KUASİDİFERANSİYELLENEBİLME VE KUASİDİFERANSİYELLENEBİLME İLE OPTİMİZASYON

Tuğba YALÇIN
Yüksek Lisans Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Eylül 2010

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Tuğba YALÇIN'ın **"Kuasidiferansiyellenebilme ve Kuasidiferansiyellenebilme ile Optimizasyon"** başlıklı **Matematik** Anabilim Dalındaki, Yüksek Lisans Tezi 29.07.2010 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

		Adı Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	:	**Prof. Dr. YALÇIN KÜÇÜK**	....
Üye	:	**Prof. Dr. MAHİDE KÜÇÜK**	....
Üye	:	**Yrd. Doç. Dr. AYDIN SİPAHİOĞLU**	....

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KUASİDİFERANSİYELLENEBİLME VE KUASİDİFERANSİYELLENEBİLME İLE OPTİMİZASYON

Tuğba YALÇIN

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Yalçın KÜÇÜK

2010, 111 sayfa

Kuasidiferansiyel kavramı otuz yıl önce V.F.Demyanov ve A.M.Rubinov tarafından çalışılmaya başlanmıştır. Kuasidiferansiyellenebilir fonksiyonlar, yönlü türevlenebilir her Lipschitz fonksiyona kuasidiferansiyellenebilir fonksiyonlarla yaklaşılabildiği için önemli bir role sahiptir.

Dört bölümden oluşan bu çalışmada konveks pozitif homojen fonksiyonların farkı olarak yazılabilen fonksiyonlara bir giriş yapılmış, kuasidiferansiyellenebilir fonksiyonlar tanımlanmış ve kuasidiferansiyelleri ile kompakt konveks küme çiftleri arasındaki ilişki araştırılmıştır. Ayrıca kuasidiferansiyellenebilir fonksiyonların ekstremum problemlerinin çözümü için gerek ve yeter koşullar incelenmiştir.

Çalışmanın ilk bölümünde çalışma için gerekli olan temel tanım ve teoremler verilmiştir. İkinci bölümde DC-fonksiyon kavramı tanımlanmış ve bazı özellikleri incelenmiştir. Daha sonra bazı özel fonksiyonların DC gösterimleri incelenmiş ve DC kümelere bir giriş yapılmıştır.

Üçüncü bölümde kuasidiferansiyelin tanımı verilerek kuasidiferansiyellenebilir fonksiyonların bazı özellikleri incelenmiştir. Ayrıca kuasidiferansiyellenebilir fonksiyonlar ile kompakt konveks küme çiftleri arasındaki ilişki verilmiştir. Daha sonra Banach uzaylarında tanımlanan dönüşümlerin kuasidiferansiyellenebilirliği tanımlanmış ve kuasidiferansiyellerinin özellikleri incelenmiştir.

Son bölümde kuasidiferansiyellenebilir konveks olmayan amaç fonksiyonuna sahip ekstremum problemlerinin çözümü için gerek ve yeter koşullar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: DC fonksiyonlar, Kuasidiferansiyel, Kuasidiferansiyellenebilir fonksiyonlar

ABSTRACT

Master of Science Thesis

QUASIDIFFERENTIABILITY AND QUASIDIFFERENTIAL OPTIMIZATION

Tuğba YALÇIN

Anadolu University
Graduate School of Sciences
Mathematics Program

Supervisor: **Prof. Dr. Yalçın KÜÇÜK**

2010, 111 pages

The notion of quasidifferential was introduced by V.F.Demyanov and A.M.Rubinov thirty years ago. Quasidifferentiable functions has a great role since all directionally differentiable Lipschitzian functions can be approximated by quasidifferentiable functions.

In this work, which is consisted of four chapters, an introduction to functions which can be expressed as the difference of two convex positively homogeneous functions is made; quasidifferentiable functions are defined and the relationship between quasidifferentials and the pairs of compact convex sets is studied. Also, necessary and sufficient conditions for a solution of extremum problems quasidifferentiable function are given.

In the first chapter of this work, some basic definitions and theorems , necessary for this work, are given. In the second chapter, the notion of DC function is defined and its some property is investigated. After that, DC representation of some special functions is investigated and an introduction to DC sets is made.

In the third chapter,by defining the quasidifferential some properties of quasidifferentiable functions is invastigated. Also, the relationship between quasidifferentials and the pairs of compact convex sets is given and quasidifferential of some special functions is expressed with the pairs of compact convex sets. After that, the quasidifferentiability of operators, which are defined on Banach spaces, is defined.

In the last chapter, necessary and sufficient conditions for a solution of extremum problems, which has quasidifferentiable nonconvex objective function, are given.

Keywords: DC functions, Quasidifferential, Quasidifferentiable functions

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında yardımlarını esirgemeyen değerli hocalarım Prof. Dr. Yalçın KÜÇÜK ve Prof. Dr. Mahide KÜÇÜK'e , tezin yazımında yardımcı olan Arş. Gör. İlknur Atasever ve Arş. Gör. Didem Tozkan'a, beni her zaman destekleyen aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

Tuğba YALÇIN

Haziran 2010

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathrm{conv}S$	:	S kümesinin konveks zarfı
$\mathrm{clconv}S$	:	S kümesinin kapalı konveks zarfı
$\mathrm{cone}S$	:	S kümesinin konik zarfı
$\mathrm{clcone}S$	:	S kümesinin kapalı konik zarfı
$\mathrm{int}C$	:	C kümesinin iç noktaları kümesi
$\mathrm{cl}C$	:	C kümesinin kapanış noktaları kümesi
$\partial f\|_{x_0}$	:	f fonksiyonunun bir x_0 noktasındaki subdiferansiyeli
$\overline{\partial} f$	:	f fonksiyonunun süperdiferansiyeli
$\mathbb{B}(x_0, r)$	:	x_0-merkezli r-yarıçaplı açık yuvar
$\overline{\mathbb{B}}(x_0, r)$	:	x_0-merkezli r-yarıçaplı kapalı yuvar
$H_f(A)$	:	A kümesinin f fonksiyonuna göre maksimal yüzü
$f_D^{\uparrow}(x, u)$	:	f fonksiyonunun x noktasındaki u yönündeki Dini üstten türevi
$f_D^{\downarrow}(x, u)$	:	f fonksiyonunun x noktasındaki u yönündeki Dini alttan türevi
$f_H^{\uparrow}(x, u)$	:	f fonksiyonunun x noktasındaki u yönündeki Hadamard üstten türevi
$f_H^{\downarrow}(x, u)$	:	f fonksiyonunun x noktasındaki u yönündeki Hadamard alttan türevi
$f'_x(u)$	:	f fonksiyonunun x noktasındaki u yönündeki yönlü türevi
$Df(x)$	:	f fonksiyonunun kuasidiferansiyeli
$H'_x(u)$	:	H operatörünün x noktasındaki u yönündeki yönlü türevi
$DH(x)$	:	H operatörünün kuasidiferansiyeli
K^*	:	K konisinin dual konisi

1 GİRİŞ

1.1 Sublineerlik ve Ayırma Teoremleri

Tanım 1.1.1. *Boş kümeden farklı bir X kümesi üzerinde tanımlı bir "$\leq$" bağıntısı;*

i) $\forall\ x \in X$ *için* $x \leq x$ *dir (yansıma özelliği).*

ii) $\forall\ x, y, z \in X$ *için* $x \leq y$ *ve* $y \leq z$ *ise* $x \leq z$ *dir (geçişme özelliği).*

iii) $\forall\ x, y \in X$ *için* $x \leq y$ *ve* $y \leq x$ *ise* $x = y$ *dir (ters simetri özelliği).*

koşullarını sağlıyorsa bu bağıntıya ***sıralama bağıntısı*** *ve* $(X, \leq)$ *ikilisine* ***sıralı küme*** *denir.*

Ters simetri özelliği sağlanmıyorsa bu durumda bu bağıntıya ***ön-sıralama*** *denir.* $\forall\ x, y \in X$ *için* $x \leq y$ *veya* $y \leq x$ *bağıntılarından en az biri sağlanıyorsa* X *kümesine* ***tam sıralı küme*** *denir.*

X *sıralı bir küme olsun.* $\forall\ x, y \in X$ *için* $x \leq z$ *veya* $y \leq z$ *olacak şekilde bir* $z \in X$ *varsa bu kümeye* ***yönlü küme*** *denir. Sıralı bir* X *kümesinin tam sıralı bir alt kümesine bir* ***zincir*** *denir.*

Tanım 1.1.2. $\forall\ x \in X$ *için* $x_0 \leq x$ *iken* $x_0 = x$ *ise* $x_0 \in X$ *elemanına* ***maksimal eleman*** *denir.* $Y \subset X$ *olsun.* $\forall\ y \in Y$ *için* $y \leq x_0$ *oluyorsa* $x_0 \in X$ *elemanına* Y*'nin bir* ***üst sınırı*** *denir.*

Benzer şekilde; $\forall\ x \in X$ *için* $x_0 \geq x$ *iken* $x_0 = x$ *ise* $x_0 \in X$ *elemanına* ***minimal eleman*** *denir.* $Y \subset X$ *olsun.* $\forall\ y \in Y$ *için* $y \geq x_0$ *oluyorsa* $x_0 \in X$ *elemanına* Y*'nin bir* ***alt sınırı*** *denir.*

Tanım 1.1.3. $Y \subset X$ *ve* $x_0 \in X$*,* Y*'nin bir üst sınır olsun.* x_0*,* Y*'nin her* $z \in X$ *üst sınırından daha küçük yada eşit ise* $x_0 \in X$ *elemanına* Y*'nin* ***supremumu*** *denir ve* $x_0 = \sup Y$ *ile gösterilir.*

Benzer şekilde; Y'nin infimumu Y'nin alt sınırlarının en büyüğü olarak tanımlanır ve $\inf Y$ olarak gösterilir. İnfimum ve supremum varsa tektir.
$Y = \{y_1, y_2, ..., y_k\}$ sonlu bir küme ise Y'nin supremumu ve infimumu sırasıyla

$$y_1 \vee y_2 \vee \ldots \vee y_k = \sup Y$$

$$y_1 \wedge y_2 \wedge \ldots \wedge y_k = \inf Y$$

şeklinde gösterilir.

Teorem 1.1.4 (Kuratowski-Zorn Lemma)**.** $(X, \leq)$ *sıralı kümesinin her zinciri bir alt sınıra (üst sınıra) sahipse X'in bir minimal (maksimal) elemanı vardır.*

Tanım 1.1.5. $(X, \leq)$ *bir sıralı küme olsun.* $\forall\ x, y \in X$ *için*

$$\sup\{x, y\} = x \vee y, \quad \inf\{x, y\} = x \wedge y$$

*değerleri varsa $(X, \leq)$'e bir **latis(örgü)** denir.*
Ek olarak $(X, \leq)$ örgüsünde,

$$(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$$

*özelliği her bir $x, y, z \in X$ için sağlanıyorsa $(X, \leq)$ örgüsüne **dağılımlı örgü** denir.*

1.1.1 Sublineer Fonksiyonlar

Tanım 1.1.6. *X bir vektör uzayı olsun. Bir $p : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu*

i) $\forall\ x \in X$ *ve* $\forall\ \lambda > 0$ *için* $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ *(pozitif homojenlik)*

ii) $\forall\ x, y \in X$ *için* $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ *(alt toplamsallık)*

*koşullarını sağlıyorsa p fonksiyonuna **sublineer fonksiyon** denir.*
$\forall\ x \in X$ *ve* $\forall\ \lambda > 0$ *için* $p : X \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu i) yerine*

i') $p(\lambda x) = |\lambda|\ p(x)$

*koşulunu sağlıyorsa p'ye **pseudonorm** denir.*
$\forall\ x \in X$ *için* $p(x) = 0$ *iken* $x = 0$ *sağlanıyorsa bu durumda* $p : X \to \mathbb{R}$ *pseudonormuna **norm** denir ve* $p(x) = \|x\|$ *ile gösterilir.*

Tanım 1.1.7. *A, bir X vektör uzayının alt kümesi olsun.* $\forall\ a, b \in A$ *ve* $\forall\ t \in [0, 1]$ *için* $ta + (1 - t)b \in A$ *oluyorsa A'ya **konveks küme** denir.*

Tanım 1.1.8. $A \subseteq X$ *konveks kümesi üzerinde tanımlı bir* $f : A \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu* $\forall\ a, b \in A$ *ve* $\forall\ t \in [0, 1]$ *için*

$$f(ta + (1 - t)b) \leq tf(a) + (1 - t)f(b)$$

*koşulunu sağlıyorsa **konvekstir** denir.*

Pozitif homojen konveks bir fonksiyon sublineerdir.

Bir $f : X \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyonu ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için $L_{f,\alpha} = \{x \in X \mid f(x) \leq \alpha\}$ kümesine f'nin α-düzey kümesi denir. Bu küme konveks bir kümedir.

Tanım 1.1.9. *Bir X vektör uzayının $M \subset X$ alt kümesi için*

$$\begin{aligned}\operatorname{conv}(M) &= \bigcup_{\substack{M \subset A \subset X \\ A \ \text{konveks}}} A \\ &= \left\{ z = \sum_{i=1}^{k} t_i m_i \;\middle|\; 0 \leq \min_{1 \leq i \leq k} t_i, \sum_{i=1}^{k} t_i = 1, m_1, m_2, \ldots, m_k \in M, k \in \mathbb{N} \right\}\end{aligned}$$

*kümesine M **nin konveks zarfı** denir.*

X vektör uzayı üzerinde tanımlı tüm sublineer fonksiyonların kümesi $\mathbb{P}_a(X)$ ile gösterilsin. $\mathbb{P}_a(X)$ üzerinde

$$p \preceq p' \Leftrightarrow \inf_{x \in X} \big(p(x) - p'(x)\big) \leq 0$$

olacak şekilde bir sıralama tanımlansın.

Yardımcı Teorem 1.1.10. *X bir vektör uzayı olsun. $\mathbb{P}_a(X)$'in her tam sıralı S alt kümesinin bir alt sınırı vardır; yani $\forall\ p \in S$ için $p_s \preceq p$ olacak şekilde $p_s \in \mathbb{P}_a(X)$ vardır.*

Kanıt. $x \in X$ ve $p \in \mathbb{P}_a(X)$ alınsın.

$$0 = p(0) = p(x - x) \leq p(x) + p(-x)$$

olduğundan

$$-p(-x) \leq p(x) \tag{1.1.1}$$

eşitsizliği sağlanır. Keyfi bir $S \subseteq \mathbb{P}_a(X)$ zinciri alınsın. Bu durumda $\forall\ x \in X$ için $\inf_{p \in S} p(x)$ değeri sonludur. Gerçekten; kabul edilsin ki en az bir $x \in X \setminus \{0\}$ için bu doğru olmasın. Bu durumda $\forall\ p \in S$ için bir $q \in S$ vardır öyle ki $q \leq p$ ve $q(x) \leq -p(-x) - 1$ dir. O halde eşitsizlik -1 ile çarpılırsa;

$$-q(x) \geq p(-x) + 1$$

olur. (1.1.1) eşitsizliği q sublineer fonksiyonu için yazılıp -1 ile çarpılırsa $q(-x) \geq -q(x)$ olur. Böylece $q(-x) \geq p(-x) + 1$ dir. Yani, $-x = y \in X$ için

$q(y) \geq p(y)+1 > p(y)$ elde edilir. Bu ise $q \leq p$ oluşuyla çelişir. O halde kabul yanlıştır, yani $\inf\limits_{p\in S} p(x)$ değeri sonludur. Bu durumda

$$p^* : X \to \mathbb{R}, \quad p^*(x) = \inf_{p\in S} p(x)$$

fonksiyonu tanımlansın.

İnfimum tanımı gereği $\forall\, p \in S$ ve $\forall\, x \in X$ için $p^*(x) \leq p(x)$ dir. Üstelik $x, y \in X$ için,

$$p^*(x+y) = \inf_{p\in S} p(x+y) \leq \inf_{p\in S}[p(x)+p(y)] \leq \inf_{p\in S} p(x) + \inf_{p\in S} p(x) = p^*(x)+p^*(y)$$

olur. Ayrıca, $\forall\, \lambda > 0$ için $p^*(\lambda x) = \lambda p^*(x)$ olduğundan p^* fonksiyonu sublineerdir. Yani, $p^* \in \mathbb{P}_a(X)$ dir. O halde $\mathbb{P}_a(X)$'in bir alt sınırı vardır. ■

Önerme 1.1.11. *X bir vektör uzayı olsun. Bu durumda $p \in \mathbb{P}_a(X)$ minimal olması için gerek ve yeter koşul p'nin lineer olmasıdır.*

Kanıt. $p \in \mathbb{P}_a(X)$ minimal eleman olsun ve verilen bir $a \in X$ noktası için

$$p_a : X \to \mathbb{R}, \quad p_a(x) = \inf_{t\geq 0} \big(p(x+ta) - tp(a)\big)$$

fonksiyonu tanımlansın. p_a iyi tanımlıdır. Gerçekten, $\forall\, x \in X$ ve $\forall\, t \geq 0$ için,

$$tp(a) = p(ta) = p(-x+x+ta) \leq p(-x) + p(x+ta)$$

$$-p(-x) \leq p(x+ta) - tp(a)$$

dır. Buradan,

$$-p(-x) \leq p(x+ta) - tp(a) \leq p(x) + tp(a) - tp(a) = p(x)$$

$$-\infty < -p(-x) \leq \inf_{t\geq 0} \big(p(x+ta) - tp(a)\big) \leq p(x) < +\infty$$

$$-\infty < p_a(x) \leq p(x) < +\infty$$

elde edilir. O halde p_a fonksiyonu iyi tanımlıdır ve $p_a \leq p$ dir.

$p_a : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sublineerdir. Gerçekten;

i) $x \in X$ ve $\lambda > 0$ verilsin. Bu durumda;

$$\begin{aligned} p_a(\lambda x) = \inf_{t\geq 0} \big(p(\lambda x + ta) - tp(a)\big) &= \inf_{t\geq 0} \left\{ \lambda \left(p\left(x + \frac{t}{\lambda} a \right) - \frac{t}{\lambda} p(a) \right) \right\} \\ &= \lambda \inf_{t\geq 0} \big(p(x+t'a) - t'p(a)\big), \quad t' = \frac{t}{\lambda} \\ &= \lambda p_a(x) \end{aligned}$$

olduğundan p_a pozitif homojendir.

ii) $x, y \in X$ verilsin. İnfimum tanımından verilen bir $\varepsilon > 0$ için

$$p_a(x) \geq p(x + t_1 a) - t_1 p(a) - \varepsilon$$

$$p_a(y) \geq p(y + t_2 a) - t_2 p(a) - \varepsilon$$

olacak şekilde $\exists\ t_1, t_2 > 0$ sayıları vardır. Bu durumda $t = t_1 + t_2$ için

$$\begin{aligned} p_a(x) + p_a(y) &\geq p(x + t_1 a) + p(y + t_2 a) - (t_1 + t_2)p(a) - 2\varepsilon \\ &\geq p(x + y + (t_1 + t_2)a) - (t_1 + t_2)p(a) - 2\varepsilon \\ &\geq p(x + y + ta) - tp(a) - 2\varepsilon \\ &\geq p_a(x + y) - 2\varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan

$$p_a(x + y) \leq p_a(x) + p_a(y)$$

dir. O halde p_a sublineerdir.

$p \in \mathbb{P}_a(X)$ minimal eleman ve $p_a \preceq p$ olduğundan $p = p_a$ dır. $t = 1$ için

$$p_a(x) = \inf_{t \geq 0} \big(p(x + ta) - tp(a)\big) \leq p(x + a) - p(a)$$

$$p(x) \leq p(x + a) - p(a)$$

olduğundan ve p'nin alt toplamsallığından

$$p(x) + p(a) \leq p(x + a) \leq p(x) + p(a)$$

olur. Diğer taraftan;

$$0 = p(0) = p(x - x) = p(x) + p(-x)$$

olduğundan $\forall\ x \in X$ için

$$p(-x) = -p(x)$$

olur. O halde $\lambda < 0$ için $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ dir. Bu durumda p lineerdir.

Tersine p lineer olsun. $\forall\ x \in X$ için $q(x) \leq p(x)$ olacak şekilde bir $q \in \mathbb{P}_a(X)$ verilsin. Bu durumda, $\forall\ x \in X$ için

$$q(x) \leq p(x) = -p(-x) \leq -q(-x) \leq q(x)$$

elde edilir. Buradan $p = q$ olur. Yani p minimaldir. ■

1.1.2 Ayırma Teoremleri

Teorem 1.1.12 (Hahn-Banach Teoremi)**.** *X bir vektör uzayı ve $p : X \to \mathbb{R}$ bir sublineer fonksiyon olsun. Bu durumda en az bir $f : X \to \mathbb{R}$ lineer fonksiyonu vardır öyle ki $\forall\ x \in X$ için $f(x) \leq p(x)$ dir. Yani, X üzerinde p sublineer fonksiyonunu alttan sınırlayan bir lineer fonksiyon vardır.*

Kanıt. Bir $p \in \mathbb{P}_a(X)$ için

$$\mathbb{P}_p(X) = \{q \in \mathbb{P}_a(X) \mid q \preceq p\} \subseteq \mathbb{P}_a(X)$$

kümesi tanımlansın. $p \in \mathbb{P}_p(X)$ olduğundan bu küme $\mathbb{P}_a(X)$'in boştan farklı bir alt kümesidir ve bu kümenin herhangi bir zincirini aldığımızda bu zincir bir alt sınıra sahiptir. O halde Kuratowski-Zorn Lemma'dan bir $f \in \mathbb{P}_p(X)$ minimal elemanı vardır. f minimal olduğundan özel olarak $p \in \mathbb{P}_p(X)$ için $f \preceq p$ dir. Diğer taraftan Önerme 1.1.11'den f lineerdir. Böylece p'yi alttan sınırlayan bir lineer f fonksiyonu vardır. ■

Teorem 1.1.13. *X bir vektör uzayı, $p : X \to \mathbb{R}$ sublineer bir fonksiyon ve $L \subseteq X$ bir lineer alt uzay olsun. $f : L \to \mathbb{R}$, her $x \in L$ için $f(x) \leq p(x)$ olan bir lineer fonksiyoneli verilsin. Bu durumda,*

i) $\forall\ x \in X$ *için* $F(x) \leq p(x)$

ii) $\forall\ x \in L$ *için* $f(x) = F(x)$ *dir, yani* $F|_L = f$

koşullarını sağlayan en az bir $F : X \to \mathbb{R}$ lineer fonksiyoneli vardır

Kanıt. $\tilde{p} : X \to \mathbb{R}$, $\tilde{p}(x) = \inf\limits_{y \in L}\big(p(x-y) + f(y)\big)$ fonksiyonu tanımlansın. p sublineer olduğundan

$$p(-y) \leq p(x-y) + p(-x)$$

olur ve buradan

$$-p(-x) \leq p(-y) - p(-x) - f(-y) \leq p(x-y) + f(y)$$

elde edilir. O halde infimum iyi tanımlıdır.

$\tilde{p}$ fonksiyonu sublineerdir. Gerçekten;

i) $x \in X$ ve $\lambda > 0$ verilsin.

$$\begin{aligned}
\tilde{p}(\lambda x) &= \inf_{y\in L}\Big(p(\lambda x - y) + f(y)\Big)\\
&= \inf_{y\in L}\Big(\lambda p(x - \frac{1}{\lambda}y) + \frac{1}{\lambda}f(y)\Big)\\
&= \inf_{y\in L}\Big(\lambda p(x - \frac{1}{\lambda}y) + f(\frac{1}{\lambda}y)\Big)\\
&= \lambda \inf_{y'\in L}\Big(p(x - y') + f(y')\Big), \quad y' := \frac{1}{\lambda}y\\
&= \lambda \tilde{p}(x)
\end{aligned}$$

ii) $x, y \in X$ verilsin. İnfimum tanımından $\varepsilon > 0$ için

$$\tilde{p}(x) \geq p(x - z_1) + f(z_1) - \varepsilon$$

$$\tilde{p}(y) \geq p(y - z_2) + f(z_2) - \varepsilon$$

olacak şekilde $\exists\ z_1, z_2 \in L$ vardır. $z = z_1 + z_2$ için

$$\begin{aligned}
\tilde{p}(x) + \tilde{p}(y) &\geq p(x - z_1) + p(y - z_2) + f(z_1) + f(z_2) - 2\varepsilon\\
&\geq p(x + y - (z_1 + z_2)) + f(z_1 + z_2) - 2\varepsilon\\
&\geq p(x + y - z) + f(z) - 2\varepsilon\\
&\geq \tilde{p}(x + y)
\end{aligned}$$

olur.

Bu durumda $\tilde{p}$ sublineer fonksiyondur. O halde $\tilde{p}$'nın tanımından $\forall\ x \in L$ için $\tilde{p}(x) \leq f(x)$ tir. f lineer olduğundan minimaldir. Bu durumda $\forall\ x \in L$ için $\tilde{p}(x) = f(x)$ olur. Yani, $\tilde{p}|_L = f$ dir. Teorem 1.1.12'den $F \preceq \tilde{p} \preceq p$ olacak şekilde $\exists\ F : X \to \mathbb{R}$ lineer fonksiyonu vardır ve $F|_L = f$ dir. ■

Tanım 1.1.14. *X bir vektör uzayı,$f : X \to \mathbb{R}$ bir lineer fonksiyonu ve $\alpha \in \mathbb{R}$ sayısı verilsin. Bu durumda,*

$$\{x \in X \mid f(x) \leq \alpha\} \subset X$$

*kümesine bir **yarı uzay** denir.*

Tanım 1.1.15. *X bir vektör uzayı ve $x_0 \in X$ olsun. Bir $p : X \to \mathbb{R}$ sublineer fonksiyonu için*

$$\partial p|_{x_0} = \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ lineer ve } \forall\ x \in X \text{ için } p(x_0) + f(x) \leq p(x + x_0)\}$$

*kümesine p**'nin bir** x_0 **noktasındaki subdiferansiyeli** denir. Özel olarak p'nin $0 \in X$ teki subdiferansiyeli*

$$\partial p|_0 = \{f \mid f : X \to \mathbb{R} \text{ lineer ve } \forall\ x \in X \text{ için } f(x) \leq p(x)\}$$

olur.

Bu tanıma göre, Teorem 1.1.13'nin bir sonucu olarak herhangi bir sublineer $p : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$p(x) = \sup_{f \in \partial p|_0} f(x) \tag{1.1.2}$$

biçiminde ifade edilebilir.

Önerme 1.1.16. *X bir vektör uzayı, $p : X \to \mathbb{R}$ bir sublineer fonksiyon ve $C \subset X$ boş kümeden farklı konveks bir alt küme olsun. Bu durumda*

$$\inf_{x \in C} p(x) = \inf_{x \in C} f(x)$$

ve $\forall\, x \in X$ için $f(x) \leq p(x)$ olacak şekilde en az bir $f : X \to \mathbb{R}$ lineer fonksiyonu vardır

Kanıt. $I = \inf_{x \in C} p(x) > -\infty$ olarak alınsın. Aksi durumda, Teorem 1.1.12'ten $\forall\, x \in X$ için $f(x) \leq p(x)$ olacak şekilde $f : X \to \mathbb{R}$ lineer fonksiyonu vardır ve

$$\inf_{x \in C} p(x) \geq \inf_{x \in C} f(x)$$

dir. $\inf_{x \in C} p(x) = -\infty$ olduğundan

$$\inf_{x \in C} p(x) = \inf_{x \in C} f(x) = -\infty$$

olur. Şimdi bir

$$\tilde{p} : X \to \mathbb{R}, \quad \tilde{p}(x) = \inf_{\substack{y \in C \\ t \geq 0}} (p(x + ty) - tI)$$

fonksiyonu tanımlansın.

$$p(x + ty) - tI \geq -p(-x)$$

olduğundan infimum iyi tanımlıdır ve $\tilde{p} > -\infty$ dur.

$\tilde{p}$ fonksiyonu sublineerdir. Gerçekten;

i) $x, y \in X$ verilsin. Bu durumda infimum tanımından $\varepsilon > 0$ için

$$\tilde{p}(x) \geq p(x + t_1 z_1) - t_1 I - \varepsilon$$

$$\tilde{p}(y) \geq p(y + t_2 z_2) - t_2 I - \varepsilon$$

olacak şekilde $\exists\ z_1, z_2 \in C$ ve $\exists\ t_1, t_2 > 0$ vardır. C kümesinin konveksliğinden

$$
\begin{aligned}
\tilde{p}(x) + \tilde{p}(y) \geq & p(x + t_1 z_1) + p(y + t_2 z_2) - (t_1 + t_2)I - 2\varepsilon \\
\geq & p(x + y + t_1 z_1 + t_2 z_2) - (t_1 + t_2)I - 2\varepsilon \\
= & p\left(x + y + (t_1 + t_2)\left(\frac{t_1}{t_1 + t_2} z_1 + \frac{t_2}{t_1 + t_2} z_2\right)\right) - (t_1 + t_2)I - 2\varepsilon \\
= & p(x + y + tz) - tI - 2\varepsilon, \quad t_1 + t_2 = t \\
\geq & \tilde{p}(x + y)
\end{aligned}
$$

olur. Bu durumda $\tilde{p}$ alt toplamsaldır.

ii) $x \in X$ ve $\lambda > 0$ verilsin.

$$
\begin{aligned}
\tilde{p}(\lambda x) = & \inf_{\substack{y \in C \\ t \geq 0}} \big(p(\lambda x + ty) - tI\big) \\
= & \inf_{\substack{y \in C \\ t \geq 0}} \Big(\lambda p\big(x + \frac{t}{\lambda} y\big) - tI\Big) \\
= & \inf_{\substack{y \in C \\ t \geq 0}} \lambda \Big(p\big(x + \frac{t}{\lambda} y\big) - \frac{t}{\lambda} I\Big) \\
= & \lambda \inf_{\substack{y \in C \\ t' \geq 0}} \big(p(x + t'y) - t'I\big), \quad t' := \frac{t}{\lambda} \\
= & \lambda \tilde{p}(x)
\end{aligned}
$$

olduğundan $\tilde{p}$ pozitif homojendir.

O halde $\tilde{p}$ sublineerdir ve Teorem 1.1.12'ten $\forall\ x \in X$ için $f(x) \leq \tilde{p}(x)$ olacak şekilde bir $f : X \to \mathbb{R}$ lineer fonksiyonu vardır. Buradan, $\forall\ x \in C$ için $f(x) \leq p(x)$ dir ve $\forall\ x \in C$ için $y = x$ ve $t = 1$ iken

$$
-f(x) \leq f(-x) \leq \tilde{p}(-x) \leq p(-x + x) - I = -I
$$

elde edilir. Bu durumda $\forall\ x \in C$ için $I \leq f(x)$ olur. O halde

$$
\inf_{x \in C} p(x) = \inf_{x \in C} f(x)
$$

elde edilir. ■

Teorem 1.1.17. *X bir vektör uzayı, $p : X \to \mathbb{R}$ bir sublineer fonksiyon ve $A, B \subset X$ boş kümeden farklı konveks alt kümeler olmak üzere*

$$\mathrm{dist}_p(A,B) = \inf\{p(a-b) \mid a \in A, b \in B\} > 0$$

olsun. Bu durumda $f(A) \cap f(B) = \emptyset$ olan en az bir $f : X \to \mathbb{R}$ lineer fonksiyonu vardır.

Kanıt. $A - B = \{a - b \mid a \in A, b \in B\}$ konveks ve

$$\mathrm{dist}_p(A,B) = \inf\{p(a-b) \mid a \in A, b \in B\} > 0$$

olduğundan Önerme 1.1.16'den $\forall\, x \in X$ için $f(x) \leq p(x)$ ve

$$\mathrm{dist}_p(A,B) = \inf_{x \in A-B} f(x)$$

olacak şekilde $\exists\, f : X \to \mathbb{R}$ lineer fonksiyonu vardır. f lineer olduğundan

$$0 < \mathrm{dist}_p(A,B) = \inf_{x \in A-B} f(x) = \inf_{x \in A} f(x) - \sup_{x \in A} f(x) \tag{1.1.3}$$

dir. Yani $f(A) \cap f(B) = \emptyset$ dir. ■

Not 1.1.18. (1.1.3) *denklemi*

$$\mathrm{dist}_p(A,B) = \inf\{p(a-b) \mid a \in A, b \in B\} \geq 0$$

olduğu durumda da kanıtlanabilir. Bu durumda

$$\sup_{x \in B} f(x) + \mathrm{dist}_p(A,B) = \inf_{x \in A} f(x)$$

eşitliği sağlanır. $\mathrm{dist}_p(A,B) > 0$ *ise*

$$\sup_{x \in B} f(x) + \varepsilon \leq \inf_{x \in A} f(x)$$

olacak şekilde $\exists\, \varepsilon > 0$ vardır ve $A, B \subset X$ boştan farklı konveks kümeleri $f : X \to \mathbb{R}$ lineer fonksiyonu ile ***tamamen ayrıktır*** *denir.*

$$\sup_{x \in B} f(x) \leq \inf_{x \in A} f(x)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa bu durumda f lineer fonksiyoneli $A, B \subset X$ konveks kümelerini ayırır.

Keyfi iki kümenin konveks zarfları bir $f : X \to \mathbb{R}$ lineer fonksiyonu ile ayrık (tamamen ayrık) ise bu iki kümeye f ile ***ayrık(tamamen ayrık)tır*** *denir.*

1.2 Topolojik Vektör Uzayları

1.2.1 Metrik ve Topolojik Uzaylar

Tanım 1.2.1. *X boş kümeden farklı bir küme olsun. Bir $d : X \times X \to \mathbb{R}$ dönüşümü*

M_1) $\forall\ x, y \in X$ için $d(x,y) = 0$ dır ancak ve ancak $x = y$

M_2) $\forall\ x, y \in X$ için $d(x,y) = d(y,x)$

M_3) $\forall\ x, y, z \in X$ için $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

koşullarını sağlıyorsa bu d dönüşümüne X üzerinde bir ***metriktir*** *denir. (X,d) ikilisine de bir* ***metrik uzay*** *denir.*

Tanım 1.2.2. *(X,d) bir metrik uzay, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ bir dizi ve $x_0 \in X$ olsun. $\forall\ \varepsilon > 0$ için $n \geq n_0$ iken $d(x_n, x_0) \leq \varepsilon$ olacak şekilde $\exists\ n_o \in \mathbb{N}$ varsa $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine* ***yakınsaktır*** *denir ve $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ şeklinde gösterilir.*

Tanım 1.2.3. *(X,d) bir metrik uzay ve $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ bir dizi olsun. $\forall\ \varepsilon > 0$ için $n, m \geq n_0$ iken $d(x_m, x_n) \leq \varepsilon$ olacak şekilde $\exists\ n_o \in \mathbb{N}$ varsa $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine bir* ***Cauchy dizisi*** *denir. Bir metrik uzayda her Cauchy dizisi yakınsak ise bu metrik uzaya* ***tam metrik uzay*** *denir.*

Tanım 1.2.4. *(X,d) bir metrik uzay olsun. $x_0 \in X$ ve $r \geq 0$ için*

$$\mathbb{B}(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}$$

kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı ***açık yuvar****,*

$$\overline{\mathbb{B}}(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) \leq r\}$$

kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı ***kapalı yuvar*** *denir.*

Tanım 1.2.5. *(X,d) bir metrik uzay, $A \subset X$ ve $a \in A$ olsun.$\mathbb{B}(a,r) \subseteq A$ olacak şekilde $\exists\ r > 0$ varsa a'ya A kümesinin bir* ***iç noktasıdır*** *denir. A'nın tüm iç noktalarının kümesine* ***A'nın içi*** *denir ve $\operatorname{int}(A)$ ile gösterilir.*

Tanım 1.2.6. *Bir küme sadece iç noktalardan oluşuyorsa bu kümeye* ***açık küme****, tümleyeni açık olan bir kümeye ise* ***kapalı küme*** *denir.*

Bir M kümesi için

$$\operatorname{cl}(M) = \overline{M} = \bigcap_{\substack{M \subseteq A \subseteq X \\ A \text{ kapalı}}} A$$

kümesine M'nin ***kapanışı*** *denir.*

Tanım 1.2.7. *X bir küme ve τ, X'in bir alt kümeler ailesi olsun. τ ailesi*

T_1) $X, \emptyset \in \tau$

T_2) I herhangi bir indis kümesi olmak üzere; $\forall \{A_i\}_{i\in I} \in \tau$ için $\bigcup\limits_{i\in I} A_i \in \tau$

T_3) J sonlu bir indis kümesi olmak üzere; $\forall \{A_i\}_{i\in J} \in \tau$ için $\bigcap\limits_{i\in J} A_i \in \tau$

*koşullarını sağlıyorsa X üzerinde bir **topolojidir** denir. (X, τ) ikilisine de bir **topolojik uzay** denir.*

Tanım 1.2.8. *$\mathcal{B} \subset \tau$ olsun. $\forall\, U \in \tau$ elemanı $\mathcal{B}$ deki elemanların bir birleşimi olarak yazılabiliyorsa bu durumda $\mathcal{B}$'ya τ**'nun bir tabanıdır** denir.*

Tanım 1.2.9. *(X, τ) bir topolojik uzay olsun. $\forall\, x, y \in X$, $x \neq y$ için $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $\exists\ (x \in) U, (y \in) V \in \tau$ varsa (X, τ) uzayına **Hausdorff uzay** denir.*

Tanım 1.2.10. *$N \subseteq X$ ve $x \in N$ olsun. $x \in U \in N$ olacak şekilde $\exists\ U \in \tau$ varsa N'ye x'in bir τ**-komşuluğu** denir. Özel olarak, $x \in U \in \tau$ ise U'ya x'in bir τ-açık komşuluğu olur.*

τ ve τ' X üzerinde iki topoloji olsunlar. $\tau' \subset \tau$ ise bu durumda τ, τ''den daha **incedir** ya da denk olarak τ', τ'dan daha **kabadır** denir.

Tanım 1.2.11. *(X, τ) ve (Y, τ') iki topolojik uzay, $f : X \to Y$ bir dönüşüm olsun. $\forall\ U \in \tau'$ için $f^{-1}(U) \in \tau$ ise f dönüşümüne **süreklidir** denir.*

Tanım 1.2.12. *(X, τ) Hausdorff uzay ve $K \subset X$ olsun. K'nın her $\{U_i \mid i \in I\}$ açık örtüsünün sonlu bir $\{U_i \mid i \in I_0\}$, $I_0 \subset I$ alt örtüsü varsa K kümesine **kompakttır** denir.*

Teorem 1.2.13 (Cantor Kesişim Özelliği)**.** *(X, τ) bir Hausdorff uzay ve $K \subset X$ bir kompakt alt küme olsun. Bu durumda her azalan ($F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_k \supset \ldots$) $F_i \subset K$ kapalı alt kümeler dizisinin kesişimi boş kümeden farklıdır ($\bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}} F_i \neq \emptyset$).*

1.2.2 Yerel Konveks Vektör Uzayları

Tanım 1.2.14. *X bir gerçel vektör uzayı ve τ X üzerinde bir Hausdorff topoloji olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa (X, τ)'ya bir **topolojik vektör uzayı** denir.*

i) $\forall\, x, y \in X$ *ve* $x+y$*'nin herhangi bir* U_{x+y} *komşuluğu için*

$$U_x + U_y \subseteq U_{x+y}$$

olacak şekilde x*'in bir* U_x *ve* y*'nin bir* U_y *komşuluğu vardır.*

ii) $\forall\, x \in X$, $t_0 \in \mathbb{R}$ *ve* $t_0 x$*'in her* $U_{t_0 x}$ *komşuluğu için* x*'in bir* U_x *komşuluğu ve bir* $\varepsilon > 0$ *vardır öyle ki* $\forall\, t \in \mathbb{R}$ *için* $|t - t_0| < \varepsilon$ *iken*

$$tU_x \subseteq U_{t_o x}$$

dır.

