SONSUZ BOYUTLU CLIFFORD CEBİRLERİ

Derya ÇELİK
Doktora Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Mayıs-2010

JÜRİ ve ENSTİTÜ ONAYI

Derya ÇELİK'in **"Sonsuz Boyutlu Clifford Cebirleri"** başlıklı **Matematik** Anabilim Dalındaki **Doktora** tezi 29.04.2010 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	Adı - Soyadı	**İmza**
Üye (Tez Danışmanı)	**Prof.Dr. Şahin KOÇAK**	....
Üye	**Prof.Dr. Aladdin ŞAMİLOV**	....
Üye	**Prof. Dr. Zekeriya ARVASİ**	....
Üye	**Prof. Dr. Mahmut KOÇAK**	....
Üye	**Doç.Dr. Nedim Değirmenci**	....

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof.Dr. Rıdvan SAY
Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

SONSUZ BOYUTLU CLIFFORD CEBİRLERİ

Derya ÇELİK

Anadolu Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Şahin KOÇAK

2010, 85 Sayfa

Clifford cebirleri matematiğin birçok alanında ve fiziksel uygulamalarda önemli roller oynayan bir konu niteliğindedir. Clifford cebirleri bir vektör uzayı üzerinde simetrik bir bilineer fonksiyon yardımıyla üretilen asosyatif bir cebir ailesi olup, sonsuz boyutlu Clifford cebirleri henüz ilgi odağı haline gelmiş değildir. Sonlu boyutlu Clifford cebirlerinde Spinorlar (Clifford cebri modülleri) ve temsil teorisi klasik bir konu olarak tamamen bilinmekte olup, bu çalışmada sonsuz boyutlu Clifford cebirlerinin temsillerinin araştırılması hedeflenmiştir.

Lawrynowicz ve Suzuki tarafından bu konuda yapılmış olan ve bazı teknik hatalar içermesine rağmen ilginç bazı fikirler de içeren çalışmalar ışığında sonsuz boyutlu Clifford cebirlerinin fraktaller üzerinde temsil edilebileceği düşüncesi gelişmiştir. Bu tezde, hem sonlu hem de sonsuz boyutlu reel ve kompleks Clifford cebirleri, $\mathcal{K}$ Cantor kümesi olmak üzere, $L^2(\mathcal{K})$ uzayı üzerinde doğrudan ve açık bir şekilde temsil edilmiştir. Ayrıca sonsuz boyutlu kompleks Clifford cebri için inşaa edilen temsilin, literatürde var olan ve Fock temsili olarak bilinen temsile denk olduğu gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Clifford Cebri, Cebir Temsili, Cantor Kümesi, Fraktal, Fock Temsili.

ABSTRACT

PhD Thesis

INFINITE DIMENSIONAL CLIFFORD ALGEBRAS

Derya ÇELİK

Anadolu University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Mathematics Program

Supervisor: Prof. Dr. Şahin KOÇAK

2010, 85 Pages

Clifford algebras play an important role in many areas of mathematics and in physical applications. Clifford algebras are associative algebras which are generated by means of a symmetric bilinear function on a vector space. Infinite dimensional Clifford algebras are however not yet at the center of interest. Spinors and representation theory are completely known for finite dimensional Clifford algebras. The aim of this study is to investigate the representations of infinite dimensional Clifford algebras.

The idea that Clifford algebras could be represented on fractals is suggested in the paper by Lawrynowicz and Suzuki [7], which contains some interesting ideas as well as some technical errors. In this thesis, a direct representation is given for both finite and infinite dimensional real and complex Clifford algebras on the Cantor set. Moreover, it is proved that this representation is equivalent to Fock representation for infinite dimensional Clifford algebras.

Keywords: Clifford Algebra, Algebra Representation, Fractal,
Fock Representation.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında yardımlarını esirgemeyen ve çalışma süresince her türlü desteğiyle yanımda olan sayın Yard. Doç. Dr. Yunus ÖZDEMİR, sayın Doç. Dr. Nedim Değirmenci, sayın Yard. Doç. Dr. Serpil Altay ve sayın Yard. Doç. Dr. Şenay Karapazar'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Her türlü övgüye layık olan ve her zaman beni destekleyen çok sevgili aileme de sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Derya ÇELİK

Nisan 2010

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

ÇİZELGELER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathcal{H}(X)$	: X in boş kümeden farklı kompakt alt kümelerinin uzayı.
YFS	: Yinelemeli Fonksiyon Sistemi.
$L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{K})$	: $\mathcal{K}$ üzerinde reel değerli, karesi integre edilebilir fonksiyonların uzayı.
$L^2(\mathcal{K}), L^2_{\mathbb{C}}(\mathcal{K})$	: $\mathcal{K}$ üzerinde kompleks değerli, karesi integre edilebilir fonksiyonların uzayı.
$B_{\mathbb{K}}(H)$	: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olmak üzere H Hilbert uzayı üzerinde sınırlı $\mathbb{K}$-lineer operatörlerin cebri.

1 TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Bu bölümde bu çalışma sırasında kullanılan bazı temel tanım ve teoremler ifade edilecektir.

1.1 Yinelemeli Fonksiyon Sistemi, Hausdorff Boyutu ve Hausdorff Ölçümü Kavramları

(X, d) bir tam metrik uzay olmak üzere X in boş kümeden farklı kompakt alt kümelerinin uzayı $\mathcal{H}(X)$ ile gösterilir ve

$$\mathcal{H}(X) = \{\ A \subset X\ :\ A \neq \emptyset \text{ ve } A \text{ kompakt}\}$$

şeklinde tanımlanır. $B \in \mathcal{H}(X)$ ve $x \in X$ olmak üzere

$$\{d(x, y) : y \in B\} \subseteq \mathbb{R}$$

kümesini düşünelim. B kompakt olduğundan dolayı bu kümenin bir en küçük elemanı vardır.

Tanım 1.1. *$x \in X$ ve $A, B \in \mathcal{H}(X)$ olmak üzere x noktasının B kümesine olan uzaklığı*

$$d(x, B) = \min\{d(x, y) : y \in B\}$$

ve A kümesinin B kümesine olan uzaklığı,

$$d(A, B) = \max\{d(x, B) : x \in A\}$$

dır.

Uyarı 1.2. *$A, B \in \mathcal{H}(X)$ olmak üzere,*

$$d(A, B) \neq d(B, A)$$

olduğu durumlar söz konusudur. Bu nedenle her ne kadar $d(A, B)$'ye A kümesinin B kümesine uzaklığı denilse de $d(A, B) \neq d(B, A)$ olduğu için X uzayı üzerindeki d metriği yardımıyla tanımlanan

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}(X) \times \mathcal{H}(X) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (A, B) & \longmapsto & d(A, B) \end{array}$$

olarak tanımlı dönüşüm $\mathcal{H}(X)$ uzayı üzerinde bir metrik değildir.

Tanım 1.3. (X, d) *bir tam metrik uzay ve* $A, B \in \mathcal{H}(X)$ *olmak üzere,*

$$h(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\}$$

değerine A *ile* B *kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığı denir.*

Teorem 1.4. h, $\mathcal{H}(X)$ *uzayı üzerinde bir metriktir. Bu metriğe Hausdorff metriği denir [1].*

Teorem 1.5. (X, d) *tam metrik uzay olsun. Bu durumda* $(\mathcal{H}(X), h)$ *uzayı da tam metrik uzaydır [1].*

Tanım 1.6. (X, d) *bir metrik uzay ve* $f : X \to X$ *fonksiyonu verilsin.* $\forall\, x, y \in X$ *için*

$$d(f(x), f(y)) \leq s\ d(x, y), \quad 0 \leq s < 1$$

olacak şekilde bir $s \in \mathbb{R}$ *varsa* f *ye* X *üzerinde bir büzülme dönüşümü denir. Bu eşitsizliği sağlayan* s *sayısına da* f *nin büzülme katsayısı denir.*

Tanım 1.7. (X, d) *bir metrik uzay ve* $f : X \to X$ *fonksiyonu verilsin.*

$$f(x^*) = x^*$$

olacak şekilde bir $x^* \in X$ *noktası varsa,* x^* *noktasına* f *nin sabit noktası denir.*

Teorem 1.8 (Büzülme Teoremi)**.** (X, d) *bir tam metrik uzay ve* $f : X \to X$ *büzülme dönüşümü olsun. Bu durumda* f *nin sabit noktası vardır ve tektir. Ayrıca* $x \in X$ *olmak üzere* $\{f^n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *dizisi* f *nin sabit noktasına yakınsar [1].*

Sabit noktayı x^* ile gösterecek olursak, Büzülme Teoremine göre X içinden alınan keyfi bir x elemanı için,

$$\lim_{n \to \infty} f^n(x) = x^*$$

dır.

Yardımcı Teorem 1.9. (X, d) *bir metrik uzay ve* $w : X \to X$ *bir büzülme dönüşümü olsun. Bu durumda* w *süreklidir [1].*

Yardımcı Teorem 1.10. (X,d) *bir metrik uzay ve* $w : X \to X$ *büzülme katsayısı* s *olan bir büzülme dönüşümü olsun. Bu durumda,*

$$\begin{aligned} w : \mathcal{H}(X) &\longrightarrow \mathcal{H}(X) \\ B &\longmapsto w(B) = \{w(x) \mid x \in B\} \end{aligned}$$

olarak tanımlanan w *dönüşümü de* $(\mathcal{H}(X), h)$ *uzayı üzerinde büzülme katsayısı* s *olan bir büzülme dönüşümüdür [1].*

Yardımcı Teorem 1.11. (X,d) *bir metrik uzay ve* $w_n, n = 1,2,...,N$ *dönüşümleri* $(\mathcal{H}(X), h)$ *uzayında büzülme katsayıları sırasıyla* s_n *olan büzülme dönüşümleri olsun. Bu takdirde,*

$$\begin{aligned} W : \mathcal{H}(X) &\longrightarrow \mathcal{H}(X) \\ B &\longmapsto W(B) = \bigcup_{n=1}^{N} w_n(B) \end{aligned}$$

olarak tanımlanan W *dönüşümü büzülme katsayısı,*

$$s = \max\{s_n \mid n = 1,2,...,N\}$$

olan bir büzülme dönüşümüdür [1].

Tanım 1.12. (X,d) *tam metrik uzay olmak üzere,* $n = 1,2,...,N$ *için büzülme katsayıları sırasıyla* s_n *olan* $w_n : X \to X$ *büzülme dönüşümlerinin kümesine yinelemeli fonksiyon sistemi (YFS) denir. Ayrıca bir YFS, büzülme katsayısı*

$$s = \max\{s_n \mid n = 1,2,...,N\}$$

olmak üzere

$$\{X; w_n, n = 1,2,...,N\}$$

şeklinde gösterilir.

Şimdi büzülme teoreminin bir sonucu olarak aşağıdaki teoremi ifade edelim.

Teorem 1.13. *Büzülme katsayısı* s *olan bir* $\{X; w_n, n = 1,2,...,N\}$ *yinelemeli fonksiyon sistemi verilsin. Bu takdirde,*

$$\begin{aligned} W : \mathcal{H}(X) &\longrightarrow \mathcal{H}(X) \\ B &\longmapsto W(B) = \bigcup_{n=1}^{N} w_n(B) \end{aligned}$$

olarak tanımlanan W dönüşümü de $(\mathcal{H}(X), h)$ tam metrik uzayı üzerinde büzülme katsayısı s olan bir büzülme dönüşümüdür. Ayrıca

$$A = W(A) = \bigcup_{n=1}^{N} w_n(A)$$

olacak şekilde bir tek $A \in \mathcal{H}(X)$ vardır ve herhangi $B \in \mathcal{H}(X)$ için

$$A = \lim_{n\to\infty} W^n(B)$$

dir [1].

Tanım 1.14. *Teorem 1.13 de ifade edilen $A \in \mathcal{H}(X)$ kümesine*

$$\{X; w_n, n = 1, 2, ..., N\}$$

yinelemeli fonksiyon sisteminin çekicisi denir. Ayrıca bir küme bir YFS nin çekicisi ise kendine benzer küme adını alır.

- $\{X; w_n, n = 1, 2, ..., N\}$ yinelemeli fonksiyon sistemi olmak üzere A bu sistemin çekicisi olsun. Eğer $i, j \in \{1, 2, \cdots N\}$ ve $i \neq j$ iken,

  $$w_i(A) \cap w_j(A) = \emptyset$$

  ise YFS'ye tamamen bağlantısızdır denir.

- $\{X; w_n, n = 1, 2, ..., N\}$ yinelemeli fonksiyon sistemi verilsin. Eğer $i, j \in \{1, 2, \cdots N\}$ ve $i \neq j$ iken,

  $$w_i(B) \cap w_j(B) = \emptyset$$

  ve

  $$\bigcup_{i=1}^{N} w_i(B) \subset B$$

  olacak şekilde bir $B \subset A$ açık kümesi varsa bu YFS'ye "just-touching" dir denir.

Şimdi m pozitif bir tamsayı olmak üzere $\mathbb{R}^m$ nin sınırlı alt kümelerinin geometrik karmaşıklığını karakterize eden Hausdorff boyut kavramını tanımlayalım.

$A \subseteq \mathbb{R}^m$ sınırlı bir küme olsun. A kümesinin çapı $diam(A)$ ile gösterilir ve d, $\mathbb{R}^m$ üzerindeki standart metrik olmak üzere,

$$diam(A) = sup\,\{d(x,y) : x, y \in A\}$$

şeklinde tanımlanır. $0 < \varepsilon < \infty$ ve $0 < p < \infty$ olsun. $\mathcal{A}$ kümesi

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

olacak şekilde $\{A_i \subset A\}$ alt küme dizilerinin bir ailesi olsun. $A_i = \emptyset$ olduğu durumda $diam(A_i) = 0$ olarak kabul edelim. Bu durumda,

$$\mathcal{M}(A,p,\varepsilon) = inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}(diam(A_i))^p : \{A_i\} \in \mathcal{A} \text{ ve } diam(A_i) < \varepsilon, i \in \mathbb{N}\right\}$$

olmak üzere $\mathcal{M}(A,p,\varepsilon) \in [0,\infty]$ dır ve ε a göre azalmayan bir fonksiyondur [1].

Tanım 1.15. *m pozitif tamsayı ve A, $\mathbb{R}^m$ metrik uzayının sınırlı alt kümesi olsun. Bu durumda $p \in [0,\infty)$ için,*

$$\mathcal{M}(A,p) = sup\,\{\mathcal{M}(A,p,\varepsilon) : \varepsilon > 0\}$$

değerine A kümesinin p-boyutlu Hausdorff ölçümü denir.

Teorem 1.16. *m pozitif bir tamsayı ve A, $(\mathbb{R}^m, d)$ uzayının sınırlı alt kümesi olsun. Bu durumda,*

$$\mathcal{M}(A,p) = \begin{cases} \infty\ , & p < D_H \text{ ve } p \in [0,\infty) \\ 0\ , & p > D_H \text{ ve } p \in [0,\infty) \end{cases}$$

olacak şekilde tek türlü belirli bir $D_H \in [0,m]$ vardır [1-3].

Tanım 1.17. *Teorem 1.16 de ifade edilen D_H sayısına A kümesinin Hausdorff boyutu denir.*

Teorem 1.18. *m pozitif bir tamsayı ve A, $(\mathbb{R}^m, d)$ metrik uzayının sınırlı alt kümesi olsun. A kümesinin fraktal boyutu $D(A)$, Hausdorff boyutu da $D_H(A)$ olsun. Bu durumda,*

$$0 \leq D_H(A) \leq D(A) \leq m$$

dır [1-3].

Teorem 1.19. *m pozitif bir tamsayı, $w_n, n = 1, 2, \cdots N$ dönüşümleri büzülme katsayısı s_n olan benzerlik dönüşümleri, $\{\mathbb{R}^m; w_1, w_2, \cdots, w_N\}$ yinelemeli fonksiyon sistemi verilsin.*

$$A = W(A) = \bigcup_{n=1}^{N} w_n(A)$$

olsun. Eğer YFS tamamen bağlantısız veya "just-touching" ise bu durumda, $D(A) = D_H(A)$ dir ve $D = D_H(A) = D(A)$ olmak üzere D,

$$\sum_{n=1}^{N} |s_n|^D = 1, \quad D \in [0, m]$$

denkleminin tek çözümüdür [1,3].

$\{\mathbb{R}^m; w_1, w_2, \cdots, w_N\}$ yinelemeli fonksiyon sistemi verilsin. A kümesi bu yinelemeli fonksiyon sisteminin çekicisi olsun. A kümesinin Hausdorff boyutu p, p-boyutlu Hausdorff ölçümü de μ olsun. Bu durumda A üzerinde karesi integre edilebilir kompleks değerli fonksiyonların uzayı,

$$L^2(A) = L^2_{\mathbb{C}}(A) = \left\{ f : A \to \mathbb{C} : \int_A \|f\|^2 d\mu < \infty \right\}$$

olarak, A üzerinde karesi integre edilebilir reel değerli fonksiyonların uzayı ise,

$$L^2_{\mathbb{R}}(A) = \left\{ f : A \to \mathbb{R} : \int_A \|f\|^2 d\mu < \infty \right\}$$

olarak tanımlanmaktadır.

Bu çalışmada kompleks Clifford cebirlerinin temsilleri ön planda olduğu için $L^2_{\mathbb{C}}(A)$ yerine $L^2(A)$ gösterimini kullanacağız. Reel durum söz konusu olduğu durumda özellikle $L^2_{\mathbb{R}}(A)$ olarak belirtilecektir.

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olmak üzere, $L^2_{\mathbb{K}}(A)$ üzerindeki sınırlı $\mathbb{K}$ lineer operatörlerin kümesi de,

$$B(L^2(A)) = \left\{ T : L^2_{\mathbb{K}}(A) \to L^2_{\mathbb{K}}(A) : T \text{ sınırlı } \mathbb{K} \text{ lineer operatör } \right\}$$

olarak gösterilmektedir. Bu küme fonksiyon toplamı, skalerle çarpma işlemi ve fonksiyon bileşkesi altında bir $\mathbb{K}$ cebirdir.

1.2 Clifford Cebirleri

Tanım 1.20. $\mathbb{K}$ *karakteristiği* 2 *den farklı olan bir cisim olmak üzere* V, $\mathbb{K}$ *cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.* $Q : V \to \mathbb{K}$ *dönüşümü,*

i) $\forall x \in V,\ \alpha \in \mathbb{K}$ *için*

$$Q(\alpha x) = \alpha^2 Q(x) \quad ve$$

ii) $\forall x, y \in V$ *için*

$$b(x,y) = \frac{1}{2}(Q(x+y) - Q(x) - Q(y))$$

dönüşümü V *üzerinde bir simetrik bilineer form ise* Q *ya* V *üzerinde kuadratik form, (V,Q) ikilisine de kuadratik uzay denir.*

Tanım 1.21 (Clifford Cebri)**.** (V,Q) *kuadratik uzayının belirlediği Clifford cebri aşağıdaki özellikleri sağlayan* $(C(Q), j)$ *ikilisidir.*

1) C(Q) birimli, birleşmeli bir $\mathbb{K}$ *cebridir.*

2) $j : V \to C(Q)$, $j(v)^2 = Q(v) \cdot 1$ *dir.*

3) Clifford cebrinin evrensel özelliği: A *başka bir birimli* $\mathbb{K}$ *cebri ve* $u : V \to A$, $u(v)^2 = Q(v) \cdot 1$ *koşulunu sağlayan bir lineer dönüşüm olsun. Bu takdirde,*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "u"'] & & C(Q) \arrow[dl, "\tilde{U}"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

diyagramı komutatif olacak şekilde $(u = \tilde{U} \circ j)$ *tek türlü belirli bir*

$$\tilde{U} : C(Q) \to A$$

cebir homomorfizması vardır [4].

Teorem 1.22. *Her* (V,Q) *kuadratik uzayına karşılık* $(C(Q), j)$ *Clifford cebri vardır ve izomorfizm farkıyla tek türlü belirlenir [4].*

Teorem 1.23. V *n-boyutlu bir* $\mathbb{K}$ *vektör uzayı olsun. Bu takdirde* $C(Q)$, 2^n *boyutlu* $\mathbb{K}$ *vektör uzayıdır [4].*

Teorem 1.24. *(V, Q) kuadratik uzay ve $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \subset V$ tabanı $i \neq j$ olmak üzere,*

$$b(v_i, v_j) = \frac{1}{2}[Q(v_i + v_j) - Q(v_i) - Q(v_j)] = 0$$

olacak şekilde seçilsin. Bu takdirde $C(Q)$, $v_1, v_2, \cdots, v_n \in V$ elemanları tarafından cebirsel olarak üretilir. Ayrıca üreteç elamanları,

$$v_i^2 = Q(v_i) \quad \textit{ve } v_i v_j + v_j v_i = 0$$

eşitliklerini sağlar [4].

Tanım 1.25. *$V = \mathbb{R}^n$ olmak üzere $\mathbb{R}^n$ üzerinde,*

$$Q(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2, \; (p + q = n)$$

kuadratik formunu alalım. Bu takdirde $(\mathbb{R}^n, Q)$ kuadratik uzayına karşılık gelen Clifford cebri $Cl_{p,q}$ olarak gösterilir. Özel olarak

$$Q(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

olmak üzere $(\mathbb{R}^n, Q)$ kuadratik uzayına karşılık gelen Clifford cebri $Cl_{n,0}$ olarak;

$$Q(x_1, x_2, \cdots, x_n) = -x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2$$

olmak üzere $(\mathbb{R}^n, Q)$ kuadratik uzayına karşılık gelen Clifford cebri ise $Cl_{0,n}$ olarak gösterilir.

Bu durumda Teorem 1.24 in bir sonucu olarak $e_1, e_2, \cdots, e_n \in \mathbb{R}^n$ in standart taban vektörleri olmak üzere,

$$Cl_{p,q} =< \{e_I = e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n, \; k = 1 \ldots p + q\}$$

dir. Burada

$$\begin{array}{ll} 1 \leq i \leq p \;, & e_i^2 = 1 \\ p + 1 \leq j \leq p + q \;, & e_j^2 = -1 \end{array}$$

dir.

Tanım 1.26. *$V = \mathbb{C}^n$ olmak üzere $\mathbb{C}^n$ üzerindeki*

$$Q(z_1, z_2, \cdots, z_n) = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2$$

kuadratik formunu düşünelim. $(\mathbb{C}^n, Q)$ kuadratik uzayına karşılık gelen Clifford cebri $\mathbb{C}l_n$ olarak gösterilir.

$\mathbb{C}^n$ üzerindeki bütün kuadratik formlar

$$Q(z_1, z_2, \cdots, z_n) = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2$$

kuadratik formuna denktir. Bu yüzden $\mathbb{C}^n$ üzerinde bütün dejenere olmayan Clifford cebirleri birbirine izomorftur. Ayrıca $p + q = n$ olmak üzere,

$$\mathbb{C}l_n \cong Cl_{p,q} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

dir.

Tanım 1.27. *V kompleks Hilbert uzayı ve $\{e_1, e_2, \cdots e_n, \cdots\}$, V nin birimdikey bir tabanı olsun. Bu durumda sonsuz boyutlu kompleks Clifford cebri,*

$$\mathbb{C}l_\infty =< \{e_I = e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k} : 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k, e_k^2 = 1,\ k = 1, 2, \cdots\} >$$

dir.

Şimdi sonlu boyutlu reel ve kompleks Clifford cebirlerinin bazı özelliklerini ispatlarını burada vermeden ifade edelim.

Teorem 1.28.

1) $Cl_{0,n+2} \cong Cl_{n,0} \otimes Cl_{0,2}$

2) $Cl_{n+2,0} \cong Cl_{0,n} \otimes Cl_{2,0}$

3) $Cl_{p+1,q+1} \cong Cl_{p,q} \otimes Cl_{1,1}$

Kanıt. Bakınız [5]. □

$n = 1$ ve $n = 2$ durumunda,

$$\begin{aligned} Cl_{1,0} &\cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \\ Cl_{0,1} &\cong \mathbb{C} \\ Cl_{2,0} &\cong \mathbb{R}(2) \\ Cl_{0,2} &\cong \mathbb{H} \\ Cl_{1,1} &\cong \mathbb{R}(2) \end{aligned}$$

dir.

Teorem 1.29. *n, m pozitif tamsayılar olmak üzere,*

a) $\mathbb{R}(n) \otimes \mathbb{R}(m) \cong \mathbb{R}(nm)$

b) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *veya* $\mathbb{C}$ *olmak üzere* $\mathbb{R}(n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{K} \cong \mathbb{K}(n)$

c) $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$

d) $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \cong \mathbb{C}(2)$

e) $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \cong \mathbb{R}(4)$

Kanıt. Bakınız [5]. □

Şimdi reel ve kompleks Clifford cebirlerinin önemli bir özelliği olan periyodiklik özelliğini ifade edelim. Reel Clifford cebirleri için 8 li periyodiklik özelliği varken, kompleks Clifford cebirleri için 2'li periyodiklik söz konusudur.

Teorem 1.30. *$\forall n \geq 0$ için,*

$$\begin{aligned} Cl_{n+8,0} &\cong Cl_{n,0} \otimes Cl_{8,0} \\ Cl_{0,n+8} &\cong Cl_{0,n} \otimes Cl_{0,8} \\ \mathbb{C}l_{n+2} &\cong \mathbb{C}l_n \otimes \mathbb{C}l_2 \end{aligned}$$

Kanıt. Bakınız [5]. □

Çizelge 1: $Cl_{n,0}$, $Cl_{0,n}$, $\mathbb{C}l_n$ cebirlerinin izomorfizm tablosu

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
$Cl_{n,0}$	$\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$	$\mathbb{R}(2)$	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(2)\oplus\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{R}(16)$
$Cl_{0,n}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{H}\oplus\mathbb{H}$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(8)\oplus\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(16)$
$\mathbb{C}l_n$	$\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{C}(2)\oplus\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{C}(4)\oplus\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{C}(8)\oplus\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{C}(16)$

Çizelge 2: Reel Clifford cebri $Cl_{p,q}$ için izomorfizm tablosu

$p\backslash q$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
0	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{H}\oplus\mathbb{H}$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(8)\oplus\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(16)$
1	$\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$	$\mathbb{R}(2)$	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(2)\oplus\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{R}(16)$	$\mathbb{R}(16)\oplus\mathbb{R}(16)$
2	$\mathbb{R}(2)$	$\mathbb{R}(2)\oplus\mathbb{R}(2)$	$\mathbb{R}(4)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{H}(4)\oplus\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{H}(8)$	$\mathbb{C}(16)$	$\mathbb{R}(32)$
3	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{R}(4)$	$\mathbb{R}(4)\oplus\mathbb{R}(4)$	$\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{H}(8)$	$\mathbb{H}(8)\oplus\mathbb{H}(8)$	$\mathbb{H}(16)$	$\mathbb{C}(32)$
4	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(8)\oplus\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(16)$	$\mathbb{C}(16)$	$\mathbb{H}(16)$	$\mathbb{H}(16)\oplus\mathbb{H}(16)$	$\mathbb{H}(2^5)$
5	$\mathbb{H}(2)\oplus\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{R}(16)$	$\mathbb{R}(16)\oplus\mathbb{R}(16)$	$\mathbb{R}(2^5)$	$\mathbb{C}(2^5)$	$\mathbb{H}(2^5)$	$\mathbb{H}(2^5)\oplus\mathbb{H}(2^5)$
6	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{H}(4)\oplus\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{H}(8)$	$\mathbb{C}(16)$	$\mathbb{R}(2^5)$	$\mathbb{R}(2^5)\oplus\mathbb{R}(2^5)$	$\mathbb{R}(2^6)$	$\mathbb{C}(2^6)$	$\mathbb{H}(2^6)$
7	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{H}(8)$	$\mathbb{H}(8)\oplus\mathbb{H}(8)$	$\mathbb{H}(16)$	$\mathbb{C}(2^5)$	$\mathbb{R}(2^6)$	$\mathbb{R}(2^6)\oplus\mathbb{R}(2^6)$	$\mathbb{R}(2^7)$	$\mathbb{C}(2^7)$
8	$\mathbb{R}(16)$	$\mathbb{C}(16)$	$\mathbb{H}(16)$	$\mathbb{H}(16)\oplus\eqsim(16)$	$\mathbb{H}(2^5)$	$\mathbb{C}(2^6)$	$\mathbb{R}(2^7)$	$\mathbb{R}(2^7)\oplus\mathbb{R}(2^7)$	$\mathbb{R}(2^8)$

Tanım 1.31. $(A, +, \cdot, \bullet)$, *F cismi üzerinde bir cebir olsun. V bir F vektör uzayı olmak üzere,*

$$\varphi : A \to End_F(V) = \{T : V \to V \mid \; T, \; F\text{-lineer} \; \}$$

olacak şekilde bir F lineer cebir homomorfizması varsa φ'ye A cebrinin bir F temsili denir ya da V vektör uzayına bir A modüldür denir.

