade eder. [4]

Benzer bir sonuç $\mathbb{R}^n$ de harmonik fonksiyonlar için de geçerlidir.

Teorem 3.1.2. *$\mathbb{R}^n$ de sınırlı ve harmonik bir fonksiyon sabittir.*

Kanıt. u, $\mathbb{R}^n$ de M sabiti ile sınırlı harmonik bir fonksiyon olsun. Herhangi bir $x \in \mathbb{R}^n$ alalım. $r > |x|$ için Ortalama değer teoremi hacim versiyonu 2.2.8 gereği

$$u(x) - u(0) = \frac{1}{V(B(0,r))}\left[\int_{B(x,r)} u\ dV - \int_{B(0,r)} u\ dV\right]$$

olarak yazılabilir. $B(x,r)$ ve $B(0,r)$ yuvarları arasındaki simetrik fark D_r ile gösterilsin. $A = B(x,r) \cap B(0,r)$, $C = B(x,r) \setminus B(0,r)$ ve $D = B(0,r) \setminus B(x,r)$ olsun. O halde $D_r = C \cup D$ dir. Böylece

$$\begin{aligned}
\int_{B(x,r)} u\ dV &= \int_A u\ dV + \int_C u\ dV \\
\int_{B(0,r)} u\ dV &= \int_A u\ dV + \int_D u\ dV
\end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned}
|u(x) - u(0)| &= \tfrac{1}{V(B(0,r))}\left|\int_{B(x,r)} u\ dV - \int_{B(0,r)} u\ dV\right| \\
&= \tfrac{1}{V(B(0,r))}\left|\int_C u\ dV - \int_D u\ dV\right| \\
&\leq \tfrac{1}{V(B(0,r))}\left[\int_C |u|\ dV - \int_D |u|\ dV\right] \\
&= \tfrac{1}{V(B(0,r))}\int_{D_r} |u|\ dV
\end{aligned} \tag{1}$$

dir.

Şimdi **i)** $B(0, r-|x|) \subseteq A = B(x,r) \cap B(0,r)$ ve **ii)** $B(x,r) \cup B(0,r) \subseteq B(0, r+|x|)$ olduğunu gösterelim.

i) Aşikar olarak $B(0, r-|x|) \subseteq B(0,r)$ dir. Diğer yandan $a \in B(0, r-|x|)$ için,

$$|a-x| \leq |a| + |x| < r - |x| + |x| \leq r$$

dir. Böylece $a \in B(x,r)$ olup $B(0, r-|x|) \subseteq B(x,r)$ dir.

ii) Yine açık olarak $B(0,r) \subseteq B(0, r+|x|)$ dır. Herhangi bir $b \in B(x,r)$ için

$$|b| = |b - x + x| \leq |b - x| + |x| < r + |x|$$

dir. $b \in B(0, r+|x|)$ olup $B(x,r) \subseteq B(0, r+|x|)$ dir. O halde **i)** ve **ii)** den

$$D_r \subseteq B(0, r+|x|) \setminus B(0, r-|x|)$$

elde edilir. Bu sonuç (1)'de kullanılırsa,

$$\begin{aligned} |u(x) - u(0)| &\leq \tfrac{1}{V(B(0,r))} \int_{D_r} |u| \, dV \\ &\leq \tfrac{1}{V(B(0,r))} \int_{B(0,r+|x|) \setminus B(0,r-|x|)} |u| \, dV \\ &= \tfrac{1}{V(B(0,r))} [\int_{B(0,r+|x|)} |u| \, dV - \int_{B(0,r-|x|)} |u| \, dV \end{aligned}$$

olur. $V(B(0, r-|x|)) = (r-|x|)^n V(B), V(B(0, r+|x|)) = (r+|x|)^n V(B)$ ve $|u| \leq M$ olduğundan,

$$\begin{aligned} |u(x) - u(0)| &\leq \frac{1}{V(B(0,r))} [\int_{B(0,r+|x|)} |u| \, dV - \int_{B(0,r-|x|)} |u| \, dV] \\ &\leq \frac{M[(r+|x|)^n V(B) - (r-|x|)^n V(B)]}{r^n V(B)} \\ &= \frac{M[(r+|x|)^n - (r-|x|)^n]}{r^n} \\ &= M[(1 + |x|/r)^n - (1 - |x|/r)^n] \end{aligned}$$

dir. Buradan $r \to \infty$ iken $|u(x) - u(0)| \to 0$ dır. O halde $x \in \mathbb{R}^n$ için $u(x) = u(0)$ olur. Yani u, $\mathbb{R}^n$ de sabittir. ■

Tanım 3.1.3. *$H_n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ olarak tanımlı, $\mathbb{R}^n$ nin açık alt kümesine* ***üst yarı uzay*** *denir. $\bar{H}_n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}$ kümesine ise*

kapalı üst yarı uzay *denir. Burada* $\mathbb{R}^n$*,* $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ *olarak alındığında bir* $z \in \mathbb{R}^n$ *noktası* $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ *ve* $y \in \mathbb{R}$ *olmak üzere* $z = (x, y)$ *şeklinde yazılabilir. Üstelik* ∂H_n *de* $\mathbb{R}^{n-1}$ *ile özdeşleştirilir.*

Daha önce, kompakt bir kümede harmonik olan bir fonksiyonun bu kümenin sınırı üzerine kısıtlanmışı tarafından belirlendiği gösterilmişti (2.3.3). Ancak kapalı yarı uzay üzerinde harmonik olan fonksiyonlar için aynı durum söz konusu değildir.

Örnek 3.1.4. *u, $\bar{H}_3$ üzerinde $u(x, y, z) = z$ olarak tanımlı harmonik bir fonksiyon olsun. u ve $v(z) = 0$ harmonik fonksiyonları ∂H_3 de denk olmalarına rağmen H_3 de denk değildir.*

Aşağıda verilen sonuçla bu sorunun sınırlı harmonik fonksiyonlarla aşılabileceği gösterilmiştir.

Sonuç 3.1.5. *u, H_n de harmonik ve $\bar{H}_n$ de sürekli ve sınırlı bir fonksiyon olsun. Eğer ∂H_n de $u \equiv 0$ ise $\bar{H}_n$ de $u \equiv 0$ dır.*

Kanıt. $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ ve $y \in \mathbb{R}$ için u fonksiyonunun $\mathbb{R}^n$ e bir genişlemesi olan $\tilde{u}$ fonksiyonu,

$$\tilde{u}(x, y) = \begin{cases} u(x, y) & y > 0 \text{ ise} \\ 0 & y = 0 \text{ ise} \\ -u(x, -y) & y < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Aşikar olarak $\tilde{u}$ fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ de sınırlıdır.

$\tilde{u}$ fonksiyonunun sürekliliği için ise $y = 0$ durumunu incelemek yeterlidir. herhangi bir $z_0 = (x_0, 0) \in \partial H_n$ noktası alınsın. Bu durumda $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ vardır öyle ki; $z \in \bar{H}_n$ için hipotezden $|z - z_0| < \delta$ iken $|\tilde{u}(z) - \tilde{u}(z_0)| < \varepsilon$ olduğu açıktır. $z = (x, y)$, $y < 0$ için ise $|z - z_0| < \delta$ iken $|\tilde{u}(z) - \tilde{u}(z_0)| = |\tilde{u}(z)| = |-u(x, -y)| = |u(x, -y)| < \varepsilon$ olur. z_0 keyfi olduğundan $\tilde{u}$ fonksiyonu ∂H_n de, dolayısıyla $\mathbb{R}^n$ de, süreklidir.

Diğer yandan $\tilde{u}$ fonksiyonu $y > 0$ ve $y < 0$ için harmonik olacağından yerel olarak ortalama değer özelliğini sağlar. $y = 0$ için ise $z_0 \in \partial H_n$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \tilde{u}(z_0) = 0 \quad &= \int_S \tilde{u}(z_0 + r\zeta)\ d\sigma(\zeta) \\ &= \int_{S^+} \tilde{u}(z_0 + r\zeta)\ d\sigma(\zeta) + \int_{S^-} \tilde{u}(z_0 + r\zeta)\ d\sigma(\zeta) \end{aligned} \tag{1}$$

dır. Şimdi $\int_{S^-} \tilde{u}(z_0 + r\zeta)\ d\sigma(\zeta)$ için $\zeta_x \in \mathbb{R}^{n-1}$ ve $\zeta_y \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\zeta = (\zeta_x, \zeta_y) \in S^-$ ve $\grave{\zeta} = (\zeta_x, -\zeta_y) \in S^+$ olarak tanımlansın. O halde Değişken değişimi ile

$$\int_{S^-} \tilde{u}(z_0 + r\zeta)\ d\sigma(\zeta) = \int_{S^+} -u(z_0 + r\grave{\zeta})\ d\sigma(\grave{\zeta})$$

elde edilir. Bu eşitlik (1)'de yerine yazılırsa $\tilde{u}$, $y = 0$ için de yerel olarak ortalama değer özelliğini sağlar.
Böylece $\tilde{u}$ fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ de yerel olarak ortalama değer özelliğini sağlar.

Son durumda $\tilde{u}$, $\mathbb{R}^n$ de yerel olarak ortalama değer özelliğini sağlayan sürekli bir fonksiyon oldu. Bu nedenle 2.6.1 gereği $\tilde{u}$, $\mathbb{R}^n$ de harmonik olur. O halde $\tilde{u}$, $\mathbb{R}^n$ de sınırlı harmonik bir fonksiyon olup Liouville teoremi 3.1.2 gereği sabittir. Dolayısıyla $\bar{H}_n$ de $u \equiv 0$ dır. ■

3.2. Ayrık Aykırılıklar

Tanım 3.2.1. *Ω açık, $a \in \Omega$ ve u fonksiyonu $\Omega \backslash \{a\}$ da tanımlı bir fonksiyon olsun. Bu durumda a noktasına u fonksiyonunun bir* ***ayrık aykırılığı*** *denir.*

Tanım 3.2.2. *u, $\Omega \backslash \{a\}$ da harmonik bir fonksiyon olsun. Eğer u fonksiyonu Ω da harmonik olacak şekilde bir genişlemeye sahip ise $a \in \Omega$ noktasına u nun bir* ***kaldırılabilir ayrık aykırılığı*** *denir.*

Holomorfik fonksiyonlarda ayrık aykırılığın kaldırılabilir olması için fonksiyonun sınırlı olması gerekir [4]. Aşağıda benzer bir durumun harmonik fonksiyonlar için de geçerli olduğu gösterilmiştir.

Teorem 3.2.3. *Sınırlı bir harmonik fonksiyonun ayrık aykırılığı kaldırılabilirdir.*

Kanıt. Kanıt için, bir u fonksiyonunu $\bar{B} \setminus \{0\}$ da harmonik olacak şekilde almak ve B ye harmonik bir genişlemesi olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

Genelliği bozmadan u fonksiyonu reel değerli alınsın.

sav: Aranan harmonik genişleme Poisson integrali ($P[u|_S]$) dir. Şimdi bu iddanın doğruluğu kanıtlansın.

Öncelikle $n > 2$ olsun. $\varepsilon > 0$ için v_ε, aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$v_\varepsilon(x) = u(x) - P[u|_S](x) + \varepsilon(|x|^{2-n} - 1) \tag{1}$$

Açıktır ki, v_ε, $B \setminus \{0\}$ da harmoniktir. Dirichlet problemi 2.5.4 gereği $|x| \to 1$ iken $v_\varepsilon(x) \to 0$ dır. Ayrıca u sınırlı olduğundan $x \to 0$ iken $v_\varepsilon(x) \to \infty$ dur. Bu durumda önerme 2.3.6, $\liminf$ versiyonu gereği $B\setminus\{0\}$ da $v_\varepsilon \geq 0$ olur. Bu durum her $\varepsilon > 0$ için geçerli olduğundan $B\setminus\{0\}$ da $u - P[u|_S] \geq 0$ elde edilir. Diğer yandan u fonksiyonu yerine $-u$ alınırsa $B\setminus\{0\}$ da $u - P[u|_S] \leq 0$ elde edilir. O halde $B\setminus\{0\}$ da $u \equiv P[u|_S]$ olur ki bu durum istenilen harmonik genişlemenin $P[u|_S]$ olduğunu kanıtlar.

$n = 2$ durumunda ise ispat (1) eşitliğinde $|x|^{2-n}$ yerine $\log \frac{1}{|x|}$ almak dışında aynıdır. ■

3.3. Cauchy Özelliği

Cauchy özelliği, kompleks analizden aşağıda verilen ifadesi ile bilinen bir özelliktir.

Önerme 3.3.1 (4). *f, $B(a,r) \subset \mathbb{C}$ diski üzerinde M sabiti ile sınırlı bir holomorf fonksiyon olsun. $\forall m$ negatif olmayan tam sayısı için*

$$|f^{(m)}(a)| \leq \frac{m!M}{r^m}$$

dir.

Aşağıda verilen teorem benzer bir sonucun $\mathbb{R}^n$ deki herhangi bir yuvarda tanımlı harmonik fonksiyonlar içinde geçerli olduğunu ortaya koyar.

Teorem 3.3.2. ***(Cauchy Özelliği)***

α bir çoklu indeks , $a \in \mathbb{R}^n$ ve $r > 0$ olsun. Öyle bir $C_\alpha > 0$ sabiti vardır ki, $B(a,r)$ de M ile sınırlı ve harmonik her u fonksiyonu için,

$$|D^\alpha u(a)| \leq \frac{C_\alpha M}{r^{|\alpha|}}$$

olur.

Kanıt. Genelliği bozmadan $a = 0$ alınsın. v, $\bar{B}$ de M ile sınırlı harmonik bir fonksiyon olsun. O halde (2.5.7) gereği,

$$\begin{aligned} |D^\alpha v(0)| &= |\int_S v(\zeta) D^\alpha P(0,\zeta)\ d\sigma(\zeta)| \\ &\leq \int_S |v(\zeta)||D^\alpha P(0,\zeta)|\ d\sigma(\zeta) \\ &\leq M \int_S |D^\alpha P(0,\zeta)|\ d\sigma(\zeta) \end{aligned}$$

dır. Ayrıca $C_\alpha = \int_S |D^\alpha P(0,\zeta)|\ d\sigma(\zeta)$ alınırsa,

$$|D^\alpha v(0)| \leq C_\alpha M \tag{1}$$

elde edilir.

Eğer u $B(0,r)$ de harmonik ise $v(x) = u\big((r-\varepsilon)x\big)$, $\bar{B}$ de harmoniktir. $D^\alpha v(0) = (r-\varepsilon)^{|\alpha|} D^\alpha u(0)$ olduğundan (1)'den dolayı

$$|D^\alpha u(0)| \leq \frac{C_\alpha M}{(r-\varepsilon)^{|\alpha|}}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik her $\varepsilon > 0$ için doğru olduğundan istenilen sonuç elde edilir. ■

Tanım 3.3.3. *$a \in \mathbb{R}^n$ bir nokta ve $E \subseteq \mathbb{R}^n$ bir küme olmak üzere $d(a,E)$, a ile E arasındaki uzaklığı belirtir.*

Aşağıda verilen sonuçta, Ω da sınırlı harmonik bir fonksiyonun türevlerinin $\partial\Omega$ civarında çok hızlı büyüyemeyeceği gösterilmiştir.

Sonuç 3.3.4. *α bir çoklu indeks ve u, Ω da sınırlı harmonik bir fonksiyon olsun. O halde $\forall a \in \Omega$ için*

$$|D^\alpha u(a)| \leq \frac{C}{d(a,\partial\Omega)^{|\alpha|}},$$

olacak şekilde bir C sabiti vardır.

Kanıt. Herhangi bir $a \in \Omega$ için $r = d(a, \partial\Omega)$ alınsın. Bu durumda hipotezden u fonksiyonu $B(a, r)$ de M ile sınırlı harmonik bir fonksiyondur. Cauchy özelliği 3.3.2'den aranan eşitsizlik elde edilir. ■

4. POZİTİF HARMONİK FONKSİYONLAR

Bu bölümde pozitif harmonik fonksiyonların özellikleri üzerinde durulacaktır.

4.1. Liouville Teoremi

Sınırlı harmonik fonksiyonlar için Liouville teoremi 3.1.2'de, $\mathbb{R}^n$ de sınırlı harmonik bir fonksiyonun sabit olduğu ortaya konmuştu. Aşağıda bu sonuç daha da geliştirilerek pozitif harmonik fonksiyonlar için verilmiştir.

Teorem 4.1.1. ***(Pozitif Harmonik Fonksiyonlar için Liouville Teoremi)*** *$\mathbb{R}^n$ de pozitif harmonik bir fonksiyon sabittir.*

Kanıt. u, $\mathbb{R}^n$ de pozitif harmonik bir fonksiyon olsun. Sabit bir $x \in \mathbb{R}^n$ noktası alınsın. $r > |x|$ olmak üzere $B(x,r)$ ve $B(0,r)$ yuvarlarının simetrik farkı D_r ile gösterilsin.