X vektör uzayının A, B alt kümeleri ve $t \in \mathbb{R}$ için kümelerin cebirsel toplamı ve skalerle çarpımı;

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

$$tA = \{ta \mid a \in A\}$$

şeklinde tanımlanır.

Uyarı 1.2.15. *Tanım 1.2.14'da verilen i) ve ii) koşulları sırasıyla,* X*'den alınan elemanların toplamı ve* X*'teki elemanların skalerle çarpım işlemlerinin sürekliliğine denk koşullardır. Toplama ve skalerle çarpım işlemleri bir topolojik vektör uzayında sürekli olduklarından,* X *üzerindeki* τ *topolojisi sıfırın komşuluklarının bir* $\mathcal{U}$ *tabanı ile tam olarak belirlenebilir. Çünkü*

$$\mathfrak{B} = \{U + x \mid x \in X,\ U \in \mathcal{U}\}$$

kümesi τ *topolojisi için bir tabandır. Gerçekten,* $\forall\, (x \in) U \in \tau$ *için* $x \in B \subseteq U$ *olan* $\exists\, B \in \mathfrak{B}$ *varmıdır?* x*'i içeren bir* $U \in \tau$ *alınsın. O halde* $\exists\, U_0 \in \mathcal{U}_\tau(0)$ *vardır öyle ki*

$$U_0 + x \subseteq U$$

olur. O halde $\exists\, B = (U_0 + x) \in \mathfrak{B}$ *vardır öyle ki* $U_0 + x \subseteq U$ *dur. Yani* $\mathfrak{B}$, τ *için bir tabandır.*

Bu durumda sıfırın komşuluklarının herhangi bir tabanı $\mathcal{U}$ olmak üzere lineer topoloji için şu denk koşullar verilebilir.

i') $\forall\, U \in \mathcal{U}$ için $\exists\, V \in \mathcal{U}$ vardır öyle ki

$$V + V \subseteq U$$

dur.

ii') $\forall\, U \in \mathcal{U}$ ve $\forall\, \varepsilon > 0$ için $\exists\, V \in \mathcal{U}$ vardır öyle ki $\forall\, t \in \mathbb{R}$ için $|t| < \varepsilon$ iken

$$tV \subseteq U$$

dur.

yazılabilir.

Tanım 1.2.16. (X, τ) *bir topolojik vektör uzayı ve* $M \subset X$ *olsun. Sıfırın* $\forall\, U$ *komşuluğu için* $M \subseteq \rho U$ *olacak şekilde* $\exists\, \rho \leq 0$ *varsa* M *kümesine* ***sınırlıdır*** *denir.*

Tanım 1.2.17. (X, τ) *bir topolojik vektör uzayı olsun. Sıfırın komşuluklarının konveks kümelerden oluşan en az bir* $\mathcal{U} \in \tau$ *tabanı varsa* X *uzayına* ***yerel konvekstir*** *denir.*

Çarpımın sürekliliğinden $\forall\, U \in \mathcal{U}$ kümesinin orijine göre simetrik olduğu yani $U = -U$ olduğu kabul edilebilir çünkü sıfırın her U komşuluklar tabanı için

$$\mathcal{U}' = \{U \cap -U \mid U \in \mathcal{U}\}$$

ailesi de τ topolojisi için sıfırın bir komşuluklar tabanıdır. O halde bir yerel konveks uzay, $U = -U$ olmak üzere U tamamen konveks kümelerini içeren bir $\mathcal{U} \subset \tau$ sıfırın komşuluklar tabanına her zaman sahiptir.

Yardımcı Teorem 1.2.18. (X, τ) *bir topolojik vektör uzayı ve* $U \subseteq X$ *sıfırın mutlak konveks bir komşuluğu olsun. Bu durumda* $\|.\|_U : X \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$,

$$\|x\|_U = \inf \left\{ t > 0 \mid \frac{x}{t} \in U \right\}$$

fonksiyonu X *üzerinde sürekli bir pseudonormdur.*

Kanıt. Skalerle çarpımın sürekliliğinden $\forall\, x \in X$ için $\|x\|_U$ iyi tanımlıdır. $\forall\, x \in X$ için $(\frac{1}{n}x)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi 0'a yakınsar. Yani $\frac{1}{n_0}x \in U$ olacak şekilde $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan $\|x\|_U \leq n_0$ dır. Şimdi $\|x\|_U$ fonksiyonunun bir pseudonorm olduğu gösterilsin.

i) U mutlak konveks olduğundan $\forall\, x \in X$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned}
\|\lambda x\|_U &= \inf\left\{t>0 \;\Big|\; \frac{\lambda x}{t} \in U\right\} \\
&= \lambda \inf\left\{\frac{t}{\lambda}>0 \;\Big|\; \frac{\lambda x}{t} \in U\right\}; \quad \lambda > 0 \\
&= -\lambda \inf\left\{\frac{t}{(-\lambda)}>0 \;\Big|\; \frac{-\lambda x}{t} \in U\right\}; \quad \lambda < 0 \\
&= |\lambda| \inf\left\{\frac{t}{|\lambda|}>0 \;\Big|\; \frac{|\lambda| x}{t} \in U\right\} \\
&= |\lambda| \inf\left\{s>0 \;\Big|\; \frac{x}{s} \in U\right\}; \quad s = \frac{t}{|\lambda|} \\
&= |\lambda| \|x\|_U
\end{aligned}$$

ii) $x, y \in X$ olsun. $\min\{\|x\|_U, \|y\|_U\} = 0$ durumundaki sıkıntıyı ortadan kaldırmak amacıyla herhangi bir $\rho > 0$ için

$$q(x) = \begin{cases} \|x\|_U & , \quad \|x\|_U \neq 0 \\ \rho & , \quad \|x\|_U = 0 \end{cases}$$

fonksiyonu tanımlansın. $\|x\|_U$ fonksiyonunun tanımından her $0 < \varepsilon < 1$ için $(1-\varepsilon)x/q(x), (1-\varepsilon)y/q(y) \in U$ olur. $U \subseteq X$ konveks olduğundan

$$(1-\varepsilon)\frac{x}{q(x)}\frac{q(x)}{q(x)+q(y)} + (1-\varepsilon)\frac{y}{q(y)}\frac{q(y)}{q(x)+q(y)} = (1-\varepsilon)\frac{x+y}{q(x)+q(y)} \in U$$

olur. Bu durumda

$$(1-\varepsilon)\frac{\|x+y\|_U}{q(x)+q(y)} \leq 1$$

olur ki buradan

$$\|x+y\|_U \leq \frac{1}{1-\varepsilon}(q(x)+q(y))$$

dır. $\varepsilon, \rho > 0$ keyfi olduğundan $\|.\|_U$ sublineerdir.

Böylelikle $\|.\|_U$ fonksiyonunu bir pseudonormdur. Sublineer fonksiyonlar konveks olduğundan $\|.\|_U$ fonksiyonu konvekstir dolayısıyla süreklidir. ■

Sıfırın mutlak konveks bir $U \subseteq X$ komşuluğu için yukarıda tanımlanan $\|.\|_U : X \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ fonksiyonu Minkowski fonksiyoneli ya da gauge(ayar) fonksiyoneli olarak bilinir.

Yerel konveks vektör uzayları için Hahn-Banach ve Ayırma Teoremini yeniden ifade etmek mümkündür.

X yerel konveks bir vektör uzayı ve $U \subset X$ sıfırın mutlak konveks bir komşuluğu olsun. $\|.\|_U : X \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ Minkowski fonksiyoneli sürekli ve lineerdir ve çek$\|.\|_U = \{x \in X \mid \|x\|_U = 0\}$ kümesi X'in kapalı lineer bir altuzayıdır. Hahn-Banach teoreminden X'in $X/_{\text{çek}\|.\|_U}$ bölüm uzayında tanımlı $\|.\|_U$'a göre sürekli olan en az bir lineer fonksiyonel vardır. $U \subseteq X$ açık olduğundan bu fonksiyonel X üzerinde sürekli bir fonksiyonel üretir. O halde sürekli lineer fonksiyonel için genişleme teoremi aşağıdaki şekilde genelleştirilebilir.

Teorem 1.2.19. *X yerel konveks bir vektör uzayı, $U \subseteq X$ sıfırın mutlak konveks bir komşuluğu ve $L \subseteq X$ lineer bir altuzay olsun. $f : L \to \mathbb{R}$, $\forall\, x \in L$ için $f(x) \leq \|x\|_U$ olan lineer bir fonksiyonel olsun. Bu durumda*

i) $\forall\, x \in X$ *için* $F(x) \leq \|x\|_U$

ii) $\forall\, x \in L$ *için* $f(x) = F(x)$, *yani* $F|_L = f$

koşullarını sağlayan en az bir $F : X \to \mathbb{R}$ fonksiyoneli vardır.

Teorem 1.2.20. *X yerel konveks bir vektör uzayı ,$C \subseteq X$ boş kümeden farklı konveks bir alt küme ve $x_0 \in X \setminus C$ olsun. Bu durumda*

$$\sup_{x \in C} f(x) + \varepsilon \leq f(x_0)$$

olacak şekilde $\exists\, \varepsilon > 0$ ve $\exists\, f : X \to \mathbb{R}$ sürekli lineer fonksiyoneli vardır.

1.2.3 Zayıf Topolojiler

Tanım 1.2.21. *(X, τ) bir topolojik vektör uzayı ve*

$$X^* = \{f \mid f : X \to \mathbb{R} \text{ sürekli ve lineer}\}$$

ile X'in dual uzayı olsun.

$$< \cdot, \cdot >: X^* \times X \to \mathbb{R}$$

$$< v, x >= v(x)$$

dönüşümüne X ve X^* arasındaki ***dual çift*** *denir.*

Teorem 1.2.20'den yerel konveks bir X vektör uzayı için X^* dual uzayı X'in noktalarını ayırır. Yani $\forall\ x \in X \setminus \{0\}$ için $f(x) = 1$ olacak şekilde $\exists\ f \in X^*$ vardır.

Tanım 1.2.22. (X, τ) *topolojik vektör uzayı ve* X^*, X*'in dual uzayı olsun.* $\forall\ x \in X$ *için*

$$F_x : X^* \to \mathbb{R}$$

$$F_x(v) = v(x), \quad v \in X^*$$

fonksiyonlarını sürekli kılan en kaba topolojiye X^* ***üzerindeki zayıf*** * ***topoloji*** *denir ve* $\sigma(X^*, X)$ *şeklinde gösterilir.*

Benzer şekilde; $\forall\ f \in X^*$ *için* $f : X \to \mathbb{R}$ *fonksiyonlarını sürekli kılan en kaba topolojiye* X ***üzerindeki zayıf topoloji*** *denir ve* $\sigma(X, X^*)$ *şeklinde gösterilir.*

$(X^*, \sigma(X^*, X))$ ve $(X, \sigma(X, X^*))$ uzayları yerel konveks vektör uzaylarıdır ve $\sigma(X, X^*)$, τ'dan daha kaba bir topolojidir.

1.2.4 Normlu Vektör Uzayları

Tanım 1.2.23. X *bir gerçel vektör uzayı ve* $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, X *üzerinde tanımlı bir norm olsun. Bu durumda* $(X, \|\cdot\|)$ *çiftine bir* ***normlu vektör uzayı*** *denir.*

$d(x, y) = \|x - y\|$ şeklinde tanımlı $d : X \times X \to \mathbb{R}$ dönüşümü bir metrik olduğundan her normlu uzay aynı zamanda bir metrik uzaydır. Ek olarak her normlu vektör uzayı bir yerel konveks vektör uzayıdır. Çünkü her yuvar bir konveks kümedir.

Tanım 1.2.24. $(X, \|\cdot\|)$ *normlu bir vektör uzayı olsun.* X *uzayı tam ise bu uzaya bir* ***Banach uzayı*** *denir.*

$(X, \|\cdot\|_X)$ ve $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normlu vektör uzayları için X'ten Y'ye tüm sürekli dönüşümlerin uzayı

$$L(X, Y) = \{T : X \to Y \mid T \ \ \textit{sürekli ve lineer}\}$$

şeklinde gösterilir. $\forall\, T \in L(X,Y)$ için

$$\|T\| = \sup_{\substack{\|x\|_X \leq 1 \\ x \in X}} \|Tx\|_Y$$

olarak tanımlı $\|\cdot\| : L(X,Y) \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ dönüşümü ile $L(X,Y)$ uzayı bir normlu vektör uzayıdır.

Teorem 1.2.25. *$(X, \|\cdot\|_X)$ normlu vektör uzayı ve $(Y, \|.\|_Y)$ Banach uzayı olsun. Bu durumda $L(X,Y)$ bir Banach uzayıdır.*

$Y = (\mathbb{R}, |.|)$ ise bu durumda;

Sonuç 1.2.26. *$(X, \|.\|)$ normlu vektör uzayı olsun. Bu durumda $(X^*, \|.\|^*)$ uzayı*

$$\|f\|^* = \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ x \in X}} |f(x)|$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

$(X^*, \|.\|^*)$ uzayının dual uzayı ***X'in bidual*** uzayı olarak adlandırılır ve X^{**} ile gösterilir.

Tanım 1.2.27. *$(X, \|.\|)$ normlu uzayı için*

$$i_X : X \to X^{**}$$

$$i_X(x)(f) = f(x)$$

*fonksiyonuna $(X^{**}, \|.\|^{**})$ içine bir **kanonik gömme fonksiyonu** denir.*

Teorem 1.2.19'dan sürekli lineer fonksiyoneller için $\|.\|^{**}$, $\|.\|^*$ 'nin dual normu olmak üzere $\forall\, x \in X$ için $\|i_x(x)\|^{**} = \|x\|$ olduğu yani $i_X : X \to X^{**}$ kanonik gömme fonksiyonunun bir izometri olduğu görülebilir.

Tanım 1.2.28. *$(X, \|.\|)$ bir Banach uzayı olsun. $i_X : X \to X^{**}$ kanonik gömme fonksiyonu örten ise bu durumda $(X, \|.\|)$ uzayı **yansımalıdır** denir.*

Teorem 1.2.29 (Alaoğlu-Bourbaki)**.** *$(X, \|.\|)$ normlu vektör uzayı olsun. Bu durumda*

$$\mathbb{B}(\theta, 1) = \{f \in X^* \mid \|f\|^* \leq 1\}$$

dual birim yuvarı X^*'ın $\sigma(X^*, X)$ zayıf * topolojisinde kompakttır.

Teorem 1.2.30. *$(X, \|.\|)$ Banach uzayının yansımalı olması için gerek ve yeter koşul $\mathbb{B}\ (\theta, 1) = \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$ birim yuvarının X'in $\sigma(X, X^*)$ zayıf topolojisinde kompakt olmasıdır.*

Not 1.2.31. *Bir (X, τ) yansımalı yerel konveks vektör uzayında kapalı sınırlı $\forall\ A \subset X$ konveks kümesi zayıf topolojiye göre kompakttır.*

Örnek 1.2.32. *i) Herhangi bir norm ile donatılmış $X = \mathbb{R}$ uzayı yansımalı bir Banach uzayıdır.*

ii) l^∞ sınırlı dizilerin uzayı olsun ve bu uzay üzerinde $\|(x_n)\|_\infty = \sup\limits_n |x_n|$ normu tanımlansın.

$$c_0 = \{x \in l^\infty \mid x \to 0\} \subset c = \{x \in l^\infty \mid x \text{ yakınsak}\} \subset l^\infty$$

uzaylarının herbiri Banach uzayıdır ve $(c_0)^* = c^* = l^1$, $(l^1)^* = l^\infty$ dir. Fakat hiçbiri yansımalı değildir.

iii) $0 < p < 1$ için

$$L^p[0, 1] = \left\{x : X \to \mathbb{R} \;\middle|\; \int_0^1 |x(t)|^p \mathrm{d}t < \infty\right\} \tag{1.2.4}$$

uzayı üzerinde $d_p(x, y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)|^p \mathrm{d}t$ metriği tanımlansın. Bu uzay yerel konveks değildir ve $(L^p[0, 1])^* = \{0\}$ dir.

1.2.5 Krien-Milman Teoremi

Tanım 1.2.33. *X bir vektör uzayı, $A \subset X$ konveks bir küme ve $B \subset A$ olsun. $\exists\ t \in (0, 1)$ için $tx + (1-t)y \in B$ olacak şekildeki her bir $x, y \in A$ için $x, y \in B$ oluyorsa B'ye A'nın bir **sınır(extreme) alt kümesi** denir.*

*Tek bir nokta içeren bir sınır alt kümeye bir **sınır(extreme) noktası** denir ve A'nın sınır noktalarının kümesi $\varepsilon(A)$ ile gösterilir.*

Tanım 1.2.34. *X bir vektör uzayı, $A \subset X$ konveks bir küme ve $x_0 \in A$ olsun. $\{x_0\} = A \cap f^{-1}(\alpha)$ olacak şekilde $\exists\ f : X \to \mathbb{R}$ sürekli lineer dönüşümü ve $\exists\ \alpha \in \mathbb{R}$ varsa x_0'a A kümesinin bir **uç(exposed) noktası** denir ve A'nın tüm uç noktalarının kümesi $\varepsilon_0(A)$ ile gösterilir.*

Tanım 1.2.35. *A, bir X vektör uzayının konveks bir alt kümesi ve $x_0 \in A$ olsun. $\forall\ x \in A$ için $f(x) \leq f(x_0)$ ya da $f(x_0) \leq f(x)$ eşitsizliklerinden birisi* *sağlanacak şekilde* $\exists\ f : X \to \mathbb{R}$ *fonksiyoneli varsa* x_0*'a* A*'nın bir* ***destek noktası****,* f *fonksiyoneline bir* ***destek fonksiyoneli*** *ve*

$$H_f{}^c = \{z \in X \mid f(z) = f(x_0)\}, \quad c = f(x_0)$$

uzayına bir ***destek hiperdüzlemi*** *denir.*

A'nın her uç noktası bir sınır noktasıdır. Yani $\varepsilon_0(A) \subset \varepsilon(A)$ dır.

Önerme 1.2.36. *A, bir X vektör uzayının konveks bir alt kümesi, B kümesi A'nın bir sınır alt kümesi ve C kümesi B'nin sınır alt kümesi olsun. Bu durumda $C \subseteq A$, A'nın bir sınır alt kümesidir.*

Kanıt. $x, y \in A$ keyfi noktalar ve $\exists\ t \in (0,1)$ için $tx + (1-t)y \in C$ olsun. Bu durumda $C \subseteq B$ olduğundan $tx + (1-t)y \in B$ dir ve B, A'nın bir sınır alt kümesi olduğundan $x, y \in B$ dir. C, B'nin sınır alt kümesi olduğundan $\forall\ x, y \in B$ ve $\exists\ t \in (0,1)$ için $tx + (1-t)y \in C$ iken $x, y \in C$ dir. O halde C, A'nın bir sınır alt kümesidir. ∎

Önerme 1.2.37. *A, X vektör uzayının konveks bir alt kümesi ve $(A_i)_{i \in I}$, A'nın sınır alt kümelerinin bir kümesi olsun. $A_0 = \bigcap\limits_{i \in I} A_i$ boş kümeden farklı ise A_0, A'nın bir sınır alt kümesidir.*

Kanıt. $x, y \in A$ keyfi noktalar ve $\exists\ t \in (0,1)$ için $tx + (1-t)y \in A_0$ olsun. $tx+(1-t)y \in A_0$ olduğundan $\forall\ i \in I$ için $tx+(1-t)y \in A_i$ dir. $\forall i \in I$ için A_i A'nın bir sınır alt kümesi olduğundan $\forall\ i \in I$ için $x, y \in A_i$ dir. Bu durumda $x, y \in A_0$ dır. ∎

Teorem 1.2.38. *(X, τ) yerel konveks bir vektör uzayı ve $A \subset X$ boş kümeden farklı kompakt konveks bir alt küme olsun. Bu durumda $\varepsilon(A) \neq \emptyset$ dır ve A sınır(extreme) noktalarının kapalı konveks zarfıdır, yani $A = \mathrm{clconv}(\varepsilon(A))$ dır.*

Kanıt. $\mathcal{F}(A) = \{E \subseteq A \mid E$ *boştan farklı, kapalı ve* A*'nın sınır alt kümesi*$\}$ kümesi alınsın. Bu küme üzerinde $E_1, E_2 \in \mathcal{F}(A)$ için

$$E_1 \leq E_2 \Leftrightarrow E_1 \subseteq E_2 \tag{1.2.5}$$

şeklinde bir kısmi sıralama verilsin.

$\mathcal{T} = \{D_i \mid i \in I\}$, $\mathcal{F}(A)$'nın bir tam sıralı alt kümesi olsun.

$$E_0 = \bigcap_{i \in I} D_i$$

kümesi tanımlansın. $\forall\ i \in I$ için D_i'ler kapalı olduklarından E_0 kapalıdır. Ayrıca $\mathcal{T}$ tam sıralı ve A kompakt olduğundan D_i'ler Cantor Kesişim özelliğini sağlar. O halde E_0 boştan farklıdır. Buradan Önerme 1.2.37 gereğince E_0 A'nın boştan farklı, kapalı bir sınır alt kümesidir. O halde $E_0 \in \mathcal{F}(A)$'dır. Üstelik $\forall\ i \in I$ için

$$E_0 \subseteq D_i \Rightarrow E_0 \leq D_i$$

olduğundan E_0, $\mathcal{T}$ zincirinin bir alt sınırıdır. Böylece Kuratowski-Zorn Teoremi gereğince $\mathcal{F}(A)$ bir minimal elemana sahiptir. Bu eleman $E_{\min}$ ile gösterilsin. $E_{\min}$ A'nın bir sınır noktası mıdır? Kabul edilsin ki $E_{\min}$ A'nın bir sınır noktası olmasın. Bu durumda $E_{\min}$ en az iki farklı eleman içerir. O halde Ayırma Teoremi gereğince öyle bir $f \in X^*$ sürekli lineer fonksiyoneli vardır ki bu fonksiyonel $E_{\min}$ üzerinde sabit değildir. Gerçekten,

$E_{\min} = \{a, b\}$ olsun. $\{a\} \subseteq E_{\min}$ kapalı ve konvekstir. O halde $b \notin \{a\}$ için öyle bir $f \in X^*$ sürekli lineer fonksiyoneli vardır ki $f(a) < f(b)$ olur.

Buradan, $E'_{\min} = \{x \in E_{\min} \mid f(x) = \min_{y \in E_{\min}} f(y)\}$ kümesi tanımlansın. $E_{\min}$ kompakt A kümesinin kapalı bir alt kümesi olduğundan kompakttır. f sürekli lineer ve $E_{\min}$ kompakt olduğundan f fonksiyoneli $E_{\min}$ üzerinde minimum değerini alır. O halde $E'_{\min} \neq \emptyset$ dir. Ayrıca $E'_{\min}$ kapalı ve konvekstir. Gerçekten,
$(x_n) \subseteq E'_{\min}$ vardır öyle ki $x_n \to x_0$ olsun. $x_0 \in E'_{\min}$ midir? $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in E'_{\min}$ ise

$$f(x_n) = \min_{y \in E_{\min}} f(y)$$

dir. f sürekli olduğundan dizisel süreklidir. O halde,

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \to \infty} x_n) = f(x_0)$$

olur. Bu durumda,

$$f(x_0) = \min_{y \in E_{\min}} f(y)$$

olduğundan $x_0 \in E'_{\min}$ dir. Yani, $E'_{\min}$ kapalıdır. Ek olarak, $E'\min \subseteq E_{\min} \subseteq A$ ve A kompakt oldğundan $E'\min$ kompakttır.

$x_1, x_2 \in E'$min ve $\alpha \in (0,1)$ alınsın. $x_1, x_2 \in E'$min ise

$$f(x_1) = f(x_2) = \min_{y \in E_{\min}} f(y)$$

dir.

$$\begin{aligned} f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) =& \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2) \\ =& \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_1) \\ =& f(x_1) = \min_{y \in E_{\min}} f(y) \end{aligned}$$

olduğundan $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in E'_{\min}$ dir. Yani $E'_{\min}$ konvekstir.

$E'_{\min}$ kümesinin A'nın bir sınır alt kümesi olduğu gösterilirse $E_{\min}$'in $\mathcal{F}(A)$'nın minimali olması ile çelişir.

$x, y \in E_{\min}$ alınsın ve $\exists t \in (0,1)$ için $z = tx + (1-t)y \in E'_{\min}$ olsun. $z \in E'_{\min}$ olduğundan, $f(z) \leq \min\{f(x), f(y)\}$ dır. Diğer taraftan, f lineer ve

$$\min_{y \in E_{\min}} f(y) = f(z) = tf(x) + (1-t)f(y)$$

olduğundan $f(z) = f(x) = f(y)$ bulunur. O halde $x, y \in E'_{\min}$ elde edilir. Dolayısıyla $E'_{min} \subset E_{\min}$ bir sınır alt kümedir. Böylece $E'_{\min} \subset A$, A'nın bir sınır alt kümesidir. Bu durumda $E'_{\min}$, A'nın kapalı bir sınır alt kümesi olması $E_{\min}$ kümesinin minimalliği ile çelişir. O halde kabul yanlıştır. $E_{\min}$, A'nın bir sınır noktasıdır. $\varepsilon(A) \neq \emptyset$'dir.

Şimdi $A = \text{clconv}(\varepsilon(A))$ olduğu gösterilsin.

$L = \text{clconv}(\varepsilon(A))$ olsun. Bu durumda L, A'nın bir kapalı alt kümesidir. Dolayısıyla kompakttır ve L'nin konveks olduğu tanımlanışı gereği açıktır.

$L \subsetneqq A$ olarak kabul edilsin. O halde $x \notin L$ olacak şekilde $\exists x \in A$ vardır. Ayırma Teoremi'nden

$$\min_{z \in L} g(z) > g(x)$$

olacak şekilde bir $g \in X^*$ vardır. $\alpha = \min_{y \in A} g(y)$ alınsın ve buradan

$$B = \{z \in A \mid g(z) = \alpha\}$$

kümesi tanımlansın. B kümesi kompakt ve konvekstir ve A'nın bir sınır alt kümesidir. Ek olarak, $\varepsilon(B) \neq \emptyset$ ve $\varepsilon(B) \subseteq \varepsilon(A) \subseteq L$ dir. Gerçekten; $p \in \varepsilon(B)$ alınsın. O halde $\{p\}$, B'nın bir sınır alt kümesidir. B, A'nın bir sınır alt kümesi olduğundan Önerme 1.2.36 dan $\{p\}$, A'nın bir sınır alt kümesidir. Yani, $p \in \varepsilon(A)$ olur. O halde bir $y \in \varepsilon(B)$ alındığında $y \in L$ dir. $y \in \varepsilon(B)$ için

$$g(y) = \alpha = \min_{y \in A} g(y)$$

ve $y \in L$ ise

$$g(y) \geq \min_{z \in L} g(z) > g(x) > \min_{y \in A} g(y) = \alpha$$

olur ki bu bir çelişkidir. O halde kabul yanlıştır. $A = L$'dir. ■

Tanım 1.2.39. *i) Sonlu tane noktanın bir konveks zarfı olan bir kümeye* ***politop*** *denir. Bir X vektör uzayının tüm politoplarının kümesi $\mathcal{P}(X)$ ile gösterilir.*

ii) Sonlu sayıda kapalı yarı uzayın arakesiti olan konveks kümelere ***polihedral küme*** *adı verilir.*

iii) Bir politopun bir boyutlu bir sınır alt kümesine ***kenar*** *denir.*

Her sınırlı polihedral küme bir politopdur.

Not 1.2.40. *Sonlu boyutlu uzaylarda sınırlı kapalı konveks kümeler için yukarıdaki teorem doğru değildir. Böyle kümelerin ya hiç sınır noktası yoktur yada sonlu tane sınır noktasına sahiptirler.*

Örneğin; $L'[0,1]$ birim aralıkta Lebesgue mutlak integrallenebilir tüm fonksiyonların kümesi ve $C_0[0,1]$ birim aralıkta tüm sürekli fonksiyonların kümesi olsun.

i) $L^1[0,1]$ deki birim yuvar hiç sınır noktaya sahip değildir.

$\|x\| = \int_0^1 |x(t)| \mathrm{d}t = 1$ *olan* $x \in L^1[0,1]$ *için* $\int_0^{\tau_0} |x(t)| \mathrm{d}t = 1/2$ *olacak şekilde* $\exists\ \tau_0 \in (0,1)$ *vardır.*

$$x_1 = \begin{cases} 2x(t) & , \quad 0 \leq t \leq \tau_0 \\ 0 & , \quad \tau_0 < t \leq 1 \end{cases} \quad ve \ x_1 = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq t \leq \tau_0 \\ 2x(t) & , \quad \tau_0 < t \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $x = (1/2)x_1 + (1/2)x_2$ dir. O halde $L^1[0,1]$'deki birim yuvar hiç sınır noktaya sahip değildir.

ii) $C_0[0,1]$*'deki birim yuvar iki sınır noktaya sahiptir.*

$$\mathbb{B}(0,1) = \left\{ x \in C_0[0,1] \;\middle|\; \| x\| = \sup_{0\leq t\leq 1} |x(t)| = 1 \right\}$$

kümesinin sınır noktaları $x_1(t) = 1$ *ve* $x_2(t) = -1$ *fonksiyonlarıdır.*

Krein-Milman Teoremi normlu vektör uzayları için genelleştirilebilir.

Teorem 1.2.41. $(X, \|.\|)$ *bir normlu vektör uzayı ve* $\emptyset \neq A \subset X$ *kompakt konveks alt küme olsun. Bu durumda* $\varepsilon_0(A) \neq \emptyset$ *ve* A *uç noktaların kapalı konveks zarfıdır yani* $A = \mathrm{clconv}(\varepsilon_0(A))$ *dır.*

1.3 Kompakt Konveks Kümeler

Bir (X,τ) topolojik vektör uzayı için $\mathcal{A}(X), \mathcal{B}^*(X), \mathcal{C}(X), \mathcal{B}(X)=\mathcal{B}^*(X)\cap \mathcal{C}(X)$ ve $\mathcal{K}(X)$ sırasıyla X'in boş olmayan tüm alt kümeleri, boş olmayan sınırlı tüm alt kümeleri, boş olmayan kapalı konveks alt kümeleri, tüm kapalı sınırlı konveks alt kümeleri ve boş olmayan kompakt konveks alt kümelerini göstersin.

$A, B \in \mathcal{A}(X)$ için cebirsel toplam $A+B=\{a+b \mid a\in A, b\in B\}$ ve $\lambda\in\mathbb{R}, A\in\mathcal{A}(X)$ için skalerle çarpım $\lambda A=\{\lambda a \mid a\in A\}$ olarak tanımlanır. $A, B\in\mathcal{A}(X)$ için Minkowski toplamı ise

$$A\dot{+}B=\mathrm{cl}(\{x=a+b \mid a\in A, b\in B\})$$

olarak tanımlanır. Açıktır ki $A\dot{+}B=\mathrm{cl}(A)\dot{+}\mathrm{cl}(B)$ dır.

$A, B\in\mathcal{A}(X)$ için $A\overset{\circ}{\vee}B=\mathrm{conv}(A\cup B)$ ve $A\vee B=\overline{A\overset{\circ}{\vee}B}=\mathrm{clconv}(A\cup B)$ olarak tanımlanır.

Tanım 1.3.1. *$A, B\in\mathcal{A}(X)$ için*

$$A\veebar B=\bigcup_{\substack{\alpha,\beta\geq 0\\ \alpha+\beta=1}}(\alpha A+\beta B)$$

kümesine A ***ve*** *B* ***kümelerinin iskeleti*** *denir.*

Tanımdan

$$A\veebar B\subset A\overset{\circ}{\vee}B\subset A\vee B$$

olduğu açıktır.

A ve B konveks kümeler olduğunda $A\veebar B=A\overset{\circ}{\vee}B$ dir.

$a, b\in X$ elemanları için uç noktaları a ve b olan aralık $[a,b]=\{a\}\vee\{b\}$ şeklinde gösterilir.

Kompakt konveks kümeler için Minkowski toplamı ile cebirsel toplam çakışırlar. Yani $A, B\in\mathcal{K}(X)$ için $A+B=A\dot{+}B$ ve $A\overset{\circ}{\vee}B=A\vee B$ dir.

Tanım 1.3.2. *(X,τ) topolojik vektör uzayı ve X^*, X'in dual uzayı olsun. $A\in\mathcal{K}(X)$ ve $f\in X^*$ için*

$$H_f(A)=\left\{z\in A \mid f(z)=\max_{y\in A}f(y)\right\}$$

*kümesine A**'nın** f**'ye göre maksimal yüzü(maximal face)** denir.*

Tanım 1.3.3. *(X, τ) topolojik vektör uzayı ve $A, B \in \mathcal{B}(X)$ olsun. $A \dot{+} C = B$ olacak şekilde $\exists\, C \in \mathcal{B}(X)$ varsa A kümesine B'nin bir **toplananı(summand)** denir.*

Tanım 1.3.4. *(X, τ) topolojik vektör uzayı olsun. $A, B \in \mathcal{A}(X)$ için*

$$A \dot{-} B = \{x \in X \mid B + x \subseteq A\}$$

*kümesine A **ve** B**'nin Pontryagin farkı** denir.*

Tanım 1.3.5. *Sonlu boyutlu bir uzayın kompakt konveks bir alt kümesine bir **konveks yapı** denir.*

1.3.1 Sıralamada Yok Etme Kuralı

Bu kesimde, topolojik vektör uzaylarının kapalı sınırlı konveks alt kümeleri için yok etme özelliği kullanılarak Minkowski-Radström-Hörmander Teoremi kanıtlanacaktır. Bu teorem $A, B, C \in \mathcal{B}(X)$ için $A \dot{+} B \subseteq C \dot{+} B$ kapsamının $A \subseteq C$ kapsamını gerektirdiğini söyler. Bu ise, $(\mathcal{B}(X), \dot{+})$ ikilisinin sıralamada yok etme kuralını sağlayan değişmeli bir yarı grup olduğunu gösterir. Ayrıca $(\mathcal{B}(X), \dot{+})$ yarı grubu için $(\mathcal{K}(X), \dot{+})$ bir alt yarı gruptur.

Teorem 1.3.6. *X bir topolojik vektör uzayı olsun. Bu durumda $\forall\, A \in \mathcal{A}(X)$, $B \in \mathcal{B}^*(X)$ ve $C \in \mathcal{C}(X)$ için $A + B \subseteq C \dot{+} B$ ise $A \subseteq C$ dir.*

Kanıt. $\mathcal{U}$, X topolojik vektör uzayında sıfırın bir komşuluklar tabanı olsun. Verilen bir $U \in \mathcal{U}$ için $V_0 + V_0 \subseteq U$ ve $V_{n+1} + V_{n+1} \subseteq V_n$ olacak şekilde bir $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi tanımlansın. $A + B \subseteq C \dot{+} B$ olduğundan $\forall\, V \in \mathcal{U}$ için

$$A + B \subseteq C + B + V$$

olur ve bu yüzden $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için

$$A + B \subseteq C + B + V_n$$

yazılabilir. $a \in A$ ve $b_1 \in B$ olsun. Bu durumda;

$\exists\, c_1 \in C, \exists\, b_2 \in B, \exists\, v_1 \in V$ için $a + b_1 = c_1 + b_2 + v_1$

$\exists\, c_2 \in C, \exists\, b_3 \in B, \exists\, v_2 \in V$ için $a + b_2 = c_2 + b_3 + v_2$
olur ve genel olarak $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için $\exists\, c_n \in C$, $\exists\, b_{n+1} \in B$, $\exists\, v_n \in V$ için

$$a + b_n = c_n + b_{n+1} + v_n$$

elde edilir. Bu durumda;

$$a = \frac{1}{n}(c_1+c_2+\cdots+c_n)+\frac{1}{n}(b_{n+1}-b_n-\cdots-b_1)+\frac{1}{n}(v_1+v_2+\cdots+v_n), \quad n \in \mathbb{N}$$

dir. C konveks ve B sınırlı olduğundan yeterince büyük $n \in \mathbb{N}$ için

$$a \in C + V_0 + V_1 + \cdots + V_n \subseteq C + U$$

olur. O halde $\forall\, U \in \mathcal{U}$ için $A \subseteq C + U$ ve $A \subset C$ olur. ■

Sonuç 1.3.7. *X topolojik vektör uzayı olsun.*

i) *$A, B, C \in \mathcal{B}(X)$ için*

$$A \dot{+} B \subseteq C \dot{+} B \quad \textit{ise} \quad A \subseteq C$$

dir.

ii) *$A, B, C \in \mathcal{K}(X)$ için*

$$A + B \subseteq C + B \quad \textit{ise} \quad A \subseteq C$$

dir.

"$A+B \subseteq C+B$ $\quad$ *ise* $\quad A \subseteq C$" gerektirmesine sıralamada yok etme kuralı, "$A + B = C + B$ $\quad$ *ise* $\quad A = C$" gerektirmesine ise yok etme kuralı denir.

Tanım 1.3.8. *X topolojik vektör uzayı, $0 < p \leq 1$ ve $K \subset X$ olsun. $\forall\, x, y \in K$ ve $\forall\, \sigma, \tau \geq 0$, $\sigma^p + \tau^p = 1$ için $\sigma x + \tau y \in K$ oluyorsa K kümesine **p-konveks** denir.*

Örnek 1.3.9. *Sınırlı olmayan kapalı konveks kümeler ve $0 < p < 1$, p-konveks kümeler için yok etme kuralı geçerli değildir.*

i) *$X = \mathbb{R}$ için $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$,$B = [0, 1]$ ve $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$ kapalı konveks kümelerdir. $A \dot{+} B = B \dot{+} C = A$ dır fakat $A \neq B$ dir.*

ii) *$X = \mathbb{R}^2$ ve $0 < p < 1$ olsun.*

$$A = \Big\{(x, y) \in X \;\Big|\; |x|^p + |y|^p \leq 1\Big\}$$

$$B_i = \Big\{(x, y) \in X \;\Big|\; |x| + |y| \leq i\Big\}, \quad i \in \{1, 2, 3\}$$

kümeleri verilsin. $A + B_2 = B_1 + B_2 = B_3$ tür fakat $A \neq B_1$ dir.