1.3 Kompleks Clifford Cebirlerinin Fock Temsilleri

Bu bölümde herhangi bir reel Hilbert uzayına karşılık gelen kompleks Clifford cebirleri için inşaa edilen ve Fock temsilleri olarak adlandırılan temsillerin anlaşılması hedeflenmektedir. Bu temsili inşaa etmek için öncelikle $(V, \; (\; \cdot \; , \; \cdot \;))$ reel Hilbert uzayı alarak, bir J uniter yapısı ile bu uzayı kompleks Hilbert uzayına dönüştürmek gerekmektedir. Burada J uniter yapısı

$$J : V \longrightarrow V$$

ortogonal ve $J^2 = -I$ olan bir lineer dönüşümdür. Tek boyutlu uzay üzerinde ortogonal ve karesi $-I$ olan bir dönüşüm olmadığından dolayı bu uzayların üzerinde bir J uniter yapısı olamaz. Dolayısıyla bu durum V reel vektör uzayının boyutunu çift boyutlu ya da sonsuz boyutlu uzaylara kısıtlamaktadır. Bu nedenle, çift boyutlu ya da sonsuz boyutlu herhangi bir reel Hilbert uzayı alarak bu uzay üzerinde herhangi bir $J : V \to V$ uniter yapısı seçelim. "i" imajiner sayıyı göstermek üzere $v \in V$ için

$$i.v = J(v)$$

olarak tanımlandığı takdirde kompleks skalerle çarpma işlemi tanımlanmış olacaktır. Seçilen uniter yapı ile bu şekilde elde edilen kompleks vektör uzayı V_J ile gösterilecektir. $x, y \in V$ olmak üzere,

$$< x, y >_J = (x, y) + i(x, Jy)$$

olarak tanımlı fonksiyon V_J üzerinde bir iç çarpım tanımlamaktadır. Ayrıca $< \cdot, \cdot >_J$ ile $(\cdot, \cdot)$ aynı normu ürettiklerinden dolayı V_J vektör uzayı da üzerinde tanımlı $< \cdot, \cdot >_J$ iç çarpım ile bir kompleks Hilbert uzayına dönüşmektedir.

Bu ön tanımlamalardan sonra hedefimiz doğrultusunda Fock uzayı olarak adlandırılan temsil uzayını tanımlayalım. n herhangi bir pozitif tamsayı olmak üzere, V_J vektör uzayının n katlı dış çarpımı $\bigwedge^n(V_J)$ üzerinde $x_1, y_1, \cdots, x_n, y_n \in V$ olmak üzere,

$$< x_1 \wedge \cdots \wedge x_n,\ y_1 \wedge \cdots \wedge y_n >= det[< x_i, y_j >]$$

şeklinde doğal bir iç çarpım vardır. Oluşan iç çarpım uzayı V sonsuz boyutlu ve $n > 1$ olduğu durumda tam değildir. Bu nedenle $\bigwedge^n(V_J)$ uzayının Hilbert uzayı tamlaması alınmaktadır ve oluşan Hilbert uzayı $\bigwedge^n[V_J]$ ile gösterilmektedir. Burada $\bigwedge^0(V_J) = \bigwedge^0[V_J] = \mathbb{C}$ olacaktır. $\bigwedge^n(V_J)$ uzaylarının direkt toplamı alınarak V_J vektör uzayının dış cebri,

$$H_J = H_J(V) = \bigoplus_{n \geq o} \bigwedge^n (V_J)$$

olarak tanımlanır. Bu kümenin elemanları $n \geq 0$, $\zeta_n \in \bigwedge^n(V_J)$ olmak üzere $\bigoplus\limits_{n\geq 0} \zeta_n$ şeklinde toplama giren elemanlardan sonlu tanesi dışında kalan elemanlar sıfır olacak biçimdedir. $\bigoplus\limits_{n\geq 0} \xi_n$ ve $\bigoplus\limits_{n\geq 0} \eta_n \in H_J(V)$ olmak üzere

$$\langle \bigoplus_{n\geq 0} \xi_n, \bigoplus_{n\geq 0} \eta_n \rangle = \sum_{n\geq 0} < \xi_n, \eta_n >$$

olarak tanımlı fonksiyon $H_J(V)$ vektör uzayı üzerinde bir iç çarpım tanımlamaktadır. Fakat $(H_J(V), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uzayı V sonlu boyutlu olduğu durumda tam olmasına rağmen, V sonsuz boyutlu olduğu durumda tam değildir. Fock uzayı, $H_J(V)$ uzayının tamlamasıyla oluşturulan ve $\mathbb{H}_J = \mathbb{H}_J(V)$ olarak gösterilen kompleks Hilbert uzayıdır. $\mathbb{H}_J(V)$ uzayı aynı zamanda $n \geq 0$ olmak üzere $\bigwedge^n[V_J]$ uzaylarının direkt toplamı olarak da düşünülebilir. Ayrıca I tamamen sıralı bir küme olmak üzere, $\{e_i \mid i \in I\}$ kümesi V_J kompleks Hilbert uzayı için birimdikey bir taban olmak üzere

$$\{e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_n} \mid i_1 < i_2 < \cdots < i_n\}$$

de $\forall n \geq 0$ için $\bigwedge^n(V_J)$ için birimdikey bir taban olacaktır. Bu şekildeki mümkün bütün kümelerin birleşim kümesi de Fock uzayı $\mathbb{H}_J(V)$ için bir taban olacaktır [6]. Temsil uzayını tanımladıktan sonra şimdi temsil tanımında kullanılan iki önemli operatörü tanımlayalım. Keyfi seçilen $v \in V$ için $\bigwedge(V_J) =$

$H_J(V)$ dış cebri üzerinde tanımlı

$$c(v) = c_J(v) \text{ (creator) ve } a(v) = a_J(v) \text{ (annihilator)}$$

dönüşümleri şöyle tanımlanmaktadır:

$$\begin{aligned} c(v): \quad H_J(V) &\rightarrow H_J(V) \\ \zeta &\mapsto c(v)(\zeta) = v \wedge \zeta \end{aligned}$$

ve $a(v) = a_J(v)$ operatörü ise $\bigwedge^0(V) = \mathbb{C}$ nin her elemanını sıfıra resmeden diğer elemanları ise $\omega_0, \cdots, \omega_n \in V$ için:

$$a(v)(\omega_0 \wedge \omega_1 \wedge \cdots \omega_n) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j < \omega_j, v > \omega_0 \wedge \cdots \wedge \hat{\omega_j} \wedge \cdots \wedge \omega_n$$

şeklinde resmeden bir operatör olarak tanımlanmaktadır. Burada dikkat edecek olursak, tanımlanan operatörler $\bigwedge(V_J)$ üzerinde kompleks lineer operatörlerdir. Fakat V_J üzerinde c_J hem reel hem de kompleks lineer olmasına rağmen a_J operatörü V_J üzerinde reel lineer olup kompleks lineer değildir.

Teorem 1.32. *$v \in V$ olmak üzere $c_J(v)$ (creator) ve $a_J(v)$ (annihilator) operatörleri $\mathbb{H}_J(V)$ üzerine birbirlerinin adjoint operatörleri olacak şekilde sürekli olarak ve normu $\|v\|$ olacak şekilde genişlerler [6].*

Şimdi herhangi bir $v \in V$ için tanımlanan $a_J(v)$ ve $c_J(v)$ operatörleri yardımıyla $\mathbb{H}_J(V)$ üzerinde sınırlı reel lineer π_J dönüşümünü,

$$\begin{aligned} \pi_J: \quad V &\rightarrow B_{\mathbb{C}}(\mathbb{H}_J(V)) \\ v &\mapsto \pi_J(v) = c_J(v) + a_J(v) \end{aligned}$$

olarak tanımlayalım. π_J dönüşümü

$$[\pi_J(v)]^2 =< v, v > I$$

eşitliğini sağlamaktadır. Gerçekten,

$$\begin{aligned} &[\pi_J(v)]^2 = \pi_J(v) \circ \pi_J(v) = \pi_J(v)(c_J(v) + a_J(v)) \\ &= c_J(v)(c_J(v) + a_J(v)) + a_J(v)(c_J(v) + a_J(v)) \\ &= c_J(v)c_J(v) + c_J(v)a_J(v) + a_J(v)c_J(v) + a_J(v)a_J(v) \end{aligned}$$

dir. $\zeta \in \mathbb{H}_J(V)$ için $c_J(v)(c_J(v)(\zeta)) = v \wedge v \wedge \zeta = 0$ ve $a_J(v)(a_J(v)) = 0$ [6] ve

$$c_J(v)(a_J(v)(\omega_0 \wedge \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n)) = c_J(v)(< \omega_0, v > \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_n -$$
$$< \omega_1, v > \omega_0\omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_n + \cdots + (-1)^n < \omega_n, v > \omega_0\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_{n-1})$$
$$=< \omega_0, v > v \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_n - < \omega_1, v > v \wedge \omega_0\omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_n + \cdots +$$
$$+(-1)^n < \omega_n, v > v \wedge \omega_0\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_{n-1}.$$

Diğer taraftan,

$$a_J(v)(c_J(v)(\omega_0 \wedge \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n)) = a_J(v)(v \wedge \omega_0 \wedge \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n)$$
$$=< v, v > \omega_0 \wedge \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n - < \omega_0, v > v \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_n +$$
$$< \omega_1, v > v \wedge \omega_0\omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_n + \cdots + (-1)^{n+1} < \omega_n, v > \omega_0\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_{n-1}$$

olmak üzere taraf tarafa toplarsak,

$$[c_J(v)(a_J(v) + a_J(v)(c_J(v)](\omega_0 \wedge \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n) = [< v, v >]\omega_0 \wedge \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n$$

olarak elde edilir. O halde,

$$[\pi_J(v)]^2 =< v, v > I$$

dir. Böylece

$$\pi_J : V \to B(\mathbb{H}_J(V))$$

reel lineer dönüşümü Clifford cebrinin evrensel özelliğinden $\mathbb{C}l(V)$ üzerine tek türlü olarak genişlemektedir. İşte

$$\pi_J : \mathbb{C}l(V) \to B(\mathbb{H}_J(V))$$

dönüşümüne $\mathbb{C}l(V)$ kompleks Clifford cebrinin Fock temsili denir.

Örnek 1.33. *Şimdi $\mathbb{C}l_2$, $\mathbb{C}l_4$ ve $\mathbb{C}l_6$ için sırasıyla $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^4$ ve $\mathbb{R}^6$ üzerinde birer uniter yapı seçerek seçilen yapılara bağlı Fock temsillerine ilişkin birer örnek verelim.*

- *$\mathbb{C}l_2$ için Fock temsili elde edilirken, $\mathbb{R}^2$ üzerinde $(\cdot,\cdot)$ standart iç çarpım ve $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ standart taban vektörleri olmak üzere,*

$$\begin{array}{rccc} J: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & e_1 & \mapsto & e_2 \\ & e_2 & \mapsto & -e_1 \end{array}$$

ile tanımlı J uniter yapısı ile $\mathbb{R}^2$ kompleks Hilbert uzayına dönüştürüldüğünde, $\mathbb{R}^2_J$ uzayı e_1 tarafından gerilen kompleks bir boyutlu uzay olarak elde edilmektedir. Bu durumda

$$\mathbb{H}_J(\mathbb{R}^2) = \bigwedge(\mathbb{R}^2_J) = \bigwedge^0(\mathbb{R}^2_J) \oplus \bigwedge^1(\mathbb{R}^2_J) = span\{1, e_1\}$$

olmak üzere iki boyutlu vektör uzayıdır. $\mathbb{C}l_2$ nin Fock temsilini bulmak için sadece $\pi_J(e_1)$ ve $\pi_J(e_2)$ dönüşümlerini bulmak yeterli olacaktır.

$$\pi_J(e_1), \pi_J(e_2) : \bigwedge^0(\mathbb{R}^2_J) \oplus \bigwedge^1(\mathbb{R}^2_J) \to \bigwedge^0(\mathbb{R}^2_J) \oplus \bigwedge^1(\mathbb{R}^2_J)$$

dönüşümlerinin $\{1, e_1\}$ sıralı tabanına göre matrisleri,

$\pi_J(e_1)(1) = e_1 \wedge 1 + a_J(e_1)(1) = e_1 \wedge 1 = e_1$

$\pi_J(e_1)(e_1) = e_1 \wedge e_1 + a_J(e_1)(e_1) = 0 + < e_1, e_1 >= 1$

olmak üzere,

$$\pi_J(e_1) \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{\textit{şeklindedir.}}$$

$\pi_J(e_2)(1) = e_2 \wedge 1 + a_J(e_2)(1) = ie_1 \wedge 1 + 0 = ie_1$

$$\begin{aligned} \pi_J(e_2)(e_1) &= e_2 \wedge e_1 + a_J(e_2)(e_1) = ie_1 \wedge e_1 + < e_1, e_2 > \\ &= (e_1, e_2) + i(e_1, J(e_2)) = -i \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\pi_J(e_2) \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla $\mathbb{C}l_2$ nin seçilen bu uniter yapı için Fock temsili,

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "\pi_J"'] & & \mathbb{C}l_2 \arrow[dl, "\pi_J"] \\ & B(\mathbb{H}_J(\mathbb{R}^2)) & \end{tikzcd}$$

diyagramını komutatif yapan $\pi_J : \mathbb{C}l_2 \to B(\mathbb{H}_J(\mathbb{R}^2))$ homomorfizmasıdır.

- $\mathbb{C}l_4$ *Clifford cebri için Fock temsili elde edilirken $\mathbb{R}^4$ üzerinde $(\cdot, \cdot)$ stan-*

dart iç çarpımı ve e_1, e_2, e_3, e_4 *standart taban vektörlerini göstermek üzere,*

$$\begin{array}{rccc} J: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & e_1 & \mapsto & e_2 \\ & e_2 & \mapsto & -e_1 \\ & e_3 & \mapsto & e_4 \\ & e_4 & \mapsto & -e_3 \end{array}$$

ile tanımlı J *uniter yapısı ile* $\mathbb{R}^4$ *ü kompleks vektör uzayına dönüştürerek*

$$\mathbb{R}^4_J = span\{e_1, e_3\}$$

kompleks iki boyutlu vektör uzayı elde edilmektedir. Bu durumda da $\bigwedge(\mathbb{R}^4_J) = \bigwedge^0(\mathbb{R}^4_J) \oplus \bigwedge^1(\mathbb{R}^4_J) \oplus \bigwedge^2(\mathbb{R}^4_J)$ *olmak üzere* $\{1, e_1, e_3, e_1 \wedge e_3\}$ *tarafından gerilen kompleks 4 boyutlu vektör uzayı olacaktır.*

$\pi_J : \mathbb{C}l_4 \to B(\bigwedge(\mathbb{R}^4_J))$ *temsilini bulmak için* $\mathbb{C}l_4$ *ün* e_1, e_2, e_3, e_4 *üreteç elemanlarının resimlerini bulmak yeterli olacaktır.*

$\pi_J(e_1)(1) = c_J(e_1)(1) + a_J(e_1)(1) = e_1 \wedge 1 + 0 = e_1$

$\pi_J(e_1)(e_1) = c_J(e_1)(e_1) + a_J(e_1)(e_1) = e_1 \wedge e_1 + < e_1, e_1 >= 1$

$\pi_J(e_1)(e_3) = c_J(e_1)(e_3) + a_J(e_1)(e_3) = e_1 \wedge e_3 + < e_3, e_1 >= e_1 \wedge e_3$

$\pi_J(e_1)(e_1 \wedge e_3) = c_J(e_1)(e_1 \wedge e_3) + a_J(e_1)(e_1 \wedge e_3) = e_1 \wedge e_1 \wedge e_3 + < e_1, e_1 > e_3 - < e_3, e_1 > e_1 = e_3$

olmak üzere;

$$\pi_J(e_1) \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde $\pi_J(e_2)$ *nin matrisi,*

$\pi_J(e_2)(1) = c_J(e_2)(1) + a_J(e_2)(1) = e_2 \wedge 1 + 0 = ie_1$

$\pi_J(e_2)(e_1) = c_J(e_2)(e_1) + a_J(e_2)(e_1) = e_2 \wedge e_1 + < e_1, e_2 >= ie_1 \wedge e_1 + (e_1, e_2) + i(e_1, J(e_2)) = -i$

$\pi_J(e_2)(e_3) = c_J(e_2)(e_3) + a_J(e_2)(e_3) = e_2 \wedge e_3$
$+ < e_3, e_2 >= ie_1 \wedge e_3$

$\pi_J(e_2)(e_1 \wedge e_3) = c_J(e_2)(e_1 \wedge e_3) + a_J(e_2)(e_1 \wedge e_3) = e_2 \wedge e_1 \wedge e_3 + < e_1, e_2 >$

$e_3- < e_3, e_2 > e_1 = ie_1 \wedge e_1 \wedge e_3 + [(e_1, e_2) + i(e_1, J(e_2)]e_3 - [(e_3, e_2) + i(e_3, J(e_2)]e_1 = -ie_3$

olmak üzere,

$$\pi_J(e_2) \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir.

$\pi_J(e_3)$ *dönüşümünün matrisi,*

$\pi_J(e_3)(1) = c_J(e_3)(1) + a_J(e_3)(1) = e_3 \wedge 1 + 0 = e_3$

$\pi_J(e_3)(e_1) = c_J(e_3)(e_1) + a_J(e_3)(e_1) = e_3 \wedge e_1 + < e_1, e_3 >= -e_1 \wedge e_3$

$\pi_J(e_3)(e_3) = c_J(e_3)(e_3) + a_J(e_3)(e_3) = e_3 \wedge e_3 + < e_3, e_3 >= 1$

$\pi_J(e_3)(e_1 \wedge e_3) = c_J(e_3)(e_1 \wedge e_3) + a_J(e_3)(e_1 \wedge e_3) = e_3 \wedge e_1 \wedge e_3 + < e_1, e_3 > e_3 - < e_3, e_3 > e_1 = -e_1$

olmak üzere,

$$\pi_J(e_3) \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir.

$\pi_J(e_4)$ *dönüşümünün matrisi,*

$\pi_J(e_4)(1) = c_J(e_4)(1) + a_J(e_4)(1) = e_4 \wedge 1 + 0 = ie_3$

$$\begin{aligned} \pi_J(e_4)(e_1) &= c_J(e_4)(e_1) + a_J(e_4)(e_1) = ie_3 \wedge e_1 + < e_1, e_4 > \\ &= ie_3 \wedge e_1 = -ie_1 \wedge e_3 \\ \pi_J(e_4)(e_3) &= c_J(e_4)(e_3) + a_J(e_4)(e_3) = ie_3 \wedge e_3 + < e_3, e_4 > \\ &= (e_3, e_4) + i(e_3, J(e_4)) = -i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_J(e_4)(e_1 \wedge e_3) &= c_J(e_4)(e_1 \wedge e_3) + a_J(e_4)(e_1 \wedge e_3) \\ &= ie_3 \wedge e_1 \wedge e_3 + < e_1, e_4 > e_3 - < e_3, e_4 > e_1 \\ &= -[(e_3, e_4) + i(e_3, J(e_4))]e_1 = ie_1 \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\pi_J(e_4) \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir.

- *Son olarak benzer şekilde* $\mathbb{C}l_6$ *için Fock temsilini elde etmek için* $\mathbb{R}^6$ *üzerinde* $(\cdot,\cdot)$ *standart iç çarpımı ve* $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$ *standart taban vektörlerini göstermek üzere,*

$$\begin{array}{rccl} J: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & e_1 & \longmapsto & e_2 \\ & e_2 & \longmapsto & -e_1 \\ & e_3 & \longmapsto & e_4 \\ & e_4 & \longmapsto & -e_3 \\ & e_5 & \longmapsto & e_6 \\ & e_6 & \longmapsto & -e_5 \end{array}$$

ile tanımlı J *uniter yapısını tanımlayalım. Bu yapıya karşılık gelen Fock temsilini elde etmek için bu yapı ile* $\mathbb{R}^6$ *reel vektör uzayı kompleks vektör uzayına dönüştürüldüğü takdirde,*

$$\mathbb{R}^6_J = span\{e_1, e_3, e_5\}$$

olacaktır. Bu durumda da $\bigwedge(\mathbb{R}^6_J) = \bigwedge^0(\mathbb{R}^6_J) \oplus \bigwedge^1(\mathbb{R}^6_J) \oplus \bigwedge^2(\mathbb{R}^6_J) \oplus \bigwedge^3(\mathbb{R}^6_J)$ *olmak üzere* $1, e_1, e_3, e_1 \wedge e_3, e_5, e_1 \wedge e_5, e_3 \wedge e_5, e_1 \wedge e_3 \wedge e_5$ *vektörleri tarafından gerilen kompleks 8 boyutlu vektör uzayı olacaktır.* $\mathbb{C}l_6$ *için Fock temsilini elde etmek için* $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$ *üreteç elemanlarının resimlerini bulmak yeterli olacaktır.*

- $\pi_J(e_1)$ *dönüşümünün matrisi,*

$$\pi_J(e_1)(1) = c_J(e_1)(1) + a_J(e_1)(1) = e_1 \wedge 1 + 0 = e_1$$
$$\pi_J(e_1)(e_1) = c_J(e_1)(e_1) + a_J(e_1)(e_1) = e_1 \wedge e_1 + < e_1, e_1 >= 1$$
$$\pi_J(e_1)(e_3) = c_J(e_1)(e_3) + a_J(e_1)(e_3) = e_1 \wedge e_3 + < e_3, e_1 >= e_1 \wedge e_3$$
$$\pi_J(e_1)(e_1 \wedge e_3) = c_J(e_1)(e_1 \wedge e_3) + a_J(e_1)(e_1 \wedge e_3)$$
$$= e_1 \wedge e_1 \wedge e_3 + < e_1, e_1 > e_3 - < e_3, e_1 > e_1 = e_3$$
$$\pi_J(e_1)(e_5) = c_J(e_1)(e_5) + a_J(e_1)(e_5) = e_1 \wedge e_5$$
$$\pi_J(e_1)(e_1 \wedge e_5) = c_J(e_1)(e_1 \wedge e_5) + a_J(e_1)e_1 \wedge e_5$$
$$= e_1 \wedge e_1 \wedge e_5 + < e_1, e_1 > e_5 - < e_5, e_1 > e_1 = e_5$$
$$\pi_J(e_1)(e_3 \wedge e_5) = c_J(e_1)(e_3 \wedge e_5) + a_J(e_1)(e_3 \wedge e_5) = e_1 \wedge e_3 \wedge e_5$$
$$\pi_J(e_1)(e_1 \wedge e_3 \wedge e_5) = c_J(e_1)(e_1 \wedge e_3 \wedge e_5) + a_J(e_1)(e_1 \wedge e_3 \wedge e_5) = e_3 \wedge e_5$$

olmak üzere;

$$\pi_J(e_1) \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir.

- $\pi_J(e_2)$*:*

$$\begin{array}{ll} \pi_J(e_2)(1) = ie_1, & \pi_J(e_2)(e_1) =< e_1, e_2 >= -i, \\ \pi_J(e_2)(e_3) = ie_1 \wedge e_3, & \pi_J(e_2)(e_1 \wedge e_3) = -ie_3, \\ \pi_J(e_2)(e_5) = ie_1 \wedge e_5, & \pi_J(e_2)(e_1 \wedge e_5) = -ie_5, \\ \pi_J(e_2)(e_3 \wedge e_5) = ie_1 \wedge e_3 \wedge e_5, & \pi_J(e_2)(e_1 \wedge e_3 \wedge e_5) = -ie_3 \wedge e_5 \end{array}$$

olmak üzere;

$$\pi_J(e_2) \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir.

- $\pi_J(e_3)$:

$$\begin{aligned} &\pi_J(e_3)(1) = e_3, && \pi_J(e_3)(e_1) = -e_1 \wedge e_3 \\ &\pi_J(e_3)(e_3) = 1, && \pi_J(e_3)(e_1 \wedge e_3) = -e_1 \\ &\pi_J(e_3)(e_5) = e_3 \wedge e_5, && \pi_J(e_3)(e_1 \wedge e_5) = -e_1 \wedge e_3 \wedge e_5 \\ &\pi_J(e_3)(e_3 \wedge e_5) = e_5, && \pi_J(e_3)(e_1 \wedge e_3 \wedge e_5) = -e_1 \wedge e_5 \end{aligned}$$

olmak üzere;

$$\pi_J(e_3) \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir.

- $\pi_J(e_4)$:

$$\begin{aligned} &\pi_J(e_4)(1) = ie_3, && \pi_J(e_4)(e_1) = -ie_1 \wedge e_3 \\ &\pi_J(e_4)(e_3) = -i, && \pi_J(e_4)(e_1 \wedge e_3) = ie_1 \\ &\pi_J(e_4)(e_5) = ie_3 \wedge e_5, && \pi_J(e_4)(e_1 \wedge e_5) = -ie_1 \wedge e_3 \wedge e_5 \\ &\pi_J(e_4)(e_3 \wedge e_5) = -ie_5, && \pi_J(e_4)(e_1 \wedge e_3 \wedge e_5) = ie_1 \wedge e_5 \end{aligned}$$

olmak üzere;

$$\pi_J(e_4) \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir.

- $\pi_J(e_5)$:

$$\begin{aligned} &\pi_J(e_5)(1) = e_5, && \pi_J(e_5)(e_1) = -e_1 \wedge e_5 \\ &\pi_J(e_5)(e_3) = -e_3 \wedge e_5, && \pi_J(e_5)(e_1 \wedge e_3) = e_1 \wedge e_3 \wedge e_5 \\ &\pi_J(e_5)(e_5) = 1, && \pi_J(e_5)(e_1 \wedge e_5) = -e_1 \\ &\pi_J(e_5)(e_3 \wedge e_5) = -e_3, && \pi_J(e_5)(e_1 \wedge e_3 \wedge e_5) = e_1 \wedge e_3 \end{aligned}$$

olmak üzere;

$$\pi_J(e_5) \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir.

- $\pi_J(e_6)$:

$$\begin{aligned}
&\pi_J(e_6)(1) = ie_5, && \pi_J(e_6)(e_1) = -ie_1 \wedge e_5 \\
&\pi_J(e_6)(e_3) = ie_3 \wedge e_5, && \pi_J(e_6)(e_1 \wedge e_3) = ie_1 \wedge e_3 \wedge e_5 \\
&\pi_J(e_6)(e_5) = -i, && \pi_J(e_6)(e_1 \wedge e_5) = ie_1 \\
&\pi_J(e_6)(e_3 \wedge e_5) = ie_3, && \pi_J(e_6)(e_1 \wedge e_3 \wedge e_5) = -ie_1 \wedge e_3
\end{aligned}$$

olmak üzere;

$$\pi_J(e_6) \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir.

2 SONSUZ BOYUTLU KOMPLEKS CLIFFORD CEBRİ İÇİN TEMSİL İNŞAASI YAKLAŞIMLARI

Bu bölümde öncelikle $B_{\mathbb{C}}(L^2[0,1])$, $L^2[0,1]$ uzayı üzerinde sınırlı kompleks lineer operatörlerin oluşturduğu cebir olmak üzere $\mathbb{C}l_{2n}$ cebri $L^2([0,1]^n)$ üzerinde temsil edilmiş ve bu temsiller yardımıyla sonsuz boyutlu kompleks Clifford cebri için de bir temsil aranmıştır. Fakat sonlu durumda elde edilen bu temsiller yardımıyla sonsuz boyutlu kompleks Clifford cebri için bir temsil vermek mümkün olmamıştır. Daha sonra yine sonlu boyutlu Clifford cebirlerinin matris izomorfizmleri yardımıyla $L^2(\mathcal{K})$ uzayı üzerinde temsilleri oluşturulmuş ve bu temsiller yardımıyla da $\mathbb{C}l_\infty$ için bir temsil verilmeye çalışılmıştır.