Ortalama değer özelliği hacim versiyonu 2.2.8 gereği;

$$u(x) - u(0) = \frac{1}{V(B(0,r))}\left[\int_{B(x,r)} u\ dV - \int_{B(0,r)} u\ dV\right]$$

dir. $A = B(x,r) \cap B(0,r)$, $C = B(x,r) \setminus B(0,r)$ ve $D = B(0,r) \setminus B(x,r)$ olsun. O halde $D_r = C \cup D$ dir. Böylece $u \geq 0$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
|u(x) - u(0)| &= \frac{1}{V(B(0,r))}\left|\int_{B(x,r)} u\ dV - \int_{B(0,r)} u\ dV\right| \\
&= \frac{1}{V(B(0,r))}\left|\int_C u\ dV + \int_A u\ dV - \int_D u dV - \int_A u\ dV\right| \\
&\leq \frac{1}{V(B(0,r))}\left[\int_C u\ dV + \int_D u\ dV\right] \\
&= \frac{1}{V(B(0,r))}\int_{D_r} u\ dV
\end{aligned}$$

dir. Liouville teoremi 3.1.2'deki tartışma gereği, $D_r \subseteq \{B(0, r+|x|) \backslash B(0, r-|x|)\}$ olacağından ,

$$\begin{aligned}
|u(x)-u(0)| &= \frac{1}{V(B(0,r))}\int_{D_r} u\ dV \\
&\leq \frac{1}{V(B(0,r))}\int_{B(0,r+|x|)\setminus B(0,r-|x|)} u\ dV \\
&= \frac{1}{V(B(0,r))}[\int_{B(0,r+|x|)} u\ dV - \int_{B(0,r-|x|)} u\ dV]
\end{aligned}$$

olur. Burada $V(B(0,r)) = r^n V(B)$, $V(B(0,r+|x|)) = (r+|x|)^n V(B)$ ve $V(B(0,r-|x|)) = (r-|x|)^n V(B)$ dir. Ayrıca ortalama değer teoremi hacim versiyonu 2.2.8'den

$$\int_{B(o,r+|x|)} u\ dV = V(B(0,r+|x|)).u(0)$$

ve

$$\int_{B(o,r-|x|)} u\ dV = V(B(0,r-|x|)).u(0)$$

dır. O halde

$$\begin{aligned}
|u(x)-u(0)| &\leq \frac{1}{V(B(0,r))}\left[\int_{B(0,r+|x|)} u\ dV - \int_{B(0,r-|x|)} u\ dV\right] \\
&= \frac{1}{r^n V(B)}\left[(r+|x|)^n V(B)u(0) - (r-|x|)^n V(B)u(0)\right] \\
&= u(0)\left[(1+\frac{|x|}{r})^n - (1-\frac{|x|}{r})^n\right]
\end{aligned}$$

dır. Yukarıdaki eşitsizlik her $r > |x|$ için geçerlidir, Buradan $r \to \infty$ iken $u(x) = u(0)$ elde edilir. $x \in \mathbb{R}^n$ keyfi olduğundan u, $\mathbb{R}^n$ de sabittir. ■

Sonuç 4.1.2. $\mathbb{R}^n$ *de alttan ya da üsten sınırlı harmonik bir fonksiyon sabittir.*

Örnek 4.1.3. *u, $\mathbb{R}^n$ de harmonik bir fonksiyon ve $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için $u(x) \geq -20$ olsun. $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için bir v fonksiyonu $v(x) = u(x) + 20 \geq 0$ olarak tanımlansın. Buradan v $\mathbb{R}^n$ de pozitif harmonik bir fonksiyon olur. Böylece* 4.1.1 *gereği v fonksiyonu sabittir. O halde* 20 *sabit bir sayı olduğundan u, $\mathbb{R}^n$ de sabittir.*

Sonuç 4.1.4. *u, $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ da pozitif harmonik bir fonksiyon olsun. Bu durumda u sabittir.*

Kanıt. Bir $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu $z = x + iy \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$f(z) = e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y$$

şeklinde tanımlansın. f, $\mathbb{R}^2$ den $\mathbb{R}^2$ ye $(x, y) \to (e^x \cos y, e^x \sin y)$ olarak tanımlı bir fonksiyon olarak düşünülebilir. Böylece $u \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ fonksiyonu $\mathbb{R}^2 (= \mathbb{C})$ de pozitif harmonik bir fonksiyon olur. O halde 4.1.1 gereği $u \circ f$ fonksiyonu sabittir. Diğer yandan u nun görüntü kümesi f nin tanım kümesine eşittir. Bu nedenle u fonksiyonu da $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ da sabittir. ■

Ancak bu sonuç $n > 2$ için geçerli değildir.

Örnek 4.1.5. *Bilindiği üzere $n > 2$ için $u(x) = |x|^{2-n}$ fonksiyonu $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ da pozitif ve harmoniktir. Ancak u, $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ da sabit değildir.*

4.2. Harnack Eşitsizliği ve Harnack Prensibi

Harnack eşitsizliği bağlantılı bir kümenin kompakt altkümeleri üzerinde, pozitif harmonik fonksiyonların geniş salınımlar yapamayacağını ifade eder.

Harnack eşitsizliği öncelikle bağlantılı bölgenin birim yuvar olması özel durumu için verilecektir.

Teorem 4.2.1. ***(Birim Yuvar için Harnack Eşitsizliği)***
u, B birim yuvarında pozitif harmonik bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\forall x \in B$ için,

$$\frac{1 - |x|}{(1 + |x|)^{n-1}} u(0) \leq u(x) \leq \frac{1 + |x|}{(1 - |x|)^{n-1}} u(0) \qquad (4.2.10)$$

dır.

Kanıt. u fonksiyonunun $\bar{B}$ de pozitif ve harmonik olduğu varsayılsın. Bu durumda $\forall x \in B$ için,

$$\begin{aligned} u(x) = P[u|_S](x) &= \int_S u(\zeta) \frac{1 - |x|^2}{|x - \zeta|^n} \, d\sigma(\zeta) \\ &\leq \int_S u(\zeta) \frac{1 - |x|^2}{(1 - |x|)^n} \, d\sigma(\zeta) \\ &= \tfrac{1 - |x|^2}{(1 - |x|)^n} \int_S u(\zeta) \, d\sigma(\zeta) \\ &= \tfrac{1 + |x|}{(1 - |x|)^{n-1}} u(0) \end{aligned} \qquad (1)$$

dır. Şimdi u, B de pozitif harmonik bir fonksiyon olsun. (1)'deki hesaplama u_r genişlemesi $(0 < r < 1)$ için yapılsın. O halde herhangi $x \in B$ için u_r, $\bar{B}$ de harmonik olduğundan,

$$u_r(x) \leq \frac{1+|x|}{(1-|x|)^{n-1}} u_r(0)$$

olup $r \to 1$ iken,

$$u(x) = u_r(x) \leq \frac{1+|x|}{(1-|x|)^{n-1}} u(0)$$

elde edilir. Bu durumda (4.2.10) eşitliğinin ikinci kısmı kanıtlanmış olur.

Eşitsizliğin ilk kısmı için, Yine benzer şekilde u, $\bar{B}$ de pozitif harmonik bir fonksiyon olsun. $\forall x \in B$ için,

$$\begin{aligned} u(x) = P[u|_S](x) &= \int_S u(\zeta)\frac{1-|x|^2}{|x-\zeta|^n} d\sigma(\zeta) \\ &\geq \int_S u(\zeta)\frac{1-|x|^2}{(1+|x|)^n} d\sigma(\zeta) \\ &= \frac{1-|x|^2}{(1+|x|)^n}\int_S u(\zeta) d\sigma(\zeta) \\ &= \frac{1-|x|}{(1+|x|)^{n-1}} u(0) \end{aligned}$$

olur. u fonksiyonunun B de pozitif harmonik bir fonksiyon olduğu durumda ise ilk kısımdakine benzer bir tartışma ile $\forall x \in B$ için,

$$u(x) \geq \frac{1-|x|}{(1+|x|)^{n-1}} u(0)$$

elde edilir. ■

Harnack eşitsizliği 4.2.1'den uygun bir öteleme ve genişleme altında aşağıdaki sonuç elde edilmiştir. Ayrıca burada α ve β fonksiyonları sırasıyla $\alpha(t) = (1-t)/(1+t)^{n-1}$ ve $\beta(t) = (1+t)/(1-t)^{n-1}$ olarak tanımlanmıştır.

Sonuç 4.2.2. *u, $B(a,R)$ yuvarında pozitif ve harmonik bir fonksiyon olsun. Bu durumda $x \in B(a,R)$ için $|x-a| \leq r < R$ olmak üzere,*

$$\alpha(r/R)u(a) \leq u(x) \leq \beta(r/R)u(a)$$

dır.

Kanıt. Burada ikinci eşitsizliğin ($u(x) \leq \beta(r/R)u(a)$) kanıtı verilecektir. İlk eşitsizliğin ispatıda benzer olarak verilebilir.

$v(x) = u(a+Rx)$ olsun. Açıktır ki v, B de pozitif ve harmoniktir. O halde 4.2.1 gereği $\forall x \in B(a,R)$ için,

$$u(x) = v(\frac{x-a}{R}) \leq \frac{1+|\frac{x-a}{R}|}{(1-|\frac{x-a}{R}|)^{n-1}}v(0)$$

dır. $\frac{|x-a|}{R} \leq \frac{r}{R}$ ve $u(a) = v(0)$ olduğundan,

$$\begin{aligned} u(x) &\leq \tfrac{1+\frac{r}{R}}{(1-\frac{r}{R})^{n-1}}u(a) \\ &= \beta(r/R)u(a) \end{aligned} \tag{4.2.11}$$

elde edilir. ■

Bu sonuç herhangi bir yuvar için Harnack eşitsizliği olarak verilebilir.

Teorem 4.2.3. ***(Harnack Eşitsizliği)***

Ω bağlantılı ve K, Ω nın kompakt bir altkümesi olsun . Ω da pozitif harmonik her u fonksiyonu ve $\forall x, y \in K$ için,

$$\frac{1}{C} \leq \frac{u(y)}{u(x)} \leq C$$

olacak şekilde bir $C \in (1,\infty)$ sabiti vardır.

Kanıt. Kanıt için Ω da pozitif harmonik her u fonksiyonu ve $\forall x, y \in K$ için,

$$\frac{u(y)}{u(x)} \leq C$$

olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Çünkü bu eşitsizlik sağlandığında x ve y noktaları simetrik bir rol oynadığından ,

$$\frac{1}{C} \leq \frac{u(y)}{u(x)}$$

eşitsizliğide gerçeklenmiş olur.

Şimdi $(x,y) \in \Omega \times \Omega$ için bir $s(x,y)$ fonksiyonu

$$s(x,y) = \sup\{u(y)/u(x) : u, \Omega' da\ pozitif\ harmonik\}$$

olarak tanımlansın. Öncelikle $\Omega \times \Omega$ da $s < \infty$ olduğunu gösterelim.

$x \in \Omega$ sabit bırakılıp, bir E kümesi

$$E = \{y \in \Omega : s(x, y) < \infty\}$$

olarak tanımlansın. E kümesi boştan farklıdır çünkü $x \in E$ dir. Eğer $y \in E$ ise Ω açık bir küme olduğundan bir $r > 0$, $B(y, 2r) \subset \Omega$ olacak şekilde seçilebilir. (4.2.11) gereği Ω da pozitif harmonik her u fonksiyonu için $z \in B(y, r)$ olmak üzere

$$u(z) \leq \beta(1/2)u(y) \ (|z - y| < r)$$

dir. Dolayısıyla $\forall z \in B(y, r)$ için,

$$\begin{aligned} \tfrac{u(z)}{u(x)} &\leq \beta(1/2)\tfrac{u(y)}{u(x)} \\ \sup \tfrac{u(z)}{u(x)} &\leq \beta(1/2) \sup \tfrac{u(y)}{u(x)} < \infty \end{aligned}$$

dur. O halde $z \in E$ olup $B(y, r) \subset E$ dir. Bu E kümesinin açık olduğunu gösterir.

Diğer yandan $z \in \Omega$ noktası E kümesinin bir limit noktası olsun. Bu durumda $z \in B(y, r) \subset B(y, 2r) \subset \Omega$ olcak şekilde bir $r > 0$ ve $y \in E$ noktası vardır. (4.2.11) gereği Ω da pozitif harmonik her u fonksiyonu için $u(z) \leq \beta(1/2)u(y)$dir. Böylece $z \in E$ olur ki bu E nin kapalı olduğunu kanıtlar. Öyleyse Ω bağlantılı ve E boştan farklı olduğundan $E = \Omega$ dır. Böylelikle $\Omega \times \Omega$'da $s < \infty$ olduğu gösterilmiş olur.

Son olarak $K \subset \Omega$ kompakt olmak üzere $K \times K$ da s nin üstten sınırlı olduğu gösterilirse kanıt biter. Herhangi $(a, b) \in \Omega \times \Omega$ noktası alınsın. $B(a, 2r) \times B(b, 2r) \subseteq \Omega \times \Omega$ olacak şekilde $r > 0$ seçilsin. (4.2.11) gereği Ω da pozitif harmonik her u fonksiyonu ve $\forall (x, y) \in B(a, r) \times B(b, r) \subset B(a, 2r) \times B(b, 2r)$ için,

$$\begin{aligned} \frac{u(y)}{u(x)} &\leq \frac{\beta(1/2)u(b)}{\alpha(1/2)u(a)} \\ &\leq \frac{\beta(1/2)}{\alpha(1/2)} \sup \frac{u(b)}{u(a)} \\ &= \frac{\beta(1/2)}{\alpha(1/2)} s(a, b) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylelikle bu komşulukta s üstten sınırlı olur. Diğer yandan $K \times K$ kompakt kümesi böyle komşulukların sonlu tanesi ile kapsanır. Bu da s nin $K \times K$ da üstten sınırlı olduğunu kanıtlar. $\blacksquare$

Sonuç 4.2.4. *Harnack eşitsizliği* 4.2.3*'de C sabiti, u fonksiyonu ve $x, y \in K$ dan bağımsızdır. Burada C sabitinin sadece K ve Ω ya bağlı olduğuna dikkat edilmelidir.*

Harnack eşitsizliği kullanılarak harmonik fonksiyon dizilerini ilgilendiren bir teorem verilebilir. Harnack prensibi olarak bilinen bu teorem monoton harmonik fonksiyon dizilerinin davranışı ile ilgili önemli bir sonuçtur.

Teorem 4.2.5. *(**Harnack Prensibi**)*
Ω bağlantılı ve (u_m), Ω da noktasal artan harmonik fonksiyonların bir dizisi olsun. Bu durumda (u_m) dizisi ya Ω nın kompakt alt kümelerinde Ω da harmonik bir fonksiyona düzgün yakınsar ya da $\forall x \in \Omega$ için $u_m(x) \to \infty$ dur.

Kanıt. $u_1 > 0$ varsayılsın. Aksi durumda u_m yerine $u_m - u_1 + 1$ alınarak her bir u_m, Ω da pozitif kabul edilebilir. Her bir $x \in \Omega$ için

$$\lim_{m \to \infty} u_m(x) = u(x)$$

denilsin.

Öncelikle u fonksiyonunun Ω da sonlu olduğu varsayılsın. $K \subseteq \Omega$ kompakt bir küme olsun.Bir $x \in K$ noktası sabit olarak alınsın. O halde Harnack eşitsizliği 4.2.3 gereği $\forall y \in K$ ve $m > k$ için

$$u_m(y) - u_k(y) \leq C(u_m(x) - u_k(x)) \tag{1}$$

olacak biçimde bir $C \in (1, \infty)$ sabiti vardır. $u_m(x) \to u(x)$ olduğundan, $\{u_m(x)\}$ Cauchy dizisidir. Dolayısıyla her $\varepsilon > 0$ için öyle bir M vardır ki, $m > k > M$ için $u_m(x) - u_k(x) < \varepsilon / C$ dir. (1)'den dolayı her $y \in K$ için $u_m(y) - u_k(y) < \varepsilon$ olur. Yani (u_m), K da bir düzgün Cauchy dizisidir.

O halde K da (u_m) dizisi u fonksiyonuna düzgün yakınsar. Teorem 2.5.7 gereği u fonksiyonu Ω da harmoniktir.

Şimdi bir $x \in \Omega$ noktası için $u(x) = \infty$ olduğunu varsayalım. Herhangi bir $y \in \Omega$ noktası alınsın. Harnack eşitsizliği 4.2.3 gereği, $\forall m$ için u_m pozitif harmonik fonksiyonu ve $K = \{x, y\}$ kompakt kümesi için

$$u_m(x) \leq Cu_m(y)$$

olacak biçimde bir $C \in (1, \infty)$ sabiti vardır.
O halde $u_m(x) \to u(x) = \infty$ olduğundan $u_m(y) \to u(y) = \infty$ olur. $u(y) = \infty$ ve $y \in \Omega$ keyfi olduğundan u fonksiyonu tüm Ω da ∞ dur. ■

5. HARMONİK POLİNOMLAR

Dirichlet problemi 2.5.4 gereği $\mathbb{R}^n$ de herhangi bir polinomun Poisson integralinin $(P[p|_S])$, B de harmonik bir fonksiyon olduğu bilinmektedir. Harmonik polinomların irdelenmesine ise herhangi bir polinomun Poisson integralinin de bir polinom olduğu sonucu ile başlanacaktır.
Daha sonra $\mathbb{R}^n$ de herhangi bir polinomun, harmonik bir polinom ile $|x|^2$ nin bir polinomla çarpımının toplamı olarak yazılabileceğinin gösterilmesi ile devam edilecektir. Bu sonuç homojen polinomlar için bir harmonik dekompozisyon teoremi verilmesine olanak sağlayacaktır.

