KONVEKS ANALİZDE EŞLENİKLİK

Didem TOKASLAN
Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Haziran – 2009

Bu tez çalışması Anadolu Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyonu Başkanlığı tarafından desteklenmiştir. Proje No: 081030

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Didem Tokaslan'ın **"Konveks Analizde Eşleniklik"** başlıklı **Matematik** Anabilim Dalındaki, Yüksek Lisans Tezi 22.06.2009 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

		Adı Soyadı	**İmza**
Üye (Tez Danışmanı)	**:**	**Prof. Dr. MAHİDE KÜÇÜK**	....
Üye	**:**	**Prof. Dr. ABBAS AZİMOV**	....
Üye	**:**	**Prof. Dr. VAKIF CAFER**	....

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KONVEKS ANALİZDE EŞLENİKLİK

Didem Tokaslan

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mahide Küçük

2009, 196 sayfa

Duallik kavramı matematiğin birçok alanında ortaya çıkar. Matematikçiler bir problemle karşılaşınca bu problemi, görünüşü orijinal problemden oldukça farklı fakat çözümü daha kolay olan başka bir probleme dönüştürüp çözmek isterler. Duallik teoremlerinden her biri bir diğerinin dengi olan iki matematiksel teori içerir.

Beş bölümden oluşan bu çalışmada, son yıllardaki araştırmalarda sıklıkla karşılaşılan, bir konveks fonksiyona, bunun eşleniği diyeceğimiz bir başka konveks fonksiyonu karşılık getirerek, duallik kavramına bir giriş yapılmış, konveks fonksiyonlar ve konveks eşlenikleri arasındaki ilişkiler araştırılmıştır.

Çalışmanın ilk bölümünde, çalışma için gerekli olan tanımlar ve teoremler verilmiştir. İkinci bölümde sublineerlik kavramı tanımlanmış ve bazı özellikleri incelenmiştir.

Üçüncü bölümde sonlu konveks fonksiyonlar için subdiferansiyel tanımı üç farklı şekilde verilerek, bu tanımların birbirine denkliği gösterilmiştir. Daha sonra, subdiferansiyelin yerel özellikleri incelenmiş ve bazı fonksiyonların subdiferansiyelleri hesaplanmıştır.

Dördüncü bölümde sırasıyla $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ ve herhangi bir topolojik vektör uzayı üzerinde tanımlı gerçel değerli fonksiyonlar için eşleniklik kavramı tanıtılmıştır. Eşlenik fonksiyonun temel özellikleri incelenerek subdiferansiyel kavramı ile ilişkisi verilmiştir.

Son bölümde konveks optimizasyon problemleri tanıtılarak, eşlenik fonksiyonu yardımıyla bu problemlerin dual problemleri kurulmuştur. Böylece primal ve dual problemlerin çözümleri arasındaki ilişkiler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler : Konveks Fonksiyonlar, Duallik, Eşleniklik

ABSTRACT

Master of Science Thesis

CONJUGACY IN CONVEX ANALYSIS

Didem Tokaslan

Anadolu University
Graduate School of Sciences
Mathematics Program

Supervisor: **Prof. Dr. Mahide Küçük**

2009, 196 pages

The concept of duality appears in several areas of mathematics. When forced with a problem, a mathematician wants to solve it by converting that into another problem. This new problem appears to be quite different, yet it mirrors all aspects of the original problem and is easier to solve. The duality involves with two mathematical theories, each of which includes different theorems.

In this work, which is consisted of five chapters, an introduction to duality is made; the relationship between convex functions and convex conjugate is studied by corresponding each convex function to another convex function which is called the conjugate of the given function.

In the first section of this work, some basic definitions and theorems, necessary for this work, are given. In the second chapter, sublinearity is defined and some properties of sublinear functions are investigated.

In the third chapter, by defining the subdifferentials of finite convex functions in three different ways, equivalence of these three definitions is given. After that, local properties of subdifferential are investigated and subdifferentials of some special functions are evaluated.

In the fourth chapter, conjugate functions of the functions which are defined from $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ and any topological vector space to $\mathbb{R}$ are given, respectively. The relationship between subdifferential and conjugate function is given by investigating the fundamental properties of conjugate functions.

In the last chapter, the dual problem of convex optimization problem is constructed by using conjugate functions. In this way the relationship between primal problems and dual problems are given.

Keywords: Convex Functions, Duality, Conjugacy

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında yardımlarını esirgemeyen değerli hocalarım Prof. Dr. Mahide KÜÇÜK ve Prof. Dr. Yalçın KÜÇÜK'e , tezin yazımında yardımcı olan Arş. Gör. İlknur ATASEVER ve Arş. Gör. Mehmet ERGEN'e, beni her zaman destekleyen aileme ve müstakbel eşime en içten teşekkürlerimi sunarım.

Didem TOKASLAN

Haziran 2009

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}^n$	:	n-boyutlu Öklid uzayı
$[x, x']$	:	Uç noktaları x ve x' olan doğru parçası
$affS$	:	S kümesinin afin zarfı
coS	:	S kümesinin konveks zarfı
$\overline{co}S$	:	S kümesinin kapalı konveks zarfı
$coneS$	:	S kümesinin konveks konik zarfı
$\overline{cone}S$	:	S kümesinin kapalı konveks konik zarfı
$\mathbb{R}^+S$	:	S kümesinin konik zarfı
$C_\infty(x)$	:	C kümesinin x noktasındaki asimptotik konisi
$B(x, r)$	:	x-merkezli r-yarıçaplı açık yuvar
$\overline{B}(x, r)$	:	x-merkezli r-yarıçaplı kapalı yuvar
$intC$	:	C kümesinin iç noktaları kümesi
clC	:	C kümesinin kapanış noktaları kümesi
bdC	:	C kümesinin sınır noktaları kümesi
riC	:	C kümesinin rölatif iç noktaları kümesi
$[f : r]$	:	f fonksiyonunun r-düzey kümesi
$H_{s,r}$	:	$s \in \mathbb{R}^n$ ve $r \in \mathbb{R}$ sayısına karşılık gelen hiperdüzlem
H^-, H^+	:	H hiperdüzlemine karşılık gelen kapalı yarı-uzaylar
$int(H^-)$, $int(H^+)$	:	H hiperdüzlemine karşılık gelen açık yarı-uzaylar
K°	:	K kümesinin polar konisi
$T_S(x)$	:	S kümesinin x noktasındaki teğet konisi
$N_S(x)$	:	S kümesinin x noktasındaki normal konisi
$F_C(s)$	:	C kümesinin s vektörü yönünde ortaya çıkarılmış yüzü
$conv\mathbb{R}^n$	:	$\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı proper ve konveks fonksiyonların ailesi
$\overline{conv}\mathbb{R}^n$	:	$\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı kapalı konveks fonksiyonların ailesi
$domf$	:	f fonksiyonunun etkin tanım kümesi
$epif$	:	f fonksiyonunun epigrafı
epi_sf	:	f fonksiyonunun kesin epigrafı

$S_r f$	:	f fonksiyonunun r-alt düzey kümesi
clf	:	f fonksiyonunun kapanış (alttan yarı sürekli zarf) fonksiyonu
i_S	:	S kümesinin indikatör fonksiyonu
σ_S	:	S kümesinin destek fonksiyonu
γ_S	:	S kümesinin Minkowski fonksiyonu
ℓ_S	:	S kümesinin alt sınır fonksiyonu
$f_1 \nabla f_2$	:	f_1 ve f_2 fonksiyonlarının infimal konvolüsyonu
Ag	:	g fonksiyonunun A lineer dönüşümü altındaki görüntü fonksiyonu
$co(g)$	:	g fonksiyonunun konveks zarfı
$\overline{co}g$	:	g fonksiyonunun kapalı konveks zarfı
f'_∞	:	f fonksiyonunun asimptotik fonksiyonu
$\nabla f(x)$	:	f fonksiyonunun x noktasındaki türevi
$\nabla^2 f(x)$	:	f fonksiyonunun x noktasındaki ikinci mertebeden türevi
$f'(x,d)$	:	f fonksiyonunun x noktasında d yönündeki yönlü türevi
$\partial f(x)$	:	f fonksiyonunun x noktasındaki subdiferansiyeli
f^*	:	f fonksiyonunun eşlenik fonksiyonu
f^{**}	:	f fonksiyonunun biconjugate fonksiyonu
E^*	:	E topolojik vektör uzayının topolojik duali
(E,F)	:	E, F topolojik vektör uzaylarının dual çifti
$\sigma(E,F)$	:	(E,F) dual çifti üzerindeki zayıf topoloji
f^Γ	:	f fonksiyonunun Gamma Regülerizasyonu
(P)	:	Primal problem
(P_p)	:	Pertürbasyon problemi
(P^*)	:	Dual problem
L	:	(P) probleminin verilen bir pertürbasyona göre Lagrange fonksiyonu

1 GİRİŞ

Bu bölümde konveks analizin temelini oluşturan kavramlar ve özellikler verilecektir.

1.1 Konveks Kümeler ve Afin Kümeler

Bu kesimde konveks ve afin kümeler tanımlanacak ve bazı özellikleri verilecektir.

1.1.1 Afin Kümeler

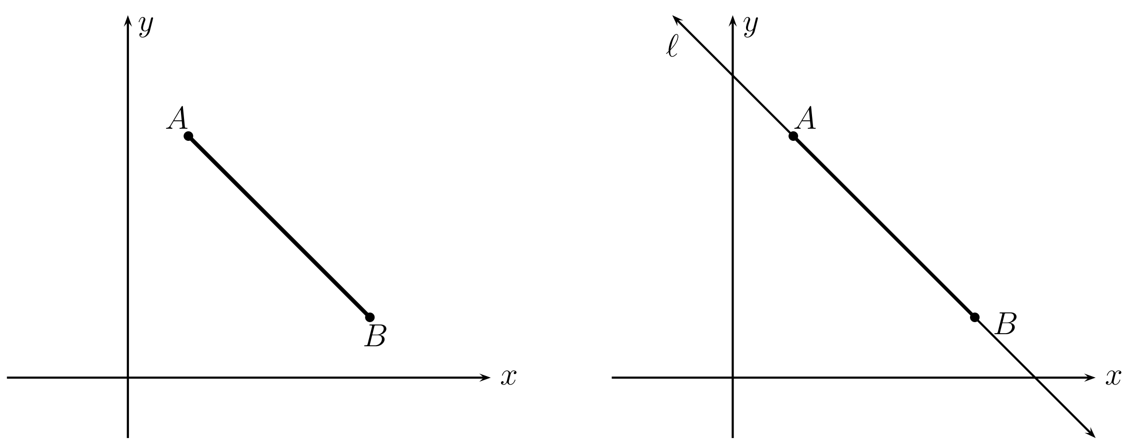
Tanım 1.1.1. *[4, 5, 12] $S \subseteq \mathbb{R}^n$ verilsin. Eğer $\forall x, y \in S$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için*

$$\lambda x + (1 - \lambda)\, y \in S$$

*oluyorsa S 'ye **afin küme** denir.*

Önerme 1.1.2. *[4, 5, 12] Keyfi sayıda afin kümenin arakesiti afindir.*

Tanım 1.1.3. *[4, 5, 12] $S \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi verilsin. Bu durumda S 'yi içeren tüm afin kümelerin arakesitine* **S *'nin afin zarfı*** *denir ve* **affS** *ile gösterilir.*



Şekil 1.1: Düzlemde bir $[AB]$ doğru parçasının afin zarfı olan ℓ doğrusu

Tanım 1.1.4. *[4, 5, 12] $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$ noktaları verilsin ve gerçel $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ sayıları $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ koşulunu sağlasın. Bu durumda,*

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_m x_m$$

*toplamına $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_m}$ **noktalarının bir afin kombinasyonu** denir.*

Önerme 1.1.5. *[4, 5, 12] $S \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesinin afin zarfı S 'deki elemanların tüm afin kombinasyonlarından oluşur. Yani,*

$$affS = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \mid x_i \in S,\ \lambda_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1, i = 1, 2, \ldots, m \right\}$$

yazılabilir.

Tanım 1.1.6. *[4, 5, 12] $\mathbb{R}^n$'de (n-1) boyutlu afin kümelere **hiperdüzlem** adı verilir.*

1.1.2 Konveks Kümeler

Tanım 1.1.7. *[4, 5, 12] $C \subseteq \mathbb{R}^n$ verilsin. Eğer $\forall x, y \in C$ ve $\forall \lambda \in [0, 1]$ için,*

$$\lambda x + (1 - \lambda) y \in C$$

*oluyorsa C 'ye **konveks küme** denir.*

Önerme 1.1.8. *[4, 5, 12] Konveks kümelerin keyfi sayıda arakesiti konvekstir.*

Tanım 1.1.9. *[4, 5, 12] $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$ noktaları verilsin ve negatif olmayan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ sayıları $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ koşulunu sağlasın. Bu durumda,*

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_m x_m$$

*toplamına $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_m}$ **noktalarının bir konveks kombinasyonu** denir.*

Teorem 1.1.10. *[4, 5, 12] $C \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesinin konveks olması için gerek ve yeter koşul tüm konveks kombinasyonlarını bulundurmasıdır.*

Tanım 1.1.11. *[4, 5, 12] $C \subseteq \mathbb{R}^n$ verilsin. C 'yi içeren tüm konveks kümelerin arakesitine* **C *'nin konveks zarfı*** *denir ve* ***conv(C)*** *yada* ***co(C)*** *ile gösterilir.*

Önerme 1.1.12. *[4, 5, 12] $C \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesinin konveks zarfı C 'deki elemanların tüm konveks kombinasyonlarından oluşur. Yani,*

$$convC = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \mid x_i \in C,\ \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1, i = 1, 2, \ldots, m \right\}$$

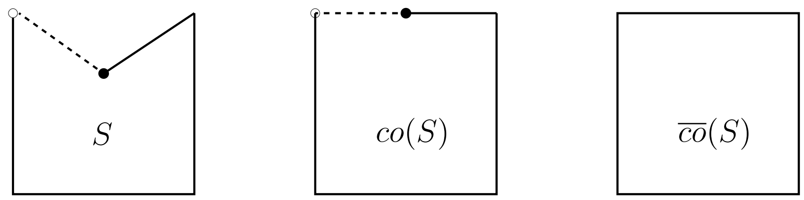
yazılabilir.

Tanım 1.1.13. *[4, 5, 12] $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi verilsin. Bu durumda S'yi içeren tüm kapalı konveks kümelerin arakesitine* ***S kümesinin kapalı konveks zarfı*** *denir ve* $\overline{\mathbf{co}}\mathbf{S}$ *ile gösterilir.*

Önerme 1.1.14. *[4, 5, 12] $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi verilsin. Bu durumda S'nin kapalı konveks zarfı S'nin konveks zarfının kapanışına eşittir. Yani,*

$$\overline{co}S = cl(coS)$$

olur.



Şekil 1.2: Konveks olmayan S kümesinin konveks zarfı olan $co(S)$ ve kapalı konveks zarfı olan $\overline{co}(S)$ kümeleri

1.1.3 Konveks Koniler

Tanım 1.1.15. *[4, 5, 12] $K \subseteq \mathbb{R}^n$ verilsin. Eğer $\forall x \in K$ ve $\forall \lambda \geq 0$ için*

$$\lambda x \in K$$

*oluyorsa K kümesine **koni** denir. Eğer K konisi aynı zamanda konveks ise bu durumda K 'ya **konveks koni** adı verilir.*

Önerme 1.1.16. *[4, 5, 12] Konveks konilerin herhangi sayıda arakesiti yine konveks konidir.*

Tanım 1.1.17. *[4, 5, 12] $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi verilsin. Bu durumda S'yi içeren tüm [kapalı] konveks konilerin arakesitine **S kümesinin [kapalı] konveks konik zarfı** denir ve* [$\overline{\mathbf{cone}}$**S**] **coneS** *ile gösterilir.*

Tanım 1.1.18. *[4, 5, 12] $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$ noktaları verilsin. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \geq 0$ olmak üzere,*

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_m x_m$$

*toplamına $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_m}$ **noktalarının bir konik kombinasyonu** denir.*

Önerme 1.1.19. *[4, 5, 12] $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi verilsin. Bu durumda S'nin konik zarfı S'deki tüm elemanların konik kombinasyonlarının kümesidir ve $\mathbb{R}^+(S)$ ile gösterilir.*

Tanım 1.1.20. *[4, 5, 12] $C \subseteq \mathbb{R}^n$ boştan farklı kapalı konveks bir küme ve $x \in C$ alınsın. Bu durumda*

$$C_\infty(x) := \{d \in \mathbb{R}^n \mid \forall t > 0 \text{ için } x + td \in C\}$$

yada denk olarak

$$C_\infty(x) := \bigcap_{t>0} \frac{C - x}{t}$$

*şeklinde tanımlanan kümeye **C kümesinin asimptotik konisi (recession cone)** denir.*

Önerme 1.1.21. *[4, 5, 12] $C_\infty(x)$ asimptotik konisi $x \in C$ 'nin seçilişinden bağımsızdır.*

Kanıt. $x_1, x_2 \in C$ alınsın, kanıt için $C_\infty(x_1) \subseteq C_\infty(x_2)$ olduğunu göstermek yeterlidir. O halde $d \in C_\infty(x_1)$ ve $t > 0$ alınsın. $\varepsilon > 0$ sayısı için,

$$\bar{x}_\varepsilon := \varepsilon\left(x_1 + \frac{t}{\varepsilon}d\right) + (1-\varepsilon)x_2$$

noktasını göz önüne alalım. C konveks olduğundan $\bar{x}_\varepsilon \in C$ elde edilir. Buradan C kapalı olduğundan,

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \bar{x}_\varepsilon = x_2 + td \in clC = C$$

bulunur. O halde $d \in C_\infty(x_2)$ elde edilir. Ters kapsam benzer şekilde gösterilebilir ve böylece $C_\infty(x_1) = C_\infty(x_2)$ olduğu görülür. x_1 ve x_2 keyfi seçildiğinden asimptotik koninin seçilen noktadan bağımsız olduğu kanıtlanmış olur. $\square$

Uyarı 1.1.22. *Asimptotik koninin C kümesinden seçilen noktadan bağımsız olduğu Önerme 1.1.21 ile gösterildi. Dolayısıyla bir C kapalı konveks kümesinin asimptotik konisinin yalnızca C_∞ ile gösterilmesi uygun olacaktır.*

Önerme 1.1.23. *[4, 5, 12] $C \subseteq \mathbb{R}^n$ kapalı konveks kümesinin kompakt olması için gerek ve yeter koşul $C_\infty = \{0\}$ olmasıdır.*

Önerme 1.1.24. *[4, 5, 12] $\{C_j\}_{j\in J}$ $\mathbb{R}^n$'de kapalı konveks kümelerin bir ailesi olsun ve bu kümelerin arakesiti boştan farklı olsun. Bu durumda,*

(i) $\left(\bigcap_{j\in J} C_j\right)_\infty = \bigcap_{j\in J} (C_j)_\infty$

(ii) $j = 1, 2, \ldots, m$ için $C_j \in \mathbb{R}^{n_j}$ kapalı konveks kümeler olmak üzere,

$$(C_1 \times \cdots \times C_m)_\infty = (C_1)_\infty \times \cdots \times (C_m)_\infty$$

(iii) $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bir lineer dönüşüm ve $C \subseteq \mathbb{R}^n$ kapalı konveks küme ve $A(C)$ kapalı ise,

$$A(C_\infty) \subset [A(C)]_\infty$$

dur.

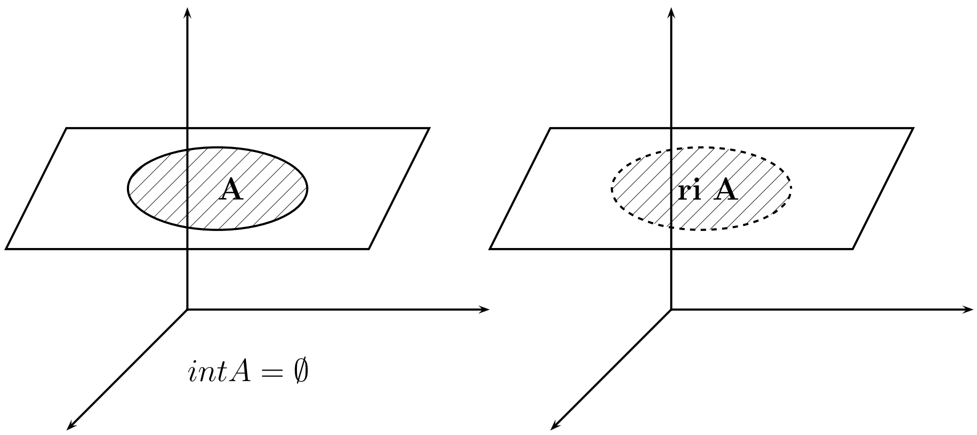
1.1.4 Topolojik Özellikler

Tanım 1.1.25. *[4, 5, 12] $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konveks bir küme olmak üzere, C 'nin afin zarfı üzerine indirgenen topolojiye göre iç noktalarından oluşan kümeye* **C *'nin rölatif içi*** *denir ve* **riC** *ile gösterilir. Yani,*

$$riC := \{x \in affC \mid \exists\delta > 0 \text{ için } affC \cap B(x, \delta) \subset C\}$$

olur.