1.3.2 Konveks Kümeler Üzerinde İşlemler

(X,τ) bir topolojik vektör uzayı ise bu durumda $f \in X^*$ için aşağıdaki özellik sağlanır.

Önerme 1.3.10. *X bir topolojik vektör uzayı, $f \in X^*$ ve $A, B \in \mathcal{K}(X)$ olsun. Bu durumda;*

$$H_f(A+B) = H_f(A) + H_f(B)$$

dir.

Kanıt. $x = a + b \in H_f(A+B), a \in A, b \in B$ olsun. Bu durumda $a \in H_f(A)$ ve $b \in H_f(B)$ dir.

Kabul edilsin ki $a \notin H_f(A)$ olsun. $A \in \mathcal{K}(X)$ kompakt olduğundan $f(a) < f(a')$ olacak şekilde $\exists\ a' \in A$ vardır. $x \in H_f(A+B)$ olduğundan

$$f(x) = f(a) + f(b) < f(a') + f(b) = f(a'+b) \leq \sup_{\substack{u\in A\\ v\in B}} f(u+v) = f(x)$$

olur ki bu durumda $a \in H_f(A)$ olmalıdır. Benzer şekilde $b \in H_f(B)$ dir. O halde $H_f(A+B) \subseteq H_f(A) + H_f(B)$ dır.

Tersine $a \in H_f(A)$ ve $b \in H_f(B)$ olsun. Bu durumda $x = a+b \in H_f(A+B)$ dir. Kabul edilsin ki bu doğru olmasın. O halde $f(x) < f(x')$ olacak şekilde $x' = a' + b' \in A + B$ vardır. Bu durum ya $f(a) < f(a')$ yada $f(b) < f(b')$ olmasını gerektirir ki bu $a \in H_f(A)$ ve $b \in H_f(B)$ olmasıyla çelişir. Öyleyse $H_f(A) + H_f(B) \subseteq H_f(A+B)$ dir. ■

Önerme 1.3.11. *X topolojik vektör uzayı ve $A, B \subset X$ olsun. Bu durumda*

$$\mathrm{conv}A + \mathrm{conv}B = \mathrm{conv}(A+B) \tag{1.3.6}$$

dir.

Kanıt. $A, B \subset X$ için $\mathrm{conv}A + B \subset \mathrm{conv}(A+B)$ dir. Gerçekten; $\forall\ x \in (\mathrm{conv}A + B)$ elemanı $\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i = 1,\ 0 \leq \alpha_i,\ a_i \in A$ ve $b \in B$ olmak üzere $x = \Big(\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i a_i\Big) + b$ şeklinde yazılabileceğinden $x = \sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i(a_i + b)$ olur. Bu durumda $x \in \mathrm{conv}(A+B)$ dir.

$A + B \subset \mathrm{conv}A + \mathrm{conv}B$ olduğundan $\mathrm{conv}(A+B) \subset \mathrm{conv}A + \mathrm{conv}B$ dir. O halde

$$\begin{aligned}
\mathrm{conv}(A+B) &\subseteq \mathrm{conv}A + \mathrm{conv}B \\
&\subseteq \mathrm{conv}(A + \mathrm{conv}B) \\
&\subseteq \mathrm{conv}(\mathrm{conv}(A+B)) \\
&= \mathrm{conv}(A+B)
\end{aligned}$$

olup kanıt biter.

∎

Yardımcı Teorem 1.3.12. *X bir vektör uzayı ve $A, B, C \subset X$ olsun. Bu durumda $(A \cup B) + C = (A + C) \cup (B + C)$ dir.*

Kanıt. $x \in (A \cup B) + C$ için $x = c + d$ olacak şekilde $\exists\, c \in C$ ve $\exists\, d \in A \cup B$ vardır. Bu durumda $c + d \in A + C$ veya $c + d \in B + C$ olur. Yani

$$x = c + d \in (A + C) \cup (B + C)$$

dir. O halde

$$(A \cup B) + C \subseteq (A \cup C) + (B \cup C)$$

elde edilir.

Tersine; $x = c + d \in (A + C) \cup (B + C)$ için $\exists\, c \in C$ ve $\exists\, d \in A$ veya $\exists\, d \in B$ vardır öyle ki $x = c + d$ dir. Bu durumda, $x \in (A \cup B) + C$ yani $(A \cup C) + (B \cup C) \subseteq (A \cup B) + C$ olur. ∎

Aşağıda kapalı, sınırlı, konveks kümeler için Pinsker tarafından bulunan bir özdeşlik verilecektir. Buna Pinsker Formülü denir.

Yardımcı Teorem 1.3.13. *X bir vektör uzayı, $A, B, C \in \mathcal{A}(X)$ ve C konveks bir küme olsun. Bu durumda*

$$\mathrm{conv}(A \cup B) + C = \mathrm{conv}[(A + C) \cup (B + C)]$$

dir.

Kanıt. Önerme 1.3.11 ve Yardımcı Teorem 1.3.12'den

$$\begin{aligned} \mathrm{conv}[(A + C) \cup (B + C)] &= \mathrm{conv}((A \cup B) + C) \\ &= \mathrm{conv}(A \cup B) + \mathrm{conv} C \\ &= \mathrm{conv}(A \cup B) + C \end{aligned}$$

∎

Yardımcı Teorem 1.3.14. *X bir topolojik vektör uzayı, $A, B, C \in \mathcal{A}(X)$ ve C bir konveks küme olsun. Bu durumda;*

$$(A \dot{+} C) \vee (B \dot{+} C) = C \dot{+} (A \overset{\circ}{\vee} B).$$

Kanıt. Yardımcı Teorem 1.3.13'den ve $\forall\, D \subset X$ için $\mathrm{clconv}(D) = \mathrm{clconv}(\mathrm{cl}D)$ olduğundan;

$$\begin{aligned}
C \dot{+} \mathrm{conv}(A \cup B) &= \mathrm{cl}\Big(\mathrm{cl}(C) + \mathrm{cl}\big(\mathrm{conv}(A \cup B)\big)\Big) \\
&= \mathrm{cl}\big(\mathrm{conv}(A \cup B) + C\big) \\
&= \mathrm{clconv}\big((A + C) \cup (B + C)\big) \\
&= \mathrm{clconv}\Big(\mathrm{cl}\big((A + C) \cup (B + C)\big)\Big) \\
&= \mathrm{clconv}\big(\mathrm{cl}(A + C) \cup \mathrm{cl}(B + C)\big) \\
&= \mathrm{clconv}\big((A \dot{+} C) \cup (B \dot{+} C)\big) \\
&= (A \dot{+} C) \vee (B \dot{+} C)
\end{aligned}$$

olur. ■

Önerme 1.3.15 (Pinsker Formulü)**.** *(X, τ) bir topolojik vektör uzayı, C konveks küme ve $A, B, C \in \mathcal{A}(X)$ olsun. Bu durumda;*

$$(A \dot{+} C) \vee (B \dot{+} C) = C \dot{+} (A \vee B)$$

dir.

1.4 Pinsker-Minkowski-Råsdtröm-Hörmander Örgüsü

1954 yılında Hörmander yerel konveks bir uzay için boş kümeden farklı sınırlı kapalı konveks çiftelerin denklik sınıflarını denklik fonksiyonları ile ifade etmiştir.

(X, τ) bir topolojik vektör uzayı olsun. $\mathcal{B}^2(X) = \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(X)$ üzerindeki denklik bağıntısı

$$(A, B) \sim (C, D) \Leftrightarrow A \dot{+} D = B \dot{+} C$$

olarak tanımlansın. Bu şekildeki (A, B) ve (C, D) çiftlerine denktir denir ve $[A, B] \in \mathcal{B}^2(X)/_\sim$, (A, B) küme çiftini içeren denklik sınıfını ifade eder.

1966'da Pinsker $\mathcal{B}^2(X)/_\sim$ üzerindeki sıralama bağıntısını

$$[A, B] \preceq [C, D] \Leftrightarrow A \dot{+} D \subseteq B \dot{+} C$$

şeklinde ifade etmiştir. Bu sıralama bağıntısı denklik sınıflarının temsilcilerinin seçiminden bağımsızdır. $(A', B') \in [A, B]$ ve $(C', D') \in [C, D]$ için
$A \dot{+} D \subseteq B \dot{+} C$ ise $A' \dot{+} D' \subseteq B' \dot{+} C'$ dir. Gerçekten;

$$\begin{array}{rcll}
B \dot{+} C & \supseteq & A \dot{+} D & \\
B \dot{+} C \dot{+} C' & \supseteq & A \dot{+} D \dot{+} C' = A \dot{+} D' \dot{+} C, & (C, D) \sim (C', D') \quad \text{olduğundan} \\
B \dot{+} C' & \supseteq & A \dot{+} D' & \\
B \dot{+} C' \dot{+} B' & \supseteq & A \dot{+} D \dot{+} B' = B \dot{+} A' \dot{+} D', & (A, B) \sim (A', B') \quad \text{olduğundan} \\
C' \dot{+} B' & \supseteq & A' \dot{+} D' &
\end{array}$$

Ek olarak $\mathcal{B}^2(X)/_\sim$ üzerindeki $\preceq$ sıralamasına göre supremum aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\sup\{[A, B], [C, D]\} = [(A \dot{+} D) \vee (C \dot{+} B), (B \dot{+} D)] \in \mathcal{B}^2(X)/_\sim$$

Bu şekilde tanımlanan supremum temsilcinin seçiminden bağımsızdır.

$(\mathcal{B}^2(X)/_\sim, \preceq)$ sıralı uzayı kapalı sınırlı konveks kümelerin *Minkowski-Råsdtröm-Hörmander* örgüsü olarak adlandırılır. Pinsker'in çalışmaları da göz önünde bulundurularak bu örgüye *Pinsker-Minkowski-Råsdtröm-Hörmander* örgüsü de denir ve kısaca $PMRH$-örgüsü şeklinde gösterilir.

$\mathcal{B}^2(X)/_\sim$ üzerindeki çarpım: $[A,B],[C,D] \in \mathcal{B}^2(X)/_\sim$ için

$$[A,B] \star [C,D] = [A\dot{+}C, B\dot{+}D]$$

olarak tanımlanır. Bu çarpma işlemi temsilcilerin seçiminden bağımsızdır. Çarpımın etkisiz elemanı $[\{0\},\{0\}]$ dır ve $[A,B] \in \mathcal{B}^2(X)/_\sim$ elemanının çarpımsal tersi $[B,A] \in \mathcal{B}^2(X)/_\sim$ dır. Pinsker formulünden bu çarpım supremum üzerine dağılma özelliğini sağlar. Yani
$\forall\ [A,B],[C,D],[E,F] \in \mathcal{B}^2(X)/_\sim$ için

$$[A,B] \star (\sup\{[C,D],[E,F]\}) = \sup\{([A,B] \star [C,D]), ([A,B] \star [E,F])\}$$

dir. Ek olarak bu çarpım için kısaltma kuralı geçerlidir. Yani
$[A,B] \star [C,D] = [E,F] \star [C,D]$ ise $[A,B] = [E,F]$ dir. Fakat supremum için kısaltma kuralı geçerli değildir. Bununla ilgili bir örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek 1.4.1. $X = \mathbb{R}$ *olsun ve* $A = B = D = E = \{0\}, F = \{1\}$ *ve* $C = [-1,1]$ *kompakt konveks kümeleri alınsın. Bu durumda;*

$$\{0\} + \{0\} \subset \{0\} + [-1,1] \quad \textit{olduğundan} \quad [A,B] \preceq [C,D]$$

ve

$$\{0\} + \{0\} \subset \{1\} + [-1,1] = [0,2] \quad \textit{olduğundan} \quad [E,F] \preceq [C,D]$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} \sup\{[A,B],[C,D]\} &= [C,D] \\ \sup\{[E,F],[C,D]\} &= [C,D] \end{aligned}$$

dır. Ancak $[A,B] \neq [E,F]$ *dir çünkü* $A + F = \{1\} \neq B + E = \{0\}$ *dır.*

Not 1.4.2. $PMRH$ *örgüsünün, kompakt konveks küme çiftlerinin denklik sınıflarından oluşan alt örgüsü* $(\mathcal{K}^2(X)/_\sim, \leq)$ *olur.*

1.4.1 Minkowski Dualliği

Bu kesimde bir X yerel konveks vektör uzayında destek fonksiyonlarını kullanarak $(\mathcal{K}^2(X)/_\sim, \preceq)$ $PMRH$ örgüsünün farklı bir ifadesi verilecektir.

(X,τ) yerel konveks bir vektör uzayı ve X^*, $\sigma(X^*,X)$ zayıf * topolojisiyle donatılmış dual uzay olsun. $<.,.>$, X ve X^* arasındaki dual çift olmak üzere $\emptyset \neq A \in \mathcal{K}(X)$ kompakt kümesi için

$$p_A : X^* \to \mathbb{R}$$

$$p_A(x) = \max_{a\in A} < a, x >$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona A'nın destek fonksiyonu denir. $A \in \mathcal{K}(X)$ kümesinin destek fonksiyonu sublineerdir. Gerçekten; $\forall\ x, y \in X^*$ ve $\lambda > 0$ için

$$\begin{aligned}
p_A(\lambda x) &= \max_{a\in A} < a, \lambda x > \\
&= \max_{a\in A}(\lambda x)(a) \\
&= \max_{a\in A}\lambda x(a) \\
&= \lambda\max_{a\in A}x(a) \\
&= \lambda\max_{a\in A} < x, a > \\
&= \lambda p_A(x) \\
p_A(x+y) &= \max_{a\in A} < a, x+y > \\
&= \max_{a\in A}(x+y)(a) \\
&= \max_{a\in A}(x(a)+y(a)) \\
&\leq \max_{a\in A}x(a) + \max_{a\in A}y(a) \\
&\leq \max_{a\in A} < a, x > + \max_{a\in A} < a, y >= p_A(x) + p_A(y)
\end{aligned}$$

olduğundan destek fonksiyonu sublineer bir fonksiyondur.

Hörmander p_A destek fonksiyonunun X^* üzerindeki zayıf topolojiye göre sürekli bir fonksiyon olduğunu göstermiştir. Dahası, herhangi bir $p : X \to \mathbb{R}$ sublineer fonksiyonunun τ-sürekli olması için gerekli ve yeterli koşulun,

$$\partial p|_0 = \{v \in X^* \mid\ < v, x >\leq p(x), x \in X\} \in \mathcal{K}(X^*)$$

subdiferansiyelinin $\mathcal{K}(X^*)$'ın bir elemanı olması olduğunu göstermiştir. Dolasıyla, $A = \partial p|_0 \in \mathcal{K}(X^*)$ için

$$p(x) = \max_{a \in A} < a, x >$$

formunda yazılabilir.

$\mathbb{P}(X) = \{p : X \to \mathbb{R} \mid p \quad \textit{sublineer ve sürekli}\} \subset \mathbb{P}_a(X)$, X üzerinde tanımlı gerçel değerli sürekli sublineer fonksiyonların konveks konisi ve $\mathcal{D}(X) = \{\varphi = p - q \mid p, q \in \mathbb{P}(X)\}$ sürekli sublineer fonksiyonların gerçel vektör uzayı olsun. Buna göre $\mathcal{D}(X)$ uzayı bilinen noktasal maksimum ve minimum operatörleriyle bir örgüdür.

Bir $\varphi = p - q \in \mathcal{D}(X)$ fonksiyonunun ifadesi tek türlü değildir çünkü r, X üzerinde keyfi bir sublineer fonksiyon olmak üzere $\varphi = (p + r) - (q + r)$ olarak yazılabilir. Buna rağmen uygun bir sublineer fonksiyon ekleyerek bir ifadeden diğerine geçmek kolay değildir. Aşağıda buna bir örnek verilmiştir.

Örnek 1.4.3.

$$\varphi(x_1, x_2) = \max\{0, x_1, x_2, x_1 + x_2\} - \max\{x_1, x_2, x_1 + x_2\}$$

olarak tanımlanırsa

$$\varphi(x_1, x_2) = \max\{0, x_1, x_2\} - \max\{x_1, x_2\}$$

olduğu açıktır.

Yerel konveks vektör uzayları için $(\mathcal{K}^2(X^*)/_\sim, \preceq)$ *PMRH* örgüsü sublineer fonksiyonların bir farkı olarak ifade edilebilen fonksiyonlar yardımıyla karakterize edilebilir.

(X, τ) yerel konveks bir vektör uzayı ve X^* dual uzayı üzerinde $\sigma(X^*, X)$ zayıf * topoloji var olsun. Sürekli ve sublineer fonksiyonlar bir kompakt konveks kümenin destek fonksiyonu biçiminde yazılabildiğinden

$$\mathcal{D}(X) = \{\varphi = p_A - p_B | (A, B) \in \mathcal{K}^2(X)\}$$

formunda yazılabilir. $\mathcal{D}(X)$ üzerindeki sıralama $\forall\ x \in X$ için

$$\varphi(x) \leq \psi(x) \Leftrightarrow \varphi \leq \psi$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $p_A \leq p_B$ olması için gerekli ve yeterli koşul $A \subseteq B$ olmasıdır.

$\varphi \in \mathcal{D}(X)$ fonksiyonu

$$\varphi = \max_{a\in A} < a, x > -\max_{b\in B} < b, x >= \max_{c\in C} < c, x > -\max_{d\in D} < d, x >$$

şeklinde $(A, B), (C, D) \in \mathcal{K}^2(X^*)$ küme çiftleriyle ifade edilebiliyorsa bu durumda $A\dot{+}D = B\dot{+}C$ dir. Buradan $\mathcal{D}(X)$ ve $\mathcal{K}^2(X^*)$ uzaylarının izomorfik örgüler oldukları görülür ki bu durum Minkowski dualliği olarak bilinir.

Teorem 1.4.4. *X yerel konveks bir vektör uzayı ve*

$$\mathcal{D}(X) = \{\varphi = p_A - p_B \mid (A, B) \in \mathcal{K}^2(X^*)\}$$

olsun. Bu durumda $[A, B] \in \mathcal{K}^2(X^*)/_\sim$ denklik sınıfını $\varphi = p_A - p_B \in \mathcal{D}(X)$ fonksiyonuna götüren dönüşüm ile $(\mathcal{K}^2(X^*), \preceq)$ PMRH-örgüsü ve $\mathcal{D}(X)$ uzayı izomorfiktir ve bu izomorfizm sıra korur yani

$$p_A - p_B \leq p_C - p_D \Leftrightarrow [A, B] \preceq [C, D]$$

dir ve

$$\max\{p_A - p_B, p_C - p_D\} = p_{[(A\dot{+}D)\vee(B\dot{+}C)]} - p_{(B\dot{+}D)}$$

dir.

$(X, \|.\|)$ bir normlu vektör uzayı olsun ve X^* uzayı $\sigma(X^*, X)$ zayıf topolojisi ile donatılmış olsun. $(\mathcal{K}^2(X^*)/_\sim, \preceq)$ *PMRH* örgüsü alınsın.

Tanım 1.4.5. *$M \subseteq X$ bir alt küme ve $f : M \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\forall\ u, v \in M$ için*

$$|f(u) - f(v)| \leq L\|u - v\|$$

*olacak şekilde $\exists\ L \in \mathbb{R}$ varsa f fonksiyonuna **Lipschitz süreklidir** denir.*

Önerme 1.4.6. $(X, \|.\|)$ *bir normlu vektör uzayı olsun. Bu durumda X üzerindeki pozitif homojen konveks iki fonksiyonun farkı olarak ifade edilebilen her fonksiyon Lipschitz süreklidir.*

Kanıt. $A = \partial p|_0 \subset X^*$ zayıf *-kompakt olmak üzere her $p : X \to \mathbb{R}$ sürekli sublineer fonksiyonu için $p(x) = p_A(x) = \sup\limits_{v\in A} < v, x >$ dir. Alaoğlu-Bourbaki Teoremi'nden $\|.\|^*$ dual norm olmak üzere

$$|p_A(x)| \leq \sup_{v\in A}| < v, x > | \leq \big(\sup_{v\in A}\|v\|^*\big)\|x\|$$

dir. p_A ve p_B fonksiyonları sürekli olduğundan; $\forall\ x, y \in X$ için

$$\begin{aligned}
|\varphi(x) - \varphi(y)| &= \Big|\big(p_A(x) - p_B(x)\big) - \big(p_A(y) - p_B(y)\big)\Big| \\
&\leq \big|p_A(x) - p_(y)\big| + \big|p_B(x) - p_B(y)\big| \\
&\leq \max\Big\{p_A(x-y), p_A(y-x)\Big\} + \max\Big\{p_B(x-y), p_B(y-x)\Big\} \\
&\leq 2L\|x-y\|
\end{aligned}$$

olur. Çünkü sublineer bir p fonksiyonu için

$$p(x) - p(y) \leq p(x-y)$$

ve

$$p(y) - p(x) \leq p(y-x)$$

dir yani $|p(x) - p(y)| \leq \max\{p(x-y), p(y-x)\}$ dir. ■

2 DC-FONKSİYONLAR VE DC-KÜMELER

2.1 DC-Fonksiyonlar

Bu bölümde aşağıdaki fonksiyon sınıfları ele alınacaktır.

1. İki konveks fonksiyonun farkı olarak yazılabilen fonksiyonların sınıfı (DC-fonksiyonlar)

2. İki konveks fonksiyonun farkı şeklinde yerel olarak yazılabilen fonksiyonların sınıfı (yerel DC-fonksiyonlar)

3. Sonlu tane r-kere sürekli türevlenebilir fonksiyonların sürekli seçimleri olan fonksiyonların sınıfı ($PC^r, r = 1, 2, ...$)

Klasik diferansiyel hesapta bir fonksiyona bir noktada lineer fonksiyonlarla yaklaşılırken bu yaklaşım metodu Φ sublineer fonksiyonların farkı olarak ifade edilebilen fonksiyonların sınıfı olmak üzere Φ'ye ait fonksiyonlar ile yaklaşıma genişletilebilir.

2.1.1 DC-Fonksiyonların Tanımı

Bu kesimde DC fonksiyonlar tanımlanacaktır.

Tanım 2.1.1. *X bir Banach uzayı olsun. Bir fonksiyon X'de konveks iki fonksiyonun farkı olarak yazılabiliyorsa bu fonksiyona X kümesi üzerinde bir DC-fonksiyon denir. X üzerindeki DC-fonksiyonların sınıfı $DC(X)$ ile gösterilir.*

Konveks ve konkav fonksiyonlar DC-fonksiyonlardır. Q simetrik matrisi pozitif ya da negatif tanımlı olmamak üzere bir $f(x) =< x, Qx >$ quadratik fonksiyonu, ne konveks ne de konkav olan bir DC-fonksiyondur. Gerçekten; $U = [u_1, ..., u_n]$, Q'nun normalleştirilmiş özvektörlerinin matrisi olmak üzere $x = Uy$ olsun. $U^T QU = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ dir. Bu durumda,

$$f_1(x) = \sum_{\lambda_i \geq 0} \lambda_i y_i^2, \quad f_2(x) = -\sum_{\lambda_i < 0} \lambda_i y_i^2, \quad y = U^{-1}x$$

olmak üzere $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ dir.

2.1.2 DC-Fonksiyonlar Üzerinde İşlemler

X bir Banach uzayı olmak üzere DC fonksiyonlar ailesi $\mathbb{R}$'de bir vektör uzayı oluşturur.

Önerme 2.1.2. *X bir Banach uzayı ve $f, g \in DC(X)$ olsun. Bu durumda $f \mp g \in DC(X)$ ve $\forall\ t \in \mathbb{R}$ için $tf \in DC(X)$ dir.*

Kanıt. f_1, f_2, g_1, g_2 konveks fonksiyonlar olmak üzere $\forall\ x \in X$ için

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x)$$

$$g(x) = g_1(x) - g_2(x)$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= (f_1(x) - f_2(x)) + (g_1(x) - g_2(x)) \\ &= (f_1(x) + g_1(x)) - (f_2(x) + g_2(x)) \end{aligned}$$

olur. İki konveks fonksiyonun toplamı konveks olduğundan $f_1 + g_1$ ve $f_2 + g_2$ konveks fonksiyonlardır. O halde $f + g \in DC(X)$ dir. Benzer şekilde;

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= (f_1(x) - f_2(x)) - (g_1(x) - g_2(x)) \\ &= (f_1(x) + g_2(x)) - (f_2(x) + g_1(x)) \end{aligned}$$

olur. $f_1 + g_2$ ve $f_2 + g_1$ konveks fonksiyonlar olduğundan $f - g \in DC(X)$ dir.

$t \in \mathbb{R}$ için $tf(x) = tf_1(x) - tf_2(x)$ olur. $t \geq 0$ için tf_1 ve tf_2 konveks fonksiyonlar olduğundan $tf \in DC(X)$ dir. $t \leq 0$ ise

$$tf(x) = (-tf_2(x)) - (-tf_1(x))$$

olarak yazılabilir. Bu durumda tf_1 ve $-tf_2$ konveks fonksiyonlar olduğundan $t \leq 0$ için $tf \in DC(X)$ olur. ■

Önerme 2.1.3. *X bir Banach uzayı ve $f, g \in DC(X)$ olsun. Bu durumda $\max[f(x), g(x)]$ ve $\min[f(x), g(x)]$ fonksiyonları da DC-fonksiyonlardır.*

Kanıt. f_1, f_2, g_1, g_2 konveks fonksiyonlar olmak üzere $\forall\ x \in X$ için

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x)$$

$$g(x) = g_1(x) - g_2(x)$$

olsun.

$$\begin{aligned}\max[f(x), g(x)] &= \max[f_1(x) - f_2(x), g_1(x) - g_2(x)] \\ &= -[f_2(x) + g_2(x)] + \max[f_1(x) + g_2(x), g_1(x) + f_2(x)]\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. İki konveks fonksiyonun toplamı konveks ve konveks fonksiyonların maksimumları konveks olduğundan f_1+g_2, g_1+f_2, $\max[f_1+g_2, g_1+f_2]$ ve $f_2 + g_2$ fonksiyonları konvekstir. O halde $\max[f(x), g(x)] \in DC(X)$ dir. Benzer olarak; $f, g \in DC(X)$ için $-f, -g \in DC(X)$ olduğundan

$$\min[f(x), g(x)] = -\max[-f(x), -g(x)] \in DC(X)$$

olur. ■

Sonuç 2.1.4. *X bir Banach uzayı ve $\{f_i \mid i = 1, ..., m\}$ DC-fonksiyonların bir ailesi olsun. Bu durumda aşağıdaki fonksiyonlarda X kümesinde bir DC-fonksiyondur.*

i) $\alpha_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, ..., m$ *için* $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i$

ii) $g(x) = \max\{f_1(x), ..., f_m(x)\}$

iii) $h(x) = \min\{f_1(x), ..., f_m(x)\}$

Yardımcı Teorem 2.1.5. *X bir Banach uzayı olsun. $f : X \to \mathbb{R}$ negatif olmayan konveks bir fonksiyon ise f^2 fonksiyonu da konvekstir.*

Kanıt. $f : X \to \mathbb{R}$ negatif olmayan konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\forall\ x, y \in X$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

dir.O halde

$$\left[f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]^2 \leq \left(\frac{f(x) + f(y)}{2}\right)^2 = \frac{f^2(x) + 2f(x)f(y) + f^2(y)}{4} \leq \frac{f^2(x) + f^2(y)}{2}$$

olur. Yani; f^2 fonksiyonu konvekstir. ■

Yardımcı Teorem 2.1.6. *Herhangi bir konveks f fonksiyonu için $f + F_f$ fonksiyonu negatif olmayan konveks bir fonksiyon olacak şekilde $\exists\ F_f$ negatif olmayan konveks bir fonksiyon vardır.*

Kanıt. f konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\forall\ x$ için $f(x) \geq a(x)$ olacak şekilde bir a afin fonksiyonu vardır. $F_f(x) = \max[-a(x), 0]$ olsun. F_f negatif olmayan konveks bir fonksiyondur. O halde $\forall\ x$ için $f(x) + F_f(x)$ negatif olmayan konveks bir fonksiyondur. ■

Önerme 2.1.7. *X bir Banach uzayı ve $f, g \in DC(X)$ olsun. Bu durumda $fg \in DC(X)$ dir.*

Kanıt. $f, g \in DC(X)$ olsun. O halde f_1, f_2, g_1, g_2 konveks fonksiyonlar olmak üzere

$$f = f_1 - f_2$$

$$g = g_1 - g_2$$

olur. f_1, f_2, g_1, g_2 fonksiyonları negatif olmayan fonksiyonlar olsun.

$$\begin{aligned} fg &= (f_1 - f_2)(g_1 - g_2) \\ &= f_1 g_1 - f_1 g_2 - g_1 f_2 + f_2 g_2 \\ &= \frac{1}{2}\Big[\big((f_2 + g_2)^2 + (f_1 + g_1)^2\big) - \big((f_2 + g_1)^2 + (f_1 + g_2)^2\big)\Big] \end{aligned}$$

olur. $f_2 + g_2, f_1 + g_1, f_1 + g_2, f_1 + g_2$ fonksiyonları negatif olmayan konveks fonksiyonlar olduğundan kareleri konvekstir. Bu durumda $fg \in DC(X)$ tir. f_1, f_2, g_1, g_2 negatif olmayan fonksiyonlar olmasaydı bu durumda

$$f = [f_1 + F_{f_1} + F_{f_2}] - [f_2 + F_{f_1} + F_{f_2}]$$

$$g = [g_1 + F_{g_1} + F_{g_2}] - [g_2 + F_{g_1} + F_{g_2}]$$

olacak şekilde $F_{f_1}, F_{f_2}, F_{g_1}, F_{g_2}$ negatif olmayan konveks fonksiyonları bulunabilir öyle ki $(f_1 + F_{f_1} + F_{f_2}), (f_2 + F_{f_1} + F_{f_2}), (g_1 + F_{g_1} + F_{g_2}), (g_2 + F_{g_1} + F_{g_2})$ fonksiyonları negatif olmayan konveks fonksiyonlardır. O halde benzer şekilde $fg \in DC(X)$ dir. ■

Önerme 2.1.8. *Herhangi bir X lineer uzayı için $DC(X)$ kümesi max-min operatörü altında kapalı bir cebirdir.*

Teorem 2.1.9. *$f, g \in DC(\mathbb{R}^n)$ ve $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$ için $g(x) \neq 0$ ise bu durumda $\frac{f}{g} \in DC(\mathbb{R}^n)$ dir.*

Teorem 2.1.9'nun kanıtı yerel DC-fonksiyonları ile verilmiştir.

Tanım 2.1.10. $(X, \|.\|)$ *bir normlu uzay ve* $f : X \to \mathbb{R}$ *bir fonksiyon olsun.* f *gerçel değerli fonksiyonu* $\forall\, x_0 \in X$ *için* x_0*'ın* $\exists\, U_{x_0}$ *komşuluğu üzerinde tanımlı iki konveks fonksiyonun farkı olarak yazılabiliyorsa, yani* $g_{U_{x_0}}, h_{U_{x_0}}$ *konveks fonksiyonlar olmak üzere*

$$f = g_{U_{x_0}} - h_{U_{x_0}}$$

ise f *gerçel değerli fonksiyonuna bir* ***yerel*** $DC(X)$***-fonksiyonu*** *denir. Bir* X *lineer uzayı üzerinde tanımlı yerel* $DC(X)$ *fonksiyonlarının kümesi* $LDC(X)$ *ile gösterilir.*

Önerme 2.1.11. *Herhangi bir* X *lineer uzayı için* $LDC(X)$ *kümesi max-min operatörü altında kapalı bir cebirdir.*

Yardımcı Teorem 2.1.12. D *hem açık hem kapalı konveks bir küme,* $x_0 \in D$ *ve* U*,* x_0*'ın konveks bir komşuluğu olsun.* $D \cap U$ *üzerinde bir konveks* F *fonksiyonu verilsin. Bu durumda* $D \cap U_1$ *üzerinde* $F \equiv F_1$ *olacak şekilde en az bir* U_1 *komşuluğu ve* D*'de konveks bir* F_1 *fonksiyonu vardır.*

Kanıt. $\overline{D \cap U_2}$'de F fonksiyonu sınırlı olacak şekilde bir

$$U_2 = \{x \in D \mid |x - x_0| < r\}$$

yuvarı alınsın ve $K > 0$ bir sabit olmak üzere

$$G(x) = K|x - x_0| + F(x_0) - 1$$

fonksiyonu tanımlansın. K yeterince büyük seçilirse D'nin içinde kalan ve U_2'nin sınırında olan bölgede $G(x) > F(x) + 1 > F(x)$ olur. Açık olarak $x = x_0$ için $G(x) < F(x)$ dir. Buradan U_1, x_0'ın uygun bir komşuluğu olarak seçilirse en az bir $x \in D \cap U_1$ için $G(x) < F(x)$ olur. $x \in D$ olsun ve

$$F_1(x) = \begin{cases} \max(F(x), G(x)) & , \quad x \in U_2 \cap D \\ G(x) & , \quad x \notin U_2 \cap D \end{cases}$$

fonksiyonu tanımlansın. $\max(F(x), G(x))$ fonksiyonu $U_2 \cap D$ üzerinde konveks, D'de ve U_2'nin sınırının bir komşuluğundaki bir x için

$$\max\big(F(x), G(x)\big) \equiv G(x)$$

olduğundan F_1 fonksiyonu D'de konvekstir. O halde $x \in U_1 \cap D$ için

$$F_1(x) = \max\big(F(x), G(x)\big) = F(x)$$

olur. ∎

Yardımcı Teorem 2.1.13. $(X, \|.\|)$ *n-boyutlu Öklid uzayı,* $D \subset X$ *kapalı sınırlı bir konveks küme ve* $0 \in \text{int}D$ *olsun. Bu durumda* $x \in D$ *için* $h(x) \leq 1$ *ve* $x \notin D$ *için* $h(x) > 1$ *olacak şekilde bir* h *fonksiyonu vardır.*

Teorem 2.1.14. D *n-boyutlu bir Öklid uzayında hem açık hem kapalı bir konveks küme olsun.* $f \in LDC(X)$ *ise bu durumda* f, D *üzerinde bir DC-fonksiyondur.*

Kanıt. Kanıt D kümesinin açık olması durumunda verilecektir. D'nin kapalı bir küme olması durumunda benzer şekilde kanıt yapılır.

$f \in LDC(X)$ olsun. Bu durumda $\forall\ x_0 \in D$ için f fonksiyonu DC olacak şekilde en az bir $U = U(x_0)$ komşuluğu $U : |x - x_0| < r(x_0) \subset D$ vardır. O halde $\exists\ F(x) = F(x, x_0)$ fonksiyonu $f(x) + F(x, x_0)$, $U(x_0)$'da konveks olacak şekilde vardır. Gerektiğinde $r(x_0)$ arttırılarak Yardımcı Teorem 2.1.12'den $F(x, x_0)$ fonksiyonu D'de tanımlı ve konveks kabul edilebilir.
$D_1 \subset D$ kompakt konveks bir küme olsun. O halde sonlu tane $U(x_1), ..., U(x_k)$ komşuluğu D_1'yi örter. $F(x) = F(x, x_1) + ... + F(x, x_k)$ olsun. F, D'de tanımlı ve konvekstir. $f(x) + F(x, x_j)$, $U(x_j)$'de konveks olduğundan

$$f(x) + F(x) = f(x) + F(x, x_j) + \sum_{i \neq j} F(x, x_i)$$

fonksiyonu $U(x_j)$ üzerinde konvekstir. O halde $f + F$ fonksiyonu D_1'de konvekstir.
Buradan açık sınırlı konveks $D_1, D_2, ...$ kümelerinin en az bir dizisi vardır öyle ki $D_j \subset D_{j+1}$, $D = \bigcup D_j$ dir ve $\forall\ D_j$ için D üzerinde tanımlı konveks $\exists\ F_j$ fonksiyonu vardır öyle ki $f + F_j$ fonksiyonu D'de konvekstir. Kapalı konveks kümelerin bir $C_1, C_2, ...$ dizisi verilsin öyle ki $C_1 \subset D_1 \subset C_2 \subset D_2 \subset ...$ olsun. $D = \bigcup C_j$ dir.

$x \in C_1$ için $F_2(x) - k \leq F_1(x)$ olacak şekilde yeterince büyük bir $k > 0$ sabiti verilsin. Genellemeler dışında $x = 0$ noktası C_1'in bir iç noktası olarak kabul edilebilir. h, C_1 kümesi için Yardımcı Teorem 2.1.13'de tanımlanan fonksiyon olsun. $K > 0$ bir sabit olmak üzere

$$H(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \in C_1 \\ K[h(x) - 1] & , \quad x \notin C_1 \end{cases}$$

olsun. Buradan H fonksiyonu tüm x için tanımlı ve konvekstir. Özel olarak $x \in C_1$ için

$$F_2(x) - k + H(x) \leq F_1(x) \tag{2.1.7}$$

dir. K yeterince büyük seçilsin öyle ki ∂D_1'de

$$F_2(x) - k > F_1(x) \tag{2.1.8}$$

olsun. $x \notin C_1$ için $h(x) - 1 > 0$ olduğundan bu mümkündür.

$$G_1(x) = \begin{cases} \max(F_1(x), F_2(x) - k + H(x)) & , \quad x \in D_1 \\ F_2(x) - k + H(x) & , \quad x \in D - D_1 \end{cases} \tag{2.1.9}$$

fonksiyonu tanımlansın. G_1 fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar.

i) G_1 fonksiyonu D'de tanımlı ve konvekstir.

ii) $f + G_1$ fonksiyonu D_2'de konvekstir.

iii) C_1 üzerinde $G_1 \equiv F_1$ dir.

Gerçekten; (2.1.7)'den ve G_1 fonksiyonunun tanımından (iii) özelliği sağlanır. (2.1.8)'den ∂D_1'de ve civarındaki bir x için

$$G_1(x) = F_2(x) - k + H(x) \tag{2.1.10}$$

dir. G_1 fonksiyonunun tanımından D_1'de fonksiyon konvekstir, aynı zamanda (2.1.10)'ten $D - D_1$'in her noktasının civarında fonksiyon konveks olduğundan G_1 fonksiyonu D'de konvekstir. O halde (i) özelliğini sağlar. $f + F_1$ fonksiyonu D_1 üzerinde konvekstir ve $f + F_2$ fonksiyonu D_2 üzerinde konveks olduğundan $f(x)+F_2(x)-k+H(x)$ fonksiyonu D_2 üzerinde konveks dolayısıyla D_1 üzerinde konvekstir. Bu durumda $f + G_1 = \max(f + F_1, f + F_2 - k + H)$ fonksiyonu D_1 üzerinde konvekstir. G_1 fonksiyonunun tanımından ve (2.1.10)'ten $f + G_1$ fonksiyonu $D_2 - D_1$'in her noktasının bir civarında konvekstir. Bu durumda G_1 fonksiyonu (ii) özelliğini sağlar.