Diğer önemli bir sonuç ise bu sonuçlar kullanılarak $L^2(S)$ Hilbert uzayının homojen harmonik polinom uzaylarının bir direkt toplamı olarak ifade edilmesi olacaktır.

Bölüm zonal harmoniklerin incelenmesi ile sonlandırılacaktır. Zonal harmonikler yardımıyla Poisson çekirdeği için bir dekompozisyon verilecektir.
Üstelik harmonik fonksiyonların homojen açılımlarının tüm yuvar üzerinde geçerli olduğunu gösteren bir sonuç da elde edilecektir.

5.1. Polinom Dekompozisyonu

Bu kısma, herhangi bir polinomun Poisson integralinin yine aynı veya daha küçük dereceden bir polinom olması sonucu ile başlanacaktır.

Dirichlet problemi 2.5.4 gereği, Poisson integrali var ise problemin tek çözümüdür. Bu nedenle aşağıdaki teoremde sonucun varlığını göstermek yeterli olacaktır.

Teorem 5.1.1. *p, $\mathbb{R}^n$ de derecesi m olan bir polinom olsun. Bu durumda derecesi en fazla $m-2$ olan öyle bir q polinomu vardır ki*

$$P[p|_S] = (1 - |x|^2)q + p$$

olur.

Kanıt. Öncelikle $m = 0$ veya $m = 1$ olsun. Bu durumda p harmonik bir fonksiyon olur. O halde $q \equiv 0$ alınır ve $P[p|_S] = p$ denirse istenilen elde edilmiş olur.

Şimdi $m \geq 2$ olduğu varsayılsın. Öncelikle q polinomu nasıl seçilirse seçilsin S üzerinde $(1 - |x|^2)q + p \equiv p$ olur. O halde Dirichlet problemi 2.5.4 gereği $(1-|x|^2)q+p$ harmonik olacak şekilde bir q polinomu seçmek yeterli olacaktır. Diğer bir deyişle kanıt için

$$\Delta(1 - |x|^2)q = -\Delta p$$

olacak şekilde derecesi en fazla $m-2$ olan bir q polinomu bulmak yeterlidir.

W, $\mathbb{R}^n$ üzerinde derecesi en fazla $m-2$ olan tüm polinomların vektör uzayını göstersin. $T : W \to W$ lineer dönüşümü

$$T(q) = \Delta((1 - |x|^2)q)$$

olacak şekilde tanımlansın. Eğer $T(q) = 0$ ise $\Delta((1 - |x|^2)q) \equiv 0$ olur. O halde $(1 - |x|^2)q$ harmonik bir fonksiyon olur, üstelik S üzerinde 0 dır. O halde maksimum ilkesi gereği B'de sıfırdır. Böylece, $(1 - |x|^2)$ B de sıfır olamayacağından q, 0 olur. Bu nedenle T, birebir bir dönüşüm olur.

W, $\{x^\alpha : |\alpha| \leq m-2\}$ tabanı ile sonlu boyutlu bir vektör uzayıdır. Sonlu boyutlu bir uzaydan kendisine giden birebir dönüşüm aynı zamanda örtendir. O halde

$$T(q) = \Delta((1 - |x|^2)q) = -\Delta p$$

olacak şekilde derecesi en fazla $m-2$ olan bir q polinomu vardır. ■

Tanım 5.1.2. $\mathbb{R}^n$ *de m.dereceden homojen polinomların kompleks vektör uzayı* $P_m(\mathbb{R}^n)$ *ile gösterilecektir. m.dereceden homojen harmonik polinomları içeren* $P_m(\mathbb{R}^n)$ *nin altkümesi ise* $H_m(\mathbb{R}^n)$ *ile gösterilecektir.*

Örnek 5.1.3. $p(x,y) = 2x^3 - 6xy^2 + 15x^2y - 5y^3$ *polinomu* $P_3(\mathbb{R}^2)$ *nin bir elemanıdır. Burada özel olarak* $p \in H_3(\mathbb{R}^2)$ *dir.*

Örnek 5.1.4. $p(x,y,z) = 8x^5 - 40x^3y^2 + 15xy^4 - 40x^3z^2 + 30xy^2z^2 + 15xz^4$ *polinomu,* $H_5(\mathbb{R}^3)$ *ün bir elemanıdır.*

Sonuç 5.1.5. *p,* $\mathbb{R}^n$ *de m.dereceden bir polinom olsun.* $\forall j = 0, 1, ..., m$ *için* $p_j \in P_j(\mathbb{R}^n)$ *olmak üzere p polinomu*

$$p = \sum_{j=0}^{m} p_j$$

formunda tek şekilde yazılabilir. Üstelik p nin harmonik olması için gerek ve yeter şart herbir p_j *nin harmonik olmasıdır.*

Kanıt. Teklik sonucu 2.7.12 gereği $p = \sum_{j=0}^{m} p_j$ olarak tek türlü yazılabileceği aşikardır. Diğer yandan $\Delta p = \sum_{j=0}^{m} \Delta p_j$ olup Δp nin sıfır olması için $j = 0, 1, ..., m$ olmak üzere her bir Δp_j, 0 olmalıdır. ■

Aşağıdaki teorem $P_m(\mathbb{R}^n)$ uzayının $H_m(\mathbb{R}^n)$ ve $|x|^2 P_{m-2}(\mathbb{R}^n)$ altuzaylarının direkt toplamı olarak yazılabileceğini ifade eder. Fakat öncesinde teoremin ispatında anahtar rol oynayacak bir sonuç verilecektir.

Yardımcı Teorem 5.1.6. $|x|^2$ *polinomunun sıfırdan farklı bir polinomla çarpımı harmonik olamaz.*

Kanıt. $\mathbb{R}^n$ de sıfırdan farklı m. dereceden bir p polinomu için $|x|^2 p$ polinomunun harmonik olduğu varsayılsın. Açıkça görülür ki $p|_S = (|x|^2 p)|_S$ dir. O halde p polinomunun Poisson integrali $P[p|_S]$, $|x|^2 p$ harmonik polinomuna eşit olacaktır. Öte yandan p polinomu m. dereceden, $P[p|_S]$ polinomu ise $m+2$. dereceden bir polinomdur. Ancak 5.1.1 gereği $P[p|_S]$ derecesi en fazla m olan bir polinomdur. O halde bu bir çelişkidir. ■

Teorem 5.1.7. *$m \geq 2$ olsun. Bu durumda*

$$P_m(\mathbb{R}^n) = H_m(\mathbb{R}^n) \oplus |x|^2 P_{m-2}(\mathbb{R}^n)$$

dir. (Daha açık olarak $P_m(\mathbb{R}^n)$ nin herbir elemanı, $H_m(\mathbb{R}^n)$ ve $|x|^2 P_{m-2}(\mathbb{R}^n)$ nin birer elemanının toplamı olarak tek türlü yazılabilir.)

Kanıt. 5.1.1 gereği, $p \in P_m(\mathbb{R}^n)$ iken

$$\begin{aligned} P[p|_S] &= q - |x|^2 q + p \\ p &= P[p|_S] + |x|^2 q - q \end{aligned}$$

olacak şekilde derecesi en fazla $m-2$ olan bir q polinomu vardır. Bu eşitlikte her iki tarafın m.dereceden homojen kısmı alınsın. O halde $P[p|_S]$ harmonik polinomunun m.dereceden homojen kısmı $p_m \in H_m(\mathbb{R}^n)$ ve q'nun m-2.dereceden homojen kısmı $q_{m-2} \in P_{m-2}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere $p = p_m + |x|^2 q_{m-2}$ olarak yazılabilir. O halde $P_m(\mathbb{R}^n)$ nin her elemanı $H_m(\mathbb{R}^n)$ nin bir elemanı ile $|x|^2 P_{m-2}(\mathbb{R}^n)$ nin bir elemanının toplamı olarak yazılabilir. Geriye bu yazımın tek olduğunun gösterilmesi kalır.

Şimdi p polinomunun $\tilde{p}_m \in H_m(\mathbb{R}^n)$ ve $\tilde{q}_{m-2} \in P_{m-2}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere $p = \tilde{p}_m + |x|^2 \tilde{q}_{m-2}$ olarakta yazılabileceği varsayılsın. Bu durumda,

$$\begin{aligned} p_m + |x|^2 q_{m-2} &= \tilde{p}_m + |x|^2 \tilde{q}_{m-2} \\ p_m - \tilde{p}_m &= |x|^2 (\tilde{q}_{m-2} - q_{m-2}) \end{aligned}$$

olur. Burada $p_m - \tilde{p}_m$ polinomu harmoniktir. Ancak 5.1.6 gereği $|x|^2(\tilde{q}_{m-2} - q_{m-2})$ harmonik değildir. O halde $\tilde{q}_{m-2} = q_{m-2}$ dolayısıyla $p_m = \tilde{p}_m$ olur. ■

Şimdi bu kısımın temel sonucu olarak polinomlar için bir dekompozisyon verilecektir. Burada $[t]$, t ye eşit yada t den küçük en büyük tamsayıyı temsil edecektir.

Teorem 5.1.8. *Her $p \in P_m(\mathbb{R}^n)$ polinomu $k = [\frac{m}{2}]$ ve $\forall j$ için $p_j \in H_j(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere,*

$$p = p_m + |x|^2 p_{m-2} + ... + |x|^{2k} p_{m-2k}$$

formunda tek türlü yazılabilir.

Kanıt. 5.1.7 gereği $P_m(\mathbb{R}^n) = H_m(\mathbb{R}^n) \oplus |x|^2 P_{m-2}(\mathbb{R}^n)$ dir. Yani $p \in P_m(\mathbb{R}^n)$, $p_m \in H_m(\mathbb{R}^n)$ ve $q \in P_{m-2}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere $p = p_m + |x|^2 q_{m-2}$ olarak tek türlü yazılabilir.

$m = 0$ veya $m = 1$ iken $P_m(\mathbb{R}^n) = H_m(\mathbb{R}^n)$ olacağından istenilen sonuç elde edilir. O halde $m \geq 2$ olsun. Tümevarım yöntemi uygulanarak en son $m-2$ için teoremin doğru olduğu varsayılsın. O halde $q \in P_{m-2}(\mathbb{R}^n)$ için bir tek dekompozisyon vardır. Bu dekompozisyon $p = p_m + |x|^2 q_{m-2}$ de yerine yazılırsa p nin istenilen dekompozisyonu elde edilmiş olur. Bu dekompozisyonun tekliğini, q nun dekompozisyonunun tekliği ve 5.1.7'den p_m nin tek türlü belirlenmesi kanıtlar. ■

Sonuç 5.1.9. *$p \in P_m(\mathbb{R}^n)$, $k = [\frac{m}{2}]$ ve $p_m, p_{m-2}, ..., p_{m-2k}$, 5.1.8'de verilen harmonik polinomlar olsun. Bu durumda $p|_S$ sınır verisi ile B için Dirichlet probleminin bir çözümü,*

$$P[p|_S] = p_m + p_{m-2} + ... + p_{m-2k} \tag{5.1.12}$$

dır.

Kanıt. Kanıt için $P[p|_S]$ nin S üzerinde p ye eşit ve harmonik olduğunu göstermek yeterlidir. $\forall j$ için $p_j \in H_j(\mathbb{R}^n)$ olduğundan açık olarak (5.1.12) harmoniktir. Ayrıca 5.1.8 gereği $p = p_m + |x|^2 p_{m-2} + ... + |x|^{2k} p_{m-2k}$ olduğundan S üzerinde $p = P[p|_S]$ dir. ■

Bu kısım $H_m(\mathbb{R}^n)$ nin boyutu $dim H_m(\mathbb{R}^n)$ yi hesaplamak için bir formül elde edilerek sonlandırılacaktır.
$m = 0$ için $H_0(\mathbb{R}^n) = P_0(\mathbb{R}^n)$ olup $dim H_0(\mathbb{R}^n) = 1$ dir.
$m = 1$ için $H_1(\mathbb{R}^n) = P_1(\mathbb{R}^n)$ ve ayrıca $\{x^\alpha : |\alpha| = 1\}$, $H_m(\mathbb{R}^n)$ nin bir tabanı olmak üzere $dim H_1(\mathbb{R}^n) = n$ dir.
$m \geq 2$ durumu için ise aşağıda bir formül verilmiştir.

Önerme 5.1.10. *$m \geq 2$ olsun. Bu durumda,*

$$dimH_m(\mathbb{R}^n) = \binom{n+m-1}{n-1} - \binom{n+m-3}{n-1}$$

dir.

Kanıt. Öncelikle $dimP_m(\mathbb{R}^n)$ bulunsun. $\{x^\alpha : |\alpha| = m\}$, $P_m(\mathbb{R}^n)$ nin bir tabanıdır. O halde $dimP_m(\mathbb{R}^n)$, $|\alpha| = m$ olmak üzere farklı $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ çoklu indeksleri sayısına eşittir. $j = 1, ..., n$ olmak üzere herbir α_j ye 1 eklenerek $\tilde{\alpha}_j = \alpha_j + 1$ elde edilsin. Bu durumda $dimP_m(\mathbb{R}^n)$, $|\tilde{\alpha}| = n + m$ ve herbir $\tilde{\alpha}_j \geq 1$ olmak üzere farklı $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha_1}, ..., \tilde{\alpha_n}$ çoklu indeksleri sayısına eşit olur.

Şimdi $(0, n+m) \subset \mathbb{R}$ aralığından $n-1$ tane tamsayının çıkarıldığı varsayılsın. Bu işlem aralığı n adet ayrık açık aralığa bölecektir. Bu aralıkların uzunlukları sırasıyla $\tilde{\alpha_1}, ..., \tilde{\alpha_n}$ ile gösterilsin. O halde

$$|\tilde{\alpha}| = \sum_{j=1}^{n} \tilde{\alpha}_j = n + m$$

olur. Böylece $(0, n+m)$ açık aralığından $n-1$ tamsayının her farklı şeçimi için $|\tilde{\alpha}| = n + m$ olacak biçimde farklı bir $\tilde{\alpha}$ indeks elde edilir. Üstelik böyle bir seçimde n+m.dereceden herbir $\tilde{\alpha}$ multi indeksi bir ve yanlız bir kez elde edilir. Bu şekildeki seçimlerin sayısı $\binom{n+m-1}{n-1}$ olduğu için,

$$dimP_m(\mathbb{R}^n) = \binom{n+m-1}{n-1}$$

dir. Teorem 5.1.7 gereği $P_m(\mathbb{R}^n) = H_m(\mathbb{R}^n) \oplus |x|^2 P_{m-2}(\mathbb{R}^n)$ olduğundan,

$$dimH_m(\mathbb{R}^n) = dimP_m(\mathbb{R}^n) - dimP_{m-2}(\mathbb{R}^n)$$

dir. O halde

$$dimH_m(\mathbb{R}^n) = \binom{n+m-1}{n-1} - \binom{n+m-3}{n-1}$$

dir. ■

Örnek 5.1.11. *Pascal üçgeninden* $\binom{N+1}{M} = \binom{N}{M} + \binom{N}{M-1}$ *olarak yazılabileceği biliniyor. Bu özellik ve önerme kullanılarak* $m \geq 1$ *olmak üzere*

$$\begin{aligned} dimH_m(\mathbb{R}^n) &= \tbinom{n+m-2}{n-1} + \tbinom{n+m-2}{n-2} - \tbinom{n+m}{n-1} \\ &= \tbinom{n+m-2}{n-2} + \tbinom{n+m-3}{n-1} + \tbinom{n+m-3}{n-2} - \tbinom{n+m-3}{n-1} \\ &= \tbinom{n+m-2}{n-2} + \tbinom{n+m-3}{n-2} \end{aligned} \tag{5.1.13}$$

elde edilir.

Tanım 5.1.12. ***(Stirling formülü)****[5]*

$n = 1, 2, 3, ...$ *için*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n/e)^n\sqrt{2\pi n}} = 1$$

dir. Bu formül $n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$ *olarak da ifade edilebilir.*

Aşağıda daha sonraki tartışmalarda da kullanılacak bir örnek verilmiştir.

Örnek 5.1.13. *Sabit bir* n *için* $m \to \infty$ *iken,*

$$\frac{dimH_m(\mathbb{R}^n)}{m^{n-2}} \to \frac{2}{(n-2)!} \tag{5.1.14}$$

dir. Bunu görmek için (5.1.13) formülü gereği $m \to \infty$ *iken,*

$$\frac{(n+m-2)!}{(n-2)!m!} + \frac{(n+m-3)!}{(n-2)!(m-1)!} \sim \frac{2m^{n-2}}{(n-2)!} \tag{1}$$

olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

Stirling formülü 5.1.12 *gereği* $m \to \infty$ *iken,*

$$\begin{aligned} \frac{(n+m-2)!}{(n-2)!m!} &\sim \frac{(n+m-2/e)^{n+m-2}\sqrt{2\pi(n+m-2)}}{(n-2)!(m/e)^m\sqrt{2\pi m}} \\ &\sim \frac{(n+m-2)^{n+m-2}}{(n-2)!(m)^m e^{n-2}} \\ &\sim \frac{1}{(n-2)!e^{n-2}}(1+\frac{n-2}{m})^m(n+m-2)^{n-2} \end{aligned}$$

dir. Burada $\frac{1}{(n-2)!e^{n-2}}$ *sabittir. Üstelik* $m \to \infty$ *iken* $(n+m-2)^{n-2} \sim m^{n-2}$ *dir. Diğer yandan* $\lim_{m\to\infty}(1+k/m)^m = e^k$ *dır. O halde tüm bu sonuçlardan,*

$$\begin{aligned} \tfrac{(n+m-2)!}{(n-2)!m!} &\sim \tfrac{1}{(n-2)!e^{n-2}}e^{n-2}m^{n-2} \\ &\sim \tfrac{1}{(n-2)!}m^{n-2} \end{aligned} \tag{2}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\frac{(n+m-3)!}{(n-2)!(m-1)!} \sim \frac{1}{(n-2)!} m^{n-2} \tag{3}$$

olacağından istenilen (2) ve (3)'den elde edilir.