Teorem 1.1.26. *[4, 5, 12] $C \subseteq \mathbb{R}^n$ boş kümeden farklı ve konveks bir küme ise $riC \neq \emptyset$ 'dir.*



Şekil 1.3: $\mathbb{R}^3$ uzayında $intA = \emptyset$ olan A kümesinin rölatif içi

Teorem 1.1.27. *[4, 5, 12] $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konveks bir küme, $x \in riC$ ve $y \in clC$ ise, $\forall\lambda \in [0, 1)$ için, $(1 - \lambda)x + \lambda y \in riC$ 'dir.*

Teorem 1.1.28. *[4, 5, 12] $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konveks bir küme olsun. Bu durumda riC ve clC konveks kümelerdir ve C ile aynı afin zarfa, aynı rölatif içe ve aynı kapanışa sahiptirler.*

Teorem 1.1.29. *[4, 5, 12] $C_1, C_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ konveks kümeler ve $riC_1 \cap riC_2 \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda,*

$$ri(C_1 \cap C_2) = riC_1 \cap riC_2$$

$$cl(C_1 \cap C_2) = clC_1 \cap clC_2$$

dir.

Önerme 1.1.30. *[4, 5, 12] $i = 1, 2, \ldots, k$ olmak üzere $C_i \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$ konveks kümeler olsun. Bu durumda,*

$$ri(C_1 \times \cdots \times C_k) = (riC_1) \times \cdots \times (riC_k)$$

olur.

Önerme 1.1.31. *[4, 5, 12] $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ afin bir fonksiyon ve $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konveks bir küme olsun. Bu durumda,*

$$ri[A(C)] = A(riC)$$

olur.

Uyarı 1.1.32. *Son iki önermenin bir sonucu olarak,*

$$ri(\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2) = \alpha_1(riC_1) + \alpha_2(riC_2)$$

olduğundan $\alpha_1 = -\alpha_2 = 1$ seçilirse,

$$0 \in ri(C_1 - C_2) \Leftrightarrow (riC_1) \cap (riC_2) \neq \emptyset \tag{1.1.1}$$

elde edilir. Bu koşul ise Teorem 1.1.29'da verilen koşuldan çok daha kullanışlıdır. Bu nedenle ileride bir çok durumda kullanılacaktır.

1.2 Hiperdüzlemler ve Ayırma Teoremleri

Bu kesimde bir nokta ile bir konveks kümeyi ve iki konveks kümeyi ayıran ayırma özellikleri verilecektir.

1.2.1 Hiperdüzlemler ve Yarı Uzaylar

Tanım 1.2.1. *[4, 5, 7, 12] $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ ve $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ sayısı için*

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad ve \quad f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

*koşulları sağlanıyorsa f'e **lineer fonksiyonel** denir.*

Tanım 1.2.2. *[4, 5, 7, 12] $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lineer fonksiyoneli verilsin. Bu durumda*

$$[f : r] := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = r\}$$

*biçiminde tanımlanan kümeye f fonksiyonelinin **r-düzey kümesi** denir.*

Önerme 1.2.3. *[4, 5, 7, 12] $H \subseteq \mathbb{R}^n$ verilsin. Bu durumda H'nin bir hiperdüzlem olmasi için gerek ve yeter koşul sıfır dönüşümünden farklı bir f lineer fonksiyoneli ve bir $r \in \mathbb{R}$ sayısı için $H = [f : r]$ olmasıdır.*

Kanıt. H bir hiperdüzlem olsun. O halde H $(n-1)$-boyutlu bir afin kümedir. $x_0 \in H$ için $H_1 = H - x_0$ olsun. Buna göre H_1 $(n-1)$-boyutlu bir alt uzaydır. Keyfi bir $y \in \mathbb{R}^n - H_1$ seçilip sabitlenirse $\mathbb{R}^n$ uzayı, $\mathbb{R}^n = H_1 + \mathbb{R}y$ biçiminde yazılabilir. Bu durumda bir $p \in \mathbb{R}^n$ noktası $\exists\ p_1 \in H_1$ ve $\exists\ \alpha \in \mathbb{R}$ sayısı için $p = p_1 + \alpha y$ biçiminde tek türlü yazılır. Bu yazılıştaki α sayısı kullanılarak, $\mathbb{R}^n$ 'den $\mathbb{R}$ 'ye

$$f(p) := \alpha$$

biçiminde tanımlanan f fonksiyonu lineerdir. f fonksiyonunun tanımlanışından

$[f:0]=H_1$ olduğu açıktır. $H=H_1+x_0$ ve f lineer olduğundan

$$\begin{aligned} H=H_1+x_0=[f:0]+x_0 &= \{p\in\mathbb{R}^n \mid f(p)=0\}+x_0 \\ &= \{p+x_0 \mid f(p)=0\} \\ &= \{q\in\mathbb{R}^n \mid f(q-x_0)=0\} \\ &= \{q\in\mathbb{R}^n \mid f(q)=f(x_0)\} \\ &= [f:f(x_0)] \end{aligned}$$

bulunur. $f(x_0)=r$ denirse $H=[f:r]$ elde edilir.

Tersine sıfırdan farklı bir f fonksiyoneli ve bir $r\in\mathbb{R}$ sayısı için $H=[f:r]$ olsun. f lineer olduğundan, N_f kümesi f 'in çekirdeği olmak üzere $[f:r]=N_f+x_0$ olur. O halde $H=[f:r]$ $(n-1)$-boyutlu bir alt uzayın x_0 kadar ötelenmişidir. Yani $[f:r]$ $(n-1)$-boyutlu bir afin kümedir. Dolayısıyla H bir hiperdüzlemdir. □

Teorem 1.2.4. *[4, 5, 7, 12] $H=[f:r]$ $\mathbb{R}^n$'de bir hiperdüzlem ve $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ $\mathbb{R}^n$'nin standart tabanı olmak üzere, her $x=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i e_i$ için, $f(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\lambda_i$ olacak şekilde $\exists\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\in\mathbb{R}$ vardır, ek olarak f sürekli ve H kapalıdır.*

Kanıt. $i=1,2,\ldots,n$ için $\lambda_i=f(e_i)$ olsun. Bu durumda f lineer olduğundan,

$$f(x)=f\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(e_i)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\lambda_i$$

bulunur. Şimdi f'in sürekliliğini göstermek için $\varepsilon>0$ verilsin. $x=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i e_i$, $y=\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i e_i$ olmak üzere,

$$|f(x)-f(y)|=\left|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(e_i)-\sum_{i=1}^{n}\beta_i f(e_i)\right|=\left|\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i-\beta_i)\lambda_i\right|\leq\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i-\beta_i||\lambda_i|$$

dir. $\delta=\dfrac{\varepsilon}{\sum\limits_{i=1}^{n}|\lambda_i|}$ seçilirse $\forall i=1,2,\ldots,n$ için $|\alpha_i-\beta_i|\leq\|x-y\|<\delta$ iken,

$$|f(x)-f(y)|\leq\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i-\beta_i|.\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|<\frac{\varepsilon}{\sum\limits_{i=1}^{n}|\lambda_i|}\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|=\varepsilon$$

elde edilir. Dolayısıyla f süreklidir. O halde

$$A = (r, +\infty) \quad B = (-\infty, r)$$

açık kümelerinin f altındaki ters görüntüleri

$$f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > r\} \qquad f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < r\}$$

açık kümelerdir.

$$H = \mathbb{R}^n \setminus [f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)]$$

olarak yazılabildiğinden H kapalıdır. □

Sonuç 1.2.5. *[4, 5, 7, 12] $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bir lineer fonksiyonel ise $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için*

$$f(x) = \langle s, x \rangle$$

olacak şekilde $\exists s \in \mathbb{R}^n$ vardır. Buna göre $\mathbb{R}^n$'de bir H hiperdüzlemi $\exists s \in \mathbb{R}^n$ vektörü ve $\exists r \in \mathbb{R}$ sayısı için

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle s, x \rangle = r\}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $s \in \mathbb{R}^n$ vektörüne ise H hiperdüzleminin normali adı verilir.

Kanıt. $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ $\mathbb{R}^n$'nin standart tabanı ve $i = 1, 2, \ldots, n$ için $\lambda_i = f(e_i)$ olsun. $s = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ seçilirse $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ için,

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i = \langle s, x \rangle$$

bulunur. □

Uyarı 1.2.6. *Herhangi bir $0 \neq s \in \mathbb{R}^n$ vektörü ve $r \in \mathbb{R}$ sayısı verildiğinde bunlara karşılık gelen hiperdüzlem*

$$H_{s,r} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle s, x \rangle = r\}$$

biçiminde yazılabilir.

Teorem 1.2.7. *[4, 5, 7, 12]* $\mathbb{R}^n$*de* $H_1 = [f : \alpha]$ *ve* $H_2 = [f : \beta]$ *hiperdüzlemleri verilsin. Bu durumda,* $H_2 = H_1 + x_0$ *olacak şekilde* $\exists x_0 \in \mathbb{R}^n$ *vektörü vardır. Yani* H_1 *hiperdüzlemi* H_2*'ye paraleldir.*

Kanıt. $h_1 \in H_1$, $h_2 \in H_2$ alınsın. Eğer $x_0 = h_2 - h_1$ denirse $H_2 = H_1 + x_0$ olur. Gerçekten, $x_0 + h \in x_0 + H_1$ olmak üzere

$$f(x_0 + h) = f(h_2 - h_1 + h) = f(h_2) - f(h_1) + f(h) = \beta - \alpha + \alpha = \beta$$

olur. Buradan $x_0 + h \in [f : \beta] = H_2$ ve böylece $x_0 + H_1 \subseteq H_2$ elde edilir. Tersine, $h \in H_2$ ise $h = x_0 + h - x_0 = x_0 + (h - h_2 + h_1)$ 'dir.

$$f(h - h_2 + h_1) = f(h) - f(h_2) + f(h_1) = \beta - \beta + \alpha = \alpha$$

elde edilir. Buradan, $h - h_2 + h_1 \in H_1$ ve böylece

$$x_0 + (h - h_2 + h_1) = h \in x_0 + H_1$$

bulunur. O halde $H_2 \subseteq x_0 + H_1$'dir. Dolayısıyla $H_2 = x_0 + H_1$ elde edilmiş olur. □

Tanım 1.2.8. *[4, 5, 7, 12]* $0 \neq s \in \mathbb{R}^n$ *ve* $r \in \mathbb{R}$ *olmak üzere* $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle s, x\rangle = r\}$ *hiperdüzlemi verilsin. Bu durumda,*

$$H^- := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle s, x\rangle \leq r\} \text{ ve } H^+ := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle s, x\rangle \geq r\}$$

kümelerine **H** ***hiperdüzlemine karşılık gelen kapalı yarı-uzaylar****;*

$$int(H^-) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle s, x\rangle < r\} \text{ ve } int(H^+) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle s, x\rangle > r\}$$

kümelerine ise **H** ***hiperdüzlemine karşılık gelen açık yarı-uzaylar*** *denir.*

1.2.2 Hiperdüzlemlerle Ayırma ve Destek Hiperdüzlemler

Tanım 1.2.9. *[4, 5, 7, 12] $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{R}^n$ de $H = H_{s,r}$ hiperdüzlemi verilsin. Eğer,*

(i) $A \subseteq H^-$ *ve* $B \subseteq H^+$ $[A \subseteq int(H^-)$ *ve* $B \subseteq int(H^+)]$

(ii) $B \subseteq H^-$ *ve* $A \subseteq H^+$ $[B \subseteq int(H^-)$ *ve* $A \subseteq int(H^+)]$

koşullarından biri sağlanıyorsa **H *hiperdüzlemi* A *ile* B *'yi ayırır [kesin ayırır]*** *denir.*

Teorem 1.2.10. *[4, 5, 7, 12] $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ konveks kümeleri verilsin. Eğer A kümesi boştan farklı ve $B \cap intA = \emptyset$ ise A ile B'yi ayıran bir hiperdüzlem vardır.*

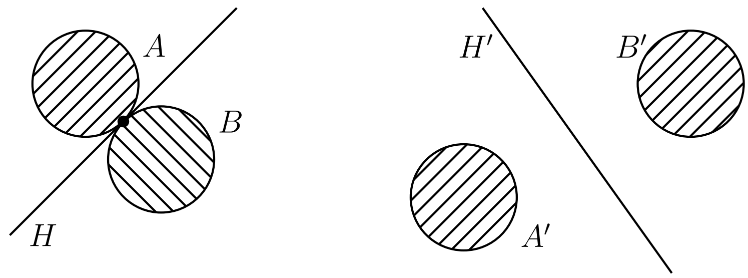
Teorem 1.2.11. *[4, 5, 7, 12] $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ konveks kümeler ve $dim(A \cup B) = n$ olsun. Bu durumda A ile B'nin bir hiperdüzlemle ayrılması için gerek ve yeter koşul $riA \cap riB = \emptyset$ olmasıdır.*

Teorem 1.2.12. *[4, 5, 7, 12] $\emptyset \neq A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ biri kompakt diğeri kapalı konveks kümeler ise A ile B'nin kesin ayrılması için gerek ve yeter koşul $A \cap B = \emptyset$ olmasıdır.*

Teorem 1.2.13. *[4, 5, 7, 12] $\emptyset \neq A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt kümeler ise A ile B'nin kesin ayrılması için gerek ve yeter koşul $coA \cap coB = \emptyset$ olmasıdır.*

Tanım 1.2.14. *[4, 5, 7, 12] $C \subseteq \mathbb{R}^n$ boştan farklı bir küme, $H \subseteq \mathbb{R}^n$ bir hiperdüzlem ve $x \in C$ olsun. Eğer H hiperdüzlemi x noktasını içeriyor ve H hiperdüzlemine karşılık gelen kapalı yarı uzaylardan biri C kümesini tamamen kapsıyorsa bu durumda* **H *hiperdüzlemi* x *noktasında* C*'yi destekler*** *denir.*

Teorem 1.2.15. *[4, 5, 7, 12] $S \subseteq \mathbb{R}^n$ kapalı konveks bir küme ise S'yi her sınır noktasında destekleyen en az bir hiperdüzlem vardır.*

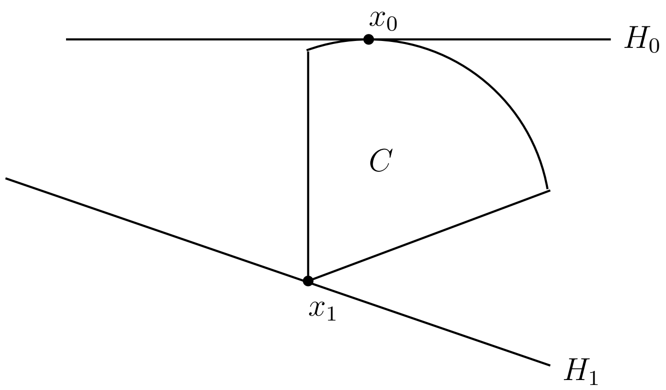


Şekil 1.4: Arakesitleri boştan farklı olan A ile B kümelerini ayıran H hiperdüzlemi ve A' ile B' kümelerini ayıran H' hiperdüzlemi

Kanıt. Eğer $dimS < n$ ise S 'yi bulunduran her hiperdüzlem S 'yi her noktasında destekler. O halde $dimS = n$ kabul edilsin. Bu durumda $intS \neq \emptyset$ olur. O halde her bir $x \in bdS$ için $\{x\}$ 1-boyutlu bir afin küme ve $intS$ açık konveks bir küme olduğundan x noktasını bulunduran ve $H \cap intS = \emptyset$ olacak şekilde bir H hiperdüzlemi vardır. Yani H hiperdüzlemi x noktasında S kümesini destekler. O halde S konveks olduğundan H, S kümesini de x noktasında destekler. □

Teorem 1.2.16. *[4, 5, 7, 12] $S \subseteq \mathbb{R}^n$ kapalı bir küme ve $intS \neq \emptyset$ olsun. Eğer S'nin her sınır noktasında S'yi destekleyen bir hiperdüzlem varsa bu durumda S konveks bir kümedir.*

Kanıt. Kanıt $n \geq 2$ için yapılacaktır. Eğer $S = \mathbb{R}^n$ ise S'nin konveks olduğu açıktır. O halde $\exists\ x \in \mathbb{R}^n$ için $x \notin S$ kabul edilsin. Buna göre $y \in intS$ için öyle bir $b \in ri\overline{xy}$ vardır ki $b \in bdS$ 'dir. Hipotezden b sınır noktasında S 'yi destekleyen bir H hiperdüzlemi vardır ve $x \notin H$ olur. H hiperdüzlemi x noktasını içerseydi, bu durumda y noktasını da içerirdi ki bu H 'nin S kümesini desteklemesi ile çelişirdi. Buradan H 'nin belirlediği ve y noktasını içeren kapalı yarı uzay S 'yi içerir ancak x noktasını içermez. Böylelikle x noktası S kümesinin dışında dolaştıkça S 'yi içeren kapalı yarı uzaylar elde edilir. Böylece S kendisini içeren kapalı yarı uzayların arakesiti olarak elde edilir. O halde S konvekstir. □



Şekil 1.5: C konveks kümesine x_0 noktasında destek olan H_0 hiperdüzlemi ve x_1 noktasında destek olan H_1 hiperdüzlemi

1.3 Konveks Kümelere Konik Yaklaşımlar

Bu kesimde, bir konveks kümenin herhangi bir noktasındaki polar, teğet ve normal konileri tanımlanacak ve bazı özellikleri verilecektir.

1.3.1 Polar Koni ve Özellikleri

Tanım 1.3.1. *[4, 5] $K \subseteq \mathbb{R}^n$ bir konveks koni olsun.*

$$K^\circ := \{s \in \mathbb{R}^n \mid \forall x \in K \text{ için } \langle s, x\rangle \leq 0\}$$

*kümesine **K'nın polar konisi** denir.*

[4, 5] Polar koninin tanımından çıkarılabilecek özelliklerinden bazıları verilsin.

- Polar koni $\mathbb{R}^n$ üzerindeki iç çarpıma bağlıdır, iç çarpım değiştikçe polar koni de değişir.
- İç çarpımın sürekliliğinin bir sonucu olarak polar koni kapalı konveks bir konidir.
- Eğer K bir altuzay ise bu durumda K 'nın polar konisi bu alt uzayın dik tümleyenidir. Bu ise, alt uzaylardaki diklik kavramının koniler için polarlık kavramının bir genellemesi olduğunu gösterir.

- Polarlık kapalı konveks koniler ailesi üzerinde sırayı tersine çeviren bir eşleme belirtir. Yani $K' \subset K$ ise $(K')^\circ \supset K^\circ$ olur. Bunun tersi ise $K^{\circ\circ} = K$ olduğunda yani K kapalı olduğunda geçerlidir.
- $K \cap K^\circ$ kümesinde bulunabilecek tek eleman 0'dır.

Örnek 1.3.2. *(a) $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$ elemanlarının konik zarfı olan*

$$K = \left\{ \sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_j \mid \alpha_j \geq 0, \; j = 1, 2, \ldots, m \right\}$$

kümesi ele alınsın. Bu kümenin polar konisi

$$K^\circ = \{ s \in \mathbb{R}^n \mid \langle s, x_j \rangle \leq 0, \; j = 1, 2, \ldots, m \}$$

olur.

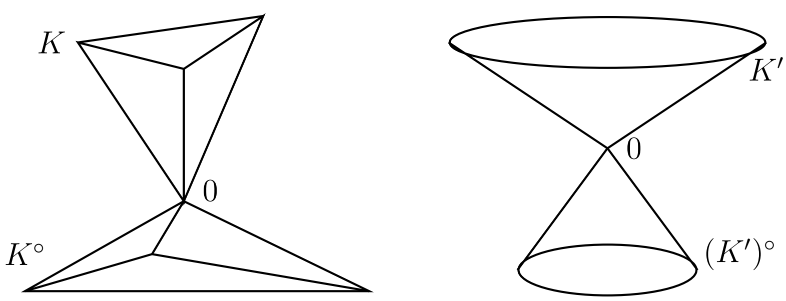
(b) Negatif olmayan orthant

$$\Omega_+ := \{ x = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \mid \xi_i \geq 0, \; \forall i = 1, 2, \ldots, n \}$$

olmak üzere

$$(\Omega_+)^\circ = \Omega_- := \{ s = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \mid \sigma_i \leq 0, \; \forall i = 1, 2, \ldots, n \}$$

pozitif olmayan orthantıdır.



Şekil 1.6: K ve K' konilerinin polar konileri olan K° ve $(K')^\circ$

1.3.2 Bir Konveks Kümenin Teğet ve Normal Konileri

Tanım 1.3.3. *[4, 5]*

(i) *$S \subseteq \mathbb{R}^n$ boştan farklı bir küme, $d \in \mathbb{R}^n$ herhangi bir yön (vektör) ve $x \in S$ olsun.*

$$x_k \to x, \ t_k \to 0^+ \ ve \ \frac{x_k - x}{t_k} \to d$$

olacak şekilde S içinde bir $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi ve $\exists(t_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ dizisi varsa **d*'ye* S *kümesinin* x *noktasındaki teğeti*** *denir.*

(ii) *S kümesinin x'deki teğetlerinin oluşturduğu kümeye* **S*'nin* x *noktasındaki teğet konisi (Contingent konisi veya Bouligant'ın konisi)*** *denir ve $T_S(x)$ ile gösterilir.*

Önerme 1.3.4. *[4, 5] $S \subseteq \mathbb{R}^n$ boştan farklı bir küme olmak üzere $x \in S$ noktası ve $d \in \mathbb{R}^n$ yönü verilsin. Bu durumda d'nin S kümesine x noktasında teğet olabilmesi için gerek ve yeter koşul*

$$d_k \to d, \ t_k \to 0^+ \ ve \ \forall k \in \mathbb{N} \ için, \ x + t_k d_k \in S$$

olacak şekilde $\exists(d_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $\exists(t_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^+$ dizilerinin var olmasıdır.