2.1 Sonlu Boyutlu Kompleks Clifford Cebirlerinin Matris İzomorfizmleri Yardımıyla $L^2([0,1]^n)$ Üzerinde Temsilinin Elde Edilmesi

Sonlu ve $2n$ boyutlu kompleks Clifford $\mathbb{C}l_{2n}$ cebrinin $\mathbb{C}(2^n)$ cebrine izomorf olduğu genel teoriden bilinmektedir. Bu bölümde $\mathbb{C}l_{2n}$ cebri ile $\mathbb{C}(2^n)$ cebri arasındaki izomorfizmi kullanarak $B(L^2([0,1]^n))$ içindeki bazı özel elemanlar yardımıyla $\mathbb{C}l_{2n}$ cebri $L^2([0,1]^n)$ uzayı üzerinde temsil edilmiştir. Motivasyon açısından öncelikle 2 boyutlu kompleks Clifford cebri olan $\mathbb{C}l_2$ cebrinin $L^2[0,1]$ uzayı üzerinde bir temsilini oluşturalım. Bu temsil aşağıda sırasıyla tanımlanan $S_1, S_2 \in B(L^2[0,1])$ operatörleri ve $\mathbb{C}l_2$ cebri ile $\mathbb{C}(2)$ cebri arasındaki izomorfizm yardımıyla oluşturulacaktır.

$$\begin{aligned} S_1 :\ L^2[0,1] &\longrightarrow L^2[0,1], \\ f &\longmapsto (S_1 f)(x) = \begin{cases} \sqrt{2} f(2x) \ , & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 0 \ , & \text{Diğer durumlarda} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 :\ L^2[0,1] &\longrightarrow L^2[0,1], \\ f &\longmapsto (S_2 f)(x) = \begin{cases} \sqrt{2} f(2x-1) \ , & x \in [\frac{1}{2}, 1] \\ 0 \ , & \text{Diğer durumlarda} \end{cases} \end{aligned}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda bu dönüşümlerin adjointleri,

$$\begin{aligned} S_1^* :\ L^2[0,1] &\longrightarrow L^2[0,1], \\ f &\longmapsto (S_1^* f)(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} f\left(\frac{x}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2^*: \quad L^2[0,1] &\longrightarrow L^2[0,1], \\ f &\longmapsto (S_2^* f)(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} f\left(\frac{x+1}{2}\right) \end{aligned}$$

şeklindedir. Tanımlanan bu operatörler yardımıyla $1 \leq i, j \leq 2$ olmak üzere E_{ij}, $\mathbb{C}(2)$ cebrinin i. satır j. sütun elemanı 1, diğer girdileri 0 olan standart taban elemanlarını göstersin. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \pi_2 : \mathbb{C}(2) &\rightarrow B(L^2[0,1]) \\ E_{ij} &\mapsto S_i S_j^* \end{aligned}$$

ile tanımlı dönüşüm bir cebir homomorfizmasıdır. Yani $\mathbb{C}(2)$ cebrinin bir temsilidir. Öte yandan $\mathbb{C}l_2 \cong \mathbb{C}(2)$ olduğundan aralarındaki izomorfizm,

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} \rho_2 : \mathbb{C}l_2 &\rightarrow \mathbb{C}(2) \\ e_1 &\mapsto U \\ e_2 &\mapsto V \end{aligned}$$

şeklinde elde edilebilir. Bu durumda $\pi_2 \circ \rho_2 : \mathbb{C}l_2 \rightarrow B(L^2[0,1])$ dönüşümü bir cebir homomorfizmasıdır. Bu dönüşüm açık olarak ifade edilecek olursa, $\varphi_2 := \pi_2 \circ \rho_2$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \varphi_2 : \quad \mathbb{C}l_2 &\rightarrow B(L^2[0,1]) \\ e_1 &\longmapsto S_1 S_1^* - S_2 S_2^* \\ e_2 &\longmapsto S_1 S_2^* + S_2 S_1^* \end{aligned}$$

olarak elde edilmektedir.

Benzer düşünceyle dört boyutlu kompleks Clifford cebri olan $\mathbb{C}l_4$ cebrinin $L^2([0,1]^2) = L^2([0,1] \times [0,1])$ uzayı üzerinde bir temsili aşağıda sırasıyla tanımlanan $S_1, S_2, S_3, S_4 \in B(L^2([0,1]^2))$ operatörleri ve $\mathbb{C}l_4$ cebri ile $\mathbb{C}(4)$ cebri arasındaki izomorfizm yardımıyla verilecektir.

$$\begin{aligned} S_1 : L^2([0,1] \times [0,1]) &\longrightarrow L^2([0,1] \times [0,1]) \\ f &\longmapsto (S_1 f)(x,y) = \begin{cases} \sqrt{2} f(2x, 2y)\ , & (x,y) \in [0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{2}] \\ 0\ , & d.d. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 : L^2([0,1]\times[0,1]) &\longrightarrow L^2([0,1]\times[0,1]) \\ f &\longmapsto (S_2 f)(x,y) = \begin{cases} \sqrt{2} f(2x-1, 2y)\ , & (x,y)\in[\frac{1}{2},1]\times[0,\frac{1}{2}] \\ 0\ , & d.d. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_3 : L^2([0,1]\times[0,1]) &\longrightarrow L^2([0,1]\times[0,1]) \\ f &\longmapsto (S_3 f)(x,y) = \begin{cases} \sqrt{2} f(2x, 2y-1)\ , & (x,y)\in[0,\frac{1}{2}]\times[\frac{1}{2},1] \\ 0\ , & d.d. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_4 : L^2([0,1]\times[0,1]) &\longrightarrow L^2([0,1]\times[0,1]) \\ f &\longmapsto (S_4 f)(x,y) = \begin{cases} \sqrt{2} f(2x-1, 2y-1)\ , & (x,y)\in[\frac{1}{2},1]\times[\frac{1}{2},1] \\ 0\ , & d.d. \end{cases} \end{aligned}$$

olmak üzere bu dönüşümlerin adjoint dönüşümleri,

$$\begin{aligned} S_1^* : L^2([0,1]\times[0,1]) &\longrightarrow L^2([0,1]\times[0,1]), \\ f &\longmapsto (S_1^* f)(x,y) = \frac{\sqrt{2}}{2} f\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2^* : L^2([0,1]\times[0,1]) &\longrightarrow L^2([0,1]\times[0,1]), \\ f &\longmapsto (S_2^* f)(x,y) = \frac{\sqrt{2}}{2} f\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_3^* : L^2([0,1]\times[0,1]) &\longrightarrow L^2([0,1]\times[0,1]), \\ f &\longmapsto (S_3^* f)(x,y) = \frac{\sqrt{2}}{2} f\left(\frac{x}{2}, \frac{y+1}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_4^* : L^2([0,1]\times[0,1]) &\longrightarrow L^2([0,1]\times[0,1]), \\ f &\longmapsto (S_4^* f)(x,y) = \frac{\sqrt{2}}{2} f\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+1}{2}\right) \end{aligned}$$

şeklindedir. E_{ij} matrisleri $1 \leq i,j \leq 4$ olmak üzere $\mathbb{C}(4)$ cebrinin standart taban matrisleri olsun. Tanımlanan bu operatörler yardımıyla oluşturulan,

$$\begin{aligned} \pi_4 : \mathbb{C}(4) &\rightarrow B(L^2([0,1]^2)) \\ E_{ij} &\mapsto S_i S_j^* \end{aligned}$$

dönüşümü bir cebir homomorfizmasıdır. Ayrıca $\mathbb{C}l_4 \cong \mathbb{C}(4)$ olduğundan aralarındaki izomorfizm $\rho_4 : \mathbb{C}l_4 \rightarrow \mathbb{C}(4)$,

$$e_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ e_2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e_3 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \; e_4 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olarak verilir. Bu durumda $\pi_4 \circ \rho_4 : \mathbb{C}l_4 \to B(L^2([0,1] \times [0,1]))$ dönüşümü bir cebir homomorfizmasıdır. Bu dönüşüm açık olarak ifade edilecek olursa, $\varphi_4 := \pi_4 \circ \rho_4$ olmak üzere,

$$\begin{array}{rccl} \varphi_4 : & \mathbb{C}l_4 & \to & B(L^2([0,1] \times [0,1])) \\ & e_1 & \longmapsto & S_1S_1^* - S_2S_2^* + S_3S_3^* - S_4S_4^* \\ & e_2 & \longmapsto & S_1S_2^* + S_2S_1^* + S_3S_4^* + S_4S_3^* \\ & e_3 & \longmapsto & i(S_1S_2^* - S_2S_1^* - S_3S_4^* + S_4S_3^*) \\ & e_4 & \longmapsto & i(S_1S_4^* - S_2S_3^* + S_3S_2^* - S_4S_1^*) \end{array}$$

temsili elde edilmektedir. Böylece $\mathbb{C}l_2$ ve $\mathbb{C}l_4$ cebirleri sırasıyla $L^2[0,1]$ ve $L^2([0,1]^2)$ uzayları üzerinde temsil edilmiştir. Diğer taraftan $\mathbb{C}l_2$ cebri $\mathbb{C}l_4$ cebrinin bir alt cebri olarak düşünüldüğünde acaba her iki cebir üzerinde inşaa edilen bu temsiller arasında nasıl bir ilişki vardır sorusu gündeme gelmektedir. Fakat temsil uzayları farklı uzaylar olduğundan bu ilişkiyi anlamak için öncelikle $B(L^2([0,1]^2))$ cebri ile $B(L^2[0,1])$ cebri arasında uygun bir identifikasyon kurulmalıdır. Bu durumda $\mathbb{C}l_4$ cebrinin $L^2([0,1]^2)$ üzerinde inşaa edilen φ_4 temsili, $\mathbb{C}l_4$ içine bir alt cebir olarak gömülmüş olan $\mathbb{C}l_2$ cebri üzerine kısıtlandığı takdirde $\mathbb{C}l_2$ üzerindeki φ_2 temsilini verir mi? sorusu anlam kazanmaktadır. Daha da açık ifade edilecek olursa

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}l_2 \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "i"'] & B(L^2[0,1]) \arrow[d, "\psi_2"] \\ \mathbb{C}l_4 \arrow[r, "\varphi_4"] & B(L^2([0,1]^2)) \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

diyagramı komutatif olacak şekilde bir

$$\psi_2 : B(L^2[0,1]) \to B(L^2([0,1]^2))$$

cebir homomorfizması var mıdır? Aranan ψ_2 dönüşümü $B(L^2[0,1])$ uzayının bir T elemanı için,

$$\begin{array}{rccl} \psi_2 T : & L^2([0,1]^2) & \to & L^2([0,1]^2) \\ & g & \mapsto & (\psi_2 T)(g)(x,y) = (Tg_y)(x) \end{array}$$

olarak tanımlandığı takdirde 2.1 diyagramı komutatiftir. Şimdi $\mathbb{C}l_2$ cebrinin e_1, e_2 üreteç elemanları için,

$$\begin{aligned}(\varphi_4 \circ i)(e_1) &= (\psi_2 \circ \varphi_2)(e_1)\\ (\varphi_4 \circ i)(e_2) &= (\psi_2 \circ \varphi_2)(e_2)\end{aligned}$$

eşitliklerinin sağlandığını gösterelim.

$$\begin{aligned}[(\varphi_4 \circ i)(e_1)(g)](x,y) &= (S_1S_1^* - S_2S_2^* + S_3S_3^* - S_4S_4^*)(g)(x,y)\\ &= (S_1S_1^*)(g)(x,y) - (S_2S_2^*)(g)(x,y)\\ &\quad +(S_3S_3^*)(g)(x,y) - (S_4S_4^*)(g)(x,y)\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu ifadedeki terimler ayrı ayrı hesaplanarak,

$$\begin{aligned}(S_1S_1^*)(g)(x,y) &= \begin{cases}\sqrt{2}(S_1^*g)(2x,2y)\ , & (x,y) \in [0,\frac{1}{2}] \times [0,\frac{1}{2}]\\ 0\ , & d.d.\end{cases}\\ &= \begin{cases} g(x,y)\ , & (x,y) \in [0,\frac{1}{2}] \times [0,\frac{1}{2}]\\ 0\ , & d.d.\end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(S_2S_2^*)(g)(x,y) &= \begin{cases}\sqrt{2}(S_2^*g)(2x-1,2y)\ , & (x,y) \in [\frac{1}{2},1] \times [0,\frac{1}{2}]\\ 0\ , & d.d.\end{cases}\\ &= \begin{cases} g(x,y)\ , & (x,y) \in [\frac{1}{2},1] \times [0,\frac{1}{2}]\\ 0\ , & d.d.\end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(S_3S_3^*)(g)(x,y) &= \begin{cases}\sqrt{2}(S_3^*g)(2x,2y-1)\ , & (x,y) \in [0,\frac{1}{2}] \times [\frac{1}{2},1]\\ 0\ , & d.d.\end{cases}\\ &= \begin{cases} g(x,y)\ , & (x,y) \in [0,\frac{1}{2}] \times [\frac{1}{2},1]\\ 0\ , & d.d.\end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(S_4S_4^*)(g)(x,y) &= \begin{cases}\sqrt{2}(S_4^*g)(2x-1,2y-1)\ , & (x,y) \in [\frac{1}{2},1] \times [\frac{1}{2},1]\\ 0\ , & d.d.\end{cases}\\ &= \begin{cases} g(x,y)\ , & (x,y) \in [\frac{1}{2},1] \times [\frac{1}{2},1]\\ 0\ , & d.d.\end{cases}\end{aligned}$$

$$(S_1S_1^* - S_2S_2^* + S_3S_3^* - S_4S_4^*)(g)(x,y) = \begin{cases} g(x,y)\ , & (x,y) \in [0,\frac{1}{2}] \times [0,\frac{1}{2}]\\ -g(x,y)\ , & (x,y) \in (\frac{1}{2},1] \times [0,\frac{1}{2}]\\ g(x,y)\ , & (x,y) \in [0,\frac{1}{2}] \times (\frac{1}{2},1]\\ -g(x,y)\ , & (x,y) \in (\frac{1}{2},1] \times (\frac{1}{2},1]\end{cases}$$

$$(S_1S_1^* - S_2S_2^* + S_3S_3^* - S_4S_4^*)(g)(x,y) = \begin{cases} g(x,y)\ , & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ -g(x,y)\ , & x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \tag{2.2}$$

olarak elde edilir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} (\psi_2 \circ \varphi_2)(e_1)(g)(x,y) &= (\psi_2(\varphi_2(e_1))(g)(x,y) = (\varphi_2(e_1))(g_y)(x) \\ &= (S_1S_1^* - S_2S_2^*)(g_y)(x) \\ &= (S_1S_1^*)(g_y)(x) - (S_2S_2^*)(g_y)(x) \\ &= S_1(S_1^*g_y)(x) - S_2(S_2^*g_y)(x) \end{aligned}$$

dir. Bu ifadeyi açacak olursak,

$$\begin{aligned} S_1(S_1^*g_y)(x) &= \begin{cases} \sqrt{2}(S_1^*g_y)(2x)\ , & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 0\ , & d.d. \end{cases} \\ &= \begin{cases} g_y(x)\ , & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 0\ , & d.d. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2(S_2^*g_y)(x) &= \begin{cases} \sqrt{2}(S_2^*g_y)(2x-1)\ , & x \in [\frac{1}{2}, 1] \\ 0\ , & d.d. \end{cases} \\ &= \begin{cases} g_y(x)\ , & x \in [\frac{1}{2}, 1] \\ 0\ , & d.d. \end{cases} \end{aligned}$$

$$(S_1S_1^* - S_2S_2^*)(g_y)(x) = \begin{cases} g_y(x)\ , & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ -g_y(x)\ , & x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$(S_1S_1^* - S_2S_2^*)(g_y)(x) = \begin{cases} g(x,y)\ , & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ -g(x,y)\ , & x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \tag{2.3}$$

olarak elde edilir. Böylece 2.2 ve 2.3 eşitliklerinden,

$$(\varphi_4 \circ i)(e_1) = (\psi_2 \circ \varphi_2)(e_1)$$

olduğu gösterilir. Benzer düşünceyle,

$$(\varphi_4 \circ i)(e_2) = (\psi \circ \varphi_2)(e_2)$$

olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned} (\varphi_4 \circ i)(e_2)(g)(x,y) &= (S_1S_2^* + S_2S_1^* + S_3S_4^* + S_4S_3^*)(g)(x,y) \\ &= (S_1S_2^*)(g)(x,y) + (S_2S_1^*)(g)(x,y) \\ &\quad + (S_3S_4^*)(g)(x,y) + (S_4S_3^*)(g)(x,y) \end{aligned}$$

dir. Bu toplamdaki ifadeler ayrı ayrı açılarak ifade edilirse,

$$\begin{aligned}(S_1S_2^*)(g)(x,y) &= S_1(S_2^*g)(x,y)\\ &= \begin{cases}\sqrt{2}(S_2^*g)(2x,2y)\ , & (x,y)\in[0,\frac{1}{2}]\times[0,\frac{1}{2}]\\ 0\ , & d.d.\end{cases}\\ &= \begin{cases}g(\frac{2x+1}{2},y)\ , & (x,y)\in[0,\frac{1}{2}]\times[0,\frac{1}{2}]\\ 0\ , & d.d.\end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(S_2S_1^*)(g)(x,y) &= S_2(S_1^*g)(x,y)\\ &= \begin{cases}\sqrt{2}(S_1^*g)(2x-1,2y)\ , & (x,y)\in[\frac{1}{2},1]\times[0,\frac{1}{2}]\\ 0\ , & d.d.\end{cases}\\ &= \begin{cases}g(\frac{2x-1}{2},y)\ , & (x,y)\in[\frac{1}{2},1]\times[0,\frac{1}{2}]\\ 0\ , & d.d.\end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(S_3S_4^*)(g)(x,y) &= S_3(S_4^*g)(x,y)\\ &= \begin{cases}\sqrt{2}(S_4^*g)(2x,2y-1)\ , & (x,y)\in[0,\frac{1}{2}]\times[\frac{1}{2},1]\\ 0\ , & d.d.\end{cases}\\ &= \begin{cases}g(\frac{2x+1}{2},y)\ , & (x,y)\in[0,\frac{1}{2}]\times[\frac{1}{2},1]\\ 0\ , & d.d.\end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(S_4S_3^*)(g)(x,y) &= S_4(S_3^*g)(x,y)\\ &= \begin{cases}\sqrt{2}(S_3^*g)(2x-1,2y-1)\ , & (x,y)\in[\frac{1}{2},1]\times[\frac{1}{2},1]\\ 0\ , & d.d.\end{cases}\\ &= \begin{cases}g(\frac{2x-1}{2},y)\ , & (x,y)\in[\frac{1}{2},1]\times[\frac{1}{2},1]\\ 0\ , & d.d.\end{cases}\end{aligned}$$

$$(S_1S_2^*+S_2S_1^*+S_3S_4^*+S_4S_3^*)(g)(x,y) = \begin{cases}g(\frac{2x+1}{2},y)\ , & (x,y)\in[0,\frac{1}{2}]\times[0,\frac{1}{2}]\\ g(\frac{2x-1}{2},y)\ , & (x,y)\in(\frac{1}{2},1]\times[0,\frac{1}{2}]\\ g(\frac{2x+1}{2},y)\ , & (x,y)\in[0,\frac{1}{2}]\times(\frac{1}{2},1]\\ g(\frac{2x-1}{2},y)\ , & (x,y)\in(\frac{1}{2},1]\times(\frac{1}{2},1]\end{cases}$$

$$(S_1S_2^*+S_2S_1^*+S_3S_4^*+S_4S_3^*)(g)(x,y) = \begin{cases}g(\frac{2x+1}{2},y)\ , & x\in[0,\frac{1}{2}]\\ g(\frac{2x-1}{2},y)\ , & x\in(\frac{1}{2},1]\end{cases} \tag{2.4}$$

olarak elde edilir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}(\psi_2 \circ \varphi_2)(e_2)(g)(x,y) &= \psi_2(\varphi_2(e_2))(g)(x,y)\\ &= (\varphi_2(e_2)(g_y)(x)\\ &= (S_1S_2^* + S_2S_1^*)(g_y)(x)\\ &= (S_1S_2^*)(g_y)(x) + (S_2S_1^*)(g_y)(x)\end{aligned}$$

şeklindedir. Bu ifadede de terimler açık olarak yazılacak olursa,

$$\begin{aligned}(S_1S_2^*)(g_y)(x) &= \begin{cases}\sqrt{2}(S_2^*g_y)(2x)\ , & x \in [0,\frac{1}{2}]\\ 0\ , & d.d.\end{cases}\\ &= \begin{cases} g_y(\frac{2x+1}{2})\ , & x \in [0,\frac{1}{2}]\\ 0\ , & d.d.\end{cases}\end{aligned}$$

$$(S_1S_2^*)(g_y)(x) = \begin{cases} g(\frac{2x+1}{2},y)\ , & x \in [0,\frac{1}{2}]\\ 0\ , & d.d.\end{cases}$$

$$\begin{aligned}(S_2S_1^*)(g_y)(x) &= \begin{cases}\sqrt{2}(S_1^*g_y)(2x-1)\ , & x \in [\frac{1}{2},1]\\ 0\ , & d.d.\end{cases}\\ &= \begin{cases} g_y(\frac{2x-1}{2})\ , & x \in [\frac{1}{2},1]\\ 0\ , & d.d.\end{cases}\end{aligned}$$

$$(S_2S_1^*)(g_y)(x) = \begin{cases} g(\frac{2x-1}{2},y)\ , & x \in [\frac{1}{2},1]\\ 0\ , & d.d.\end{cases}$$

olarak hesaplanır. Buradan,

$$(S_1S_2^* + S_2S_1^*)(g_y)(x) = \begin{cases} g(\frac{2x+1}{2},y)\ , & x \in [0,\frac{1}{2}]\\ g(\frac{2x-1}{2},y)\ , & x \in (\frac{1}{2},1]\end{cases} \qquad (2.5)$$

olarak elde edilir. Böylece 2.4 ve 2.5 eşitliklerinden

$$(\varphi_4 \circ i)(e_2) = (\psi_2 \circ \varphi_2)(e_2)$$

eşitliği gösterilmiş olur. Beklentilerimiz doğrultusunda gerçekten $\mathbb{C}l_4$ için veri len temsilin $\mathbb{C}l_2$ üzerine kısıtlanmışının uygun identifikasyon altında $\mathbb{C}l_2$ üzerindeki temsil olduğu gösterilmiştir. Acaba $\mathbb{C}l_6$ için verilen temsil ile $\mathbb{C}l_4$ üzerindeki temsil arasında da bu tarz bir ilişki var mıdır? Eğer her adımda böyle bir ilişki olduğu görülürse amaç sonsuz boyutlu Clifford cebri için bir temsil bulmak olduğundan, bulunacak o temsilin de her sonlu adıma kısıtlamışı olan temsilin sonlu boyutlu Clifford cebri üzerinde var olan temsil olmasını beklemek yerinde olacaktır.

Benzer ilişkinin genel durumda da ilerletilip ilerletilemeyeceğini görmek için bir de $\mathbb{C}l_6$ ile $\mathbb{C}l_4$ cebirleri arasındaki ilişkiyi inceleyelim. $\mathbb{C}l_6$ nın $L^2([0,1]^3)$ uzayı üzerindeki temsilini tamamen $\mathbb{C}l_2$ ve $\mathbb{C}l_4$ de olduğu gibi matris izomorfizmleri yardımıyla $\mathbb{C}l_6 \cong \mathbb{C}(8)$ özelliğini kullanarak,

$$\begin{aligned}
\varphi_6 : \mathbb{C}l_6 &\longrightarrow B(L^2([0,1]\times[0,1]\times[0,1])),\\
e_1 &\longmapsto S_1S_1^* - S_2S_2^* + S_3S_3^* - S_4S_4^* + S_5S_5^* - S_6S_6^* + S_7S_7^* - S_8S_8^*,\\
e_2 &\longmapsto S_1S_2^* + S_2S_1^* + S_3S_4^* + S_4S_3^* + S_5S_6^* + S_6S_5^* + S_7S_8^* + S_8S_7^*,\\
e_3 &\longmapsto i(S_1S_2^* - S_2S_1^* - S_3S_4^* + S_4S_3^* + S_5S_6^* - S_6S_5^* - S_7S_8^* + S_8S_7^*),\\
e_4 &\longmapsto i(S_1S_4^* - S_2S_3^* + S_3S_2^* - S_4S_1^* + S_5S_8^* - S_6S_7^* + S_7S_6^* - S_8S_5^*),\\
e_5 &\longmapsto -S_1S_4^* + S_2S_3^* + S_3S_2^* - S_4S_1^* + S_5S_8^* - S_6S_7^* - S_7S_6^* + S_8S_5^*,\\
e_6 &\longmapsto -S_1S_8^* + S_2S_7^* + S_3S_6^* - S_4S_5^* - S_5S_4^* + S_6S_3^* + S_7S_2^* - S_8S_1^*
\end{aligned}$$

temsilini elde edebiliriz. Burada da ilgili dönüşümler sırasıyla,

$$S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8 : L^2([0,1]^3) \longrightarrow L^2([0,1]^3)$$

olmak üzere bir $f \in L^2([0,1]^3)$ için,

$$(S_1f)(x,y,z) = \begin{cases} \sqrt{2}f(2x,2y,2z)\ , & (x,y,z) \in [0,\frac{1}{2}]\times[0,\frac{1}{2}]\times[0,\frac{1}{2}] \\ 0\ , & d.d. \end{cases},$$

$$(S_2f)(x,y,z) = \begin{cases} \sqrt{2}f(2x-1,2y,2z)\ , & (x,y,z) \in [\frac{1}{2},1]\times[0,\frac{1}{2}]\times[0,\frac{1}{2}] \\ 0\ , & d.d. \end{cases},$$

$$(S_3f)(x,y,z) = \begin{cases} \sqrt{2}f(2x,2y-1,2z)\ , & (x,y,z) \in [0,\frac{1}{2}]\times[\frac{1}{2},1]\times[0,\frac{1}{2}] \\ 0\ , & d.d. \end{cases},$$

$$(S_4f)(x,y,z) = \begin{cases} \sqrt{2}f(2x-1,2y-1,2z)\ , & (x,y,z) \in [\frac{1}{2},1]\times[\frac{1}{2},1]\times[0,\frac{1}{2}] \\ 0\ , & d.d. \end{cases},$$

$$(S_5f)(x,y,z) = \begin{cases} \sqrt{2}f(2x,2y,2z-1)\ , & (x,y,z) \in [0,\frac{1}{2}]\times[0,\frac{1}{2}]\times[\frac{1}{2},1] \\ 0\ , & d.d. \end{cases},$$

$$(S_6f)(x,y,z) = \begin{cases} \sqrt{2}f(2x-1,2y,2z-1)\ , & (x,y,z) \in [\frac{1}{2},1]\times[0,\frac{1}{2}]\times[\frac{1}{2},1] \\ 0\ , & d.d. \end{cases},$$

$$(S_7 f)(x,y,z) = \begin{cases} \sqrt{2} f(2x, 2y-1, 2z-1) \ , & (x,y,z) \in [0,\frac{1}{2}] \times [\frac{1}{2},1] \times [\frac{1}{2},1] \\ 0 \ , & d.d. \end{cases} ,$$

$$(S_8 f)(x,y,z) = \begin{cases} \sqrt{2} f(2x-1, 2y-1, 2z-1) \ , & (x,y,z) \in [\frac{1}{2},1] \times [\frac{1}{2},1] \times [\frac{1}{2},1] \\ 0 \ , & d.d. \end{cases}$$

olarak tanımlanmaktadır. Bu dönüşümlerin adjointleri ise,

$$\begin{aligned} (S_1^* f)(x,y,z) &= \tfrac{\sqrt{2}}{2} f(\tfrac{x}{2}, \tfrac{y}{2}, \tfrac{z}{2}), (S_2^* f)(x,y,z) = \tfrac{\sqrt{2}}{2} f(\tfrac{x+1}{2}, \tfrac{y}{2}, \tfrac{z}{2}), \\ (S_3^* f)(x,y,z) &= \tfrac{\sqrt{2}}{2} f(\tfrac{x}{2}, \tfrac{y+1}{2}, \tfrac{z}{2}), (S_4^* f)(x,y,z) = \tfrac{\sqrt{2}}{2} f(\tfrac{x+1}{2}, \tfrac{y+1}{2}, \tfrac{z}{2}), \\ (S_5^* f)(x,y,z) &= \tfrac{\sqrt{2}}{2} f(\tfrac{x}{2}, \tfrac{y}{2}, \tfrac{z+1}{2}), (S_6^* f)(x,y,z) = \tfrac{\sqrt{2}}{2} f(\tfrac{x+1}{2}, \tfrac{y}{2}, \tfrac{z+1}{2}), \\ (S_7^* f)(x,y,z) &= \tfrac{\sqrt{2}}{2} f(\tfrac{x}{2}, \tfrac{y+1}{2}, \tfrac{z+1}{2}), (S_8^* f)(x,y,z) = \tfrac{\sqrt{2}}{2} f(\tfrac{x+1}{2}, \tfrac{y+1}{2}, \tfrac{z+1}{2}) \end{aligned}$$

olarak tanımlanmaktadır. Bu durumda da bir önceki aşamadakine benzer olarak $B(L^2([0,1]\times[0,1])$ uzayı ile $B(L^2([0,1]\times[0,1]\times[0,1]))$ uzayı arasındaki uygun bir identifikasyonla $\mathbb{C}l_6$ için elde edilen φ_6 temsilin $\mathbb{C}l_6$ içinde doğal olarak gömülmüş bulunan $\mathbb{C}l_4$ üzerine kısıtlanmışı olan temsilin $\mathbb{C}l_4$ üzerindeki φ_4 temsili vermesini isteyebiliriz. Yani uygun bir

$$\psi_4 : B(L^2([0,1]^2)) \to B(L^2([0,1]^3))$$

dönüşümü ile,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}l_4 & \xrightarrow{\varphi_4} & B(L^2([0,1]^2)) \\ i \downarrow & & \downarrow \psi_4 \\ \mathbb{C}l_6 & \xrightarrow{\varphi_6} & B(L^2([0,1]^3)) \end{array} \tag{2.6}$$

diyagramının komutatif olmasını isteyebiliriz. $T \in B(L^2([0,1]^2))$ olmak üzere ψ_4 dönüşümü,

$$\begin{aligned} \psi_4 T : \quad L^2([0,1]^2) &\to L^2([0,1]^3) \\ g \qquad &\mapsto (\psi_4 T)(g)(x,y,z) = (T g_z)(x,y) \end{aligned}$$

olarak tanımlandığı takdirde 1-1 bir cebir homomorfizmasıdır ve 2.6 diyagramı değişmelidir.