5.2. $L^2(S)$ nin Küresel Harmonik Dekompozisyonu

Teorem 5.1.7'de $P_m(\mathbb{R}^n)$ uzayının $H_m(\mathbb{R}^n)$ ve $|x|^2 P_{m-2}(\mathbb{R}^n)$ altuzaylarının bir direkt toplamı olarak ayrıştırılabileceği gösterilmişti. Ancak bu bölümde ortogonal direkt toplamlarla ilgilenilecektir. Dolayısıyla bu durum bir iç çarpım uzayı gerektirecektir. Diğer yandan $\mathbb{R}^n$ de homojen polinomlar S ye kısıtlanmışları üzerinden belirlenir.
O halde S üzerinde tanımlı bir Hilbert uzayı olan $L^2(S, d\sigma)$ da çalışmak kullanışlı olacaktır. Bu kısımda asıl amaç ise $L^2(S, d\sigma)$ nin bir ortogonal dekompozisyonunu elde etmek olacaktır.

Tanım 5.2.1. *$L^2(S, d\sigma)$ uzayı,*

$$L^2(S, d\sigma) = \{f : f \, \textit{ölçülebilirdir ve} \, (\int_S |f|^2 d\sigma)^{1/2} < \infty\}$$

olarak tanımlı bir Hilbert uzayıdır. $L^2(S, d\sigma)$ uzayı kısaca $L^2(S)$ olarak gösterilir. $f, g \in L^2(S)$ olmak üzere $L^2(S)$ uzayı üzerindeki iç çarpım,

$$< f, g >_{L^2} = \int_S f \bar{g} d\sigma$$

şeklinde tanımlıdır. Bu şekilde tanımlı iç çarpım $L^2(S)$ uzayı üzerindeki standart iç çarpım olarak adlandırılır.

$\mathbb{R}^n$ de homojen bir polinomun S ye kısıtlanmışı aşikar olarak $L^2(S)$ nin bir elemanıdır. $\mathbb{R}^n$ de farklı dereceden iki homojen polinomun S ye kısıtlanmışları $L^2(S)$ de ortogonal olmak zorunda değildir.

Örnek 5.2.2. *$x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $p(x) = x_n^3$ ve $q(x) = x_n^5$, $\mathbb{R}^n$ de iki homojen polinom olsun. $< p, q >= \int_S p\bar{q} \, d\sigma$ olup $pq = x_n^8$, S de pozitif olacağından p ve q $L^2(S)$ de ortogonal değildir.*

Aşağıdaki önerme, hangi şartlar altında herhangi iki polinomun $L^2(S)$ de ortogonal olabileceğini ifade eder.

Önerme 5.2.3. *p, $\mathbb{R}^n$ de herhangi bir polinom, q ise $\mathbb{R}^n$ de derecesi p nin derecesinden büyük homojen harmonik bir polinom olsun. Bu durumda*

$$\int_S pq \, d\sigma = 0$$

dır.

Kanıt. İspat için p ve q polinomlarının S üzerindeki değerlerini bilmek yeterlidir. Sonuç 5.1.5 ve (5.1.12)'le birlikte lineerlik kullanılırsa ispatın p bir homojen polinom iken yapılmasının yeterli olduğu görülür.

O halde $k < m$ olmak üzere $p \in H_k(\mathbb{R}^n)$ ve $q \in H_m(\mathbb{R}^n)$ varsayılsın. p ve q harmonik olduğundan Green özelliği gereği,

$$\int_S (pD_nq - qD_np) \, d\sigma = 0 \tag{1}$$

dır. $\zeta \in S$ için $\mathbf{n} = \zeta$ olup,

$$\begin{aligned}
(D_np)(\zeta) = \nabla p \cdot \mathbf{n} &= \lim_{\lambda \to 0} \frac{p(\zeta + \lambda n) - p(\zeta)}{\lambda} \\
&= \lim_{\lambda \to 0} \frac{p((\lambda + 1)\zeta) - p(\zeta)}{\lambda} \\
&= \frac{d}{dt} p(t\zeta)|_{t=1} = \frac{d}{dt}(t^k p(\zeta))|_{t=1} = kp(\zeta)
\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde S'de $D_nq = mq$ olur. O halde (1) eşitliği $(m-k)\int_S pqd\sigma = 0$ halini alır. Üstelik $m > k$ olduğundan,

$$\int_S pq \, d\sigma = 0$$

olmalıdır. ■

Tanım 5.2.4. *$p \in H_m(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda p nin S ye kısıtlanmışı $p|_S$ ye m.dereceden* ***küresel harmonik*** *polinom denir. m.dereceden küresel harmonik polinomlar kümesi $H_m(S)$ ile gösterilir ve*

$$H_m(S) = \{p|_S : p \in H_m(\mathbb{R}^n)\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $H_m(\mathbb{R}^n)$ kompleks vektör uzayından $H_m(S)$ kompleks uzayına tanımlanan $p \to p|_S$ dönüşümü bir izomorfizmdir.

Örnek 5.2.5. 5.1.4*'da* $\mathbb{R}^3$ *de tanımlı*

$$p(x,y,z) = 8x^5 - 40x^3y^2 + 15xy^4 - 40x^3z^2 + 30xy^2z^2 + 15xz^4$$

polinomunun, $H_5(\mathbb{R}^3)$ ün bir elemanı olduğu söylenmişti. Bu polinom

$$p(x,y,z) = 15x(x^2+y^2+z^2)^2 - 70x^3(x^2+y^2+z^2) + 63x^5$$

şeklinde yazılır ve S ye kısıtlanırsa $p|_S = 15x - 70x^3 + 63x^5 \in H_5(S)$ olur.

Sonuç 5.2.6. *Önerme* 5.1.7*'de*

$$P_m(\mathbb{R}^n) = H_m(\mathbb{R}^n) \oplus |x|^2 P_{m-2}(\mathbb{R}^n)$$

olduğu gösterilmişti. $|x|^2P_{m-2}(\mathbb{R}^n)$ ile $P_{m-2}(\mathbb{R}^n)$ nin S ye kısıtlanmışları aynıdır. O halde tüm fonksiyonlar S ye kısıtlandığında 5.2.3 *gereği dekompozisyon $L^2(S)$ üzerindeki iç çarpıma göre ortogonal olur.*

Sonuç 5.2.7. *Önerme* 5.2.3 *gereği $k \neq m$ iken $L^2(S)$ de $H_k(S)$ ile $H_m(S)$ ortogonaldir.*

Buraya kadar $L^2(S)$ yi küresel harmonik uzayların sonsuz bir direkt toplamı olarak yazabilmek için gerekli sonuçlar verildi. Ancak bu savın ispatına geçmeden önce Hilbert uzayı teorisinden bir hatırlatma yapmak yararlı olacaktır.

Yardımcı Teorem 5.2.8. *H bir kompleks Hilbert uzayı olsun.*

$$H = \bigoplus_{m=0}^{\infty} H_m$$

olarak yazılabilmesi için aşağıdaki üç şart sağlanmalıdır:

(i) $\forall m$ için H_m, H nin kapalı altuzayıdır.

(ii) $k \neq m$ için H_k ile H_m ortogonaldir.

(iii) $\forall x \in H$ için $x = x_0 + x_1 + ...$ olacak şekilde $x_m \in H_m$ $(m = 0, 1, 2, ...)$ vardır. Burada $\sum_{m=0}^{\infty} x_m$ toplamı H nin normuna göre yakınsaktır.

(i),(ii),(iii) şartları sağlandığında H uzayı, H_m uzaylarının bir direkt toplamı olarak yazılmış olur. Bu durumda **(iii)**'deki açılım tektir. Üstelik **(i)** ve **(ii)** sağlandığında **(iii)**'nin sağlanması için gerek ve yeter şart $\bigcup_{m=0}^{\infty} H_m$ lerin kompleks lineer gereninin H de yoğun olmasıdır.

Artık bu bölümün asıl sonucu verilebilir.

Teorem 5.2.9. $L^2(S) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} H_m(S)$

Kanıt. Kanıt için 5.2.8'deki **(i)**,**(ii)** ve **(iii)** şartlarının sağlandığı gösterilmelidir.

(i) $H_m(S)$ ler sonlu boyutlu olduklarından kapalıdırlar.

(ii) 5.2.7 gereği $m \neq k$ iken $H_k(S)$ ile $H_m(S)$ ortogonaldir.

(iii) Bu şart için $ger\{\bigcup_{m=0}^{\infty} H_m(S)\} = A$ nın $L^2(S)$ de yoğun olduğunu göstermek yeterlidir. Yani $\bar{A} = L^2(S)$ olmalıdır.

Teorem 5.1.8 gereği p, $\mathbb{R}^n$ de bir polinom iken $p|_S$ nin $\bigcup_{m=0}^{\infty} H_m(S)$ nin elemanlarının bir sonlu toplamı olarak yazılabileceği biliniyor. Diğer bir deyişle $p|_S \in ger\{\bigcup_{m=0}^{k} H_m(S)\} \subset A$ dır.

Stone-Weierstrass teoremi gereği [5], p polinomunun S ye kısıtlanmışları kümesi $C(S)$ üzerindeki supremum normuna göre $C(S)$ de yoğundur. O halde herhangi bir $g \in C(S)$ ve herhangi $\varepsilon > 0$ için

$$\|g - p|_S\|_{L^\infty} < \varepsilon/2 \tag{1}$$

olacak biçimde bir $p|_S \in A$ vardır. Ayrıca $C(S)$, $L^2(S)$ de yoğundur. Bu nedenle herhangi bir $f \in L^2(S)$ ve $\varepsilon > 0$ için

$$\|f - g\|_{L^2} < \varepsilon/2 \tag{2}$$

olacak biçimde bir $g \in C(S)$ vardır.
Diğer yandan herhangi bir $h \in L^\infty(S)$ için

$$\begin{aligned} \|h\|_{L^2}^2 = \int_S |h|^2 \, d\sigma &\leq \int_S \|h\|_{L^\infty}^2 \, d\sigma \\ &= \|h\|_{L^\infty}^2 \int_S d\sigma = \|h\|_{L^\infty}^2 \end{aligned} \tag{3}$$

yani S üzerinde L^2 normu L^∞ normundan küçük ya da eşittir.

Tüm bu durumlardan ((1),(2),(3)) herhangi bir $f \in L^2(S)$ ve $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} \|p|_S - f\|_{L^2} &\leq \|p|_S - g\|_{L^2} + \|g - f\|_{L^2} \\ &\leq \|p|_S - g\|_{L^\infty} + \|g - f\|_{L^2} \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

dur. Bu da arzu edilen $\overline{ger\{\bigcup_{m=0}^{\infty} H_m(S)\}} = L^2(S)$ sonucunu verir. ■

Yukarıdaki teorem $n = 2$ olduğunda bilinen bir sonuca indirgenir. Aşağıda bu sonucun bir fonksiyonun çember üzerindeki standart Fourier açılımından başka bişey olmadığı gösterilecektir.

Sonuç 5.2.10. *$p \in H_m(\mathbb{R}^2)$ reel değerli olsun. Bu durumda p, tam bir f fonksiyonunun reel kısmıdır [4]. Yani $f = p + iq$ olacak şekilde orijinde sanal kısmı sıfır olan bir q fonksiyonu vardır. Cauchy-Riemann eşitliği gereği q, derecesi p nin derecesi olan harmonik bir polinomdur. O halde f nin m.mertebeden türevi dışında tüm türevleri orijinde sıfır olacaktır. Bundan dolayı $c \in \mathbb{C}$ sabit olmak üzere $f = cz^m$ dir. Burada $p = (f + \bar{f})/2$ olduğundan,*

$$p = cz^m + \overline{cz^m}$$

olur. Buda $H_m(\mathbb{R}^2)$, $\{z^m, \overline{z^m}\}$ vektörleri tarafından gerilir demektir. O halde $p|_S$ için $p = ce^{im\theta} + \bar{c}e^{-im\theta}$ olur. Böylece $n = 2$ için $H_m(S)$ nin bir tabanı,

$$\{e^{im\theta}, e^{-im\theta}\} \ veya \ \{\cos m\theta, \sin m\theta\} \tag{5.2.15}$$

dır. Diğer yandan $f \in L^2(S)$ için 5.2.9'daki dekompozisyon

$$f = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{im\theta}$$

halini alır ve toplam $L^2(S)$ de yakınsaktır.

Sonuç 5.2.11. *$n > 2$ durumunda ise 5.2.9, $f \in L^2(S)$ için Fourier seri açılımına benzer bir açılım olarak düşünülebilir. Ayrıca bu durumda küresel harmonikler, $e^{im\theta}$ üstel fonksiyonlarının işlevini görmektedir.*

5.3. Zonal Harmonikler

Bu bölümde $L^2(S)$ üzerindeki iç çarpıma göre bir iç çarpım uzayı olan $H_m(S)$ nin özellikleri irdelenmeye devam edilecektir. Bu amaçla zonal harmonikler tanımlanacaktır. Bölümde asıl amaç ise zonal harmonikleri kullanarak Poisson çekirdeğinin homojen açılımını elde etmek olacaktır. Ayrıca bunun bir sonucu olarak, eğer u fonksiyonu $B(a, r)$ de harmonik ise u nun homojen açılımının tüm $B(a, r)$ de yakınsak olduğu gösterilecektir.

Tanım 5.3.1. *Sabit bir $\eta \in S$ noktası için $\Lambda_\eta : H_m(S) \to C$ fonksiyonu $\Lambda_\eta(p) = p(\eta)$ olarak tanımlansın. Bu fonksiyona η noktasında* ***point evaluation*** *fonksiyoneli denir.*

Önerme 5.3.2. ***(Riesz Temsil Teoremi)*** *[3]*
Herhangi bir H Hilbert uzayı üzerindeki her sınırlı lineer Λ fonksiyoneli, Λ ya bağlı birtek h_0 sabit vektörü için $\Lambda(h) = < h, h_0 >$ iç çarpımı ile verilebilir. Üstelik Λ lineer fonksiyonelinin normu $\|h_0\|$ dır.

$H_m(S)$ sonlu boyutlu bir iç çarpım uzayı olduğundan tamdır. O halde $H_m(S)$ Hilbert uzayı için Riesz temsil teoremi 5.3.2 gereği aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 5.3.3. *Herbir $p \in H_m(S)$ için*

$$\begin{aligned} \Lambda_\eta(p) = p(\eta) \quad &= < p, Z_m(\cdot,\eta) >_{L^2} \\ &= \int_S p(\zeta)\overline{Z_m(\zeta,\eta)}d\sigma(\zeta) \end{aligned} \tag{5.3.16}$$

olacak şekilde bir tek $Z_m(\cdot,\eta) \in H_m(S)$ fonksiyonu vardır. Burada $Z_m(\cdot,\eta)$ küresel harmonik fonksiyonuna η kutuplu m.dereceden ***zonal harmonik*** *denir.*

$n = 2$ alınırsa Z_m kolaylıkla hesaplanabilir. Açıktır ki $m = 0$ için $Z_0 \equiv 1$ dir. $m > 0$ durumunda (5.2.15) gereği $H_m(S)$, $\{e^{im\theta}, e^{-im\theta}\}$ tarafından gerilen iki boyutlu bir uzaydır. Böylece bir $\eta = e^{i\varphi} \in S$ sabiti için $Z_m(e^{i\theta}, e^{i\varphi}) = \alpha e^{im\theta} + \beta e^{-im\theta}$ olacak şekilde $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ sabitleri vardır. O halde (5.3.16) gereği herhangi bir $p(e^{i\theta}) = \gamma e^{im\theta} + \delta e^{-im\theta}$, $\gamma, \delta \in \mathbb{C}$ polinomu için

$$\begin{aligned} p(e^{i\varphi}) &= \gamma e^{im\varphi} + \delta e^{-im\varphi} \\ &= \int_0^{2\pi} p(e^{i\theta})\overline{Z_m(e^{i\theta}, e^{i\varphi})}\frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\gamma e^{im\theta} + \delta e^{-im\theta})(\bar{\alpha} e^{-im\theta} + \bar{\beta} e^{im\theta})d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \big(\gamma\bar{\alpha} + \gamma\bar{\beta} e^{i2m\theta} + \delta\bar{\alpha} e^{-i2m\theta} + \delta\bar{\beta}\big)d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}2\pi(\gamma\bar{\alpha} + \delta\bar{\beta}) = \gamma\bar{\alpha} + \delta\bar{\beta} \end{aligned}$$

dır. Bu eşitlik her $\gamma, \delta \in \mathbb{C}$ için doğru olduğundan $\alpha = e^{-im\varphi}$ ve $\beta = e^{im\varphi}$ bulunur. Buradan,

$$\begin{aligned} Z_m(e^{i\theta}, e^{i\varphi}) \quad &= e^{-im\varphi}e^{im\theta} + e^{im\varphi}e^{-im\theta} \\ &= e^{im(\theta-\varphi)} + e^{-im(\theta-\varphi)} = 2\cos m(\theta - \varphi) \end{aligned} \tag{5.3.17}$$

elde edilir.