Önerme 1.3.5. *[4, 5] $T_S(x)$ teğet konisi kapalıdır.*

Şimdi herhangi bir S kümesi yerine C kapalı konveks kümeleri ele alınarak teğet koni için daha kullanışlı bir ifade elde edilecektir.

Önerme 1.3.6. *[4, 5] $C \subseteq \mathbb{R}^n$ kapalı konveks bir küme ve $x \in C$ olsun. Bu durumda C'nin x noktasındaki teğet konisi*

$$\begin{aligned} T_C(x) &= \overline{cone}(C - x) = cl[\mathbb{R}^+(C - x)] \\ &= cl\{d \in \mathbb{R}^n \mid d = \alpha(y - x), \ y \in C, \ \alpha \geq 0\} \end{aligned}$$

olur. Üstelik $T_C(x)$ konisi konvekstir.

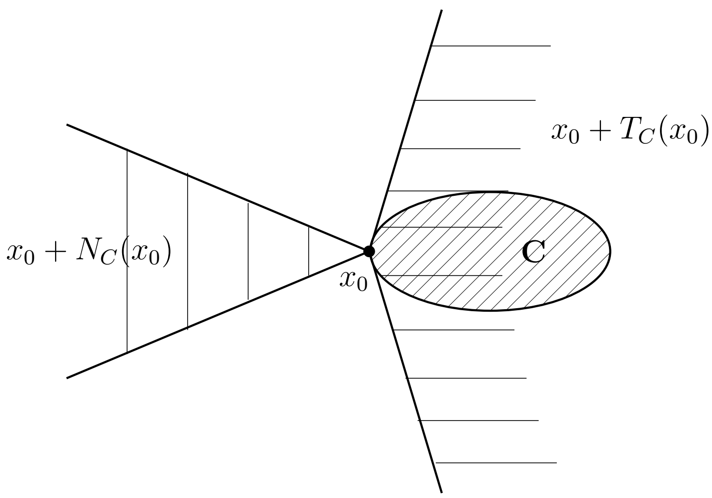
Tanım 1.3.7. *[4, 5] $C \subseteq \mathbb{R}^n$ herhangi bir küme olsun ve $x \in \mathbb{R}^n$ noktası verilsin. Bu durumda*

$$N_C(x) := \{s \in \mathbb{R}^n \mid \forall y \in C \text{ için } \langle s, y - x\rangle \leq 0\}$$

kümesine **C *kümesinin* x *noktasındaki normal konisi*** *denir. Bu kümeye ait her bir s vektörüne de* **C *kümesinin* x *noktasındaki normal vektörü*** *denir.*

Tanım geometrik olarak şöyle yorumlanabilir. $s \in \mathbb{R}^n$ vektörünün x noktasında C 'nin bir normal vektörü olması için gerek ve yeter koşul, her bir $y \in C$ için s ile $y - x$ vektörleri arasındaki açının geniş açı olmasıdır.

Şimdi normal koni ile teğet koni arasındaki ilişki incelenecektir.



Şekil 1.7: C konveks kümesinin bir x_0 noktasındaki teğet konisi olan $T_C(x_0)$ ve x_0 noktasındaki normal konisi olan $N_C(x_0)$ konilerinin x_0 noktasına kaydırılmışları

Önerme 1.3.8. *[4, 5] Normal koni teğet koninin polarıdır.*

Önerme 1.3.9. *[4, 5] Teğet koni normal koninin polarıdır. Yani,*

$$T_C(x) = \{d \in \mathbb{R}^n \mid \forall s \in N_C(x) \text{ için } \langle s, d\rangle \leq 0\}$$

dır.

Tanım 1.3.10. *[4, 5] $C \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi ve $s \in \mathbb{R}^n$ yönü verilsin.*

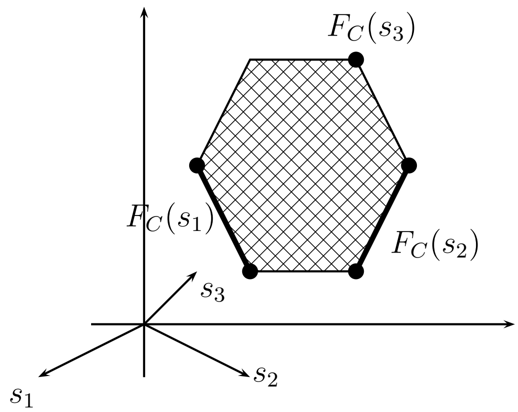
$$F_C(s) := \{x \in C \mid \langle s, x\rangle = \sup_{y\in C}\langle s, y\rangle\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye **C *'nin* s *vektörü yönünde ortaya çıkarılmış yüzü (face of* C *exposed by* s**) *denir.*

Önerme 1.3.11. *[4, 5] $C \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi $x \in C$ noktası ve $s \in \mathbb{R}^n$ yönü verilsin. Bu durumda,*

$$s \in N_C(x) \;\Leftrightarrow\; x \in F_C(s)$$

olur.



Şekil 1.8: Bir C konveks kümesinin s_1, s_2 ve s_3 yönlerinde ortaya çıkarılmış yüzleri

1.4 Konveks Fonksiyonlar

Bu kesimde afin, konveks, kapalı konveks ve kapanış fonksiyonu kavramları tanıtılacak, kapalı konveks fonksiyonların bazı özellikleri incelenecektir. Ayrıca fonksiyonların kapalılığını ve konveksliğini koruyan işlemler tanıtılıp incelenecek ve bunlara ilişkin örnekler verilecektir.

1.4.1 Konveks Fonksiyonların Tanımı ve Özellikleri

Tanım 1.4.1. *[4, 5] $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konveks bir küme ve $f : C \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer $\forall x, y \in C$ ve $\forall \alpha \in (0,1)$ için,*

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$$

*eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonu C üzerinde **konvekstir** denir.*

Tanım 1.4.2. *[4, 5] $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ fonksiyonu verilsin. Eğer*

(i) $\exists\, x \in \mathbb{R}^n$ için $f(x) < +\infty$

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için $f(x) > -\infty$

*koşullarını sağlıyorsa f'e **proper fonksiyon** adı verilir.*

Uyarı 1.4.3. *$\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı proper ve konveks fonksiyonların ailesi $conv\mathbb{R}^n$ ile gösterilir. Yani,*

$$conv\mathbb{R}^n = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \mid f \text{ proper ve konveks}\} \text{ 'dir.}$$

Tanım 1.4.4. *[4, 5] $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ olmak üzere,*
*(i) $dom f = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < +\infty\}$ kümesine f'in **etkin tanım kümesi**,*
*(ii) $epi f = \{(x,r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq r\}$ ile tanımlanan kümeye f'in **epigrafı**,*
*(iii) $epi_s f = \{(x,r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid f(x) < r\}$ ile tanımlanan kümeye f'in **kesin epigrafı**,*
*(iv) $r \in \mathbb{R}$ için, $S_r f = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq r\}$ ile tanımlanan kümeye f'in bir **alt düzey kümesi** denir.*

Uyarı 1.4.5. *$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ fonksiyonu ve $r \in \mathbb{R}$ sayısı verilsin. Bu durumda*

$$(x, r) \in epif \;\Leftrightarrow\; x \in S_r f$$

olur.

Uyarı 1.4.6. *$f \in conv\mathbb{R}^n$ olmak üzere f 'in tanım kümesi f'in epigrafının $\mathbb{R}^n$ üzerine izdüşümüdür. Yani;*

$$domf = proj_{\mathbb{R}^n} epif$$

dir.

Önerme 1.4.7. *[4, 5] $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ olmak üzere aşağıdakiler denktir.*
(i) f konvekstir.
(ii) $epif$ kümesi $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$'de konvekstir.
(iii) $epi_s f$ kümesi $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$'de konvekstir.

Kanıt. $(i) \Rightarrow (ii)$ f konveks olsun. $(x, r), (y, t) \in epif$ ve $\alpha \in (0, 1)$ alalım. $f(x) \leq r$ ve $f(y) \leq t$'dir. f konveks olduğundan,

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)y \leq \alpha r + (1 - \alpha)t$$

elde edilir. Buradan $(\alpha x+(1-\alpha)y, \alpha r+(1-\alpha)t) = \alpha(x, r)+(1-\alpha)(y, t) \in epif$ bulunur. O halde $epif$ konvekstir.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ $epif$ konveks olsun. $(x, r), (y, t) \in epi_s f$ alalım. Buradan, $f(x) < r$ ve $f(y) < t$'dir. Ayrıca $(x, f(x)), (y, f(y)) \in epif$ ve $epif$ konveks olduğundan, $\alpha \in (0, 1)$ için,

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)y < \alpha r + (1 - \alpha)t$$

bulunur. Böylece $\alpha(x, r) + (1 - \alpha)(y, t) \in epi_s f$ elde edilir ve dolayısıyla $epi_s f$ konvekstir.
$(iii) \Rightarrow (i)$ $epi_s f$ konveks olsun. Keyfi $x, y \in \mathbb{R}^n$ alalım. Bu durumda $(x, f(x)), (y, f(y)) \in \overline{epi_s f}$'tir. O halde $epi_s f$'te öyle (x_n, r_n), (y_n, t_n) dizileri

vardır ki, $\lim_{n\to\infty}(x_n, r_n) = (x, f(x))$ ve $\lim_{n\to\infty}(y_n, t_n) = (y, f(y))$ 'dir.
Diğer taraftan, $epi_s f$ konveks olduğundan $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\alpha \in (0,1)$ için, $\alpha(x_n, r_n) + (1-\alpha)(y_n, t_n) \in epi_s f$'tir. Dolayısıyla,

$$f(\alpha x_n + (1-\alpha)y_n) < \alpha r_n + (1-\alpha)t_n$$

$$\lim_{n\to\infty} f(\alpha x_n + (1-\alpha)y_n) < \lim_{n\to\infty} \alpha r_n + (1-\alpha)t_n$$
$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$$

elde edilir ki böylece f'in konveksliği gösterilmiş olur. □

1.4.2 Lineer ve Afin Fonksiyonlar

Tanım 1.4.8. *[4, 5, 7, 12] $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ ve $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için,*

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) = \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$$

*eşitsizliği sağlanıyorsa f'e **afin dönüşüm** adı verilir.*

Önerme 1.4.9. *[4, 5, 7, 12] $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dönüşümünün afin olması için gerek ve yeter koşul, bir $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lineer dönüşümü ve $\exists\ a \in \mathbb{R}$ için $f = T + a$ olmasıdır.*

Uyarı 1.4.10. *$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lineer fonksiyoneli için, $T(x) = \langle s, x\rangle$ olacak şekilde $\exists\ s \in \mathbb{R}^n$ vardır. Dolayısıyla $epiT = \{(x, r) \mid \langle s, x\rangle \leq r\}$ biçimindedir. Benzer şekilde, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ afin dönüşüm ise $\exists\ s \in \mathbb{R}^n$ ve $x_0 \in \mathbb{R}^n$ için, $f(x) = \langle s, x - x_0\rangle + f(0)$ yazılır ve f 'in epigrafı*

$$\begin{aligned} epif &= \{(x, r) \mid \langle s, x - x_0\rangle + f(x_0) \leq r\} \\ &= \{(x, r) \mid \langle s, x\rangle - r \leq \langle s, x_0\rangle - f(x_0)\} \\ &= \{(x, r) \mid \langle (s, -1), (x, r)\rangle \leq \langle (s, -1), (x_0, f(x_0))\rangle\} \\ &= \{(x, r) \mid \langle (s, -1), (x, r)\rangle - \langle (s, -1), (x_0, f(x_0))\rangle \leq 0\} \end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. O halde bir afin fonksiyonun epigrafı kapalı yarı uzaydır ve bu yarı uzay $(s, -1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ vektörü ile karakterize edilebilir.

Önerme 1.4.11. *[4, 5, 7, 12] $f \in conv\mathbb{R}^n$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda,*

$$ri(epif) = \{(x, r) \mid x \in ri(domf),\ f(x) < r\}$$

dir.

Kanıt. Bir $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ afin dönüşümü için $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konveks bir küme olmak üzere, $ri(T(C)) = T(riC)$'dir. Dolayısıyla, $domf = proj_{\mathbb{R}^n} epif$ olduğuna göre ve izdüşüm dönüşümü afin olduğundan,

$$ri(domf) = ri(proj_{\mathbb{R}^n} epif) = proj_{\mathbb{R}^n} ri(epif)$$

elde edilir. Keyfi $x \in ri(domf)$ alınsın. Bu durumda, $ri(epif)$ kümesinin x noktası üzerine izdüşümü,

$$(\{x\} \times \mathbb{R}) \cap ri(epif) = ri[(\{x\} \times \mathbb{R}) \cap epif] = (f(x), +\infty)$$

olur. Dolayısıyla, $x \in ri(domf)$ ve $(x, r) \in ri(epif) \Leftrightarrow f(x) < r$ olduğu gösterilmiş olur. □

Önerme 1.4.12. *[4, 5, 7, 12] $f \in conv\mathbb{R}^n$ ve $x_0 \in ridomf$ olsun. Bu durumda f fonksiyonu bir afin dönüşümle minorize edilebilir. Yani, $aff(domf)$ kümesine paralel alt uzay içinde*

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle s, x - x_0 \rangle$$

eşitsizliğini sağlayan bir s elemanı vardır.

Kanıt. $epif \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ kümesinin $\mathbb{R}^n$ üzerine izdüşüm dönüşümü altındaki görüntüsü $domf$ 'tir. Dolayısıyla $aff(epif) = (aff(domf)) \times \mathbb{R}$ yazılabilir. $aff(domf)$ kümesine paralel alt uzay V olsun. O halde keyfi $x \in domf$ için $aff(domf) = x + V$ ve buradan $aff(epif) = (x + V) \times \mathbb{R}$ olur. Keyfi $x_0 \in ridomf$ alındığında, Önerme 1.4.11 den dolayı $(x_0, f(x_0))$ noktası $epif$'in relatif sınırındadır. Bu $(x_0, f(x_0))$ noktasında $epif$'i destekleyen bir hiperdüzlemin varlığını gösterir. Dolayısıyla $\forall (x, r) \in epif$ için,

$$\langle (s, \alpha), (x, r) \rangle \leq \langle (s, \alpha), (x_0, f(x_0)) \rangle$$

$$\langle s, x\rangle + \langle \alpha, r\rangle \leq \langle s, x_0\rangle + \langle \alpha, f(x_0)\rangle$$

$$\langle s, x\rangle + \alpha r \leq \langle s, x_0\rangle + \alpha f(x_0) \tag{1.4.2}$$

olacak şekilde ikisi birden sıfıra eşit olmayan $\exists\ s \in V$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ vardır. (1.4.2) eşitsizliğinin sağ yanı sabit ve bu eşitsizlik $\forall (x, r) \in epif$ için sağlandığından $r \to +\infty$ için $\alpha \leq 0$ olmalıdır. Dahası $\alpha < 0$ olmalıdır. Gerçekten, $s \in V$ ve $x_0 \in ri(domf)$ olduğundan $\exists\ \delta > 0$ için $x_0 + \delta s \in domf$ olur ve (1.4.2) eşitsizliğinden $(x_0 + \delta s, f(x_0 + \delta s)) \in epif$ için,

$$\langle s, x_0 + \delta s\rangle + \alpha f(x_0 + \delta s) \leq \langle s, x_0\rangle + \alpha f(x_0)$$

$$\langle s, x_0\rangle + \delta\|s\|^2 + \alpha f(x_0 + \delta s) \leq \langle s, x_0\rangle + \alpha f(x_0)$$

$$\delta\|s\|^2 \leq \alpha(f(x_0) - f(x_0 + \delta s)) < +\infty \tag{1.4.3}$$

elde edilir. Bu ise $\alpha \neq 0$ olduğunu gösterir. Çünkü $\alpha = 0$ olsaydı (1.4.3) eşitsizliğinden $s = 0$ olurdu ki bu α ve s'nin ikisinin birden sıfırdan farklı olmasıyla çelişirdi. O halde $\alpha < 0$'dır. Genelliği bozmadan $\alpha = -1$ seçilsin. Bu durumda (1.4.2) eşitsizliğinden,

$$\langle s, x\rangle - r \leq \langle s, x_0\rangle - f(x_0)$$

$$\langle s, x\rangle - \langle s, x_0\rangle + f(x_0) \leq r$$

$$\langle s, x - x_0\rangle + f(x_0) \leq \inf\{r \mid f(x) \leq r\} = f(x)$$

bulunur. Böylece istenilen $h(x) = \langle s, x - x_0\rangle + f(x_0)$ dönüşümü elde edilmiş olur. $\square$

1.4.3 Kapalı Konveks Fonksiyonlar

Tanım 1.4.13. *[4, 5] $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ve $x_0 \in \mathbb{R}^n$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in B(x_0, \delta)$ için $f(x_0) - \varepsilon < f(x)$ olacak şekilde $\exists\ \delta > 0$ sayısı varsa f fonksiyonu x_0 noktasında **alttan yarı süreklidir** denir.*

Tanım 1.4.14. *[4, 5] $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ve $x_0 \in cl(domf)$ olsun. Bu durumda,*

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) = \sup_{\delta > 0} \inf\{f(x) \mid x \in B_d(x_0, \delta)\}$$

*sayısına f fonksiyonunun x_0'daki **alt limiti** denir.*

Teorem 1.4.15. *[4, 5] $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ve $x_0 \in \mathbb{R}^n$ olsun. Bu durumda f'in x_0'da alttan yarı sürekli olması için gerek ve yeter koşul $\liminf_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0)$ olmasıdır.*

Tanım 1.4.16. *[4, 5] $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ fonksiyonu verilsin. Eğer f'in epigrafı kapalı ise f fonksiyonu **kapalıdır** denir. Buna göre $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı kapalı ve konveks ve proper fonksiyonların ailesi $\overline{\mathbf{conv}}\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ ile gösterilir.*

Önerme 1.4.17. *[4, 5] $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ verilsin. Bu durumda aşağıdakiler denktir:*

(i) f $\mathbb{R}^n$'de alttan yarı süreklidir.

(ii) $epif$ kümesi $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$'de kapalıdır.

(iii) $\forall r \in \mathbb{R}$ için $S_r f$ alt düzey kümeleri kapalıdır.

Kanıt.

(i) $\Rightarrow$ *(ii)* f alttan yarı sürekli olsun. $(x_0, r_0) \in \overline{epif}$ alınsın. Bu durumda öyle bir $(x_k, r_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq epif$ dizisi vardır ki $(x_k, r_k) \to (x_0, r_0)$'dır. Buradan $\forall k \in \mathbb{N}$ için, $f(x_k) \leq r_k$'dır. Ayrıca f alttan yarı sürekli olduğundan $\liminf_{y \to x} f(y) \geq f(x)$'tir. Dolayısıyla,

$$r_0 = \lim_{k \to +\infty} r_k \geq \liminf_{k \to +\infty} f(x_k) \geq \liminf_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0)$$

elde edilir ve böylece $(x_0, r_0) \in epif$'tir. Sonuç olarak $\overline{epif} \subseteq epif$ olduğundan $epif$ kapalıdır.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ $epif$ kapalı olsun. Keyfi $r \in \mathbb{R}$ için $S_r f = epif \cap (\mathbb{R}^n \times \{r\})$ biçiminde yazılabilir. Buradan $epif$ ve $\mathbb{R}^n \times \{r\}$ kapalı olduklarından, arakesitleri olan $S_r f$ alt düzey kümesi kapalıdır.

$(iii) \Rightarrow (i)$ $S_r f$ alt düzey kümeleri kapalı olsun. Kabul edelim ki $\exists\, x_0 \in \mathbb{R}^n$ noktasında f alttan yarı sürekli olmasın. O halde, öyle bir $\varepsilon_0 > 0$ vardır ki $\forall \delta > 0$ ve $\exists\, x_\delta \in B(x_0, \delta)$ için $f(x_0) - f(x_\delta) \geq \varepsilon_0$ 'dır. Buradan $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\delta = \frac{1}{k}$ seçilirse aynı $\varepsilon_0 > 0$ için $\exists\, x_k \in B(x_0, \frac{1}{k})$ vardır öyle ki $f(x_0) - f(x_k) \geq \varepsilon_0$ 'dır. Böylece elde edilen (x_k) dizisi için $x_k \to x_0$ 'dır. Ayrıca $\forall k \in \mathbb{N}$ için, $f(x_k) \leq f(x_0) - \varepsilon_0 < f(x_0)$ olduğundan, eğer $f(x_k)$ dizisi yakınsak ise, $f(x_k) \to \rho < f(x_0)$ olmalıdır. $r \in (\rho, f(x_0))$ alırsak yeterince büyük bir k doğal sayısı için $f(x_k) \leq r < f(x_0)$ elde edilir. O halde $S_r f$ alt düzey kümesi (x_k) dizisinin x_0'a yakınsayan bir alt dizisini bulundurur ancak x_0 noktasını bulundurmaz. Bu ise $S_r f$'nin kapalılığı ile çelişir. Kabul yanlıştır ve dolayısıyla f, $\mathbb{R}^n$ de alttan yarı süreklidir.