G_1 fonksiyonundan faydalanarak $G_1, ..., G_{k-1}$ fonksiyonları oluşturulabilir. Bu durumda $F(x) = \lim G_k(x)$ limiti D kümesi üzerinde vardır ve $\forall\ j \geq k$ için C_k kümesi üzerinde $F(x) \equiv G_j(x)$ dir. O halde F, D üzerinde tanımlı ve konvekstir. $f + F$ fonksiyonu $k = 1, 2, ...$ için C_k'da konveks olduğundan D'de konvekstir. Bu durumda f, D'de bir DC-fonksiyondur. ■

Sonuç 2.1.15. *$X = \mathbb{R}^n$ olsun. f bir C^2-fonksiyonu ise bu durumda f bir $DC(\mathbb{R}^n)$-fonksiyondur.*

Kanıt. f bir C^2-fonksiyon olsun. Bu durumda Teorem 2.1.14'den f'nin $\forall\ U \in \mathbb{R}^n$ açık sınırlı konveks kümesi üzerinde bir $DC(X)$-fonksiyon olduğu gösterilmesi yeterlidir. $d^2f|_x(u)$, f'nin $x \in U$ noktasında $u \in \mathbb{R}^n$ yönündeki ikinci dereceden Frechet türevi olsun. ($(H(F)|_x$ Hessian matrisi olmak üzere $d^2f|_x =< u, H(f)|_x >$ şeklinde ifade edilebilir.)

$$\rho \geq -\min\{d^2f|_x \mid x \in U, < u, u >= 1\}$$

olacak şekilde bir $\rho > 0$ seçilsin. Bu durumda

$$g(x) = f(x) + \frac{\rho}{2} < x, x >$$

fonksiyonu konvekstir. Gerçekten; $< u, u >$ olan $\forall\ u \in \mathbb{R}$ ve $\forall\ x \in U$ için

$$d^2g|_x(u) = d^2f|_x(u) + \rho < u, u > \geq 0$$

olur. g fonksiyonunun Hessian matrisi U'nun her noktasında pozitif yarı tanımlı olduğundan g konvekstir. Negatif olmayan konveks bir fonksiyonun karesi konveks olduğundan $< x, x >= \|x\|^2$ fonksiyonu konveks bir fonksiyondur. Bu durumda $f(x) = g(x) - \dfrac{\rho}{2} < x, x >$ fonksiyonu bir $DC(X)$-fonksiyondur.

$\blacksquare$

Teorem 2.1.16. $(X, \|.\|)$ *normlu uzay,* $f \in DC(\mathbb{R}^n)$*-fonksiyon ve* g_i, $i = 1, 2, ..., n$ *gerçel değerli* $LDC(X)$*-fonksiyonlar olsun. Bu durumda* $f(g_1, g_2, ..., g_n) \in LDC(X)$ *dır.*

Kanıt. Teoremin kanıtını f'nin konveks olduğu durumda yapmak yeterlidir.

$x_0 \in X$, $i = 1, 2, ..., n$ için $y_i = g_i(x)$ ve $y_i^0 = g_i(x_0)$ olsun. $V \subset \mathbb{R}^n$ $y_0 = (y_1^0, ..., y_n^0)$'ın konveks sınırlı bir komşuluğu olsun. f fonksiyonu konveks ve V kompakt olduğundan f fonksiyonu V kümesi üzerinde afin fonksiyonların maksimumu olarak ifade edilebilir. Yani T kompakt bir küme ve $e_{0,t}, e_{1,t}, ..., e_{n,t}$ sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$f(y) = \max_{t \in T}[e_{0,t} + y_1e_{1,t} + ... + y_ne_{n,t}]$$

dir. $M \geq \max\limits_{\substack{0 \leq i \leq n \\ t \in T}} e_{i,t}$ olacak şekilde $M > 0$ seçilsin.

$G(U) = \{(g_1(x), ..., g_n(x)) \mid x \in U\} \subset V$ ve $i = 1, ..., n$ için a_i, b_i konveks fonksiyonlar olmak üzere g_i fonksiyonlarının herbiri U üzerinde

$$g_i(x) = a_i(x) - b_i(x)$$

olacak şekilde y_0'ın en az bir U konveks bir komşuluğu olsun. Böyle bir U vardır. Çünkü $g_i,\ i=1,2,...,n$ fonksiyonları gerçel değerli yerel DC-fonksiyonlardır.

$$G(x,t)=e_{0,t}+\sum_{i=1}^{n}(M+e_{i,t})a_i(x)+\sum_{i=1}^{n}(M-e_{i,t})b_i(x)$$

ve

$$H(x)=M\sum_{i=1}^{m}(a_i(x)+b_i(x))$$

fonksiyonları tanımlansın. $G(x,t)$ fonksiyonu $\forall\ t\in T$ için x'in konveks bir fonksiyonu ve H fonksiyonu t değişkeninden bağımsız x'in konveks bir fonksiyonudur. Bu durumda $G(x)=\sup_{t\in T}G(x,t)$ konveks bir fonksiyondur. O halde $f(g_1(x),...,g_n(x))=G(x)-H(x)$ fonksiyonu yerel DC dir. ■

Bu teoremin sonsuz boyutlu uzaylarda doğru olup olmadığı bilinmemektedir.

Sonuç 2.1.17. *$f\in DC(\mathbb{R}^n)$ ve $g_i, i=1,...,n\in DC(\mathbb{R}^m)$ olsun. Bu durumda $f(g_1,g_2,\ldots,g_n)$ bileşke fonksiyonu bir $DC(\mathbb{R}^m)$-fonksiyondur.*

Teorem 2.1.18. *$(X,\|.\|)$ bir normlu uzay $f,g\in LDC(X)$ ve $\forall\ x\in X$ için $g(x)\neq 0$ olsun. Bu durumda $f/g\in LDC(X)$ dir.*

Kanıt. $h(y)=1/y$ fonksiyonu alınsın. h fonksiyonu bir C^2-fonksiyonu olduğundan bir $DC(X)$-fonksiyondur. $\forall\ x\in X$ için $(1/g(x))=h(g(x))$ olarak alınırsa h bir $DC(X)$-fonksiyon ve g bir yerel $DC(X)$-fonksiyon olduğundan bileşke fonksiyonları bir yerel $DC(X)$-fonksiyondur. O halde $\forall\ x\in X$ için

$$\frac{f(x)}{g(x)}=f(x)\frac{1}{g(x)}$$

olduğundan f/g bir yerel $DC(X)$-fonksiyondur. ■

Sonuç 2.1.19. *$f,g\in DC(\mathbb{R}^m)$ ve $\forall\ x\in X$ için $g(x)\neq 0$ olsun. Bu durumda $f/g\in DC(\mathbb{R}^m)$ dir.*

Tanım 2.1.20. *X bir Banach uzayı olsun. Bir fonksiyon X'de sürekli sublineer iki fonksiyonun farkı olarak yazılabiliyorsa bu fonksiyona X üzerinde bir DCH-fonksiyon denir. X üzerindeki DCH-fonksiyonların sınıfı $DCH(X)$ ile gösterilir.*

Bir $DCH(X)$-fonksiyonun iki sürekli sublineer fonksiyonun farkı şeklinde ifade edilişi tek değildir.

$DC(X)$'e ait her pozitif homojen fonksiyon bir $DCH(X)$-fonksiyondur. Gerçekten; f ve g iki konveks fonksiyon olmak üzere $p = f - g$ bir pozitif homojen fonksiyon olsun. f', g', p' ile sırasıyla f, g, p fonksiyonlarının sıfırdaki yönlü türevleri gösterilsin. $p = f - g$ olduğundan $p' = f' - g'$ olur. p fonksiyonu pozitif homojen olduğundan

$$p'(h)(0) = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{p(0 + \lambda h) - p(0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{\lambda p(h)}{\lambda} = p(h)$$

elde edilir. Yani $p = p'$ olur. f' ve g' sublineer olduğundan $p \in DCH(X)$ dir.

Homojenlikten dolayı Lipschitz fonksiyonlar bir $DCH(X)$-fonksiyondur. Gerçekten; $f \in DCH(X)$ olsun. Bu durumda f sıfırda yerel Lipschitz fonksiyondur. Yani $x_1, x_2 \in X$ için $\exists\ r > 0$ ve $\exists\ K > 0$ vardır öyle ki $\|x_1\| \leq r$, $\|x_2\| \leq r$ iken

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K\|x_1 - x_2\|$$

dir. $y_1, y_2 \in X$ keyfi iki eleman olsun. Genellemeler dışında $\|y_1\| \leq \|y_2\|$ olduğu kabul edilsin. f fonksiyonunun homojenliğinden

$$\begin{aligned} |f(y_1) - f(y_2)| &= \frac{1}{r}\|y_2\| \left| f\Big(\frac{ry_1}{\|y_2\|}\Big) - f\Big(\frac{ry_2}{\|y_2\|}\Big) \right| \\ &\leq \frac{K}{r}\|y_2\| \left\| \frac{ry_1}{\|y_2\|} - \frac{ry_1}{\|y_2\|} \right\| = K\|y_1 - y_2\| \end{aligned}$$

olur.

DC-fonksiyonlar kümesi ve LDC-fonksiyonlar kümesi standart çarpım ile bir cebir olmasına rağmen, DCH-fonksiyonlar kümesi standart çarpım ile bir cebir değildir. Çünkü pozitif homojen f, g fonksiyonlarının çarpımı ($fg \equiv 0$ olması dışında) her zaman pozitif homojen bir fonksiyon olmak zorunda değildir.

Banach uzayları üzerinde bir "$\circ$" çarpımı tanımlanabilir öyle ki bu çarpım ile DCH-fonksiyonları kümesi bir cebir olur: $(X, \|.\|)$ bir Banach uzayı ve $S = \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$ bu uzaydaki birim küre olsun. $\forall\ f \in DCH(X)$

fonksiyonu S'ye kısıtlanmış $f|_S$ ile tek şekilde ifade edilebilir. $DCH(X)$'e ait fonksiyonların S'ye kısıtlanmışlarının kümesi bir cebir olduğundan

$$f \circ g(x) = \begin{cases} \|x\| f\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right) g\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right) & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

çarpımı $DCH(X)$ üzerinde iyi tanımlıdır.

Tanım 2.1.21. *X bir topolojik uzay, $U \subset X$ ve Φ, U'da tanımlı gerçel değerli sürekli fonksiyonların bir ailesi olsun. $f_1, ..., f_m \in \Phi$ verilsin. $f : U \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve $\forall\, x \in U$ için $\exists\, i(x) \in \{1, 2, ..., m\}$ indeksi $f(x) = f_{i(x)}(x)$ olacak şekilde varsa bu durumda f fonksiyonu $f_1, ..., f_m$* ***fonksiyonlarının bir sürekli seçimidir*** *denir.*

$I(x) = \{i \in \{1, ..., m\} \mid f(x) = f_i(x)\}$ kümesine f ***fonksiyonun*** *x* ***noktasındaki aktif indeks kümesi*** *denir.*

$I_e(x) = \{i \mid \exists\, M_i$ açık kümesi vardır $\ni \forall\, y \in M_i$ için $f(y) = f_i(y)$ ve $x \in \overline{M_i}\}$ kümesine ***temel indeks kümesi*** *denir.*

Bir $f : U \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $f_1, f_2, ..., f_m$ fonksiyonlarının bir sürekli seçimi ise bu durumda $\forall\, x_0 \in U$ için $\exists\, V(x_0)$ komşuluğu vardır öyle ki $\forall\, y \in V$ için $f(y) = f_{i(y)}(y)$ olacak şekilde $\exists\, i(y) \in I_e(x_0)$ indeksi vardır.

$f_1, ..., f_m$ fonksiyonlarının tüm sürekli seçimlerinin kümesi $CS(f_1, ..., f_m)$ ile gösterilir. Sürekli seçimler için en iyi örnek max-min operatörleri ile elde edilen fonksiyonlardır.

Tanım 2.1.22. *X bir topolojik uzay ve Φ, $U \subset X$ açık kümesi üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonların bir sınıfı olmak üzere $f_1, f_2, ..., f_m \in \Phi$ iken $\forall\, f \in CS(f_1, ..., f_m)$ için $f \in \Phi$ ise Φ'ye* ***sonlu seçim özelliğine sahiptir*** *denir.*

Tanım 2.1.23. *$(X, \|.\|)$ normlu bir uzay ve $U \subseteq X$ bir açık küme olsun. $C^r(U), r = 1, 2, ...,$ U'da tanımlı r-kez sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonların (C^r-fonksiyonların) bir cebiri olsun. Sonlu tane r-kez diferansiyellenebilir (afin,lineer) fonksiyonların bir sürekli seçimine bir* ***parçalı r-kez diferansiyellenebilir fonksiyon*** *(parçalı afin fonksiyon, parçalı lineer fonksiyon)* *denir. Parçalı r-kez sürekli diferansiyellenebilir bir fonksiyon PC^r-fonksiyon olarak gösterilir.*

Sürekli bir f fonksiyonun bir PC^r-fonksiyonu (parçalı afin fonksiyonu, parçalı lineer fonksiyonu) olması için gerekli ve yeterli koşul $\forall\ x \in V$ için $I(x) = \{i \in \{1, ..., m\} \mid f(x) = f_i(x)\} \neq \emptyset$ olacak şekilde $\exists\ V(x_0)$ komşuluğu ve r-kez diferansiyellenebilir (afin, lineer) fonksiyonların bir $f_1, f_2, ..., f_m$ koleksiyonu olmasıdır.

Önerme 2.1.24. $(X, \|.\|)$ *Banach uzayı ve $U \subset X$ bir açık alt küme olsun. Bu durumda U üzerinde tanımlı tüm PC^r-fonksiyonların kümesi $PC^r(U)$ noktasal çarpım ve toplam ile bir cebirdir.*

Kanıt. $f_i \in C^r(U), i = 1, 2, \ldots, n$ olmak üzere $f \in CS(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ olan bir sürekli fonksiyon ve $g_j \in C^r(U), j = 1, ..., m$ olmak üzere $g \in CS(g_1, ..., g_m)$ olan sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda $af + bg$, fg ve max $[f, g]$ sürekli fonksiyonlardır. Ek olarak $af + bg \in CS(\{af_i + bg_j\})$, $fg \in CS(f_i g_j)$ ve $\max(f, g) \in CS(\max\,[f_i, g_j])$, $i = 1, 2, ..., n, j = 1, 2, ..., m$ dir. ■

Sonuç 2.1.25. $(X, \|.\|)$ *bir normlu uzay ve Φ afin fonksiyonların sonlu seçimleri olan sürekli fonksiyonların uzayı olsun. Bu durumda Φ uzayı sonlu seçim özelliğine sahiptir.*

Teorem 2.1.26. $(X, \|.\|)$ *bir normlu uzay ve $a_i, i = 1, 2, ..., k$ X üzerinde tanımlı sürekli lineer fonksiyonlar olmak üzere f fonksiyonu*

$$f_1(x) = a_1(x) + b_1, f_2(x) = a_2(x) + b_2, ..., f_k(x) = a_k(x) + b_k$$

afin fonksiyonlarının sonlu seçimi olan sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda $M_1, ..., M_l \subset \{1, ..., k\}$ indeks kümeleri vardır öyleki

$$f(x) = \max_{1 \leq i \leq l} \min_{j \in M_i} (a_j(x) + b_j)$$

olur.

Kanıt. Genellemeler dışında seçim fonksiyonlarının her birinin birbirinden tamamen farklı olduğu kabul edilebilir. O halde, $\forall\ i \neq j$ için $(a_i, b_i) \neq (a_j, b_j)$ olsun. $\{1, 2, ..., k\}$ sayılarının bir π permütasyonu için

$$M(\pi) = \{x \in X \mid a_{\pi(1)}(x) + b_{\pi(1)} \leq ... \leq a_{\pi(k)}(x) + b_{\pi(k)}\}$$

verilsin. $M(\pi)$ kümesi,

$$\begin{aligned}
(a_{\pi(1)} - a_{\pi(2)})(x) &\leq -b_{\pi(1)} + b_{\pi(2)} \\
(a_{\pi(2)} - a_{\pi(3)})(x) &\leq -b_{\pi(2)} + b_{\pi(3)} \\
\cdots & \\
(a_{\pi(k-1)} - a_{\pi(k)})(x) &\leq -b_{\pi(k-1)} + b_{\pi(k)}
\end{aligned}$$

eşitsizliklerinin çözümlerinin kümesidir. Bu durumda M kümesi ya boş kümedir ya da konveks bir polihedrondur. Π, $\{1, 2, ...,\}$ sayılarının $M(\pi) \neq \emptyset$ olacak şekildeki tüm π permütasyonlarının kümesi olsun. Bu durumda

$$\bigcup_{\pi \in \Pi} M(\pi) = X \tag{2.1.11}$$

olur. Çünkü π, $\{1, ..., k\}$'nın bir permütasyonu olmak üzere tüm polihedronların birleşimi X'i örter ve içi boş olan bir polihedronın çıkarılması bu özelliği değiştirmez. $M(\pi)$ polihedronunun içi,

$$\text{Int}M(\pi) = \{x \in X \mid a_{\pi(1)}(x) + b_{\pi(1)} < ... < a_{\pi(k)}(x) + b_{\pi(k)}\} \tag{2.1.12}$$

olur. f sürekli ve seçim fonksiyonları birbirinden tamamen farklı olduğundan $\forall\ \pi \in \Pi$ için bir tek $i_\pi \in \{1, 2, ..., k\}$ indeksi vardır öyle ki $\forall\ x \in M(\pi)$ için

$$f(x) = a_{\pi(i_\pi)}(x) + b_{\pi(i_\pi)} \tag{2.1.13}$$

dir. O halde;

$$g(x) = \max_{\pi \in \Pi} \min_{i \in \{i_\pi, ..., k\}} a_{\pi(i)}(x) + b_{\pi(i)} \tag{2.1.14}$$

fonksiyonu tanımlanabilir. Bu fonksiyon istenilen formda bir fonksiyondur. Bundan sonra f ve g fonksiyonlarının aynı olduğunu göstermek yeterlidir.

$x_0 \in X$ verilsin. (2.1.11) denkleminden $x_0 \in M(\tilde{\pi})$ olan $\exists\ \tilde{\pi}$ vardır. $M(\tilde{\pi})$ kümesinin tanımından ve $i_{\tilde{\pi}}$ indeksinden

$$f(x_0) = a_{\tilde{\pi}(i_{\tilde{\pi}})}(x) + b_{\tilde{\pi}(i_{\tilde{\pi}})} = \min_{i \in \{1,2,...,k\}} a_{\tilde{\pi}(i)}(x_0) + b_{\tilde{\pi}(i)}$$

elde edilir. Buradan,

$$f(x_0) \leq \max_{\pi \in \Pi} \min_{i \in \{i_\pi, ..., k\}} a_{\pi(i)}(x_0) + b_{\pi(i)} = g(x_0) \tag{2.1.15}$$

olur. Ters eşitsizliği göstermek için $\forall\ \pi \in \Pi$ için

$$f(x_0) \geq \min_{i \in \{i_\pi, ..., k\}} a_{\pi(i)}(x_0) + b_{\pi(i)} \tag{2.1.16}$$

eşitsizliğini göstermek gerekir. Kabul edilsin ki bu eşitsizlik doğru olmasın yani $\exists\ \pi \in \Pi$ için

$$f(x_0) < \min_{i\in\{i_\pi,...,k\}} a_{\pi(i)}(x_0) + b_{\pi(i)}$$

olsun. π permütasyonu birim olarak alınabilir yani $i = 1, 2, ..., k$ için $\pi(i) = i$ olsun. O halde

$$f(x_0) < \min_{i\in\{i_\pi,...,k\}} a_i(x_0) + b_i \tag{2.1.17}$$

dir. $\pi \in \Pi$ olduğundan bir

$$y_0 \in \mathrm{Int}M(\pi) = \{x \in X \mid a_1(x) + b_1 < ... < a_k(x) + b_k\} \tag{2.1.18}$$

vektörü bulunabilir. f parçalı afin fonksiyon olduğundan $[x_0, y_0]$ doğru parçasını görüntüsü bir poligonal yoldur. Gerçekten; sonlu tane $i_j, j = 0, ..., l$ indeksi ve bu indekslere karşılık $x_j \in [x_0, y_0]$ vektörleri vardır öyleki $\forall\ j \in \{0, ..., l\}$ ve $x_{l+1} = y_0$ olmak üzere $\forall\ x \in [x_j, x_{j+1}]$ için

$$f(x) = a_{i_j}(x) + b_{i_j} \tag{2.1.19}$$

dir. Bu durumda $\forall\ j \in \{0, ..., l\}$ için

$$a_{i_j}(x_j) + b_{i_j} < a_i(x_j) + b_i, \quad i \in \{i_\pi, ..., k\} \tag{2.1.20}$$

$$a_{i_j}(y_0) + b_{i_j} < a_i(y_0) + b_i, \quad i \in \{i_\pi, ..., k\} \tag{2.1.21}$$

olur. Gerçekten tüme varımdan; $j = 0$ olduğunda (2.1.17) ifadesinden (2.1.20) eşitsizlik kümesi sağlanır. (2.1.17) aynı zamanda $i_0 \notin i_\pi, ..., k$ olmasını gerektirir ki bu durumda (2.1.18) ifadesinden (2.1.21) eşitsizliği sağlanır. Herhangi bir j indeksi için eşitsizlikler sağlansın, bu durumda $j + 1$ için eşitsizlikler sağlanır mı?

$\forall\ x \in [x_j, y_0]$ ve $\forall\ i \in \{i_\pi, ..., k\}$ için

$$a_{i_j}(x) + b_{i_j} < a_i(x) + b_i \tag{2.1.22}$$

dir. (2.1.19) eşitliğinden

$$a_{i_{j+1}}(x_{j+1}) + b_{i_{j+1}} = a_{i_j}(x_{j+1}) + b_{i_j} \tag{2.1.23}$$

olur. Bu durumda (2.1.22) ifadesi $j + 1$ indeksi için (2.1.20) eşitsizliğini sağlayan bir $x = x_{j+1}$ elemanını verir. Bununla beraber (2.1.22) ve (2.1.23) ifadelerinden $i_{j+1} \notin \{i_\pi, ..., k\}$ dir. O halde (2.1.18) ifadesinden (2.1.21) eşitsizliği sağlanır. $j = l$ alınsın. $x_{j+1} = y_0$ olduğundan (2.1.19) ifadesi sağlanır ve $y_0 \in M(\pi)$ olduğundan

$$f(y_0) = a_{i_l}(y_0) + b_{i_l} < a_{i_\pi}(y_0) + b_{i_\pi} = f(y_0)$$

olur ki bu bir çelişkidir. Bu durumda kabul yanlıştır. $\forall\ \pi \in \Pi$ için

$$f(x_0) \geq \min_{i \in \{i\pi,\dots,k\}} a_{\pi(i)}(x_0) + b_{\pi(i)}$$

olup kanıt biter. ■

$DC(X)$ sınıfı max-min operatörü ile kapalı olduğundan yukarıdaki teoremin bir sonucu aşağıda verilmiştir.

Sonuç 2.1.27. $(X, \|.\|)$ *bir normlu uzay ve* $a_i, i = 1, 2, ..., k$ X *üzerinde tanımlı sürekli lineer fonksiyonlar olmak üzere* f *fonksiyonu* $f_1(x) = a_1(x) + b_1$, $f_2(x) = a_2(x) + b_2, \dots, f_k(x) = a_k(x) + b_k$ *afin fonksiyonlarının sonlu seçimi olan sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda* $f \in DC(X)$ *tir.*

Not 2.1.28. $f_1, f_2, \dots, f_k$ *afin fonksiyonlar olsun. Bu durumda*

(∗) $\forall\ i, j = 1, 2, \dots, k$ *ve* $\forall\ x, h \in X$ *için* $f_i(x + th) - f_j(x + th)$ *fonksiyonu monotondur.*

(∗) özelliğine denk olarak:

(∗∗) $\forall\ x_1, x_2 \in X$ *ve* $\forall\ i, j = 1, 2, \dots, k$ *için* $f_i(x_1) - f_j(x_1) > 0$ *ve* $f_i(x_2) - f_j(x_2) > 0$ *ise bu durumda* $x_l = tx_1 + (1 - t)x_2$ *ve* $0 \leq t \leq 1$ *olmak üzere* $f_i(x_l) - f_j(x_l) > 0$ *dir.*

Bu durumda Teorem 2.1.26 aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

Teorem 2.1.29. $(X, \|\cdot\|)$ *bir normlu uzay,* $f_i, i = 1, ..., k$ *(∗) özelliğini sağlayan fonksiyonlar ve* $f \in CS(f_1, ..., f_k)$ *olsun. Bu durumda* $M_1, ..., M_l \subset \{1, ..., k\}$ *indeks kümeleri vardır öyle ki*

$$f(x) = \max_{1 \leq i \leq l} \min_{j \in M_i} (a_j(x) + b_j)$$

dir.

Bir $f_i, i = 1, 2, ..., n$ **ailesi hangi durumda (∗) özelliğini sağlar?** sorusunu cevaplandırmak için aşağıdaki önerme verilsin.

Önerme 2.1.30. *$\mathbb{R}$'de tanımlı $f_1, f_2, ..., f_k$ Lipschitz fonksiyonların bir ailesi ve $M_i = \{r \in \mathbb{R} \mid r = t^{-1}\big(f_i(x+t) - f(x)\big)\ x, t \in \mathbb{R}, t \neq 0\}$ olsun. $i \neq j$ $i, j = 1, 2, ..., k$ için $\mathrm{int}M_i \cap \mathrm{int}M_j \neq \emptyset$ oluyorsa $f_1, ..., f_k$ ailesi $(*)$ özelliğini sağlar.*

Önerme 2.1.30'da tanımlanan fonksiyonlar yüksek boyutlu uzaylarda da $(*)$ özelliğini sağlar. Gerçekten; X normlu bir uzay ve X_0 boyutu X'in boyutundan 1 boyut düşük olan bir alt uzayı olsun. X/X_0 uzayında $(*)$ özelliğini sağlayan bir $f_1, \ldots, f_k$ ailesi verilsin. $[x]$, x'in oluşturduğu denklik sınıfını göstermek üzere X uzayında bu aile yardımıyla $\tilde{f}_j(x) = f_j([x]), \quad j = 1, \ldots, k$ ailesi oluşturulabilir ve $\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_k$ ailesi $(*)$ özelliğini sağlar.

Önerme 2.1.31. *$(X, \|.\|)$ normlu bir uzay ve g sürekli bir fonksiyon olsun. $\{0, g\}$ $(*)$ özelliğini sağlasın. Bu durumda $\forall\ x \in X, y \in X_0$ için $g(x) = g(x+y)$ olacak şekilde X'in bir boyutlu bir X_0 alt uzayı vardır.*

Kanıt. Bir $x \in X$ verilsin ve $0 \neq y \in X$ herhangi bir eleman olsun. $\alpha \in \mathbb{R}$ için $g_\alpha(t) = g(x + t\sin\alpha x + t\cos\alpha y)$ fonksiyonlarının bir ailesi alınsın. Bu durumda g_α azalmayan bir fonksiyon ise $g_\alpha(t) + \pi(t)$ artmayandır. O halde g fonksiyonunun sürekliliğinden $\exists\ \alpha_1$ vardır öyle ki g_{α_1} fonksiyonu aynı zamanda hem artmayan hem de azalmayandır. Öyleyse g_{α_1} sabit fonksiyondur. x yerine βx alınırsa $\exists\ \alpha_\beta$ vardır öyle ki

$$g(\beta x) + t\sin\alpha_\beta x + t\cos\alpha_\beta y$$

sabittir. Bu durumda ya her β için α_β eşittir ya da g fonksiyonu sabittir. Öyleyse $\forall\ x, y \neq 0$ için $0 \neq y_x$ elemanı bulunabilir öyle ki $y_x \in \mathrm{lin}\{x, y\}$ dir ve $g(x + ty_x)$ t'nin sabit fonsiyonudur. Tüm y_x'lerin kümesi A_x ile gösterilsin. A_x kümesi pozitif homojendir. $\{0, g\}$ $(*)$ özelliğini sağladığından ve $\forall\ z \in \mathrm{conv}A_x$ için $g(x + ty_x)$ t'nin sabit bir fonksiyonu olduğundan A_x kümesi lineer bir alt uzaydır. Herhangi bir y için $A_x \cap \mathrm{lin}\{x, y\} \neq \emptyset$ dir. Bu durumda ya $A_x = X$ tir ya da A_x bir boyutlu X_0 uzayıdır. ■

Süreklilik koşulu kaldırılırsa yukarıdaki önerme sağlanmaz. Örneğin; $X = \mathbb{R}^2$ ve

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & , \quad y > 0 \\ 0 & , \quad y = 0 \quad \text{ve} \quad x > 0 \\ -1 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

alınsın. $\{0, g\}$ çifti $(*)$ özelliğini sağlar fakat g fonksiyonu istenilen formda değildir.

Önerme 2.1.31 kullanılarak $(*)$ özelliğini sağlayan fonksiyonların bir sınıfı aşağıdaki biçimde verilebilir.

Yardımcı Teorem 2.1.32. *X ve Y lineer uzaylar, $g, h : X \to Y$ iki fonksiyon ve h lineer olsun. Ek olarak $\forall\ x, z \in X$ için g ve h fonksiyonları*

$$g(x+z) - g(x) = h(z)$$

denklemini sağlasın. Bu durumda h toplamsaldır ve g afin fonksiyondur.

Kanıt. $z = 0$ olsun. Bu durumda $h(0) = 0$ dır. $z = -x$ olsun. O halde $a = g(0)$ olmak üzere $g(x) = a + h(x)$ dir. $x, y \in X$ için $g(x+y) = a + h(x+y)$ ve hipotezden $g(x+y) - g(x) = h(y)$ olduğundan

$$\begin{aligned} g(x+y) &= g(x) + h(y) \\ &= a + h(x) + h(y) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda $h(x+y) = h(x) + h(y)$ olur. O halde h toplamsaldır. $\forall\ x \in X$ için $g(x) = a + h(x)$ ve h fonksiyonu lineer olduğundan g fonksiyonu afindir. ■

Önerme 2.1.33. *$(X, \|.\|)$ normlu bir uzay ve $f_0, f_1, \ldots, f_k$ X üzerinde tanımlı $(*)$ özelliğini sağlayan sürekli fonksiyonların bir ailesi olsun. Bu durumda $f_0, ..., f_k$ fonksiyonları ya afindir ya da X in bir boyutlu $\exists\ X_0$ altuzayı vardır öyle ki $f_0(x+y), \ldots, f_k(x+y)$ fonksiyonları y'nin bir fonksiyonu olarak X_0 üzerinde sabittir.*

Kanıt. Öncelikle $X = \mathbb{R}^2$ olarak alınsın. Genelleştirmeler dışında $f_0 \equiv 0$ olarak kabul edilebilir. f_1, f_2 fonksiyonları alınsın. Bu durumda $\exists\ L_1, L_2$ doğruları vardır öyle ki L_1'e paralel doğrular boyunca f_1 fonksiyonu sabittir ve L_2'ye paralel doğrular boyunca f_2 fonksiyonu sabittir. O halde iki durum söz konusudur:

(i) $L_1 \parallel L_2$ dir.

(i) $L_1 \nparallel L_2$ dir.

$L_1 \parallel L_2$ olsun. Bu durumda X'in 1 boyutlu bir X_0 altuzayı vardır öyle ki $f_0(x+y), \ldots, f_k(x+y)$ fonksiyonları y'nin bir fonksiyonu olarak X_0'da sabittir.

$L_1 \nparallel L_2$ olsun. $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$ için $f_1(x,y) = g_1(x)$ ve $f_2(x,y) = g_2(y)$ olarak alınsın. f_1, f_2 fonksiyonları $(*)$ özelliğini sağladığından en az bir

$$L_3 = \{(x,y) \mid ax + by = 0\}$$

doğrusu vardır öyle ki L_3'e paralel doğrular boyunca f_1 fonksiyonu sabittir. Varsayılsın ki $a = 1$ olsun. O halde $z \in \mathbb{R}$ için $g_1(x+z) + bg_2(y) = h(z)$ dir. $z = 0$ alınsın. $g_1(x) + bg_2(y) = h(0)$ olur. Bu durumda $\forall\ z \in \mathbb{R}$ için $g_1(x+z) - g_1(x) = h(z)$ dir. g_1 fonksiyonu sürekli bir fonksiyon olduğundan Yardımcı Teorem 2.1.32'den g_1 afin fonksiyondur. O halde $f_1(x,0), f_2(0,y)$ fonksiyonları afin fonksiyonlardır.

Bu durumda f_1, f_2 fonksiyonları 2-boyutlu her altuzayda afin fonksiyonlardır. Yani uzayın tamamında afindirler. Bu durum $\forall\ f_i, f_j$ fonksiyon çifti için doğrudur. $f_0, f_1, ..., f_k$ fonksiyonları afindirler. ■

PC^r-fonksiyonlar her zaman max-min formunda yazılamayabilir.

Örnek 2.1.34. $0 \leq x \leq 2\pi$ *için* $f_1(x) = \sin 2x$ *ve* $f_2(x) = -\sin 2x$ *olsun.* $f_1, f_2, \max\{f_1, f_2\}$ *ve* $\min\{f_1, f_2\}$ *fonksiyonları maksimum ve minumum operatörleri altında kapalıdır. Gerçekten;* $\forall\ x \in (0, 2\pi)$ *için*

$$\min\Big\{\max[f_1(x), f_2(x)], f_1(x)\Big\} = f_1(x)$$

$$\min\Big\{\max[f_1(x), f_2(x)], f_2(x)\Big\} = f_2(x)$$

$$\max\Big\{\min[f_1(x), f_2(x)], f_1(x)\Big\} = f_1(x)$$

$$\max\Big\{\min[f_1(x), f_2(x)], f_2(x)\Big\} = f_2(x)$$

Diğer taraftan

$$f_3(x) = \begin{cases} |sin2x| & , \quad 0 \leq x \leq 2\pi \\ -|sin2x| & , \quad \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

fonksiyonu bir PC^r*-fonksiyonudur fakat* $f_1, f_2, \min\{f_1, f_2\}, \max\{f_1, f_2\}$ *formunda değildir.*

Fakat PC^r-fonksiyonları yerel olarak max-min formunda yazılabilir.

Tanım 2.1.35. *M ve N iki manifold ve $f : M \to N$ bir fonksiyon olsun. f ve f^{-1} fonksiyonlarının her ikisi de diferansiyellenebilir ise f fonksiyonuna bir* ***diffeomorfizm*** *denir. $\forall\ x \in M$ için $f(U) \subset N$ açık ve $f|_U : U \to f(U)$ bir diffeomorfizm olacak şekilde $\exists\ (x \in)U$ açık kümesi varsa f fonksiyonuna bir* ***yerel diffeomorfizm*** *denir.*

Önerme 2.1.36 (Bartels, Knutz ve Scholtes(1995)). *$U \subset \mathbb{R}^n$ açık bir küme, $x_0 \in U$ ve $f_i \in C^1(U), i = 1, 2, \ldots, k$ için $f \in CS(f_1, \ldots, f_k)$ olsun. Aktif fonksiyonların gradyentleri lineer bağımsız ise f fonksiyonu $f_1, f_2, \ldots, f_k$ fonksiyonlarının bir max-min formunda yerel olarak ifade edilebilir, yani $\forall\, x \in U_0$ için*

$$f(x) = \max_{1 \le i \le l} \min_{j \in M_i} f_j(x)$$

olacak şekilde $\exists\, M_1, M_2, \ldots, M_l \subset \{1, 2, \ldots, k\}$ indeks kümeleri ve x_0'ın bir U_0 komşuluğu vardır.

Kanıt. Genellemeler dışında tüm $f_1, f_2, \ldots, f_k$ fonksiyonlarının x_0'da aktif olduğu yani $f(x_0) = f_1(x_0) = \cdots = f_k(x_0)$ olduğu kabul edilsin. $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlansın. $\nabla f_1|_{x_0}, \nabla f_2|_{x_0}, \ldots, \nabla f_k|_{x_0}, l_{k+1}, \ldots, l_n$ lineer bağımsız ve $l_{k+1}, \ldots, l_n$ lineer fonksiyonlar olmak üzere

$$F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_k(x) \\ l_{k+1}(x - x_0) \\ \vdots \\ l_n(x - x_0) \end{pmatrix} \tag{2.1.24}$$

olsun.

Böyle bir seçim varsayımdan mümkündür.

Ters fonksiyon teoreminden, F fonksiyonu x_0'da yerel diffeomorfizmdir. $\forall\ i = 1, 2, \ldots, k$ için $f_i(F^{-1}(y)) = y_i$ dir. $f(F^{-1}(y))$ fonksiyonu sıfırın bir komşuluğunda yerel olarak max-min formunda ifade edilebilir.

Yani, $M_1, M_2, \ldots, M_l \subseteq \{1, 2, \ldots, k\}$ indeks kümeleri ve $F(x_0)$'ın bir V komşuluğu vardır öyle ki $x \in U$ için

$$f(F^{-1}(y)) = \max_{1 \le i \le l} \min_{j \in M_l} y_j$$

dir. Bu durumda $x \in U = F^{-1}(V)$ için

$$f(x) = \max_{1 \le i \le l} \min_{j \in M_l} y_j$$

olur. ∎

Aşağıdaki örnek sürekli bir seçim olduğu halde max-min gösterimi olmayan bir fonksiyona örnektir.

Örnek 2.1.37. *$f(x) = |x|x + x$ olsun. f fonksiyonu $f_1(x) = x^2 + x$ ve $f_2(x) = -x^2 + x$ fonksiyonlarının sürekli bir seçimidir. Fakat bu f fonksiyonunun bir max-min gösterimi yoktur.*

Önerme 2.1.38 (Knutz- Scholtes(1995))**.** *$(X, \|.\|)$ bir Banach uzayı ve $U \subset X$ açık bir küme olsun. Bir $f : U \to \mathbb{R}$ PC^1 fonksiyonu $\forall\ g \in X$ yönünde $\forall\ x_0 \in U$ noktasında $\mathrm{d}f|_{x_0}(g)$ yönlü türevine sahiptir. Ek olarak bu $\mathrm{d}f|_{x_0}(g)$ yönlü türevi g'nin bir fonksiyonu olarak homojen ve parçalı lineerdir.*

Kanıt. $x_0 \in U$ olsun. $f_1, f_2, \ldots, f_n$ C^1 fonksiyonlar olmak üzere f bu fonksiyonların sürekli bir seçimi olsun. Genellemeler dışında $x \in \tilde{U}$ için $f(x) = f_i(x)$, $i = 1, \ldots, m \quad, m \leq n$ olacak şekilde $\exists\ \tilde{U}$ komşuluğu vardır. $g \in X$ sabit ve $\forall\ t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ için $x_0 + tg \in \tilde{U}$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ için $(-\varepsilon, \varepsilon)$ açık aralığında $\phi(t) = f(x_0 + tg) - f(x_0)$ fonksiyonu tanımlansın. ϕ fonksiyonu $\phi(0) = 0$ olacak şekilde $\phi_i(t) = f_i(x_0 + tg) - f_i(x_0), \quad i = 1, 2, \ldots, m$ fonksiyonlarının sürekli bir seçimi olsun. $i \neq j$ için $\phi'_i(0) \neq \phi'_j(0)$ ise bu durumda

$$\phi_i(t) = \phi_i(0) + \int_0^t \phi'_i(s)\mathrm{d}s$$

eşitliğinden yeterince küçük $\forall\ t > 0$ için $\phi_i(t) \neq \phi_j(t)$ dir. Bu yüzden yeterince küçük $t > 0$ için $\phi(t)$ fonksiyonu $\phi_i(t)$ yada $\phi_j(t)$ değerlerinden sadece birini alır. O halde yeterince küçük $\varepsilon > 0$ için $(0, \varepsilon)$ şeklindeki bir aralıkta ϕ'nin diğer seçim fonksiyonu ihmal edilebilir. Bu şekilde bir $I(g) \subseteq \{1, \ldots, m\}$ indeks kümesi elde edilir öyle ki en az bir $(0, \varepsilon)$ aralığında ϕ fonksiyonu ϕ_i, $i \in I(g)$ fonksiyonlarının sürekli bir seçimidir ve tüm $\phi'_i(0)$, $i \in I(g)$ türevleri çakışıktır.