Özel durumlarda $\mathbb{C}l_2$, $\mathbb{C}l_4$ ve $\mathbb{C}l_6$ cebirleri için açık olarak verilen bu temsiller genel durumda $\mathbb{C}l_{2n}$ cebri için $L^2([0,1]^n)$ uzayı üzerinde benzer argümanla şu şekilde inşaa edilebilmektedir:
Öncelikle,

$$[0,1]^n = \underbrace{[0,1] \times \cdots \times [0,1]}_{\text{n-1 tane}}$$

kümesini bir yinelemeli fonksiyon sisteminin çekicisi olarak yazacağız.

$$w_0(x) = \frac{1}{2}x$$

$$w_1(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

olsun. Bu durumda,

$$[0,1] = [0,\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2},1] = w_0[0,1] \cup w_1[0,1]$$

$$\begin{aligned} [0,1]\times[0,1] &= [0,\tfrac{1}{2}]\times[0,\tfrac{1}{2}] \cup [\tfrac{1}{2},1]\times[0,\tfrac{1}{2}] \cup [0,\tfrac{1}{2}]\times[\tfrac{1}{2},1] \cup [\tfrac{1}{2},1]\times[\tfrac{1}{2},1] \\ &= (w_0[0,1]\times w_0[0,1]) \cup (w_1[0,1]\times w_0[0,1]) \cup (w_0[0,1]\times w_1[0,1]) \\ &\quad \cup (w_1[0,1]\times w_1[0,1]) \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Ya da daha da sadeleştirmek için

$$\begin{aligned} \sigma_{(00)_2}(x_1,x_2) = \sigma_0(x_1,x_2) &:= (w_0(x_1), w_0(x_2)) \\ \sigma_{(01)_2}(x_1,x_2) = \sigma_1(x_1,x_2) &:= (w_1(x_1), w_0(x_2)) \\ \sigma_{(10)_2}(x_1,x_2) = \sigma_2(x_1,x_2) &:= (w_0(x_1), w_1(x_2)) \\ \sigma_{(11)_2}(x_1,x_2) = \sigma_3(x_1,x_2) &:= (w_1(x_1), w_1(x_2)) \end{aligned}$$

olmak üzere,

$[0,1]\times[0,1] = \sigma_0([0,1]\times[0,1]) \bigcup \sigma_1([0,1]\times[0,1]) \bigcup \sigma_2([0,1]\times[0,1]) \bigcup \sigma_3([0,1]\times[0,1])$ olarak elde edilir. Genel durumda ise $i_1, i_2, \cdots, i_n \in \{0,1\}$ ve

$$\sigma_{(i_n i_{n-1}\cdots i_1)_2}(x_1,x_2,\cdots,x_n) = (w_{i_1}(x_1), w_{i_2}(x_2), \cdots, w_{i_n}(x_n))$$

olmak üzere

$$[0,1]^n = \bigcup_{k=1}^{2^n} \sigma_k[0,1]^n$$

olarak elde edilir. Tanımlanan büzülme dönüşümleri yardımıyla temsil inşaasında kullanılacak operatörler şu şekilde tanımlanmaktadır:

$$\begin{aligned} (S_i f)(x) &= \begin{cases} \sqrt{2} f(\sigma_i^{-1}(x)) \ , & x \in \sigma_i([0,1]^n) \\ 0 \ , & d.d. \end{cases} \\ (S_i^* f)(x) &= \frac{\sqrt{2}}{2} f(\sigma_i(x)) \end{aligned}$$

Tanımlanan bu operatörler yardımıyla, $\mathbb{C}l_{2n}$ nin $L^2([0,1]^n)$ uzayı üzerinde temsili, $\mathbb{C}l_{2n} \cong \mathbb{C}(2^n)$ izomorfizmi ile E_{ij}, $1 \leq i,j \leq 2^n$ $\mathbb{C}(2^n)$ in standart taban matrislerini göstermek üzere,

$$\begin{aligned} \pi_{2n} : \mathbb{C}(2^n) &\rightarrow B(L^2([0,1]^n)) \\ E_{ij} &\mapsto S_i S_j^* \end{aligned}$$

homomorfizminin bileşkesi alınarak verilmektedir. Daha da açık bir ifade ile,

$$\begin{aligned} \mathbb{C}l_{n+2} &\rightarrow \mathbb{C}l_n \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(2) \\ e_1 &\mapsto 1 \otimes U \\ e_2 &\mapsto 1 \otimes V \\ e_j &\mapsto ie_{j-2} \otimes U.V \end{aligned}$$

izomorfizmasını kullanarak, $W = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \rho_{2n} : \mathbb{C}l_{2n} &\rightarrow \mathbb{C}(2^n) \\ e_1 &\mapsto \underbrace{I_2 \otimes I_2 \otimes \cdots \otimes I_2}_{\text{n-1 tane}} \otimes U \\ e_2 &\mapsto \underbrace{I_2 \otimes I_2 \otimes \cdots \otimes I_2}_{\text{n-1 tane}} \otimes V \\ e_{2k-1} &\mapsto \underbrace{I_2 \otimes \cdots \otimes I_2}_{\text{n-k tane}} \otimes U \otimes \underbrace{W \otimes \cdots \otimes W}_{\text{k-1 tane}} \\ e_{2k} &\mapsto \underbrace{I_2 \otimes \cdots \otimes I_2}_{\text{n-k tane}} \otimes V \otimes \underbrace{W \otimes \cdots \otimes W}_{\text{k-1 tane}} \end{aligned}$$

dönüşümünün bir izomorfizm olduğu tümevarımla gösterilebilir. Bu durumda

$$\varphi_{2n} := \pi_{2n} \circ \rho_{2n} : \mathbb{C}l_{2n} \rightarrow B(L^2([0,1]^n))$$

dönüşümü $\mathbb{C}l_{2n}$ cebri için bir temsil oluşturmaktadır. Özel durumda $\mathbb{C}l_2$ ile $\mathbb{C}l_4$ ün temsilleri arasındaki ve $\mathbb{C}l_4$ ile de $\mathbb{C}l_6$ cebirlerinin temsilleri arasındaki ilişkinin sezgilerimiz doğrultusunda genel durumda $\mathbb{C}l_{2n}$ ile $\mathbb{C}l_{2n+2}$ cebirleri için de geçerli olduğunu şimdi ispatlayalım. Yani,

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}l_{2n} \arrow[r, "\varphi_{2n}"] \arrow[d, "i"'] & B(L^2[0,1]) \arrow[d, "\psi_{2n}"] \\ \mathbb{C}l_{2n+2} \arrow[r, "\varphi_{2n+2}"] & B(L^2([0,1]^2)) \end{tikzcd} \tag{2.7}$$

diyagramı komutatif olacak şekilde bir ψ_{2n} dönüşümünün var olduğunu gösterelim. Bunun için öncelikle $\mathbb{C}l_{2n+2}$ cebrinin $L^2([0,1]^{n+1})$ üzerindeki temsilinde kullanacağımız büzülme dönüşümlerini $\tilde{\sigma}_k$, temsil inşaasında kullanacağımız operatörleri ise $\tilde{S}_i$ ve $\tilde{S}_i^*$ olarak gösterelim. Bu durumda $T \in B(L^2([0,1]^n))$ olmak üzere,

$$\begin{array}{rrcl} \psi_{2n}T: & L^2([0,1]^{n+1}) & \longrightarrow & L^2([0,1]^{n+1}) \\ & g & \longmapsto & (\psi_{2n}T)(g)(x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}) \\ & & & = (Tg_{x_{n+1}})(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{array}$$

olarak tanımlandığı takdirde 2.7 diyagramının komutatif olduğunu gösterelim. Bu diyagramın değişmeli olduğunu iki aşamada göreceğiz.

$$M_{2n} : \mathbb{C}(2^n) \to \mathbb{C}(2^{n+1}) \text{ , } A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

ve

$$\pi_{2n} : \mathbb{C}(2^n) \to B(L^2([0,1]^n), E_{ij} \longmapsto S_i S_j^*$$

olmak üzere, sırasıyla aşağıdaki diyagramların değişmeli olduğunu göreceğiz.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}l_{2n} \arrow[r, "\rho_{2n}"] \arrow[d, "i"'] & \mathbb{C}(2^n) \arrow[d, "M_{2n}"] \\ \mathbb{C}l_{2n+2} \arrow[r, "\rho_{2n+2}"] & \mathbb{C}(2^{n+1}) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{C}(2^n) \arrow[r, "\pi_{2n}"] \arrow[d, "M_{2n}"'] & B(L^2([0,1]^n) \arrow[d, "\psi_{2n}"] \\ \mathbb{C}(2^{n+1}) \arrow[r, "\pi_{2n+2}"] & B(L^2([0,1]^{n+1})) \end{tikzcd}$$

Herhangi bir $k \geq 1$ için,

$$\rho_{2n}(e_{2k-1}) = \underbrace{I_2 \otimes \cdots \otimes I_2}_{\text{n-k tane}} \otimes U \otimes \underbrace{W \otimes \cdots \otimes W}_{\text{k-1 tane}}$$

ve

$$\begin{aligned} \rho_{2n+2}(e_{2k-1}) &= \underbrace{I_2 \otimes \cdots \otimes I_2}_{\text{n+1-k tane}} \otimes U \otimes \underbrace{W \otimes \cdots \otimes W}_{\text{k-1 tane}}) \\ &= I_2 \times \underbrace{I_2 \otimes \cdots \otimes I_2}_{\text{n-k tane}} \otimes U \otimes \underbrace{W \otimes \cdots \otimes W}_{\text{k-1 tane}} \\ &= I_2 \otimes \rho_{2n}(e_{2k-1}) \end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde $\rho_{2n+2}(e_{2k}) = I_2 \otimes \rho_{2n}(e_{2k})$ dır. Dolayısıyla,

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}l_{2n} \arrow[r, "\rho_{2n}"] \arrow[d, "i"'] & \mathbb{C}(2^n) \arrow[d, "M_{2n}"] \\ \mathbb{C}l_{2n+2} \arrow[r, "\rho_{2n+2}"] & \mathbb{C}(2^{n+1}) \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir. Şimdi

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}(2^n) & \xrightarrow{\pi_{2n}} & B(L^2([0,1]^n) \\ {\scriptstyle M_{2n}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \psi_{2n}} \\ \mathbb{C}(2^{n+1}) & \xrightarrow{\pi_{2n+2}} & B(L^2([0,1]^{n+1})) \end{array}$$

diyagramının değişmeli olduğunu görelim. Bunun için

$$\psi_{2n}(S_iS_j^*) = \widetilde{S}_i\widetilde{S}_j^* + \widetilde{S}_{i+2^n}\widetilde{S}_{j+2^n}^*$$

olduğunu göstermek yeterli olacaktır. $i = (i_n i_{n-1} \cdots \imath_1)_2$, $j = (j_n j_{n-1} \cdots \jmath_1)_2$ ve $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ olmak üzere,

$$\psi_{2n}(S_iS_j^*)(g)(x, x_{n+1}) = (\widetilde{S}_i\widetilde{S}_j^* + \widetilde{S}_{i+2^n}\widetilde{S}_{j+2^n}^*)(g)(x, x_{n+1})$$

olduğunu görmeliyiz.

$$\begin{aligned} \psi_{2n}(S_iS_j^*)(g)(x, x_{n+1}) &= (S_iS_j^*)(g_{x_{n+1}})(x) \\ &= \begin{cases} \sqrt{2}(S_j^*g_{x_{n+1}})(\sigma_i^{-1}(x)), & x \in \sigma_i([0,1]^n) \\ 0, & d.d. \end{cases} \\ \psi_{2n}(S_iS_j^*)(g)(x, x_{n+1}) &= \begin{cases} g_{x_{n+1}}(\sigma_j\sigma_i^{-1}(x)), & x \in \sigma_i([0,1]^n) \\ 0, & d.d. \end{cases} \end{aligned} \tag{2.8}$$

dır. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} (\widetilde{S}_i\widetilde{S}_j^* + \widetilde{S}_{i+2^n}\widetilde{S}_{j+2^n}^*)(g)(x, x_{n+1}) &= (\widetilde{S}_i\widetilde{S}_j^*)(g)(x, x_{n+1}) + (\widetilde{S}_{i+2^n}\widetilde{S}_{j+2^n}^*)(g)(x, x_{n+1}) \\ &= \begin{cases} \sqrt{2}(\widetilde{S}_j^*g)(\widetilde{\sigma}_i^{-1}(x, x_{n+1})), & (x, x_{n+1}) \in \widetilde{\sigma}_i([0,1]^{n+1}) \\ 0, & d.d. \end{cases} \\ &+ \begin{cases} (\widetilde{S}_{j+2^n}^*g)(\widetilde{\sigma}_{i+2^n}^{-1}(x, x_{n+1})), & (x, x_{n+1}) \in \widetilde{\sigma}_{i+2^n}([0,1]^{n+1}) \\ 0, & d.d. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\widetilde{S}_i\widetilde{S}_j^* + \widetilde{S}_{i+2^n}\widetilde{S}_{j+2^n}^*)(g)(x, y) &= \begin{cases} g(\widetilde{\sigma}_j\widetilde{\sigma}_i^{-1}(x, x_{n+1})), & (x, x_{n+1}) \in \widetilde{\sigma}_i([0,1]^{n+1}) \\ 0, & d.d. \end{cases} \\ &+ \begin{cases} g(\widetilde{\sigma}_{j+2^n}\widetilde{\sigma}_{i+2^n}^{-1}(x, x_{n+1})), & (x, x_{n+1}) \in \widetilde{\sigma}_{i+2^n}([0,1]^{n+1}) \\ 0, & d.d. \end{cases} \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

$$i = (i_n \cdots i_1)_2 = (0 i_n \cdots i_1)_2$$

olduğundan,

$$\widetilde{\sigma}_i(x, x_{n+1}) = (\sigma_i(x), w_0(x_{n+1}))$$

ve

$$i + 2^n = (1 i_n \cdots i_1)_2$$

olduğundan,

$$\widetilde{\sigma}_{i+2^n}(x, x_{n+1}) = (\sigma_i(x), w_1(x_{n+1}))$$

olarak yazılabilir. Bunların bir sonucu olarak,

$$\widetilde{\sigma}_i([0,1]^{n+1}) = \sigma_i([0,1]^n) \times [0, \frac{1}{2}]$$

ve

$$\widetilde{\sigma}_{i+2^n}([0,1]^{n+1}) = \sigma_i([0,1]^n) \times [\frac{1}{2}, 1]$$

olarak yazılabilir. Böylece,

$$(\widetilde{S}_i \widetilde{S}_j^* + \widetilde{S}_{i+2^n} \widetilde{S}_{j+2^n}^*)(g)(x, x_{n+1}) = \begin{cases} g(\widetilde{\sigma}_j(\sigma_i^{-1}(x), 2x_{n+1})), & (x, x_{n+1}) \in \sigma_i([0,1]^n) \times [0, \frac{1}{2}] \\ 0, & d.d. \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} g(\widetilde{\sigma}_{j+2^n}(\sigma_i^{-1}(x), \frac{2x_{n+1}-1}{2})), & (x, x_{n+1}) \in \sigma_i([0,1]^n) \times [\frac{1}{2}, 1] \\ 0, & d.d. \end{cases}$$

$$(\widetilde{S}_i \widetilde{S}_j^* + \widetilde{S}_{i+2^n} \widetilde{S}_{j+2^n}^*)(g)(x, x_{n+1}) = \begin{cases} g(\sigma_j \sigma_i^{-1}(x), x_{n+1})), & (x, x_{n+1}) \in \sigma_i([0,1]^n) \times [0, \frac{1}{2}] \\ 0, & d.d. \end{cases} + \begin{cases} g(\sigma_j \sigma_i^{-1}(x), x_{n+1})), & (x, x_{n+1}) \in \sigma_i([0,1]^n) \times [\frac{1}{2}, 1] \\ 0, & d.d. \end{cases}$$

$$(\widetilde{S}_i \widetilde{S}_j^* + \widetilde{S}_{i+2^n} \widetilde{S}_{j+2^n}^*)(g)(x, x_{n+1}) = \begin{cases} g(\sigma_j \sigma_i^{-1}(x), x_{n+1})), & x \in \sigma_i([0,1]^n) \\ 0, & d.d. \end{cases}$$

$$(\widetilde{S}_i \widetilde{S}_j^* + \widetilde{S}_{i+2^n} \widetilde{S}_{j+2^n}^*)(g)(x, x_{n+1}) = \begin{cases} g_{x_{n+1}}(\sigma_j \sigma_i^{-1}(x)) & , \quad x \in \sigma_i([0,1]^n) \\ 0 & , \quad d.d. \end{cases} \tag{2.9}$$

olarak elde edilir. 2.8 ve 2.9 eşitliklerinden istenilen özellik sağlanmış olur. Böylece her çift boyutlu kompleks Clifford cebri üzerinde elde edilen temsilin daha düşük boyutlu Clifford cebri üzerine kısıtlandığında uygun bir identifikasyon altında o düşük boyutlu cebir üzerindeki temsille tırnak içinde aynı temsili oluşturacak şekilde içiçe geçen temsiller elde etmiş olmaktayız. Bu ise akla şu soruyu getirmektedir. Acaba limit durumunda sonsuz boyutlu Clifford cebrinin sonsuz küp üzerinde bir temsili, var olan temsiller zincirinin bir limiti olarak elde edilebilir mi? Aşağıdaki teorem bize bu sorunun cevabının mümkün olmadığını söylemektedir. Sonsuz boyutlu ayrılabilir normlu uzay üzerinde trivial ölçümden (sıfır ölçümü) başka Lebesgue ölçümü olmadığından dolayı (sonsuz küp üzerinde de Lebesgue ölçümü yoktur), sonsuz boyutlu kompleks Clifford cebirleri için bu zincir yardımıyla bir temsil vermek mümkün değildir. Şimdi bu teoremi ifade ve ispat edelim.

Teorem 2.1. $(X, \|.\|)$ *sonsuz boyutlu ayrılabilir bir normlu uzay olsun. Bu durumda* X *üzerinde yerel sonlu ve öteleme altında invaryant kalma özelliğini sağlayan Borel ölçümü trivial ölçümdür yani sıfır ölçümüdür.*

Kanıt. $(X, \|.\|)$ normlu uzayı sonsuz boyutlu ve ayrılabilir uzay olsun. μ, $(X, \|.\|)$ normlu uzayı üzerinde yerel sonlu ve öteleme altında değişmez kalan bir ölçüm olsun. Ölçümün yerel sonluluğundan dolayı $\forall x \in X$ için $\exists N_x$ komşuluğu vardır öyle ki $\mu(N_x) < \infty$ dır. Özel olarak $0 \in X$ için de $\exists N_0$ vardır öyle ki $\mu(N_0) < \infty$ dır. Komşuluk tanımından dolayı $\exists \delta > 0$ vardır öyle ki $B(0, \delta) \subseteq N_0$ dır. O halde ölçümün sağlaması gereken koşullardan biri olarak $\mu(B(0, \delta)) < \mu(N_0) < \infty$ dir. Sonuç olarak diyebiliriz ki X içinde ölçümü sonlu olan en az bir δ yuvarı vardır. X sonsuz boyutlu olduğundan bu δ yuvar içerisinde kalan ve birbirine değmeyen yuvarlar dizisini şu şekilde oluşturabiliriz:

$(X, \|.\|)$ sonsuz boyutlu olduğundan sonlu tane lineer bağımsız vektörler tarafından gerilemez. Bu durumda $e_1, e_2, \cdots, e_n$ vektörleri X içinde lineer bağımsız vektörler olmak üzere,

$$X \neq < \{e_1, e_2, \cdots, e_n\} >$$

dır. $A = < \{e_1, e_2, \cdots, e_n\} >$ olsun. Bu durumda X içinde öyle bir x_0 vektörü vardır ki $x_0 \notin A$ dır. A sonlu boyutlu olduğundan kapalıdır. (Normlu uzayın sonlu boyutlu her alt uzayı kapalıdır.)

$$d_0 = \inf \{\|x_0 - x\| \mid x \in A\}$$

olmak üzere $d_0 > 0$ dır. Şimdi A içinde bir y elemanı seçelim öyle ki y nin x_0 a olan uzaklığı d_0 a istenildiği kadar yakın olsun.

$$z = \frac{1}{\|x_0 - y\|}(x_0 - y)$$

ve

$$a_1 = (\delta/2 + \varepsilon)z$$

olsun. $\omega \in A$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\|\omega - a_1\| = \|\omega - \left(\frac{\delta}{2} + \varepsilon\right) z\| &= \|\omega - \left(\frac{\delta}{2} + \varepsilon\right) \frac{1}{\|x_0 - y\|}(x_0 - y)\| \\ &= \frac{\frac{\delta}{2} + \varepsilon}{\|x_0 - y\|} \left\| \frac{\|x_0 - y\|}{\frac{\delta}{2} + \varepsilon}\ \omega - x_0 + y \right\|\end{aligned}$$

şeklinde düzenleyelim. Burada dikkat edecek olursak,

$$\frac{\|x_0 - y\|}{\frac{\delta}{2} + \varepsilon}\ \omega \quad \text{ve } y \in A$$

olduğundan y elemanını uygun şekilde seçerek ,

$$\|\omega - a_1\| = \frac{\frac{\delta}{2} + \varepsilon}{\|x_0 - y\|} \left\| \left(\frac{\|x_0 - y\|}{\frac{\delta}{2} + \varepsilon} \right) \omega - x_0 + y \right\| \geq \frac{\frac{\delta}{2} + \varepsilon}{\|x_0 - y\|} d_0 \geq \frac{\delta}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

eşitsizliğini elde edebiliriz. Benzer düşünceyle

$$X \neq < \{a_1, e_1, e_2, \cdots, e_n\} >$$

olduğunu kullanarak

$$\|a_2\| = \delta/2 + \varepsilon \text{ ve } \|a_1 - a_2\| \geq \delta/2 + \varepsilon/2$$

olacak şekilde $a_2 \in X$ bulabiliriz. Bu düşünceyi ilerleterek $\forall i \in \mathbb{N}$ için

$$\|a_i\| = \frac{\delta}{2} + \varepsilon \text{ ve } \|a_i - a_j\| \geq \delta/2 + \varepsilon/2$$

olacak şekilde X içinde $\{a_1, a_2, \cdots\}$ dizisi bulabiliriz. $\forall i \in \mathbb{N}$ için $\varepsilon < \delta/2$ seçilirse, $B(a_i, \delta/4) \subseteq B(0, \delta)$ sağlanır. Ayrıca

$$\|a_i - a_j\| \geq \delta/2 + \varepsilon/2$$

olduğundan,

$$B(a_i, \delta/4) \cap B(a_j, \delta/4) = \emptyset$$

dir. Aksi halde

$$B(a_i, \delta/4) \cap B(a_j, \delta/4) \neq \emptyset$$

olsaydı $\exists\ v \in B(a_i, \delta/4)$ ve $v \in B(a_j, \delta/4)$ olurdu. Bu durumda

$$\|v - a_i\| \leq \delta/4 \ \text{ ve } \ \|v - a_j\| \leq \delta/4$$

olacağından,

$$\|a_i - a_j\| \leq \|v - a_i\| + \|v - a_j\| \leq \delta/2$$

elde edilirdi ki bu ifade $\|a_i - a_j\| \geq \delta/2 + \varepsilon/2$ oluşuyla çelişirdi. μ öteleme altında değişmez olduğundan $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\mu(B(a_1, \delta/4)) = \mu((B(a_2, \delta/4)) = \cdots = c$$

dir. Diğer taraftan,

$$\mu(\underset{i \in \mathbb{N}}{\cup} B(a_i, \delta/4)) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(B(a_i, \delta/4)) = \sum_{i \in \mathbb{N}} c < \mu(B(0, \delta)) < \infty$$

olduğundan $c = 0$ sonucunu elde ederiz. Buradan bütün $\delta/4$ yarıçaplı yuvarların ölçümünün sıfır olduğunu söyleyebiliriz. X ayrılabilir uzay olduğundan $\exists B \subseteq X$ vardır öyle ki B sayılabilirdir ve $\bar{B} = X$ dir. $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots\}$ olsun. Bu durumda $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B(b_n, \delta/4)$ olduğunu görelim. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B(b_n, \delta/4) \subseteq X$ olduğu açıktır. Ters kapsamayı göstermek için keyfi $x \in X$ alalım. $X = \bar{B}$ olduğundan $x \in \bar{B}$ dir. $\varepsilon = \delta/4$ için $B(x, \varepsilon) \cap B \neq \emptyset$ dir. O halde $\exists\ b_{i_0} \in B$ vardır öyle ki $b_{i_0} \in B(x, \delta/4)$ dır. O halde $x \in B(b_{i_0}, \delta/4)$ dir. Böylece $X \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B(b_n, \delta/4)$ olduğu da gösterilerek her iki kapsamadan küme eşitliği gösterilmiş olur. Diğer taraftan da ölçümün öteleme altında değişmezliğini kullanarak tüm $\delta/4$ yarıçaplı yuvarların ölçümünün sıfır olduğunu göstermiştik. O halde $\mu(X) = 0$ dır. Yani ölçüm sıfır ölçümüdür. $\square$

2.2 Sonlu Boyutlu Kompleks Clifford Cebirlerinin Matris İzomorfizmleri Yardımıyla $L^2(\mathcal{K})$ Üzerinde Temsilinin Elde Edilmesi

Önceki bölümde $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\mathbb{C}l_{2n}$ kompleks Clifford cebirlerinin $L^2([0,1]^n)$ uzayı üzerinde temsilleri elde edilmiştir. Ayrıca $\mathbb{C}l_{2n+2}$ cebrinin

$L^2([0,1]^{n+1})$ üzerindeki temsili, $\mathbb{C}l_{2n+2}$ nin bir alt cebri olan $\mathbb{C}l_{2n}$ cebri üzerine kısıtlandığı takdirde, uygun identifikasyon altında $\mathbb{C}l_{2n}$ cebrinin $L^2([0,1]^n)$ üzerindeki temsili olduğu gösterilmiştir. Bunun bir sonucu olarak "sonsuz boyutlu Clifford cebrinin sonsuz küp üzerinde bir temsili, var olan iç içe geçmiş bu temsiller yardımıyla elde edilebilir mi" sorusuna cevap aranmıştır. Fakat sonsuz boyutlu ayrılabilir normlu uzay üzerinde Lebesgue ölçümü olmadığından dolayı (sonsuz küp üzerinde de Lebesgue ölçümü yoktur), sonsuz boyutlu Clifford cebri için varolan bu temsiller yardımıyla bir temsil vermek mümkün olmamıştır. Anlaşıldığı üzere burada problemin kaynağı Clifford cebrinin boyutu değiştikçe temsil uzayının da değişmesidir. O halde eğer her boyuttaki Clifford cebri için temsil uzayı değişmeden sabit kalarak temsiller inşaa edilirse sonsuz boyutlu Clifford cebrinin aynı temsil uzayı üzerinde temsilini vermek mümkün kılınabilecektir. Bu düşünceyle bu bölümde her bir sonlu ve çift boyutlu kompleks Clifford cebirleri aynı temsil uzayı üzerinde temsil edilerek sonsuz boyutlu Clifford cebri için de bir temsil elde edilmiştir. Şimdi bu temsili oluşturmaya çalışalım.