$\square$

Tanım 1.4.18. *[4, 5] $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ fonksiyonu verilsin. $x \in \mathbb{R}^n$ için,*

$$clf(x) := \liminf_{y \to x} f(y)$$

*biçiminde tanımlı clf fonksiyonuna f'in **kapanış fonksiyonu yada alttan yarı sürekli zarf fonksiyonu** denir. Denk olarak $epi(clf) = cl(epif)$ koşulunu sağlayan clf fonksiyonu f'in kapanış fonksiyonudur.*

Önerme 1.4.19. *[4, 5] $f \in conv\mathbb{R}^n$ ve $x_0 \in ridomf$ olsun. Bu durumda, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için*

$$clf(x) = \lim_{t \downarrow 0} f(x + t(x_0 - x))$$

dir.

Kanıt. $x_t = x + t(x_0 - x)$ diyelim. $t \downarrow 0$ için $x_t \to x$ olduğundan,

$$clf(x) = \liminf_{y \to x} f(y) \leq \liminf_{t \downarrow 0} f(x + t(x_0 - x))$$

olur. Eşitsizliğin diğer tarafı,

$$\forall r \geq clf(x) \text{ için } \lim_{t\downarrow 0} f(x + t(x_0 - x)) \leq r$$

olduğu gösterilerek kanıtlanacaktır. Eğer bu eşitsizlikleri sağlayan hiçbir r sayısı yoksa $clf(x) = +\infty$ olur ki bu durumda eşitsizliğin sağlandığı açıktır. $(x, r) \in epi(clf) = cl(epif)$ alınsın ve $f(x_0) < r_0$ olsun. $(x_0, r_0) \in ri(epif)$'tir. O halde, $(x, r) \in cl(epif)$ ve $(x_0, r_0) \in ri(epif)$ için $t \in (0, 1)$ olmak üzere,

$$t(x_0, r_0) + (1 - t)(x, r) \in ri(epif) \subseteq epif$$

elde edilir. Buradan $\forall t \in (0, 1)$ için,

$$f(x + t(x_0 - x)) \leq tr_0 + (1 - t)r$$

bulunur ve böylece

$$\lim_{t\downarrow 0} f(x + t(x_0 - x)) \leq r$$

olur. □

Önerme 1.4.20. *[4, 5] $f \in conv\mathbb{R}^n$ ise,*
(i) $clf \in conv\mathbb{R}^n$'dir.
(ii) $\forall x \in ridomf$ için $clf(x) = f(x)$'tir.

Kanıt. (*i*) $epif$ konveks olduğundan $cl(epif)$ konvekstir. $cl(epif) = epi(clf)$ olduğuna göre $epi(clf)$ ve dolayısıyla clf konvekstir.
(*ii*) $x \in ridomf$ alalım ve $\varphi(t) = f(x + td)$ fonksiyonunu tanımlayalım.
φ fonksiyonu f konveks olduğundan $t = 0$'da süreklidir. Dolayısıyla,

$$clf(x) = \lim_{t\downarrow 0} \varphi(t) = \lim_{t\downarrow 0} f(x + td) = f(x)$$

elde edilir. □

Önerme 1.4.21. *[4, 5] $\mathbb{R}^n$'de sonlu ve konveks fonksiyonlar kapalıdır.*

Kanıt. g sonlu ise $domg = ridomg = \mathbb{R}^n$ olacağından, bir önceki önermeden $\mathbb{R}^n$ üzerinde $clg = g$ elde edilir. Böylece g kapalıdır. □

Teorem 1.4.22. *[4, 5] $f \in conv\mathbb{R}^n$ verilsin. Bu durumda clf f'i minorize eden tüm afin dönüşümlerin supremumudur.*

Kanıt. $epif$'i içeren bir kapalı yarı uzay bir $(s, \alpha) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ vektörü, ve bir $b \in \mathbb{R}$ sayısı için,

$$\langle s, x\rangle + \alpha r \leq b \tag{1.4.4}$$

eşitsizliğini sağlayan (x, r) vektörlerinden oluşur.

$$H_\sigma^- = \{(x, r) \,|\, \langle s, x\rangle + \alpha r \leq b\}$$

olmak üzere $\sigma = (s, \alpha, b)$ üçlülerinin ailesi Σ olsun. $epi\,(clf) = cl\,(epif)$ kapalı ve konveks olduğundan bu kapalı yarı uzayların arakesiti biçimindedir. Yani $epi\,(clf) = \bigcap_{\sigma\in\Sigma} H_\sigma^-$ dir. (1.4.4) eşitsizliği $\forall\,(x, r) \in epif$ için sağlandığından $r \to +\infty$ için ancak $\alpha \leq 0$ olduğunda sağlatılabilir. Ayrıca kapalı yarı uzayı belirten hiperdüzleme karşılık gelen lineer dönüşümün pozitif homojenliğinden dolayı $\alpha = 0$ ve $\alpha = -1$ değerleri için Σ'nın

$$\begin{aligned}
\Sigma_0 &= \{(s, 0, b) \,|\, \langle s, x\rangle \leq b\} \quad \text{(dikey kapalı yarı uzaylara karşılık gelir)}\\
\Sigma_1 &= \{(s, -1, b) \,|\, \langle s, x\rangle - r \leq b\} \quad \text{(üst kapalı yarı uzaylara karşılık gelir)}
\end{aligned}$$

biçiminde bir parçalanışı elde edebilebilir. Σ_1 f'i minorize eden afin dönüşümlere karşılık gelir ve boş kümeden farklıdır. Çünkü f'i minorize eden en az bir afin dönüşümün varlığı bilinmektedir. Σ_0 ise $domf$'i içeren $\mathbb{R}^n$'nin dikey kapalı yarı uzaylarıdır. Burada kanıtlanması gereken Σ ve Σ_1 üzerinden karşılık gelen H_σ^- yarı uzaylarının arakesitlerinin aynı kümeyi ürettiğidir ki bu küme $epi\,(clf)$'ten başkası değildir. Bunun için keyfi $\sigma_0 = (s_0, 0, b_0) \in \Sigma_0$, $\sigma_1 = (s_1, -1, b_1) \in \Sigma_1$ alınsın ve $\forall t \geq 0$ için,

$$\sigma\,(t) = (s_1 + ts_0, -1, b_1 + tb_0) \in \Sigma_1$$

oluşturulsun. Buradan

$$H_{\sigma_0}^- \cap H_{\sigma_1}^- = \bigcap_{t\geq 0} H_{\sigma(t)}^- := H^-$$

olduğu gösterilecektir. Keyfi $(x,r) \in H^-_{\sigma_0} \cap H^-_{\sigma_1}$ alınsın. O halde, $\langle s_0, x\rangle \le b_0$ ve $\langle s_1, x\rangle - r \le b_1$ 'dir. Buradan $t \ge 0$ için,

$$\begin{aligned} \langle s_1 + ts_0, x\rangle - (b_1 + tb_0) &= \langle s_1, x\rangle + t\langle s_0, x\rangle - b_1 - tb_0 \\ &= t\left(\langle s_0, x\rangle - b_0\right) + \langle s_1, x\rangle - b_1 \le t.0 + r = r \end{aligned}$$

(1.4.4) eşitsizliği elde edilir. Buna göre $(x,r) \in \bigcap\limits_{t\ge 0} H^-_{\sigma(t)}$ olur. Böylece kapsamanın bir yönü gösterilmiş olur. Diğer yön için $(x,r) \in \bigcap\limits_{t\ge 0} H^-_{\sigma(t)}$ alınsın. O halde $\forall t \ge 0$ için $(x,r) \in H^-_{\sigma(t)}$'dir. (1.4.4) eşitsizliğinde $t = 0$ değeri için, $\langle s_1, x\rangle - b_1 \le r$ ve böylece $(x,r) \in H^-_{\sigma_1}$ bulunur.

$t > 0$ için,

$$\begin{aligned} \langle s_1 + ts_0, x\rangle - (b_1 + tb_0) &\le r \\ \langle s_1, x\rangle + t\langle s_0, x\rangle - b_1 - tb_0 &\le r \\ \frac{1}{t}\langle s_1, x\rangle + \langle s_0, x\rangle - \frac{b_1}{t} - b_0 &\le \frac{r}{t} \\ \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}\langle s_1, x\rangle + \langle s_0, x\rangle - \frac{b_1}{t} - b_0\right) &\le \lim_{t\to\infty}\frac{r}{t} \\ \langle s_0, x\rangle - b_0 &\le 0 \end{aligned}$$

bulunur ki buradan $(x,r) \in H^-_{\sigma_0}$ elde edilir. $(x,r) \in H^-_{\sigma_0} \cap H^-_{\sigma_1}$'dir. Böylece kapsamanın diğer yönü de gösterilmiş olur, $H^-_{\sigma_0} \cap H^-_{\sigma_1} = H^-$ elde edilir ve kanıt biter. □

1.4.4 Örnekler

Örnek 1.4.23. ***(İndikatör Fonksiyonu)***

$S \subseteq \mathbb{R}^n$ boştan farklı bir küme olmak üzere $i_S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$$i_S(x) := \begin{cases} 0 & , \ x \in S \\ +\infty & , \ x \notin S \end{cases}$$

ile tanımlı fonksiyona **S *kümesinin indikatör fonksiyonu*** *denir. Bu fonksiyonun epigrafı*

$$epi\ i_S = S \times \mathbb{R}^+$$

olduğundan i_S indikatörünün kapalı ve konveks olması için gerek ve yeter koşul S kümesinin kapalı ve konveks olmasıdır. Daha genel olarak, $f \in conv\mathbb{R}^n$ ve

$C \subseteq \mathbb{R}^n$ boştan farklı konveks bir küme olmak üzere

$$\varphi(x) := \begin{cases} f(x) & , \quad x \in C \\ +\infty & , \quad x \notin C \end{cases}$$

fonksiyonu ise $\mathrm{dom} f \cap C \neq \emptyset$ koşulu sağlandığında konveks bir fonksiyondur. Dahası f ve C kapalı olduklarında $\varphi = f + i_C$ fonksiyonu da kapalı olur.

Örnek 1.4.24. ***(Destek Fonksiyonu)***

$S \subseteq \mathbb{R}^n$ boştan farklı bir küme olmak üzere $\sigma_S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$$\sigma_S(x) := \sup_{s \in S} \langle s, x \rangle$$

şeklinde tanımlı fonksiyona ***S'nin destek fonksiyonu*** *denir. Destek fonksiyonu kapalı konveks bir fonksiyondur. Üstelik epigrafı kapalı konveks bir konidir. Ayrıca*

$$\mathrm{dom}\sigma_S = \{a \in \mathbb{R}^n \mid \exists r \in \mathbb{R} \text{ için } \langle s, a \rangle \leq r, \ \forall s \in S\}$$

olduğundan $\mathrm{dom}\sigma_S$ konveks bir konidir. Destek fonksiyonu bir sublineer fonksiyon olarak ileride daha ayrıntılı biçimde incelenecektir.

Örnek 1.4.25. ***(Parçalı Afin ve Polihedral Fonksiyonlar)***

$(s_1, b_1), (s_2, b_2), \ldots, (s_m, b_m) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\mathbb{R}^n \ni x \mapsto \check{f}(x) := \max\{\langle s_j, x \rangle - b_j \mid j = 1, 2, \ldots, m\} \tag{1.4.5}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona ***parçalı afin fonksiyon*** *denir. Bir parçalı afin fonksiyon $\mathbb{R}^n$ uzayını, $\check{f}$ üzerlerinde afin olacak şekilde en fazla m bölgeye ayırır. Bunlardan bazıları boş olabilir ancak boş olmayan bölgeler (örneğin j_0.ıncı bölge)*

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle s_j, x \rangle - b_j \leq \langle s_{j_0}, x \rangle - b_{j_0}, \ j = 1, 2, \ldots, m\}$$

biçiminde kapalı konveks polihedronlardır. Aslında grafiği sonlu sayıda afin hiperdüzlemlerden oluşan her fonksiyon konveks olmak zorunda değildir. Ancak parçalı afin fonksiyonlar tanımlanışı gereği kapalı ve konvekstirler. Üstelik *epi$\check{f}$ kapalı konveks bir polihedrondur. Ancak (1.4.5) ile verilen fonksiyonların epigrafları tüm polihedral epigrafları vermez. Buna göre; epigrafı kapalı konveks bir polihedron olan fonksiyonlara **Polihedral Fonksiyon** adı verilir. Diğer bir deyişle, $\check{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bir parçalı afin fonksiyon ve $P \subseteq \mathbb{R}^n$ kapalı konveks bir polihedron olmak üzere $\check{f} + i_P$ fonksiyonu polihedral bir fonksiyondur. Dolayısıyla polihedral fonksiyonlar da tanımlanışı gereği kapalı ve konvekstirler.*

Örnek 1.4.26. ***(Norm Fonksiyonu ve Uzaklık Fonksiyonu)***

$\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı norm fonksiyonu tanımlanışı gereği konveks bir fonksiyondur. Üstelik sürekli olduğundan alttan yarı sürekli ve böylece kapalı bir fonksiyondur. Daha genel olarak $C \subseteq \mathbb{R}^n$ boştan farklı konveks bir küme ve $\|.\|$ $\mathbb{R}^n$ üzerinde herhangi bir norm olmak üzere

$$\begin{aligned} d_C : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \\ x &\mapsto d_C(x) := \inf\{\|y - x\| \mid y \in C\} \end{aligned}$$

*biçiminde tanımlanan d_C fonksiyonuna **uzaklık fonksiyonu** adı verilir. Uzaklık fonksiyonunun kapalılığı ve konveksliği tanımlanışı gereği açıktır.*

Örnek 1.4.27. ***(Kuadratik Formlar)***

$Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ simetrik bir lineer dönüşüm olmak üzere

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) := \frac{1}{2}\langle Qx, x\rangle \end{aligned}$$

*ile tanımlı f fonksiyonuna $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ **üzerinde bir kuadratik form** denir. Bir f kuadratik formunun konveks olabilmesi için gerek ve yeter koşul verilen Q lineer dönüşümünün pozitif yarı tanımlı olmasıdır. Bu ise lineer dönüşüme karşılık gelen $Q_{n\times n}$ matrisinin negatif olmayan özdeğerlere sahip olması demektir.*

Örnek 1.4.28. ***(Epigrafiksel Zarf ve Alt Sınır Fonksiyonu)***

Tanım 1.4.29. *$C \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ alttan sınırlı bir küme olsun. Yani $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için*

$$\inf\{r \in \mathbb{R} \mid (x, r) \in C\} > -\infty$$

olsun. Bu durumda C'yi kapsayan en dar epigrafa ***C'nin epigrafiksel zarfı*** *denir.*

Bu zarfı oluşturmak için,

(i) C'nin üzerindeki tüm noktalar kümeye dahil edilmelidir. Yani $(x, r) \in C$ ve $\forall r^{'} > r$ için $(x, r^{'})$ noktalar kümesi C'ye eklenmelidir.

(ii) C'nin altı kapatılmalıdır. Yani $(x, r^{'}) \in C$ ve $r^{'} \to r$ iken (x, r) C'ye eklenmelidir.

Tanım 1.4.30. *[4, 5] $C \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ alttan sınırlı bir küme olsun. Yani $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için $\inf\{r \in \mathbb{R} \mid (x, r) \in C\} > -\infty$ olsun. Bu durumda,*

$$\ell_C(x) := \inf\{r \in \mathbb{R} \mid (x, r) \in C\}$$

biçiminde tanımlanan ℓ_C fonksiyonuna ***C'nin alt sınır fonksiyonu*** *denir.*

Teorem 1.4.31. *$C \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ alttan sınırlı bir küme ise, C'nin epigrafiksel zarfı $epi\ell_C$'ye eşit olur.*

Teorem 1.4.32. *[4, 5] $C \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ alttan sınırlı bir küme olsun. Bu durumda;*

(i) C konveks ise $\ell_C \in conv\mathbb{R}^n$'dir.

(ii) C kapalı ve konveks ise $\ell_C \in \overline{conv}\mathbb{R}^n$ 'dir.

1.4.5 Fonksiyonların Kapalılığını ve Konveksliğini Koruyan İşlemler

Basit konveks fonksiyonlar kullanılarak, konveksl$\breve{\text{g}}$i koruyan işlemlerle yeni konveks fonksiyonlar elde etmek oldukça önemlidir. Burada $\overline{conv}\mathbb{R}^n$ ailesinden alınan fonksiyonların hangi işlemler altında kapalı ve konveks kaldığı incelenecektir.

(i) Pozitif Kombinasyon

Kapalı ve konveks fonksiyonların pozitif reel sayı katları ve birbirleriyle toplamları kapalı ve konvekstirler. Bu özellikler pozitif kombinasyonun kapalılığı ve konveksliği koruduğunu gösterir.

Önerme 1.4.33. *[4, 5] $f_1, f_2, \ldots, f_m \in conv\mathbb{R}^n$ $[\overline{conv}\mathbb{R}^n]$ ve $t_1, t_2, \ldots, t_m > 0$ olsun. Eğer $j = 1, 2, \ldots, m$ için f_j'lerin hepsini sonlu yapan en az bir nokta varsa $f := \sum_{j=1}^{m} t_j f_j \in conv\mathbb{R}^n$ $[\overline{conv}\mathbb{R}^n]$ 'dir.*

Kanıt. Önce f'in konveksliğini göstermek için $x, y \in \mathbb{R}^n$ ve $\alpha \in [0,1]$ alınsın. Bu durumda;

$$\begin{aligned} f(\alpha x + (1-\alpha)y) &= \sum_{j=1}^{m} (\alpha x + (1-\alpha)y) \\ &\leq \sum_{j=1}^{m} t_j[\alpha f_j(x) + (1-\alpha) f_j(y)] \\ &= \alpha \sum_{j=1}^{m} t_j f_j(x) + (1-\alpha) \sum_{j=1}^{m} t_j f_j(y) \\ &= \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde f konvekstir. f'in kapalı olduğunu göstermek için f 'in $\mathbb{R}^n$ üzerinde alttan yarı sürekli olduğu gösterilecektir. Her bir $j = 1, 2, \ldots, m$ için f_j fonksiyonları kapalı olduklarından $\mathbb{R}^n$ üzerinde alttan yarı süreklidirler. Dolayısıyla keyfi $x \in \mathbb{R}^n$ ve $t_j > 0$ sayıları için,

$$\liminf_{y \to x} \, t_j f_j(y) = t_j \, \liminf_{y \to x} \, f_j(y) \geq t_j f_j(x)$$

olur. O halde;

$$\begin{aligned}
\liminf_{y\to x} f(y) &= \liminf_{y\to x}\left(\sum_{j=1}^{m} t_j f_j(y)\right) \\
&\geq \sum_{j=1}^{m} \liminf_{y\to x}\ t_j f_j(y) \\
&\geq \sum_{j=1}^{m} t_j f_j(x) \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylelikle f, $\mathbb{R}^n$ üzerinde alttan yarı süreklidir ve dolayısıyla f kapalıdır. Böylece $f \in \overline{conv}\mathbb{R}^n$'dir. □

(ii) Supremum

Fonksiyonların kapalılığını ve konveksliğini koruyan bir diğer işlem bu fonksiyonların noktasal supremumlarının alınması işlemidir.

Önerme 1.4.34. *[4, 5] $\{f_j \in conv\mathbb{R}^n \mid j \in J\}$ konveks fonksiyonların bir ailesi olsun ve $f := \sup\{f_j \mid j \in J\}$ olarak tanımlansın. Eğer f'in sonlu değer aldığı en az bir nokta varsa $f \in conv\mathbb{R}^n$'dir. Eğer $\forall j \in J$ için f_j fonksiyonları aynı zamanda kapalı iseler $f \in \overline{conv}\mathbb{R}^n$ 'dir.*

Kanıt. $epi f = \bigcap_{j\in J} epi f_j$'dir. Gerçekten;

$$\begin{aligned}
(x,r) \in epi f &\Leftrightarrow \sup_{j\in J} f_j(x) \leq r \\
&\Leftrightarrow f_j(x) \leq r\ (\forall j \in J) \\
&\Leftrightarrow (x,r) \in epi f_j\ (\forall j \in J) \\
&\Leftrightarrow (x,r) \in \bigcap_{j\in J} epi f_j
\end{aligned}$$

elde edilir. $\forall j \in J$ için f_j fonksiyonları konveks olduklarından epigrafları konveks ve böylelikle arakesitleri olan $epi f$ kümesi de konvekstir. O halde $f \in conv\mathbb{R}^n$ 'dir. Benzer şekilde eğer $\forall j \in J$ için f_j'ler aynı zamanda kapalı iseler epigrafları ve dolayısıyla arakesitleri olan $epi f$ kapalıdır. Böylece $f \in \overline{conv}\mathbb{R}^n$ bulunur. □

(iii) Bir Konveks Fonksiyonun Bir Afin Fonksiyonla Sağdan Bileşkesi

Bir konveks fonksiyonla bir afin fonksiyonun bileşkesi, konveks fonksiyonun kapalı olduğu durumda kapalılığı ve konveksliği koruyacaktır.