Sonuç olarak ϕ fonksiyonunun $\phi^+(0)$ türevi vardır ve bu türev ϕ_i'nin bu noktadaki türevi ile aynıdır. Yani $\forall\ i \in I(g) \subseteq I(x_0)$ için

$$\phi^+(0) = \phi'_i(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + tg) - f(x)}{t}$$

dir. $\mathrm{d}f|_{x_0}(g) = \phi^+(0)$ olduğundan yönlü türev vardır ve bu türev $\mathrm{d}f_i|_{x_0}(g)$, $i = 1, \ldots, m$ değerlerinden birine denktir.

Tanımdan $\mathrm{d}f|_{x_0}(g)$ yönlü türevi g'nin bir fonksiyonu olarak homojendir. $\forall\ i = 1, 2, \ldots, m$ için $\mathrm{d}f_i|_{x_0}(g)$ lineer olduğundan $\mathrm{d}f|_{x_0}(g)$ türevi parçalı lineerdir. ■

Sonuç 2.1.39. *$(X, \|\cdot\|)$ bir Banach uzayı, $U \subset X$ açık bir küme ve $f : U \to \mathbb{R}$ bir PC^1 fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonu $\forall\ x_0 \in U$ noktasında $\forall\ g \in X$ yönünde $\mathrm{d}f|_{x_0}(g)$ yönlü türevine sahiptir ve ek olarak $\mathrm{d}f|_{x_0}(g) \in DCH(X)$ dir.*

2.2 Bileşke Fonksiyonların DC Gösterimi

Bir DC fonksiyonun konveks fonksiyonların bir farkı olarak nasıl yazıldığı önemlidir. Bu bölümde ve sonraki bölümde bazı özel fonksiyon sınıfları için DC gösterimlerinden bahsedilecektir.

Uygulamada karşılaşılan bir çok fonksiyon (maliyet, fayda fonksiyonları gibi) konveks ya da konkav fonksiyonların konveks monoton veya konkav monoton fonksiyonlar ile bileşkesi şeklindedir ve bu fonksiyonlar DC fonksiyonlardır.

Yardımcı Teorem 2.2.1. *$M \subset \mathbb{R}^m$ konveks bir küme, $h : M \to \mathbb{R}_+$ konveks(konkav) bir fonksiyon ve $q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ konveks(konkav) azalmayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda $q \circ h$ bileşke fonksiyonu M'de konveks(konkav) bir fonksiyondur.*

Önerme 2.2.2. *$M \subset \mathbb{R}^m$ kompakt konveks bir küme ve $h : M \to \mathbb{R}_+$ konveks bir fonksiyon olsun. $q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $q'_+(0) > -\infty$ olacak şekilde artmayan konveks bir fonksiyon ise bu durumda $q \circ h$ fonkiyonu M kümesi üzerinde bir DC fonksiyondur. Yani g konveks bir fonksiyon ve $q'_+(t)$, q fonksiyonunun t'deki sağdan türevi olmak üzere $K \geq |q'_+(0)|$ olan bir $K > 0$ sayısı için*

$$q(h(x)) = g(x) - Kh(x)$$

dir.

Kanıt. $\forall\ t \geq 0$ için $q'_+(0) \leq q'_+(t) \leq 0$ dır. $\tilde{q}(t) = q(t) + Kt$ olsun. Bu durumda $\forall\ t \geq 0$ için $\tilde{q}'_+(t) = q'_+(t) + K \geq q'_+(0) + K \geq 0$ olur. O halde $\tilde{q}$ azalmayan konveks bir fonksiyondur ve Yardımcı Teorem 2.2.1'den $\tilde{q} \circ h$ fonksiyonu M'de konveks bir fonksiyondur. Bu durumda;

$$\begin{aligned} \tilde{q}(h(x)) &= q(h(x)) + Kh(x) \\ q(h(x)) &= \tilde{q}(h(x)) - Kh(x) = g(x) - Kh(x) \end{aligned}$$

dir. ■

Önerme 2.2.3. *$M \subset \mathbb{R}^m$ kompakt konveks bir küme ve $h : M \to \mathbb{R}_+$ konveks bir fonksiyon olsun. $q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $q'_+(0) < +\infty$ olacak şekilde azalmayan konkav bir fonksiyon ise bu durumda $q \circ h$ M'de bir DC-fonksiyondur. Yani g konveks bir fonksiyon ve $K \geq |q'_+(0)|$ olmak üzere*

$$q(h(x)) = Kh(x) - g(x)$$

dir.

Örnek 2.2.4. *Önerme 2.2.2'den* $we^{-\theta\|x-a\|}$, $(w>0,\theta>0)$ *fonksiyonu bir DC-fonksiyondur. Çünkü* $q(t)=we^{-\theta t}$ *olmak üzere* $q(\|x-a\|)=we^{-\theta\|x-a\|}$ *olarak alınırsa* $q'_+(t)=-\theta w>-\infty$ *olduğundan* q *azalan konveks bir fonksiyondur.*

Önerme 2.2.5. $M\subset\mathbb{R}^m$ *kompakt konveks küme ve* $u,v:M\to\mathbb{R}_+$ *konveks fonksiyonlar olmak üzere* $\forall\ x\in M$ *için* $h(x)\geq 0$ *olacak şekilde* $h=u-v$ *fonksiyonu verilsin.* $q:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, $q'_+(0)>-\infty$ *olacak şekilde artmayan konveks bir fonksiyon ise bu durumda* $q\circ h$, M*'de bir DC-fonksiyondur. Yani*
$g(x)=q(h(x))+K[u(x)+v(x)]$ *konveks bir fonksiyon ve* $K\geq|q'_+(0)|$ *olmak üzere*

$$q(h(x))=g(x)-K[u(x)+v(x)]$$

dir.

Kanıt. q artmayan konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda herhangi bir $\theta\in\mathbb{R}_+$ için $q(t)\geq q(\theta)+q'_+(\theta)(t-\theta)$ dır ve $\theta=t$ için sağlanır. Buradan

$$q(t)=\sup_{\theta\in\mathbb{R}_+}\{q(\theta)+(t-\theta)q'_+(\theta)\}=\sup_{\theta\in\mathbb{R}_+}\{q(\theta)-\theta q'_+(\theta)+tq'_+(\theta)\}$$

ve

$$\begin{aligned}q(u(x)-v(x)) &= \sup_{\theta\in\mathbb{R}_+}\{q(\theta)-\theta q'_+(\theta)+(K+q'_+(\theta))u(x)+(K-q'_+(\theta))v(x)\}\\ &\quad -K[u(x)-v(x)]\\ &= g(x)-K[u(x)-v(x)]\end{aligned}$$

olur. q konveks olduğundan $q'_+(\theta)\geq q'_+(0)$ ve $K+q'_+(\theta)\geq K+q'_+(0)\geq 0$ dır. $\forall\ \theta\geq 0$ için q artmayan olduğundan $q'_+(\theta)\leq 0$ dır ve buradan $\forall\ \theta\geq 0$ için $K-q'_+(\theta)\geq K>0$ dır. Seçilen her $\theta\in\mathbb{R}^+$ için

$$x\mapsto q(\theta)-\theta q'_+(\theta)+(K+q'_+(\theta))u(x)+(K-q'_+(\theta))v(x)$$

fonksiyonu konvekstir. O halde

$$g(x)=\sup_{\theta\in\mathbb{R}_+}\{q(\theta)-\theta q'_+(\theta)+(K+q'_+(\theta))u(x)+(K-q'_+(\theta))v(x)\}$$

konveks bir fonksiyondur. ■

Önerme 2.2.6. $M\subset\mathbb{R}^m$ *kompakt konveks küme ve* $u,v:M\to\mathbb{R}_+$ *konveks fonksiyonlar olmak üzere* $\forall\ x\in M$ *için* $h(x)\geq 0$ *olacak şekilde* $h=u-v$ *fonksiyonu verilsin.* $q:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, $q'_+(0)<+\infty$ *olacak şekilde azalmayan* *konkav bir fonksiyon ise bu durumda $q \circ h$, M'de bir DC-fonksiyondur. Yani $g(x) = K[u(x) + v(x)] - q(h(x))$ konveks bir fonksiyon ve $K \geq |q'_+(0)|$ olmak üzere*

$$q(h(x)) = K[u(x) + v(x)] - g(x)$$

dir.

Önerme 2.2.7. *$M \subset \mathbb{R}^m$ kompakt konveks küme ve $u, v : M \to \mathbb{R}_+$ konveks fonksiyonlar olmak üzere $\forall\ x \in M$ için $0 \leq h(x) \leq a$ olacak şekilde $h = u - v$ fonksiyonu verilsin. $q : [0, a] \to \mathbb{R}$, $q'_-(a) < +\infty$ olacak şekilde azalmayan konveks bir fonksiyon ise bu durumda $q \circ h$ fonksiyonu M'de bir DC-fonksiyondur. Yani $g(x) = q(h(x)) + K[a + v(x) - u(x)]$ konveks bir fonksiyon ve $K \geq q'_-(a)$ olmak üzere*

$$q(h(x)) = g(x) - K[a + u(x) - v(x)]$$

dir.

Kanıt. q azalmayan konveks bir fonksiyon olsun ve

$$p : [0, a] \to \mathbb{R}, \quad p(t) = q(a - t)$$

fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda p artmayan konveks bir fonksiyondur. Gerçekten; q azalmayan bir fonksiyon olduğundan $t_1, t_2 \in [0, a]$ için $t_1 \leq t_2$ iken $q(t_1) \leq q(t_2)$ olur. $t_1 \leq t_2$ iken $a - t_2 \leq a - t_1$ olduğundan

$$p(t_2) = q(a - t_2) \leq q(a - t_1) = p(t_1)$$

olur ki buradan p artmayan bir fonksiyondur. $t_1, t_2 \in [0, a]$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için

$$\begin{aligned} p(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) &= q(a - (\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2)) \\ &= q(\lambda a - \lambda t_1 + (1-\lambda)a - (1-\lambda)t_2) \\ &= q(\lambda(a - t_1) + (1-\lambda)(a - t_2)) \\ &= \lambda q(a - t_1) + (1-\lambda)q(a - t_2) = \lambda p(t_1) + (1-\lambda)p(t_2) \end{aligned}$$

olduğundan p konveks bir fonksiyondur. O halde;

$$\begin{aligned} p'_+(0) &= \lim_{t \to 0^+} \frac{p(0 + t) - p(0)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0^+} \frac{p(t) - p(0)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0^+} \frac{q(a - t) - q(a)}{t} \\ &= -\lim_{t \to 0^+} \frac{q(a + (-t)) - q(a)}{-t} \\ &= \lim_{t \to 0^-} \frac{q(a + t) - q(a)}{t} \\ &= -q'_-(a) > -\infty \end{aligned}$$

ve $q(t) = p(a-t)$ olduğundan $q(h(x)) = p(a-h(x))$ fonksiyonu Önerme 2.2.5'den bir DC-fonksiyondur. ■

2.3 Sonlu Toplamsal Ayrılabilir Fonksiyonların DC Gösterimi

$f_i, i = 1, \ldots, n$, $\mathbb{R}$'de tanımlı fonksiyonlar olmak üzere bir $f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)$ ayrılabilir fonksiyonu her bir f_i tek değişkenli fonksiyonu bir DC-fonksiyon ise bir DC-fonksiyondur. Bu durumda ayrılabilir fonksiyonların DC gösterimleri sorusu tek değişkenli fonksiyonların DC gösterimi sorusuna indirgenir. O halde aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme 2.3.1. *$p, q : [0, a] \to \mathbb{R}$ konveks ve $p'_+(0), p'_-(a), q'_+(0), q'_-(a)$ sonlu olsun. Bu durumda bir $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $f = p - q$ biçiminde yazılabilmesi için gerekli ve yeterli koşul*

$$f(t) = f(0) + \int_0^t r(\theta)\mathrm{d}(\theta) \tag{2.3.25}$$

eşitliğini sağlayan sınırlı değişimli $\exists\ r : [0, a] \to \mathbb{R}$ fonksiyonun bulunmasıdır.

Kanıt. p ve q konveks ve $p'_+(0), p'_-(a), q'_+(0), q'_-(a)$ sonlu olmak üzere $f = p-q$ olsun. Bu durumda $\exists\ g, h$ artan fonksiyonları vardır öyle ki

$$p(t) - p(a) = \int_a^t g(\theta)\mathrm{d}\theta$$

ve

$$q(t) - q(a) = \int_a^t h(\theta)\mathrm{d}\theta$$

dır. Buradan $f(t) - f(a) = \int_a^t [g(\theta) - h(\theta)]\mathrm{d}\theta$ dır. İki artan fonksiyonun farkı olarak yazılabilen fonksiyonlar sınırlı değişim fonksiyonları olduğundan $r = g - h$ bir sınırlı değişim fonksiyonudur.

Tersine; bir $r : [0, a] \to \mathbb{R}$ sınırlı değişim fonksiyonu için

$$f(t) - f(a) = \int_a^t r(\theta)\mathrm{d}\theta$$

olsun. $\exists\ g, h$ artan fonksiyonları için $r = g - h$ olarak ifade edilebildiği için

$$f(t) = f(a) + \int_a^t g(\theta)\mathrm{d}\theta - \int_a^t h(\theta)\mathrm{d}\theta$$

olur. Bu durumda f iki konveks fonksiyonun farkı olarak ifade edilebilir.

■

Bir $r : [0,a] \to \mathbb{R}$ sınırlı değişim fonksiyonu $\phi(t) = V_a^t(r)$, $[0,t]$'de r'nin toplam değişimini göstermek üzere $r = \phi - \rho$ şeklinde iki monoton azalmayan fonksiyonun bir farkı olarak yazılabilir. Buradan (2.3.25) denklemindeki f fonksiyonunun bir DC gösterimi

$$f(t) = (f(0) + \int_0^t \phi(\theta)\mathrm{d}\theta) - \int_0^t \rho(\theta)\mathrm{d}\theta$$

şeklindedir. Bununla birlikte bu gösterim bazı fonksiyon sınıfları için uygun olmayabilir. Aşağıdaki önermede bazı özel fonksiyonlar için alternatif bir gösterim verilecektir. Bu amaçla önermede kullanılacak birkaç açıklama verilsin. Sürekli parçalı afin $f : [0,a] \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının sınıfı ele alınsın. $0 < c_1 < \cdots < c_k < a$ kırılma noktalarının bir dizisi olsun. $\forall\ t \in [0,a]$ komşuluğunda f ya afin ya konkav ya da konveks olduğundan f yerel DC dir ve $[0,a]$'da DC fonksiyondur. $U_i = [c_{i-1}, c_{i+1}]$, $c_0 = 0$, $c_{k+1} = a$ ve $I = \{i \mid f,\ c_i\text{'de konkav}\}$ olsun. $\forall\ i \in I$ için $\xi_i(t) : [0,t] \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyonu verilsin öyle ki $\forall\ t \in U_i$ için $\xi_i(t) = -f(t)$ ve $(0,c_i), (c_i,a)$ aralıklarında afin olsun.

Önerme 2.3.2. *$f : [0,a] \to \mathbb{R}$ parçalı afin bir fonksiyon olsun. Bu durumda p konveks parçalı afin bir fonksiyon ve $q(t) = \sum\limits_{i \in I} \xi_i(t)$ olmak üzere f'nin bir DC gösterimi $t \in [0,a]$ için*

$$f(t) = p(t) - q(t)$$

dir.

Kanıt. $\forall\ i \in I$ için ξ_i konveks olduğundan q konveks bir fonksiyondur. O halde $f + q$ fonksiyonunun konveks olduğunu göstermek yeterlidir. $\forall\ i \in I$ için

$$(f+q)|_{U_i} = (f + \xi_i)|_{U_i} + \Big(\sum_{j \in I - \{i\}} \xi_j\Big)|_{U_i} = \Big(\sum_{j \in I - \{i\}} \xi_j\Big)|_{U_i}$$

olur. $\forall\ \xi_j, j \in I - \{i\}$ fonksiyonu U_i'de afin olduğundan $f + q$ fonksiyonu her U_i kümesinde afindir. Diğer taraftan $i \notin I$ için

$$(f+q)|_{U_i} = \big(f + \sum_{j \in I} \xi_j\big)|_{U_i}$$

olur. U_i kümesinde $\forall\ \xi_j,\ j \in I$ afin iken f konveks olduğundan $i \notin I$ için $\forall\ U_i$ kümesi üzerinde $f+q$ konvekstir. Bu durumda $\forall\ t \in [0,a]$ noktasının $f(t)+q(t)$ konveks olacak şekilde bir komşuluğu vardır. O halde $[0,a]$'da $f+q$ konvekstir. ∎

Önerme 2.3.2 $f : [0,a] \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlarına genişletilebilir öyle ki bu fonksiyonlar parçalı konveks-konkavdır.

Bir $e_0 := 0 < e_1 < \cdots < e_k < a := e_{k+1}$ dizisi vardır öyle ki $i = 0,1,...,k$ için $V_i = [e_i, e_{i+1}]$ aralığında $f_i := f|_{V_i}$ fonksiyonu konveks yada konkavdır, $f'_+(e_i), f'_-(e_{i+1})$ sonludur ve f_{i-1} konkav ise f_i konveks yada tam tersidir.

$I = \{i \mid f_i \quad \text{konkav}\}$ olsun. $\forall\ i \in I$ için $\psi : [0,a] \to \mathbb{R}$ sürekli konveks fonksiyonu $\forall\, t \in V_i$ için $\psi(t) = -f(t)$ olsun ve V_i kümesi dışında afin olsun. Bu durumda Önerme 2.3.2 kanıtına benzer bir şekilde kolaylıkla ispat edilebilir ki

$$q(t) = \sum_{i \in I} \psi_i(t)$$

fonksiyonu $\forall\ U_i = [e_{i-1}, e_{i+1}], i = 1, \ldots, k$ aralığında konveks ve dolayısıyla $[0,a]$ aralığında konveks olmak üzere $f = p - q$ olur.

Özel olarak bu gösterim S şekilli fonksiyonlara da uygulanabilir. S şekilli fonksiyon: sürekli bir $f : [0,a] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $0 < c < a$ olmak üzere bir $[0,c]$ aralığında konveks(konkav) ve $[c,a]$ aralığında konkav(konveks)dır. f fonksiyonu [0,c] aralığında konveks ve $[c,a]$ aralığında konkav ise bu durumda $a : [0,a] \to \mathbb{R}$ afin bir fonksiyon olmak üzere

$$q(t) = \begin{cases} -f(t) & , \quad t \geq c \\ a(t) & , \quad t < c \end{cases}$$

olarak alınır.

2.4 Polinomların DC Gösterimleri

Bir polinom herhangi bir mertebeden sürekli türeve sahiptir. Bu durumda Sonuç 2.1.15 kullanılarak aşağıdaki önerme ifade edilebilir.

Önerme 2.4.1. *$\mathbb{R}^n$'den $\mathbb{R}$'ye tanımlı bir polinom bir DC-fonksiyondur.*

Bir polinomun iki konveks fonksiyonun farkı olarak nasıl yazılabildiği verilmeden önce ikinci dereceden polinomlar için bu sorunun cevabı aşağıdaki önermenin bir sonucu olarak verilecektir.

Önerme 2.4.2. *Q bir simetrik matris ve $\rho(Q)$, Q matrisinin spektral çapı olmak üzere $f(x) =< x, Qx >$ bir quadratik fonksiyon olsun. Bu durumda $\lambda \geq \rho(Q)$ için $g(x) = f(x) + \lambda\|x\|^2$ konvekstir.*

Kanıt. $Q + \lambda I$ pozitif yarı tanımlı olduğundan $g(x) =< x, (Q + \lambda I) >$ konvekstir. ∎

O halde herhangi bir f quadratik fonksiyonu $g(x) = f(x) + \lambda\|x\|^2$ konveks olmak üzere $f(x) = g(x) - \lambda\|x\|^2$ şeklinde iki konveks fonksiyonun farkı olarak ifade edilebilir. Q'nun özvektörlerinin oluşturduğu U matrisi biliniyorsa $U^T QU = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ olur, $x = Uy$ ve $F(y) = f(Uy)$ olarak alınırsa f fonksiyonu $F(y) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$ ayrılabilir fonksiyonuna dönüştürülebilir ve DC-fonksiyondur.

Sonuç 2.4.3. *Q_i simetrik matris, $b_i \in \mathbb{R}^n, d_i \in \mathbb{R}$ olmak üzere*

$$f_i(x) :=< x, Q_i x > + < b_i, x > +d_i \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m$$

quadratik eşitsizlik sistemi g konveks bir fonksiyon ve $\lambda \geq \max\limits_{i=1,\ldots,m} \rho(Q_i)$ olmak üzere bir

$$g(x) - \lambda\|x\|^2 \leq 0$$

DC eşitsizliğine denktir.

Kanıt. $\forall\ i$ için g_i konveks olmak üzere $f_i(x) = g_i(x) - \lambda\|x\|^2 \leq 0$ dır. Bu durumda $g(x) = \max\limits_{i=1,\ldots,m} g_i(x)$ alınsın. O halde g konveks bir fonksiyondur. Bu durumda;

$$\begin{aligned} \max_{i=1,\ldots,m} g_i(x) - \lambda\|x\|^2 &\leq 0 \\ g(x) - \lambda\|x\|^2 &\leq 0 \end{aligned}$$

olur. ∎

Herhangi bir P polinomu ve herhangi bir $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ kompakt konveks kümesi için $\rho \geq -\min\{< u, \nabla^2 P(x)u > \mid x \in \Omega, \|u\| = 1\}$ ise $P(x)+\rho\|x\|^2$ fonksiyonu Ω'da konvekstir. Fakat ρ için böyle bir alt sınırı tahmin etmek genelde çok zordur. Bu durumda polinomlar için daha basit bir DC gösterimi aşağıdaki önermenin bir sonucu olarak ifade edilebilir.

Önerme 2.4.4. *Herhangi iki konveks $f_1, f_2 : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonu için bu fonksiyonların çarpımlarının bir DC gösterimi*

$$f_1 f_2 = \frac{1}{2}[f_1 + f_2]^2 - \frac{1}{2}[f_1^2 + f_2^2]$$

dir.

Kanıt. f_1, f_2 ve$f_1 + f_2$ fonksiyonlarının her biri pozitif değerli konveks ve $q(t) = t^2$ fonksiyonu $\mathbb{R}_+$'de konveks artan olduğundan $q \circ f_1$, $q \circ f_2$ ve $q \circ (f_1 + f_2)$ fonksiyonları konveks fonksiyonlardır. ■

Yukarıdaki önermenin sonucu olarak $\forall\ m \in \mathbb{N}$ için $q_m(t) = t^m$ fonksiyonu $\mathbb{R}_+$'da konveks olduğundan $x_1^{p_1} x_2^{p_2} ... x_n^{p_n}$ formundaki bir monomialin bir DC gösterimi dolayısıyla $\mathbb{R}^n_+$'da bir polinomun bir DC gösterimi kolaylıkla ifade edilebilir.

2.5 *DC* Kümeleri

$\mathbb{R}^n$'deki kapalı kümelerin yeni bir karakterizasyonu DC kümelerle verilebilir. Bunun için öncelikle DC küme tanımlansın.

Tanım 2.5.1. *$M \subset \mathbb{R}^n$ olsun. $M = \{x \mid g(x) \leq 0, h(x) \geq 0\}$ olacak şekilde $\exists\ g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyonları varsa M kümesine bir DC* ***kümesi*** *denir.*

Yukarıdaki M kümesi $M = \{x \mid \max[g(x), -h(x)] \leq 0\}$ biçiminde ifade edilebileceğinden bir DC kümesi aynı zamanda bir DC eşitsizliği ile de ifade edilebilir. Tersine; bir S kümesi bir DC eşitsizliği ile tanımlanıyorsa yani g, h konveks fonksiyonlar olmak üzere $S = \{x \mid g(x) - h(x) \leq 0\}$ ise bu durumda

$$M = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid g(x) - t \leq 0, t - h(x) \leq 0\}$$

olmak üzere

$$S = \{x \mid \exists\ t \quad \text{için} \quad (x, t) \in M\}$$

dir. Bu durumda S kümesi $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ DC kümesinin $\mathbb{R}^n$'deki izdüşümüdür.

DC kümeler keyfi kapalı kümelerden çokta farklı değildir. Herhangi bir $S \subset \mathbb{R}^n$ kapalı kümesi için $d(x,S) = \inf\{\|x-y\| \mid y \in S\}$ bir x noktasının S'ye olan uzaklığını göstermek üzere

$$x \mapsto \|x\|^2 - d^2(x,S) = \sup\{2xy - \|y\|^2 \mid y \in S\}$$

fonksiyonu konveks bir fonksiyondur. Bu durumda $d^2(x,S)$ bir DC fonksiyon olduğundan $S = \{x \mid d^2(x,S) \leq 0\}$ dır. $d^2(x,S)$ uzaklığının hesaplanması genelde çok zor olmasına rağmen $\forall\ x \in S$ için $d^2(x,S) = 0$ olduğundan $S = \{x \mid d^2(x,S) = 0\}$ biçiminde ifade edilebilir. Bu da S'nin sınır noktaları ve iç noktaları arasında $d^2(x,S)$'nin hesaplanması açısından hiçbir fark olmadığını gösterir. $d^2(x,S)$'nin hesaplamasındaki zorluğu ortadan kaldırmak için şu sonuç verilebilir.

Yardımcı Teorem 2.5.2. *$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kesin konveks bir fonksiyon olsun ve boş kümeden farklı bir $S \subset \mathbb{R}^n$ kapalı kümesi verilsin.*

$$d^2(x) = \inf_{y \in S, p \in \partial h(x)} [h(y) - h(x) - < p, y - x >]$$

olarak tanımlansın.

i) $\forall\ x \in S$ *için* $d(x) = 0$ *dir.*

ii) $\forall\ x \notin S$ *için* $d(x) > 0$ *dır.*

iii) $x_k \to$ *ve* $k \to \infty$ *iken* $d(x_k) \to 0$ *ise* $x \in S$ *dir.*

Kanıt. i) $\forall\ y \in S, \forall\ p \in \partial h(x)$ için $h(x) - h(y) - < p, x - y > \geq 0$ olduğundan $x \in S$ iken $d(x) = 0$ olur.

ii) $x \notin S$ ve $d(x) = 0$ ise bu durumda $\forall\ k$ için $x_k = x$ alınırsa $d(x_k) \to 0$ olur. Bu durum (iii)'de $x \in S$ olmasıyla çelişir. O halde (iii) durumunu kanıtlamak yeterlidir. $x_k \to x$ ve $d(x_k) \to 0$ olsun. Bu durumda $\exists\ y_k$ ve $p_k \in \partial h(x_k)$ vardır öyle ki

$$h(y_k) - h(x_k) - < p_k, y_k - x_k > \to 0$$

dır. Konveks kümelerin subdiferansiyellerin sınırlılık özelliğinden $p_k \to p \in \partial h(x)$ olarak kabul edilsin. Bu durumda $k \to \infty$ iken

$$h(y_k) - h(x) - < p, y_k - x > \to 0$$

dır. $y \mapsto \tilde{h}(y) = h(y) - h(x) - < p, x - y >$ fonksiyonu alınsın. $\forall\ y$ için $h(x) = 0 \leq \tilde{h}(y)$ dir. h kesin konveks olduğundan $\forall\ y \neq x$ için $\tilde{h}(y) > 0$ dır. $\exists\ y \neq x$ için $\tilde{h}(y) = 0$ ise bu durumda $\tilde{h}(\frac{x+y}{2}) < 0$ olur ki bu bir çelişkidir. Buradan $c_0 = \{y \mid \tilde{h}(y) \leq 0\} = \{x\}$ düzey kümesi sınırlıdır dolayısıyla $c_1 = \{y \mid h(y) \leq 1\}$ düzey kümesi de sınırlıdır. $\forall\ k$ için $h(y_k) \leq 1$ olarak kabul edilebilir. O halde $\{y_k\}$ dizisi sınırlıdır. Bu dizinin herhangi bir $\overline{y}$ kapanış noktası için $\tilde{h}(\overline{y}) = 0$ olur buradan $\overline{y} = x$ dır. S kapalı ve $y_k \in S$ olduğundan $\overline{y} \in S$ dir.

■

$\theta > 0$ ve $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\forall\ x \in S \quad \text{için} \quad r(x) = 0 \tag{2.5.26}$$

ve

$$\forall\ y \notin S \quad \text{için} \quad 0 < r(y) \leq \min\{\theta, d(y)\} \tag{2.5.27}$$

olan bir fonksiyon olsun ve $g_S(x) = \sup\limits_{y \notin S, p \in \partial h(y)} \{h(y) + < p, x - y > + r^2(y)\}$ tanımlansın.

Önerme 2.5.3. *$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kesin konveks bir fonksiyon olsun. $\forall\ S \subset \mathbb{R}^n$ kapalı kümesi için $g_S(x) = \sup\limits_{y \notin S, p \in \partial h(y)} \{h(y) + < p, x - y > + r^2(y)\}$ fonksiyonu heryerde kapalı, konveks, sonludur ve*

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_S(x) - h(x) \leq 0\}$$

dır.

Kanıt. $S \neq \emptyset$ ve $S \neq \mathbb{R}^n$ olsun. $x \mapsto h(y) + < p, x - y > + r^2(y)$ afin fonksiyonlar ve g_S bu afin fonksiyonların bir supremumu olduğundan kapalı ve konvekstir. $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$ için

$$g_S(x) \leq \sup_{y \notin S, p \in \partial h(y)} \{h(y) + < p, x - y > + \theta^2\} \leq h(x) + \theta^2 < +\infty$$

olduğundan her yerde sonludur.

$y \notin S$ ise $r(y) > 0$ olduğunda

$$g_S(y) \geq h(y) + < p, y - y > + r^2(y) > h(y)$$

dir. $x \in S$ ise bu durumda $\forall\ y \notin S, p \in \partial h(y)$ için

$$\begin{aligned} h(y) + < p, x - y > + r^2(y) &\leq h(y) + < p, x - y > + h(x) - h(y) - < p, x - y > \\ &\leq h(x) \end{aligned}$$

olur. $\forall\ x \in S$ için $g_S(x) \leq h(x)$ dir. ■

Uyarı 2.5.4. $h(x) = \|x\|^2$ *olarak seçilirse bu durumda* $\partial h(y) = \{2y\}$ *olur.* $d(y) = \inf\{\|x - y\| \mid x \in S\}$ *fonksiyonu* y*'nin* S *kümesine uzaklığı olur.* (2.5.26) *ve* (2.5.27)*'u sağlayan bir* $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu* S *kümesi için bir ayırıcı olarak adlandırılabilir.* $S \subset \mathbb{R}^n$ *herhangi kapalı bir küme ve* r *fonksiyonu* S *için bir ayırıcı olsun.*

$$g_S(x) = \sup_{y \notin S}\{r^2(y) + 2xy - \|y\|^2\}$$

olmak üzere S *kümesi*

$$g_S(x) - \|x\|^2 \leq 0$$

DC eşitsizliğinin çözüm kümesi olarak ifade edilebilir.

Sonuç 2.5.5. $\mathbb{R}^n$*'de herhangi bir kapalı küme* $\mathbb{R}^{n+1}$*'de bir DC kümesinin izdüşümüdür.*

Kanıt. $S \subset \mathbb{R}^n$ kapalı bir küme ve $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kesin konveks bir fonksiyon olmak üzere $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_S(x) - h(x) \leq 0\}$ olduğundan

$$S = \{x \mid \exists\ (x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}, g_S(x) \leq t \leq h(x)\}$$

olur. Bu yüzden $D = \{(x, t) \mid g_S(x) \leq t\}$ ve $C = \{(x, t) \mid h(x) \leq t\}$ olmak üzere S kümesi $D \backslash C \subset \mathbb{R}^{n+1}$ kümesinin $\mathbb{R}^n$'ye izdüşümüdür. ■

Sonuç 2.5.6. *Herhangi alttan yarı sürekli* f *fonksiyonu için* $f(x) \leq 0$ *eşitsizliği*

$$g(x) - \|x\|^2 \leq 0$$

eşitsizliğine denk olacak şekilde $\exists\ g$ *konveks fonksiyonu vardır.*

Kanıt. $S = \{x \mid f(x) \leq 0\}$ kapalı bir kümedir. O halde S kümesi bir DC kümesinin bir izdüşümüdür ve bir DC eşitsizliği ile $S = \{x \mid g(x) - \|x\|^2 \leq 0\}$ şeklinde ifade edilebilir. ■

Boş kümeden farklı $\mathbb{R}^n$'nin bir kapalı konveks has altkümesi yarı uzayların bir kesişimi olarak tanımlanabilir. Benzer özellik yarı uzaylar yerine aşağıda tanımlanan bütünler konveks kümeler alınırsa sağlanır.

Tanım 2.5.7. *Bir M kümesi bütünler konveks bir eşitsizlik ile tanımlanıyorsa, yani g konveks bir fonksiyon olmak üzere $M = \{x \mid g(x) \geq 0\}$ ise M kümesine* ***bütünler konveks küme*** *denir.*

Önerme 2.5.8. *$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ herhangi kesin konveks fonksiyon ve $S \subset \mathbb{R}^n$ boş kümeden farklı kapalı has altküme olsun. Bu durumda;*

i) $\forall\ y \in \mathbb{R}^n \setminus S$ için $\mathbb{R}^n$'de tanımlı $\forall\ x \in S$ için

$$l(y) - h(y) > 0, \quad l(x) - h(x) \leq 0$$

olacak şekilde $\exists\ l$ afin fonksiyonu vardır.

ii) Afin fonksiyonların bir $l_i, \quad i = 1, 2, \ldots$ ailesi

$$S = \bigcap_{i=1}^{\infty} \{x \mid l_i(x) - h(x) \leq 0\}$$

olacak şekilde vardır.

Kanıt. i) (2.5.26) ve (2.5.27)'u sağlayan, $y_k \to y$ ve $r(y_k) \to 0$ iken $y \in S$ olan bir $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonu verilsin. Yardımcı Teorem 2.5.2'de verilen $r(y) = d(y)$ fonksiyonu bu koşulu sağlar. $p \in \partial h(y)$ için

$$l(x) = h(y) + < p, x - y > + r^2(y)$$

olsun. $l(y) = h(y) + r^2(y) > h(y)$ dır. Bu durumda $\forall\ x \in S$ için $l(x) \leq g_S(x) \leq h(x)$ olur. $D(y) = \{x \mid l(x) - h(x) \leq 0\}$ bütünler konveks kümesi S kümesini y'den ayırır.

ii) $\mathbb{R}^n \setminus S$'de yoğun olan $\{y_i \mid i = 1, 2, \ldots\} \subset \mathbb{R}^n \setminus S$ ızgarası alınsın. $\forall\ y_i$ için $p_i \in \partial h(y_i), \quad l_i(x) = h(y_i) + < p_i, x - y_i > + r^2(y_i)$ dir öyle ki

$$D_i = \{x \mid l_i(x) - h(x) \leq 0\}$$

kümesi S kümesini y'den ayırır. Bu durumda $S = \bigcap_{i=1}^{\infty} D_i$ dir. Gerçekten; $D = \bigcap_{i=1}^{\infty} D_i$ olsun. $S \subset D$ dir. Tersine; $D \subset S$ midir? $y \in D$ fakat $y \notin S$ olsun. $\{y_i \mid i = 1, 2, \ldots\}$ ızgarası $\mathbb{R}^n \setminus S$'de yoğun olduğundan bu ızgarada bir y_i dizisi vardır öyle ki $i \to \infty$ iken $y_i \to i$ dir. $y \in D$ olduğundan $\forall\ i$ için $y \in D_i$ dir. Yani $\forall\ i$ için

$$h(y_i) + < p_i, y - y_i > + r^2(y_i) \leq h(y)$$

olur. $y_i \to y$ ve $h(y_i) \to h(y)$ olduğundan $r^2(y_i) \to 0$ dır. Yardımcı Teorem 2.5.2'den $y_i \in S$ olur ve bu durum varsayım ile çelişir. O halde $y \in S$ olur ki $D \subset S$ dir.

$\blacksquare$

3 KUASİDİFERENSİYEL ANALİZE GİRİŞ

3.1 Giriş

Bu kesimde diğer kesimlerde kullanılacak bazı tanım ve gösterimler verilecek ve bazı hatırlatmalar yapılacaktır.

X bir Banach uzayı olsun. X'in duali olan uzay X^*, X^* üzerinde X tarafından üretilen zayıf * topoloji w^* ile gösterilsin.

Tanım 3.1.1. *f, bir $\Omega \subset X$ açık kümesi üzerinde tanımlı bir fonksiyon, $x \in \Omega$ ve $u \in X$ olsun. $\phi_{x,u}(\alpha) = \dfrac{f(x+\alpha u) - f(x)}{\alpha}$ fonksiyonu verilsin.*

$$f_D^{\uparrow}(x,u) = \limsup_{\alpha \to +0} \phi_{x,u}(\alpha)$$

ve

$$f_D^{\downarrow}(x,u) = \liminf_{\alpha \to +0} \phi_{x,u}(\alpha)$$

*değerlerine sırasıyla f **fonksiyonunun** x **noktasındaki** u **yönündeki Dini üstten türevi** ve **Dini alttan türevi** denir.*

$$f_H^{\uparrow}(x,u) = \limsup_{[\alpha,v] \to [+0,u]} \phi_{x,v}(\alpha)$$

ve

$$f_H^{\downarrow}(x,u) = \liminf_{[\alpha,v] \to [+0,u]} \phi_{x,v}(\alpha)$$

*değerlerine sırasıyla f **fonksiyonunun** x **noktasındaki** u **yönündeki Hadamard üstten türevi** ve **Hadamard alttan türevi** denir.*

f fonksiyonu yerel Lipschitz ise bu durumda bu türevlerin her biri sonludur. f'_x (Dini) yönlü türevi tüm X uzayında

$$f'_x(u) = \lim_{\alpha \to +0} \frac{f(x+\alpha u) - f(x)}{\alpha}$$

şeklinde tanımlı bir fonksiyondur. Benzer şekilde Hadamard yönlü türevi de tanımlanabilir.