$\omega_0, \omega_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ büzülme dönüşümleri olmak üzere $\{ \mathbb{R}^n; \omega_0,\ \omega_1 \}$ yinelemeli fonksiyon sisteminin çekicisi $\mathcal{K}$ olsun. Bu takdirde,

$$\mathcal{K} = \omega_0(\mathcal{K}) \cup \omega_1(\mathcal{K})$$

dir. $L^2\mathcal{K}$, $\mathcal{K}$ nın Hausdorff boyutu d olmak üzere, $\mathcal{K}$ üzerinde d boyutlu Hausdorff ölçümüne göre karesi integre edilebilen kompleks değerli fonksiyonların oluşturduğu vektör uzayı olsun. Ayrıca $\omega_0(\mathcal{K}) \cap \omega_1(\mathcal{K})$ kümesinin ölçümü sıfır olsun. Burada sonlu boyutlu kompleks Clifford cebirlerinin $L^2\mathcal{K}$ sonsuz boyutlu vektör uzayı üzerindeki temsilleri elde edilmeye çalışılmaktadır. Bu temsillerin inşaasında çift boyutlu kompleks Clifford cebirlerinin matris izomorfizmleri kullanılmıştır. Öncelikle $\mathbb{C}(2^n)$ nin $L^2\mathcal{K}$ üzerinde bir temsili verilerek ve $\mathbb{C}l_{2n} \simeq \mathbb{C}(2^n)$ özelliği kullanılarak, çift boyutlu kompleks Clifford cebrinin $L^2\mathcal{K}$ üzerinde temsili bileşke yardımıyla elde edilmiştir. Şimdi $\mathbb{C}(2^n)$ cebrini $L^2\mathcal{K}$ üzerinde temsil etmeye çalışalım.

- $n = 1$ olmak üzere öncelikle $\mathbb{C}l_2$ cebrinin $L^2(\mathcal{K})$ üzerinde temsilini elde edelim. Bunun için de bahsedildiği gibi öncelikle $\mathbb{C}(2)$ matris cebri $L^2(\mathcal{K})$

üzerinde temsil edilecektir.

$$\begin{array}{rccc} \pi_2 : & \mathbb{C}(2) & \longrightarrow & B(L^2(\mathcal{K})) \\ & E_{ij} & \longmapsto & \pi_2(E_{ij}) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} \pi_2(E_{ij}) : & L^2(\mathcal{K}) & \longrightarrow & L^2(\mathcal{K}) \\ & f & \longmapsto & \pi_2(E_{ij})(f)(x) = \begin{cases} f(\omega_{j-1}\omega_{i-1}^{-1}(x)) \ , & x \in \omega_{i-1}(\mathcal{K}) \\ 0 \ , & d.d. \end{cases} \end{array}$$

olarak tanımlanan π_2 dönüşümü bir cebir homomorfizmasıdır. Bunu göstermek için tabanlar üzerinde tanımlı bu dönüşüm lineer genişletildiğinden dolayı lineerliği kontrol etmeye gerek yoktur. Dolayısıyla sadece üreteç elemanları için

$$\pi_2(E_{ij}E_{kl}) = \pi_2(E_{ij})\psi_2(E_{kl})$$

olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

$$\psi_2(E_{ij}E_{kl}) = \psi_2(\delta_{jk}E_{il}) = \begin{cases} \psi_2(E_{il}) \ , & j = k \\ 0 \ , & d.d. \end{cases}$$

dır. Diğer taraftan,

$$\psi_2(E_{ij})(\psi_2(E_{kl})(f))(x) = \begin{cases} (\psi_2(E_{kl})f)(\omega_{j-1}\omega_{i-1}^{-1}(x)) \ , & x \in \omega_{i-1}(\mathcal{K}) \\ 0 \ , & d.d. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \begin{cases} f(\omega_{l-1}\omega_{k-1}^{-1}\omega_{j-1}\omega_{i-1}^{-1}(x)) \ , & \omega_{j-1}\omega_{i-1}^{-1}(x) \in \omega_{k-1}(\mathcal{K}) \\ 0 \ , & d.d. \end{cases} & , \ x \in \omega_{i-1}(\mathcal{K}) \\ 0 \ , & d.d. \end{cases}$$

şeklindedir. Bu ifadeye daha yakından bakacak olursak $j = k$ durumunda $\omega_{j-1}\omega_{i-1}^{-1}(x) \in \omega_{j-1}(\mathcal{K})$ olacağından

$$f(\omega_{l-1}\underbrace{\omega_{j-1}^{-1}\omega_{j-1}}_{I}\omega_{i-1}^{-1}(x)) = f(\omega_{l-1}\omega_{i-1}^{-1}(x))$$

dir. İlgili eşitlik

$$\begin{aligned} \psi_2(E_{ij})(\psi_2(E_{kl})(f))(x) &= \begin{cases} f(\omega_{l-1}\omega_{i-1}^{-1}(x)) \ , & x \in \omega_{i-1}(\mathcal{K}) \\ 0 \ , & d.d. \end{cases} \\ &= \psi_2(E_{il})(f)(x) \end{aligned}$$

dir. $j \neq k$ durumunda ise ölçümü sıfır olan küme dışında $\omega_{j-1}\omega_{i-1}^{-1}(x) \notin \omega_{k-1}(\mathcal{K})$ olacağından

$$\psi_2(E_{ij})(\psi_2(E_{kl})(f))(x) = 0$$

olarak elde edilir. O halde,

$$\begin{aligned} \psi_2(E_{ij})(\psi_2(E_{kl}) &= \begin{cases} \psi_2(E_{il}) \ , & j = k \\ 0 \ , & d.d. \end{cases} \\ &= \psi_2(E_{ij}E_{kl}) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Böylece istenilen eşitlik gösterilmiş olur. Yani $\mathbb{C}(2)$ için bir temsil elde edilmiş olur. Diğer taraftan,

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ , \ V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

olmak üzere,

$$\begin{array}{rccl} \rho_2 : & \mathbb{C}l_2 & \to & \mathbb{C}(2) \\ & e_1 & \mapsto & U \\ & e_2 & \mapsto & V \end{array}$$

olarak tanımlı ρ_2 dönüşümü bir cebir izomorfizmasıdır. Bu durumda

$$\varphi_2 := \pi_2 \circ \rho_2 : \mathbb{C}l_2 \longrightarrow B(L^2(\mathcal{K}))$$

olmak üzere φ_2, $\mathbb{C}l_2$ nin $L^2(\mathcal{K})$ üzerinde bir temsili olarak elde edilir.

- Benzer düşünceyle $\mathbb{C}l_4$ ün $L^2(\mathcal{K})$ üzerinde bir temsili şöyle oluşturulabilir. $\mathbb{C}l_4 \cong \mathbb{C}(4)$ özelliği kullanılarak öncelikli olarak $\mathbb{C}(4)$ matris cebri temsil edilecektir. Bunun için $\mathbb{C}(4)$ matris cebrinin standart taban matrislerini E_{ij}, $1 \leq i, j \leq 4$ olmak üzere

$$\sigma_0 = \omega_0 \circ \omega_0 \ , \quad \sigma_1 = \omega_1 \circ \omega_0 \ ,$$

$$\sigma_2 = \omega_0 \circ \omega_1 \ , \quad \sigma_3 = \omega_1 \circ \omega_1$$

olsun.

$$\begin{array}{rccl} \pi_4 : & \mathbb{C}(4) & \longrightarrow & B(L^2(\mathcal{K})) \\ & E_{ij} & \longmapsto & \pi_4(E_{ij}) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} \pi_4(E_{ij}): & L^2(\mathcal{K}) & \longrightarrow & L^2(\mathcal{K}) \\ & f & \longmapsto & \pi_4(E_{ij})(f)(x) = \begin{cases} f(\sigma_{j-1}\sigma_{i-1}^{-1}(x)) \ , & x \in \sigma_{i-1}(\mathcal{K}) \\ 0 \ , & d.d. \end{cases} \end{array}$$

olarak tanımlansın. π_4 dönüşümünün bir cebir homomorfizması olduğu doğrulanabilir. Diğer taraftan $\rho_4 : \mathbb{C}l_4 \longrightarrow \mathbb{C}(4)$

$$e_1 \ \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = I_2 \otimes U, \ e_2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = I_2 \otimes V$$

$$e_3 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} = U \otimes W, \ e_4 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = V \otimes W$$

olarak tanımlı ρ_4 dönüşümü bir cebir izomorfizmasıdır. Bu durumda

$$\varphi_4 := \pi_4 \circ \rho_4 : \mathbb{C}l_4 \to B(L^2(\mathcal{K}))$$

olmak üzere φ_4, $\mathbb{C}l_4$ cebrinin $L^2(\mathcal{K})$ üzerinde bir temsili olarak elde edilir. Diğer taraftan $\mathbb{C}l_2$, $\mathbb{C}l_4$ ün bir alt cebri olarak düşünülebilir. Bu durumda $\mathbb{C}l_2$ üzerinde biri bu yolla elde edilen φ_2 temsili, diğeri ise $\mathbb{C}l_4$ için elde edilen φ_4 temsilinin $\mathbb{C}l_2$ üzerine kısıtlanmışı olarak elde edilen temsil olmak üzere farklı iki temsil vardır. Acaba bu iki temsil arasında nasıl bir ilişki vardır? Daha da ötesi bu temsiller birbirine eşit midir? Bu özel durumda ispatını burada vermeden bu temsillerin eşit olduğu yani,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}l_2 & \stackrel{\varphi_2}{\to} & B(L^2(\mathcal{K})) \\ i \downarrow & & \downarrow I \\ \mathbb{C}l_4 & \stackrel{\varphi_4}{\to} & B(L^2(\mathcal{K})) \end{array}$$

diyagramının komutatif olduğu gösterilmiştir. (Genel durumda ayrıntılı yapılacaktır.)

- Şimdi en genel durumda $\mathbb{C}l_{2n}$ cebrinin $L^2(\mathcal{K})$ üzerindeki temsilini inşaa edelim. Özel durumda yapılanlara paralel olarak bu durumda da $\mathbb{C}l_{2n} \cong$

$\mathbb{C}(2^n)$ olduğunu kullanarak öncelikle $\mathbb{C}(2^n)$ matris cebrini $L^2\mathcal{K}$ üzerinde temsil etmeye çalışalım. $i_1, i_2, ..., i_n \in \{\ 0,\ 1\ \}$ olmak üzere

$$\omega_{i_1 i_2 ... i_n} = \omega_{i_1} \circ \omega_{i_2} \circ .. \circ \omega_{i_n}$$

olsun. Şimdi indis karmaşasından kurtulmak için ve temsili vermeye yardımcı olmak adına gerekli bazı kısaltmalar yapalım. Bu nedenle, bu aşamada verilen yinelemeli fonksiyon sisteminin büzülmelerini sıraya koyalım. Bize herhangi bir büzülme dönüşümü verildiğinde ona bir numara verelim. Örneğin $\omega_{i_1 i_2 ... i_n}$ büzülme dönüşümünün numarası

$$j = (i_n i_{n-1} ... i_1)_2$$

olsun. Bu yeni sıralamayla büzülmelerimize yeni isim verelim ve onları şöyle indisleyelim. Bu aşamada 2^n tane dönüşüm olacağından yeni büzülmelerimizi, $j = 1, 2, ..., 2^n$ ve $j = (i_n i_{n-1} ... i_1)_2$ olmak üzere,

$$\sigma_j = \omega_{i_1 i_2 ... i_n}$$

olarak gösterelim. E_{ij}, $1 \leq i, j \leq 2^n$, $\mathbb{C}(2^n)$ matris cebrinin standart taban matrisleri olmak üzere,

$$\begin{aligned} \pi_{2n} : \mathbb{C}(2^n) &\rightarrow B(L^2(\mathcal{K})) \\ E_{ij} &\mapsto \pi_{2n}(E_{ij}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_{2n}(E_{ij}) : L^2(\mathcal{K}) &\longrightarrow \text{Ł}^2(\mathcal{K}) \\ f &\longmapsto \pi_{2n}(E_{ij})(f)(x) = \begin{cases} f(\sigma_{j-1}\sigma_{i-1}^{-1}(x))\ , & x \in \sigma_{i-1}(\mathcal{K}) \\ 0\ , & d.d. \end{cases} \end{aligned}$$

olarak tanımlı π_{2n} dönüşümü bir cebir homomorfizmasıdır. Tabanlar üzerinde tanımlı bu dönüşüm lineer genişletileceği için cebir homomorfizması olduğunu göstermek için üreteçler üzerinde çarpımın korunduğunu, yani

$$\pi_{2n}(E_{ij}E_{kl}) = \pi_{2n}(E_{ij})\pi_{2n}(E_{kl})$$

olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

$$\pi_{2n}(E_{ij}E_{kl}) = \pi_{2n}(\delta_{jk}E_{il}) = \begin{cases} \pi_{2n}(E_{il})\ , & j = k \\ 0\ , & d.d. \end{cases}$$

dir. Diğer taraftan,

$$(\pi_{2n}(E_{ij})\pi_{2n}(E_{kl}))\,(f)(x) = \pi_{2n}(E_{ij})\,(\pi_{2n}(E_{kl})(f))\,(x)$$

$$= \begin{cases} (\pi_{2n}(E_{kl})f)(\sigma_{j-1}\sigma_{i-1}^{-1}(x)) \ , & x \in \sigma_{i-1}(\mathcal{K}) \\ 0 \ , & d.d. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \begin{cases} f(\sigma_{l-1}\sigma_{k-1}^{-1}\sigma_{j-1}\sigma_{i-1}^{-1}(x)) \ , & \sigma_{j-1}\sigma_{i-1}^{-1}(x) \in \sigma_{k-1}(\mathcal{K}) \\ 0 \ , & d.d. \end{cases} & , \quad x \in \sigma_{i-1}(\mathcal{K}) \\ 0 \ , & d.d. \end{cases}$$

şeklindedir. Bu ifadeye daha da yakından bakacak olursak, $j = k$ durumunda $\sigma_{j-1}\sigma_{i-1}^{-1}(x) \in \sigma_{j-1}(\mathcal{K})$ olacağından

$$f(\sigma_{l-1}\underbrace{\sigma_{j-1}^{-1}\sigma_{j-1}}_{I}\sigma_{i-1}^{-1}(x)) = f(\sigma_{l-1}\sigma_{i-1}^{-1}(x))$$

dir. O halde,

$$\begin{aligned} \pi_{2n}(E_{ij})(\pi_{2n}(E_{kl})(f))(x) &= \begin{cases} f(\sigma_{l-1}\sigma_{i-1}^{-1}(x)) \ , & x \in \sigma_{i-1}(\mathcal{K}) \\ 0 \ , & d.d. \end{cases} \\ &= \pi_{2n}(E_{il})(f)(x) \end{aligned}$$

dir. $j \neq k$ durumunda ise sıfır ölçümlü küme dışında

$$\sigma_{j-1}\sigma_{i-1}^{-1}(x) \notin \sigma_{k-1}(\mathcal{K})$$

olduğundan

$$\pi_{2n}(E_{ij})(\pi_{2n}(E_{kl})(f))(x) = 0$$

olarak elde edilir. O halde,

$$\begin{aligned} \pi_{2n}(E_{ij})\pi_{2n}(E_{kl}) &= \begin{cases} \pi_{2n}(E_{il}) \ , & j = k \\ 0 \ , & d.d. \end{cases} \\ &= \pi_{2n}(E_{ij}E_{kl}) \end{aligned}$$

olarak istenilen eşitlik elde edilir. Böylece π_{2n} in çarpımı da koruduğu gösterilerek bir cebir homomorfizması olduğu gösterilmiş olur. Diğer taraftan, $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ve $V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \mathbb{C}l_{n+2} &\rightarrow \mathbb{C}l_n \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(2) \\ e_1 &\mapsto 1 \otimes U \\ e_2 &\mapsto 1 \otimes V \\ e_j &\mapsto ie_{j-2} \otimes U.V \end{aligned}$$

izomorfizmasını kullanarak, $\mathbb{C}l_{2n} \cong \mathbb{C}(2^n)$ olduğu ve aralarındaki izomorfizmanın,

$$\begin{aligned} \rho_{2n} : \mathbb{C}l_{2n} &\rightarrow \mathbb{C}(2^n) \\ e_1 &\mapsto \underbrace{I_2 \otimes I_2 \otimes \cdots \otimes I_2}_{\text{n-1 tane}} \otimes U \\ e_2 &\mapsto \underbrace{I_2 \otimes I_2 \otimes \cdots \otimes I_2}_{\text{n-1 tane}} \otimes V \\ e_{2k-1} &\mapsto \underbrace{I_2 \otimes \cdots \otimes I_2}_{\text{n-k tane}} \otimes U \otimes \underbrace{W \otimes \cdots \otimes W}_{\text{k-1 tane}} \\ e_{2k} &\mapsto \underbrace{I_2 \otimes \cdots \otimes I_2}_{\text{n-k tane}} \otimes V \otimes \underbrace{W \otimes \cdots \otimes W}_{\text{k-1 tane}} \end{aligned}$$

şeklinde olduğu tümevarımla gösterilebilir. Bu durumda $\varphi_{2n} = \pi_{2n} \circ \rho_{2n}$ dönüşümü $\mathbb{C}l_{2n}$ cebri için bir temsildir. Böylece genel durumda $\forall n \in \mathbb{N}$ için, $\mathbb{C}l_{2n}$ cebrinin $L^2\mathcal{K}$ üzerinde temsilleri elde edilmiştir.

- Şimdi özel durumlarda istenilen özelliğin en genel durumda da sağlandığını gösterelim. $\mathbb{C}l_{2n}$ cebri $\mathbb{C}l_{2n+2}$ cebrinin bir alt cebri olarak düşünüldüğü takdirde φ_{2n+2} temsilinin $\mathbb{C}l_{2n}$ cebri üzerine kısıtlanmışı $\mathbb{C}l_{2n}$ cebri için de bir temsil olacaktır. Bu durumda $\mathbb{C}l_{2n}$ üzerinde birbirinden farklı olarak görünen φ_{2n} temsili ile $\varphi_{2n+2|_{\mathbb{C}l_{2n}}}$ temsillerinin her ikisi de aslında $L^2(\mathcal{K})$ uzayı üzerinde aynı temsillerdir. Şimdi bu iddiayı ifade ve ispat edelim.

Yardımcı Teorem 2.2.

$$\begin{aligned} M_n : \mathbb{C}(2^n) &\longrightarrow \mathbb{C}(2^{n+1}) \\ A &\longmapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C}l_{2n} & \xrightarrow{\rho_{2n}} & \mathbb{C}(2^n) & \xrightarrow{\pi_{2n}} & L^2(\mathcal{K}) \\ i\downarrow & & M_n \ \downarrow & & \downarrow I \\ \mathbb{C}l_{2n+2} & \xrightarrow{\rho_{2n+2}} & \mathbb{C}(2^{n+1}) & \xrightarrow{\pi_{2n+2}} & L^2(\mathcal{K}) \end{array}$$

diyagramı komutatiftir.

Kanıt. Bu iddiayı doğrulamak için aşağıdaki diyagramların ayrı ayrı değişmeli olduğunu gostermek yeterli olacaktır.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}l_{2n} & \xrightarrow{\pi_{2n}} & \mathbb{C}(2^n) \\ i\downarrow & & \downarrow M_n \\ \mathbb{C}l_{2n+2} & \xrightarrow{\pi_{2n+2}} & \mathbb{C}(2^{n+1}) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{C}(2^n) & \xrightarrow{\psi_{2n}} & L^2(\mathcal{K}) \\ M_n \ \downarrow & & \downarrow I \\ \mathbb{C}(2^{n+1}) & \xrightarrow{\psi_{2n+2}} & L^2(\mathcal{K}) \end{array}$$

Herhangi bir $k \geq 1$ için,

$$\rho_{2n}(e_{2k-1}) = \underbrace{I_2 \otimes \cdots \otimes I_2}_{\text{n-k tane}} \otimes U \otimes \underbrace{W \otimes \cdots \otimes W}_{\text{k-1 tane}}$$

ve

$$\begin{aligned} \rho_{2n+2}(e_{2k-1}) &= \underbrace{I_2 \otimes \cdots \otimes I_2}_{\text{n+1-k tane}} \otimes U \otimes \underbrace{W \otimes \cdots \otimes W}_{\text{k-1 tane}}) \\ &= I_2 \times \underbrace{I_2 \otimes \cdots \otimes I_2}_{\text{n-k tane}} \otimes U \otimes \underbrace{W \otimes \cdots \otimes W}_{\text{k-1 tane}} \\ &= I_2 \otimes \rho_{2n}(e_{2k-1}) \end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde $\rho_{2n+2}(e_{2k}) = I_2 \otimes \rho_{2n}(e_{2k})$ dır. Dolayısıyla,

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}l_{2n} \arrow[r, "\rho_{2n}"] \arrow[d, "i"'] & \mathbb{C}(2^n) \arrow[d, "M_n"] \\ \mathbb{C}l_{2n+2} \arrow[r, "\rho_{2n+2}"] & \mathbb{C}(2^{n+1}) \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir.

Şimdi,

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}(2^n) \arrow[r, "\pi_{2n}"] \arrow[d, "M_n"'] & L^2(\mathcal{K}) \arrow[d, "I"] \\ \mathbb{C}(2^{n+1}) \arrow[r, "\pi_{2n+2}"] & L^2(\mathcal{K}) \end{tikzcd}$$

diyagramının değişmeli olduğunu görelim. Bunun için

$$\widetilde{E_{ij}} = \begin{pmatrix} E_{ij} & 0 \\ 0 & E_{ij} \end{pmatrix}$$

olmak üzere,

$$\pi_{2n}(E_{ij}) = \pi_{2n+2}(\widetilde{E_{ij}})$$

olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

$$\pi_{2n}(E_{ij})(f)(x) = \begin{cases} f(\sigma_{j-1}\sigma_{i-1}^{-1}(x)) \ , & x \in \sigma_{i-1}(\mathcal{K}) \\ 0 \ , & d.d. \end{cases}$$

dır. Bu aşamada $\mathbb{C}l_{2n+2}$ nin temsilinde kulanacağımız büzülme dönüşümlerini $\widetilde{\sigma}_i$, $i = 0, 1, ..., (2^{n+1} - 1)$ olarak gösterelim. Dönüşümlerin nasıl sıraya koyulduğunu hatırlatacak olursak $\omega_{i_1 i_2 ... i_n}$ dönüşümüne karşılık gelen dönüşümün numarası $k = (i_n i_{n-1} ... i_1)_2$ idi. $\sigma_k = \omega_{i_1 i_2 ... i_n}$ ise $k = (i_n i_{n-1} ... i_1)_2$ dır. Aynı zamanda $k = (0 i_n i_{n-1} ... i_1)_2$ olduğundan

$$\widetilde{\sigma}_k = \omega_{i_1 i_2 ... i_n 0} = \omega_{i_1 i_2 ... i_n} \circ \omega_0 = \sigma_k \circ \omega_0$$

olacaktır. Benzer düşünceyle $\sigma_k = \omega_{i_1 i_2 ... i_n}$ için $k = (i_n i_{n-1} ... i_1)_2$ olmak üzere $k + 2^n = (1 i_n i_{n-1} ... i_1)_2$ dir. O halde

$$\widetilde{\sigma}_{k+2^n} = \omega_{i_1 i_2 ... i_n 1} = \omega_{i_1 i_2 ... i_n} \circ \omega_1 = \sigma_k \circ \omega_1$$

olarak elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned} \pi_{2n+2}(\widetilde{E_{ij}})(f)(x) \ &= \begin{cases} f(\widetilde{\sigma}_{j-1}\widetilde{\sigma}_{i-1}^{-1}(x)) \ , & x \in \widetilde{\sigma}_{i-1}(\mathcal{K}) \\ 0 \ , & d.d. \end{cases} \\ &+ \begin{cases} f(\widetilde{\sigma}_{j+2^n-1}\widetilde{\sigma}_{i+2^n-1}^{-1}(x)) \ , & x \in \widetilde{\sigma}_{i+2^n-1}(\mathcal{K}) \\ 0 \ , & d.d. \end{cases} \end{aligned}$$

$\widetilde{\sigma}_i(\mathcal{K}) = \sigma_i \circ \omega_0(\mathcal{K})$, ve $\widetilde{\sigma}_{i+2^n}(\mathcal{K}) = \sigma_i \circ \omega_1(\mathcal{K})$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \pi_{2n+2}(\widetilde{E_{ij}})(f)(x) \ &= \begin{cases} f(\widetilde{\sigma}_{j-1}(\omega_0^{-1} \circ \sigma_{i-1}^{-1}(x))) \ , & x \in (\sigma_{i-1} \circ \omega_0)(\mathcal{K}) \\ 0 \ , & d.d. \end{cases} \\ &+ \begin{cases} f(\widetilde{\sigma}_{j+2^n-1}(\omega_1^{-1} \circ \sigma_{i-1}^{-1}(x)) \ , & x \in (\sigma_{i-1} \circ \omega_1)(\mathcal{K}) \\ 0 \ , & d.d. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\pi_{2n+2}(\widetilde{E_{ij}})(f)(x) = \begin{cases} f(\sigma_{j-1}\circ\omega_0\circ\omega_0^{-1}\circ\sigma_{i-1}^{-1}(x))\ , & x\in(\sigma_{i-1}\circ\omega_0)(\mathcal{K}) \\ 0\ , & d.d. \end{cases}$$
$$+\begin{cases} f(\sigma_{j-1}\circ\omega_1\circ\omega_1^{-1}\circ\sigma_{i-1}^{-1}(x)))\ , & x\in(\sigma_{i-1}\circ\omega_1)(\mathcal{K}) \\ 0\ , & d.d. \end{cases}$$

$$\pi_{2n+2}(\widetilde{E_{ij}})(f)(x) = \begin{cases} f(\sigma_{j-1}\sigma_{i-1}^{-1}(x))\ , & x\in(\sigma_{i-1}\circ\omega_0)(\mathcal{K}) \\ 0\ , & d.d. \end{cases}$$
$$+\begin{cases} f(\sigma_{j-1}\sigma_{i-1}^{-1}(x))\ , & x\in(\sigma_{i-1}\circ\omega_1)(\mathcal{K}) \\ 0\ , & d.d. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \pi_{2n+2}(\widetilde{E_{ij}})(f)(x) &= \begin{cases} f(\sigma_{j-1}\sigma_{i-1}^{-1}(x))\ , & x\in\sigma_{i-1}(\mathcal{K}) \\ 0\ , & d.d. \end{cases} \\ &= \pi_{2n}(E_{ij})(f)(x) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Böylece,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}(2^n) & \xrightarrow{\pi_{2n}} & L^2(\mathcal{K}) \\ {\scriptstyle M_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle I} \\ \mathbb{C}(2^{n+1}) & \xrightarrow{\pi_{2n+2}} & L^2(\mathcal{K}) \end{array}$$

diyagramının komutatif olduğu gösterilmiş olur. her iki diyagramın da komutatifliğinden dolayı sonuç olarak $\mathbb{C}l_{2n}$ üzerindeki φ_{2n} temsili ile $\varphi_{2n+2|_{\mathbb{C}l_{2n}}}$ temsili aynı temsillerdir. $\square$

Böylece çift boyuttaki Clifford cebirleri için her biri birbiriyle uyumlu olan temsiller elde edilmiştir. Her tek boyutlu Clifford cebri de bir üst boyuttaki çift boyutlu Clifford cebri içinde yattığı için çift boyuttaki Clifford cebrinin bir düşük boyuttaki tek boyutlu Clifford cebri üzerine kısıtlanmışı tek boyutta bir temsil verecektir. O halde sonlu boyutlu tüm Clifford cebrileri $L^2(\mathcal{K})$ üzerinde temsil edilmiştir.

2.3 Sonsuz Boyutlu Kompleks Clifford Cebrinin $L^2(\mathcal{K})$ üzerinde Temsili

Sonlu boyutlu bütün kompleks Clifford cebirleri için cebrin boyutu arttıkça ya da değiştikçe temsil uzayı değişmeyen $L^2(\mathcal{K})$ uzayı üzerinde temsiller elde edilmiştir. Öyle ki bu temsillerin her birisi birbirleriyle uyumludur. Yani,

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{C}l_1 & \stackrel{i}{\hookrightarrow} & \mathbb{C}l_2 & \stackrel{i}{\hookrightarrow} \ldots \stackrel{i}{\hookrightarrow} & \mathbb{C}l_n & \stackrel{i}{\hookrightarrow} \ldots \\ \varphi_1 \downarrow & & \varphi_2 \downarrow & & \varphi_n \downarrow & \\ B(L^2(\mathcal{K})) & \stackrel{I}{\to} & B(L^2(\mathcal{K})) & \stackrel{I}{\to} & B(L^2(\mathcal{K})) & \to \end{array}$$

diyagramı komutatiftir. Temsillerin bu manada uyumluluğunu kullanarak böylece sonsuz boyutlu kompleks Clifford cebri $\mathbb{C}l_\infty$ için de aynı temsil uzayı üzerinde yani $L^2(\mathcal{K})$ sonsuz boyutlu vektör uzayı üzerinde bir temsil vermek mümkün olmuştur.