Önerme 1.4.35. *[4, 5] $f \in conv\mathbb{R}^n$ ve $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ afin bir fonksiyon olsun. Eğer $A(\mathbb{R}^n) \cap domf \neq \emptyset$ ise $f \circ A \in conv\mathbb{R}^m$'dir. Ayrıca $f \in \overline{conv}\mathbb{R}^n$ ise $f \circ A \in \overline{conv}\mathbb{R}^m$ olur.*

Kanıt. $f \in \overline{conv}\mathbb{R}^n$ ve $A(\mathbb{R}^n) \cap domf \neq \emptyset$ koşulunu sağlayan bir A afin dönüşümü alınsın. $\forall x \in \mathbb{R}^m$ için $f \circ A(x) > -\infty$ olduğu açıktır. Ayrıca $A(\mathbb{R}^n) \cap domf \neq \emptyset$ olduğundan $f(y) < +\infty$ olan $\exists\ y = A(x) \in \mathbb{R}^n$ vardır. Dolayısıyla, $f(y) = (f \circ A)(x) < +\infty$ olan $\exists\ \in \mathbb{R}^m$ vardır. O halde $(f \circ A)$ proper bir fonksiyondur. Şimdi $(f \circ A)$ 'nın konveks olduğunu göstermek için $x_1, x_2 \in dom(f \circ A)$ ve $\alpha \in [0, 1]$ alınsın. A afin ve f konveks olduğundan,

$$\begin{aligned}
(f \circ A)(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) &= f(A(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2)) \\
&= f(\alpha A(x_1) + (1-\alpha)A(x_2)) \\
&\leq \alpha f(A(x_1)) + (1-\alpha)f(A(x_2)) \\
&= \alpha(f \circ A)(x_1) + (1-\alpha)(f \circ A)(x_2)
\end{aligned}$$

bulunur. O halde $(f \circ A)$ konvekstir. Kapalılığı göstermek için;

$$\begin{aligned}
B : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \\
(x, \mu) &\mapsto B((x, \mu)) := (A(x), \mu)
\end{aligned}$$

dönüşümü tanımlansın. B afin bir dönüşüm olduğundan süreklidir. Üstelik,

$$B^{-1}(epif) = B^{-1}(\{(x, r) \mid f(x) \leq r\}) = \{(A^{-1}(x), r) \mid f(x) \leq r\}$$

olur. $A^{-1}(x) = y$ denirse,

$$B^{-1}(epif) = \{(y, r) \mid (f \circ A)(y) \leq r\} = epi(f \circ A)$$

elde edilir. f kapalı olduğundan $epif$ kapalıdır. B sürekli ve kapalı kümelerin sürekli fonksiyonlar altındaki ön görüntüleri kapalı olduğundan $B^{-1}(epif) = epi(f \circ A)$ kapalıdır. Dolayısıyla $f \circ A \in \overline{conv}\mathbb{R}^m$'dir. □

(iv) Bir Konveks Fonksiyonun Artan Bir Konveks Fonksiyonla Soldan Bileşkesi

Yukarıdaki işleme benzer olarak herhangi iki konveks fonksiyonun bileşkesi, bunlardan birinin artan olması koşuluyla konveks olacaktır. Eğer her ikisi de kapalı iseler bileşke fonksiyon da kapalıdır.

Önerme 1.4.36. *[4, 5] $f \in conv\mathbb{R}^n$ $[\overline{conv}\mathbb{R}^n]$ verilsin ve $g \in conv\mathbb{R}$ $[\overline{conv}\mathbb{R}]$ artan bir fonksiyon olsun. Eğer $f(x_0) \in domg$ olacak şekilde $\exists\ x_0 \in \mathbb{R}^n$ varsa $g(+\infty) := +\infty$ olmak üzere, $g \circ f \in conv\mathbb{R}^n$ $[\overline{conv}\mathbb{R}^n]$ 'dir.*

Kanıt. $x_1, x_2 \in dom(g \circ f)$ ve $\alpha \in [0,1]$ olsun. f konveks olduğundan

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)$$

olur. Buradan g artan ve konveks olduğundan,

$$\begin{aligned} g(f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2)) &\leq g(\alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)) \\ &\leq \alpha\ g(f(x_1)) + (1-\alpha)\ g(f(x_2)) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece;

$$(g \circ f)(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha\ (g \circ f)(x_1) + (1-\alpha)\ (g \circ f)(x_2)$$

elde edilir. O halde $(g \circ f) \in conv\mathbb{R}^n$'dir. Kapalılığı göstermek için de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq dom(g \circ f)$ dizisi alınsın ve $x_n \to x$ olsun. f kapalı olduğundan $\forall k \geq m$ için

$$f(x) \leq \liminf f(x_n) \leq f(x_k)$$

olacak şekilde bir $m \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. g artan olduğundan $\forall k \geq m$ için

$$(g \circ f)(x) \leq (g \circ f)(x_k)$$

elde edilir. Buradan $k \to \infty$ için

$$\liminf_{k\to\infty}(g \circ f)(x) \leq \liminf_{k\to\infty}(g \circ f)(x_k)$$

ve böylece

$$(g \circ f)(x) \leq \liminf_{k\to\infty}(g \circ f)(x_k)$$

bulunur ki böylece $g \circ f$ alttan yarı süreklidir. Yani bileşke fonksiyon kapalıdır.

$\square$

(v) İnfimal Konvolüsyon

Burada herhangi iki fonksiyonun infimal konvolüsyonu tanımlanacak ve bu işlemin konveksliği koruduğu gösterilecektir.

$f_1, f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ fonksiyonları verilsin. $C = epi f_1 + epi f_2 \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ kümesi

$$C = \{(x_1 + x_2, r_1 + r_2) \mid f_1(x_1) \leq r_1,\ f_2(x_2) \leq r_2\}$$

biçimindedir. C kümesi uygun bir minorizasyon koşulu altında bir alt sınır fonksiyonuna sahiptir. $x \in \mathbb{R}^n$ için;

$$\ell_C(x) = \inf\{r_1 + r_2 \mid f_1(x_1) \leq r_1,\ f_2(x_2) \leq r_2,\ x = x_1 + x_2\}$$

şeklinde tanımlı alt sınır fonksiyonundaki r_1, r_2 değişkenleri yokedilebilir. Böylelikle, iki fonksiyonun epigrafları toplamı üzerindeki alt sınır fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

Tanım 1.4.37. *[4, 5] $f_1, f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ fonksiyonları verilsin. Bu durumda;*

$$\begin{aligned} (f_1 \nabla f_2)(x) &= \inf\{f_1(x) + f_2(x) \mid x_1 + x_2 = x\} \\ &= \inf\{f_1(y) + f_2(x-y) \mid y \in \mathbb{R}^n\} \end{aligned}$$

ile tanımlı fonksiyona f_1 ve f_2'nin ***infimal konvolüsyonu (inf-convolution)*** *denir.*

Uyarı 1.4.38. *İnfimal konvolüsyon fonksiyonunun $-\infty$ değerini aldığı durumlar vardır. Örneğin; $f(x) = x$ ve $g(x) = -x$ fonksiyonları verildiğinde, $(f \nabla g)(x) = -\infty$ olur. Böyle bir durumda f ve g proper olsalar bile, $f \nabla g$'nin proper olmaması söz konusu olabilir. Bunun için f ve g 'nin ortak bir minorantı olması koşulu getirilerek bu durum ortadan kaldırılabilir.*

Önerme 1.4.39. *[4, 5] $f, g \in conv\mathbb{R}^n$ verilsin. Eğer f ve g fonksiyonlarını minorize eden ortak bir afin dönüşüm bulunabiliyorsa, yani $f(\cdot) \geq \langle s, . \rangle - b$*

ve $g(\cdot) \geq \langle s, . \rangle - b$ olacak şekilde bir $(s, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ vektörü bulunabilirse $f\nabla g \in conv\mathbb{R}^n$ olur.

Kanıt. Keyfi $x \in \mathbb{R}^n$ alındığında $x_1 + x_2 = x$ olacak şekilde $\exists\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ vardır. Buradan

$$f(x_1) + g(x_2) \geq \langle s, x_1 \rangle - b + \langle s, x_2 \rangle - b = \langle s, x_1 + x_2 \rangle - 2b > -\infty$$

olduğundan;

$$(f\nabla g)(x) = \inf\{f(x_1) + g(x_2) \mid x_1 + x_2 = x\} > -\infty$$

elde edilir. Yani $f\nabla g$ proper bir fonksiyondur. Öte yandan $epif$ ve $epig$ konveks olduklarından $C = epif + epig$ konveks ve dolayısıyla C üzerinde tanımlanan ℓ_C alt sınır fonksiyonu yani f ve g'nin infimal konvolüsyonu konveks bir fonksiyondur. Infimal konvolüsyonun konveks olduğunu göstermenin bir diğer yolu ise $epi_s(f\nabla g) = epi_s f + epi_s g$ olduğunu göstermektir.

($\Rightarrow$) $(x, r) \in epi_s(f\nabla g)$ alınsın. O halde

$$\inf\{f(x_1) + g(x_2) \mid x_1 + x_2 = x\} < r$$

olur. Buna göre $\exists\ x_1 + x_2 = x$ için $f(x_1) + g(x_2) < r$ 'dir. Öyleyse $\exists\ \varepsilon > 0$ ve $x = x_1 + x_2$ için $f(x_1) + g(x_2) = r - \varepsilon$ olur. $r_1 = f(x_1) + \frac{\varepsilon}{2}$ $r_2 = g(x_2) + \frac{\varepsilon}{2}$ denirse $r_1 + r_2 = r$ ve

$$\begin{aligned} f(x_1) &= r_1 - \tfrac{\varepsilon}{2} < r_1 \ \Rightarrow\ (x_1, r_1) \in epi_s f \\ g(x_2) &= r_2 - \tfrac{\varepsilon}{2} < r_2 \ \Rightarrow\ (x_2, r_2) \in epi_s g \end{aligned}$$

elde edilir. O halde;

$$(x_1, r_1) + (x_2, r_2) = (x, r) \in epi_s f + epi_s g$$

bulunur.

($\Leftarrow$) Tersine $(x, r) = (x_1, r_1) + (x_2, r_2) \in epi_s f + epi_s g$ alınsın. $f(x_1) < r_1$ ve $g(x_2) < r_2$ 'dir. $x = x_1 + x_2$ $r = r_1 + r_2$ olduğundan

$$f(x_1) + g(x_2) < r$$

ve böylece

$$\inf_{x=x_1+x_2} f(x_1) + g(x_2) < r$$

elde edilir. O halde $(f\nabla g)(x) < r$ ve dolayısıyla $(x,r) \in epi_s(f\nabla g)$ bulunur.

$\square$

Uyarı 1.4.40. *İnfimal konvolüsyon fonksiyonu kapalılığı korumaz. Örneğin; $C, D \subseteq \mathbb{R}^n$ boştan farklı kapalı kümeleri için,*

$$i_C(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \in C \\ +\infty & , \quad x \notin C \end{cases}$$

indikatör fonksiyonu gözönüne alınırsa

$$i_C \nabla i_D = i_{C+D}$$

olur. Ancak $C + D$ kapalı olmayabileceğinden, i_C ve i_D kapalı fonksiyonlar oldukları halde $i_C \nabla i_D$ kapalı olmayabilir.

(vi) Bir Lineer Dönüşüm Altında Görüntü Fonksiyonu

Burada öncelikle herhangi bir fonksiyonun bir lineer dönüşüm altında görüntü fonksiyonu tanımlanacak ve bu görüntü fonksiyonun hangi koşullar altında konveksliği ve kapalılığı koruduğu incelenecektir.

Tanım 1.4.41. *[4, 5] $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ lineer dönüşümü ve $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda her bir $x \in \mathbb{R}^m$ için*

$$Ag(x) = \inf\{g(y) \mid A(y) = x\}$$

biçiminde tanımlı $Ag : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ fonksiyonuna g'nin A altındaki ***görüntü fonksiyonu*** *denir.*

Önerme 1.4.42. *[4, 5] $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ bir lineer dönüşüm ve $g \in conv\mathbb{R}^m$ olsun. Eğer g fonksiyonu $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için $A^{-1}(x) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid A(y) = x\}$ ters görüntü kümesi üzerinde alttan sınırlı ise $Ag \in conv\mathbb{R}^n$ 'dir.*

Kanıt. $x \in \mathbb{R}^n$ alınsın. g fonksiyonu $A^{-1}(x)$ üzerinde alttan sınırlı olduğundan

$$Ag(x) = \inf\{g(y) \mid A(y) = x\} > -\infty$$

olur. Diğer taraftan $y \in domg$ için $A(y) = x$ olsun. Bu durumda

$$Ag(x) = \inf\{g(y) \mid A(y) = x\} < +\infty$$

elde edilir. Dolayısıyla Ag proper bir fonksiyondur. Şimdi konveks olduğunu göstermek için,

$$\begin{aligned} B : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \\ (y, r) &\mapsto B((y, r)) := (A(y), r) \end{aligned}$$

dönüşümünü tanımlansın. A lineer olduğundan B de bir lineer dönüşümdür. Dolayısıyla $epig$ konveks olduğundan

$$B(epig) = \{(A(x), r) \mid (x, r) \in epig\}$$

kümesi de konvekstir. Buradan $B(epig)$ kümesinin alt sınır fonksiyonu $x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \ell_{B(epig)}(x) &= \inf\{r \in \mathbb{R} \mid (x, r) \in B(epig)\} \\ &= \inf\{r \in \mathbb{R} \mid A(y) = x, (y, r) \in epig\} \\ &= \inf\{r \in \mathbb{R} \mid A(y) = x, g(y) \leq r\} \\ &= \inf\{g(y) \mid A(y) = x\} \\ &= Ag(x) \end{aligned}$$

olur. O halde $\ell_{B(epig)}$ fonksiyonunun konveksliğinden Ag konvekstir. Böylece $Ag \in conv\mathbb{R}^n$ elde edilir. □

Uyarı 1.4.43. *Kapalı bir fonksiyonun bir lineer dönüşüm altındaki görüntüsü kapalı olmayabilir. Örneğin,* $f_1, f_2 \in \overline{conv}\mathbb{R}^n$ *verilsin.* $g \in \overline{conv}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ *fonksiyonu,*

$$g(x_1, x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$$

şeklinde ve $A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ *lineer dönüşümü,*

$$A(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

biçiminde tanımlansın. g kapalı bir fonksiyondur ve $Ag = f_1 \nabla f_2$ 'dir. Ancak Uyarı(1.4.40) 'de gösterildiği gibi f_1 ve f_2 kapalı olduğu halde $f_1 \nabla f_2$ kapalı olmayabilir.

Tanım 1.4.44. *[4, 5] $g \in conv(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ fonksiyonu için, $\gamma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*

$$\gamma(x) := \inf\{g(x,y) \mid y \in \mathbb{R}^m\}$$

*ile tanımlı γ fonksiyonuna g'nin **marjinal fonksiyonu** denir.*

Önerme 1.4.45. *[4, 5] $g \in conv(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ verilsin ve g fonksiyonu $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için $\{x\} \times \mathbb{R}^m$ kümesi üzerinde alttan sınırlı olsun. Bu durumda g'nin marjinal fonksiyonu $\gamma \in conv\mathbb{R}^n$ 'dir.*

Kanıt. $A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ tanımlı $A(x,y) = x$ izdüşüm dönüşümü ele alınsın. A lineerdir ve üstelik

$$\begin{aligned} Ag(x) &= \inf\{g(x,y) \mid A(x,y) = x\} \\ &= \inf\{g(x,y) \mid y \in \mathbb{R}^m\} \\ &= \gamma(x) \end{aligned}$$

olur. Ayrıca,

$$\begin{aligned} A^{-1}(x) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid A(x,y) = x\} \\ &= \{x\} \times \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla γ fonksiyonu g'nin bir lineer dönüşüm altındaki görüntüsü olarak yazılır ve hipotez gereğince $\gamma = Ag$ fonksiyonu her bir $x \in \mathbb{R}^n$ için $A^{-1}(x)$ üzerinde alttan sınırlıdır. O halde Önerme(1.4.42) in koşulları sağlandığından $\gamma \in conv\mathbb{R}^n$'dir. □

(vii) Bir Fonksiyonun Konveks Zarfı ve Kapalı Konveks Zarfı

Herhangi bir f fonksiyonunun epigrafı ele alındığında, bu kümenin konveks zarfı, başka bir fonksiyonun epigrafını verecektir. İşte bu fonksiyon f fonksiyonunun konveks zarfı olarak tanımlanan dönüşümden başka birşey değildir. Burada konveks zarf ve kapalı konveks zarf fonksiyonları ele alınacaktır.

Tanım 1.4.46. *[4, 5] $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $g \not\equiv +\infty$ fonksiyonu verilsin ve g bir afin dönüşümle alttan sınırlı olsun. Bu durumda;*

$$co(g)(x) := \sup\{h(x) \mid h \in conv\mathbb{R}^n \ , h \leq g\}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona **g *'nin konveks zarfı*** *denir. Benzer şekilde*

$$\overline{co}(g)(x) := \sup\{h(x) \mid h \in \overline{conv}\mathbb{R}^n \ , h \leq g\}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona ise **g *'nin kapalı konveks zarfı*** *denir.*

Önerme 1.4.47. *[4, 5] $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $g \not\equiv +\infty$ fonksiyonu verilsin. Ayrıca $\exists$ $(s, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ vektörü ve $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için,*

$$g(x) \geq \langle s, x\rangle - b$$

olsun. Bu durumda;

$$\begin{aligned}
f_1(x) &:= \inf\{r \in \mathbb{R} \mid (x, r) \in coepi\ g\} \\
f_2(x) &:= \sup\{h(x) \mid h \in conv\mathbb{R}^n \ , h \leq g\} \\
f_3(x) &:= \inf\{\sum_{j=1}^{k} \alpha_j g(x_j) \mid k = 1, 2, \ldots,\ \alpha \in \Delta_k,\ x_j \in domg,\ x = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j\}
\end{aligned}$$

fonksiyonları konvekstir ve $\mathbb{R}^n$'de g'nin konveks zarfıyla çakışırlar.

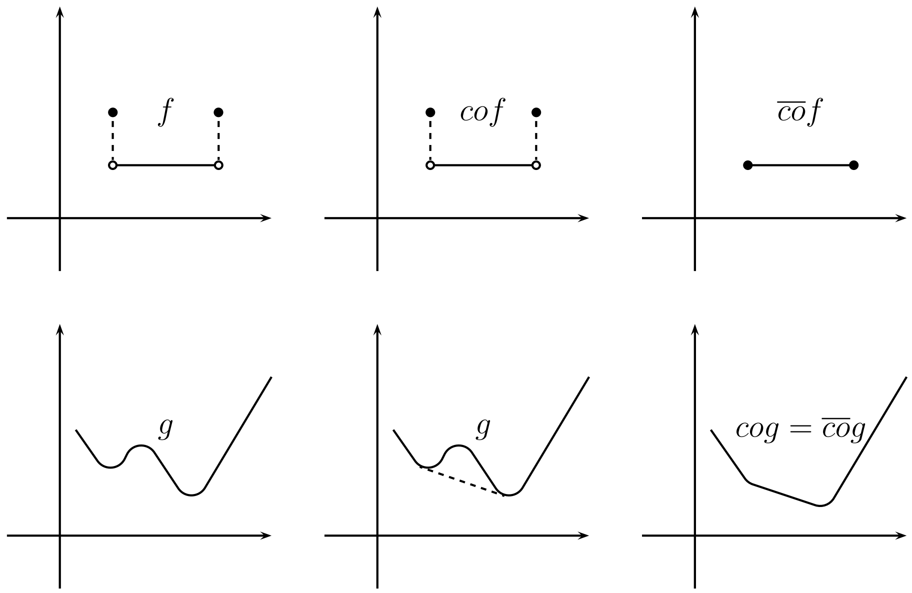
Önerme 1.4.48. *[4, 5] $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $g \neq +\infty$ fonksiyonu verilsin. Ayrıca $\exists$ $(s, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ vektörü ve $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için,*

$$g(x) \geq \langle s, x\rangle - b$$

olsun. Bu durumda;

$$\begin{aligned}
\bar{f}_1(x) &:= \inf\{r \in \mathbb{R} \mid (x, r) \in \overline{co}epi\ g\} \\
\bar{f}_2(x) &:= \sup\{h(x) \mid h \in \overline{conv}\mathbb{R}^n \ , h \leq g\} \\
\bar{f}_3(x) &:= \sup\{\langle s, x\rangle - b \mid \langle s, y\rangle - b \leq g(y) \ , \forall y \in \mathbb{R}^n\}
\end{aligned}$$

fonksiyonları kapalı, konvekstir ve $\mathbb{R}^n$'de g'nin kapalı konveks zarfıyla çakışırlar.



Şekil 1.9: $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı f ve g fonksiyonlarının konveks zarf ve kapalı konveks zarf fonksiyonları

1.5 Konveks Fonksiyonların Yerel ve Global Davranışı

Bu kesimde konveks fonksiyonların sürekliliği, Lipschitz sürekliliği incelenecek ve türevlenebilme ile konvekslik arasındaki ilişki araştırılacaktır.