Tanımlanan tüm türevler yönün bir fonksiyonu olarak pozitif homojendir. Pozitif homojen konveks bir fonksiyon sublineer bir fonksiyondur. P ile X

üzerinde tanımlı tüm sürekli sublineer fonksiyonlar gösterilsin. $p \in P$ ise bu durumda

$$\underline{\partial} p = \{\mu \in X^* \mid \mu(x) \leq p(x), \quad \forall\ x \in X\}$$

kümesine p fonksiyonun **subdiferansiyeli** denir. Subdiferansiyel X^*'in boştan farklı konveks w^*-kompakt bir alt kümesidir. w^*-kompakt konveks her $A \subset X^*$ kümesi, $\exists\ p_A \in P$ fonksiyonun subdiferansiyelidir ve $\forall\ u \in X$ için

$$p_A(u) = \max_{\mu \in A} \mu(u)$$

biçiminde ifade edilir. Bu fonksiyona A **kümesinin destek fonksiyonu** denir. Q ile X üzerinde tanımlı tüm sürekli superlineer fonksiyonlar gösterilsin. $q \in Q$ ise bu durumda

$$\overline{\partial} q = \{v \in X^* | v(x) \geq q(x), \quad \forall\ x \in X\}$$

kümesine q fonksiyonun **superdiferansiyeli** denir. Superdiferansiyel X^*'ın boş olmayan konveks w^*-kompakt bir alt kümesidir. A konveks w^*-kompakt bir küme ise bu durumda $\forall\ u \in X$ için

$$q_A(u) = \min_{v \in A} v(u)$$

fonksiyonu superlineerdir. p_A A kümesinin destek fonksiyonu olmak üzere $q_A(u) = -p_A(u)$ dur.

3.2 Üstten Konveks, Alttan Konkav Yaklaşımlar

Bir X Banach uzayı ve bir $\Omega \subset X$ açık kümesi üzerinde tanımlı bir $x \in \Omega$ noktasında yönlü türevlenebilir bir f fonksiyonu verilsin. Bundan sonra f'_x yönün bir fonksiyonu olarak sürekli kabul edilecektir.

Uyarı 3.2.1. *f'_x, f fonksiyonunun x noktasındaki Hadamard yönlü türevi ise bu durumda sürekliliği türev tanımından elde edilebilir.*

f'_x fonksiyonu çok karmaşık olabilir bu yüzden fonksiyona basit fonksiyonlarla yaklaşmak daha kolaydır. Bu amaç için sublineer ve superlineer fonksiyonları kullanmak uygun olacaktır.

Tanım 3.2.2. *X uzayında tanımlı ve $\forall\ u \in X$ için $p(u) \geq f'_x(u)$ olan sürekli sublineer bir p fonksiyonuna f fonksiyonunun x noktasındaki* ***üstten konveks yaklaşımı*** *denir.*

p fonksiyonu f'nin x noktasındaki bir üstten konveks yaklaşımı olsun. Bu durumda $\frac{o_{x,u}(\alpha)}{\alpha} \underset{\alpha\to+0}{\longrightarrow} 0$ olmak üzere

$$f(x+\alpha u) \leq f(x) + \alpha p(u) + o_{x,u}(\alpha)$$

dir.

Tanım 3.2.3. *X uzayında tanımlı ve $\forall\ u \in X$ için $q(u) \leq f'_x(u)$ olan sürekli sublineer bir q fonksiyonuna f fonksiyonunun x noktasındaki* ***alttan konkav yaklaşımı*** *denir.*

Sublineer bir p fonksiyonu f fonksiyonunun x noktasındaki bir üstten konveks yaklaşımı ise bu durumda $\underline{\partial}p$ kümesi f'_x türevinin bu noktadaki bir lineerizasyonunu verir. Diğer bir deyişle, $\underline{\partial}p$ kümesi f'nin x civarında maksimum operatörü yardımıyla bir yerel yaklaşımını verir. p, f'_x'e daha yakınsa bu yaklaşım daha belirli olur. Benzer şekilde; superlineer bir q fonksiyonu f fonksiyonunun x noktasındaki bir alttan konkav yaklaşımı ise bu durumda $\overline{\partial}q$ kümesi f fonksiyonunun x noktasında minimum operatörü yardımıyla bir yerel yaklaşımını verir.

Bir üstten konveks yaklaşım tek şekilde tanımlı olmadığından ve özel bir üstten konveks yaklaşım her zaman fonksiyonun yeterli bir yaklaşımını sağlamadığından tam bir yerel yaklaşım sağlayan üstten konveks yaklaşımların bir ailesini almak gerekir. Bunun için aşağıdaki tanım verilsin.

Tanım 3.2.4. *Λ bir indeks kümesi olsun. p_λ fonksiyonu bir f fonksiyonunun bir x noktasındaki bir üstten konveks yaklaşımı olmak üzere $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ailesi verilsin. $\forall\ u \in X$ için*

$$\inf_{\lambda\in\Lambda} p_\lambda(u) = f'_x(u)$$

ise diğer bir deyişle; $\forall\ u \in X$ için $\alpha^{-1}o_{x,u}(\alpha) \underset{\alpha\to+0}{\longrightarrow} 0$ olmak üzere

$$f(x+\alpha u) = f(x) + \alpha \inf_{\lambda\in\Lambda} p_\lambda(u) + 0_{x,u}(\alpha)$$

ise bu durumda $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ailesine f fonksiyonu için bu noktadaki ***üstten konveks yaklaşımların bir exhaustive ailesi*** *denir.*

Benzer şekilde; q_λ, f fonksiyonunun bir x noktasındaki bir alttan konkav yaklaşımı olmak üzere $(q_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ailesi verilsin. $\forall\ U \in x$ için

$$\sup_{\lambda\in\Lambda} q_\lambda(u) = f'_x(u)$$

ise yani $\forall\ u \in X$ için

$$f(x+\alpha u) = f(x) + \alpha \sup_{\lambda\in\Lambda} q_\lambda(u) + 0_{x,u}(\alpha)$$

ise $(q_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ailesine f fonksiyonu için bu noktadaki ***alttan konkav yaklaşımlarının bir exhaustive ailesi*** *denir.*

Üstten konveks yaklaşımların bir exhaustive ailesinin varlığı f'_x türevinin minimax yardımıyla lineerize edilebileceği anlamına gelir, yani

$$f'_x(u) = \inf_{\lambda\in\Lambda} \max_{\mu\in\underline{\partial} p_\lambda} \mu(u)$$

dir. Alttan konkav yaklaşımların bir exhaustive ailesinin varlığı f'_x türevinin maximin yardımıyla lineerize edilebileceği anlamına gelir, yani

$$f'_x(u) = \sup_{\lambda\in\Lambda} \min_{v\in\overline{\partial} q_\lambda} v(u)$$

dir.

Teorem 3.2.5. *f bir X Hilbert uzayının bir $\Omega \subset X$ açık kümesi üzerinde tanımlı ve bir $x \in \Omega$ noktasında yönlü türevlenebilir bir fonksiyon olsun. f'_x türevinin yönün bir fonksiyonu olarak sürekli olduğu kabul edilsin. Bu durumda f fonksiyonu üstten konveks yaklaşımların x noktasındaki exhaustive ailesi $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ve alttan konkav yaklaşımların x noktasındaki exhaustive ailesi $(q_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ olacak şekilde $\exists\ \Lambda$ indeks kümesi vardır. Ω indeks kümesi $u \mapsto f'_x(u)$ fonksiyonunu sürekli yapacak şekilde tüm f'ler ve x'ler için aynı seçilebilir.*

Üstten konveks yaklaşım ve alttan konkav yaklaşımların exhaustive aileleri ile ilgili bazı özellikler aşağıda verilecektir.

$(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ve $(q_\mu)_{\mu\in M}$ sırasıyla bir f fonksiyonu için bir x noktasındaki üstten konveks yaklaşımların ve alttan konkav yaklaşımların exhaustive aileleri ve $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f_1 = cf$ olsun.

i) $c > 0$ ise bu durumda $(cp_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ve $(cq_\mu)_{\mu\in M}$ sırasıyla f_1 fonksiyonu için üstten konveks yaklaşımların ve alttan konkav yaklaşımların exhaustive aileleridir.

ii) $c < 0$ ise bu durumda f_1 fonksiyonu için üstten konveks yaklaşımların bir exhaustive ailesi $(cq_\mu)_{\mu\in M}$ ile çakışır. Gerçekten;

$$(f_1)'_x(u) = -|c|f'_x(u) = -|c|\sup_{\mu\in M} q_\mu(u) = |c|\inf_{\mu\in M}(-q_\mu(u)) = \inf_{\mu\in M} cq_\mu(u)$$

dir. Bu durumda yukarıdakine benzer şekilde alttan konkav yaklaşımların bir exhaustive ailesi $(cp_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ile çakışır.

$(p^1_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ve $(p^2_\mu)_{\mu\in M}$ sırasıyla f_1 ve f_2 fonksiyonları için x noktasındaki üstten konveks yaklaşımların exhaustive aileleri ve bir $(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M$ indeksi için

$$p_{\lambda,\mu}(u) = p^1_\lambda(u) + p^2_\mu(u)$$

olsun. $f = f_1 + f_2$ ise bu durumda

$$\begin{aligned} f'_x(u) &= (f_1)'_x(u) + (f_2)'_x(u) \\ &= \inf_{\lambda\in\Lambda} p^1_\lambda(u) + \inf_{\mu\in M} p^2_\mu(u) \\ &= \inf_{\substack{\lambda\in\Lambda \\ \mu\in M}} [p^1_\lambda(u) + p^2_\mu(u)] \\ &= \inf_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M} p_{\lambda,\mu}(u) \end{aligned}$$

dir. O halde $(p_{\lambda,\mu})_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M}$ ailesi f fonksiyonu için x noktasında üstten konveks yaklaşımların bir exhaustive ailesidir. Alttan konkav yaklaşımların exhaustive ailesi de benzer şekilde elde edilebilir.

Üstten konveks yaklaşımlar ve alttan konkav yaklaşımlar kavramları ekstremum problemlerinin çözümlerinde kullanılır. Bu durum şu şekilde açıklanabilir.

f, X Hilbert uzayının bir Ω açık kümesinde tanımlı bir fonksiyon olsun. f minimal değerini Ω kümesi üzerinde bir x noktasında alsın ve bu noktada yönlü türevlenebilir olsun. Bu durumda $\forall\ x \in X$ için $f'_x(u) \geq 0$ dır. p, f fonksiyonunun x noktasındaki bir üstten konveks yaklaşımı ise $p(u) \geq f'_x(u)$ olur ve buradan $\forall\ u \in X$ için $p(u) \geq 0$ dır. $\forall\ u \in X$ için $p(u) \geq 0$ eşitsizliği $0 \in \underline{\partial} p$ olmasını gerektirir. O halde kısıtsız bir minimum için gerekli koşul üstten konveks yaklaşımlar ile çok basit bir forma dönüşür. $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ üstten konveks yaklaşımların bir exhaustive ailesi ise bu durumda kısıtsız bir minimum için $f'_x(u) \geq 0$ gerek koşulu $\forall\ \lambda \in \Lambda$ için $0 \in \underline{\partial} p_\lambda$ olmasına denktir. Benzer şekilde kısıtsız bir maksimum için gerek koşul alttan konkav yaklaşımlar için ifade edilebilir.

3.3 Kuasidiferansiyellenebilir Fonksiyonlar

Bu kesimde kuasidiferansiyellenebilir fonksiyonların bazı özellikleri verilecektir.

Tanım 3.3.1. *X bir Banach uzayı, $\Omega \subset X$ açık bir küme ve f, Ω üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. f fonksiyonu bir $x \in \Omega$ noktasında yönlü türevlenebilir ve f'_x türevi $V, W \subset X^*$ w^*-kompakt konveks kümeler olmak üzere*

$$f'_x(u) = \max_{\mu\in V}\mu(u) + \min_{v\in W} v(u) \tag{3.3.28}$$

*biçiminde yazılabiliyor ise f fonksiyonuna x noktasında **kuasidiferansiyellenebilirdir** denir.*

Uyarı 3.3.2. (3.3.28) *ifadesi aşağıdaki ifadeye denktir: X^* uzayının $\exists\ Z_1, Z_2$ sınırlı alt kümeleri vardır öyle ki*

$$f'_x(u) = \sup_{\mu\in Z_1}\mu(u) + \inf_{v\in Z_2} v(u)$$

eşitliği sağlanır.

f kuasidiferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun ve (3.3.28) eşitliği sağlansın.

$$p(u) = \max_{\mu\in V}\mu(u), \quad q(u) = \min_{v\in W} v(u)$$

olsun. q süperlineer ve p sublineer fonksiyondur. Ek olarak;

$$\|p\| = \sup_{\|u\|\leq 1} |p(u)| = \sup_{\|u\|\leq 1} |\max_{\mu\in V}\mu(u)| \leq \max_{\mu\in V}\|\mu\| \leq +\infty$$

$$\|q\| = \sup_{\|u\|\leq 1} |q(u)| = \sup_{\|u\|\leq 1} |\min_{v\in W} v(u)| = \sup_{\|u\|\leq 1} | - \max_{v\in W} (-v)(u)| \leq \max_{v\in W} \|v\| \leq +\infty$$

dir. Buradan p ve q fonksiyonları sınırlı ve süreklidir. O halde kuasidiferansiyellenebilir bir fonksiyonun türevi sürekli subdiferansiyellenebilir bir fonksiyon ve sürekli süperdiferansiyellenebilir bir fonksiyonun toplamı şeklinde ifade edilebilir ve süreklidir. Tersine f'_x türevi sürekli sublineer bir p fonksiyonu ve sürekli süperlineer bir q fonksiyonunun toplamı şeklinde ifade edilebiliyorsa bu durumda f fonksiyonu x noktasında kuasidiferansiyellenebilirdir ve (3.3.28) ifadesindeki V kümesi yerine $\underline{\partial} p$, W kümesi yerine $\overline{\partial} q$ alınabilir.

Teorem 3.3.3. *f, Ω açık kümesi üzerinde tanımlı ve bir $x \in \Omega$ noktasında yönlü türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.*

i) f, x noktasında kuasidiferansiyellenebilirdir.

ii) W konveks zayıf *-kompakt bir küme, p sürekli sublineer bir fonksiyon ve $v \in W$ için $p_v = v + p$ olmak üzere f fonksiyonu üstten konveks yaklaşımların bir $(p_v)_{v\in W}$ exhaustive ailesine sahiptir.

iii) V konveks zayıf *-kompakt bir küme, q sürekli süperlineer bir fonksiyon ve $\mu \in V$ için $q_\mu = \mu + q$ olmak üzere f fonksiyonu alttan konkav yaklaşımların bir $(q_\mu)_{\mu\in V}$ exhaustive ailesine sahiptir.

3.4 Konveks Kümeler Uzayı

X bir Banach uzayı ve X^* dual uzayı verilsin. P, X uzayında tanımlı tüm sublineer fonksiyonların konisi, $\tilde{M}$ X^* uzayının tüm konveks zayıf *-kompakt alt kümelerinin bir ailesi ve $\underline{\partial} p$ bir sublineer p fonksiyonun destek fonksiyonu olmak üzere $\phi : P \to \tilde{M}$ fonksiyonu $\phi(p) = \underline{\partial} p$ şeklinde tanımlı Minkowski dualitesi olsun. Q, X uzayında tanımlı tüm süperlineer fonksiyonların konisi olsun. $\forall\ q \in Q$ fonksiyonu $\overline{\partial} q \in \tilde{M}$ destek kümesi olmak üzere

$$q(x) = \max_{v\in\overline{\partial} q} v(x)$$

eşitliği sağlanır.

$p, r \in P$ olmak üzere $l = p - r$ formunda yazılabilen tüm l fonksiyonlarının

L lineer alt uzayı verilsin. Bir l fonksiyonunu $p \in P$ ve $q \in Q$ olmak üzere $l = p + q$ formunda ifade etmek daha kullanışlıdır. Minkowski dualitesi P'den L'ye genişletilebilir. $l \in L, \quad l = p + q$ ise bu durumda $A = \underline{\partial} p$ ve $B = \overline{\partial} q$ olmak üzere l fonksiyonu $(\underline{\partial} p, \overline{\partial} q)$ küme çifti yardımıyla

$$l(x) = \max_{\mu \in A} \mu(x) + \min_{v \in B} v(x) \tag{3.4.29}$$

şeklinde ifade edilebilir.

l fonksiyonu sublineer ve süperlineer fonksiyonların toplamı şeklinde birçok şekilde ifade edilebilir. O halde (3.4.29) ifadesini sağlayan $(A, B) \in \tilde{M} \times \tilde{M}$ küme çiftlerinin bir sınıfı vardır. (A_1, B_1) ve (A_2, B_2) aynı sınıfa ait ise denktirler denir ve $(A_1, B_1) \approx (A_2, B_2)$ olarak gösterilir. Tüm denk çiftlerin sınıflarının kümesi M ile gösterilsin. $\psi(l)$ (3.4.29) denklemini sağlayan tüm (A, B) çiftlerinin sınıfı olmak üzere $\psi : L \to M$ dönüşümü verilsin. Tanımından dolayı ψ birebir bir dönüşümdür ve ψ P'den L'ye Minkowski dualitesinin bir genişlemesi olarak alınabilir. $\tilde{M}$ üzerinde cebirsel toplam ve negatif olmayan bir skalerle çarpım:

$$A + B = \{\lambda \mid \lambda = \mu + v, \quad \mu \in A, v \in B\}$$

$$cA = \{c\mu \mid \mu \in A\} \quad (c \geq 0)$$

şeklinde ve $\tilde{M} \times \tilde{M}$ üzerinde cebirsel toplam ve skalerle çarpım:

$$(A_1, B_1) + (A_2, B_2) = (A_1 + A_2, B_1 + B_2)$$

$$c(A, B) = (cA, cB), \quad c \geq 0$$

$$c(A, B) = (cB, cA), c \leq 0$$

şeklinde tanımlansın.

$(A_1, B_1), (A_2, B_2) \in \tilde{M} \times \tilde{M}$ ve $l_i = \max_{\mu \in A_i} \mu(x) + \min_{v \in B_i} v(x), \quad i = 1, 2$ olsun. Bu durumda c_1, c_2 gerçel sayıları için

$$(c_1 l_1 + c_2 l_2)(x) = \max_{\mu \in c_1 A_1 + c_2 A_2} \mu(x) + \min_{v \in c_1 B_1 + c_2 B_2} v(x)$$

dir. Gerçekten; $\mu_1 \in A_1, \mu_2 \in A_2$ ve $v_1 \in B_1, v_2 \in B_2$ olmak üzere $\mu = c_1\mu_1 + c_2\mu_2$ ve $v = c_1v_1 + c_2v_2$ olsun. Bu durumda;

$$\begin{aligned}
\max_{\mu\in c_1A_1+c_2A_2} \mu(x) + \min_{v\in c_1B_1+c_2B_2} v(x) =& \max_{\substack{\mu_2\in A_2\\ \mu_1\in A_1}} (c_1\mu_1(x) + c_2\mu_2(x)) \\
&+ \min_{\substack{v_2\in B_2\\ v_1\in B_1}} (c_1v_1(x) + c_2v_2(x)) \\
=& \max_{\mu_1\in A_1} c_1\mu_1(x) + \max_{\mu_2\in A_2} c_2\mu_2(x) \\
&+ \min_{v_1\in B_1} c_1v_1(x) + \min_{v_2\in B_2} c_2v_2(x) \\
=& c_1(\max_{\mu_1\in A_1} \mu_1(x) + \min_{v_1\in B_1} v_1(x)) \\
&+ c_2(\max_{\mu_2\in A_2} \mu_2(x) + \min_{v_2\in B_2} v_2(x)) \\
=& c_1l_1 + c_2l_2.
\end{aligned}$$

M kümesi üzerinde toplama ve skalerle çarpım işlemleri tanımlanabilir: İki sınıfın cebirsel toplamı sırasıyla ilk sınıftan ve ikinci sınıftan çiftlerin toplamlarını içeren sınıf, skalerle çarpımı ise sınıfa ait küme çiftlerinin skalerle çarpımını içeren sınıf olarak tanımlanır. Bu işlemler iyi tanımlıdır ve ψ dönüşümü ile L ve M lineer uzayları izomorftur.

L lineer uzayı

$$l_1 \geq l_2 \quad \Leftrightarrow \quad \forall\ x \in X \text{ için } l_1(x) \geq l_2(x)$$

doğal sıralaması ile sıralı bir lineer uzaydır. $\psi(l_i)$ sınıfı bir $(A_i, B_i), \quad i = 1, 2$ çiftini içersin. ψ izomorfizması ile, $l_1 \geq l_2$ olması için gerekli ve yeterli koşulun $A_1 - B_2 \subset A_2 - B_1$ olduğu söylenebilir ($(A_1, B_1) \approx (A_2, B_2) \Leftrightarrow A_1 + B_2 = A_2 + B_1$). $\alpha_1, \alpha_2 \in M$ ve $\psi(l_i) = \alpha_i$, $i = 1, 2$ olmak üzere $l_i \in L$ olsun. Bu durumda $\alpha_1 \geq \alpha_2 \Leftrightarrow l_1 \geq l_2$ olacağı açıktır ve bu sıralama ile M sıralı lineer uzaydır.

L uzayı bir örgüdür. Bu nedenle L'nin her sonlu alt kümesi için supremum ve infimum vardır.

N sonlu bir indeks kümesi, $p_i \in P, q_i \in Q (i \in \mathbb{N})$ olmak üzere $l_i \in L$, $l_i = p_i + q_i$

olsun. Bu durumda

$$\max_{i\in\mathbb{N}} l_i(u) = \max_{i\in\mathbb{N}}\Big(p_k(u) - \sum_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ i\neq k}} q_i(u)\Big) + \sum_{i\in\mathbb{N}} q_i(u) \tag{3.4.30}$$

$$\min_{i\in\mathbb{N}} l_i(u) = \sum_{i\in\mathbb{N}} p_i(u) + \min_{i\in\mathbb{N}}\Big(q_k(u) - \sum_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ i\neq k}} p_i(u)\Big) \tag{3.4.31}$$

dir. M ile L izomorf olduğundan M de bir örgüdür. (3.4.30) ve (3.4.31) eşitlikleri kullanılarak $\alpha_i \in M$ elemanlarının bir sonlu kümesinin $\bigvee_i \alpha_i$ supremumu ve $\bigwedge_i \alpha_i$ infimumu aşağıdaki biçimde bulunur. N sonlu bir küme $p_i \in P$, $q_i \in Q$ olsun. Bu durumda

$$\underline{\partial}\Big(\bigvee_{i\in\mathbb{N}} p_i\Big) = \operatorname{conv}\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \underline{\partial} p_i, \quad \overline{\partial}\Big(\bigwedge_{i\in\mathbb{N}} q_i\Big) = \operatorname{conv}\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \overline{\partial} q_i$$

dir. $\alpha_i \in M(i \in \mathbb{N})$ ve (A_i, B_i), α_i sınıfından herhangi bir çift olsun. Bu durumda $\bigvee_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i$ supremumu

$$A = \operatorname{conv}\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\Big(A_k - \sum_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ i\neq k}} B_i\Big), \quad B = \sum_{i\in\mathbb{N}} B_i$$

olmak üzere (A, B) çiftini içeren sınıfa karşılık gelir. $\bigwedge_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i$ infimumu ise

$$C = \sum_{i\in\mathbb{N}} A_i, \quad D = \operatorname{conv}\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\Big(B_k - \sum_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ i\neq k}} A_i\Big)$$

olmak üzere (C, D) çiftini içeren sınıfa karşılık gelir.

3.5 Kuasidiferansiyel

X bir Banach uzayı ve f bir $\Omega \subset X$ açık kümesi üzerinde tanımlı ve bir $x \in \Omega$ noktasında kuasidiferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonunun x noktasında f'_x yönlü türevi vardır ve bu türev L uzayına aittir yani $p \in P, q \in Q$ olmak üzere $p + q$ şeklinde ifade edilebilir.

Konveks kümelerin M uzayının ψ izomorfizmi ile $f'_x \in L$ fonksiyonuna karşılık gelen α elemanı verilsin. Bu eleman f fonksiyonunun x noktasındaki kuasidiferansiyeli olarak adlandırılır. α sınıfına ait herhangi bir çift yine f fonksiyonunun x noktasındaki bir kuasidiferansiyelidir ve bir kuasidiferansiyel $Df(x)$ ile gösterilir. Tanımdan; bir kuasidiferansiyel konveks w^*-kompakt $(\underline{\partial}f(x), \overline{\partial}f(x))$ kümelerinin

$$f'_x(u) = \max_{\mu \in \underline{\partial}f(x)} \mu(u) + \min_{v \in \overline{\partial}f(x)} v(u)$$

eşitliğini sağlayan bir çiftidir.

Kuasidiferansiyeller üzerindeki cebirsel işlemler kompakt kümeler uzayının elemanları üzerindeki işlemler gibi düşünülür. $\triangle(x)$ ile bir $\Omega \subset X$ açık kümesi üzerinde tanımlı ve bir $x \in \Omega$ noktasında kuasidiferansiyellenebilir tüm fonksiyonların kümesi gösterilsin. Bu durumda;

1) $f_1, f_2 \in \triangle(x)$ ve $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ise bu durumda $c_1 f_1 + c_2 f_2 \in \triangle(x)$ dir ve

$$D(c_1 f_1 + c_2 f_2)(x) = c_1 D(f_1)(x) + c_2 D(f_2)(x)$$

dir. Özel olarak; $D(-f)(x) = -Df(x)$ dir.

2) $f_1, f_2 \in \triangle(x)$ olsun. Bu durumda $f_1 f_2 \in \triangle(x)$ dir ve

$$D(f_1 f_2)(x) = f_1(x) Df_2(x) + f_2(x) Df_1(x)$$

dir.

3) $f \in \triangle(x)$, $\forall\ x \in \Omega$ için $f(x) \neq 0$ ise bu durumda $1/f$ fonksiyonu x noktasında kuasidiferansiyellenebilirdir ve

$$D(\frac{1}{f})(x) = -\frac{1}{f^2(x)} Df(x)$$

dir.

4) $f_1, f_2, ..., f_n \in \triangle(x)$ ve $\forall\ y \in \Omega$ için

$$g(y) = \max\{f_1(y), f_2(y), ..., f_n(y)\}$$

$$h(y) = \min\{f_1(y), f_2(y), ..., f_n(y)\}$$

olsun. Bu durumda $g, h \in \triangle(x)$ dir. $R(x) = \{i \mid f_i(x) = g(x)\}$ ve $S(x) = \{i \mid f_i(x) = h(x)\}$ için

$$\underline{\partial} g(x) = \operatorname{conv} \bigcup_{k \in R(x)} \Big(\underline{\partial} f_k(x) - \sum_{\substack{i \in R(x) \\ i \neq k}} \overline{\partial} f_i(x) \Big)$$

$$\overline{\partial} g(x) = \sum_{k \in R(x)} \overline{\partial} f_k(x), \quad \underline{\partial} h(x) = \sum_{k \in S(x)} \underline{\partial} f_k(x)$$

$$\overline{\partial} h(x) = \operatorname{conv} \bigcup_{k \in S(x)} \Big(\overline{\partial} f_k(x) - \sum_{\substack{i \in S(x) \\ i \neq k}} \underline{\partial} f_i(x) \Big)$$

olmak üzere

$$Dg(x) = (\underline{\partial} g(x), \overline{\partial} g(x)), \quad Dh(x) = (\underline{\partial} h(x), \overline{\partial} h(x))$$

dir.

Örnek 3.5.1.

$$h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

olsun. h fonksiyonu konveks değildir, $(0,0)$*'da Frechet türevlenebilir değildir. Fakat* $(0,0)$*'da yönlü türevlenebilirdir. Ayrıca* $k = h + 2\|.\|$ *fonksiyonu konvekstir ve kuasidiferansiyellenebilirdir. Bu durumda*

$$\big(\underline{\partial} h|_0, \overline{\partial} h|_0\big) = \big(\partial(h + 2\|.\|), 2\mathbb{B}\big)$$

bulunur.

3.6 Bir X Banach Uzayından Bir Y Banach Uzayına Tanımlı Sublineer Dönüşümler ve Subdiferansiyelleri

Daha önceki kesimlerde bir X Banach uzayından $\mathbb{R}$'ye tanımlı sublineer dönüşümler ve subdiferansiyelleri çalışılmıştır. Bu kesimde ise bir X Banach uzayından bir Y Banach uzayına tanımlı sublineer dönüşümler ve subdiferansiyelleri çalışılacaktır.

Tanım 3.6.1. *$Y = (Y, \|.\|, \geq)$ sıralı bir Banach uzay ve $|x| = \sup(x, -x)$ olsun. Y'nin üstten sınırlı her altkümesinin supremumu varsa ve $\|.\|$ monoton (yani $|x| \geq |y| \Rightarrow \|x\| \geq \|y\|$) ise Y uzayına **Banach K-uzayı** denir.*

Tanım 3.6.2. *X bir Banach K-uzayı olsun. $\forall\ x, y \in X$, $x \geq y$ için $\{z \mid x \leq z \leq y\}$ aralığı zayıf *-kompakt ise bu X uzayına **w^*-kompakt aralıklara sahiptir** denir.*

Tanım 3.6.3. *X bir Banach uzayı, Y bir Banach K-uzayı olsun. $P : X \to Y$ operatörü*

$$P(\lambda x) = \lambda P(x), \quad \forall\ \lambda \geq 0, \quad \forall\ x \in X$$

ve

$$P(x_1 + x_2) \leq P(x_1) + P(x_2), \quad (P(x_1 + x_2) \geq P(x_1) + P(x_2)), \quad \forall\ x_1, x_2 \in X$$

*koşullarını sağlıyorsa **sublineerdir (süperlineerdir)** denir.*

Operatörlerin kuasidiferansiyellenebilirliği sublineer operatörleri yardımıyla tanımlandığından öncelikle sublineer operatörler ele alınacaktır.

Tanım 3.6.4. *X Banach uzayı ve Y bir Banach K-uzayı olmak üzere $\mathcal{L}(X, Y)$ ile X'ten Y'ye lineer sürekli operatörlerin uzayı gösterilsin. $P : X \to Y$ bir sublineer operatör olsun. Bir $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ operatörü $\forall\ x \in X$ için $A(x) \leq P(x)$ ise P sublineer operatörünün bir **destek operatörüdür** denir. P'nin tüm destek operatörlerinin kümesine **P'nin bir destek kümesi** denir ve $\underline{\partial} P$ ile gösterilir.*

Her sublineer sürekli $P : X \to Y$ operatörü için $\underline{\partial} P$ subdiferansiyeli boş kümeden farklıdır ve

$$P(x) = \max_{A \in \underline{\partial} P} A(x)$$

dir.

Tanım 3.6.5. *$U \in \mathcal{L}(X, Y)$ olsun. $U = \underline{\partial} P$ olacak şekilde $\exists\ P : X \to Y$ sublineer operatörü varsa bu kümeye bir **destek kümesi** denir.*

$\mathcal{L}(X, Y)$ uzayı üzerinde bir "$\geq$" sıralaması tanımlansın: $A, B \in \mathcal{L}(X, Y)$ için

$$A \geq B \Leftrightarrow \forall\ y \geq 0 \quad \text{için} \quad A(y) \geq B(y).$$

I_Y ile Y'den Y'ye birim dönüşüm gösterilsin ve

$$[0, I_Y] = \{\alpha \in \mathcal{L}(X,Y) \mid 0 \leq \alpha \leq I_Y\}$$

olsun. $Y = E_n$ ise $\alpha \in [0, I_Y]$ olması için gerekli ve yeterli koşul $0 \leq \alpha_i \leq 1$ olmak üzere α matrisinin

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} \tag{3.6.32}$$

formunda olmasıdır.

Tanım 3.6.6. *$U \subset \mathcal{L}(X,Y)$ olsun. $\forall\ \alpha \in [0, I_Y]$ ve $A, B \in U$ için*

$$\alpha A + (I_Y - \alpha)B \in U$$

*ise bu U kümesine **operatör konveks** denir.*

$\mathcal{L}(X,Y)$ uzayında bir zayıf * operatör topoloji $(x_1, x_2, ..., x_n)$ ve $(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_m)$, $m, n = 1, 2, ...$ sırasıyla X ve Y kümelerinin sonlu koleksiyonları, ε herhangi bir pozitif sayı olmak üzere sıfırın komşuluklarının bir

$$V_{x_1,...,x_n,\mu_1,...,\mu_m} = \left\{A \in \mathcal{L}(X,Y) \,\middle|\, |\mu_i(A(x_j))| < \varepsilon, \quad i \in \{1,..,m\}, j \in \{1,...,n\}\right\}$$

sistemi olarak tanımlanır.

Teorem 3.6.7. *Bir Y Banach K-uzayı zayıf *-kompakt aralıklara sahip olsun. Bu durumda bir $U \subset \mathcal{L}(X,Y)$ kümesinin destek kümesi olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul bir w^* operatör topolojide operatör konveks ve kompakt olmasıdır.*

Sonuç 3.6.8. *$X = E_n$ ve $Y = E_m$ olsun. Bu durumda $U \subset \mathcal{L}(X,Y)$'nin bir destek kümesi olması için gerekli ve yeterli koşul U'nun kapalı, sınırlı ve konveks operatör olmasıdır.*

Önerme 3.6.9. *Y bir Banach K-uzayı ve $P_1, ..., P_n : X \to Y$ sürekli sublineer operatörler olsun. Bu durumda $(P_1 \vee ... \vee P_n)(x) = P_1(x) \vee P_2(x) \vee .. \vee P_n(x)$ olmak üzere*

$$\underline{\partial}(P_1 + P_2 + ... + P_n) = \underline{\partial}P_1 + \underline{\partial}P_2 + ... + \underline{\partial}P_n$$

$$\underline{\partial}(\lambda P) = \lambda \underline{\partial} P, \quad \lambda > 0$$

$$\underline{\partial}(P_1 \vee P_2 \vee ... \vee P_n) = \bigcup_{\substack{\alpha_1 \geq 0, ..., \alpha_n \geq 0 \\ \alpha_1 + ... + \alpha_n = I_Y}} \big(\underline{\partial}(\alpha_1 \circ P_1) + ... + \underline{\partial}(\alpha_n \circ P_n)\big)$$

biçimindedir.

Bir $Q : X \to Y$ superlineer operatörü verilsin.

$$\overline{\partial} Q = \{A \in \mathcal{L}(X, Y) \mid A(X) \geq Q(X), \quad \forall\, x \in X\}$$

kümesine Q **operatörünün superdiferansiyeli** denir. Q süperlineer bir operatör ise $P = -Q$ dir ve $P_1(x) = -Q(-x)$ olmak üzere $\overline{\partial} Q = \underline{\partial} P_1$ dir.

$\tilde{M_Y}$ ile $\mathcal{L}(X, Y)$ uzayındaki tüm destek kümelerinin ailesi gösterilsin. Bu durumda $\tilde{M_Y} \times \tilde{M_Y}$ üzerinde

$$(U_1, V_1) + (U_2, V_2) = (U_1 + U_2, V_1 + V_2)$$

$$c(U, V) = (cU, cV), \quad c \geq 0$$

$$c(U, V) = (cV, cU), \quad c < 0$$

cebirsel işlemleri ve

$$(U, V) \approx (U_1, V_1) \Leftrightarrow U - V_1 = U_1 - V$$

denklik bağıntısı tanımlansın. Denklik sınıflarının kümesi M_Y ile gösterilsin. $\alpha, \beta \in M_Y, (U, V) \in \alpha, (U', V') \in \beta$ için $(U, V) + (U', V')$ çiftini içeren sınıf $\alpha + \beta = \gamma$ dır.

Destek kümelerinin uzayı M_Y, P sürekli sublineer ve Q sürekli süperlineer operatörler olmak üzere $l = P + Q$ formundaki tüm $l : X \to Y$ operatörlerinin uzayı olan L_Y'ye izomorfiktir.

$\psi_Y : L_Y \to M_Y$ izomorfizmi bir l operatörünü bir α sınıfına götürür ve bu α sınıfı

$$l(x) = \max_{A \in U} A(x) + \min_{B \in V} B(x)$$

olacak şekildeki (A, B) çiftini içerir.

L_Y ve M_Y üzerinde sırasıyla $l_1, l_2 \in \mathcal{L}(X, Y)$, $\alpha, \beta \in M_Y$, $(U, V) \in \alpha$ ve $(U', V') \in \beta$ olmak üzere

$$l_1 \geq l_2 \Leftrightarrow \forall\ x \in X \quad \text{için} \quad l_1(x) \geq l_2(x)$$

ve

$$\alpha \geq \beta \Leftrightarrow U - V' \supset V - U'$$

sıralama bağıntıları tanımlansın. Bu durumda L_Y ve M_Y uzayları sıralı lineer uzaylardır. Ek olarak örgüdürler. ψ_Y dönüşümü sadece lineer değil aynı zamanda bu uzayların bir sıralama izomorfizmidir.

3.7 Kuasidiferansiyellenebilir Operatörler

Tanım 3.7.1. *X ve Y Banach uzayı, $H : \Omega \subset X :\rightarrow Y$ bir operatör ve $x \in \Omega$ olsun. $\forall\ u \in X$ için*

$$H'_x(u) = \lim_{\alpha \to +0} \frac{H(x + \alpha u) - H(x)}{\alpha}$$

*limiti varsa H operatörüne $x \in \Omega$ noktasında **yönlü türevlenebilir** denir. $H'_x : X \rightarrow Y$ operatörüne H'nin x noktasındaki **yönlü türevi** denir.*

Uyarı 3.7.2. *Bu tanım gerçel değerli fonksiyonlar için Dini türevinin bir genelleştirmesidir.*

Tanım 3.7.3. *Y bir Banach K-uzayı, $H : \Omega \subset X \rightarrow Y$ bir operatör ve $x \in \Omega$ olsun. H operatörü x noktasında yönlü türevlenebilir ve bu yönlü türev P sürekli sublineer, Q sürekli süperlineer bir operatör olmak üzere $H'_x = P + Q$ formunda yazılabiliyorsa H operatörüne x noktasında **kuasidiferansiyellenebilirdir** denir.*

M_Y uzayının $(\underline{\partial} P, \overline{\partial} Q)$ çiftini içeren bir elemanına H operatörünün kuasidiferansiyeli denir. Bu sınıfa ait her çift H operatörünün x'deki kuasidiferansiyelidir. Buradan V, W destek kümeleri ve $\forall\ u \in X$ için

$$H'_X(u) = \max_{A \in V} A(u) + \min_{B \in W} B(u)$$

eşitliği sağlanıyorsa (V, W) çifti bir kuasidiferansiyeldir. H operatörünün bir x noktasındaki kuasidiferansiyeli $DH(x)$ ile gösterilir. $DH(x) = (V, W)$ ise bu durumda V kümesi (W kümesi) H operatörünün bir x noktasındaki bir subdiferansiyelidir(süperdiferansiyelidir) ve $\underline{\partial}H(x)$ ($\overline{\partial}H(x)$) ile gösterilir.