Örnek 5.3.4. *$p(x,y) = x^2 - y^2$ olsun. O halde $p|_S(e^{i\theta}) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ dır. Bu durumda ($m = 2$ olduğundan)*

$$\begin{aligned}
p|_S(e^{i\varphi}) &= < p|_S, Z_2(\cdot, e^{i\varphi}) > \\
&= \int_0^{2\pi} p|_S(e^{i\theta})\overline{Z_2(\cdot, e^{i\varphi})}\ \frac{d\theta}{2\pi} \\
&= \int_0^{2\pi} (\cos^2\theta - \sin^2\theta)(2\cos 2(\theta-\varphi))\ \frac{d\theta}{2\pi} \\
&= \int_0^{2\pi} \cos 2\theta(2\cos 2(\theta-\varphi))\ \frac{d\theta}{2\pi} \\
&= \int_0^{2\pi} \cos(4\theta - 2\varphi)\ \frac{d\theta}{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos 2\varphi\ \frac{d\theta}{2\pi} \\
&= \int_0^{2\pi} \cos(4\theta - 2\varphi)\ \frac{d\theta}{2\pi} + \cos 2\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} (\cos 4\theta \cos 2\varphi + \sin 4\theta \sin 2\varphi)\ \frac{d\theta}{2\pi} + \cos 2\varphi \\
&= \cos 2\varphi(\cos 4\theta|_0^{2\pi}) + \sin 2\varphi(sin4\theta|_0^{2\pi}) + \cos 2\varphi \\
&= \cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi
\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi $n \geq 2$ durumuna geri dönülerek zonal harmoniklerin temel özellikleri ile ilgili bir önerme verilecektir.

Önerme 5.3.5. *$\zeta, \eta \in S$ ve $m \geq 0$ olsun. Aşağıdakidaki özellikler sağlanır:*

(i) Z_m reel değerlidir.

(ii) $Z_m(\zeta,\eta) = Z_m(\eta,\zeta)$ dir.

(iii) $\mathbb{R}^n$ de ortogonal her T dönüşümü için
$Z_m(\zeta, T(\eta)) = Z_m(T^{-1}(\zeta), \eta)$ dır.

(iv) $Z_m(\eta,\eta) = dimH_m(\mathbb{R}^n)$ dir.

(v) $|Z_m(\zeta,\eta)| \leq dimH_m(\mathbb{R}^n)$ dir.

Kanıt. **(i)** $p \in H_m(S)$ nin reel değerli olduğu varsayılsın. O halde

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{Im} p(\eta) \\ &= \mathrm{Im} \int_S p(\zeta)\overline{Z_m(\zeta,\eta)} d\sigma(\zeta) \\ &= -\int_S p(\zeta) \mathrm{Im} Z_m(\zeta,\eta) d\sigma(\zeta) \end{aligned}$$

dır. Burada p $p(\zeta) = ImZ_m(\zeta,\eta)$ olarak seçilirse,

$$\int_S (ImZ_m(\zeta,\eta))^2 d\sigma(\zeta) = 0$$

olur ki bu durum $ImZ_m \equiv 0$ olmasını gerektirir.

(ii) Önerme 5.1.11 gereği

$$dimH_m(S) = dimH_m(\mathbb{R}^n) = \binom{n+m-1}{n-1} - \binom{n+m-3}{n-1}$$

dir. $dimH_m(S) = h_m$ denilsin. Bu durumda $H_m(S)$ nin herhangi bir ortonormal tabanı $e_1, ..., e_{h_m}$ alınabilir. Bir $Z_m(\cdot,\eta)$ fonksiyonu

$$\begin{aligned} Z_m(\cdot,\eta) &= \sum_{j=1}^{h_m} < Z_m(\cdot,\eta), e_j > e_j \\ &= \sum_{j=1}^{h_m} \overline{e_j(\eta)} e_j \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Bu nedenle herhangi bir $\zeta \in S$ için

$$Z_m(\zeta,\eta) = \sum_{j=1}^{h_m} \overline{e_j(\eta)} e_j(\zeta) \tag{5.3.18}$$

dır. **(i)** gereği Z_m reel değerli olduğundan (5.3.18) ifadesinin kompleks eşleniği alındığında ifade değişmez. Yani

$$Z_m(\eta,\zeta) = \overline{Z_m(\eta,\zeta)} = \sum_{j=1}^{h_m} e_j(\zeta)\overline{e_j(\eta)}$$

dır. Bu eşitlik ve (5.3.18)'dan sonuç görülür.

(iii) 2.1.12'den herhangi bir $p \in H_m(S)$ için $p \circ T \in H_m(S)$ olduğu açıktır.

O halde $\forall p \in H_m(S)$ için

$$\begin{aligned} p(T(\eta)) &= (p \circ T)(\eta) \\ &= \int_S p(T(\zeta)) Z_m(\zeta, \eta)\ d\sigma(\zeta) \\ &= \int_S p(\zeta) Z_m(T^{-1}(\zeta), \eta)\ d\sigma(T^{-1}(\zeta)) \\ &= \int_S p(\zeta) Z_m(T^{-1}(\zeta), \eta)\ d\sigma(\zeta) \end{aligned} \tag{1}$$

dır. Diğer yandan T ortogonal olduğundan $|T(\eta)| = |\eta| = 1$ olup $T(\eta) \in S$ dir. O halde

$$p(T(\eta)) = \int_S p(\zeta) Z_m(\zeta, T(\eta)) d\sigma(\zeta) \tag{2}$$

dır. Nihayet zonal harmonik tek olacağından (1) ve (2)'den,

$$Z_m(\zeta, T(\eta)) = Z_m(T^{-1}(\zeta), \eta)$$

elde edilir.

(iv) **(iii)**'de $\zeta = T(\eta)$ alınsın. Bu durumda

$$Z_m(T(\eta), T(\eta)) = Z_m(\eta, \eta)$$

dır. O halde $\eta \to Z_m(\eta, \eta)$ fonksiyonu S de sabittir. İşte bu sabiti hesaplamak için (5.3.18)'de $\zeta = \eta$ alınırsa,

$$Z_m(\eta, \eta) = \sum_{j=1}^{h_m} |e_j(\eta)|^2$$

olur. Bu eşitlikte her iki tarafın S üzerinden integrali alınırsa,

$$Z_m(\eta, \eta) = \int_S (\sum_{j=1}^{h_m} |e_j(\eta)|^2) d\sigma(\eta) = h_m = dim H_m(\mathbb{R}^n)$$

elde edilir.

(v) Kanıt için $\|.\|_{L^2}$, $L^2(S)$ üzerindeki norm olmak üzere,

$$\|Z_m(\cdot, \eta)\|_{L^2}^2 =< Z_m(\cdot, \eta), Z_m(\cdot, \eta) >= Z_m(\eta, \eta) = dim H_m(\mathbb{R}^n)$$

eşitliği gözönüne alınsın. Bu durumda,

$$\begin{aligned} |Z_m(\zeta,\eta)| &= |< Z_m(\cdot,\zeta), Z_m(\cdot,\eta) >| \\ &\leq \|Z_m(\cdot,\zeta)\|_{L^2}\|Z_m(\cdot,\eta)\|_{L^2} \\ &= dim H_m(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Aşağıda $L^2(S) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} H_m(S)$ dekompozisyonu zonal harmonikler üzerinden yeniden ifade edilmiştir.

Teorem 5.3.6. *$f \in L^2(S)$ olduğu varsayılsın. $m \geq 0$ ve $\eta \in S$ için $p_m(\eta) =< f, Z_m(\cdot,\eta) >$ olsun. Bu durumda $p_m \in H_m(S)$ ve $L^2(S)$ de*

$$f = \sum_{m=0}^{\infty} p_m$$

dır.

Kanıt. 5.2.9 gereği $m = 0, 1, ...,$ için $q_m \in H_m(S)$ olmak üzere

$$f = \sum_{m=0}^{\infty} q_m$$

olarak yazılabilir ve toplam $L^2(S)$ de yakınsaktır. O halde

$$\begin{aligned} p_m(\eta) &=< f, Z_m(\cdot,\eta) > \\ &=< \sum_{k=0}^{\infty} q_k, Z_m(\cdot,\eta) > \end{aligned}$$

dır. Önerme 5.2.3 gereği farklı dereceden küresel harmonikler ortogonal olacaklarından eşitlik,

$$\begin{aligned} p_m(\eta) &= < \sum_{k=0}^{\infty} q_k, Z_m(\cdot,\eta) > \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} < q_k, Z_m(\cdot,\eta) > \\ &= < q_m, Z_m(\cdot,\eta) >= q_m(\eta) \end{aligned}$$

halini alır. Böylece $\forall m$ için $p_m = q_m \in H_m(S)$ ve

$$f = \sum_{m=0}^{\infty} p_m$$

elde edilir. ■

5.2.4 gereği $H_m(S)$ nin herbir elemanının $H_m(\mathbb{R}^n)$ nin bir elemanına genişlemesi olduğu biliniyor. O halde zonal harmonik fonksiyonun $H_m(\mathbb{R}^n)$ nin bir elemanına genişlemesi olacak ve bu genişleme $Z_m(\cdot,\zeta)$ notasyonu ile gösterilecektir.

Sonuç 5.3.7. *$x \in \mathbb{R}^n$ olsun. Eğer $x \neq 0$ ve $p \in H_m(\mathbb{R}^n)$ ise*

$$\begin{aligned} p(x) &= |x|^m p(x/|x|) \\ &= |x|^m \int_S p(\zeta) Z_m(x/|x|,\zeta)\ d\sigma(\zeta) \\ &= \int_S p(\zeta) Z_m(x,\zeta)\ d\sigma(\zeta) \end{aligned} \tag{5.3.19}$$

dır. Ayrıca $x = 0$ iken de bu eşitlik sağlanır. Burada her sabit $x \in \mathbb{R}^n$ için $Z_m(x,\cdot) \in H_m(S)$ dir.

Şimdi bu sonucu kullanarak herhangi bir polinomun Poisson integrali zonal harmoniklerle ifade edilecektir.

Önerme 5.3.8. *p, $\mathbb{R}^n$ de m.dereceden bir polinom olsun. Bu durumda $\forall x \in B$ için*

$$P[p|_S](x) = \sum_{k=0}^{m} \int_S p(\zeta) Z_k(x,\zeta)\ d\sigma(\zeta)$$

dır.

Kanıt. 5.1.1 gereği $P[p|_S]$ derecesi en fazla m olan bir polinomdur. O halde 5.1.5 gereği her k için $p_k \in H_k(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere,

$$P[p|_S] = \sum_{k=0}^{m} p_k \tag{1}$$

olarak yazılır. Bu durumda herbir $x \in B$ ve k için 5.3.19 gereği,

$$p_k(x) = \int_S p_k(\zeta) Z_k(x,\zeta) d\sigma(\zeta)$$

dır. 5.2.3 gereği farklı derecelerdeki harmonikler ortogonal olduklarından,

$$\begin{aligned} p_k(x) &= \int_S p_k(\zeta) Z_k(x,\zeta) d\sigma(\zeta) \\ &= \int_S \sum_{j=0}^{m} p_j(\zeta) Z_k(x,\zeta) d\sigma(\zeta) \\ &= \int_S p(\zeta) Z_k(x,\zeta) d\sigma(\zeta) \end{aligned} \tag{2}$$

elde edilir. (1) ve (2)'den,

$$P[p|_S](x) = \sum_{k=0}^{m} p_k = \sum_{k=0}^{m} \int_S p(\zeta) Z_k(x,\zeta) d\sigma(\zeta)$$

sonucuna ulaşılır. ■

Artık bu bölümün asıl sonucu olan Poisson çekirdeğinin zonal harmonik açılımı verilebilir.

Teorem 5.3.9. *$n \geq 2$ olmak üzere her $x \in B$, $\zeta \in S$ için*

$$P(x,\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} Z_m(x,\zeta)$$

dır. Yukarıdaki seri her kompakt $K \subset B$ için $K \times S$ de düzgün ve mutlak yakınsaktır.

Kanıt. Öncelikle serinin iddia edilen yakınsama özelliğini gösterelim. 5.3.5 **(e)** gereği $m \geq 0$ için

$$\begin{aligned} |Z_m(x/|x|,\zeta)| &\leq dim H_m(\mathbb{R}^n) \\ \tfrac{1}{|x|^m}|Z_m(x,\zeta)| &\leq dim H_m(\mathbb{R}^n) \end{aligned} \qquad (1)$$

dir. Diğer yandan (5.1.14) gereği,

$$\begin{aligned} dim H_m(\mathbb{R}^n) &= \tfrac{2}{(n-2)!} m^{n-2} \\ &\sim C m^{n-2} \ (Csbt) \end{aligned} \qquad (2)$$

dir. O halde (1) ve (2)'den $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\zeta \in S$ için

$$|Z_m(x,\zeta)| \leq C m^{n-2} |x|^m$$

elde edilir. $x \in K$ için $|x| \leq \alpha < 1$ dir. O halde $\sum_{m=0}^{\infty} Z_m(x,\zeta)$ serisi için Weierstrass M-testi uygulanırsa $\forall (x,\zeta) \in K \times S$ için

$$|Z_m(x,\zeta)| \leq C m^{n-2} \alpha^m$$

olduğundan $\sum_{m=0}^{\infty} m^{n-2}\alpha^m < \infty$ olduğunun gösterilmesi $\sum_{m=0}^{\infty} Z_m(x,\zeta)$ serisinin $K \times S$ de mutlak ve düzgün yakınsak olması için yeterli olacaktır. Gerçekten de $\sum_{m=0}^{\infty} m^{n-2}\alpha^m$ serisine oran testi uygulandığında,

$$\lim_{m\to\infty}\frac{(m+1)^{n-2}\alpha^{m+1}}{m^{n-2}\alpha^m}=\alpha<1$$

olacağından seri yakınsaktır.

$x \in B$ sabit alınsın. p herhangi bir polinom olsun. Önerme 5.2.3 ve 5.3.8'den,

$$\begin{aligned}P[p|_S](x)=\int_S p|_S(\zeta)P(x,\zeta)\;d\sigma(\zeta)\;&=\int_S p|_S(\zeta)\sum_{k=0}^{m}Z_k(x,\zeta)\;d\sigma(\zeta)\\&=\int_S p|_S(\zeta)\sum_{m=0}^{\infty}Z_m(x,\zeta)\;d\sigma(\zeta)\end{aligned}$$

olduğu görülür. Buradan,

$$\int_S p|_S(\zeta)[P(x,\zeta)-\sum_{m=0}^{\infty}Z_m(x,\zeta)]\;d\sigma(\zeta)=0$$

elde edilir. $Q_x(\zeta)=P(x,\zeta)-\sum_{m=0}^{\infty}Z_m(x,\zeta)$ alınsın. $P(x,\zeta)$ ve $\sum_{m=0}^{\infty}Z_m(x,\zeta)\in C(S)\subset L^2(S)$ olduğundan $Q_x\in L^2(S)$ dir.

Stone Weierstrass teoremi gereği S ye kısıtlanmış polinomlar $C(S)$ de yoğundur. Diğer yandan $C(S)$, $L^2(S)$ de yoğun olduğundan, S'ye kısıtlanmış polinomlar kümesi $L^2(S)$ de yoğundur. O halde $\varepsilon>0$ olmak üzere $Q_x\in L^2(S)$ için öyle bir q polinomu vardır ki

$$\|Q_x-q|_S\|_{L^2}<\varepsilon$$

dur. Buradan,

$$\begin{aligned}\|Q_x\|_{L^2}^2\;&=<Q_x-q|_S,Q_x>_{L^2}\\&\le\|Q_x-q|_S\|_{L^2}\|Q_x\|_{L^2}\end{aligned}$$

olup,

$$\|Q_x\|_{L^2}\le\|Q_x-q|_S\|_{L^2}<\varepsilon$$

bulunur. O halde $L^2(S)$ de $Q_x\equiv 0$ dır. Yani Q_x, $L^2(S)$ de hemen hemen her yerde 0 dır. Üstelik Q_x sürekli olduğundan heryerde $Q_x\equiv 0$ olur ki

$$P(x,\zeta)=\sum_{m=0}^{\infty}Z_m(x,\zeta)$$

demektir. ∎

Örnek 5.3.10. *$n = 2$ için Poisson çekirdeğinin zonal harmonik açılımı bilinen bir formda ifade edilebilir. B_2 için Poisson çekirdeği $\forall r \in [0,1)$ ve $\forall \theta, \varphi \in [0, 2\pi]$ için*

$$
\begin{aligned}
P(x,\zeta) = P(re^{i\theta}, e^{i\varphi}) &= Re(\frac{e^{i\varphi} + re^{i\theta}}{e^{i\varphi} - re^{i\theta}}) \\
&= \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}
\end{aligned}
$$

formundadır. Diğer yandan,

$$
\begin{aligned}
\frac{\zeta + x}{\zeta - x} &= 1 + \frac{2x}{\zeta}(\frac{1}{1-\frac{x}{\zeta}}) \\
&= 1 + \frac{2x}{\zeta}\sum_{m=0}^{\infty}(\frac{x}{\zeta})^m \\
&= 1 + 2\sum_{m=1}^{\infty}(\frac{x}{\zeta})^m \\
&= 1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} r^m e^{im(\theta-\varphi)}
\end{aligned}
$$

elde edilir. O halde,

$$
\begin{aligned}
P(re^{i\theta}, e^{i\varphi}) = Re(\frac{\zeta + x}{\zeta - x}) &= 1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} r^m Re(e^{im(\theta-\varphi)}) \\
&= 1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} r^m \cos m(\theta-\varphi) \\
&= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} r^m 2\cos m(\theta-\varphi)
\end{aligned}
$$

olarak ifade edilebilir. Bu da 5.3.9 gereği

$$P(re^{i\theta}, e^{i\varphi}) = \sum_{m=0}^{\infty} Z_m(re^{i\theta}, e^{i\varphi})$$

gösteriminden başka birşey değildir.