Yardımcı Teorem 2.3.

$$\begin{array}{rcll} \varphi_\infty : & \mathbb{C}l_\infty & \longrightarrow & B(L^2(\mathcal{K})) \\ & e_i & \longmapsto & \varphi_i(e_i) \end{array}$$

olarak tanımlı φ_∞ dönüşümü bir cebir homomorfizmasısıdr yani $\mathbb{C}l_\infty$ için bir temsildir.

Kanıt. Tanımlanan φ_∞ dönüşümü tabanlar üzerinden lineer genişletildiği için lineerliği kontrol etmeye gerek yoktur. Bu nedenle üreteçler üzerinde çarpmanın korunduğunu göstermek yeterli olacaktır. Yani $e_i, e_j \in \mathbb{C}l_\infty$ olmak üzere,

$$\varphi_\infty(e_ie_j) \;=\; \varphi_\infty(e_i)\varphi_\infty(e_j)$$

olduğu gösterilmelidir. $\varphi_\infty(e_i) = \varphi_i(e_i)$ ve $\varphi_\infty(e_j) = \varphi_j(e_j)$ dir. Ayrıca $k = max\{i, j\}$ olmak üzere

$$\varphi_k(e_i) = \varphi_i(e_i), \varphi_k(e_j) = \varphi_j(e_j)$$

olduğundan

$$\varphi_i(e_i)\varphi_j(e_j) = \varphi_k(e_i)\varphi_k(e_j) = \varphi_k(e_ie_j)$$

dir. O halde,

$$\varphi_\infty(e_ie_j) = \varphi_k(e_ie_j) = \varphi_i(e_i)\varphi_j(e_j) = \varphi_\infty(e_i)\varphi_\infty(e_j)$$

olarak elde edilir. □

Böylece sonsuz boyutlu kompleks Clifford cebri $\mathbb{C}l_\infty$ cebrinin $L^2(\mathcal{K})$ uzayı üzerinde bir temsili varolan φ_n temsilleri yardımıyla elde edilmiştir.

2.4 Temsillerin Matris Gösterimi

Sonlu boyutlu $\mathbb{C}l_{2n}$ Clifford cebrilerinin $L^2(\mathcal{K})$ üzerindeki temsilleri tanımlanırken $\rho : \mathbb{C}l_{2n} \rightarrow \mathbb{C}(2^n)$ izomorfizması ara kademe olarak kullanılmıştı. Burada bazı tanımlamalar yaparak ρ_{2n} izomorfizmasını bir şekilde ortadan kaldırarak direk bir şekilde $\mathbb{C}l_{2n} \rightarrow B(L^2(\mathcal{K}))$ temsilini vermek mümkün kılınmaktadır. Bunun için öncelikle bir matrisin $\mathcal{K}$ üzerinde verilen bir fonksiyona etkisini tanımlayalım:
φ_0 ve $\varphi_1 : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ büzülme dönüşümleri ve $\omega = \omega_1\omega_2\cdots\omega_n \in \{0,1\}^n$ olmak üzere

$$\varphi_\omega = \varphi_{\omega_1} \circ \varphi_{\omega_2} \circ \cdots \circ \varphi_{\omega_n}$$

ve

$$\mathcal{K}_\omega = \varphi_\omega(\mathcal{K})$$

olsun. Ayrıca verilen bir $f : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu için $f_\omega = f\,|_{\mathcal{K}_\omega}$ olmak üzere,

$$\tilde{f}_\omega : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{C},\ \ \tilde{f}_\omega = f_\omega \circ \varphi_\omega$$

olarak tanımlansın. Burada dikkat edilecek olursa $\tilde{f}_\omega$ fonksiyonu $\mathcal{K}_\omega$ üzerindeki f_ω fonksiyonunun $\mathcal{K}$ üzerine genişletilmesi şeklinde düşünülebilir. Şimdi $2^n \times 2^n$ tipindeki bir matrisin $\mathcal{K}$ üzerinde verilen bir fonksiyona olan etkisini tanımlayalım. $A = (a_{ij})_{2^n\times 2^n}$ olmak üzere,

$$A.f = A \begin{pmatrix} f_{\omega^1} \\ f_{\omega^2} \\ \vdots \\ f_{\omega^{2^n}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (Af)_{\omega^1} \\ (Af)_{\omega^2} \\ \vdots \\ (Af)_{\omega^{2^n}} \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

şeklindedir. Burada,

$$(Af)_{\omega^k} = (\sum_{i=1}^{2^n} a_{k_i}\tilde{f}_{\omega^i}) \circ \varphi^{-1}_{\omega^k}$$

olarak tanımlanmaktadır. Bu tanımlamalardan sonra $\mathbb{C}l_{2n}$ cebrinin $\varphi_{2n} : \mathbb{C}l_{2n} \to B(L^2(\mathcal{K}))$ temsili,

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olmak üzere matris gösterimiyle şu şekilde ifade edilebilmektedir. $e_1, e_2, \cdots, e_{2n}$ $\mathbb{C}l_{2n}$ cebrinin temel üreteçleri olmak üzere homomorfizma altındaki resimleri,

$$\begin{array}{lll}
e_1 & \mapsto & \underbrace{I \otimes \cdots \otimes I}_{\text{n-1 tane}} \otimes U, \\
e_2 & \mapsto & \underbrace{I \otimes \cdots \otimes I}_{\text{n-1 tane}} \otimes V, \\
e_3 & \mapsto & \underbrace{I \otimes \cdots \otimes I}_{\text{n-2 tane}} \otimes U \otimes W, \\
e_4 & \mapsto & \underbrace{I \otimes \cdots \otimes I}_{\text{n-2 tane}} \otimes V \otimes W, \\
\vdots & & \\
e_{2k-1} & \mapsto & \underbrace{I \otimes \cdots \otimes I}_{\text{n-k tane}} \otimes U \otimes \underbrace{W \otimes \cdots \otimes W}_{\text{k-1 tane}}, \\
e_{2k} & \mapsto & \underbrace{I \otimes \cdots \otimes I}_{\text{n-k tane}} \otimes V \otimes \underbrace{W \otimes \cdots \otimes W}_{\text{k-1 tane}}, \\
\vdots & & \\
e_{2n-1} & \mapsto & U \otimes \underbrace{W \otimes \cdots \otimes W}_{\text{n-1 tane}}, \\
e_{2n} & \mapsto & V \otimes \underbrace{W \otimes \cdots \otimes W}_{\text{n-1 tane}}
\end{array}$$

şeklinde elde edilir.

3 SONSUZ BOYUTLU REEL VE KOMPLEKS CLIFFORD CEBİRLERİNİN $L^2(\mathcal{K})$ ÜZERİNDE TEMSİLLERİ

Bir önceki bölümde her bir sonlu boyutlu kompleks Clifford cebirlerinin $L^2\mathcal{K}$ üzerinde temsilleri inşaa edilmiştir. Ayrıca $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $\mathbb{C}l_{2n+2}$ kompleks Clifford cebri için verilen temsilin, $\mathbb{C}l_{2n}$ cebrine kısıtlanmışı olarak elde edilen temsil ile $\mathbb{C}l_{2n}$ üzerindeki temsilin eşit olduğu da gösterilmiştir. Böylece iç içe geçmiş temsiller elde edilerek, sonlu boyutlu Clifford cebirlerinin bir direkt limiti olarak elde edilebilen sonsuz boyutlu Clifford cebirleri için de bir temsil elde etmek mümkün olmuştur. Fakat bu temsiller elde edilirken, matris izomorfizmleri ara kademe olarak kullanılmıştır. Daha da açacak olursak, esasında Clifford cebrinin izomorf olduğu matris cebri $L^2(\mathcal{K})$ uzayı üzerinde temsil edilmiş olup bunun da bir sonucu olarak kompleks Clifford cebri için de bir temsil elde edilmiştir.

Bu bölümde geçtiğimiz dönemde ara kademe olarak kullanılan matris izomorfizmasını aradan kaldırarak direkt bir şekilde kompleks Clifford cebirlerinin $L^2(\mathcal{K})$ uzayı üzerinde temsilleri elde edilmeye çalışılmıştır. Daha sonra en genel durumda $Cl_{p,q}$ reel Clifford cebri için de bir temsil edilmiştir.

3.1 Sonsuz Boyutlu Kompleks Clifford Cebirlerinin $L^2(\mathcal{K})$ Üzerindeki Temsili

Bu bölümde sonlu boyutlu kompleks Clifford cebirlerinin $L^2\mathcal{K}$ üzerindeki temsilleri doğrudan apaçık olarak elde edilmiştir. Öncelikli olarak $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\mathbb{C}l_{2n}$ Clifford cebri için bir temsil verilmiş olup tek boyutlu Clifford cebirleri için bir üst boyuttaki cebir temsilinin kısıtlanmışı alınmıştır. Şimdi ilk hedefimiz doğrultusunda çift boyutlu kompleks Clifford cebirlerinin $L^2(\mathcal{K})$ üzerindeki temsillerini inşaa etmeye çalışalım. Bu amaçla öncelikle $\mathbb{C}l_{2n}$ den $End_{\mathbb{C}}(L^2\mathcal{K})$ nın bir alt cebri olan ve bu uzaydaki sınırlı lineer dönüşümlerin kümesi olan $B(L^2\mathcal{K})$ ya bir cebir homomorfizmi vereceğiz. Bunun için gerekli bazı tanımlamalarımızı yapalım.

Herhangi bir $x \in \mathcal{K}$ alalım. Bu durumda $\omega_j \in \{0,1\}$ olmak üzere,

$$\{x\} = \bigcap_{j\geq 1} \varphi_{\omega_1} \circ \varphi_{\omega_2} \circ \cdots \circ \varphi_{\omega_j}(\mathcal{K})$$

olacak şekilde tek türlü belirli $\omega_1\omega_2\cdots\omega_j\cdots$ dizgesi vardır. Buna x in adresi diyelim. Böylece $x \in \mathcal{K}$ elemanını ona karşılık gelen adresiyle özdeşleştirerek,

$$x = \omega_1\omega_2\cdots\omega_j\cdots$$

şeklinde yazılabilir. $\mathcal{K}$ üzerindeki bir noktanın adres karşılığı olarak herhangi bir j. bileşenini düşünecek olursak o bileşen ya 0 veya 1 dir. Bu durumda $\mathcal{K}$ kümesi j. bileşeni 0 olanlar ile j. bileşeni 1 olanların oluşturduğu iki ayrı kümenin birleşimi olarak düşünülebilir. Yani,

$$\mathcal{K}_0^j := \{x \in \mathcal{K} \mid x = \omega_1\omega_2\cdots\omega_{j-1}0\omega_{j+1}\cdots\}$$

ve

$$\mathcal{K}_1^j := \{x \in \mathcal{K} \mid x = \omega_1\omega_2\cdots\omega_{j-1}1\omega_{j+1}\cdots\}$$

sırasıyla j. yeri 0 ve j. yeri 1 olan noktaların oluşturduğu küme olmak üzere,

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_0^j \cup \mathcal{K}_1^j$$

şeklindedir. Şimdi $j \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $x = \omega_1\omega_2\cdots\omega_j\cdots$ elemanı için,

$$\tilde{x}^j := \begin{cases} \omega_1\omega_2\cdots\omega_{j-1}0\omega_{j+1}\cdots & , \quad \text{for } \omega_j = 1 \\ \omega_1\omega_2\cdots\omega_{j-1}1\omega_{j+1}\cdots & , \quad \text{for } \omega_j = 0 \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Şimdi $L^2\mathcal{K}$ üzerinde temsil inşaasında kullanacağımız ($j \in \mathbb{N}$) olmak üzere $T_j, S_j : L^2(\mathcal{K}) \to L^2(\mathcal{K})$ operatörlerini tanımlayabiliriz. $f \in L^2\mathcal{K}$ olmak üzere,

$$(T_jf)(x) = \begin{cases} f(x)\ , & x \in \mathcal{K}_0^j \\ -f(x)\ , & x \in \mathcal{K}_1^j \end{cases}$$

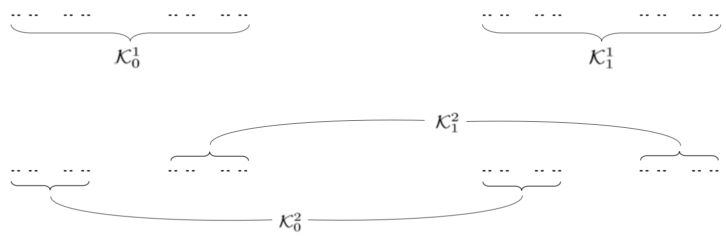
ve

$$x \in \mathcal{K}, (S_jf)(x) = f(\tilde{x}^j)$$

olarak tanımlanır. (T_j operatörü verilen f fonksiyonunun $\mathcal{K}_0^j$ üzerindeki parçasını aynen bırakıp, $\mathcal{K}_1^j$ üzerindeki grafiğini eksilisine resmettiği için başka bir ifadeyle o parçasını devirdiği için bu operatöre "tilt-"operatörü, S_j operatörü ise verilen f fonksiyonunun $\mathcal{K}_0^j$ ve $\mathcal{K}_1^j$ üzerindeki grafiklerini yer değiştirilerek elde edilen fonksiyona resmettiği için bu operatöre de "switch-" operatörü diyeceğiz.)

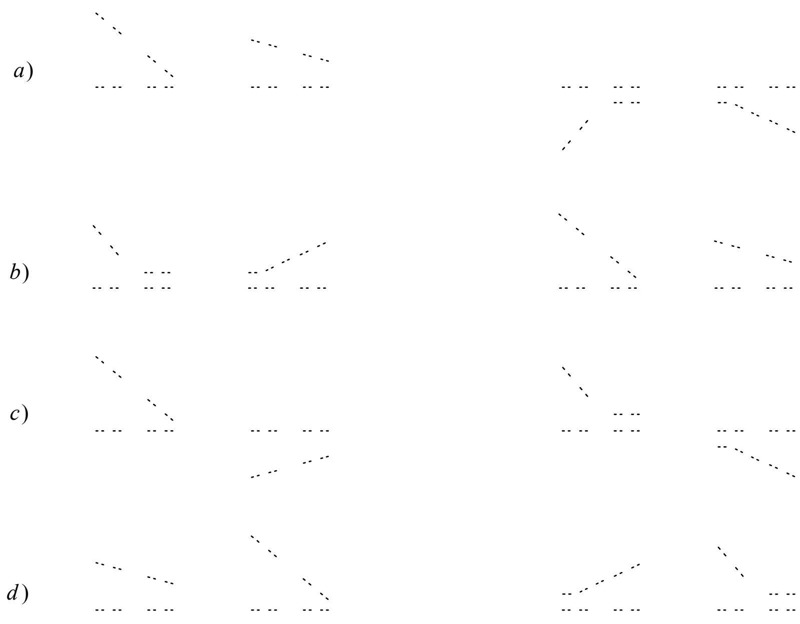
Şimdi bir kaç adımda $\mathcal{K}$ nin parçalanışını ve verilen bir f fonksiyonunu T_1, S_1, T_2 ve S_2 operatörlerinin nasıl resmettiğini bir örnekle görelim.

Örnek 3.1. *$\varphi_0(x) = x/3$ ve $\varphi_1(x) = (x+2)/3$ olsun. Bu durumda $\{[0,1]; \varphi_0, \varphi_1\}$ YFS nin çekicisi yani $\mathcal{K}$ Cantor kümesidir.*



Şekil 3.1: Bir kaç adımda $\mathcal{K}$ nin ayrışımı.

Şekil 3.2: Cantor üzerinde bir f fonksiyonunun grafiği



Şekil 3.3: (a) $T_1 f$, (b) $S_1 f$, (c) $T_2 f$, (d) $S_2 f$ fonksiyonlarının grafikleri.

Şimdi tilt- ve switch- operatörlerinin birbirleri ile olan ilişkilerini ifade ve ispat edelim.

Yardımcı Teorem 3.2. $p, q \in \mathbb{N}$ *olmak üzere aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.*

i) $T_p \circ T_q = T_q \circ T_p$

ii) $S_p \circ S_q = S_q \circ S_p$

iii) $T_p \circ S_q = S_q \circ T_p$ $(p \neq q)$

iv) $T_p \circ S_p = -S_p \circ T_p$

Kanıt. *i)* $p, q \in \mathbb{N}$ için $T_p \circ T_q = T_q \circ T_p$ olduğunu görelim. Tanımdan hareketle

$$
\begin{aligned}
(T_p \circ T_q)(f)(x) &= \begin{cases} (T_q f)(x) \ , & x \in \mathcal{K}_0^p \\ -(T_q f)(x) \ , & x \in \mathcal{K}_1^p \end{cases} \\
&= \begin{cases} \begin{cases} f(x) \ , & x \in \mathcal{K}_0^q \\ -f(x) \ , & x \in \mathcal{K}_1^q \end{cases} & , \quad x \in \mathcal{K}_0^p \\ \begin{cases} -f(x) \ , & x \in \mathcal{K}_0^q \\ f(x) \ , & x \in \mathcal{K}_1^q \end{cases} & , \quad x \in \mathcal{K}_1^p \end{cases}
\end{aligned}
$$

şeklinde yazılabilir. Uygun düzenlemelerle

$$
\begin{aligned}
(T_p \circ T_q)(f)(x) &= \begin{cases} \begin{cases} f(x)\ , & x \in \mathcal{K}_0^p \\ -f(x)\ , & x \in \mathcal{K}_1^p \end{cases} & , \quad x \in \mathcal{K}_0^q \\ \begin{cases} -f(x)\ , & x \in \mathcal{K}_0^p \\ f(x)\ , & x \in \mathcal{K}_1^p \end{cases} & , \quad x \in \mathcal{K}_1^q \end{cases} \\
&= \begin{cases} (T_p f)(x)\ , & x \in \mathcal{K}_0^q \\ -(T_p f)(x)\ , & x \in \mathcal{K}_1^q \end{cases} \\
&= (T_q \circ T_p)(f)(x)
\end{aligned}
$$

şeklinde istenilen elde edilir.

ii)

$$
\begin{aligned}
(S_p \circ S_q)(f)(x) &= (S_q f)(\tilde{x}^p) = f\big(\widetilde{(\tilde{x}^p)}^q\big) = f\big(\widetilde{(\tilde{x}^q)}^p\big) \\
&= (S_p f)(\tilde{x}^q) = (S_q S_p)(f)(x).
\end{aligned}
$$

iii) $p \neq q$ olmak üzere $T_p \circ S_q = S_q \circ T_p$ olduğunu görelim. Öncelikle bir $x \in \mathcal{K}$ için

$$
\begin{aligned}
(T_p \circ S_q)(f)(x) &= \begin{cases} (S_q f)(x)\ , & x \in \mathcal{K}_0^p \\ -(S_q f)(x)\ , & x \in \mathcal{K}_1^p \end{cases} \\
&= \begin{cases} f(\widetilde{x}_q)\ , & x \in \mathcal{K}_0^p \\ -f(\widetilde{x}_q)\ , & x \in \mathcal{K}_1^p \end{cases}
\end{aligned}
$$

şeklinde ifade edilebilir. $\widetilde{x}_q$ nun tanımlanışından ve $p \neq q$ olduğundan

$$x \in \mathcal{K}_0^p \Leftrightarrow \widetilde{x}_q \in \mathcal{K}_0^p$$

$$x \in \mathcal{K}_1^p \Leftrightarrow \widetilde{x}_q \in \mathcal{K}_1^p$$

dir. O halde son eşitlik,

$$
\begin{aligned}
(T_p \circ S_q)(f)(x) &= \begin{cases} f(\widetilde{x}_q)\ , & \widetilde{x}_q \in \mathcal{K}_0^p \\ -f(x_q)\ , & \widetilde{x}_q \in \mathcal{K}_1^p \end{cases} \\
&= (T_p f)(\widetilde{x}_q) \\
&= (S_q \circ T_p)(f)(x)
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir.

iv) Önceki durum incelenir ve $x \in \mathcal{K}_0^p$ ise $\widetilde{x}_p \in \mathcal{K}_1^p$ ve $x \in \mathcal{K}_1^p$ ise $\widetilde{x}_p \in \mathcal{K}_0^p$ olduğu kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
(S_p \circ T_p)(f)(x) &= (T_p(f))(\widetilde{x}_p) \\
&= \begin{cases} f(\widetilde{x}_p) \ , & \widetilde{x}_p \in \mathcal{K}_0^p \\ -f(\widetilde{x}_p) \ , & \widetilde{x}_p \in \mathcal{K}_1^p \end{cases} \\
&= \begin{cases} f(\widetilde{x}_p) \ , & x \in \mathcal{K}_1^p \\ -f(\widetilde{x}_p) \ , & x \in \mathcal{K}_0^p \end{cases} \\
&= \begin{cases} (S_p(f))(x) \ , & x \in \mathcal{K}_1^p \\ -(S_p(f))(x) \ , & x \in \mathcal{K}_0^p \end{cases} \\
&= -(T_p \circ S_p)(f)(x)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. □

$\mathbb{C}l_{2n}$ nin üreteçlerini ${e_j}^2 = 1 \ \ (j = 1, 2, ..., 2n)$ olmak üzere $e_1, e_2, ..., e_{2n}$ ile gösterelim. Her bir üreteci, tek veya çift indisli olmasına göre aşağıdaki gibi bir operatöre resmedelim (i, kompleks i sayısını göstersin):

$$\begin{array}{llcl}
\psi : & \mathbb{C}l_{2n} & \longrightarrow & B(L^2\mathcal{K}) \\
& e_1 & \mapsto & T_1 \\
& e_2 & \mapsto & S_1 \\
(k > 1) & e_{2k-1} & \mapsto & i^{(k+1)^2}(T_k \circ T_{k-1} \circ S_{k-1} \circ T_{k-2} \circ S_{k-2} \circ \cdots \circ T_1 \circ S_1) \\
& e_{2k} & \mapsto & i^{(k+1)^2}(S_k \circ T_{k-1} \circ S_{k-1} \circ T_{k-2} \circ S_{k-2} \circ \cdots \circ T_1 \circ S_1)
\end{array}$$

Teorem 3.3. *ψ, $\mathbb{C}l_{2n}$ nin $L^2\mathcal{K}$ üzerinde bir temsilidir.*

Kanıt. ψ dönüşümünün bir cebir homomorfizması olduğunu göstermek için, $\forall 1 \leq p \neq q \leq 2n$ için $\psi^2(e_p) = I$ ve $\psi(e_p)\psi(e_q) = -\psi(e_q)\psi(e_p)$ olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Öncelikle $\psi^2(e_p) = I$ olduğunu göstereceğiz.

- $\psi^2(e_1) = T_1T_1$, $\psi^2(e_2) = S_1S_1$ dir. $\forall p \in \mathbb{N}^+$ için

  $$T_pT_p = S_pS_p = I$$

  olduğundan

  $$\psi^2(e_1) = \psi^2(e_2) = I$$

  olarak elde edilir.

Şimdi $k > 1$ olmak üzere

$$\psi^2(e_{2k}) = I$$
$$\psi^2(e_{2k-1}) = I$$

olduğunu görelim.

- $p = 2k - 1$ olsun. Bu durumda

  $$\psi(e_p) = i^{(k+1)^2} T_k T_{k-1} S_{k-1} T_{k-2} S_{k-2} \cdots T_1 S_1$$

  şeklindedir. Bu durumda Yardımcı Teorem 3.2 ve $\forall p \in \mathbb{N}^+$ için

  $$T_p T_p = S_p S_p = I$$

  olduğu kullanılarak

  $$\begin{aligned} \psi^2(e_p) &= (i^{(k+1)^2} T_k T_{k-1} S_{k-1} \cdots T_1 S_1)(i^{(k+1)^2} T_k T_{k-1} S_{k-1} \cdots T_1 S_1) \\ &= i^{2(k+1)^2} (T_k T_{k-1} S_{k-1} \cdots T_1 S_1 T_k T_{k-1} S_{k-1} \cdots T_1 S_1) \\ &= i^{2(k+1)^2} (-1)^{k-1} (T_k T_k T_{k-1} T_{k-1} S_{k-1} S_{k-1} \cdots T_1 T_1 S_1 S_1) \\ &= I \end{aligned}$$

  olarak elde edilir.

- $p = 2k$ olsun.

  $$\begin{aligned} \psi^2(e_p) &= (i^{(k+1)^2} S_k T_{k-1} S_{k-1} \cdots T_1 S_1)(i^{(k+1)^2} S_k T_{k-1} S_{k-1} \cdots T_1 S_1) \\ &= i^{2(k+1)^2} (S_k T_{k-1} S_{k-1} \cdots T_1 S_1 S_k T_{k-1} S_{k-1} \cdots T_1 S_1) \\ &= i^{2(k+1)^2} (-1)^{k-1} (T_k T_k T_{k-1} T_{k-1} S_{k-1} S_{k-1} \cdots T_1 T_1 S_1 S_1) \\ &= (-1)^{k(k+1)} I = I \end{aligned}$$

  olarak elde edilir.

Şimdi de

$$\psi(e_p)\psi(e_q) = -\psi(e_q)\psi(e_p)$$

olduğunu görelim. $1 \leq p \neq q \leq 2$ için Yardımcı Teorem 3.2 (iv) den dolayı

$$\psi(e_1)\psi(e_2) = T_1 S_1 = -S_1 T_1 = -\psi(e_2)\psi(e_1)$$

olarak elde edilir.

Şimdi $k, l > 1$ olmak üzere aşağıdaki durumları inceleyelim.

- p ve q tek, $p = 2k-1 < q = 2l-1$ olsun.

$$\begin{aligned}\psi(e_p) &= i^{(k+1)^2} T_k T_{k-1} S_{k-1} T_{k-2} S_{k-2} \cdots T_1 S_1 \\ \psi(e_q) &= i^{(l+1)^2} T_l T_{l-1} S_{l-1} T_{l-2} S_{l-2} \cdots T_1 S_1\end{aligned}$$

şeklindedir. Bu durumda yine Yardımcı Teorem 3.2 yardımıyla,

$$\begin{aligned}\psi(e_p)\psi(e_q) &= (i^{(k+1)^2} T_k T_{k-1} S_{k-1} \cdots T_1 S_1)(i^{(l+1)^2} T_l T_{l-1} S_{l-1} \cdots T_1 S_1) \\ &= i^{(k+1)^2+(l+1)^2} (T_k T_{k-1} S_{k-1} \cdots T_1 S_1)(T_l T_{l-1} S_{l-1} \cdots T_1 S_1)\end{aligned}$$

$= i^{(k+1)^2+(l+1)^2} (T_l T_{l-1} S_{l-1} \cdots T_{k+1} S_{k+1})(T_k T_{k-1} S_{k-1} \cdots T_1 S_1)(T_k S_k \cdots T_1 S_1)$

$= i^{(k+1)^2+(l+1)^2} (-1)^{2k-1} (T_l T_{l-1} S_{l-1} \cdots S_1 T_1)(T_k T_{k-1} S_{k-1} \cdots T_1 S_1)$

$= -i^{(k+1)^2+(l+1)^2} (T_l T_{l-1} S_{l-1} \cdots T_1 S_1)(T_k T_{k-1} S_{k-1} \cdots T_1 S_1)$

$= -i^{(l+1)^2} (T_l T_{l-1} S_{l-1} \cdots T_1 S_1) \;\; i^{(k+1)^2} (T_k T_{k-1} S_{k-1} \cdots T_1 S_1)$

$= -\psi(e_q)\psi(e_p)$

olarak elde edilir.