Bir x noktasında kuasidiferansiyellenebilir tüm operatörlerin uzayı bir lineer uzaydır.

Örnek 3.7.4.

1) Bir H operatörü bir x noktasında Gâteaux diferansiyellenebilirse bu durumda bu noktada kuasidiferansiyellenebilirdir ve $H'(x)$ Gâteaux türevi olmak üzere $DH(x) = (H'(x), 0)$ dir.

2) Y zayıf * kompakt aralıklara sahip olan bir uzay, $\Omega \subset X$ açık konveks bir küme ve $H : \Omega \to Y$ sürekli konveks bir operatör yani; $\forall\ x, y \in \Omega, \alpha \in [0,1]$ için

$$H(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha H(x) + (1-\alpha)H(y)$$

olsun. Bu durumda H, $\forall\ x \in \Omega$ noktasında yönlü türevlenebilirdir ve yönlü türevi $\underline{\partial}H(x) = \{A \in \mathcal{L}(X,Y) \mid H(y) - H(x) \geq A(y) - A(x), \quad \forall\ y \in \Omega\}$ olmak üzere

$$H'_x = \max_{A \in \underline{\partial}H(x)} A(u)$$

biçimindedir. O halde H'_x sublineer ve sürekli operatördür. $\underline{\partial}H(x)$ kümesi H'_x operatörünün subdiferansiyeli ile çakışır ve bu küme bir destek kümesidir. Buradan H operatörü $x \in \Omega$ noktasında kuasidiferansiyellenebilirdir ve H operatörünün kuasidiferansiyeli $DH(x) = (\underline{\partial}H(x), 0)$ dır.

3) Y zayıf *-kompakt aralıklara sahip bir uzay, $\Omega \subset X$ açık konveks küme ve $H : \Omega \to Y$ sürekli konveks bir operatör olsun. Bu durumda H kuasidiferansiyellenebilirdir ve kuasidiferansiyeli

$$\overline{\partial}H(x) = \{A \in \mathcal{L}(X,Y) \mid H(x) - H(y) \leq A(x) - A(y), \quad \forall\ y \in \Omega\}$$

H'nin x'deki süperdiferansiyeli olmak üzere $DH(x) = (0, \overline{\partial}H(x))$ biçimindedir.

3.8 Dönüşümlerin Bileşkelerinin Kuasidiferansiyellenebilirliği

Bu kesimde bir $X \subset \mathbb{R}^n$ açık kümesinde $\mathbb{R}^m$'ye tanımlı olan operatörlerin kuasidiferansiyellenebilirliği, $h_i : X \to \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \ldots, m$ tanımlı koordinat fonksiyonları olmak üzere h_i'lerin kuasidiferansiyellenebilirliği cinsinden karakterize edilecek. Ayrıca $X \subset \mathbb{R}^n$ açık kümesinden bir Y Banach-K uzayına tanımlı dönüşümün Y'den $\mathbb{R}$'ye tanımlı bir fonksiyon ile oluşturulan $f \circ h$ fonksiyonunun kuasidiferansiyellenebilmesi üzerinde durulacaktır.

Önerme 3.8.1. *$X \subset \mathbb{R}^n$ açık bir küme olmak üzere bir $H : X \to \mathbb{R}^m$ dönüşümünün kuasidiferansiyellenebilmesi için gerekli ve yeterli koşul*

$$H(x) = (h_1(x), ..., h_m(x))$$

olan $h_i : X \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., m$ koordinat fonksiyonlarının kuasidiferansiyellenebilmesidir.

$Dh_i(x) = [\underline{\partial}h_i(x), \overline{\partial}h_i(x)]$ h_i, $\quad i = 1, ..., m$ fonksiyonunun x noktasındaki bir kuasidiferansiyeli olsun. $\underline{\partial}H(x)$ kümesi $\underline{\partial}h_i(x)$'e ait vektörlerden oluşan i satırlarının bileşkesi olan tüm $n \times m$'lik matrislerin kümesi, benzer şekilde $\overline{\partial}H(x)$ kümesi $\overline{\partial}h_i(x)$'e ait vektörlerden oluşan i satırlarının bileşkesi olan tüm $n \times m$'lik matrislerin kümesi olmak üzere H dönüşümünün x noktasındaki bir kuasidiferansiyeli $DH(x) = [\underline{\partial}H(x), \overline{\partial}H(x)]$ dir. $\underline{\partial}H(x)$ kümesine H dönüşümünün x noktasındaki bir subdiferansiyeli ve $\overline{\partial}H(x)$ kümesine H dönüşümünün x noktasındaki bir süperdiferansiyeli denir.

U $n \times m$'lik matrislerin kümesi, U_i, U kümesindeki matrislerin i. satırındaki vektörlerin kümesi ve $x \in \mathbb{R}^n$ olsun. Bu durumda

$$\max_{A \in U} Ax = \left(\max_{a_1 \in U_1} (a_1, x), \max_{a_2 \in U_2} (a_2, x), ..., \max_{a_m \in U_m} (a_m, x) \right)$$

ve

$$\min_{A \in U} Ax = \left(\min_{a_1 \in U_1} (a_1, x), \min_{a_2 \in U_2} (a_2, x), ..., \min_{a_m \in U_m} (a_m, x) \right)$$

dir.

Önerme 3.8.2. *Bir H dönüşümü bir $x \in X$ noktasında kuasidiferansiyellenebilir ise bu durumda*

$$\frac{\partial H(x)}{\partial H} \equiv H'(x, g) = \max_{A \in \underline{\partial}H(x)} Ag + \min_{B \in \overline{\partial}H(x)} Bg$$

dir.

$\underline{\partial}H(x)$ subdiferansiyeli ve $\overline{\partial}H(x)$ süperdiferansiyeli kompakt konveks kümelerdir. Ek olarak bu matris kümeleri operationally(işlemsel) konvekstirler.

Tanım 3.8.3. *U $n \times m$'lik matrislerin bir kümesi olsun. $A, A' \in U$ ve $0 \leq \alpha_i \leq 1$ olmak üzere*

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & 0 \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_m \end{pmatrix} \tag{3.8.33}$$

*için $[\alpha A + (I-\alpha)A'] \in U$ ise U kümesine **operationally(işlemsel) konveks** denir.*

Bir U matrisi kümesi işlemsel konveks ise bu durumda $A, A' \in U$ matrislerinin karşılık gelen satırlarının konveks kombinasyonlarının oluşturduğu satırlardan oluşan bir matris yine U kümesine aittir.

Uyarı 3.8.4. *Yukarıda verilen bir dönüşümün bir kuasidiferansiyelinin tanımı tam olarak tutarlı değildir. Çünkü dönüşümün kuasidiferansiyeli h_i, $i = 1, ..., m$ fonksiyonlarının $Dh_i(x) = [\underline{\partial}h_i(x), \overline{\partial}h_i(x)]$ kuasidiferansiyellerinin seçimi ile değişir. Daha açık olarak; $\underline{\partial}H(x)$ ve $\overline{\partial}H(x)$, $Dh_i(x) = [\underline{\partial}h_i(x), \overline{\partial}h_i(x)]$ kuasidiferensiyellerinin herhangi kombinasyonlarının oluşturduğu matrislerin aileleri olmak üzere H dönüşümünün kuasidiferansiyeli $[\underline{\partial}H(x), \overline{\partial}H(x)]$ çiftlerinin bir sınıfıdır. Buradan, her $\{Dh_i(x) \mid i = 1, ..., m\}$ kuasidiferansiyeli belirli bir $[\underline{\partial}H(x), \overline{\partial}H(x)]$ çifti ile ilişkilidir ve tersine böyle her çift belli bir $\{Dh_i(x) \mid i = 1, ..., m\}$ ile ilişkilidir.*

Bir dönüşümün kuasidiferansiyelini koordinat fonksiyonları ile tanımlamak yerine işlemsel konveks kümelerin uzayı ile ifade etmek mümkündür.

Tanım 3.8.5. *$P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $P(x) = (p_1(x), ..., p_m(x))$ bir dönüşüm olsun. Koordinat fonksiyonları $p_1, ..., p_2$ sublineer ise P dönüşümü **sublineerdir** denir.*

$x, y \in \mathbb{R}^m$ ve $x = (x_1, ..., x_m), y = (y_1, ..., y_m)$ olsun. $\forall\ i \in \{1, ..., m\}$ için $x_i \geq y_i$ ise $x \geq y$ dir. Diğer bir deyişle $\mathbb{R}^m$ bir sıralı uzaydır bu nedenle $\mathbb{R}^n$

uzayının pozitif elemanlarının konisi ile

$$\mathbb{R}^m_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0 \quad \forall\, i \in \{1, ..., m\}\}$$

konisi ile çakışır.

$P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sublineer bir operatör olsun. $\underline{\partial} P$ subdiferansiyeli p_i koordinat fonksiyonlarının $\underline{\partial} p_i$ subdiferansiyellerine ait olan i sütunlarının bileşkesi olan tüm $n \times m$'lik matrislerden oluşur.

Bir $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dönüşümü $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$ için

$$Q(x + y) \geq Q(x) + Q(y)$$

ise üst toplamsaldır denir.

Üst toplamsal ve pozitif homojen bir dönüşüme süperlineer bir dönüşüm denir. $\overline{\partial} Q$ süperdiferansiyeli $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$ için $Ax \geq Q(x)$ olacak şekideki tüm $n \times m$'lik A matrislerinden oluşur ve $Q(x) = \min\limits_{A \in \overline{\partial} Q} Ax$ dir.

$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sublineer bir operatör ve p $\mathbb{R}^m$'de tanımlı sublineer bir fonksiyon olsun. $g(x) = p(T(x))$ bileşke fonksiyonu sublineer olmak zorunda değildir. p artan bir fonksiyon ise bu durum kendiliğinden gerçeklenir. Gerçekten; T sublineer olduğundan $y_1 \equiv T(x_1 + x_2) \leq T(x_1) + T(x_2) \equiv y_2$ ve p artan olduğundan $p(y_1) \leq p(y_2)$ dir. Buradan

$$\begin{aligned} g(x_1 + x_2) = p(T(x_1 + x_2)) = p(y_1) \leq p(y_2) &= p(T(x_1) + T(x_2)) \\ \leq p(T(x_1)) + p(T(x_2)) &= g(x_1) + g(x_2) \end{aligned}$$

dir.

Önerme 3.8.6. *Sublineer bir p fonksiyonu artan bir fonksiyon olması için gerekli ve yeterli koşul $\underline{\partial} p$ subdiferansiyeli $\mathbb{R}^m_+$ konisinin alt kümesi olmasıdır.*

Kanıt. p artan olsun. Bu durumda $x \leq 0$ için $\max\limits_{v \in \underline{\partial} p} (v, x) = p(x) \leq 0$ dir. Özel olarak, e_i i. taban vektörü $e_i = ((0, ..., 0, \underset{i}{i}, 0, ..., 0))$, $\quad i \in \{1, ..., m\}$ ve $v \in \underline{\partial} p$ ise bu durumda $-(v, e_i) = (v, -e_i)$ ve $-e_i \leq 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} p(-e_i) = \max_{v \in \underline{\partial} p} (v, -e_i) &\leq 0 \\ (v, -e_i) = -(v, e_i) &\leq 0, \quad \forall\, v \in \underline{\partial} p \\ (v, e_i) &\geq 0 \end{aligned}$$

olur. O halde $v \geq 0$ dır, yani $\underline{\partial} p \subset \mathbb{R}^m_+$ dir.

Tersine $\underline{\partial} p \subset \mathbb{R}^m_+$ olsun. $v \in \underline{\partial} p$ ve $x \geq y$ olacak şekilde $x, y \in \mathbb{R}^m$ verilsin. $x - y \geq 0$ olduğundan $(v, x - y) \geq 0$ dır yani $(v, x) \geq (v, y)$ dir. O halde

$$p(x) \geq \max_{\underline{\partial} p}(v, x) \geq \max_{\underline{\partial} p}(v, y) = p(y)$$

dir, yani p artandır. ■

Sonuç 3.8.7. *p, $\mathbb{R}^m$ üzerinde tanımlı ve sublineer bir fonksiyon ve v', $\underline{\partial} p$ subdiferansiyelinin bir alt sınırı yani $\forall\ v \in \underline{\partial} p$ için $v' \leq v$ olsun. Bu durumda*

$$p_1(x) = p(x) - (v', x)$$

fonksiyonu artan ve sublineerdir.

Uyarı 3.8.8. *$\underline{\partial} p$ kümesi sınırlı olduğundan v' alt sınırı her zaman vardır.*

Kanıt. p sublineer bir fonksiyon olduğundan p_1 fonksiyonu sublineerdir ve $\underline{\partial} p_1 = \underline{\partial} p - v'$ dir. v' alt sınır olduğundan $\underline{\partial} p_1 \subset \mathbb{R}^m_+$ dir. O halde p_1 artan fonksiyondur. ■

Yardımcı Teorem 3.8.9. *p, $\mathbb{R}^m$'de tanımlı ve sublineer bir fonksiyon olsun ve $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$'de $\tilde{p}(x, y) = p(x - y)$ şeklinde tanımlı $\tilde{p}$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda $\tilde{p}$ fonksiyonu sublineerdir ve subdiferansiyeli*

$$\underline{\partial} \tilde{p} = \{v = [v_1, v_2] \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \mid v_1 \in \underline{\partial} p, \quad v_2 = -v_1\}$$

dir.

Kanıt. p sublineer bir fonksiyon ve $\tilde{p}(x, y) = p(x - y)$ olsun. Bu durumda $\tilde{p}$ fonksiyonu sublineerdir. $v = [v_1, v_2] \in \underline{\partial} \tilde{p}$ olsun. O halde $\forall\ x, y \in \mathbb{R}^m$ için $(v_1, x) + (v_2, y) \leq p(x - y)$ dir. $y = 0$ olarak alınsın. Bu durumda $v_1 \in \underline{\partial} p$ dir. $x = y$ olarak alınırsa bu durumda $\forall\ x \in \mathbb{R}^m$ için $(v_1 + v_2, x) \leq 0$ dır. O halde $v_2 = -v_1$ olmalıdır.

Tersine, $v_1 \in \underline{\partial} p, v_2 = -v_1$ olacak şekilde bir $v = [v_1, v_2]$ vektörü verilsin. Bu durumda herhangi bir $[x, y] \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ için

$$(v_1, x) + (v_2, y) = (v_1, x) + (v_1, -y) = (v_1, x - y) \leq p(x - y) = \tilde{p}(x, y)$$

dir. O halde $v \in \underline{\partial} \tilde{p}$ dir. ■

Tanım 3.8.10. *f, bir $X \subset \mathbb{R}^n$ açık kümesinde tanımlı bir fonksiyon, $x \in X$ ve $\mathbb{B}$ $\mathbb{R}^n$'nin birim yuvarı olsun. $\forall\ \varepsilon > 0$ için $\forall\ \alpha \in [0, \alpha_0], \forall\ g \in \mathbb{B}$ iken*

$$\frac{1}{\alpha}|f(x+\alpha g) - f(x) - \alpha f'_x(g)| < \varepsilon$$

*olacak şekilde $\exists\ \alpha_0 > 0$ varsa f fonksiyonuna x noktasında **düzgün yönlü türevlenebilirdir** denir.*

Tanım 3.8.11. *X bir Banach uzayı, $\Omega \subset X$ bir açık küme, f Ω üzerinde tanımlı ve bir $x \in \Omega$ noktasında yönlü türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $\forall\ u \in X$ ve $\varepsilon > 0$ için $\forall\ v \in \mathcal{B}_\delta(u)$ ve $\alpha \in [0, \alpha_0]$ iken*

$$|f(x+\alpha v) - f(x)\alpha f'_x(u)| < \alpha\varepsilon$$

*olacak şekilde $\exists\ \delta > 0$ ve $\exists\ \alpha_0 > 0$ varsa f fonksiyonuna x noktasında **düzgün yönlü türevlenebilirdir** denir.*

Tanım 3.8.12. *Bir f fonksiyonu bir x noktasında düzgün yönlü türevlenebilir ve kuasidiferansiyellenebilir ise bu noktada **düzgün kuasidiferansiyellenebilirdir** denir.*

Yardımcı Teorem 3.8.13. *$X \subset \mathbb{R}^n$ bir açık küme ve $H : X \to Y$ bir $x \in X$ noktasında yönlü türevlenebilir bir dönüşüm ve f, Y'de tanımlı $y = H(x)$ noktasında düzgün yönlü türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Ek olarak, f'_y fonksiyonu yönün bir fonksiyonu olarak sürekli olsun. Bu durumda $u(z) = f(H(z))$ fonksiyonu x noktasında yönlü türevlenebilirdir ve $\forall\ g \in \mathbb{R}^n$ için*

$$u'_x(g) = f'_{H(x)}(H'_x(g))$$

dir.

Kanıt. $\varphi_g(\alpha) = \dfrac{H(x+\alpha g) - H(x) - \alpha H'_x(g)}{\alpha}$, $y = H'_x(g)$ ve $v_\alpha = H'_x(g) + \varphi_g(\alpha)$ olsun. Bu durumda;

$$\begin{array}{rcl}
u(x+\alpha g) - u(x) & = & f(H(x+\alpha g)) - f(H(x)) \\
& = & f(H(x) + \alpha H'_x(g) + \alpha\varphi_g(\alpha)) - f(H(x)) \\
& = & f(y + \alpha v_\alpha) - f(y) \\
& = & \alpha f'_y(v_\alpha) + o(\alpha v_\alpha), \quad \frac{o(v)}{\|v\|} \underset{\|v\|\to 0}{\longrightarrow} 0 \\
\dfrac{1}{\alpha}\Big[u(x+\alpha g) - u(x)\Big] & = & f'_y(v_\alpha) + \dfrac{o(\alpha v_\alpha)}{\alpha} \\
\lim\limits_{\alpha\to 0^+} \dfrac{1}{\alpha}\Big[u(x+\alpha g) - u(x)\Big] & = & f'_y(v_\alpha) \\
& = & f'_{H(x)}(H'_x(g))
\end{array}$$

dir.

■

Teorem 3.8.14. *$X \subset \mathbb{R}^n$ bir açık küme, $Y \subset \mathbb{R}^m$ bir açık küme ve $H : X \to Y$ bir $x_0 \in X$ noktasında kuasidiferansiyellenebilir bir dönüşüm olsun. Y'de tanımlı bir f fonksiyonu $y_0 = H(x_0)$ noktasında düzgün kuasidiferansiyellenebilir ise bu durumda*

$$\psi(x) = f(H(x)) \tag{3.8.34}$$

fonksiyonu x_0 noktasında kuasidiferansiyellenebilirdir.

Kanıt. Yardımcı Teorem 3.8.13'den ψ fonksiyonu x_0'da yönlü türevlenebilirdir ve

$$\frac{\partial\psi(x_0)}{\partial g} = \psi'_{x_0}(g) = f'_{H(x_0)}(H'_{x_0}(g))$$

dir.

$h(g) = f'_{y_0}(H'_{x_0}(g))$ fonksiyonunun bir sublineer fonksiyon ile bir süperlineer fonksiyonun toplamı şeklinde yazıldığı gösterilirmesi yeterlidir.

$DH(x_0) = [\underline{\partial}H(x_0), \overline{\partial}H(x_0)]$ H dönüşümünün x_0 noktasındaki bir kuasidiferansiyeli ve $Df(y_0) = [\underline{\partial}f(y_0), \overline{\partial}f(y_0)]$ f fonksiyonunun $y_0 = H(x_0)$ noktasındaki bir kuasidiferansiyeli olsun. Bu durumda;

$$\begin{aligned} H'_{x_0}(g) &= \max_{A \in \underline{\partial}H(x_0)} Ag + \min_{B \in \underline{\partial}H(x_0)} Bg \\ &= \max_{A \in \underline{\partial}H(x_0)} Ag - \max_{B \in [-\underline{\partial}H(x_0)]} Bg = T(g) - S(g) \end{aligned}$$

dir. T ve S subdiferansiyelleri sırasıyla $\underline{\partial}H(x_0)$ ve$[-\overline{\partial}H(x_0)]$ olan sublineer operatörlerdir.

$$\begin{aligned} f'_{y_0}(l) &= \max_{v \in \underline{\partial}f(y_0)} (v, l) + \min_{w \in \overline{\partial}f(y_0)} (w, l) \\ &= \max_{v \in \underline{\partial}f(y_0)} (v, l) - \min_{w \in [-\overline{\partial}f(y_0)]} (w, l) = p(l) - q(l) \end{aligned}$$

dir. p ve q subdiferansiyelleri sırasıyla $\underline{\partial}f(y_0)$ ve $\overline{\partial}f(y_0)$ olan sublineer fonksiyonlardır. Bu durumda;

$$h(g) = p(T(g) - S(g)) - q(T(g) - S(g))$$

dir.

$z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, $\quad z(g) = [T(g), S(g)]$ olsun. $\{t_i \mid i \in \{1, ..., m\}\}$ ve $\{s_i \mid i \in \{1, ..., m\}\}$ sırasıyla T ve S operatörlerinin koordinat fonksiyonları olmak üzere $z(g) = (t_1(g), ..., t_m(g), s_1(g), ..., s_m(g))$ sublineer bir operatördür.

$\tilde{p}(g, l) = p(g - l)$ ve $\tilde{q}(g, l) = q(g - l)$ sublineer fonksiyonları tanımlansın. Bu durumda $h(g) = \tilde{p}(z(g)) - \tilde{q}(z(g))$ olur.

Bir v' elemanı $\underline{\partial}p = \underline{\partial}f(y_0)$ ve $\underline{\partial}q = -\overline{\partial}f(y_0)$ kümelerinin ortak bir alt sınırı ve bir v'' elemanı aynı kümelerin ortak bir üst sınır olsun. Bu durumda $\forall\, v \in \underline{\partial} f(y_0) \cup [-\overline{\partial} f(y_0)]$ için $v' \leq v \leq v''$ dir. $w = [v_1, v_2] \in \underline{\partial}\tilde{p}$ olsun. Yardımcı Teorem 3.8.13'den $v_1 \in \underline{\partial} p$ ve $v_2 = -v_1$ dir. O halde $v' \leq v_1$ ve $-v'' \leq v_2$ dir. $\tilde{p}$ fonksiyonu yardımıyla $p_1(v_1, v_2) = \tilde{p}(v_1, v_2) - (v', v_1) - (-v'', v_2)$ artan sublineer fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda

$$\tilde{p}(v_1, v_2) = p_1(v_1, v_2) + (v', v_1) - (v'', v_2)$$

dir. Benzer şekilde $\forall\, w = [v_1, v_2] \in \underline{\partial}\tilde{q}$ için $v' \leq v_1$ ve $-v'' \leq v_2$ olduğundan q_1 artan sublineer fonksiyon olmak üzere

$$\tilde{q}(v_1, v_2) = q_1(v_1, v_2) + (v', v_1) - (v'', v_2)$$

dir. Bu durumda $z(g) = (T(g), S(g))$ olduğundan

$$\begin{aligned} h(g) &= \tilde{p}(z(g)) - \tilde{q}(z(g)) \\ &= \tilde{p}(T(g), S(g)) - \tilde{q}(T(g), S(g)) \\ &= p_1(T(g), S(g)) - q_1(T(g), S(g)) \end{aligned} \tag{3.8.35}$$

olur. p_1 ve q_1 artan sublineer fonksiyon olduğundan $p_1(T(g), S(g))$ ve $q_1(T(g), S(g))$ sublineer fonksiyonlar ve $[-q_1(T(g), S(g))]$ süperlineer bir fonksiyondur.

■

Aşağıdaki yardımcı teorem bir bileşkenin bir kuasidiferansiyelinin hesaplanmasına olanak sağlar.

Yardımcı Teorem 3.8.15. *p, $\mathbb{R}^n$'de tanımlı artan sublineer bir fonksiyon, $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sublineer bir operatör ve $h(g) = p(T(g))$ olsun. Bu durumda*

$$\underline{\partial} h = \{w \mid w = A^* v, A \in \underline{\partial} T, v \in \underline{\partial} p\}$$

dir.

Kanıt. $a_1, ..., a_m$ bir A matrisinin sütun vektörleri ve $v = (v_1, ... v_m)$ olsun. Bu durumda;

$$A^* v = \sum_{i=1}^{m} v_i a_i$$

dir.

$W = \{w \mid w = A^*v, A \in \underline{\partial}T, v \in \underline{\partial}p\}$ olsun. $\forall\, g \in \mathbb{R}^n$ için $h(g) = \max\limits_{w \in W}(w, g)$ dir. Gerçekten;

$w = A^*v \in W$ ve $v \in \underline{\partial}p$ olsun. p artan sublineer olduğundan $v \geq 0$ dır ve $A \in \underline{\partial}T$,$v \in \underline{\partial}p$ olduğundan

$$(w, g) = (A^*v, g) = (v, Ag) \leq (v, T(g)) \leq p(T(g)) = h(g)$$

olur. Buradan $\max\limits_{w \in W}(w, g) \leq h(g)$ dir. Diğer taraftan, $\forall\, g \in \mathbb{R}^n$ için $\exists\, w \in W$ $(w, g) = h(g)$ olacak şekilde vardır. Böyle bir w elemanının varlığını göstermek için T operatörünün $\{t_i \mid i \in \{1, ..., m\}\}$ koordinat fonksiyonları alınsın. p, $\mathbb{R}^n$'de tanımlı herhangi bir sublineer fonksiyon ise $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\underline{\partial}p(x) = \{v \in \underline{\partial}p \mid (v, x) = p(x)\}$$

olduğundan $a_i \in \underline{\partial}t_i(g)$ için

$$(a_i, g) = t_i(g) \quad \text{ve} \quad \forall\, i = 1, ..., m \quad \text{için} \quad a_i \in \underline{\partial}t_i$$

dir. A, $a_1, ..., a_m$ vektörlerini sütun olarak kabul eden matris olsun. $\underline{\partial}T$ subdiferansiyelinin tanımından $A \in \underline{\partial}T$ dır. Ek olarak

$$Ag = ((a_1, g), ..., (a_m, g)) = (t_1(g), ..., t_m(g)) = T(g)$$

dir. $v \in \underline{\partial}p(T(g))$ ise bu durumda $(v, T(g)) = p(T(g))$ ve $v \in \underline{\partial}p$ dir. $w = A^*v$ için

$$(w, g) = (A^*v, g) = (v, Ag) = (v, T(g)) = p(T(g)) = h(g)$$

olur. O halde $\forall\, g \in \mathbb{R}^n$ için $h(g) = \max\limits_{w \in W}(w, g)$ dir.

Kanıtı tamamlamak için W kümesinin kompakt konveks bir küme olduğu göstermek yeterlidir. Tanımdan W kapalı bir kümedir. h sublineer bir fonksiyon olduğundan Lipschitzdir ve $\forall\, w \in W$ için

$$(w, g) \leq h(g) \leq L\|g\| \leq L, \quad \forall\, g, \|g\| = 1$$

dir. Buradan $\forall\, w \in W$ için $\|w\| \leq L$ dir yani W sınırlıdır. O halde W kompakttır.

$w_1, w_2 \in W$ ve $v_1, v_2 \in \underline{\partial}p$, $A_1, A_2 \in \underline{\partial}T$ olmak üzere $w_1 = A_1^*v_1$, $w_2 = A_2^*v_2$ verilsin. $v_1 = (v_1^{(1)}, ..., v_1^{(2m)}), v_2 = (v_2^{(1)}, ..., v_2^{(m)})$ ve $(a_{1i}, ..., a_{mi}), i = 1, 2$ A_i matrisinin sütun vektörleri olsun. $\forall\, i = 1, ..., m, j = 1, 2$ için $v_j^{(i)} \geq 0$ dir. $v_1^{(i)} + v_2^{(i)}$ eşitsizliğini sağlayan i indislerinin kümesi I^+ ile gösterilsin. $\alpha, \beta > 0$,

$\alpha + \beta = 1$ ise bu durumda

$$\begin{aligned}
\alpha w_1 + \beta w_2 &= \alpha A_1^* v_1 + \beta A_2^* v_2 = \alpha \sum_{i=1}^{m} v_1^{(i)} a_{1i} + \beta \sum_{i=1}^{m} v_2^{(i)} a_{2i} \\
&= \sum_{i \in I^+} [\alpha v_1^{(i)} a_{1i} + \beta v_2^{(i)} a_{2i}] \\
&= \sum_{i \in I^+} [\alpha v_1^{(i)} + \beta v_2^{(i)}] \Big[\frac{\alpha v_1^{(i)}}{\alpha v_1^{(i)} + \beta v_2^{(i)}} a_{1i} + \frac{\beta v_2^{(i)}}{\alpha v_1^{(i)} + \beta v_2^{(i)}} a_{2i} \Big]
\end{aligned}$$

A sütunları $\forall\ i = 2, ..., m$ için

$$a_i = \frac{\alpha v_1^{(i)}}{\alpha v_1^{(i)} + \beta v_2^{(i)}} a_{1i} + \frac{\beta v_2^{(i)}}{\alpha v_1^{(i)} + \beta v_2^{(i)}} a_{2i}$$

olan matris olsun. $A \in \underline{\partial} T$ dir. Çünkü $a_{1i}, a_{2i} \in \underline{\partial} t_i$ ve a_i, a_{1i}, a_{2i}'nin bir konveks kombinasyonu olduğundan $a_i \in \underline{\partial} t_i$ dir. Ek olarak $v = \alpha v_1 + \beta v_2 \in \underline{\partial} p$ dir. Buradan $\alpha w_1 + \beta w_2 = \sum_{i=1}^{m} v^{(i)} a_i = A^* v \in W$ dir. W konvekstir. ■

Teorem 3.8.16. *ψ fonksiyonu (3.8.34)'de tanımlanan fonksiyon olsun. Bu durumda $\forall\ v \in \underline{\partial} f(y_0) \cup \overline{\partial}[-f(y_0)]$ için $v' \leq v \leq v''$ olacak şekilde $v' = (v_1', ..., v_m')$ ve $v'' = (v_1'', ..., v_m'')$ vektörleri ve*

$$\underline{\partial}\psi(x_0) = \Big\{ w \mid w = \sum_{i=1}^{m} [v_i(\lambda_i + \mu_i) - v_i'\lambda_i - v_i''\mu_i], v = (v_1, ... v_m) \in \underline{\partial} f(y_0), \\ \lambda_i \in \underline{\partial} h_i(x_0), \mu_i \in \overline{\partial} h_i(x_0) \Big\}$$

$$\overline{\partial}\psi(x_0) = \Big\{ w \mid w = \sum_{i=1}^{m} [v_i(\lambda_i + \mu_i) + v_i'\lambda_i + v_i''\mu_i], v = (v_1, ... v_m) \in \overline{\partial} f(y_0), \\ \lambda_i \in \underline{\partial} h_i(x_0), \mu_i \in \overline{\partial} h_i(x_0) \Big\}$$

olmak üzere

$$D\psi(x_0) = [\underline{\partial}\psi(x_0), \overline{\partial}\psi(x_0)]$$

olur.

Kanıt. (3.8.35) eşitliğinden $z : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ sublineer bir operatör, p_1, q_1 artan sublineer fonksiyonlar ve $z(g) = (T(g), S(g))$ olmak üzere

$$\frac{\partial f(y_0)}{\partial g} \equiv f_{y_0}'(g) = h(g) = p_1(z(g)) - q_1(z(g))$$

olur. $\tilde{h_1}(g) = p_1(z(g))$ sublineer bir fonksiyon olduğundan $\underline{\partial}\psi(x_0)$ subdiferansiyeli $\underline{\partial}\tilde{h_1}$ kümesidir. Benzer şekilde; $\tilde{h_2} = q_1(z(g))$ fonksiyonu sublineerdir ve $\overline{\partial}\psi(x_0) = -\underline{\partial}\tilde{h_2}$ dir. z, T, S operatörlerinin tanımlarından

$$z(g) = \Big(\max_{v \in \underline{\partial}h_1(x_0)} (v, g), ..., \max_{v \in \underline{\partial}h_m(x_0)} (v, g), \max_{v \in -\overline{\partial}h_1(x_0)} (v, g), ..., \max_{v \in -\overline{\partial}h_m(x_0)} (v, g) \Big)$$

olur. Bu durumda sütunları $(a_1, ..., a_m, a_{m+1}, ..., a_{2m})$ olan $n \times 2m$'lik bir A matrisi $\underline{\partial}z$ olması için gereki yeteli koşul $\forall\ i = 1, ..., m$ için $a_i \in \underline{\partial}h_i(x_0)$ ve $\forall\ i = m+1, ..., 2m$ için $a_i \in (-\overline{\partial}h_{i-m}(x_0))$ olmasıdır. $\tilde{p}(u, v) = p(u - v)$ olmak üzere

$$p_1(v_1, v_2) = \tilde{p}(v_1, v_2) - ([v', -v''], [v_1, v_2])$$

olsun. Bu durumda;

$$\begin{aligned} \underline{\partial}p_1 &= \underline{\partial}\tilde{p} - [v', -v''] \\ &= \{[l_1, l_2] \mid l_1 \in \underline{\partial}\tilde{p}, l_2 = -l_1\} - [v', -v''] \\ &= \{[l_1 - v', -l_1 + v''] \mid l_1 \in \underline{\partial}p\} \end{aligned}$$

dir. $\underline{\partial}p = \underline{\partial}f(y_0)$ olduğundan $\underline{\partial}p_1 0\{[v - v', -v + v'']|v \in \underline{\partial}f(y_0)\}$ olur. Yardımcı Teorem 3.8.15'den

$$\underline{\partial}\tilde{h_1} = \{w|w = A^*v, A \in \underline{\partial}z, v \in \underline{\partial}p_1\}$$

dır. $\{a_i \mid i = 1, ..., 2m\}$, A matrisinin sütunları ve $v = (v_1, ..., v_{2m})$ olmak üzere $\underline{\partial}\tilde{h_1} = \underline{\partial}\psi(x_0)$ ve $A^*v = \sum\limits_{i=1}^{2m} v_i a_i$ olduğundan

$$\begin{aligned} \underline{\partial}\psi(x_0) = &\Big\{ w \ \Big|\ w = \sum_{i=1}^{m} (v_i - v_i')\lambda_i + \sum_{i=1}^{m} (v_i'' - v_i)\mu_i, v = (v_1, ..., v_m) \in \underline{\partial}f(y_0), \\ &\qquad \lambda_i \in \underline{\partial}h_i(x_0), \mu_i \in [-\overline{\partial}h_i(x_0)] \Big\} \\ = &\Big\{ w \ \Big|\ w = \sum_{i=1}^{m} [v_i(\lambda_i + \mu_i) - v_i'\lambda_i - v_i''\mu_i], v = (v_1, ...v_m) \in \underline{\partial}f(y_0), \\ &\qquad \lambda_i \in \underline{\partial}h_i(x_0), \mu_i \in \overline{\partial}h_i(x_0) \Big\} \end{aligned}$$

olup kanıt biter. ■

4 KUASİDİFERENSİYELLENEBİLME VE OPTİMİZASYON

4.1 Optimizasyon İçin Gerek Koşullar

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ herhangi bir küme ve $x \in \mathrm{cl}\Omega$ olsun.

$$\gamma(x, \Omega) = \{g \in \mathbb{R}^n \mid \exists\, \alpha_0 > 0 : x + \alpha g \in \Omega, \quad \forall\, \alpha \in (0, \alpha_0]\}$$

ve

$$\Gamma(x, \Omega) = \{g \in \mathbb{R}^n \mid \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, g_\varepsilon \in B_\varepsilon(g), \alpha_\varepsilon \in (0, \varepsilon) : x + \alpha_\varepsilon g_\varepsilon \in \Omega\}$$

kümeleri tanımlansın. Bu kümeler bir konidir ve $\Gamma(x, \Omega)$ konisi kapalıdır.

Teorem 4.1.1. *f, $X \subset \mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı ve bir $x \in X$ noktasında yönlü türevlenebilir bir fonksiyon, $\Omega \in X$ ve $x \in \Omega$ olsun. Bu durumda x noktası f'nin Ω kümesindeki bir minimum noktası ise*

$$\min_{g \in \gamma(x,\Omega)} f'_x(g) = 0 \tag{4.1.36}$$

dır. x noktası f'nin Ω'daki bir maksimum noktası ise

$$\max_{g \in \gamma(x,\Omega)} f'_x(g) = 0 \tag{4.1.37}$$

dır.
Ek olarak f'_x fonksiyonu yönün bir fonksiyonu olarak sürekli ise bu durumda $\gamma(x, \Omega)$ konisi yerine $\mathrm{cl}\gamma(x, \Omega)$ kümesi yazılabilir.

Kanıt. $g \in \gamma(x, \Omega)$ olsun. Bu durumda yeterince küçük $\alpha > 0$ için $x + \alpha g \in \Omega$ ve x minimum olduğundan $f(x + \alpha g) \leq f(x)$ dir. O halde $f'_x(g) \geq 0$ dır. $0 \in \gamma(x, \Omega)$ ve $f'_x(0) = 0$ olduğundan $\min\limits_{g \in \gamma(x,\Omega)} f'_x(g) = 0$ olur. ■

Tanım 4.1.2. *$\min\limits_{g \in \gamma(x,\Omega)} f'_x(g) = 0$ koşulunu sağlayan bir $x \in \Omega$ noktasına f fonksiyonun Ω'daki **alt kritik(inf-stationary)** noktası, $\max\limits_{g \in \gamma(x,\Omega)} f'_x(g) = 0$ koşulunu sağlayan bir $x \in \Omega$ noktasına f fonksiyonun Ω'daki **üst kritik(sup-stationary)** noktası denir.*

Teorem 4.1.3. *f, $X \subset \mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı ve bir $x \in X$ noktasında yönlü türevlenebilir bir fonksiyon, $\Omega \subset X$ ve $x \in \Omega$ olsun. f fonksiyonun $x \in \Omega$ noktasında düzgün yönlü türevlenebilir ve f'_x fonksiyonunun yönün bir fonksiyonu* *olarak sürekli olsun. Bu durumda bir x noktası f'nin Ω'daki minimum noktası ise*

$$\min_{g\in\Gamma(x,\Omega)} f'_x(g) = 0$$

dır. Bir x noktası f'nin Ω'daki maksimum noktası ise

$$\max_{g\in\Gamma(x,\Omega)} f'_x(g) = 0$$

dir.