Daha önce 2.7.15'da bir harmonik fonksiyonun herhangi bir noktasının civarında bir homojen açılımının olduğu söylenmişti. Şimdi 5.3.9 kullanılarak bu açılımın herhangi bir yuvar üzerinde ve daha güçlü yakınsaklık özellikleri ile verilebileceği gösterilecektir.

Sonuç 5.3.11. *u, $B(a,r)$ de harmonik bir fonksiyon olsun. Bu durumda öyle $p_m \in H_m(\mathbb{R}^n)$ ler vardır ki $\forall x \in B(a,r)$ için*

$$u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m(x-a)$$

olur. Üstelik yukarıdaki seri, $B(a,r)$ nin kompakt altkümelerinde mutlak ve düzgün yakınsaktır.

Kanıt. Öncelikle u fonksiyonunun $\bar{B}$ de harmonik olduğu varsayılsın. 5.3.9 gereği herhangi bir $x \in B$ için

$$u(x) = \int_S u(\zeta)P(x,\zeta)d\sigma(\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} \int_S u(\zeta)Z_m(x,\zeta)d\sigma(\zeta)$$

dır. Eğer $x \in \mathbb{R}^n$ için $p_m(x) = \int_S u(\zeta)Z_m(x,\zeta)d\sigma(\zeta)$ alınırsa $p_m \in H_m(\mathbb{R}^n)$ ve $u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m(x)$ olur. Bu durumda teorem 5.3.9'de olduğu gibi $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için

$$|p_m(x)| \leq Cm^{n-2}|x|^m \int_S |u|d\sigma$$

olur. Bu nedenle $\sum p_m$ serileri B nin kompakt altkümelerinde düzgün ve mutlak yakınsaktır.

Şimdi u, $B(a,r)$ de harmonik olsun. Öteleme ve genişletme işleminden sonra önceki tartışmadan görülür ki u herbir $B(a,s)$, $0 < s < r$ için istenilen açılıma sahiptir. 2.7.12 gereği homojen açılımın tekliğinden tüm bu açılımlar eşit olur. O halde u, $B(a,r)$ de istenilen açılıma sahiptir. ∎

6. HARMONİK BERGMAN UZAYLARI

Bu bölümde aksi belirtilmedikçe p sayısı, $1 \leq p < \infty$ olarak alınacaktır.

Tanım 6.0.1. *Ω üzerinde*

$$\|u\|_{b^p} = \left(\int_\Omega |u|^p \, dV \right)^{1/p} < \infty$$

şartını sağlayan tüm u harmonik fonksiyonlarının uzayına ***harmonik Bergman uzayı*** *denir ve $b^p(\Omega)$ ile gösterilir.*

Açıktır ki $b^p(\Omega)$ uzayı,

$$L^p(\Omega, dV) = \{f : f \text{ ölçülebilirdir ve } (\int_\Omega |f|^p \, dV)^{1/p} < \infty\}$$

uzayının lineer bir altuzayıdır.

Sabit bir $x \in \Omega$ için $b^p(\Omega)$ da $\Lambda_x(u) = u(x)$ olarak tanımlı Λ_x lineer fonksiyoneline x noktasındaki **point evaluation** fonksiyoneli denir. Aşağıda point evaluation fonksiyonelinin $b^p(\Omega)$ da sürekli (sınırlı) olduğu gösterilmiştir.

Önerme 6.0.2. *$x \in \Omega$ olsun. Bu durumda $\forall u \in b^p(\Omega)$ için*

$$|u(x)| \leq \frac{1}{V(B)^{1/p} d(x, \partial\Omega)^{n/p}} \|u\|_{b^p}$$

dir.

Kanıt. $r < d(x, \partial\Omega)$ olacak şekilde bir r pozitif tamsayısı alınsın. u fonksiyonu $B(x, r)$ de harmonik olduğundan 2.2.8 gereği,

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{V(B(x,r))} \int_{B(x,r)} u \, dV \\ |u(x)| &\leq \frac{1}{V(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |u| \, dV \end{aligned}$$

dir. Hölder eşitsizliği [6] gereği $1/p + 1/q = 1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq \Big(\frac{1}{V(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |u|^p \, dV\Big)^{1/p} \Big(\frac{1}{V(B(x,r))} \int_{B(x,r)} 1^q \, dV\Big)^{1/q} \\ &= \frac{1}{r^{n/p} V(B)^{1/p}} \|u\|_{b^p} \end{aligned}$$

dir. O halde $r \to d(x, \partial\Omega)$ için

$$|u(x)| \leq \frac{1}{V(B)^{1/p} d(x, \partial\Omega)^{n/p}} \|u\|_{b^p}$$

elde edilir. ∎

Aşağıdaki sonuçta b^p uzayındaki fonksiyonların her mertebeden kısmi türevleri için de point evaluation fonksiyonelinin sürekli olduğu gösterilmiştir.

Sonuç 6.0.3. *$\forall \alpha$ çoklu indeksi, $\forall x \in \Omega$ ve $\forall u \in b^p(\Omega)$ için*

$$|D^\alpha u(x)| \leq \frac{C_\alpha}{d(x, \partial\Omega)^{|\alpha| + n/p}} \|u\|_{b^p}$$

olacak şekilde bir C_α sabiti vardır.

Kanıt. Herhangi bir $x \in \Omega$ noktası alınsın. $r = d(x, \partial\Omega)/2$ olmak üzere 6.0.2 gereği $\forall y \in B(x, r)$ ve $\forall u \in b^p(\Omega)$ için

$$|u(y)| \leq \frac{\|u\|_{b^p}}{V(B)^{1/p} r^{n/p}} =: M$$

dir. Dolayısıyla u, $B(x, r)$ de M ile sınırlı harmonik bir fonksiyon olur. O halde Cauchy özelliği 3.3.2 gereği $\forall \alpha$ çoklu indeksi için

$$|D^\alpha u(x)| \leq \frac{K_\alpha M}{r^{|\alpha|}}$$

olacak şekilde bir K_α sabiti vardır. Burada M yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} |D^\alpha u(x)| &\leq \frac{K_\alpha}{V(B)^{1/p} r^{|\alpha| + n/p}} \|u\|_{b^p} \\ &= \frac{K_\alpha 2^{|\alpha| + n/p}}{V(B)^{1/p} d(x, \partial\Omega)^{|\alpha| + n/p}} \|u\|_{b^p} \\ &= \frac{C_\alpha}{d(x, \partial\Omega)^{|\alpha| + n/p}} \|u\|_{b^p} \end{aligned}$$

elde edilir. ∎

Bilindiği üzere $L^p(\Omega, dV)$ uzayı $\|.\|_{L^p} = (\int_\Omega |f|^p dV)^{1/p}$ normu ile bir Banach uzayıdır [6]. Aşağıdaki önerme harmonik Bergman uzayı $b^p(\Omega)$ nın da bir Banach uzayı olduğunu kanıtlar.

Önerme 6.0.4. *Bergman uzayı $b^p(\Omega)$, $L^p(\Omega, dV)$ nin kapalı bir altuzayıdır.*

Kanıt. (u_j), $b^p(\Omega)$ da bir dizi ve $u \in L^p(\Omega, dV)$ olmak üzere $L^p(\Omega, dV)$ de $u_j \to u$ olsun. O halde kanıt için u fonksiyonunun Ω da harmonik olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

$K \subset \Omega$ kompakt kümesi alınsın. Bu durumda 6.0.2 gereği, $\forall x \in K$ ve $\forall j, k$ için

$$|u_j(x) - u_k(x)| \leq C\|u_j - u_k\|_{b^p} \tag{1}$$

olacak şekilde bir $C < \infty$ sabiti vardır. (u_j), $b^p(\Omega)$ da bir Cauchy dizisi olduğundan (1) gereği $C(K)$ da bir düzgün Cauchy dizisi olur. O halde $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists N(\varepsilon)$ sayısı vardır öyle ki $\forall j, k > N(\varepsilon)$ ve $\forall x \in K$ için

$$\|u_j - u_k\|_{L^\infty} = maks\{|u_j(x) - u_k(x)| : x \in K\} < \varepsilon/2 \tag{2}$$

dir. Diğer yandan (u_j) düzgün Cauchy dizisi olduğundan her bir $x_0 \in K$ için $(u_j(x_0))$ bir Cauchy dizisidir. Böylelikle (u_j) dizisi bir v fonksiyonuna noktasal olarak yakınsar. Şimdi bu yakınsaklığın düzgün olduğu gösterilecektir. (2)'den j sabit ve k değişirken,

$$|u_j(x) - v(x)| = \lim_{k\to\infty} |u_j(x) - u_k(x)| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon \tag{3}$$

elde edilir. (3) eşitsizliği $\forall x \in K$ ve $\forall j > N(\varepsilon)$ için geçerli olduğundan K da (u_j) dizisi v ye düzgün yakınsar.

Bu sonuçla, (u_j) , Ω nın kompakt alt kümelerinde v fonksiyonuna düzgün yakınsar. Dolayısıyla 2.5.7 gereği v, Ω da harmoniktir.

(u_j) dizisi $L^p(\Omega, dV)$ da u ya yakınsadığından Ω da hemen hemen heryerde u fonksiyonuna noktasal olarak yakınsayan bir alt dizisi vardır [6]. Bu durum ise Ω da hemen hemen heryerde $u \equiv v$ olmasını gerektirir. Bu da istenilen $u \in b^p(\Omega)$ sonucunu verir. ■

6.1. Doğuran Çekirdekler ve Bergman İzdüşümü

$p = 2$ alındığında $b^2(\Omega)$ uzayı, $\forall f, g \in L^2(\Omega, dV)$ için

$$< f, g >_{L^2} = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}dV(x)$$

iç çarpımı ile $L^2(\Omega, dV)$ Hilbert uzayının [8] lineer bir altuzayıdır. Üstelik önerme 6.0.4 gereği $b^2(\Omega)$, $L^2(\Omega, dV)$ nın kapalı bir altuzayıdır. Böylelikle $b^2(\Omega)$ bir Hilbert uzayıdır.

Önerme 6.0.2 gereği herbir $x \in \Omega$ için $\Lambda_x : b^2(\Omega) \to \mathbb{C}$ point evaluation fonksiyonu sınırlıdır. Diğer yandan $b^2(\Omega)$ bir Hilbert uzayı olduğundan Riesz temsil teoremi gereği aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 6.1.1. *$\forall x \in \Omega$ ve $\forall u \in b^2(\Omega)$ için*

$$\begin{aligned} \Lambda_x(u) = u(x) &= < u, R_\Omega(x, \cdot) > \\ &= \int_\Omega u(y)\overline{R_\Omega(x, y)}\, dV(y) \end{aligned}$$

*olacak şekilde birtek $R_\Omega(x, \cdot) \in b^2(\Omega)$ fonksiyonu vardır. $R_\Omega(x, \cdot)$ fonksiyonuna x noktasındaki **doğuran çekirdek** denir. R_Ω fonksiyonuna ise Ω nın **doğuran çekirdeği (Bergman doğuran çekirdeği)** denir. Burada R_Ω fonksiyonu $\Omega \times \Omega$ üzerinde bir fonksiyon olarak da düşünülebilir.*

R_Ω nın temel özelliklerinin verileceği aşağıdaki önerme, zonal harmoniklerin özellikleri ile benzerlik taşımaktadır.

Önerme 6.1.2. *Ω nın doğuran çekirdeği R_Ω aşağıdaki özelliklere sahiptir:*

(i) R_Ω reel değerlidir.

(ii) (u_m), $b^2(\Omega)$ nın ortonormal bir tabanı olsun. Bu durumda $\forall x, y \in \Omega$ için $R_\Omega(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \overline{u_m(x)} u_m(y)$ dir.

(iii) $\forall x, y \in \Omega$ için $R_\Omega(x, y) = R_\Omega(y, x)$ dir.

(iv) $\forall x \in \Omega$ için $\|R_\Omega(x, \cdot)\|_{b^2} = \sqrt{R_\Omega(x, x)}$ dir.

Kanıt. **(i)** $x \in \Omega$ ve herhangi reel değerli bir $u \in b^2(\Omega)$ için

$$\begin{aligned} 0 &= Imu(x) \\ &= Im \int_\Omega u(y)\overline{R_\Omega(x,y)}\, dV(y) \\ &= -\int_\Omega u(y) Im R_\Omega(x,y)\, dV(y) \end{aligned}$$

olur. $u = ImR_\Omega(x,\cdot)$ alınırsa,

$$\int_\Omega (ImR_\Omega(x,y))^2\, dV(y) = 0$$

elde edilir. Bu da $ImR_\Omega \equiv 0$ demektir.

(ii) $L^2(\Omega, dV)$ ayrılabilir bir uzaydır [8]. O halde $b^2(\Omega)$, $L^2(\Omega, dV)$ nin bir alt kümesi olduğundan ayrılabilirdir. Diğer yandan ayrılabilir Hilbert uzayları sayılabilir ortonormal bir diziye (tabana) sahiptir. O halde $b^2(\Omega)$ nın bir ortonormal tabanı olacak sekilde bir (u_m) dizisi vardır. Böylece $\forall x \in \Omega$ için

$$\begin{aligned} R_\Omega(x,\cdot) &= \sum_{m=1}^{\infty} < R_\Omega(x,\cdot), u_m > u_m \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \overline{u_m(x)} u_m \end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir. Yani, sağdaki seri $b^2(\Omega)$ normunda $R_\Omega(x,\cdot)$ a yakınsar. $\forall y \in \Omega$ için Λ_y sürekli lineer fonksiyonel olduğundan,

$$\begin{aligned} \Lambda_y(R_\Omega(x,\cdot)) &= \sum_{m=1}^{\infty} \overline{u_m(x)} \Lambda_y(u_m) \\ R_\Omega(x,y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \overline{u_m(x)} u_m(y) \end{aligned}$$

elde edilir. Yani, herhangi $x, y \in \Omega$ için sağdaki seri $R_\Omega(x,y)$ ye noktasal olarak yakınsar. Bu da (ii) sonucunun sağlanması anlamına gelir.

(iii) Bir önceki sonuçtan $\overline{R_\Omega(x,y)} = R_\Omega(y,x)$ olduğu açıktır. (i)'den ise $\forall x, y \in \Omega$ için $\overline{R_\Omega(x,y)} = R_\Omega(x,y)$ dir. Bu iki durumdan $R_\Omega(x,y) = R_\Omega(y,x)$ elde edilir.

(iv) Bir $x \in \Omega$ noktası alınsın. Doğuran çekirdeğin özelliğinden,

$$\|R_\Omega(x,\cdot)\|_{b^2}^2 = < R_\Omega(x,\cdot), R_\Omega(x,\cdot) > = R_\Omega(x,x)$$

elde edilir. Her iki tarafın karekökü alındığında istenilen sonuca ulaşılır. ■

Kompleks bir H Hilbert uzayı ile H nin kapalı lineer bir M altuzayı arasında değer kümesi M ve çekirdeği $M^\perp$ olan bir tek ortogonal izdüşüm vardır [7]. Buradan hareketle aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 6.1.3. *$L^2(\Omega, dV)$ Hilbert uzayından $b^2(\Omega)$ kapalı altuzayına bir tek ortogonal izdüşüm vardır. Bu self-adjoint izdüşüme Ω da* ***Bergman izdüşümü*** *denir ve Q_Ω ile gösterilir.*

Aşağıdaki önerme, doğuran çekirdek (Bergman çekirdeği) ile Bergman izdüşümü arasındaki bağlantıyı ortaya koyması bakımından önemlidir.

Önerme 6.1.4. *$x \in \Omega$ olsun. Bu durumda $\forall f \in L^2(\Omega, dV)$ için*

$$Q_\Omega[f](x) = \int_\Omega f(y) R_\Omega(x,y)\ dV(y)$$

dır.

Kanıt. $x \in \Omega$ ve $f \in L^2(\Omega, dV)$ olsun. Bu durumda $R_\Omega(x,\cdot)$ nın özelliğinden,

$$Q_\Omega[f](x) = < Q_\Omega[f], R_\Omega(x,\cdot) >$$

dır. Burada Q_Ω nın self-adjoint olması kullanılırsa $R_\Omega(x,\cdot) \in b^2(\Omega)$ olduğundan,

$$\begin{aligned} Q_\Omega[f](x) &= < Q_\Omega[f], R_\Omega(x,\cdot) > \\ &= < f, Q_\Omega(R_\Omega(x,\cdot)) > \\ &= < f, R_\Omega(x,\cdot) > \\ &= \int_\Omega f(y) R_\Omega(x,y)\ dV(y) \end{aligned}$$

elde edilir. ■

6.2. Yuvar için Bergman Çekirdeği

Bu bölümde birim yuvarın Bergman çekirdeği R_B için açık bir formül elde edilecektir. Bu amaçla 5.bölümde değinilen zonal ve küresel harmonikler-den yararlanılacaktır. O halde tartışmaya bu yönde bir sonuçla başlamak uygun olacaktır.