- p tek ve q çift, $p = 2k-1 < q = 2l$ olsun.

$$\begin{aligned}\psi(e_p) &= i^{(k+1)^2} T_k T_{k-1} S_{k-1} T_{k-2} S_{k-2} \cdots T_1 S_1 \\ \psi(e_q) &= i^{(l+1)^2} S_l T_{l-1} S_{l-1} T_{l-2} S_{l-2} \cdots T_1 S_1\end{aligned}$$

şeklindedir. Bu durumda yine Yardımcı Teorem 3.2 yardımıyla,

$$\psi(e_p)\psi(e_q) = (i^{(k+1)^2} T_k T_{k-1} S_{k-1} \cdots T_1 S_1)(i^{(l+1)^2} S_l T_{l-1} S_{l-1} \cdots T_1 S_1)$$

$= i^{(k+1)^2+(l+1)^2} (T_k T_{k-1} S_{k-1} \cdots T_1 S_1)(S_l T_{l-1} S_{l-1} \cdots T_1 S_1)$

$= i^{(k+1)^2+(l+1)^2} (S_l T_{l-1} S_{l-1} \cdots T_{k+1} S_{k+1})(T_k T_{k-1} S_{k-1} \cdots T_1 S_1)(T_k S_k \cdots T_1 S_1)$

$= i^{(k+1)^2+(l+1)^2} (-1)^{2k-1} (S_l T_{l-1} S_{l-1} \cdots T_1 S_1)(T_k T_{k-1} S_{k-1} \cdots T_1 S_1)$

$= -i^{(l+1)^2} (S_l T_{l-1} S_{l-1} \cdots T_1 S_1) \;\; i^{(k+1)^2} (T_k T_{k-1} S_{k-1} \cdots T_1 S_1)$

$= -\psi(e_q)\psi(e_p)$

olarak elde edilir.

- Diğer durumlar da benzer işlemlerle görülebilir.

Sonuç olarak, her $1 \leq p \neq q \leq 2n$ için

$$\psi(e_p)\psi(e_q) = -\psi(e_q)\psi(e_p)$$

elde edilmiş olur. O halde tanımlamış olduğumuz ψ dönüşümü bir cebir homomorfizmidir. Dolayısıyla ψ, $\mathbb{C}l_{2n}$ nin $L^2\mathcal{K}$ üzerinde bir temsilidir.

$\square$

Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathbb{C}l_{2n}$ üzerinde verdiğimiz bu temsili, n ye bağlı olarak bundan sonra ψ_{2n} şeklinde gösterelim. Vermiş olduğumuz temsilin tanımlanışından, $\mathbb{C}l_{2n}$ üzerindeki ψ_{2n} temsilinin $\mathbb{C}l_{2n-2}$ ye kısıtlanmışının, $\mathbb{C}l_{2n-2}$ için verilen ψ_{2n-2} temsili olduğu açıktır. Yani aşağıdaki büyük diyagramda her bir küçük dikdörtgen komutatiftir.

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{C}l_2 & \xrightarrow{i} & \mathbb{C}l_4 & \xrightarrow{i} \cdots \xrightarrow{i} & \mathbb{C}l_{2n} & \xrightarrow{i} \cdots \\
\downarrow \psi_2 & & \downarrow \psi_4 & & \downarrow \psi_{2n} & \\
B(L^2\mathcal{K}) & \xrightarrow{I} & B(L^2\mathcal{K}) & \xrightarrow{I} \cdots \xrightarrow{I} & B(L^2\mathcal{K}) & \xrightarrow{I} \cdots
\end{array}$$

Bilindiği gibi sonsuz boyutlu kompleks Clifford cebri sonlu boyutlu kompleks Clifford cebirlerinin direkt limiti olarak ifade edilebilir. Bu bölümde sonlu boyutlu Clifford cebileri için elde edilen temsiller yardımıyla, sonsuz boyutlu Clifford cebri için bir temsil elde edeceğiz.

Tek boyutlu kompleks Clifford cebirleri bir üst boyutlu (çift boyutlu) kompleks Clifford cebrinin içinde doğal bir şekilde yatmaktadır. İlgili çift boyutlu cebir için verilen temsilin, içinde yatan tek boyutlu temsile kısıtlanmışı da bu tek boyutlu cebir için bir temsil teşkil etmektedir. Daha açık olarak, ψ_{2n} nin $\mathbb{C}l_{2n-1}$ e kısıtlanmışı, $\mathbb{C}l_{2n-1}$ için bir temsil vermektedir. Yani

$$\psi_{2n-1} := \psi_{2n|_{\mathbb{C}l_{2n-1}}}$$

dönüşümü $\mathbb{C}l_{2n-1}$ in $L^2\mathcal{K}$ üzerinde bir temsilidir. Buradan,

$$i : \mathbb{C}l_n \to \mathbb{C}l_{n+1}$$

gömme dönüşümü olmak üzere

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{C}l_1 & \xrightarrow{i} & \mathbb{C}l_2 & \xrightarrow{i} \cdots \xrightarrow{i} & \mathbb{C}l_n & \xrightarrow{i} \cdots \\
\downarrow \psi_1 & & \downarrow \psi_2 & & \downarrow \psi_n & \\
B(L^2\mathcal{K}) & \xrightarrow{I} & B(L^2\mathcal{K}) & \xrightarrow{I} \cdots \xrightarrow{I} & B(L^2\mathcal{K}) & \xrightarrow{I} \cdots
\end{array}$$

diyagramı komutatif olacak şekilde bir temsil zinciri elde edilmiş olur.

$(\mathbb{C}l_n, i)_{n\in\mathbb{N}}$ directed sistemini düşünelim. Bu durumda

$$\mathbb{C}l_\infty = \lim_{n\to\infty} \mathbb{C}l_n$$

şeklinde sonlu boyutlu kompleks Clifford cebirlerinin direk limitidir. Sonlu boyutlu kompleks Clifford cebirleri için verilen bu temsilleri kullanarak

$$\begin{array}{rccc}
\psi_\infty : & \mathbb{C}l_\infty & \to & B(L^2\mathcal{K}) \\
& e_j & \mapsto & \psi_j(e_j)
\end{array}$$

dönüşümünü tanımlayalım.

Sonuç 3.4. *ψ_∞, $\mathbb{C}l_\infty$ cebrinin $L^2\mathcal{K}$ üzerinde bir temsilidir.*

Kanıt. $e_j \in \mathbb{C}l_\infty$ olsun. Her $n \geq j$ için $e_j \in \mathbb{C}l_n$ ve $\psi_j(e_j) = \psi_n(e_j)$ olduğuna dikkat çekelim. $e_p, e_q \in \mathbb{C}l_\infty$ ve $k = \max\{p, q\}$ olsun. Theorem 3.3 den ψ_k bir cebir homomorfizmasıdır. Buradan

$$\psi_\infty(e_pe_q) = \psi_k(e_pe_q) = \psi_k(e_p)\psi_k(e_q) = \psi_p(e_p)\psi_q(e_q) = \psi_\infty(e_p)\psi_\infty(e_q)$$

olarak elde edilir. Sonuç olarak ψ_∞ bir cebir homomorfizmasıdır ve böylece $\mathbb{C}l_\infty$ cebrinin $L^2\mathcal{K}$ üzerinde bir temsili elde edilmiş olur. □

Uyarı 3.5. *Elde ettiğimiz temsillerde kullanılan $\mathcal{K}$ çekicisi için verilen koşulu biraz daha gevşeterek μ, $\mathcal{K}$ üzerindeki Hausdorff ölçümünü göstermek üzere,*

$$\mu(\varphi_0(\mathcal{K}) \cap \varphi_1(\mathcal{K})) = 0$$

olarak değiştirebiliriz. Bu gevşetme, birim aralığı $\mathcal{K}$ olarak almamıza olanak sağlayacaktır. Fakat bu durumda T_j ve S_j dönüşümlerinin iyi tanımlı olamayacağına dikkat edelim. Bu sorunu gidermek için, $\mathcal{K}^j = \mathcal{K}_0^j \cap \mathcal{K}_1^j$ olmak üzere

T_j ve S_j dönüşümlerini,

$$(T_j f)(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x \in \mathcal{K}_0^j - \mathcal{K}^j \\ -f(x) & , \quad x \in \mathcal{K}_1^j - \mathcal{K}^j \\ 0 & , \quad x \in \mathcal{K}^j \end{cases}$$

$$(S_j f)(x) = \begin{cases} f(\widetilde{x}_j) & , \quad x \in \mathcal{K} - \mathcal{K}^j \\ 0 & , \quad x \in \mathcal{K}^j \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda da Yardımcı Teorem 3.2 ve Teorem 3.3 geçerliliğini korumaktadır.

3.2 Reel Clifford Cebirlerinin $L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{K})$ Üzerinde Temsil Edilmesi

$Cl_{p,q}$ reel Clifford cebrinin üreteçlerini $j \in \{1, 2, ..., p\}$ olmak üzere e_j ve $k = 1, 2, ..., q$ olmak üzere ε_k ile gösterelim. Burada ${e_j}^2 = 1 \quad \varepsilon_k^2 = -1$ dir. $L^2_{\mathbb{R}}\mathcal{K}$ uzayı $\mathcal{K}$ üzerinde karesi integre edilebilen reel değerli fonksiyonların oluşturduğu vektör uzayı olmak üzere bu bölümde $Cl_{p,q}$ cebrinin $L^2_{\mathbb{R}}\mathcal{K}$ uzayı üzerinde temsilleri elde edilmiştir. Bu amaçla $\mathbb{C}l_{2n}$ den $End_{\mathbb{R}}(L^2_{\mathbb{R}}\mathcal{K})$ nın bir alt cebri olan ve bu uzaydaki sınırlı lineer dönüşümlerin kümesi olan $B(L^2_{\mathbb{R}}\mathcal{K})$ ya bir cebir homomorfizmi verilecektir. Bu temsillerin inşaasında kompleks durumda kullandığımız tilt- ve switch- operatörlerini kullanacağız. (Bu durumda tilt- ve switch- operatörlerinin tanım uzayı olan $L^2_{\mathbb{R}}\mathcal{K}$ uzayının bu durumda reel vektör uzayı olduğunu vurgulayalım!).

Teorem 3.6.

$$
\begin{array}{rlll}
\phi: & e_1 & \mapsto & S_1 \\
& e_2 & \mapsto & S_2T_1 \\
& e_3 & \mapsto & S_3T_2T_1 \\
& \vdots & & \\
& e_p & \mapsto & S_pT_{p-1}T_{p-2}\cdots T_2T_1 \\
& \varepsilon_1 & \mapsto & S_1T_1 \\
& \varepsilon_2 & \mapsto & S_2T_2T_1 \\
& \varepsilon_3 & \mapsto & S_3T_3T_2T_1 \\
& \vdots & & \\
& \varepsilon_q & \mapsto & S_qT_qT_{q-1}T_{q-2}\cdots T_2T_1
\end{array}
$$

olarak tanımlanan $\phi : Cl_{p,q} \to B(L^2_{\mathbb{R}}\mathcal{K})$ dönüşümü bir cebir homomorfizmasıdır, yani $Cl_{p,q}$ cebrinin $L^2_{\mathbb{R}}\mathcal{K}$ uzayı üzerinde bir temsilidir.

Kanıt. ϕ dönüşümünün temsil olduğunu görmek için,

- $1 \le j \le p$, $1 \le k \le q$ olmak üzere,

$$(\phi(e_j))^2 = I, \ (\phi(\varepsilon_k))^2 = -I$$

- $1 \le j \le p, \quad 1 \le l \le p, \quad j \ne l, \ \phi(e_j)\phi(e_l) = -\phi(e_l)\phi(e_j)$

- $1 \le j \le q, \quad 1 \le l \le q, \quad j \ne l \ \ \phi(\varepsilon_j)\phi(\varepsilon_l) = -\phi(\varepsilon_l)\phi(\varepsilon_j)$

- $1 \leq j \leq p, \quad 1 \leq l \leq q, \quad \phi(e_j)\phi(\varepsilon_l) = -\phi(\varepsilon_l)\phi(e_j)$

olduğunu göstermeliyiz.

- Öncelikle $1 \leq j \leq p$ ve $1 \leq k \leq q$ olmak üzere,

$$(\phi(e_j))^2 = I \ , \quad (\phi(\varepsilon_k)^2) = -I$$

olduğunu göstereceğiz. $j = 1$ durumunda $(\phi(e_1))^2 = S_1 S_1 = I$ dir.

- $j > 1$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
(\phi(e_j))^2 &= (S_j T_{j-1} T_{j-2} \cdots T_2 T_1)(S_j T_{j-1} T_{j-2} \cdots T_2 T_1) \\
&= S_j S_j T_{j-1} T_{j-1} T_{j-2} T_{j-2} \cdots T_2 T_2 T_1 T_1 \\
&= I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\phi(\varepsilon_k))^2 &= (S_j T_j T_{j-1} T_{j-2} \cdots T_2 T_1)(S_j T_j T_{j-1} T_{j-2} \cdots T_2 T_1) \\
&= -S_j S_j T_j T_j T_{j-1} T_{j-1} \cdots T_2 T_2 T_1 T_1 \\
&= -I
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

- Şimdi üreteçler üzerindeki çarpmanın anti-komutatifliğini görelim. Yani,

$$\begin{array}{ll}
i) \ \ 1 \leq j \leq p, \ \ 1 \leq l \leq p, \ \ j \neq l \text{ için,} & \phi(e_j)\phi(e_l) = -\phi(e_l)\phi(e_j) \\
ii) \ \ 1 \leq j \leq q, \ \ 1 \leq l \leq q, \ \ j \neq l \text{ için,} & \phi(\varepsilon_j)\phi(\varepsilon_l) = -\phi(\varepsilon_l)\phi(\varepsilon_j) \\
iii) \ \ frm[o]--leqj \leq p, \ \ 1 \leq l \leq q \text{ için,} & \phi(e_j)\phi(\varepsilon_l) = -\phi(\varepsilon_l)\phi(e_j)
\end{array}$$

olduğunu gösterelim.

i) Öncelikle $2 \leq j \leq p$, $1 \leq l \leq q$ olmak üzere,

$$\phi(e_1)\phi(e_j) = -\phi(e_j)\phi(e_1) \ \text{ ve } \ \phi(e_1)\phi(\varepsilon_l) = -\phi(\varepsilon_l)\phi(e_1)$$

olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\phi(e_1)\phi(e_j) &= S_1(S_j T_{j-1} T_{j-2} \cdots T_2 T_1) \\
\text{(Yardımcı Teorem 3.2 den)} \quad &= -(S_j T_{j-1} T_{j-2} \cdots T_2 T_1) S_1 \\
&= -\phi(e_j)\phi(e_1)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\phi(e_1)\phi(\varepsilon_l) &= S_1(S_lT_lT_{l-1}T_{l-2}\cdots T_2T_1) \\
\text{(Yardımcı Teorem 3.2 den)} &= -(S_lT_lT_{l-1}T_{l-2}\cdots T_2T_1)S_1 \\
&= -\phi(\varepsilon_l)\phi(e_1)
\end{aligned}
$$

$1 < j < l \leq p$ olduğu durumda ise,

$$
\begin{aligned}
\phi(e_j)\phi(e_l) &= (S_jT_{j-1}T_{j-2}\cdots T_2T_1)(S_lT_{l-1}\cdots T_j\cdots T_2T_1) \\
&= (S_lT_{l-1}\cdots T_{j+1})(S_jT_{j-1}T_{j-2}\cdots T_2T_1)(T_jT_{j-1}\cdots T_2T_1) \\
&= -(S_lT_{l-1}\cdots T_{j+1}T_jT_{j-1}\cdots T_2T_1)(S_jT_{j-1}T_{j-2}\cdots T_2T_1) \\
&= -\phi(e_l)\phi(e_j)
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir.

ii) $1 \leq j < l \leq q$ olsun.

$$
\begin{aligned}
\phi(\varepsilon_j)\phi(\varepsilon_l) &= (S_jT_jT_{j-1}\cdots T_2T_1)(S_lT_lT_{l-1}\cdots T_j\cdots T_2T_1) \\
&= (S_lT_lT_{l-1}\cdots T_{j+1})(S_jT_jT_{j-1}\cdots T_2T_1)(T_jT_{j-1}\cdots T_2T_1) \\
&= -(S_lT_lT_{l-1}\cdots T_{j+1}T_jT_{j-1}\cdots T_2T_1)(S_jT_jT_{j-1}\cdots T_2T_1) \\
&= -\phi(\varepsilon_l)\phi(\varepsilon_j).
\end{aligned}
$$

iii) $j \leq l$, $1 < j \leq p$, $1 \leq l \leq q$ olmak üzere,

$$\phi(e_j)\phi(\varepsilon_l) = -\phi(\varepsilon_l)\phi(e_j)$$

olduğunu görelim.

$j = l$ ise,

$$
\begin{aligned}
\phi(e_j)\phi(\varepsilon_j) &= (S_jT_{j-1}\cdots T_2T_1)(S_jT_jT_{j-1}\cdots T_2T_1) \\
&= S_j(S_jT_{j-1}\cdots T_2T_1)(T_jT_{j-1}\cdots T_2T_1) \\
&= -(S_jT_jT_{j-1}\cdots T_2T_1)(S_jT_{j-1}\cdots T_2T_1) \\
&= -\phi(\varepsilon_j)\phi(e_j).
\end{aligned}
$$

$j < l$ ise,

$$\begin{aligned}
\phi(e_j)\phi(\varepsilon_l) &= (S_jT_{j-1}\cdots T_2T_1)(S^lT^lT_{l-1}\cdots T_j\cdots T_2T_1) \\
&= (S_lT_lT_{l-1}\cdots T_{j+1})(S_jT_{j-1}\cdots T_2T_1)(T_jT_{j-1}\cdots T_2T_1) \\
&= -(S_lT_lT_{l-1}\cdots T_2T_1)(S_jT_{j-1}\cdots T_2T_1) \\
&= -\phi(\varepsilon_l)\phi(e_j).
\end{aligned}$$

Son olarak $j > l$, $1 < j \leq p$, $1 \leq l \leq q$ olduğu durumda,

$$\begin{aligned}
\phi(e_j)\phi(\varepsilon_l) &= (S_jT_{j-1}\cdots T_l\cdots T_2T_1)(S_lT_lT_{l-1}\cdots T_2T_1) \\
&= -S_l(S_jT_{j-1}\cdots T_l\cdots T_2T_1)(T_lT_{l-1}\cdots T_2T_1) \\
&= -(S_lT_lT_{l-1}\cdots T_2T_1)(S_jT_{j-1}\cdots T_2T_1) \\
&= -\phi(\varepsilon_l)\phi(e_j).
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

$\square$

3.3 Temsillerin Uniterliği

Bu bölümde hem reel hem de kompleks Clifford cebirleri için verilen temsillerin uniter olduğunu göstereceğiz. Bunun için de üreteçlerin resimleri olan operatörlerin iç çarpımı koruduğunu göstermemiz gerekecektir. Üreteçlerin resimleri switch- ve tilt- operatörlerinin bir takım bileşkesi halinde olduğu için sadece switch- ve tilt- operatörlerinin uniter olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Öncelikle tilt- operatörlerinin uniter olduğunu yani iç çarpımı koruduğunu gösterelim. $i \in \mathbb{N}$ olmak üzere, T_i operatörünü alalım. $f, g \in L^2(\mathcal{K})$ olmak üzere,

$$< T_i f, T_i g >=< f, g >$$

olduğunu gösterelim. (μ, $\mathcal{K}$ nın Hausdorff ölçümü d olmak üzere d boyutlu Hausdorff ölçümünü göstersin.)

$$\begin{aligned}
< T_i f, T_i g > &= \int_{\mathcal{K}} (T_i f)(T_i g) d\mu && (3.1)\\
&= \int_{\mathcal{K}_0^i} (T_i f)(T_i g) d\mu + \int_{\mathcal{K}_1^i} (T_i f)(T_i g) d\mu && (3.2)\\
&= \int_{\mathcal{K}_0^i} f g d\mu + \int_{\mathcal{K}_1^i} (-f)(-g) d\mu && (3.3)\\
&= \int_{\mathcal{K}_0^i} f g d\mu + \int_{\mathcal{K}_1^i} f g d\mu && (3.4)\\
&= \int_{\mathcal{K}} f g d\mu && (3.5)\\
&= < f, g > && (3.6)
\end{aligned}$$

olarak iç çarpımın korunduğu gösterilmiş olur. Şimdi switch- operatörünün uniter olduğunu gösterelim. $i \in \mathbb{N}$ ve $f, g \in L^2(\mathcal{K})$ olmak üzere,

$$< S_i f, S_i g >=< f, g >$$

olduğunu gösterelim.

$$< S_i f, S_i g >= \int_{\mathcal{K}} (S_i f)(S_i g) d\mu \qquad (3.7)$$

$(S_i f)(S_i g) = S_i(f.g)$ olduğu kolayca doğrulanabilir. O halde, 3.7 eşitliği,

$$< S_i f, S_i g > = \int_{\mathcal{K}} (S_i f)(S_i g) d\mu \quad (3.8)$$

$$= \int_{\mathcal{K}} S_i(fg) d\mu \quad (3.9)$$

olur. $h \in L^2(\mathcal{K})$ olmak üzere, $\int S_i h d\mu = \int h d\mu$ dir. O halde,

$$< S_i f, S_i g >= \int_{\mathcal{K}} (S_i f)(S_i g) d\mu = \int_{\mathcal{K}} S_i(fg) d\mu = \int_{\mathcal{K}} fg d\mu =< f, g >$$

olarak elde edilir.

4 SONSUZ BOYUTLU KOMPLEKS CLIFFORD CEBRİNİN $L^2(\mathcal{K})$ UZAYI ÜZERİNDE FOCK TEMSİLİNE DENK BİR TEMSİLİ

Bu bölümde sonlu ve sonsuz boyutlu kompleks Clifford cebirleri için $L^2(\mathcal{K})$ üzerinde yeni bir temsil inşaa edilecek daha da ötesinde bu temsilin literatürde Fock temsili olarak bilinen temsile denk olduğu gösterilecektir.

Teorem 4.1.

$$\begin{array}{rlll} \phi: & \mathbb{C}l_\infty & \longrightarrow & B(L^2(\mathcal{K})) \\ & e_1 & \mapsto & T_1 \\ & e_2 & \mapsto & iT_1S_1 \\ & e_3 & \mapsto & T_2S_1 \\ & e_4 & \mapsto & iT_2S_2S_1 \\ & e_{2k-1} & \mapsto & T_kS_{k-1}S_{k-2}\cdots S_2S_1 \\ & e_{2k} & \mapsto & iT_kS_kS_{k-1}S_{k-2}\cdots S_2S_1 \end{array}$$

olmak üzere ϕ, $\mathbb{C}l_\infty$ un $L^2(\mathcal{K})$ üzerinde bir temsilidir.

Kanıt. ϕ nin $\mathbb{C}l_\infty$ un bir temsili olması için,

$$\forall i \in \mathbb{N}^+ \text{ için } (\phi(e_i))^2 = I \quad \text{ve}$$

$$\forall p \neq q, p, q \in \mathbb{N}^+ \text{ için } \phi(e_i)\phi(e_j) = -\phi(e_j)\phi(e_i)$$

eşitlikleri sağlanmalıdır. Öncelikle üreteçlerin görüntülerinin karelerinin I olduğunu gösterelim. Tilt- ve switch- operatörlerinin, karesi I olan dönüşümler olduğunu hatırlayacak olursak,

$$(\phi(e_1))^2 = T_1T_1 = I$$
$$(\phi(e_2))^2 = (iT_1S_1)(iT_1S_1) = i^2(-S_1T_1)(T_1S_1) = I \quad \text{(Yardımcı Teorem 3.2)}$$

olarak elde edilir.

Şimdi en genel durumda e_{2k-1} ve e_{2k} için ϕ dönüşümü altında resimlerinin karelerinin I olduğunu gösterelim.

$k > 1$ olsun.

$$(\phi(e_{2k-1}))^2 = (T_kS_{k-1}S_{k-2}\cdots S_2S_1)(T_kS_{k-1}S_{k-2}\cdots S_2S_1)$$

Yardımcı Teorem 3.2 (iii) den $\forall i = 1, 2 \cdots k-1$ için $S_i T_k = T_k S_i$ dir. O halde,

$$\begin{aligned}
(\phi(e_{2k-1}))^2 &= (T_k T_k S_{k-1} S_{k-2} \cdots S_2 S_1)(S_{k-1} S_{k-2} \cdots S_2 S_1) \\
&= (S_{k-1} S_{k-2} \cdots S_2 S_1)(S_{k-1} S_{k-2} \cdots S_2 S_1) \\
&= S_{k-1} S_{k-1} S_{k-2} S_{k-2} \cdots S_1 S_1 \text{ (Yardımcı Teorem 3.2 (ii) den)} \\
(\phi(e_{2k-1}))^2 &= I
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Diğer taraftan da,

$$\begin{aligned}
(\phi(e_{2k}))^2 &= (iT_k S_k S_{k-1} \cdots S_1)(iT_k S_k S_{k-1} \cdots S_1) \\
&= i^2 (T_k S_k S_{k-1} \cdots S_1)(T_k S_k S_{k-1} \cdots S_1)
\end{aligned}$$

$\forall i = 1, 2, \cdots, k-1$ için

$$S_i T_k = T_k S_i, \quad S_k T_k = -T_k S_k$$

ve $\forall k, l$ için

$$S_k S_l = S_l S_k$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}
(\psi(e_{2k}))^2 &= -(T_k S_k S_{k-1} \cdots S_1)(T_k S_k S_{k-1} \cdots S_1) \\
&= T_k T_k S_k S_k S_{k-1} S_{k-1} \cdots S_1 S_1 \\
&= I
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Şimdi anti-komutatifliği yani, $\forall i \neq j,\ i, j \in \mathbb{N}^+$ için

$$\phi(e_i)\phi(e_j) = -\phi(e_j)\phi(e_i)$$

olduğunu gösterelim. Öncelikle ilk iki üreteç için doğrulayalım.

$$\phi(e_1)\phi(e_2) = (T_1)(iT_1 S_1) = iT_1 T_1 S_1 = iS_1$$

dir.

$$\phi(e_2)\phi(e_1) = (iT_1 S_1)(T_1) = -iT_1 T_1 S_1 = -iS_1 = -\phi(e_1)\phi(e_2)$$

dir. Şimdi $k > 1$ olmak üzere,

- $\phi(e_1)\phi(e_{2k-1}) = -\phi(e_{2k-1})\phi(e_1)$ olduğunu görelim.

$$\phi(e_1)\phi(e_{2k-1}) = (T_1)(T_k S_{k-1} S_{k-2} \cdots S_1)$$

$\forall i \neq 1$ için

$$T_1 S_i = S_i T_1 \ , \ T_1 T_k = T_k T_1 \text{ ve } T_1 S_1 = -S_1 T_1$$

olduğundan,

$$\phi(e_1)\phi(e_{2k-1}) = -(T_k S_{k-1} S_{k-2} \cdots S_1)(T_1) = -\phi(e_{2k-1})\phi(e_1)$$

dir. Benzer biçimde,

$$\begin{aligned} \phi(e_1)\phi(e_{2k}) &= (T_1)(iT_k S_k S_{k-1} \cdots S_1) \\ &= -(iT_k S_k S_{k-1} \cdots S_1)(T_1) \\ &= -\phi(e_{2k})\phi(e_1) \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

- $\phi(e_2)\phi(e_{2k-1}) = \phi(e_{2k-1}\phi(e_2))$ olduğunu gösterelim.

$$\phi(e_2)\phi(e_{2k-1}) = (iT_1 S_1)(T_k S_{k-1} S_{k-2} \cdots S_1)$$

dir. Burada $k > 1$ olduğundan $S_1 T_k = T_k S_1$ dir. Diğer yer değiştirmelerde de Yardımcı Teorem 3.2 (ii) özelliğini kullanarak,

$$\begin{aligned} \phi(e_2)\phi(e_{2k-1}) &= -(T_k S_{k-1} S_{k-2} \cdots S_1)(iT_1 S_1) \\ &= -\phi(e_{2k-1})\phi(e_2) \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Benzer biçimde $\phi(e_2)\phi(e_{2k}) = -\phi(e_{2k})\phi(e_2)$ olduğu gösterilebilir.

Şimdi en genel durumda $i, j > 2$ olmak üzere

$$\phi(e_i)\phi(e_j) = -\phi(e_j)\phi(e_i)$$

olduğunu gösterelim.

- $k, l > 1$ olmak üzere $i = 2k-1, j = 2l-1$ ve $k < l$ olsun.

$$\begin{aligned}
\phi(e_{2k-1})\phi(e_{2l-1}) &= (T_k S_{k-1} \cdots S_1)(T_l S_{l-1} \cdots S_k S_{k-1} \cdots S_1) \\
&= -(S_{k-1} \cdots S_1)(T_l S_{l-1} \cdots S_k S_{k-1} \cdots S_1)(T_k) \\
&= -(T_l S_{l-1} \cdots S_k S_{k-1} \cdots S_1)(T_k S_{k-1} \cdots S_1) \\
&= -\phi(e_{2l-1})\phi(e_{2k-1})
\end{aligned}$$

  olarak istenilen eşitlik elde edilir.