1.5.1 Süreklilik

Yardımcı Teorem 1.5.1. *[4] $f \in conv\mathbb{R}^n$ verilsin. Eğer $\forall x \in B(x_0, 2\delta)$ için $m \leq f(x) \leq M$ olacak şekilde $\exists\ x_0 \in \mathbb{R}^n$ noktası ve $\exists\ \delta > 0$ $m, M \in \mathbb{R}$ sayıları varsa f fonksiyonu $B(x_0, \delta)$ üzerinde Lipschitz'dir. Daha açık olarak $\forall y, y' \in B(x_0, \delta)$ için,*

$$|f(y) - f(y')| < \frac{M - m}{\delta} \|y - y'\|$$

olur.

Kanıt. $y, y' \in B(x_0, \delta)$ alınsın. Bu durumda,

$$y'' = y' + \delta \frac{y' - y}{\|y' - y\|} \in B(x_0, 2\delta)$$

olur. y''nün kuruluşu gereği y' noktası y ile y''nün oluşturduğu doğru parçasının üzerinde yer alır. Gerçekten;

$$y' = \frac{\|y' - y\|}{\delta + \|y' - y\|}\ y'' + \frac{\delta}{\delta + \|y' - y\|}\ y$$

olduğundan ve

$$\frac{\|y' - y\|}{\delta + \|y' - y\|} + \frac{\delta}{\delta + \|y' - y\|} = 1$$

olduğundan, $y' \in [y, y'']$ elde edilir. Buradan f konveks olduğundan

$$\begin{aligned} f(y') &= f\left(\frac{\|y' - y\|}{\delta + \|y' - y\|}\ y'' + \frac{\delta}{\delta + \|y' - y\|}\ y\right) \\ &\leq \frac{\|y' - y\|}{\delta + \|y' - y\|}\ f(y'') + \frac{\delta}{\delta + \|y' - y\|}\ f(y) \end{aligned}$$

bulunur. Eşitsizliğin her iki tarafından $f(y)$ çıkarılırsa,

$$\begin{aligned} f(y') - f(y) &\leq \frac{\|y'-y\|}{\delta + \|y'-y\|}\, f(y'') + \left(\frac{\delta}{\delta + \|y'-y\|} - 1 \right) f(y) \\ &= \frac{\|y'-y\|}{\delta + \|y'-y\|}\, f(y'') - \frac{\|y'-y\|}{\delta + \|y'-y\|}\, f(y) \\ &= \frac{\|y'-y\|}{\delta + \|y'-y\|}\, [f(y'') - f(y)] \\ &\leq \frac{1}{\delta}\|y'-y\|\ (M-m) \end{aligned}$$

elde edilir. Aynı şekilde y ve y' noktalarının yerleri değiştirilerek,

$$f(y) - f(y') \leq \frac{1}{\delta}\|y'-y\|\ (M-m)$$

bulunur. O halde,

$$|f(y) - f(y')| \leq \frac{M-m}{\delta}\|y'-y\|$$

olur. Böylece f fonksiyonunun $B(x_0, \delta)$ üzerinde $\dfrac{M-m}{\delta}$ sabitiyle Lipschitz olduğu gösterilmiş olur. □

Teorem 1.5.2. *[4] $f \in conv\mathbb{R}^n$ ve $S \subseteq ridomf$ kompakt konveks bir küme olsun. Bu durumda $\forall x, x' \in S$ için,*

$$|f(x) - f(x')| \leq L\ \|x - x'\|$$

olacak şekilde bir $L = L(S) \geq 0$ sayısı vardır. Diğer bir deyişle f proper ve konveks bir fonksiyon ise $ridomf$ 'in her bir kompakt konveks alt kümesi üzerinde Lipschitz süreklidir.

Kanıt. Genelliği bozmayacağı için $affdomf = \mathbb{R}^n$ kabul edilsin. Böylelikle $ridomf = intdomf$ olur. $S \subseteq intdomf$ konveks ve kompakt bir alt küme olsun ve keyfi $x_0 \in S$ alınsın. Öncelikle Yardımcı Teorem(1.5.1) 'den yararlanmak için f fonksiyonunun x_0 noktasının bir δ komşuluğunda sınırlı olduğu gösterilmelidir. S kümesi n-boyutlu olduğundan öyle $n+1$ tane afin bağımsız $\{\upsilon_0, \upsilon_1, \ldots, \upsilon_n\}$ vektörleri vardır ki bunların oluşturduğu

$$\Delta := co\{\upsilon_0, \upsilon_1, \ldots, \upsilon_n\}$$

simpleksi x_0'ı bir iç nokta olarak bulundurur. Dolayısıyla $\Delta \subseteq dom f$ ve $x_0 \in int\Delta \subseteq intdom f$ elde edilir. O halde öyle bir $\delta > 0$ sayısı vardır ki $B(x_0, 2\delta) \subseteq \Delta$ 'dır. Üstelik $B(x_0, 2\delta)$ yuvarındaki her y elemanı Δ simpleksinin köşe noktalarının bir konveks kombinasyonu biçiminde yazılabilir. Yani her bir $y \in B(x_0, 2\delta)$ için, $y = \sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i \upsilon_i$ olacak şekilde $\alpha_i \geq 0$, $\sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i = 1$ sayıları vardır. Buradan f'in konveksliğinden,

$$f(y) = f\left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \upsilon_i\right) \leq \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(\upsilon_i) \leq \max\{f(\upsilon_0), f(\upsilon_1), \ldots, f(\upsilon_n)\} := M$$

elde edilir. Diğer taraftan $f \in conv\mathbb{R}^n$ olduğundan afin bir dönüşümle alttan sınırlıdır. Yani öyle bir $h(x) = \langle s, x\rangle - b$ afin dönüşümü vardır ki, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için $f(x) \geq h(x)$ olur. h afin olduğundan sürekli bir fonksiyondur. Dolayısıyla f $B(x_0, 2\delta)$ yuvarı üzerinde sınırlıdır. Yani $\forall y \in B(x_0, 2\delta)$ için $f(y) \geq h(y) \geq m$ olacak şekilde $\exists m \in \mathbb{R}$ sayısı vardır. O halde Yardımcı Teorem(1.5.1) gereğince $\forall y, y' \in B(x_0, \delta)$ için

$$|f(y) - f(y')| \leq \frac{M-m}{\delta} \|y - y'\|$$

elde edilir. Şimdi S 'nin kompaktlığı kullanılarak f'in tüm S kümesi üzerinde Lipschitz olduğunu gösterilsin. $x_0 \in S$ keyfi seçildiğinden $\forall x \in S$ için

$$\forall y, y' \in B(x, \delta) \text{ için } |f(y) - f(y')| \leq \frac{M-m}{\delta} \|y - y'\|$$

koşulunu sağlayan bir $\delta = \delta(x) > 0$ sayısı vardır. Böylelikle her bir x elemanına karşılık gelen $\delta(x)$ sayıları kullanılarak oluşturulan $\mathcal{A} = \{B(x, \delta) \mid x \in S\}$ ailesi S 'nin bir açık örtüsüdür. S kompakt olduğundan bu açık örtünün $\mathcal{A}' = \{B(x_j, \delta_j) \mid x_j \in S,\ j = 1, 2, \ldots, k\}$ biçiminde sonlu bir alt örtüsü vardır. Bu durumda $\forall x, x' \in S$ için

$$[x, x'] \subseteq S \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} B(x_j, \delta_j)$$

olur. $y_0 = x$ ve $y_\ell = x'$ olsun. $x, x' \in S \subseteq intdomf$ olduğundan $[x, x']$ doğru parçasını her biri $\mathcal{A}'$ alt örtüsünün yuvarlarına ait olacak şekilde sonlu doğru parçasına ayırabiliriz. Yani $\forall i = 1, 2, \ldots, \ell$ $(\ell \leq k)$ için

$$[y_{i-1}, y_i] \subseteq B(x_{j_i}, \delta_{j_i}) \quad \text{ve} \quad \bigcup_{i=1}^{\ell} [y_{i-1}, y_i] = [x, x']$$

yazılabilir. Dolayısıyla, $\forall i = 1, 2, \ldots, \ell$ için,

$$|f(y_{i-1}) - f(y_i)| \leq L_i \|y_{i-1} - y_i\| \leq \max\{L_i\} \|y_{i-1} - y_i\|$$

elde edilir. Yani f her bir $[y_{i-1}, y_i]$ doğru parçası üzerinde ortak $L = \max\{L_i\}$ sabitine göre Lipschitz'dir. Buradan,

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(x')| &= |f(y_0) - f(y_\ell)| \\
&= |f(y_0) - f(y_1) + f(y_1) - f(y_2) + f(y_2) - \cdots + f(y_{\ell-1}) - f(y_\ell)| \\
&\leq |f(y_0) - f(y_1)| + |f(y_1) - f(y_2)| + \cdots + |f(y_{\ell-1}) - f(y_\ell)| \\
&\leq L\|y_0 - y_1\| + L\|y_1 - y_2\| + \cdots + L\|y_{\ell-1} - y_\ell\| \\
&= L\left(\|y_0 - y_1\| + \|y_1 - y_2\| + \cdots + \|y_{\ell-1} - y_\ell\|\right) \\
&= L\|y_0 - y_\ell\| \\
&= L\|x - x'\|
\end{aligned}$$

bulunur. O halde f tüm S kümesi üzerinde Lipschitz süreklidir. □

Teorem 1.5.3. *[4] $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyonlar olmak üzere $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ dizisi verilsin ve $f_k \to f$ olsun. Bu durumda f konvekstir ve $S \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt bir küme ise $\{f_k\}$ dizisi f fonksiyonuna S üzerinde düzgün yakınsaktır.*

Kanıt. $\forall k \in \mathbb{N}$ için f_k fonksiyonları konveks olduklarından $\forall x, x' \in \mathbb{R}^n$ ve $\forall \alpha \in [0, 1]$ için

$$f_k(\alpha x + (1 - \alpha)x') \leq \alpha f_k(x) + (1 - \alpha) f_k(x') \quad (\forall k \in \mathbb{N})$$

olur. O halde,

$$\lim_{k \to \infty} f_k(\alpha x + (1 - \alpha)x') \leq \lim_{k \to \infty} \alpha f_k(x) + (1 - \alpha) f_k(x')$$

ve böylece

$$f(\alpha x + (1-\alpha)x') \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(x')$$

bulunur. Dolayısıyla f konvekstir.

Şimdi düzgün yakınsamanın gösterilmesi için keyfi bir $S \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt kümesi alınsın. Öncelikle f_k fonksiyonlarının k sayısından bağımsız olarak S üzerinde sınırlı olduğu gösterilmelidir. Bunun için önce $S \subseteq B(0,r)$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı alınsın.

1. Adım: $g := \sup f_k$ fonksiyonu tanımlansın. g sonlu ve konveks bir fonksiyondur. Çünkü $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ yakınsak dizisi sınırlıdır. O halde her bir $x \in \overline{B}(0,2r)$ ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için,

$$f_k(x) \leq g(x) \leq M$$

olacak şekilde bir M sayısı vardır. Diğer taraftan $(f_k(0))_{k\in\mathbb{N}}$ yakınsak dizisi alttan sınırlıdır. Yani $\forall k \in \mathbb{N}$ için $f_k(0) \geq \mu$ olacak şekilde bir μ sayısı vardır. Buradan $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in B(0,2r)$ ve $\forall[-x,x] \subseteq B(0,2r)$ için

$$2\mu \leq 2f_k(0) = 2f_k(x-x) \leq f_k(x) + f_k(-x) \leq f_k(x) + M$$

elde edilir. Dolayısıyla $m = 2\mu - M$ denirse $\forall k \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in B(0,2r)$ için

$$m \leq f_k(x) \leq M$$

bulunur. Böylece f'in, $B(0,2r)$ yuvarı üzerinde k 'dan bağımsız olarak sınırlı olduğunu gösterilmiş olur. O halde k sayısından bağımsız öyle bir L sayısı vardır ki $\forall k \in \mathbb{N}$ ve $\forall y, y' \in B(0,r)$ için

$$|f_k(y) - f_k(y')| \leq L\|y - y'\|$$

olur. Norm fonksiyonunun sürekliliğinden dolayı bu eşitsizlik limit fonksiyonu olan f için de sağlanır. Yani $\forall y, y' \in B(0,r)$ için

$$|f(y) - f(y')| \leq L\|y - y'\|$$

elde edilir.

2. Adım: $\varepsilon > 0$ verilsin. S kümesini $\forall x \in S$ için $B(x, \varepsilon)$ yuvarlarıyla örtülebilir. S kompakt olduğundan $\exists\ i = 1, 2, \ldots, m$ için $S \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{m} B(x_i, \varepsilon)$ olur. O halde keyfi bir $x \in S$ alındığında $\exists\ i = 1, 2, \ldots, m$ için $x \in B(x_i, \varepsilon)$ olur. Öte yandan $f_k \to f$ olduğundan her bir $x_i \in S$ için öyle bir $k_{i,\varepsilon} \in \mathbb{N}$ sayısı vardır ki $\forall k \geq k_{i,\varepsilon}$ için

$$|f_k(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon$$

olur. Böylece,

$$\begin{aligned} |f_k(x) - f(x)| &\leq |f_k(x) - f_k(x_i)| + |f_k(x_i) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x)| \\ &\leq L\|x - x_i\| + \varepsilon + L\|x - x_i\| \\ &< (2L + 1)\ \varepsilon \end{aligned}$$

bulunur. $k_\varepsilon := \max\{k_{i,\varepsilon} \mid i = 1, 2, \ldots, m\}$ denirse $\forall x \in S$ ve $\forall k \geq k_\varepsilon$ için

$$|f_k(x) - f(x)| < (2L + 1)\ \varepsilon$$

bulunur. O halde (f_k) dizisi S üzerinde f 'e düzgün yakınsar.

□

1.5.2 Sonsuzdaki Davranış

Bu bölümde konveks fonksiyonların sonsuzdaki davranışı incelenecektir. Burada $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ve $d \in \mathbb{R}^n$ keyfi alınıp sabitlendiğinde $t \to \infty$ için $f(x_0+td)$'nin davranışı önemlidir ve $epif$ sınırsız konveks bir küme olarak ele alınarak bu davranış incelenebilir.

Önerme 1.5.4. *[4] $f \in \overline{conv}\mathbb{R}^n$ verilsin ve $x_0 \in domf$ olsun. Bu durumda $epif$'in asimptotik konisi*

$$\begin{aligned} f'_\infty : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ d &\mapsto f'_\infty(d) := \sup_{t>0} \frac{f(x_0 + td) - f(x_0)}{t} = \lim_{t \to \infty} \frac{f(x_0 + td) - f(x_0)}{t} \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı f'_∞ fonksiyonunun epigrafıdır.

Kanıt. $epif$'in asimptotik konisi,

$$(epif)_\infty = \{(d,\rho) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid (x_0, r_0) + t(d,\rho) \in epif,\ \forall t > 0\}$$

biçimindedir. Dolayısıyla, $(x_0, f(x_0)) \in epif$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
(d,\rho) \in (epif)_\infty \quad &\Leftrightarrow \quad (x_0, f(x_0)) + t(d,\rho) \in epif,\ \forall t > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad f(x_0 + td) \leq f(x_0) + t\rho,\ \forall t > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{f(x_0 + td) - f(x_0)}{t} \leq \rho,\ \forall t > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \sup_{t>0} \frac{f(x_0 + td) - f(x_0)}{t} \leq \rho,\ \forall t > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad f'_\infty(d) \leq \rho \\
&\Leftrightarrow \quad (d,\rho) \in epif'_\infty
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece istenen gösterilmiş olur. $\square$

Tanım 1.5.5. *[4] $f \in \overline{conv}\mathbb{R}^n$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda,*

$$f'_\infty(d) := \sup_{t>0} \frac{f(x_0 + td) - f(x_0)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{f(x_0 + td) - f(x_0)}{t}$$

*ile tanımlı f'_∞ fonksiyonuna f'in **asimptotik (recession) fonksiyonu** denir.*

Tanım 1.5.6. *[4] $f \in \overline{conv}\mathbb{R}^n$ verilsin. Eğer sıfırdan farklı her $d \in \mathbb{R}^n$ vektörü için $f'_\infty(d) > 0$ oluyorsa f fonksiyonuna **0-Coercive** denir. Denk olarak*

$$\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = +\infty \tag{1.5.6}$$

ise f 0-Coercive'dir.

Tanım 1.5.7. *[4] $f \in \overline{conv}\mathbb{R}^n$ verilsin. Eğer sıfırdan farklı her bir $d \in \mathbb{R}^n$ için $f'_\infty(d) = +\infty$ oluyorsa, yani*

$$f'_\infty(d) = i_{\{0\}}(d) = \begin{cases} 0 & , \quad d = 0 \\ +\infty & , \quad d \neq 0 \end{cases}$$

*ise f fonksiyonuna **1-Coercive** denir. Denk olarak,*

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \frac{f(x)}{\|x\|} = +\infty \tag{1.5.7}$$

oluyorsa f 1-Coercive 'dir.

Önerme 1.5.8. *[4] $f \in \overline{conv}\mathbb{R}^n$ verilsin. Bu durumda f fonksiyonunun $\mathbb{R}^n$ üzerinde Lipschitz sürekli olması için gerek ve yeter koşul f'_∞ asimptotik fonksiyonunun $\mathbb{R}^n$ üzerinde sonlu değer almasıdır. Üstelik bu durumda en iyi Lipschitz sabiti*

$$\sup\{f'_\infty(d) \mid \|d\| = 1\}$$

sayısıdır.

Kanıt. Tanımlanışı gereği konveks olan f'_∞ asimptotik fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ üzerinde sonlu değer alsın. Bu durumda f'_∞ süreklidir ve dolayısıyla kompakt birim yuvar yüzeyi üzerinde sınırlıdır. Yani,

$$\sup\{f'_\infty(d) \mid \|d\| = 1\} := L < +\infty$$

olur. O halde $\forall d \in \mathbb{R}^n$ için $f'_\infty(d) \leq L.\|d\|$ yazılabilir. Gerçekten, asimptotik fonksiyon pozitif homojen olduğundan $\forall d \in \mathbb{R}^n$ için,

$$f'_\infty\left(\frac{d}{\|d\|}\right) = \frac{1}{\|d\|} \cdot f'_\infty(d) \leq L \quad \Rightarrow \quad f'_\infty(d) \leq L.\|d\|$$

elde edilir. Buradan f'_∞'un tanımı gereği $\forall x \in domf$ ve $\forall d \in \mathbb{R}^n$ için

$$\sup_{t>0} \frac{f(x+td) - f(x)}{t} \leq L.\|d\|$$

olduğundan $\forall t > 0$ sayısı için

$$\frac{f(x+td) - f(x)}{t} \leq L.\|d\|$$

olur. Özel olarak $t = 1$ alınırsa $\forall x \in domf$ ve $\forall d \in \mathbb{R}^n$ için

$$f(x+d) - f(x) \leq L.\|d\|$$

bulunur. Böylelikle f 'in $\mathbb{R}^n$ üzerinde sonlu değer aldığı gösterilmiş olur. Yani $domf = \mathbb{R}^n$ olur. Üstelik

$$f(x+d) - f(x) \leq L.\|d\| = L.\|x + d - x\|$$

olduğundan L sayısı f için bir Lipschitz sabitidir.

Tersine f tüm $\mathbb{R}^n$ üzerinde L sabitiyle Lipschitz olsun. $x_0 \in dom f$ alınsın. O halde $\forall t > 0$ ve $\forall d \in \mathbb{R}^n$ için,

$$f(x_0 + td) - f(x_0) \leq L.\|x_0 + td - x_0\| = Lt\|d\|$$

olur. Böylece

$$f'_\infty(d) = \sup_{t>0} \frac{f(x_0 + td) - f(x_0)}{t} \leq L\|d\|$$

elde edilir. Yani $\forall d \in \mathbb{R}^n$ için $f'_\infty(d) < +\infty$ olur. $\square$

Önerme 1.5.9. *[4] $f_1, f_2, \ldots, f_m \in conv\mathbb{R}^n$ fonksiyonları, $t_1, t_2, \ldots, t_m > 0$ sayıları verilsin.*

(i) Eğer her bir $j = 1, 2, \ldots, m$ için $f_j(x_0) < +\infty$ olacak şekilde bir $x_0 \in \mathbb{R}^n$ bulunabiliyorsa $f = \sum_{j=1}^{m} t_j f_j$ olmak üzere,

$$f'_\infty = \sum_{j=1}^{m} t_j (f_j)'_\infty$$

dur.

(ii) $\{f_j\}_{j\in J} \subseteq conv\mathbb{R}^n$ ailesi verilsin. Eğer $\sup_{j\in J} f_j(x_0) < +\infty$ olacak şekilde bir $x_0 \in \mathbb{R}^n$ bulunabiliyorsa $f = \sup_{j\in J} f_j$ olmak üzere

$$f'_\infty = \sup_{j\in J} (f_j)'_\infty$$

dur.

1.5.3 Türevlenebilir Konveks Fonksiyonlar

$C \subseteq \mathbb{R}^n$ boştan farklı konveks bir küme olsun. C üzerinde tanımlı sonlu değerli bir f fonksiyonu için şu sorular sorulabilir:

- f fonksiyonu C üzerinde ne zaman konveks ve türevlenebilirdir ve gradienti ∇f hakkında ne söylenebilir?

- f fonksiyonu C üzerinde türevlenebilir ise, f'in konveksliği ∇f ile karakterize

edilebilir mi?
- f C üzerinde konveks ise birinci ve ikinci mertebeden türevleri hakkında ne söylenebilir?
Şimdi bu soruların cevapları araştırılacaktır.