Sonuç 6.2.1. *Sonuç* 5.3.7 *gereği ,* $p \in H_m(\mathbb{R}^n)$ *ise* $\forall x \in \mathbb{R}^n$ *için*

$$p(x) = \int_S p(\zeta) Z_m(x, \zeta)\, d\sigma(\zeta) \tag{6.2.20}$$

dır. Yani zonal harmonikler $H_m(\mathbb{R}^n)$ *için doğuran çekirdeklerdir.*

Polar koordinatlar kullanılarak, (6.2.20) eşitsizliği S yerine B üzerinden verilebilir.

Önerme 6.2.2. *Her* $p \in H_m(\mathbb{R}^n)$ *ve* $\forall x \in \mathbb{R}^n$ *için*

$$p(x) = \frac{n+2m}{nV(B)} \int_B p(y) Z_m(x, y)\, dV(y)$$

dir.

Kanıt. Öncelikle Z_m, her iki değişkene göre homojen yapılarak $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ üzerine genişletilecektir. Bu genişleme,

$$Z_m(x, y) = |x|^m |y|^m Z_m(x/|x|, y/|y|)$$

($m > 0$ iken x veya y sıfır ise $Z_m(x, y) = 0$ ve $m = 0$ iken $Z_0 \equiv 1$) olarak tanımlanır. Bu tanımdan $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için $Z_m(x, \cdot) \in H_m(\mathbb{R}^n)$ dir. Ayrıca $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ için $Z_m(x, y) = Z_m(y, x)$ dir.

Şimdi $\mathbb{R}^n$ üzerindeki integral için polar koordinat formülünden, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\begin{aligned}
\int_B p(y) Z_m(x,y)\, dV(y) &= nV(B)\int_0^1 r^{n-1}\int_S p(r\zeta) Z_m(x, r\zeta)\, d\sigma(\zeta) dr \\
&= nV(B)\int_0^1 r^{n+2m-1}\int_S p(\zeta) Z_m(x, \zeta)\, d\sigma(\zeta) dr \\
&= nV(B) p(x)\int_0^1 r^{n+2m-1} dr \\
&= \frac{nV(B)}{n+2m} p(x)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan açık olarak

$$p(x) = \frac{n+2m}{nV(B)}\int_B p(y) Z_m(x,y)\, dV(y)$$

dir. ■

Sonuç 6.2.3. *$b^2(B)$ de $k \neq m$ iken $H_k(\mathbb{R}^n)$ ile $H_m(\mathbb{R}^n)$ ortogonaldir.*

Kanıt. $k \neq m$ olmak üzere $p \in H_m(\mathbb{R}^n)$ ve $q \in H_k(\mathbb{R}^n)$ olsun. 5.2.3 gereği,

$$\begin{aligned}
< p, q >_{b^2} = \int_B p\overline{q} dV &= \int_0^1 r^{n-1}\int_S p(r\zeta)\overline{q(r\zeta)}\, d\sigma(\zeta) dr \\
&= \int_0^1 r^{n+2m-1}\int_S p(\zeta)\overline{q(\zeta)}\, d\sigma(\zeta) dr \\
&= \int_0^1 r^{n+2m-1} < p, q >_{L^2}\ dr = 0
\end{aligned}$$

dır. ■

Sonuç 6.2.4. *p, M.dereceden harmonik polinom olsun. Bu durumda $\forall m$ için $p_m \in H_m(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere $p = \sum_{m=0}^{M} p_m$ olarak yazılabilir. Böylece 6.2.2 ve 6.2.3 gereği $x \in \mathbb{R}^n$ için*

$$\begin{aligned}
p(x) = \sum_{m=0}^{M} p_m(x) &= \sum_{m=0}^{M} < p_m, \frac{n+2m}{nV(B)} Z_m(x, .) >_{b^2} \\
&= < \sum_{m=0}^{M} p_m, \sum_{m=0}^{M} \frac{n+2m}{nV(B)} Z_m(x, .) >_{b^2} \\
&= < p, \sum_{m=0}^{M} \frac{n+2m}{nV(B)} Z_m(x, .) >_{b^2}
\end{aligned}$$

olur.

6.2.3 gereği son toplamda $M = \infty$ almak eşitliği değiştirmeyeceğinden M.dereceden herhangi bir p polinomu için

$$p(x) =< p, \sum_{m=0}^{\infty} \frac{n+2m}{nV(B)} Z_m(x,.) >_{b^2} \tag{6.2.21}$$

elde edilir. Bu eşitlik B nin doğuran çekirdeği R_B nin sağdaki seri ile ifade edilebileceğini işaret etmektedir. Şimdi bunun gerçekten de böyle olduğunu bir teorem olarak ispat edelim. Ancak öncesinde teoremin ispatında kullanılacak bir önerme verelim.

Önerme 6.2.5. *Harmonik polinomlar kümesi $b^2(B)$ de yoğundur.*

Kanıt. Öncelikle $u \in L^2(B, dV)$ için, $r \to 1$ iken $\|u_r - u\|_{L^2} \to 0$ olduğunu gösterelim. $v \in C(\bar{B})$ olsun. Heine-Cantor teoremi [5] gereği kompakt kümede sürekli bir fonksiyon düzgün süreklidir. Böylece $\varepsilon_1 > 0$ için $\exists \delta > 0$ vardır öyle ki $\forall y, z \in \bar{B}$ ve $|y - z| < \delta$ ise $|v(y) - v(z)| < \varepsilon_1 / \sqrt{V(B)}$ olur. Bu durumda $\forall y \in B$ ve $r > 1 - \delta$ için $|y - ry| = |y|(1 - r) < \delta$ olacağından,

$$|v_r(y) - v(y)| = |v(ry) - v(y)| < \varepsilon_1 / \sqrt{V(B)}$$

olur. O halde $v \in C(\bar{B})$ için

$$\begin{aligned} \|v_r - v\|_{L^2(B)} &= \sqrt{\int_B |v_r(y) - v(y)|^2 \, dV(y)} \\ &< \tfrac{\varepsilon_1}{\sqrt{V(B)}} \sqrt{V(B)} = \varepsilon_1 \end{aligned} \tag{1}$$

dir.

Diğer yandan $C(\bar{B})$, $L^2(B, dV)$ de yoğundur [6]. Bu nedenle $\varepsilon_2 > 0$ alındığında $u \in L^2(B, dV)$ için $\exists v \in C(\bar{B})$ fonksiyonu

$$\|u - v\|_{L^2} < \varepsilon_2 \tag{2}$$

olacak şekilde vardır.

Artık $u \in L^2(B, dV)$ için $r \to 1$ iken $L^2(B, dV)$ de $u_r \to u$ olduğu gösterilebilir. (1) ve (2)'den $r < 1$ için

$$\begin{aligned} \|u_r - u\|_{L^2} &\leq \|u_r - v_r\|_{L^2} + \|v_r - v\|_{L^2} + \|v - u\|_{L^2} \\ &\leq \|u_r - v_r\|_{L^2(B)} + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \end{aligned}$$

dir. Burada

$$\|u_r - v_r\|^2_{L^2(B)} = \int_B |u_r(y) - v_r(y)|^2 \, dV(y) = \int_B |u(ry) - v(ry)|^2 \, dV(y)$$

olup $ry = z$ değişken değişimi yapılırsa,

$$\begin{aligned} \|u_r - v_r\|^2_{L^2(B)} &= \int_{rB} |u(z) - v(z)|^2 \, \frac{dV(z)}{r^n} \\ &\leq \frac{1}{r^n} \int_B |u(z) - v(z)|^2 \, dV(z) \\ &= \frac{1}{r^n} \|u - v\|^2_{L^2(B)} < \frac{1}{r^n} \varepsilon_2^2 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan, eğer r, 1 e yeterince yakınsa $\|u_r - v_r\|_{L^2(B)} < 2\varepsilon_2$ eşitsizliği elde edilir. O halde $3\varepsilon_1 + \varepsilon_2 < \varepsilon$ olmak üzere $\varepsilon > 0$ için

$$\|u_r - u\|_{L^2(B)} \leq 3\varepsilon_1 + \varepsilon_2 < \varepsilon \tag{3}$$

olur. Yani $r \to 1$ iken $\|u_r - u\|_{L^2(B)} \to 0$ elde edilir.

Şimdi herhangi $\varepsilon > 0$ ve $u \in b^2(B)$ için $\|u - p\| < \varepsilon$ olacak şekilde harmonik bir p polinomunun var olduğu gösterilerek ispat sonlandırılacaktır.

$\varepsilon > 0$ olsun (3) gereği $r_0 < 1$ olmak üzere $\exists r_0$ vardır öyle ki

$$\|u_{r_0} - u\|_{b^2} < \varepsilon$$

dur. Ayrıca u_{r_0}, B_{1/r_0} da harmoniktir. O halde $\bar{B} \subseteq B_{1/r_0}$ olacağından 5.3.11 gereği $\forall y \in \bar{B}$ ve $p_m \in H_m(\mathbb{R}^n)$ için

$$u_{r_0}(y) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m(y)$$

olup seri $\bar{B}$ de düzgün yakınsaktır. Dolayısıyla öyle bir M vardır ki

$$\|u_{r_0} - \sum_{m=0}^{M} p_m\|_{L^\infty} < \varepsilon$$

dır. Şimdi $\sum_{m=0}^{M} p_m = p$ harmonik polinom olmak üzere,

$$\|u_{r_0} - p\|_{L^2} = (\int_B |u_{r_0} - p|^2 \, dV)^{1/2} < (\int_B \varepsilon^2 \, dV)^{1/2} = \varepsilon\sqrt{V(B)}$$

dir. Sonuç olarak $u \in b^2(B)$ için

$$\|u - p\|_{L^2} \leq \|u - u_{r_0}\|_{L^2} + \|u_{r_0} - p\|_{L^2} \leq \varepsilon + \varepsilon\sqrt{V(B)}$$

elde edilir. Böylece harmonik polinomlar kümesi $b^2(B)$ de yoğun olur. ■

Artık esas teoreme geçilebilir.

Teorem 6.2.6. *$x, y \in B$ olmak üzere,*

$$R_B(x,y) = \frac{1}{nV(B)} \sum_{m=0}^{\infty} (n+2m) Z_m(x,y)$$

dir. Burada seriler $\forall K \subset B$ kompakt altkümesi için $K \times B$ de düzgün ve mutlak yakınsaktır.

Kanıt. Öncelikle iddia edilen yakınsaklık özelliğinin sağlandığı gösterilsin. (5.1.14) ve 5.3.5'in (v).maddesi gereği $x, y \in B \backslash \{0\}$ için

$$\begin{aligned} |Z_m(x,y)| &= |x|^m |y|^m Z_m(x/|x|, y/|y|)| \\ &\leq |x|^m |y|^m dim H_m(\mathbb{R}^n) \\ &= |x|^m |y|^m C m^{n-2} \ (Csbt) \end{aligned}$$

olduğu görülür. Burada her $x \in K \subset B$ için $|x| < \alpha < 1$ olacak şekilde bir α sayısı vardır. Şimdi $\sum_{m=0}^{\infty} (n+2m) Z_m(x,y)$ serisi için Weierstrass M-testi uygulansın. $\forall (x,y) \in K \times B$ için

$$(n+2m)|Z_m(x,y)| \leq (n+2m) C \alpha^m m^{n-2}$$

dir. Gerçekten $\sum_{m=0}^{\infty} (n+2m) \alpha^m m^{n-2}$ serisine oran testi uygulandığında,

$$\lim_{m \to \infty} \frac{(n+2m+2)\alpha^{m+1}(m+1)^{n-2}}{(n+2m)\alpha^m m^{n-2}} = \alpha < 1$$

olup seri yakınsak olur. Böylece $\sum_{m=0}^{\infty} (n+2m) Z_m(x,y)$ serisi $K \times B$ de mutlak ve düzgün yakınsaktır.

Şimdi $F(x,y) = \frac{1}{nV(B)} \sum_{m=0}^{\infty} (n+2m) Z_m(x,y)$ alınsın. Bu durumda herbir $x \in B$ için $F(x, \cdot)$, B de sınırlı harmonik bir fonksiyondur. Dolayısıyla, $\forall x \in B$ için $F(x, \cdot) \in b^2(B)$ dir.

Bir $x \in B$ noktası sabitlensin. 6.2.4 gereği p bir harmonik polinom iken $p(x) =< p, F(x, \cdot) >$ olur. Önerme 6.2.5 gereği harmonik polinomlar $b^2(B)$ de yoğun olduğundan bir $u \in b^2(B)$ için $b^2(B)$ de $p_k \to u$ olacak şekilde bir (p_k) harmonik polinomlar dizisi vardır. O halde $b^2(B)$ Hilbert uzayı ve point evaluation sürekli olduğundan, $\forall u \in b^2(B)$ için

$$\begin{aligned} \Lambda_x(u) = u(x) &= \lim_{k \to \infty} p_k(x) \\ &= \lim_{k \to \infty} < p_k, F(x, \cdot) > \\ &= < u, F(x, \cdot) > \end{aligned}$$

dir. Riesz temsil teoremi gereği $\forall u \in b^2(B)$ için $\Lambda_x(u) =< u, v >$ olacak şekilde bir tek $v \in b^2(B)$ olacağından $R_B(x, \cdot) = F(x, \cdot)$ dır. Böylece $R_B \equiv F$ olur. ■

6.2.6'daki sonsuz toplam hesaplanarak R_B için açık bir formül elde edilir.

Teorem 6.2.7. *$x, y \in B$ olmak üzere,*

$$R_B(x,y) = \frac{(n-4)|x|^4|y|^4 + (8xy - 2n - 4)|x|^2|y|^2 + n}{nV(B)(1 - 2xy + |x|^2|y|^2)^{1+n/2}}$$

dir.

Kanıt. 2.4.6'da genişletilmiş Poisson çekirdeği, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ için

$$P(x,y) = \frac{1 - |x|^2|y|^2}{(1 - 2xy + |x|^2|y|^2)^{n/2}} \tag{6.2.22}$$

olarak tanımlanmıştı. Diğer yandan 5.3.9'den $\forall x \in B$ ve $\zeta \in S$ için

$$P(x,\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} Z_m(x,\zeta)$$

olmak üzere Poisson çekirdeğinin bir zonal harmonik açılımı vardır. Buradan $x, y \in B$ için

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{\infty} Z_m(x,y) &= \sum_{m=0}^{\infty} Z_m(|y|x, y/|y|) \\
&= P(|y|x, y/|y|) \\
&= P(x,y)
\end{aligned}$$

dir.

Şimdi teorem 6.2.6 kullanılsın. Öncelikle $\sum_{m=0}^{\infty} 2mZ_m(x,y)$ serisi düzgün yakınsak olduğundan,

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{\infty} 2mZ_m(x,y) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d}{dt} t^{2m} Z_m(x,y)|_{t=1} \\
&= \frac{d}{dt}\left(\sum_{m=0}^{\infty} t^{2m} Z_m(x,y)\right)|_{t=1} \\
&= \frac{d}{dt}\left(\sum_{m=0}^{\infty} Z_m(tx,ty)\right)|_{t=1} \\
&= \frac{d}{dt} P(tx,ty)|_{t=1}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlik 6.2.6'da yerine yazılırsa $x, y \in B$ için

$$\begin{aligned} R_B(x,y) &= \tfrac{1}{nV(B)}\Big[\sum_{m=0}^{\infty} nZ_m(x,y) + \sum_{m=0}^{\infty} 2mZ_m(x,y)\Big] \\ &= \tfrac{nP(x,y)+\frac{d}{dt}P(tx,ty)|_{t=1}}{nV(B)} \end{aligned} \tag{6.2.23}$$

formülü elde edilir.