- $i = 2k-1, j = 2l$ ve $k < l$ olsun.

$$\begin{aligned}
\phi(e_{2k-1})\phi(e_{2l}) &= (T_k S_{k-1} S_{k-2} \cdots S_1)(iT_l S_l S_{l-1} \cdots S_k S_{k-1} \cdots S_1) \\
&= -(S_{k-1} \cdots S_1)(iT_l S_l S_{l-1} \cdots S_k S_{k-1} \cdots S_1)(T_k) \\
&= -(iT_l S_l S_{l-1} \cdots S_k S_{k-1} \cdots S_1)(T_k S_{k-1} S_{k-2} \cdots S_1) \\
&= -\phi(e_{2l})\phi(e_{2k-1})
\end{aligned}$$

- $i = 2k, j = 2l-1$ ve $k < l$ olsun.

$$\begin{aligned}
\phi(e_{2k})\phi(e_{2l-1}) &= (iT_k S_k S_{k-1} \cdots S_1)(T_l S_{l-1} \cdots S_k S_{k-1} \cdots S_1) \\
&= -(iS_k S_{k-1} \cdots S_1)(T_l S_{l-1} \cdots S_k S_{k-1} \cdots S_1)(T_k) \\
&= -(T_l S_{l-1} \cdots S_k S_{k-1} \cdots S_1)(T_k S_k S_{k-1} S_{k-2} \cdots S_1) \\
&= -\phi(e_{2k})\phi(e_{2l-1})
\end{aligned}$$

olarak istenilen eşitlikler sağlanmış olur.

□

Böylece sonsuz boyutlu kompleks Clifford cebri $\mathbb{C}l_\infty$ için $L^2(\mathcal{K})$ üzerinde bir temsil elde edilmiştir. Şimdi elde edilen bu yeni ϕ temsilinin $\mathbb{C}l_\infty$ cebrinin Fock temsiline denk bir temsil olduğunu göstereceğiz. Bunun için kısaca sonsuz boyutlu Clifford cebri için Fock temsilinin nasıl inşaa edildiğini hatırlayalım. V sonsuz boyutlu reel Hilbert uzayı ve $\{e_1, e_2, \cdots e_n, \cdots\}$ V vektör uzayının birimdikey bir tabanı olsun. Sonsuz boyutlu kompleks Clifford cebri üzerindeki Fock temsilini elde etmek için öncelikle V vektör uzayını kompleks Hilbert uzayına dönüştüreceğiz. Bu dönüştürme işlemini V üzerinde tanımlı bir uniter yapı ile gerçekleştireceğiz. $k > 1$ olmak üzere,

$$\begin{array}{cccc} J: & V & \rightarrow & V \\ & e_1 & \mapsto & e_2 \\ & e_2 & \mapsto & -e_1 \\ & \vdots & & \\ & e_{2k-1} & \mapsto & e_{2k} \\ & e_{2k} & \mapsto & -e_{2k-1} \\ & \vdots & & \end{array} \tag{4.1}$$

uniter yapısını düşünelim.

Teorem 4.2. *$\mathbb{C}l_\infty$ cebrinin $L^2(\mathcal{K})$ üzerindeki ϕ temsili ile π_J Fock temsili birbirine denk temsillerdir.*

Kanıt. Öncelikle temsil denkliğini hatırlayalım. Bir A cebrinin V ve W vektör uzayı üzerinde birbirinden farklı φ ve ψ olmak üzere iki temsili verilsin. Bu temsillerin denk olması için gerek ve yeter şart $\forall a \in A$ için,

$$\begin{array}{ccc} V & \stackrel{\varphi(a)}{\rightarrow} & V \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ W & \underset{\psi(a)}{\rightarrow} & W \end{array}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde tek türlü belirli bir $f : V \rightarrow W$ lineer izomorfizması var olmalıdır. Şimdi $L^2(\mathcal{K})$ uzayı ile Fock uzayı arasnda $\forall a \in \mathbb{C}l_\infty$ için,

$$\begin{array}{ccc} L^2(\mathcal{K}) & \stackrel{\phi(a)}{\rightarrow} & L^2(\mathcal{K}) \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ \mathbb{H}_J(V) & \underset{\pi(a)}{\rightarrow} & \mathbb{H}_J(V) \end{array} \tag{4.2}$$

diyagramını değişmeli yapacak şekilde bir f lineer izomorfizması tanımlayacağız.

Bunun için $L^2(\mathcal{K})$ nın

$$1, T_1(1), T_2(1), T_1T_2(1), T_3(1), T_1T_3(1), T_2T_3(1), T_1T_2T_3(1), \cdots$$

sıralı tabanını(Bakınız [9]) ve $\mathbb{H}_J(V)$ vektör uzayının

$$\{1, e_1, e_3, e_1 \wedge e_3, e_5, e_1 \wedge e_5, e_3 \wedge e_5, e_1 \wedge e_3 \wedge e_5, \cdots\}$$

sıralı tabanını alalım ve f dönüşümünü,

$$\begin{array}{rlll} f: & L^2(\mathcal{K}) & \rightarrow & \mathbb{H}_J(V) \\ & 1 & \mapsto & 1 \\ & T_1(1) & \mapsto & e_1 \\ & T_2(1) & \mapsto & e_3 \\ & T_1T_2(1) & \mapsto & e_1 \wedge e_3 \\ & T_3(1) & \mapsto & e_5 \\ & T_1T_3(1) & \mapsto & e_1 \wedge e_5 \\ & T_2T_3(1) & \mapsto & e_3 \wedge e_5 \\ & T_1T_2T_3(1) & \mapsto & e_1 \wedge e_3 \wedge e_5 \\ & \vdots & & \\ & T_k(1) & \mapsto & e_{2k-1} \\ & T_{i_1}T_{i_2}\cdots T_{i_r} & \mapsto & e_{2i_1-1} \wedge e_{2i_2-1} \wedge \cdots \wedge e_{2i_r-1} \\ & \vdots & & \end{array} \tag{4.3}$$

olmak üzere taban elemanları üzerinde tanımlayalım ve lineer olarak genişletelim. Tanımlanan f dönüşümünün $1-1$ ve örten olduğu açıktır. Şimdi bu şekilde tanımlı f lineer dönüşümü için 4.2 diyagramının komutatif olduğunu gösterelim. Bunun için keyfi $a \in \mathbb{C}l_\infty$ için diyagramın değişmeli olduğunu göstermek yerine $\mathbb{C}l_\infty$ un her bir taban elemanı için diyagramın değişmeli olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

Yardımcı Teorem 4.3.

$$\begin{array}{ccc} L^2(\mathcal{K}) & \overset{\phi(a)}{\rightarrow} & L^2(\mathcal{K}) \\ f\downarrow & & \downarrow f \\ \mathbb{H}_J(V) & \underset{\pi(a)}{\rightarrow} & \mathbb{H}_J(V) \end{array}$$

diyagramı $k \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere $\forall e_k \in \mathbb{C}l_\infty$ için değişmeli ise $\forall a \in \mathbb{C}l_\infty$ için de değişmelidir.

Kanıt. Öncelikle $\forall e_k \in \mathbb{C}l_\infty$ için değişmeli iken $i, j \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere $e_ie_j \in \mathbb{C}l_\infty$ için de değişmeli olduğunu görelim. $\forall e_k \in \mathbb{C}l_\infty$ için diyagram değişmeli olduğundan,

$$f \circ \phi(e_k) \ = \ \pi(e_k) \circ f$$

dir. Şimdi,

$$f \circ \phi(e_i e_j) = \pi(e_i e_j) \circ f$$

olduğunu gösterelim. ϕ bir cebir homomorfizması olduğundan,

$$\begin{aligned}
f \circ \phi(e_i e_j) &= f \circ (\phi(e_i) \circ \phi(e_j)) \\
&= (f \circ \phi(e_i)) \circ \phi(e_j) \\
&= (\pi(e_i) \circ f) \circ \phi(e_j) \\
&= \pi(e_i) \circ (f \circ \phi(e_j)) \\
&= \pi(e_i) \circ (\pi(e_j) \circ f) \\
&= \pi(e_i) \circ \pi(e_j) \circ f \\
f \circ \phi(e_i e_j) &= \pi(e_i e_j) \circ f \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

şeklindedir. Şimdi $c = e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k}$, $d = e_{j_1} e_{j_2} \cdots e_{j_l}$ olmak üzere, $\mathbb{C}l_\infty$ un c ve d şeklinde elemanları için diyagram komutatifse onların herhangi lineer toplamı için de komutatif olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
f \circ \phi(\alpha c + \beta d) &= f \circ (\alpha\phi(c) + \beta\phi(d))(\ \phi \text{ cebir hom. old.}) \\
&= \alpha(f \circ \phi(c)) + \beta(f \circ \phi(d)) \ (f \text{ lineer old.}) \\
&= \alpha(\pi(c) \circ f) + \beta(\pi(d) \circ f) \\
&= (\alpha\pi(c) + \beta\pi(d)) \circ f \\
&= \pi(\alpha c + \beta d) \circ f \qquad (4.5)
\end{aligned}$$

olarak istenilen eşitlik elde edilir. Sonuç olarak eğer $\forall e_i \in \mathbb{C}l_\infty$ için 4.2 diyagramı komutatif ise keyfi bir $a \in \mathbb{C}l_\infty$ elemanı bu şekildeki e_i lerin sonlu çarpımlarının sonlu bir lineer toplamı olacağından 4.4 ve 4.5 eşitliklerinden dolayı keyfi seçilen $a \in \mathbb{C}l_\infty$ içinde ilgili diyagram komutatif olacaktır.

□

Motivasyon olarak önce e_1 ve e_2 için ilgili diyagramın değişmeli olduğunu gösterelim. Daha sonra genel durumda herhangi bir e_i, $i \in \mathbb{N}^+$ için gösterilecektir.

- e_1 için: Özel olarak $1, T_1(1), T_2(1), T_1T_2(1)$ taban elemanları için diyagram üzerinde resimlerinin eşitliğini görelim.

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, mapsto, "\phi(e_1)"] \arrow[d, mapsto, "f"'] & T_1(1) \arrow[d, mapsto, "f"] \\
1 \arrow[r, mapsto, "\pi(e_1)"'] & e_1
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T_1(1) \arrow[r, mapsto, "\phi(e_1)"] \arrow[d, mapsto, "f"'] & 1 \arrow[d, mapsto, "f"] \\
e_1 \arrow[r, mapsto, "\pi(e_1)"'] & 1
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
T_2(1) \arrow[r, mapsto, "\phi(e_1)"] \arrow[d, mapsto, "f"'] & T_1T_2(1) \arrow[d, mapsto, "f"] \\
e_3 \arrow[r, mapsto, "\pi(e_1)"'] & e_1 \wedge e_3
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T_1T_2(1) \arrow[r, mapsto, "\phi(e_1)"] \arrow[d, mapsto, "f"'] & T_2(1) \arrow[d, mapsto, "f"] \\
e_1 \wedge e_3 \arrow[r, mapsto, "\pi(e_1)"'] & e_3
\end{tikzcd}
$$

Şimdi $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ olmak üzere keyfi $T_{i_1}T_{i_2}\cdots T_{i_k}(1) \in L^2K$ taban elemanı için 4.2 diyagramının değişmeli olduğunu cebirsel olarak gösterelim. Yani,

$$[f \circ \phi(e_1)](T_{i_1}T_{i_2}\cdots T_{i_k}(1)) = [\pi(e_1) \circ f](T_{i_1}T_{i_2}\cdots T_{i_k}(1))$$

olduğunu görelim.

$$
\begin{aligned}
[f \circ \phi(e_1)](T_{i_1}T_{i_2}\cdots T_{i_k}(1)) &= f(\phi(e_1)(T_{i_1}T_{i_2}\cdots T_{i_k}(1))) \\
&= f(T_1T_{i_1}T_{i_2}\cdots T_{i_k}(1)) \\
(f \circ \phi(e_1))(T_{i_1}T_{i_2}\cdots T_{i_k}(1)) &= \begin{cases} e_1 \wedge e_{2i_1-1} \wedge \cdots \wedge e_{2i_k-1}\ , & i_1 \neq 1 \\ e_{2i_2-1} \wedge \cdots \wedge e_{2i_k-1}\ , & i_1 = 1 \end{cases}
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

olarak elde edilir. Diğer taraftan,

$$
\begin{aligned}
[\pi(e_1) \circ f](T_{i_1}T_{i_2}\cdots T_{i_k}(1)) &= \pi(e_1)(f(T_{i_1}T_{i_2}\cdots T_{i_k}(1))) \\
&= \pi(e_1)(e_{2i_1-1} \wedge e_{2i_2-1} \wedge \cdots \wedge e_{2i_k-1}) \\
(\pi(e_1) \circ f)(T_{i_1}T_{i_2}\cdots T_{i_k}(1)) &= \begin{cases} e_1 \wedge e_{2i_1-1} \wedge \cdots \wedge e_{2i_k-1}\ , & i_1 \neq 1 \\ e_{2i_2-1} \wedge \cdots \wedge e_{2i_k-1}\ , & i_1 = 1 \end{cases}
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

olarak elde edilir. Böylece 4.6 ve 4.7 den istenilen eşitlik gösterilmiş olur.

- e_2 için:

$$
\begin{aligned}
[f \circ \phi(e_2)](T_{i_1}T_{i_2}\cdots T_{i_k}(1)) &= f(\phi(e_2)(T_{i_1}T_{i_2}\cdots T_{i_k}(1))) \\
&= f(iT_1S_1T_{i_1}T_{i_2}\cdots T_{i_k}(1)) \\
&= \begin{cases} f(iT_1T_{i_1}T_{i_2}\cdots T_{i_k}(1)) \ , & i_1 \neq 1 \\ f(-iT_{i_2}\cdots T_{i_k}(1)) \ , & i_1 = 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} ie_1 \wedge e_{2i_1-1} \wedge \cdots \wedge e_{2i_k-1} \ , & i_1 \neq 1 \\ -ie_{2i_2-1} \wedge \cdots \wedge e_{2i_k-1} \ , & i_1 = 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

dir. Diğer taraftan,

$$
\begin{aligned}
[\pi(e_2) \circ f](T_{i_1}T_{i_2}\cdots T_{i_k}(1)) &= \pi(e_2)(f(T_{i_1}T_{i_2}\cdots T_{i_k}(1))) \\
&= \pi(e_2)(e_{2i_1-1} \wedge \cdots \wedge e_{2i_k-1}) \\
&= \begin{cases} ie_1 \wedge e_{2i_1-1} \wedge \cdots \wedge e_{2i_k-1} \ , & i_1 \neq 1 \\ -ie_{2i_2-1} \wedge \cdots \wedge e_{2i_k-1} \ , & i_1 = 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir ki elde edilen eşitliklerden,

$$[f \circ \phi(e_2)](T_{i_1}T_{i_2}\cdots T_{i_k}(1)) = [\pi(e_2) \circ f](T_{i_1}T_{i_2}\cdots T_{i_k}(1))$$

eşitliği gösterilmiş olur.

Şimdi en genel durumda keyfi $e_i \in \mathbb{C}l_\infty$ için

$$[f \circ \phi(e_i)](T_{i_1}T_{i_2}\cdots T_{i_k}(1)) = [\pi(e_i) \circ f](T_{i_1}T_{i_2}\cdots T_{i_k}(1))$$

olduğunu gösterelim. Bu durumda ϕ temsili üreteç elemanının tek veya çift indisli oluşuna göre farklı tanımlandığı için iki durum için de eşitliğin sağlandığını göstereceğiz.

- $l > 1$ olmak üzere $i = 2l - 1$ durumu:

$$(f \circ \phi(e_{2l-1}))(T_{i_1}T_{i_2}\cdots T_{i_k}(1)) = (\pi(e_{2l-1}) \circ f)(T_{i_1}T_{i_2}\cdots T_{i_k}(1))$$

olduğunu gösterelim.

$$
\begin{aligned}
[f \circ \phi(e_{2l-1})](T_{i_1}T_{i_2}\cdots T_{i_k}(1)) &= f(\phi(e_{2l-1})(T_{i_1}T_{i_2}\cdots T_{i_k}(1))) \\
&= f(T_lS_{l-1}S_{l-2}\cdots S_2S_1T_{i_1}T_{i_2}\cdots T_{i_k}(1))
\end{aligned}
$$

dir. Burada tilt- ve switch- operatörlerinin kendi aralarında yer değişimi sırasında işaret değiştirdiği durumları göz önüne alacağız. $S_{l-1}S_{l-2}\cdots S_2S_1$ operatörlerini sırayla $T_{i_1}T_{i_2}\cdots T_{i_k}$ üzerinden atlatarak gerekli sadeleştirmeleri yapacağız. Burada switch- operatörlerini tilt- operatörleri üzerinden atlatmamızın sebebi $\forall i \in \mathbb{N}^+$ için $S_i(1) = 1$ olmasıdır. Böylece

$$S_{l-1}S_{l-2}\cdots S_2S_1(1) = 1$$

olacaktır. Bunun için şöyle bir küme tanımlayalım.

$$A = \{i_j \mid \exists\, t = 1, 2, \cdots, l-1 \text{ için } i_j = t, j = 1, 2, \cdots, k\}$$

Bu kümeyi tanımlamaktaki maksadımız biliyoruz ki bir switch operatörü ile bir tilt- operatörü sadece aynı indisli olduğu durumda yer değiştirme sırasında işaret değiştirmektedir. Diğer bütün yer değiştirmelerde işaret değişmemektedir. Onun için indisi aynı olan switch- ve tilt- operatörlerinin sayısını belirlememiz gerekmektedir. Çünkü yer değiştirme sırasında o kadar işaret değişimi olacaktır. O halde $|A|$, A nın eleman sayısını göstermek üzere,

$$S_{l-1}S_{l-2}\cdots S_2S_1T_{i_1}T_{i_2}\cdots T_{i_k} = (-1)^{|A|}T_{i_1}T_{i_2}\cdots T_{i_k}$$

olacaktır. Böylece,

$$\begin{aligned} f(\phi(e_{2l-1})(T_{i_1}T_{i_2}\cdots T_{i_k}(1)) &= f(T_lS_{l-1}S_{l-2}\cdots S_2S_1T_{i_1}T_{i_2}\cdots T_{i_k}(1)) \\ &= f((-1)^{|A|}T_lT_{i_1}T_{i_2}\cdots T_{i_k}(1)) \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} f((-1)^{j_0-1}T_{i_1}T_{i_2}\cdots \hat{T}_{i_{j_0}}\cdots T_{i_k}(1)), & i_{j_0} = l \\ f((-1)^{|A|}T_lT_{i_1}T_{i_2}\cdots T_{i_k}(1)), & \forall j \in \{1, 2, \cdots, k\} i_j \neq l \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (-1)^{j_0-1}e_{2i_1-1}\wedge\cdots\wedge\hat{e}_{2i_{j_0}-1}\wedge\cdots\wedge e_{2i_k-1}, & i_{j_0} = l \\ e_{2l-1}\wedge e_{2i_1-1}\wedge\cdots\wedge e_{2i_k-1}, & 1 \le j \le k,\ \ l \le i_j \\ & (\ A = \emptyset) \\ (-1)^{j_1}e_{2i_1-1}\wedge\cdots\wedge e_{2i_{j_1}-1}\wedge e_{2l-1}\wedge e_{2i_{j_2}-1}\wedge\cdots\wedge e_{2i_k-1}, & i_{j_1} < l < i_{j_2} \\ & (\ A = \{i_1, i_2, \cdots, i_{j_1}\}) \\ (-1)^k e_{2i_1-1}\wedge\cdots\wedge e_{2i_k-1}\wedge e_{2l-1}, & 1 \le j \le k,\ \ l \ge i_j \\ & (\ A = \{i_1, i_2, \cdots, i_k\} \end{cases} \quad (4.8)$$

olarak elde edilir. Şimdi eşitliğin diğer tarafı

$$[\pi(e_{2l-1}) \circ f](T_{i_1}T_{i_2}\cdots T_{i_k}(1))$$

in açık ifadesini elde edelim.

$$\pi(e_{2l-1})[f(T_{i_1}T_{i_2}\cdots T_{i_k}(1))] \;=\; \pi(e_{2l-1})[e_{2i_1-1} \wedge e_{2i_2-1} \wedge \cdots \wedge e_{2i_k-1}]$$

dir. Buradan devam edildiği takdirde,

$$= \begin{cases} (-1)^{j_0-1} e_{2i_1-1} \wedge \cdots \wedge \hat{e}_{2i_{j_0}-1} \wedge \cdots \wedge e_{2i_k-1}\ , & i_{j_0} = l \\ e_{2l_1-1} \wedge e_{2i_1-1} \wedge \cdots \wedge e_{2i_k-1}\ , & 1 \leq j \leq k,\ l \leq i_j \\ (-1)^{j_1} e_{2i_1-1} \wedge \cdots \wedge e_{2i_{j_1}-1} \wedge e_{2l-1} \wedge e_{2i_{j_2}-1} \wedge \cdots \wedge e_{2i_k-1}\ , & i_{j_1} < l < i_{j_2} \\ (-1)^k e_{2i_1-1} \wedge \cdots \wedge e_{2i_k-1} \wedge e_{2l-1}\ , & 1 \leq j \leq k,\ \ l \geq i_j \end{cases} \tag{4.9}$$

olarak elde edilir. Böylece 4.8 ve 4.9 eşitliklerinden

$$f(\phi(e_{2l-1})(T_{i_1}T_{i_2}\cdots T_{i_k}(1)) = \pi(e_{2l-1})[f(T_{i_1}T_{i_2}\cdots T_{i_k}(1))]$$

olduğu gösterilmiş olur.

- $i = 2l, l > 1$ durumu:

  $(f \circ \phi(e_{2l}))(T_{i_1}T_{i_2}\cdots T_{i_k}(1)) = (\pi(e_{2l}) \circ f)(T_{i_1}T_{i_2}\cdots T_{i_k}(1))$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} [f \circ \phi(e_{2l})](T_{i_1}T_{i_2}\cdots T_{i_k}(1)) &= f(\phi(e_{2l})(T_{i_1}T_{i_2}\cdots T_{i_k}(1))) \\ &= f(iT_lS_lS_{l-1}S_{l-2}\cdots S_2S_1T_{i_1}T_{i_2}\cdots T_{i_k}(1)) \end{aligned}$$

dir. Burada da Tilt- ve Switch- operatörlerinin kendi aralarında yer değişimi sırasında işaret değiştirdiği durumları göz önüne alacağız.
$S_lS_{l-1}S_{l-2}\cdots S_2S_1$ operatörlerini sırayla $T_{i_1}T_{i_2}\cdots T_{i_k}$ üzerinden atlatarak gerekli sadeleştirmeleri yapacağız. Burada switch- operatörlerini tilt- operatörleri üzerinden atlatmamızın sebebi yine $\forall i \in \mathbb{N}^+$ için $S_i(1) = 1$ olmasıdır. Böylece $S_lS_{l-1}S_{l-2}\cdots S_2S_1(1) = 1$ olacak ve bir çok terim ortadan kalkacaktır. Bunun için şöyle bir küme tanımlayalım.

$$B = \{i_j \mid \exists\ t = 1, 2, \cdots, l \text{ için } i_j = t, j = 1, 2, \cdots, k\}$$

Böylece indisi aynı olan switch- ve tilt- operatörlerinin sayısı tanımladığımız B kümesinin eleman sayısı olacaktır. Ohalde $|B|$, B kümesinin eleman sayısını göstermek üzere,

$$S_l S_{l-1} S_{l-2} \cdots S_2 S_1 T_{i_1} T_{i_2} \cdots T_{i_k} = (-1)^{|B|} T_{i_1} T_{i_2} \cdots T_{i_k}$$

olacaktır. O halde,

$$\begin{aligned}
f(\phi(e_{2l})(T_{i_1} T_{i_2} \cdots T_{i_k}(1)) &= f(iT_l S_l S_{l-1} S_{l-2} \cdots S_2 S_1 T_{i_1} T_{i_2} \cdots T_{i_k}(1)) \\
&= f((-1)^{|B|} i T_l T_{i_1} T_{i_2} \cdots T_{i_k}(1)) \\
&= \begin{cases} f(i(-1)^{|B|} T_{i_1} T_{i_2} \cdots \hat{T}_{i_{j_0}} \cdots T_{i_k}(1)) \ , & i_{j_0} = l \\ f(i(-1)^{|B|} T_l T_{i_1} T_{i_2} \cdots T_{i_k}(1)) \ , & 1 \leq j \leq k, \\ & i_j \neq l \end{cases}
\end{aligned}$$

$$= i \begin{cases} (-1)^{j_0} e_{2i_1-1} \wedge e_{2i_2-1} \wedge \cdots \wedge \hat{e}_{2i_{j_0}-1} \wedge \cdots \wedge e_{2i_k-1} \ , & i_{j_0} = l \\ e_{2l-1} \wedge e_{2i_1-1} \wedge \cdots \wedge e_{2i_k-1} \ , & 1 \leq j \leq k, \ \ l \leq i_j \\ (-1)^{j_1} e_{2i_1-1} \wedge \cdots \wedge e_{2i_{j_1}-1} \wedge e_{2l-1} \wedge e_{2i_{j_2}-1} \wedge \cdots \wedge e_{2i_k-1} \ , & i_{j_1} < l < i_{j_2} \\ (-1)^k e_{2i_1-1} \wedge e_{2i_2-1} \wedge \cdots \wedge e_{2i_k-1} \wedge e_{2l-1} \ , & 1 \leq j \leq k, \ \ l \geq i_j \end{cases} \tag{4.10}$$

olarak elde edilir. Şimdi eşitliğin diğer tarafı

$$[\pi(e_{2l}) \circ f](T_{i_1} T_{i_2} \cdots T_{i_k}(1))$$

ifadesini açalım.

$$\pi(e_{2l})[f(T_{i_1} T_{i_2} \cdots T_{i_k}(1))] = \pi(e_{2l})[e_{2i_1-1} \wedge e_{2i_2-1} \wedge \cdots \wedge e_{2i_k-1}]$$

$$= \begin{cases} -i(-1)^{j_0-1} e_{2i_1-1} \wedge e_{2i_2-1} \wedge \cdots \wedge \hat{e}_{2i_{j_0}-1} \wedge \cdots \wedge e_{2i_k-1} \ , & i_{j_0} = l \\ i e_{2l-1} \wedge e_{2i_1-1} \wedge \cdots \wedge e_{2i_k-1} \ , & 1 \leq j \leq k, \ \ l \leq i_j \\ i(-1)^{j_1} e_{2i_1-1} \wedge \cdots \wedge e_{2i_{j_1}-1} \wedge e_{2l-1} \wedge e_{2i_{j_2}-1} \wedge \cdots \wedge e_{2i_k-1} \ , & i_{j_1} < l < i_{j_2} \\ i(-1)^k e_{2i_1-1} \wedge e_{2i_2-1} \wedge \cdots \wedge e_{2i_k-1} \wedge e_{2l-1} \ , & 1 \leq j \leq k, \ \ l \geq i_j \end{cases} \tag{4.11}$$

olarak elde edilir. Böylece 4.10 ve 4.11 eşitliklerinin bir sonucu olarak,

$$(f \circ \phi(e_{2l}))(T_{i_1} T_{i_2} \cdots T_{i_k}(1)) = (\pi(e_{2l}) \circ f)(T_{i_1} T_{i_2} \cdots T_{i_k}(1))$$

eşitliği elde edilir. Tüm üreteçler için diyagram komutatif olduğundan ϕ temsili ile π_J Fock temsilinin denk temsiller olduğu gösterilmiş olur. □

KAYNAKLAR

[1] BARNSLEY, M. F., *Fractals Everywhere*, London: Academic Press, (1993).

[2] EDGAR, G., *Measure, Topology and Fractal Geometry*, USA: Springer,(2000).

[3] FALCONER, K., *Fractal Geometry*, USA: Wiley, (2003).

[4] FRIEDRICH, T., *Dirac Operators in Riemannian Geometry*, USA: American Mathematical Society, (2000).

[5] LAWSON, H. B., MICHELSOHN, M.-L., *Spin Geometry*, USA: Princeton University Press, (1989).

[6] PLYMEN, R. J., ROBINSON, P. L., *Spinors in Hilbert Space*, USA: Cambridge University Press, (1994).

[7] SUZUKI, O., LAWRYNOWICZ, J., *A Fractal Method for Infinite Dimensional Clifford Algebras and The Related Wavelet Bundles*, Bul. des Scie de Lodz, **LIII**, 53-70(2003).

[8] MORI, M., SUZUKI, O., WATATANI, Y., *Representations of Cuntz Algebras on Fractal Sets*, Kyushu J. Math., **61**, 443-456(2007).

[9] KAWAMURA, K., SUZUKI, O., *Construction of Orthonormal Basis on Self Similar Sets by Generalized Permutative Representations of The Cuntz Algebras*, Preprint.