Öncelikle verilen bir f konveks fonksiyonunun türevlenebilir olduğu kabul edilsin. $x_0 \in \mathbb{R}^n$ verildiğinde f'in x_0 noktasında türevlenebilir olması ancak, f fonksiyonu x_0'ın bir komşuluğu üzerinde tanımlı olduğunda anlamlıdır. O halde f fonksiyonunun C kümesini içine alan bir $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ açık kümesi üzerinde türevlenebilir olduğunu varsaymak yerinde olacaktır.

Teorem 1.5.10. *[4] f fonksiyonu bir $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ açık kümesi üzerinde türevlenebilir olsun ve $C \subseteq \Omega$ konveks olsun. Bu durumda,*

(i) f'in C üzerinde konveks olması için gerek ve yeter koşul

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle, \quad \forall (x_0, x) \in C \times C$$

olmasıdır.

(ii) f'in C üzerinde kesin konveks olması için gerek ve yeter koşul

$$f(x) > f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle, \quad \forall (x_0, x) \in C \times C$$

olmasıdır.

Tanım 1.5.11. *[4] $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konveks bir küme ve $F : C \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $x, x' \in C$ için*

$$\langle F(x) - F(x'), x - x' \rangle \geq 0$$

oluyorsa F fonksiyonu ***monotondur*** *denir. Eğer $x \neq x'$ için*

$$\langle F(x) - F(x'), x - x' \rangle > 0$$

oluyorsa bu durumda F'e ***kesin monoton fonksiyon*** *denir.*

Teorem 1.5.12. *[4] f fonksiyonu bir $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ açık kümesi üzerinde türevlenebilir olsun ve $C \subseteq \Omega$ konveks olsun. Bu durumda,*

(i) f fonksiyonu C üzerinde konvekstir $\Leftrightarrow$ ∇f monotondur.

(ii) f fonksiyonu C üzerinde kesin konvekstir $\Leftrightarrow$ ∇f kesin monotondur.

1.5.4 Türevlenemeyen Konveks Fonksiyonlar

Bir konveks fonksiyon etkin tanım kümesinin iç noktalarının çoğu üzerinde türevlenebilir olsa da bu kümenin tamamı üzerinde türevlenebilir olmak zorunda değildir. Bu durum matematiksel olarak ifade edilmeden önce konveks fonksiyonların önemli bir özelliği verilecektir.

Önerme 1.5.13. *[4] $f \in conv\mathbb{R}^n$ fonksiyonu ve $x \in intdomf$ noktası verilsin. Bu durumda aşağıdakiler denktir:*

(i) $\mathbb{R}^n \ni d \mapsto \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{f(x+td) - f(x)}{t}$ fonksiyonu lineerdir.

(ii) $\mathbb{R}^n$ 'nin herhangi bir tabanına göre $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ olmak üzere, her bir $i = 1, 2, \ldots, n$ için f 'in x noktasındaki $\dfrac{\partial f}{\partial \xi_i}(x)$ kısmi türevleri vardır.

(iii) f fonksiyonu x noktasında türevlenebilirdir.

Bir fonksiyonun üzerinde türevlenebilir olduğu en geniş küme tanım kümesinin içidir. Aslında bir Ω açık kümesi üzerinde yerel Lipschitz olan bir fonksiyon Ω 'nın hemen hemen her noktasında türevlenebilirdir. Konveks fonksiyonlar Lipschitz sürekli olduklarından aşağıdaki teorem yazılabilir:

Teorem 1.5.14. *[4] $f \in conv\mathbb{R}^n$ olsun. Bu durumda $intdomf$ kümesinin, f'in türevlenemediği noktalardan oluşan alt kümesinin (Lebesgue) ölçümü sıfırdır.*

1.5.5 İkinci Mertebeden Türevlenebilme ve Konvekslik

Bir fonksiyonun konveksliğini belirlemenin en kullanışlı yolu ikinci türevi kullanmaktır.

Teorem 1.5.15. *[4] f fonksiyonu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ açık kümesi üzerinde ikinci mertebeden türevlenebilir olsun. Bu durumda*

(i) f 'in Ω üzerinde konveks olması için gerek ve yeter koşul her $x \in \Omega$ için $\nabla^2 f(x)$ 'in pozitif yarı tanımlı olmasıdır.

(ii) Eğer her $x \in \Omega$ için $\nabla^2 f(x)$ pozitif tanımlı ise f fonksiyonu Ω üzerinde kesin konvekstir.

2 SUBLİNEERLİK VE DESTEK FONKSİYONLARI

Bu bölümde sublineerlik kavramı tanıtılacak, sublineer fonksiyonların temel özellikleri incelenecek, en önemli sublineer fonksiyonlardan biri olan destek fonksiyonlarının özellikleri araştırılacak ve son olarak kapalı konveks kümelerle kapalı sublineer fonksiyonlar arasında bu özelliklere dayalı bir izomorfizm kurulacaktır.

2.1 Sublineer Fonksiyonlar

Klasik analizde en temel fonksiyonlar lineer fonksiyonlar iken konveks analizde bunların yerini sublineer fonksiyonlar alır. Sublineerlik kavramı üç farklı şekilde değerlendirilebilir.

(i) Lineerliğin bir Genellemesi Olarak Sublineer Fonksiyonlar

$\ell : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ ve $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ için,

$$\ell(t_1x_1 + t_2x_2) = t_1\ell(x_1) + t_2\ell(x_2)$$

eşitliğini sağlıyorsa ℓ'ye bir **lineer fonksiyon yada lineer form** denir.

Benzer olarak; $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ ve $\forall t_1, t_2 > 0$ için,

$$\sigma(t_1x_1 + t_2x_2) \leq t_1\sigma(x_1) + t_2\sigma(x_2) \tag{2.1.8}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa σ'ya **sublineer fonksiyon** adı verilir.

(ii) Sublineer Fonksiyonlarla Konveks Fonksiyonlara Teğetsel Yaklaşım

Bir $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun türevlenebilir olması için gerek ve yeter koşul

$$f(x + h) - f(x) = \ell_x(h) + o(\|h\|)$$

olan bir ℓ_x lineer dönüşümünün var olmasıdır. Yani diğer bir deyişle f'in türevlenebilir olması $f(x + h) - f(x)$ farkına birinci mertebeden bir lineer yaklaşımın varlığına denktir. Eğer x noktasını bir $d \in \mathbb{R}^n$ yönünde değiştirirsek,

$$f(x+td) - f(x) = \ell_x(td) + o(\|td\|) = t\ell_x(d) + t\ o(\|d\|)$$

olur. Dolayısıyla $t \downarrow 0$ iken $\varepsilon(t) \to 0$ olmak üzere

$$\frac{f(x+td) - f(x)}{t} = \ell_x(d) + \varepsilon(t)$$

yazılabilir. Geometrik olarak bu eşitlik, f'in grafiğinin $(x, f(x))$ noktasında bir teğet hiperdüzlemine sahip olduğunu ve bu hiperdüzlemin $h \mapsto f(x) + \ell_x(h)$ afin fonksiyonun grafiği olduğunu göstermektedir.

Ancak bir f fonksiyonu yalnızca konveks ise, bu durumda f'in grafiğine $(x, f(x))$ noktasında teğet olan bir hiperdüzlem her zaman var olmayabilir. Fakat bazı kabuller altında $f(x+h) - f(x)$ farkına bir sublineer fonksiyonla yaklaşılabilir. Yani,

$$f(x+h) - f(x) = \sigma_x(h) + o(\|h\|)$$

olacak şekilde bir $h \mapsto \sigma_x(h)$ sublineer fonksiyonu vardır. Geometrik olarak ise σ_x'in grafiği artık bir hiperdüzlem değil bir konveks konidir ve f'in grafiğine $(x, f(x))$ noktasında teğettir.

Sonuç olarak bir fonksiyon türevlenebilir ise doğrusal bir teğete, konveks ise bir sublineer teğete sahiptir.

(iii) Kapalı Sublineer Fonksiyonların Kapalı Konveks Kümelere Karşılık Getirilmesi

$(\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle)$ uzayında bir ℓ lineer dönüşümü bir $s \in \mathbb{R}^n$ vektörüyle temsil edilebilir. Yani $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için $\ell(x) = \langle s, x\rangle$ olacak şekilde $\exists s \in \mathbb{R}^n$ vardır. Benzer şekilde, daha sonra tanımlanacak ve detaylı bir şekilde incelenecek olan destek fonksiyonu kavramı yardımıyla, herhangi bir kapalı sublineer fonksiyon bir kapalı konveks kümenin destek fonksiyonu olarak yazılabilmekte ve tersine $\mathbb{R}^n$'de herhangi bir kapalı konveks küme alındığında ona karşılık gelen bir kapalı sublineer fonksiyon bulunabilmektedir. Kapalı konveks kümeler ve kapalı sublineer fonksiyonlar arasında elde edilen bu bire-bir eşleme bu tür fonksiyonlarla ilgili çalışmalarda geometrik yorumlar açısından sunduğu çok sayıda yararın yanısıra, güçlü analitik araçlar da sağlayacaktır.

2.1.1 Sublineerliğin Tanımı ve Sublineer Fonksiyonların Özellikleri

Tanım 2.1.1. *[4] $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ fonksiyonu verilsin. Eğer σ konveks ve pozitif homojen bir fonksiyon ise yani $\sigma \in conv\mathbb{R}^n$ ve $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ve $\forall t > 0$ için $\sigma(tx) = t\sigma(x)$ oluyorsa σ'ya **sublineer fonksiyon** adı verilir.*

Uyarı 2.1.2. *Tanımda verilen pozitif homojenlik özelliği için*

$$\sigma(tx) \leq t\sigma(x) \qquad (\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall t > 0) \tag{2.1.9}$$

eşitsizliğinin sağlanması yeterlidir. Çünkü eşitsizliğin bu yönü sağlandığında diğer yön sağlanmaktadır. Gerçekten; (2.1.9) eşitsizliği sağlanıyorsa

$$\sigma(x) = \sigma(t^{-1}tx) \leq t^{-1}\sigma(tx)$$

olduğuna göre

$$t\sigma(x) \leq t.t^{-1}\sigma(tx)$$

ve böylece

$$t\sigma(x) \leq \sigma(tx)$$

elde edilir.

Uyarı 2.1.3. *Bir sublineer fonksiyon, pozitif homojenlik özelliğinden dolayı $\forall t > 0$ için $\sigma(0) = t\sigma(0)$'dır. O halde $\sigma(0) = 0$ veya $\sigma(0) = +\infty$ olmalıdır. Ancak genellikle bir çok sublineer fonksiyon için $\sigma(0) = 0$ olmaktadır.*

Uyarı 2.1.4. *Tanımı gereği, bir sublineer fonksiyon konveks olduğundan sonlu değer aldığı en az bir nokta vardır yani $dom\sigma \neq \emptyset$'dir. Üstelik kolayca gösterilebilir ki $dom\sigma$ bir konveks konidir.*

Önerme 2.1.5. *[4] $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda, σ'nın sublineer olması için gerek ve yeter koşul $epi\sigma \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ kümesinin boştan farklı bir konveks koni olmasıdır.*

Kanıt. σ sublineer olsun. Bu durumda σ konveks olduğundan $\exists x \in \mathbb{R}^n$ için $f(x) < +\infty$'dur. O halde $(x, f(x)) \in epi\sigma$ ve böylece $epi\sigma \neq \emptyset$ olur ve σ konveks olduğundan epigrafı da konvekstir. Tersine $epi\sigma \neq \emptyset$ konveks ise σ'nın da konveks olduğu açıktır. O halde $epi\sigma$'nın koni olması ile σ'nın pozitif homojenliğinin denkliğinin gösterilmesi yeterlidir.

Öncelikle σ pozitif homojen olsun ve $(x, r) \in epi\sigma$ alınsın. $\sigma(x) \leq r$'dir. Buradan $\forall t > 0$ için $\sigma(tx) = t\sigma(x) \leq t.r$ olduğundan $t(x, r) \in epi\sigma$ olur. Böylece $epi\sigma$ bir konidir.

Tersine $epi\sigma$ koni olsun. O halde $\forall t > 0$ sayısı ve $(x, \sigma(x)) \in epi\sigma$ için $(tx, t\sigma(x)) \in epi\sigma$ olur. Yani $\forall t > 0$ için $\sigma(tx) \leq t\sigma(x)$ elde edilir. O halde σ pozitif homojendir. □

Konveks analizde bir diğer önemli kavram da alt toplamsallıktır. Şimdi alt toplamsallık kavramı ve sublineerlikle ilişkisi tanıtılacaktır.

Tanım 2.1.6. *[4] $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ fonksiyonu $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ için,*

$$\sigma(x_1 + x_2) \leq \sigma(x_1) + \sigma(x_2) \tag{2.1.10}$$

*oluyorsa, σ'ya **alt toplamsal fonksiyon** denir.*

Önerme 2.1.7. *[4] $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ fonksiyonu verilsin ve $\sigma \neq +\infty$ olsun. Bu durumda σ'nın sublineer olması için gerek ve yeter koşul, σ'nın pozitif homojen ve alt toplamsal olmasıdır. Diğer bir deyişle,*

$$\begin{aligned} \sigma \text{ sublineerdir} \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n \ \text{ ve } \ \forall t_1, t_2 > 0 \ \text{ için,} \\ &\qquad \sigma(t_1x_1 + t_2x_2) \leq t_1\sigma(x_1) + t_2\sigma(x_2) \ \text{'dir.} \end{aligned}$$

Kanıt. Öncelikle σ sublineer olsun. Bu durumda pozitif homojen olduğu açıktır. O halde alt toplamsallığının gösterilmesi yeterlidir. Keyfi $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ alalım. σ konveks olduğundan $\forall \alpha \in (0, 1)$ için,

$$\sigma(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha\sigma(x_1) + (1-\alpha)\sigma(x_2)$$

olur. Özel olarak $\alpha = \frac{1}{2}$ alınır ve pozitif homojenlik kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\sigma(\tfrac{1}{2}(x_1 + x_2)) &\leq \tfrac{1}{2}\,\sigma(x_1) + \tfrac{1}{2}\,\sigma(x_2) \\
\tfrac{1}{2}\,\sigma(x_1 + x_2) &\leq \tfrac{1}{2}\,[\sigma(x_1) + \sigma(x_2)] \\
\sigma(x_1 + x_2) &\leq \sigma(x_1) + \sigma(x_2)
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde σ alt toplamsaldır.

Tersine σ alt toplamsal ve pozitif homojen olsun. Bu durumda $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ ve $\forall t_1, t_2 > 0$ için,

$$\sigma(t_1 x_1 + t_2 x_2) \leq t_1 \sigma(x_1) + t_2 \sigma(x_2)$$

olur. O halde bu eşitsizlik $t_1 + t_2 = 1$ olan $t_1, t_2 > 0$ sayıları için de sağlanacaktır. Bu ise σ'nın konveksliğini verir. Sonuç olarak σ pozitif homojen ve konveks olduğundan sublineer bir fonksiyondur. □

Sonuç 2.1.8. *[4] Eğer σ sublineer bir fonksiyon ise $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için,*

$$\sigma(x) + \sigma(-x) \geq 0 \tag{2.1.11}$$

olur.

Kanıt. σ sublineer olduğundan alt toplamsaldır. Dolayısıyla (2.1.10) sağlanır. Bu eşitsizlikte özel olarak $x_2 = -x_1$ alınırsa $\forall x_1 \in \mathbb{R}^n$ için,

$$\sigma(0) \leq \sigma(x_1) + \sigma(-x_1)$$

yazılabilir. $\sigma(0) \geq 0$ olduğundan istenen eşitsizlik sağlanmış olur. □

Uyarı 2.1.9. *Konveks ve alt toplamsal bir fonksiyon sublineer olmayabilir. Örneğin, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için $f(x) = 1$ olarak tanımlanan f sabit fonksiyonu konveks ve alt toplamsaldır. Ancak f pozitif homojen değildir. Çünkü herhangi bir $x \in \mathbb{R}^n$ için $t \neq 1$ iken*

$$f(tx) \neq t f(x)$$

olmaktadır.

Bir sublineer fonksiyonun hangi koşullar altında lineer olacağı önemli bir sorudur. (2.1.11) eşitsizliği lineer fonksiyonlar için eşitlik olarak sağlanır. Bu da sublineerlikle lineerlik arasındaki ilişkiyi verir.

Önerme 2.1.10. *[4] $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ sublineer bir fonksiyon olsun. Eğer $x_1, x_2, \ldots, x_m \in dom\sigma$ için,*

$$\sigma(x_j) + \sigma(-x_j) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

eşitliği sağlanıyorsa σ, $span\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ alt uzayı üzerinde lineerdir.

Kanıt. $x_1, x_2, \ldots, x_m \in dom\sigma$ olsun ve $x \in span\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ alınsın. O halde, $x = \sum_{j=1}^{m} t_j x_j$ olacak şekilde $t_1, t_2, \ldots, t_m \in \mathbb{R}$ vardır. $J_1 = \{j \mid t_j > 0\}$ ve $J_2 = \{j \mid t_j < 0\}$ olsun. O halde,

$$x = \sum_{j=1}^{m} t_j x_j = \sum_{j \in J_1} t_j x_j + \sum_{j \in J_2} -t_j(-x_j)$$

yazılabilir. Burada σ'nın sublineerliği ve hipotezde verilen eşitlik kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\sigma(x) &= \sigma\left(\sum_{j \in J_1} t_j x_j + \sum_{j \in J_2} (-t_j)(-x_j)\right) \\
&\leq \sum_{j \in J_1} t_j \sigma(x_j) + \sum_{j \in J_2} -t_j \sigma(-x_j) \\
&= \sum_{j \in J_1} t_j \sigma(x_j) + \sum_{j \in J_2} t_j \sigma(x_j) = \sum_{j=1}^{m} t_j \sigma(x_j) \\
&= -\sum_{j \in J_1} t_j \sigma(-x_j) - \sum_{j \in J_2} (-t_j) \sigma(x_j) \\
&= -\left(\sum_{j \in J_1} t_j \sigma(-x_j) + \sum_{j \in J_2} (-t_j) \sigma(x_j)\right) \\
&\leq -\sigma\left(\sum_{j \in J_1} t_j (-x_j) + \sum_{j \in J_2} (-t_j) x_j\right) \\
&= -\sigma\left(-\left(\sum_{j \in J_1} t_j x_j + \sum_{j \in J_2} t_j x_j\right)\right) = -\sigma\left(-\sum_{j=1}^{m} t_j x_j\right) \\
&= -\sigma(-x) = \sigma(x)
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak $\sigma(x) \leq \sum_{j=1}^{m} t_j \sigma(x_j) \leq \sigma(x)$ olduğundan,

$$\sigma(x) = \sum_{j=1}^{m} t_j \sigma(x_j)$$

elde edilir. O halde σ fonksiyonu $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ vektörlerinin gerdiği alt uzay üzerinde lineerdir. □

Tanım 2.1.11. *[4] σ sublineer fonksiyonu için*

$$U := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sigma(x) + \sigma(-x) = 0\}$$

ile tanımlanan küme bir alt uzay oluşturur. Bu alt uzaya σ ***'nın doğrusallık alt uzayı*** *denir.*

Uyarı 2.1.12. *Bir σ sublineer fonksiyonu için U doğrusallık alt uzayı boştan farklıysa $\sigma(0) = 0$'dır. Gerçekten, $x \in U$ ise*

$$0 = \sigma(x) + \sigma(-x) = \sigma(x - x) = \sigma(0)$$

olduğundan $\sigma(0) = 0$ elde edilir.

Önerme 2.1.13. *[4] σ sublineer olsun. Eğer $x \in U$ ise $\forall y \in \mathbb{R}^n$ için,*

$$\sigma(x + y) = \sigma(x) + \sigma(y) \text{ 'dir.}$$

Kanıt. $y = x + y - x$ şeklinde yazılırsa alt toplamsallıktan,

$$\sigma(y) = \sigma((x + y) - x) \leq \sigma(x + y) + \sigma(-x) = \sigma(x + y) - \sigma(x)$$

ve dolayısıyla

$$\sigma(x) + \sigma(y) \leq \sigma(x + y)$$

elde edilir. Eşitsizliğin diğer yönü alt toplamsallıktan sağlandığından istenen eşitlik kanıtlanmış olur. □

2.1.2 Sublineer Fonksiyon Örnekleri

Örnek 2.1.14. ***(İndikatör Fonksiyonu)***

$K \subseteq \mathbb{R}^n$ konveks konisi verilsin. Bu durumda,

$$i_K(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \in K \\ +\infty & , \quad x \notin K \end{cases} \tag{2.1.12}$$

ile tanımlanan indikatör fonksiyonu sublineerdir. Gerçekten, K konveks olduğundan i_K'nın konveks olduğu açıktır. Ayrıca K koni olduğundan $\forall x \in K$ ve $\forall t > 0$ için $tx \in K$ ve dolayısıyla

$$i_K(tx) = 0 = t.i_K(x)$$

olduğundan i_K pozitif homojendir. Böylece sublineerlik gösterilmiş olur.