Kanıt. $g \in \Gamma(x,\Omega)$ olsun. Bu durumda $\exists\ \{\alpha_k\}$ ve $\exists\ \{g_k\}$ dizileri vardır öyle ki $\alpha_k \to 0^+$ ve $g_k \in \mathbb{R}^n$, $g_k \to g$ iken $x + \alpha_k g_k \in \Omega$ dır. x minimum olduğundan $\frac{o(v)}{\|v\|} \underset{\|v\|\to 0}{\longrightarrow} 0$ olmak üzere

$$f(x) \le f(x+\alpha_k g_k) = f(x) + \alpha_k f'_x(g_k) + o(\alpha_k g_k)$$

dır. $\alpha_k \to 0^+$ iken limit alınırsa $f'_x(g) \ge 0$ olur. ■

Sonuç 4.1.4. *$\delta > 0$ olmak üzere f fonksiyonu $S_\delta(x) \cap \Omega$'da Lipschitz olsun. $\forall\ g \in \Gamma(x,\Omega)$, $\quad g \neq 0$ için $f'_x(g) > 0$ ise bu durumda x noktası f fonksiyonunun Ω'daki bir kesin yerel minimumudur.*

Kanıt. $\forall\ y \in S_r(x) \cap \Omega$ için $f(y) > f(x)$ olacak şekilde $\exists\ r > 0$ var mıdır? Kabul edilsin ki böyle bir $r > 0$ olmasın. Bu durumda $\forall\ r_i > 0$ için en az bir $\{x_i\} \subset S_{r_i}(x) \cap \Omega$ dizisi vardır öyle ki $x_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} x$, $\quad x_i \in \Omega$ iken $f(x_i) \le f(x)$ dir. Genellemeler dışında $\alpha_i = \|x_i - x\|$ olmak üzere

$$g_i = \frac{x_i - x}{\alpha_i} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} g$$

olduğu kabul edilebilir. O halde $g \in \Gamma(x,\Omega)$ ve $\|g\| = 1$ dir.

$$\begin{aligned} f(x_i) - f(x) &= f(x+\alpha_i g_i) - f(x) \\ &= [f(x+\alpha_i g) - f(x)] + [f(x+\alpha_i g_i) - f(x+\alpha_i g)] \end{aligned}$$

olur. f fonksiyonu Lipschitz olduğundan

$$|f(x+\alpha_i g_i) - f(x+\alpha_i g)| \le L\alpha_i \|g_i - g\|$$

olacak şekilde $\exists\ L > 0$ vardır. Bu durumda

$$\frac{1}{\alpha_i}[f(x+\alpha_i g) - f(x)] \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} f'_x(g)$$

ve

$$\frac{1}{\alpha_i}[f(x_i) - f(x)] \longrightarrow f'_x(g)$$

olur. Diğer taraftan, $\forall\ i$ için $\frac{1}{\alpha_i}[f(x_i) - f(x)] \le 0$ olur ki buradan $f'_x(g) \le 0$ dır. Bu durum hipotez ile çelişir o halde kabul yanlıştır. ■

Teorem 4.1.5. *f, bir x noktasında kuasidiferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $K \subset \mathbb{R}^n$ kapalı konveks bir koni olsun. Bu durumda K^*, K'nın dual konisi ve $Df(x) = [\underline{\partial} f(x), \overline{\partial} f(x)]$ f fonksiyonunun x noktasındaki kuasidiferansiyeli olmak üzere;*

i) $\min\limits_{g\in K} f'_x(g) = 0$ *dır* $\Leftrightarrow -\overline{\partial} f(x) \subset \underline{\partial} f(x) - K^*$

ii) $\max\limits_{g\in K} f'_x(g) = 0$ *dır* $\Leftrightarrow -\underline{\partial} f(x) \subset \overline{\partial} f(x) + K^*$

Kanıt. $\forall\ g \in \mathbb{R}^n$ için $p_1(g) = \max\limits_{v\in\underline{\partial} f(x)} v(g)$ ve $p_2(g) = \max\limits_{w\in[-\overline{\partial} f(x)]} w(g)$ olsun. p_1 ve p_2 fonksiyonları sublineerdir ve

$$f'_x(g) = \max_{v\in\underline{\partial} f(x)} v(g) + \min_{w\in\overline{\partial} f(x)} w(g) = p_1(x) - p_2(x)$$

dir. $\min\limits_{g\in K} f'_x(g) = 0$ olsun. Bu durumda $\forall\ g \in K$ için

$$f'_x(g) = p_1(g) - p_2(g) \geq 0$$

dır. $\forall\ i = 1, 2$ için p_{iK}, p_i fonksiyonunun K konisine kısıtlanmışı olmak üzere

$$p_{1K} \geq p_{2K}$$

dır ve bu durumda $\underline{\partial} p_{1K} \supset \underline{\partial} p_{2K}$ olur. Bir sublineer p fonksiyonunun kapalı konveks bir K konisi üzerine kısıtlanmışının subdiferansiyeli

$$\underline{\partial}_K p_K = \underline{\partial} p - K^*$$

olduğundan

$$\underline{\partial} p_1 - K^* \supset \underline{\partial} p_2 - K^*$$

olur. Buradan $\underline{\partial} p_1 - K^* \supset \underline{\partial} p_2$ dır. $\underline{\partial} f(x)$ ve $-\overline{\partial} f(x)$ kompakt konveks kümeler olduğundan ve p_1, p_2 fonksiyonlarının tanımlanışından $\underline{\partial} p_1 = \underline{\partial} f(x)$ ve $\underline{\partial} p_2 = -\overline{\partial} f(x)$ dir. O halde

$$\underline{\partial} f(x) - K^* \supset -\overline{\partial} f(x) \tag{4.1.38}$$

olur.

Tersine; (4.1.38) sağlansın. Bu durumda $\underline{\partial} p_1 = \underline{\partial} f(x)$ ve $\underline{\partial} p_2 = -\overline{\partial} f(x)$ olduğundan $\underline{\partial} p_1 - K^* \supset \underline{\partial} p_2$ olur ki buradan

$$\underline{\partial} p_1 - K^* \supset \underline{\partial} p_2 - K^*$$

dir. Yani $\underline{\partial} p_{1K} \supset \underline{\partial} p_{2K}$ dır. O halde, $\forall\ g \in K$ için $p_{1K} \geq p_{2K}$ olur. Bu durumda $f'_x(g) \geq 0$ dır ve $\min\limits_{g\in K} f'_x(g) = 0$ olur. ■

Teorem 4.1.6. *f bir $x \in \text{int}\Omega$ noktasında kuasidiferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda x noktası f'nin Ω'daki bir minimum noktası ise*

$$-\overline{\partial} f(x) \subset \underline{\partial} f(x)$$

dır. x noktası f'nin Ω'daki bir maksimum noktası ise

$$-\underline{\partial} f(x) \subset \overline{\partial} f(x)$$

dır.

Kanıt. $x \in \text{int}\Omega$ olduğundan $\gamma(x,\Omega) = \mathbb{R}^n$ dir. Bu durumda $\gamma^*(x,\Omega) = \{0\}$ dır. x noktası f'nin bir minimum noktası olduğundan $\min\limits_{g \in \gamma(x,\Omega)} f'_x(g) = 0$ dır ve $\gamma(x,\Omega) = \mathbb{R}^n$ bir konveks koni olduğundan $-\overline{\partial} f(x) \subset \underline{\partial} f(x) - \gamma^*(x,\Omega)$ yani $-\overline{\partial} f(x) \subset \underline{\partial} f(x) - \{0\} \subset \underline{\partial} f(x)$ olur. ■

h bir $X \subset \mathbb{R}^n$ açık kümesinde tanımlı ve kuasidiferansiyellenebilir olsun.

$$\Omega = \{y \in X \mid h(y) \leq 0\}$$

ve

$$\gamma_1 = \{g \mid h'(x,y) < 0\}$$

$$\gamma_2 = \{g \mid h'(x,g) \leq 0\} \tag{4.1.39}$$

kümeleri tanımlansın. $\gamma_1 \subset \gamma(x,\Omega)$ ve $\Gamma(x,\Omega) \subset \gamma_2$ dir. $\text{cl}\gamma_1 = \gamma_2$ ise bu durumda $\text{cl}\gamma(x,\Omega) = \Gamma(x,\Omega)$ olur.

h bir x noktasında kuasidiferansiyellenebilir olduğunda $\text{cl}\gamma_1 = \gamma_2$ eşitliğinin hangi koşullarda gerçekleşeceği araştırılacaktır.

V kompakt konveks bir küme ve $g \in \mathbb{R}^n$ olsun.

$$G_x(V) = \{v \in V \mid (v,x) = \max_{w \in V}(w,x)\}$$

kümesine x tarafından oluşturulan V'nin maksimal yüzü denir. p, V'nin destek fonksiyonu olmak üzere p sublineer fonksiyonunun p'_x yönlü türevinin $\underline{\partial} p'_x$ subdiferansiyeli $G_x(V)$ kümesine eşittir. Yani, p'nin x noktasındaki $\underline{\partial} p(x)$ subdiferansiyeli $G_x(V)$'ye eşittir:

$$p'_x(g) = \max_{v \in G_x(V)}(v,g).$$

$G_x(V)$ kompakt konveks kümedir, $x = 0$ ise $G_x(V) = V$ dir.

Tanım 4.1.7. *$V, W \subset \mathbb{R}^n$ kompakt konveks kümeler olmak üzere bir $[V, W]$ çifti alınsın. $\forall\ g \in \mathbb{R}^n$ için $G_g(W)$ maksimal yüzü $G_g(V)$ maksimal yüzüne ait değilse $[V, W]$ çiftine* ***bir genel pozisyondadır*** *denir.*

Tanımın bir sonucu olarak aşağıdaki özel durumlar elde edilebilir.

$W \cap V = \emptyset$ ise bu durumda $[V, W]$ çifti bir genel pozisyondadır.

Sınırları kesişiyor fakat herbir kesişim noktasında hiç ortak destek hiperdüzlemi yoksa $[V, W]$ çifti bir genel pozisyondadır.

V ve W kümelerinden biri diğerinin içinin alt kümesi ise bu durumda bu kümeler bir genel pozisyondadır.

Yukarıdaki sonuçların herbiri hem $[V, W]$ çifti hem de $[W, V]$ çifti bir genel pozisyondadır. Fakat genel olarak bu doğru değildir. $V, W \subset \mathbb{R}^2$, W bir üçgen ve V bu üçgen içinde bir çember alınırsa $[V, W]$ çifti bir genel pozisyonda olduğu halde $[W, V]$ çifti değildir.

Önerme 4.1.8. *h bir x noktasında kuasidiferansiyellenebilir bir fonksiyon ve γ_1, γ_2 daha önc tanımlanan koniler olsun. $[\underline{\partial} h(x), -\overline{\partial} h(x)]$ bir genel pozisyonda ise bu durumda $\mathrm{cl}\gamma_1 = \gamma_2 = \Gamma(x, \Omega)$ dır.*

Kanıt. $h'_x(g) = 0$ olan $\forall\ g$ ve $\forall\ \varepsilon > 0$ için $\|q - g\| < \varepsilon$ iken $h'_x(q) < 0$ olacak şekilde $\exists\ q$ elemanı var mıdır?
$\forall\ y \in \mathbb{R}^n$ için $p_1(y) = \max\limits_{v \in \underline{\partial} h(x)} (v, y)$ ve $p_2(y) = \max\limits_{v \in [-\overline{\partial} h(x)]} (v, y)$ olsun. p_1 ve p_2 sublineer fonksiyonlar ve $\forall\ y \in \mathbb{R}^n$ için $h'_x(y) = p_1(y) - p_2(y)$ dir. Bu durumda $p_1(g) = p_2(g)$ dir. $[\underline{\partial} h(x), -\overline{\partial} h(x)]$ çifti bir genel pozisyonda olduğundan $\exists\ v$ vardır öyle ki $v \in G_g(-\overline{\partial} h(x))$ ve $v \notin G_g(\underline{\partial} h(x))$ dir. $v \notin G_g(\underline{\partial} h(x))$ olduğundan Ayırma Teoremi'nden ve maksimal yüzün tanımından $\exists\ w \in \mathbb{R}^n$ vardır öyle ki

$$(v, w) > \max_{v' \in G_g(\underline{\partial} h(x))} (v', w) = (p_1)'_g(w)$$

olur. Yeterince küçük $\alpha > 0$ için

$$(v, w) > \frac{1}{\alpha}\Big[p_1(g + \alpha w) - p_1(g)\Big]$$

dir ya da

$$p_1(g+\alpha w) < p_1(g) + \alpha(v,w)$$

olur.

$v \in G_g(-\overline{\partial}h(x))$ ve $p_1(g) = p_2(g)$ olduğundan maksimal yüzü tanımını kullanılarak

$$\begin{aligned} p_1(g) + \alpha(v,w) &= p_2(g) + \alpha(v,w) = \max_{w \in -\overline{\partial}h(x)} (w,g) + \alpha(v,w) \\ &= (v,g) + \alpha(v,w) = (v, g+\alpha w) \leq p_2(g+\alpha w) \end{aligned}$$

olur ki buradan $p_1(g+\alpha w) < p_2(g+\alpha w)$ dır. $q = g+\alpha w$ alınırsa α yeterince küçük olmak üzere $\|q-g\| < \varepsilon$ olur. O halde $h'_x(q) = p_1(q) - p_2(q) < 0$ dır. ■

Uyarı 4.1.9. *$[V,W]$ ve $[\tilde{V},\tilde{W}]$ bir h fonksiyonunun bir x noktasındaki kuasidiferansiyelleri olan denk çiftler olsun. $[V,-W]$ çifti bir genel pozisyonda ise $[\tilde{V},-\tilde{W}]$ çifti de bir genel pozisyondadır. Gerçekten;*
$l(q) = h'_x(q)$ olsun. Bu durumda;

$$p_1(q) = \max_{v \in V}(v,q), \quad p_2(q) = \max_{v \in [-W]}(v,q)$$

ve

$$p_3(q) = \max_{v \in \tilde{V}}(v,q), \quad p_4(q) = \max_{v \in [-\tilde{W}]}(v,q)$$

olmak üzere $l = p_1 - p_2 = p_3 - p_4$ tür. $g, q \in \mathbb{R}^n$ için

$$l'_g(q) = (p_1)'_g(q) - (p_2)'_g(q) = (p_3)'_g(q) - (p_4)'_g(q)$$

olur. $[V,-W]$ bir genel pozisyondadır ancak ve ancak $\forall\ g \in \mathbb{R}^n$ için $\exists\ q \in \mathbb{R}^n$ vardır öyle ki $(p_1)'_g(q) - (p_2)'_g(q) < 0$ dır. Bu durumda $[V,-W]$ ve $[\tilde{V},-\tilde{W}]$ çiftlerinin her ikisi de bir genel pozisyondadır. O halde bir genel pozisyonda bulunma özelliği subdiferansiyeli temsil eden çiftin seçiminden bağımsızdır.

Teorem 4.1.10. *h bir x noktasında kuasidiferansiyellenebilir bir fonksiyon, $\Omega = \{y \in \mathbb{R}^n \mid h(y) \leq 0\}$ ve $[\underline{\partial}h(x), -\overline{\partial}h(x)]$ çifti bir genel pozisyonda olsun. Bu durumda $\gamma_1 = \mathrm{cl}\gamma(x,\Omega) = \mathrm{cl}\Gamma(x,\Omega)$ dır.*

Önerme 4.1.11. *γ_2 (4.1.39)'de tanımlanan koni olmak üzere aşağıdaki eşitlik sağlanır. $\mathrm{cone}\xi = \bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda\xi$, ξ'nin konik zarfı ve ξ^* dual konisi olmak üzere;*

$$\gamma_2 = \bigcup_{w \in \overline{\partial}h(x)} [-\mathrm{cone}(\underline{\partial}h(x) + w)]^*$$

Kanıt. $w \in \overline{\partial} h(x)$ olmak üzere

$$p_w(g) = \max_{v \in \underset{\partial}{h}(x)} [(v, g) + (w, g)]$$

ve

$$K_w = \{g \mid p_w(g) \leq 0\}$$

olsun. $h'_x(g) = \min_{w \in \partial h(x)} p_w(g)$ olduğundan $\gamma_2 = \{g | \min_{w \in \partial h(x)} p_w(g) \leq 0\}$ dır. $g \in \gamma_2$ olsun bu durumda $\min_{w \in \partial h(x)} p_w(g) \leq 0$ dır. $\exists\, w \in \overline{\partial} h(x)$ vardır öyle ki $p_w(g) \leq 0$ olur. $g \in K_w$ dır. O halde $\gamma_2 \subset K_w$ olur. Tersine $K_w \subset \gamma_2$ olduğu benzer şekilde görülür. O halde

$$\gamma_2 = \bigcup_{w \in \overline{\partial} h(x)} K_w$$

olur. p_w sublineer bir fonksiyon olduğundan $K_w^* = -\text{clcone}\underline{\partial} p_w$ dir. K_w kapalı olduğundan $K_w = [-\text{cone}\underline{\partial} p_w]$ dir. p_w fonksiyonunun tanımından $\underline{\partial} p_w = \underline{\partial} h(x) + w$ olur. O halde

$$\gamma_2 = \bigcup_{w \in \overline{\partial} h(x)} K_w = \bigcup_{w \in \overline{\partial} h(x)} [-\text{cone}(\underline{\partial} h(x) + w)]^*$$

dır. ■

Teorem 4.1.12. *h kuasidiferansiyellenebilir bir fonksiyon ve*

$$\Omega = \{y \in X \mid h(y) \leq 0\}$$

olsun. f, $h(x) = 0$ olan bir $x \in \Omega$ noktasında ekstremum değerini alan kuasi-diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $[\underline{\partial} h(x), -\overline{\partial} h(x)]$ çifti bir genel pozisyonda olsun. x bir minimum nokta ise bu durumda

$$-\overline{\partial} f(x) \subset \bigcap_{w \in \overline{\partial} h(x)} [\underline{\partial} f(x) + \text{clcone}(\underline{\partial} h(x) + w)] \tag{4.1.40}$$

dır. x bir maksimum nokta ise bu durumda

$$-\underline{\partial} f(x) \subset \bigcap_{w \in \overline{\partial} h(x)} [\overline{\partial} f(x) - \text{clcone}(\underline{\partial} h(x) + w)] \tag{4.1.41}$$

dir.

Kanıt. $[\underline{\partial} h(x), -\overline{\partial} h(x)]$ çifti bir genel pozisyonda olduğundan $\text{cl}\gamma(x, \Omega) = \gamma_2$ dir. $K_w = -[\text{cone}(\underline{\partial} h(x) + w)]^*$ olmak üzere $\gamma_2 = \bigcup_{w \in \overline{\partial} h(x)} K_w$ olduğundan

$\forall\ w \in \overline{\partial}h(x)$ için $\min\limits_{g\in K_w} f'_x(g) = 0$ olur. K_w kapalı konveks bir koni olduğundan $\forall\ w \in \overline{\partial}f(x) \subset \underline{\partial}f(x) - w^*$ olur. $K_w^* = -\text{clcone}(\underline{\partial}h(x) + w)$ olduğundan

$$-\overline{\partial}f(x) \subset \bigcap_{w\in\overline{\partial}h(x)} [\underline{\partial}f(x) + \text{clcone}(\underline{\partial}h(x) + w)]$$

dir. ■

Uyarı 4.1.13. *$h(x) = 0$ ve $Dh(x) = [\underline{\partial}h(x), \overline{\partial}h(x)]$ h fonksiyonunun bir x noktasındaki kuasidiferansiyeli*

$$\underline{\partial}h(x) \cap (-\overline{\partial}h(x)) = \emptyset \tag{4.1.42}$$

koşulunu sağlasın. Bu durumda x bir minimum ise

$$-\overline{\partial}f(x) \subset \bigcap_{w\in\overline{\partial}h(x)} [\underline{\partial}f(x) + \text{cone}(\underline{\partial}h(x) + w)] \tag{4.1.43}$$

dır. x bir maksimum ise

$$-\underline{\partial}f(x) \subset \bigcap_{w\in\overline{\partial}h(x)} [\overline{\partial}f(x) - \text{cone}(\underline{\partial}h(x) + w)] \tag{4.1.44}$$

dır.

Gerçekten; $\underline{\partial}h(x) \cap (-\overline{\partial}h(x)) = \emptyset$ olduğundan $\forall\ -w \in [-\overline{\partial}h(x)]$ için $0 \notin [\underline{\partial}h(x) + w]$ dır. Sıfırı içermeyen kompakt bir kümenin konik zarfı kapalı olduğundan (4.1.43) *ve* (4.1.44) *eşitliklerinde kapanış işlemi gerekli değildir.*

Not 4.1.14. (4.1.42) *koşulu kuasidiferansiyeli temsil eden her küme çifti için sağlanmayabilir. Gerçekten; kabul edilsin ki bir $[\underline{\partial}h(x), \overline{\partial}h(x)]$* (4.1.42) *koşulunu sağlasın. B merkezi sıfır yarıçapı yeterince büyük olan bir yuvar olmak üzere $\underline{\partial}h(x) + B$ ve $\overline{\partial}h(x) + B$ kümeleri kesişirler ve*

$$[\underline{\partial}h(x) + B, \overline{\partial}h(x) + B] \approx [\underline{\partial}h(x), \overline{\partial}h(x)]$$

dir. Ayrıca (4.1.42) *koşulu sağlanıyorsa $[\underline{\partial}h(x), \overline{\partial}h(x)]$ çifti bir genel pozisyondadır.*

Uyarı 4.1.15. *x f'nin Ω'daki minimumu ise* (4.1.40) *ifadesi şu şekilde yazılabilir: $\forall\ w \in \overline{\partial}f(x), \forall\ w' \in \overline{\partial}h(x)$ için*

$$-(w + \underline{\partial}f(x)) \cap \text{clcone}(w' + \underline{\partial}h(x)) \neq \emptyset \tag{4.1.45}$$

dir. $\widetilde{\text{cone}}\xi = \bigcup_{\lambda>0} \lambda\xi$ *olmak üzere* (4.1.45) *ifadesi* $\forall\ w \in \overline{\partial} f(x), \forall\ w' \in \overline{\partial} h(x)$ *için*

$$-\widetilde{\text{cone}}(w + \underline{\partial} f(x)) \cap \text{clcone}(w' + \underline{\partial} h(x)) \neq \emptyset \tag{4.1.46}$$

olur. $\underline{\partial} h(x)$ *ve* $-\overline{\partial} h(x)$ *kesişmiyorsa bu durumda* (4.1.46) *ifadesi*

$$-\widetilde{\text{cone}}(w + \underline{\partial} f(x)) \cap \text{cone}(w' + \underline{\partial} h(x)) \neq \emptyset \tag{4.1.47}$$

olarak yazılabilir. Benzer şekilde; x maksimum ise (4.1.41) *ifadesi* $\forall\ v \in \underline{\partial} f(x)$, $\forall\ w' \in \overline{\partial} h(x)$ *için*

$$\widetilde{\text{cone}}(v + \overline{\partial} f(x)) \cap \text{clcone}(w' + \underline{\partial} h(x)) \neq \emptyset \tag{4.1.48}$$

şeklinde yazılabilir. $\underline{\partial} h(x) \cap (-\overline{\partial} h(x)) = \emptyset$ *ise bu durumda* (4.1.48) *ifadesi* $\forall\ v \in \underline{\partial} f(x), \forall\ w' \in \overline{\partial} h(x)$ *için*

$$\widetilde{\text{cone}}(v + \overline{\partial} f(x)) \cap \text{cone}(w' + \underline{\partial} h(x)) \neq \emptyset \tag{4.1.49}$$

olur. $\underline{\partial} f(x) \cap (-\overline{\partial} f(x)) = \emptyset$ *ise bu durumda;*

x bir minimum ise $\forall\ w \in \overline{\partial} f(x), \forall\ w' \in \overline{\partial} h(x)$ *için*

$$-\widetilde{\text{cone}}(w + \underline{\partial} f(x)) \cap \widetilde{\text{cone}}(w' + \underline{\partial} h(x)) \neq \emptyset \tag{4.1.50}$$

ve x bir maksimum ise $\forall\ v \in \underline{\partial} f(x), \forall\ w' \in \overline{\partial} h(x)$ *için*

$$\widetilde{\text{cone}}(v + \overline{\partial} f(x)) \cap \widetilde{\text{cone}}(w' + \underline{\partial} h(x)) \neq \emptyset \tag{4.1.51}$$

olur.

Teorem 4.1.16. *f ve h $\mathbb{R}^n$'de kuasidiferansiyellenebilir fonksiyonlar,*

$$\Omega = \{y \in \mathbb{R}^n | h(y) \leq 0\},$$

$x \in \Omega$ ve $h(x) = 0$ olsun. x noktası f'nin Ω'da bir minimum noktası ise bu durumda

$$L_1(x) = -[\overline{\partial} f(x) + \overline{\partial} h(x)]$$

$$L_2(x) = \text{conv}\{\underline{\partial} f(x) - \overline{\partial} h(x), \underline{\partial} h(x) - \overline{\partial} f(x)\}$$

olmak üzere

$$L_1(x) \subset L_2(x)$$

dir.

Kanıt. $h(x) = 0$ ve x, f fonksiyonunun Ω'daki bir minimum noktası olsun. $f^* = f(x) = \min_{y\in\Omega} f(y)$ olmak üzere $\mathbb{R}^n$'de tanımlı $F(y) = \max\{f(y) - f^*, h(y)\}$ fonksiyonu alınsın. $F(x) = 0$ ise x noktası F'nin $\mathbb{R}^n$'de bir minimumudur. F kuasidiferansiyellenebilir bir fonksiyon olduğundan kısıtsız bir minimum için

$$\underline{\partial}(x) = \text{conv}\{\underline{\partial} f(x) - \overline{\partial} h(x), \underline{\partial} h(x) - \overline{\partial} f(x)\}$$

ve

$$\overline{\partial} F(x) = \overline{\partial} f(x) + \overline{\partial} h(x)$$

olmak üzere

$$-\overline{\partial} F(x) \subset \underline{\partial} F(x)$$

dir. ■

$\Omega = \{y \mid h(y) \leq 0\}$ ve $\tilde{\Omega} = \{y \mid f(y) \geq f(x)\}$ olsun. $\tilde{f}(y) = f(x) - f(y)$ olarak alınırsa $\tilde{\Omega} = \{y | \tilde{f}(y) \leq 0\}$ olur ve $D\tilde{f}(x) = [-\overline{\partial} f(x), -\underline{\partial} f(x)]$ dir. Kabul edilsin ki $-\overline{\partial} f(x)$ ile $\underline{\partial} f(x)$ kümesi ve $-\overline{\partial} h(x)$ ile $-\underline{\partial} h(x)$ kümesi kesişmesin. h kısıt fonksiyonu $\tilde{\Omega}$ kümesinde bir x noktasında minimum değerini alıyorsa $\forall\ w' \in \overline{\partial} h(x), \forall\ v' \in [-\underline{\partial} f(x)]$ için

$$-\tilde{\text{cone}}(w' + \underline{\partial} h(x)) \cap \tilde{\text{cone}}(v' - \overline{\partial} f(x)) \neq \emptyset \qquad (4.1.52)$$

dır. $v = -v'$ alınarak

$$\tilde{\text{cone}}(v + \overline{\partial} f(x)) = -\tilde{\text{cone}}(v' - \overline{\partial} f(x))$$

eşitliği kullanılırsa $\forall\ w' \in \overline{\partial} h(x), \forall\ v \in \underline{\partial} f(x)$ için

$$-\tilde{\text{cone}}(w' + \underline{\partial} h(x)) \cap \tilde{\text{cone}}(v + \overline{\partial} f(x)) \neq \emptyset$$

olur. Bu durumda h'nin $\tilde{\Omega}$'da bir x noktasında minimum değerini alması için gerekli koşul f'nin Ω'da bir x noktasında maksimum değerini alması için gerekli koşul ile aynıdır.

Uyarı 4.1.17. *$h_i (i = 1, 2, ..., N)$ bir $X \subset \mathbb{R}^n$ açık kümesi üzerinde tanımlı ve kuasidiferansiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere*

$$\Omega = \{y \in \mathbb{R}^n \mid h_i(y) \leq 0 \quad \forall\ i = 1, ..., N\}$$

olsun. $h(y) = \max_i h_i(y)$ *ise*

$$\Omega = \{y \in \mathbb{R}^n \mid h(y) \leq 0\}$$

biçiminde yazılabilir.

Bir f fonksiyonunun Ω'daki bir ekstremum noktası için gerekli koşullar f ve h fonksiyonlarının kuasidiferansiyelleri ile ifade edilebilir. h fonksi-yonunun kuasidiferansiyeli $h_1, ..., h_N$ fonksiyonlarının kuasidiferansiyeli ile ifade edilebildiğinden gerek koşullar $f, h_1, ..., h_N$ fonksiyonlarının kuasidiferansiyeli ile ifade edilebilir.

Teorem 4.1.18. $\Omega = \{y \in X \mid h(y) = 0\}$, *$h$ bir $x \in \Omega$ noktasında düzgün kuasidiferansiyellenebilir olsun.* $[\underline{\partial} h(x), -\overline{\partial} h(x)]$ *ve* $[\overline{\partial} h(x), -\underline{\partial} h(x)]$ *çiftleri bir genel pozisyonda ise*

$$\Gamma(x, \Omega) = \{g \in \mathbb{R}^n \mid h'_x(g) = 0\}$$

dir.

h bir $X \subset \mathbb{R}^n$ açık kümesinde tanımlı ve kuasidiferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$\Omega = \{y \in \mathbb{R}^n \mid h(y) = 0\} \tag{4.1.53}$$

olsun. $x \in \Omega$ f'nin bir ekstremum noktası olmak üzere bir ekstremum için gerek koşullar ile $\Gamma(x, \Omega)$ konisi yeniden ifade edilebilir:
Kabul edilsin ki $[\underline{\partial} h(x), -\overline{\partial} h(x)]$ ve $[\overline{\partial} h(x), -\underline{\partial} h(x)]$ çiftleri bir genel pozisyonda olsun. Bu durumda Teorem 4.1.18'den

$$\Gamma(x, \Omega) = \{g \mid h'_x(g) = 0\}$$

dır ya da $\gamma_2 = \{g \mid h'_x(g) \leq 0\}$ ve $\tilde{\gamma_2} = \{g \mid h'_x(g) \geq 0\} = \{g \mid (-h)'_x(g) \leq 0\}$ olmak üzere

$$\Gamma(x, \Omega) = \gamma_2 \cap \tilde{\gamma_2}$$

olur.

Önerme 4.1.11'den

$$\gamma_2 = \bigcup_{w' \in \overline{\partial} h(x)} [-\text{cone}(\underline{\partial} h(x) + w')]^*$$

dır. $-h$ fonksiyonu için Önerme 4.1.11 kullanılarak

$$D(-h)(x) = [-\overline{\partial}h(x), -\underline{\partial}h(x)]$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma_2} &= \bigcup_{\lambda \in [-\underline{\partial}h(x)]} [-\text{cone}(-\overline{\partial}h(x) + \lambda)]^* \\ &= \bigcup_{w' \in \underline{\partial}h(x)} [\text{cone}(\overline{\partial}h(x) + w')]^* \end{aligned}$$

Buradan

$$\begin{aligned} \Gamma(x,\Omega) &= \bigcup_{w' \in \overline{\partial}h(x)} [-\text{cone}(\underline{\partial}h(x) + w')]^* \cap \bigcup_{v' \in \underline{\partial}h(x)} [\text{cone}(\overline{\partial}h(x) + v')]^* \\ &= \bigcup_{\substack{v' \in \underline{\partial}h(x) \\ w' \in \overline{\partial}h(x)}} [-\text{cone}(\underline{\partial}h(x) + w')]^* \cap [\text{cone}(\overline{\partial}h(x) + v')]^* \end{aligned} \tag{4.1.54}$$

olur.

Teorem 4.1.19. *$\Omega = \{y \in \mathbb{R}^n \mid h(y) = 0\}$, h $\mathbb{R}^n$'de kuasidiferansiyellenebilir bir fonksiyon ve f ekstremum değerini Ω'da bir x noktasında alan kuasidiferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $[\underline{\partial}h(x), -\overline{\partial}h(x)]$ ve $[\overline{\partial}h(x), -\underline{\partial}h(x)]$ bir genel pozisyonda olsunlar. f ve h fonksiyonlarının x noktasında düzgün kuasidiferensiyellenebilir olsunlar. x noktası f'nin Ω'da bir minimumu ise*

$$-\overline{\partial}f(x) \subset \bigcap_{\substack{w' \in \overline{\partial}h(x) \\ v' \in \underline{\partial}h(x)}} \{\underline{\partial}f(x) - \text{cl}[\text{cone}(\overline{\partial}h(x) + v') - \text{cone}(\underline{\partial}h(x) + w')]\} \tag{4.1.55}$$

dır. x noktası f'nin Ω'da bir maksimumu ise

$$-\underline{\partial}f(x) \subset \bigcap_{\substack{w' \in \overline{\partial}h(x) \\ v' \in \underline{\partial}h(x)}} \{\overline{\partial}f(x) + \text{cl}[\text{cone}(\overline{\partial}h(x) + v') - \text{cone}(\underline{\partial}h(x) + w')]\} \tag{4.1.56}$$

dir.

Kanıt. $v' \in \underline{\partial}h(x), w' \in \overline{\partial}h(x)$ olmak üzere

$$K_{v'w'} = [\text{cone}(\underline{\partial}h(x) + w')]^* \cap [\text{cone}(\overline{\partial}h(x) + v')]^*$$

olsun. (4.1.54)'den

$$\Gamma(x,\Omega) = \bigcup_{\substack{w' \in \overline{\partial}h(x) \\ v' \in \underline{\partial}h(x)}} K_{v'w'}$$

olur. Teorem 4.1.3'den ve $K_{v'w'} \subset \Gamma(x,\Omega)$ olduğundan $\forall\ v' \in \underline{\partial} h(x)$, $\forall\ w' \in \overline{\partial} h(x)$ için $\min\limits_{g \in K_{v'w'}} f'_x(g) = 0$ dır. Teorem 4.1.5'den

$$-\overline{\partial} f(x) \subset \underline{\partial} f(x) - K^*_{v'w'}$$

dir. Bir kesişimin dual konisi dual konilerin toplamlarının kapanışına eşit olduğundan

$$K^*_{v'w'} = -\mathrm{cl}[\mathrm{cone}(\underline{\partial} h(x) + w') + \mathrm{cone}(\overline{\partial} h(x) + v')] \tag{4.1.57}$$

olur. $\forall\ v' \in \underline{\partial} h(x), \forall\ w' \in \overline{\partial} h(x)$ için

$$-\overline{\partial} f(x) \subset \underline{\partial} f(x) - \mathrm{cl}[\mathrm{cone}(\underline{\partial} h(x) + w') + \mathrm{cone}(\overline{\partial} h(x) + v')] \tag{4.1.58}$$

sağlandığından kanıt biter. ■

4.2 Optimizasyon İçin Yeter Koşullar

Teorem 4.2.1. *f bir $X \subset \mathbb{R}^n$ açık kümesinde tanımlı ve bir $x \in X$ noktasında düzgün kuasidiferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda,*

$$-\overline{\partial} f(x) \subset \mathrm{int} \underline{\partial} f(x) \tag{4.2.59}$$

ise x noktası f'nin bir kesin yerel minimumudur.

$$-\underline{\partial} f(x) \subset \mathrm{int} \overline{\partial} f(x) \tag{4.2.60}$$

ise x noktası f'nin bir kesin yerel maksimumudur.

Kanıt. $-\overline{\partial} f(x) \subset \mathrm{int} \underline{\partial} f(x)$ ise $\exists\ \varepsilon > 0$ için B birim yuvar olmak üzere $-\overline{\partial} f(x) + \varepsilon B \subset \underline{\partial} f(x)$ dir ve

$$\max_{v \in [-\overline{\partial} f(x) + \varepsilon B]} (v,g) \le \max_{v \in \underline{\partial} f(x)} (v,g)$$

dir.

$$\begin{aligned} \max_{v \in [-\overline{\partial} f(x) + \varepsilon B]} (v,g) &= \max_{v \in [-\overline{\partial} f(x)]} (v,g) + \max_{v \in \varepsilon B} (v,g) \\ &= \max_{v \in [-\overline{\partial} f(x)]} (v,g) + \varepsilon \|g\| \end{aligned}$$

olduğundan

$$f'_x(g) = \max_{v \in \underline{\partial} f(x)} (v,g) - \max_{v \in [-\overline{\partial} f(x)]} (v,g) \ge \varepsilon \|g\|$$

olur. $\|g\| = 1$ için

$$f(x + \alpha g) - f(x) = \alpha f'_x(g) + o_{x,g}(\alpha) \ge \alpha(\varepsilon + \frac{o_{x,g}(\alpha)}{\alpha})$$

olur. $\dfrac{o_{x,g}(\alpha)}{\alpha} \leftarrow 0$ olduğundan $\exists\ \delta > 0$ vardır öyle ki $\forall\ g \in B, \forall\ \alpha \in (0,\delta)$ için $\alpha\varepsilon + o_{x,g}(\alpha) > 0$ dır. x bir minimum noktasıdır. ■

Uyarı 4.2.2. *Kesin yerel ekstremum için kısıtlı durumda iki yeter koşul aşağıdaki şekilde verilbilir.*
$\forall\ w \in \overline{\partial} f(x)$ *ve* $\forall\ w' \in \overline{\partial} h(x)$ *için*

$$-(w + \underline{\partial} f(x)) \cap \mathrm{clcone}(\underline{\partial} h(x) + w')$$

kesişimi r yarıçaplı bir yuvar içersin. Bu durumda x noktası f'nin Ω'da bir kesin yerel minimumudur. Ayrıca Teorem 4.1.16'deki koşullar sağlanıyorsa ve $L_1(x) \subset \mathrm{int} L_2(x)$ *ise x noktası f'nin Ω'da bir kesin yerel minimumudur.*

KAYNAKLAR

1. Demyanov V.F., Rubinov A.M., *Quasidifferentiability and Related Topics*, Kluwer Academic Publishers, 2000.

2. Demyanov V.F., Polyakova L.N., Rubinov A.M., *Nonsmoothness and Quasidifferentiability*, Mathmetical Programming Study 29, 1-19, 1986.

3. Demyanov V.F., *Quasidifferentiable Functions: Necessary Conditions and Descent Directions*, Mathmetical Programming Study 29, 20- 43, 1986.

4. Hartman P., *On Functions Representable as a Difference of Convex Functions*, Pasific J. Math.,Vol 9, No:3, 707-713, 1959.

5. Melzer D., *On the Expressibilty of Piecewise-linear Conditions Functions As the Difference Of Two Piecewise-Linear Convex Functions*, Mathmetical Programming Study 29, 118-134, 1986.

6. Pallaschke D., Urbanski R., *Pairs of Compact Convex Sets*, Kluwer Academic Publishers, 2002.

7. Pallaschke D., Rolewicz S., *Foundations of Mathmetical Optimization*, Kluwer Academic Publishers, 1997.

8. Rockafellar R.T., *Convex Analysis*, Princeton University Press, 1972.

9. Rubinov A.M., Demyanov V.F., *Quasidifferential Calculus*, Optimization Software,Inc., Publications Division, 1986.

10. Shapiro A., *Quasidifferential Calculus and First-Order Optimality Conditions in Nonsmooth Optimization*, Mathmetical Programming Study 29, 56-68, 1986.

11. Tuy H., *Convex Analysis and Global Optimization*, Kluwer Academic Publishers, 1998.