Son olarak (6.2.23) formülünde $P(x,y)$ genişletilmiş Poisson çekirdeğinin değeri yerine yazıldığında R_B nin açık bir formülü elde edilir.

$$R_B(x,y) = \frac{(n - n|x|^2|y|^2)(1 - 2xy + |x|^2|y|^2)}{nV(B)} + \frac{\frac{d}{dt}\big(\frac{1-t^4|x|^2|y|^2}{(1-2t^2xy+t^4|x|^2|y|^2)^{n/2}}\big)\big|_{t=1}}{nV(B)} \tag{1}$$

dir. $(1 - 2xy + |x|^2|y|^2) = A$ ve $1 - |x|^2|y|^2 = E$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}\big(\tfrac{1-t^4|x|^2|y|^2}{(1-2t^2xy+t^4|x|^2|y|^2)^{n/2}}\big)\big|_{t=1} &= \tfrac{(-4|x|^2|y|^2)A^{n/2}-E(-2nxy+2n|x|^2|y|^2)A^{n/2-1}}{A^n} \\ &= (-4|x|^2|y|^2)A^{-n/2} - E(-2nxy + 2n|x|^2|y|^2)A^{-1-n/2} \end{aligned}$$

dir. Bu (1)'de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} R_B(x,y) &= \tfrac{(n-n|x|^2|y|^2)A^{-n/2}-(4|x|^2|y|^2)A^{-n/2}-E(-2nxy+2n|x|^2|y|^2)A^{-1-n/2}}{nV(B)} \\ &= \tfrac{(n-n|x|^2|y|^2)A-(4|x|^2|y|^2)A+2nxyE-2n|x|^2|y|^2E}{nV(B)A^{n/2+1}} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan A ve E değerleri yerine yazılıp gerekli sadeleştirmeler yapıldığında,

$$R_B(x,y) = \frac{(n-4)|x|^4|y|^4 + (8xy - 2n - 4)|x|^2|y|^2 + n}{nV(B)(1 - 2xy + |x|^2|y|^2)^{1+n/2}}$$

bulunur. ■

Bergman çekirdeği R_B, zonal ve küresel harmonikler kullanılmadan da hesaplanabilir. Aşağıda 6.2.7 teoreminin bir ispatı Green Özelliği 2.2.1 kullanılarak verilmiştir.

u ve v, $\bar{B}$ de harmonik olsun ve $y \in B$ noktası sabitlensin. Bir w fonksiyonu $w(x) = (|x|^2 - 1)v(x) = |x|^2v(x) - v(x)$ olarak tanımlansın. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \Delta w(x) &= \Delta(|x|^2)v(x) + 2\nabla|x|^2 \cdot \nabla v(x) + |x|^2\Delta v(x) \\ &= 2nv(x) + 4x \cdot \nabla v(x) \end{aligned} \tag{6.2.24}$$

dir. Böylece Δw fonksiyonu için,

$$\begin{aligned}\Delta(\Delta w) &= 2n\Delta v(x) + 4(2\Delta v + \nabla(\Delta v(x))x) \\ &= 0\end{aligned}$$

olup $\bar{B}$ de harmoniktir. Burada $\nabla w(x) = 2v(x)x + (|x|^2-1)\nabla v(x)$, $D_n w(x) = \nabla w(x)\cdot x/|x| = 2v(x)|x| + (|x|^2-1)D_n v(x)$ dir. O halde S de $D_n w = 2v$ olur. Ayrıca B de $\Delta u = 0$ ve S de $w \equiv 0$ olduğundan u ve w için Green özelliğine başvurulursa,

$$\int_B u\Delta w\ dV = \int_S uD_n w\ dS = 2\int_S uv\ dS = 2nV(B)\int_S uv\ d\sigma \qquad (6.2.25)$$

elde edilir. 2.4.7 gereği Genişletilmiş Poisson çekirdeği $y \in B$ sabitlendiğinde harmoniktir. O halde $x \in B$ için $v(x) = P(x,y)$ alınırsa,

$$\int_B u\Delta w\ dV = 2nV(B)\int_S u(\zeta)P(\zeta,y)\ d\sigma(\zeta) = 2nV(B)u(y)$$

olur. O halde y noktasındaki doğuran çekirdek $\Delta w/(2nV(B))$ olarak bulunur. (6.2.24) kullanılarak R_B için

$$R(x,y) = \frac{1}{nV(B)(1-2xy+|x|^2|y|^2)^{n/2}}\Big(\frac{n(1-|x|^2|y|^2)^2}{1-2xy+|x|^2|y|^2} - 4|x|^2|y|^2\Big) \qquad (6.2.26)$$

sonucuna ulaşılır.

Sonuç 6.2.8. *$|R(x,y)|$ için bir üst sınır bulalım. Öncelikle Cauchy-Schwarz eşitsizliği gereği $x\cdot y \le |x||y|$ dir. Buradan,*

$$(1-|x||y|)^2 = 1 + |x|^2|y|^2 - 2|x||y| \le 1 - 2x\cdot y + |x|^2|y|^2$$

olur. Böylece

$$(1-|x|^2|y|^2)^2 = (1+|x||y|)^2(1-|x||y|)^2 \le 4(1-2xy+|x|^2|y|^2)$$

elde edilir. Bu eşitsizlik (6.2.26)'de kullanılarak,

$$|R(x,y)| \le \frac{4}{V(B)(1-2xy+|x|^2|y|^2)^{n/2}}$$

sonucuna ulaşılır.

Aşağıdaki sonuçta, p bir polinom iken birim yuvardaki Bergman izdüşümü $Q_B[p]$ yi hesaplamak için bir formül verilecektir. Bu sonuç 5.1.1 ve 5.3.8'deki sonuçlarla benzerlik göstermektedir.

Teorem 6.2.9. *p, $\mathbb{R}^n$ de m.dereceden bir polinom olsun. Bu durumda $Q_B[p]$, derecesi en fazla m olan bir polinom olur. Üstelik $\forall x \in B$ için*

$$Q_B[p](x) = \frac{1}{nV(B)} \sum_{k=0}^{m} (n+2k) \int_B p(y) Z_k(x,y)\, dV(y)$$

dir.

Kanıt. 6.1.4 gereği, $\forall x \in B$ için

$$Q_B[p](x) = \int_B p(y) R_B(x,y)\, dV(y)$$

dir. Önerme 6.2.6 gereği $R_B(x,y)$ yerine yazılır ve serinin düzgün yakınsaklığı kullanılırsa

$$\begin{aligned} Q_B[p](x) &= \tfrac{1}{nV(B)} \int_B p(y) \sum_{k=0}^{m} (n+2k) Z_k(x,y)\, dV(y) \\ &= \tfrac{1}{nV(B)} \sum_{k=0}^{\infty} (n+2k) \int_B p(y) Z_k(x,y)\, dV(y) \end{aligned} \qquad (1)$$

olur. Diğer yandan Önerme 5.2.3 gereği, $\forall k > m$ için

$$\int_S p(\zeta) Z_k(x,\zeta)\, d\sigma(\zeta) = 0$$

dir. O halde $\forall k > m$ için

$$\begin{aligned} \int_B p(y) Z_k(x,y)\, dV(y) &= nV(B) \int_0^1 r^{n+k-1} \int_S p(r\zeta) Z_k(x,\zeta)\, d\sigma(\zeta) dr \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır. Bu sonuç (1)'de yerine yazıldığında,

$$Q_B[p](x) = \frac{1}{nV(B)} \sum_{k=0}^{m} (n+2m) \int_B p(y) Z_k(x,y)\, dV(y)$$

elde edilir. ∎

p, m.dereceden homojen bir polinom ($p \in P_m(\mathbb{R}^n)$ iken, p nin Poisson integralinden yararlanarak Bergman izdüşümü hesaplanabilir.

Sonuç 6.2.10. *$p \in P_m(\mathbb{R}^n)$ ve herbir $p_k \in H_k(\mathbb{R}^n)$ için $P[p|_S] = \sum_{k=0}^{m} p_k$ olsun. Bu durumda*

$$Q_B[p] = \sum_{k=0}^{m} \frac{n+2k}{n+k+m} p_k$$

dır.

Kanıt. 6.2.9 gereği, $x \in B$ için

$$\begin{aligned} Q_B[p](x) &= \frac{1}{nV(B)} \sum_{k=0}^{m} (n+2k) \int_B p(y) Z_k(x,y)\, dV(y) \\ &= \sum_{k=0}^{m} (n+2k) \frac{\int_B p(y) Z_k(x,y)\, dV(y)}{nV(B)} \end{aligned}$$

dir. Buradan polar forma geçilirse, p ve $0 \leq k \leq m$ için $Z_k(x,.)$ homojen polinomlar olduklarından,

$$\begin{aligned} Q_B[p](x) &= \sum_{k=0}^{m} (n+2k) \int_0^1 r^{n-1} \int_S p(r\zeta) Z_k(x, r\zeta)\, d\sigma(\zeta) dr \\ &= \sum_{k=0}^{m} (n+2k) \int_0^1 r^{n+m+k-1} \int_S p(\zeta) Z_k(x,\zeta)\, d\sigma(\zeta) dr \end{aligned} \tag{1}$$

olur. Diğer yandan 5.3.8'in ispatında bahsedildiği üzere herbir $x \in B$ ve $0 \leq k \leq m$ için $p_k \in H_k(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere,

$$\int_S p(\zeta) Z_k(x,\zeta)\, d\sigma(\zeta) = p_k(x)$$

dir. Bu sonuç (1)'de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} Q_B[p](x) &= \sum_{k=0}^{m} (n+2k) p_k(x) \int_0^1 r^{n+m+k-1}\, dr \\ &= \sum_{k=0}^{m} \frac{n+2k}{n+k+m} p_k(x) \end{aligned}$$

elde edilir. ■

ÖRNEKLER

Örnek 6.2.11. *$p \in P_m(\mathbb{R}^n)$ ve $Q_B[p] \equiv 0$ ise $p \equiv 0$ dır?*

Gerçektende, $p \in P_m(\mathbb{R}^n)$ iken 6.2.10 *gereği, $0 \leq k \leq m$ için $p_k \in H_k(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere,*

$$Q_B[p] = \sum_{k=0}^{m} \frac{n+2k}{n+k+m} p_k$$

dır. Eğer $Q_B[p] \equiv 0$ *ise* $\sum_{k=0}^{m} \frac{n+2k}{n+k+m} p_k \equiv 0$ *olur. Bu durumda* $\forall k \in [0,m]$ *için* $\frac{n+2k}{n+k+m} \neq 0$ *olup* $p_k \equiv 0$ *dır. Diğer yandan* $p = \sum_{k=0}^{m} p_k$ *olduğundan* $p \equiv 0$ *elde edilir.*

Örnek 6.2.12. $p \in P_m(\mathbb{R}^n)$ *olsun.* $P[p|_S] = Q_B[p]$ *olması için gerek ve yeter şart p nin harmonik olmasıdır.*

$(\Rightarrow)$ $P[p|_S] = \sum_{k=0}^{m} p_k$, $p_k \in H_k(\mathbb{R}^n)$ *olsun. Sonuç* 6.2.10 *gereği*

$$Q_B[p] = \sum_{k=0}^{m} \frac{n+2k}{n+k+m} p_k$$

dir. Eğer $P[p|_S] = Q_B[p]$ *ise*

$$\sum_{k=0}^{m} (1 - \frac{n+2k}{n+k+m}) p_k = 0$$

olur. O halde 2.7.12 *gereği* $\forall k$ *için*

$$(1 - \frac{n+2k}{n+k+m}) p_k = 0$$

olmalıdır. $1 - (n+2k)/(n+k+m)$ *çarpanı ancak ve ancak* $k = m$ *ise sıfıra eşittir. Dolayısıyla,* $k \neq m$ *durumunda* $p_k \equiv 0$ *olmalıdır. Yani* $P[p_S] = \sum_{k=0}^{m} p_k = p_m$ *dir.* $p \in P_m(\mathbb{R}^n)$, $p_m \in H_m(\mathbb{R}^n) \subseteq P_m(\mathbb{R}^n)$ *ve her* $\zeta \in S$ *için* $p(\zeta) = p_m(\zeta)$ *olduğundan, her* $x \in \mathbb{R}^n$ *için* $p(x) = p_m(x)$ *olmalıdır. Yani* $p = p_m \in H_m(\mathbb{R}^n)$ *olup,* p *harmoniktir.*

$(\Leftarrow)$ $p \in H_m(\mathbb{R}^n)$ *olsun. Bu durumda* 5.1.8 *gereği* $P[p|_S] = p$ *dir. Ayrıca p harmonik olduğundan* $Q_B[p] = p$ *dir. Böylelikle istenilen sonuç elde edilir.*

Önerme 6.2.13. $1 \leq p < q < \infty$ *olmak üzere* $b^q(B)$, $b^p(B)$ *nin bir özaltkümesidir.*

Kanıt. Öncelikle $b^q(B)$ nin $b^p(B)$ nin bir altkümesi olduğunu gösterelim.

Herhangi bir $u \in b^q(B)$ alınsın. Hölder eşitsizliği [6] gereği, $1 \leq t < \infty$ ve $1/t + 1/s = 1$ için

$$\int_B |u|^p \, dV \leq \left(\int_B |u|^{ps} \, dV \right)^{1/s} \left(\int_B 1^t \, dV \right)^{1/t}$$

dir. C sabit olmak üzere $V(B) = C$ ve $s = q/p$ alınırsa,

$$\begin{aligned} \int_B |u|^p \, dV &\leq (\int_B |u|^q \, dV)^{p/q} C \\ (\int_B |u|^p \, dV)^{1/p} &\leq \int_B |u|^q \, dV)^{1/q} C \\ \|u\|_{b^p} &\leq C \|u\|_{b^q} \end{aligned} \tag{6.2.27}$$

elde edilir. Burada $u \in b^q(B)$ olduğundan $\|u\|_{b^q} < \infty$ dolayısıyla $\|u\|_{b^p} < \infty$ olur. Böylece $u \in b^p(B)$ olup $b^q(B) \subseteq b^p(B)$ sonucuna ulaşılır.

Şimdi $b^q(B)$ nin bir özaltküme olduğu gösterelim. Bunun için $i : b^q(B) \to b^p(B)$ birim dönüşümü gözönüne alınsın. Aşikar olarak bu dönüşüm lineer ve birebirdir. Ayrıca herhangi $u \in b^q(B)$ için 6.2.27 gereği,

$$\|i(u)\|_{b^p} \leq C \|u\|_{b^q}$$

olduğundan i sınırlı(sürekli)'dır. Eğer i dönüşümü örten ise açık dönüşüm teoremi [3] gereği bir $i^{-1} : b^p(B) \to b^q(B)$ ters dönüşümü var ve sınırlıdır. Böyle bir sınırlı lineer dönüşümün olmadığı gösterilirse i nin örten olamayacağı dolayısıyla $b^p(B) = b^q(B)$ olamayacağı kanıtlanmış olur.

i dönüşümünün örten olduğunu varsayalım. O halde bir i^{-1} ters dönüşümü var ve sınırlıdır. Yani $\forall u \in b^p(B)$ için

$$\|u\|_{b^q} \leq \bar{C} \|u\|_{b^p} \tag{6.2.28}$$

olacak şekilde bir $\bar{C}$ sabiti vardır.

Herhangi $m = 1, 2, ...,$ için bir $u_m \in H_m(\mathbb{R}^n)$ seçilsin. Bu durumda

$$\begin{aligned} \|u_m\|_{b^p} &= (\int_B |u_m|^p \, dV)^{1/p} \\ &= (nV(B) \int_0^1 r^{n-1} \int_S |u_m(r\zeta)|^p \, d\zeta dr)^{1/p} \\ &= (nV(B) \int_0^1 r^{pm+n-1} \int_S |u_m(\zeta)|^p \, d\zeta dr)^{1/p} \\ &= (\int_S |u_m(\zeta)|^p \, d\zeta)^{1/p} (nV(B) \int_0^1 r^{pm+n-1} \, dr)^{1/p} \\ &= (\int_S |u_m(\zeta)|^p \, d\zeta)^{1/p} (\frac{nV(B)}{pm+n})^{1/p} \end{aligned}$$

dır. Aynı sonuç $\|u_m\|_{b^q}$ için de geçerlidir. Yani

$$\|u_m\|_{b^q} = (\int_S |u_m(\zeta)|^q \, d\zeta)^{1/q} (\frac{nV(B)}{qm+n})^{1/q}$$

dır. O halde

$$\frac{\|u_m\|_{b^q}}{\|u_m\|_{b^p}} = \frac{(\int_S |u_m(\zeta)|^q \ d\zeta)^{1/q}(nV(B))^{1/q}(pm+n)^{1/p}}{(\int_S |u_m(\zeta)|^p \ d\zeta)^{1/p}(nV(B))^{1/p}(qm+n)^{1/q}} \tag{1}$$

dir. Diğer yandan (6.2.28)'e benzer şekilde Hölder eşitsizliğinden,

$$(\int_S |u_m(\zeta)|^p \ d\zeta)^{1/p} \leq (\int_S |u_m(\zeta)|^q \ d\zeta)^{1/q}\tilde{C}$$

olacak şekilde bir $\tilde{C}$ sabiti vardır. Bu sonuç (1)'de kullanılırsa

$$\frac{\|u_m\|_{b^q}}{\|u_m\|_{b^p}} \geq \frac{(nV(B))^{1/q}(pm+n)^{1/p}}{(nV(B))^{1/p}(qm+n)^{1/q}}$$

elde edilir. Burada $m \to \infty$ iken eşitsizliğin sağındaki ifade sonsuza gideceğinden (6.2.28) eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $\bar{C}$ sabiti bulunamaz. Dolayısıyla i dönüşümü örten olamaz. Bu nedenle $b^q(B)$, $b^p(B)$ nin bir özaltkümesidir. ■

KAYNAKLAR

1. Axler, S., Bourdon, P. ve Ramey, W., *Harmonic Function Theory*, Springer-Verlag, New York, 1992.

2. Axler, S. ve Ramey, W., *Harmonic Polynomials and Dirichlet-type Problems*, Proc. Amer. Math. Soc., **123**, 3765-3773, 1995.

3. MacCluer, B.D., *Elementary Functional Analysis*, Springer, New York, 2009.

4. Ponnusamy, S. ve Silverman, H., *Complex Variables with Applications*, Birkhauser Boston, 2006.

5. Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, London, 1976.

6. Rudin, W., *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1987.

7. Rynne, B.P. ve Youngson, M.A., *Linear Functional Analysis*, Springer, London, 2000.

8. Stein, E.M. ve Shakarchi, R., *Real Analysis: Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 2005.

9. Stroethoff, K., *Harmonic Bergman Spaces*, Mathematical Sciences Research Institute Publications, **33**, 51-63, 1998.

10. Zhu, K., *Operator Theory in Function Spaces*, Second Edition, American Mathematical Society, Providence, 2007.

11. Zhu, K., *Spaces of Holomorphic Functions in The Unit Ball*, Springer-Verlag, New York, 2005.