Örnek 2.1.15. ***(Uzaklık Fonksiyonu)***

$K \subseteq \mathbb{R}^n$ konveks koni olsun. Bu durumda,

$$d_K(x) = \inf\{\|y - x\| \mid y \in K\} \tag{2.1.13}$$

biçiminde tanımlı olan x'in K konisine uzaklık fonksiyonu d_K sublineerdir. Gerçekten, K konveks olduğundan d_K'nın konveks olduğu açıktır. Ayrıca, $x \in \mathbb{R}^n$ ve $t > 0$ için,

$$\begin{aligned} d_K(tx) &= \inf_{y \in K} \|y - tx\| \\ &= \inf_{ty \in K} \|ty - tx\| \\ &= t \inf_{y \in K} \|y - x\| = t.d_K(x) \end{aligned}$$

olduğundan d_K pozitif homojendir.

Örnek 2.1.16. ***(Norm)***

$\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı bir $\|\cdot\|$ normu sonlu ve sublineer bir fonksiyondur. Norm fonksiyonunun doğrusallık alt uzayı $U = \{0\}$'dır. Üstelik tersine eğer $\sigma : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ fonksiyonu sublineer ise ve doğrusallık alt uzayı yalnızca $0 \in \mathbb{R}^n$ vektöründen oluşuyorsa bu durumda,

$$|||x||| := \max\{\sigma(x), \sigma(-x)\}$$

$\mathbb{R}^n$ üzerinde bir norm belirtir.

Şimdi sublineer fonksiyonlar sınıfı içinde önemli bir yeri olan Minkowski fonksiyoneli incelenecektir.

Örnek 2.1.17. ***(Minkowski (Ayar-Gauge) Fonksiyoneli)***

$C \subseteq \mathbb{R}^n$ orijini içeren kapalı konveks bir küme olmak üzere

$$\gamma_C(x) := \inf\{\lambda > 0 \mid x \in \lambda C\} \tag{2.1.14}$$

ile tanımlı fonksiyona C kümesinin Minkowski Fonksiyoneli denir. Buna göre, $x \in \lambda C$ olan hiçbir $\lambda > 0$ sayısı yoksa $\gamma_C(x) = +\infty$ olur.

Teorem 2.1.18. *[4] $C \subseteq \mathbb{R}^n$ orijini içeren kapalı konveks bir küme ise;*

(i) C_∞, C'nin asimptotik konisi olmak üzere,

$$C_\infty = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \gamma_C(x) = 0\}$$

ve $\forall r > 0$ için,

$$S_r(\gamma_C) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \gamma_C(x) \leq r\} = rC$$

olur.

(ii) γ_C negatif olmayan sublineer bir fonksiyondur.

(iii) γ_C'nin $\mathbb{R}^n$ üzerinde sonlu olması için gerek ve yeter koşul $0 \in intC$ olmasıdır.

Sonuç 2.1.19. *[4] $C \subseteq \mathbb{R}^n$ orijini içeren kapalı konveks bir küme olsun. Bu durumda C'nin kompakt olması için gerek ve yeter koşul $\forall 0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ için $\gamma_C(x) > 0$ olmasıdır.*

Kanıt. C'nin kompakt olması için gerek ve yeter koşul $C_\infty = \{0\}$ olmasıdır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} C \text{ kompakttır} &\Leftrightarrow \{x \in \mathbb{R}^n \mid \gamma_C(x) = 0\} = \{0\} \\ &\Leftrightarrow \forall x \neq 0 \text{ için } \gamma_C(x) \neq 0 \quad (\gamma_C(x) \geq 0) \\ &\Leftrightarrow \forall x \neq 0 \text{ için } \gamma_C(x) > 0 \end{aligned}$$

elde edilir. □

2.2 Destek Fonksiyonları

Bu kesimde sublineer fonksiyonlar sınıfı içinde büyük öneme ve oldukça geniş bir kullanım alanına sahip olan destek fonksiyonları incelenecektir.

Tanım 2.2.1. *[4] $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}^n$ verilsin. Bu durumda,*

$$\begin{aligned} \sigma_S : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ x &\mapsto \sigma_S(x) := \sup\{\langle s, x\rangle \mid s \in S\} \end{aligned} \tag{2.2.15}$$

ile tanımlı $\sigma_{\mathbf{S}}$***'ye* S *kümesinin destek fonksiyonu*** *denir.*

(2.2.15) 'deki supremum değeri sonlu yada sonsuz olabilir. Üstelik bu supremum değerine S kümesi üzerinde ulaşılabilir yada supremum değeri veren vektör S dışında olabilir. Buna göre S bir indeks kümesi görevi görmektedir. Yani $\sigma_S(\cdot)$, S'den alınan vektörlerin belirlediği $\langle s, \cdot\rangle$ lineer dönüşümlerinin supremumudur. Dolayısıyla aşağıdaki önerme hemen yazılabilir.

Önerme 2.2.2. *[4] Destek fonksiyonu kapalı ve sublineer bir fonksiyondur.*

Kanıt. Lineer dönüşümler kapalı ve konvekstir. Üstelik

$$\sigma_S(0) = \sup\{\langle s, 0\rangle \mid s \in S\} = 0 < +\infty$$

olduğundan yani σ_S en az bir noktada sonlu değer aldığından, lineer fonksiyonların supremumu olarak tanımlanan destek fonksiyonu da kapalı ve konveks bir fonksiyondur. □

Önerme 2.2.3. *[4] $S \neq \emptyset$ olmak üzere, σ_S'in tüm $\mathbb{R}^n$'de sonlu olması için gerek ve yeter koşul S'nin sınırlı olmasıdır.*

Kanıt. σ_S sonlu olsun. Bu durumda $\forall x \in S$ ve $\forall d \in B(0,1)$ için,

$$\langle s, d\rangle \leq \sigma_S(d) \leq L$$

olacak şekilde $\exists L > 0$ sayısı vardır. $s \neq 0$ için $d = \dfrac{s}{\|s\|}$ denirse

$$\langle s, d\rangle = \langle s, \frac{s}{\|s\|}\rangle = \frac{1}{\|s\|}\langle s, s\rangle = \|s\| \leq L$$

olur. Böylece $S \subseteq B(0, L)$ elde edilir. S sınırlıdır.

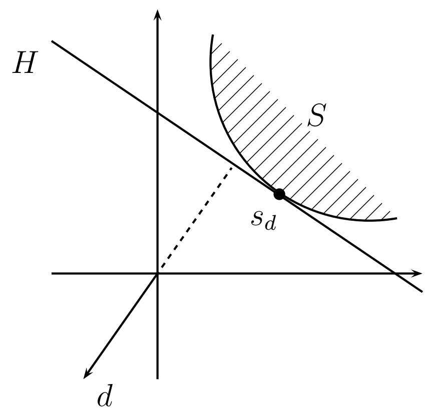
Tersine S sınırlı olsun. O halde $\exists L > 0$ sayısı için $S \subseteq B(0, L)$'dir. Diğer taraftan Cauchy-Schwartz Eşitsizliği'nden $\forall s \in S$ ve $\forall d \in \mathbb{R}^n$ için,

$$\langle s, d \rangle \leq \|s\|.\|d\| \leq L.\|d\|$$

olur. O halde $\forall d \in \mathbb{R}^n$ için,

$$\sigma_S(d) \leq L.\|d\| < +\infty$$

elde edilir. Böylece σ_S sonludur. □



Şekil 2.10: $\sigma_S(d) = \langle s_d, d \rangle$ olan $s_d \in \mathbb{R}^n$ vektörü

Tanım 2.2.4. $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}^n$ *verilsin ve* $d \in \mathbb{R}^n$ *olsun.*

$$\sigma_S(d) + \sigma_S(-d) = \sup_{s \in S} \langle s, d \rangle - \inf_{s \in S} \langle s, d \rangle$$

ile tanımlanan sayıya **S *kümesinin* d *yönündeki genişliği*** *denir.*

Önerme 2.2.5. *[4]* $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}^n$ *verilsin. Bu durumda,*

$$\sigma_S = \sigma_{clS} = \sigma_{coS} = \sigma_{\overline{co}S}$$

eşitlikleri sağlanır. Daha açık olarak, bir kümenin kendisi, kapanışı, konveks zarfı ve kapalı konveks zarfı aynı destek fonksiyonuna sahiptir.

Kanıt. $S \subseteq clS$ olduğundan destek fonksiyonunun supremum tanımı gereği $\sigma_S \leq \sigma_{clS}$ olur. Diğer taraftan $d \in \mathbb{R}^n$ ve $\bar{s} \in clS$ alınsın. Bu durumda öyle bir $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S$ dizisi vardır ki $s_n \to \bar{s}$ dir. İç çarpım fonksiyonu sürekli olduğundan

$$\langle d, \bar{s}\rangle = \langle d, \lim_{n\to\infty} s_n\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle d, s_n\rangle \leq \lim_{n\to\infty}\sigma_S(d) = \sigma_S(d)$$

olur. Buradan, $\forall \bar{s} \in clS$ için $\langle d, \bar{s}\rangle \leq \sigma_S(d)$ olduğuna göre,

$$\sup_{\bar{s}\in clS}\langle d, \bar{s}\rangle \leq \sigma_S(d)$$

ve böylece $\sigma_{clS} \leq \sigma_S$ elde edilir. Dolayısıyla $\sigma_S = \sigma_{clS}$ bulunur.

Diğer taraftan $S \subseteq coS$ olduğundan $\sigma_S \leq \sigma_{coS}$ olduğu açıktır. Tersine $\hat{s} \in coS$ alınsın. O halde $\exists s_1, s_2, \ldots, s_k \in S$ ve $\exists \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in [0,1]$ vardır ki

$$\sum_{i=1}^{k}\alpha_i = 1 \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^{k}\alpha_i s_i = \hat{s}$$

olur. Buradan iç çarpım fonksiyonu lineer olduğundan,

$$\begin{aligned}\langle \hat{s}, d\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{k}\alpha_i s_i, d\right\rangle = \sum_{i=1}^{k}\alpha_i\langle s_i, d\rangle \\ &\leq \sum_{i=1}^{k}\alpha_i\sigma_S(d) = \sigma_S(d)\sum_{i=1}^{k}\alpha_i = \sigma_S(d)\end{aligned}$$

bulunur. Böylece $\forall d \in \mathbb{R}^n$ için,

$$\sup_{\hat{s}\in coS}\langle \hat{s}, d\rangle \leq \sigma_S(d)$$

olur ki bu $\sigma_{coS} \leq \sigma_S$ demektir. Böylece $\sigma_S = \sigma_{coS}$ elde edilmiş olur.

Son olarak $\overline{co}S = cl(coS)$ olduğundan

$$\sigma_S = \sigma_{coS} = \sigma_{clS} = \sigma_{cl(coS)} = \sigma_{\overline{co}S}$$

yazılabilir. □

Önerme 2.2.5 gösteriyor ki bir kümenin destek fonksiyonu ile o kümenin kapalı konveks zarfının destek fonksiyonu aynıdır. Dolayısıyla destek fonksiyonları ile ilgilenirken çalışmaların kapalı konveks kümeler sınıfı $\overline{conv}\mathbb{R}^n$ üzerine kısıtlanması bir fark yaratmayacaktır. Üstelik bir kümenin kapalı konveks zarfı, o kümenin destek fonksiyonu yardımıyla tam olarak belirlenebilir.

Önerme 2.2.6. *[4] $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}^n$ verilsin. Bu durumda X kümesi $\mathbb{R}^n$ uzayı, $\mathbb{R}^n$ uzayının kapalı birim yuvarı yada birim yuvarın sınırı olmak üzere,*

$$s \in \overline{co}S \;\Leftrightarrow\; \forall d \in X \text{ için } \langle s, d\rangle \leq \sigma_S(d) \tag{2.2.16}$$

dir.

Kanıt. Öncelikle $s \in \overline{co}S$ olsun. Önerme 2.2.5 'den yararlanarak $\forall d \in \mathbb{R}^n$ (yada $\forall d \in X$) için,

$$\langle s, d\rangle \leq \sigma_{\overline{co}S}(d) = \sigma_S(d)$$

yazılabilir. Böylece ifadenin ilk kısmı kanıtlanmış olur.

Tersine $\forall d \in X$ için $\langle s, d\rangle \leq \sigma_S(d)$ olsun. $s \in \overline{co}S$ midir? Kabul edelim ki $s \notin \overline{co}S$ olsun. Bu durumda s noktası ile $\overline{co}S$ kapalı konveks kümesini ayıran bir hiperdüzlem vardır. Yani öyle bir $d_0 \in \mathbb{R}^n$ vardır ki $\forall s' \in \overline{co}S$ için,

$$\langle s, d_0\rangle > \langle s', d_0\rangle$$

olur. Buradan

$$\langle s, d_0\rangle > \sup_{s' \in \overline{co}S} \langle s', d_0\rangle = \sigma_{\overline{co}S}(d_0) = \sigma_S(d_0)$$

elde edilir ki bu hipotezle çelişir. Dolayısıyla kabul yanlıştır; $s \in \overline{co}S$'dir. □

Teorem 2.2.7. *[4] $S \subseteq \mathbb{R}^n$ boştan farklı kapalı konveks bir küme ve $dom\sigma_S \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda, S kümesi*

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall d \in dom\sigma_S \text{ için } \langle x, d\rangle \leq \sigma_S(d)\}$$

yada denk olarak,

$$S = \bigcap_{d \in dom\sigma_S} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, d\rangle \leq \sigma_S(d)\}$$

şeklinde yazılabilir.

Kanıt. Her bir $d \in dom\sigma_S$ için,

$$H^-_{d,\sigma_S(d)} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, d\rangle \leq \sigma_S(d)\}$$

olsun. Böylece gösterilmesi gereken eşitlik $S = \bigcap\limits_{d \in dom\sigma_S} H^-_{d,\sigma_S(d)}$ şekline dönüşür. $\forall d \in dom\sigma_S$ için $S \subseteq H^-_{d,\sigma_S(d)}$ olduğundan $S \subseteq \bigcap\limits_{d \in dom\sigma_S} H^-_{d,\sigma_S(d)}$ olduğu açıktır. Kapsamanın tersini göstermek için $x_0 \notin S$ olsun. S kapalı konveks bir küme ve x_0 S'nin dışında olduğundan x_0 ile S'yi kesin ayıran bir hiperdüzlem vardır. Yani $\exists (0 \neq) d_0 \in \mathbb{R}^n$ ve $\exists r \in \mathbb{R}$ vardır ki, $\forall s \in S$ için genelliği bozmadan

$$\langle s, d_0\rangle < r < \langle x_0, d_0\rangle$$

yazılabilir. Bu durumda,

$$\sigma_S(d_0) = \sup_{s \in S}\langle s, d_0\rangle \leq r < +\infty$$

olur. O halde $d_0 \in dom\sigma_S$ 'dir. Ayrıca $\langle x_0, d_0\rangle > r$ olduğundan

$$x_0 \notin \bigcap_{d \in dom\sigma_S} H^-_{d,\sigma_S(d)}$$

elde edilir. Böylelikle kapsamanın ters yönü de elde edilmiş olur. Sonuç olarak $S = \bigcap\limits_{d \in dom\sigma_S} H^-_{d,\sigma_S(d)}$ bulunur. $\square$

Bu önermeden yararlanarak σ_S destek fonksiyonu ile bir S kapalı konveks kümesinin içi, rölatif içi ve afin zarfı karakterize edilebilir.

Teorem 2.2.8. *[4] $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}^n$ kapalı konveks bir küme olsun. Bu durumda,*

(i) $s \in affS \;\Leftrightarrow\; \sigma_S(d) + \sigma_S(-d) = 0$ *olan* $\forall d \in \mathbb{R}^n$ *için* $\langle s, d\rangle = \sigma_S(d)$

(ii) $s \in riS \;\Leftrightarrow\; \sigma_S(d) + \sigma_S(-d) > 0$ *olan* $\forall d \in \mathbb{R}^n$ *için* $\langle s, d\rangle < \sigma_S(d)$

(iii) $s \in intS \;\Leftrightarrow\; \forall (0 \neq) d \in \mathbb{R}^n$ *için* $\langle s, d\rangle < \sigma_S(d)$

dir.

Kanıt. (i) $s \in S$ alınsın. Destek fonksiyonun tanımlanışı gereği her bir $d \in \mathbb{R}^n$ için

$$-\sigma_S(-d) \leq \langle s, d \rangle \leq \sigma_S(d)$$

olur. Eğer S kümesinin bir d yönündeki genişliği sıfır ise bu d vektörü için

$$\langle s, d \rangle = \sigma_S(d)$$

olur ki bu eşitlik herhangi bir $s \in affS$ için de yazılabilir.

Tersine $\sigma_S(d) + \sigma_S(-d) = 0$ olan her bir $d \in \mathbb{R}^n$ için $\langle s, d \rangle = \sigma_S(d)$ eşitliği sağlansın. İlk olarak $\sigma_S(d)+\sigma_S(-d) = 0$ özelliğini sağlayan tek d vektörü $d = 0$ ise S kümesini içeren hiç bir afin hiperdüzlem yoktur. Dolayısıyla $affS = \mathbb{R}^n$ olacağından istenen elde edilmiş olur. İkinci olarak $\sigma_S(d) + \sigma_S(-d) = 0$ özelliğini sağlayan sıfırdan farklı bir $d_H \in \mathbb{R}^n$ vektörü varsa,

$$H := \{p \in \mathbb{R}^n \mid \langle p, d_H \rangle = \sigma_S(d_H)\}$$

biçiminde tanımlanan H hiperdüzlemi S kümesini içerir. Üstelik S kümesinin d_H yönündeki genişliği sıfırdır. Dolayısıyla

$$\sigma_H(d_H) = \sigma_S(d_H) = \langle s, d_H \rangle$$

yazılabilir. Böylelikle her bir $d \in \mathbb{R}^n$ için $\langle s, d \rangle \leq \sigma_H(d)$ elde edilir ki böylece $s \in H$ 'dir. Dolayısıyla s vektörü S kümesini içine alan bir afin hiperdüzleme ait olduğundan $s \in affS$ bulunur.

(iii) Destek fonksiyonunun pozitif homojenliği göz önüne alınarak genelliği bozmadan $d \in \mathbb{R}^n$ vektörü birim vektör olarak alınsın. O halde her bir $s \in intS$ için öyle bir $\varepsilon > 0$ vardır ki $\forall d \in \overline{B}(0, 1)$ için $s + \varepsilon d \in S$ 'dir. Buradan destek fonksiyonunun tanımlanışı gereği $\forall d \in \overline{B}(0, 1)$ için

$$\sigma_S(d) \geq \langle s + \varepsilon d, d \rangle = \langle s, d \rangle + \varepsilon$$

olur. Tersine $\forall d \in \overline{B}(0, 1)$ için $\sigma_S(d) - \langle s, d \rangle > 0$ olan $s \in \mathbb{R}^n$ verilsin. σ_S kapalı ve $\overline{B}(0, 1)$ birim yuvarı kompakt olduğundan

$$0 < \varepsilon := \inf\{\sigma_S(d) - \langle s, d \rangle \mid d \in \overline{B}(0, 1)\} \leq +\infty$$

elde edilir. Böylece her $d \in \overline{B}(0,1)$ için

$$\langle s, d \rangle + \varepsilon \leq \sigma_S(d)$$

olur. $\|u\| < \varepsilon$ olan bir $u \in \mathbb{R}^n$ alınsın. Cauchy-Schwartz Eşitsizliği 'nden her $d \in \overline{B}(0,1)$ için

$$\langle s + u, d \rangle = \langle s, d \rangle + \langle u, d \rangle \leq \langle s, d \rangle + \varepsilon \leq \sigma_S(d)$$

elde edilir ki böylece $s + u \in S$ 'dir. Önerme 2.2.6 gereğince $s \in intS$ bulunur.

(ii) V $affS$ 'ye paralel olan alt uzay ve $U := V^{\perp}$ olmak üzere $\mathbb{R}^n = U \oplus V$ biçiminde yazılsın. O halde keyfi $d \in \mathbb{R}^n$ vektörü için $d = d_u + d_v$ olacak şekilde $d_u \in U$ ve $d_v \in V$ vardır. Üstelik $\langle \cdot, d_u \rangle$ değeri S üzerinde sabit olduğundan S kümesi d_u yönünde 0-genişliğe sahiptir ve her $s \in S$ için

$$\sigma_S(d) = \sup_{s \in S} \langle s, d_v + d_u \rangle = \langle s, d_u \rangle + \sup_{s \in S} \langle s, d_v \rangle$$

yazılabilir. O halde $\sigma_S(d) + \sigma_S(-d) > 0$ olan bir d yönü

$$\sigma_S(d) + \sigma_S(-d) = \sigma_S(d_v) + \sigma_S(-d_v) > 0$$

eşitsizliğini sağlayan bir vektördür. Dolayısıyla kanıt (iii) şıkkından açıktır. $\square$

Önerme 2.2.9. *[4] $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}^n$ kapalı konveks bir küme olsun. Bu durumda $cldom\sigma_S$ ve S_∞ kümeleri karşılıklı olarak birbirlerinin polar konileridir.*

Kanıt. $p \in S_\infty$ alınsın ve $s_0 \in S$ keyfi alınıp sabitlensin. $S_\infty = \bigcap_{t>0} t(S - s_0)$ olduğundan, $p = t.(s_t - s_0)$ olacak şekilde $\exists s_t \in S$ vardır. Buradan $q \in dom\sigma_S$ için,

$$\begin{aligned}
\langle p, q \rangle &= t\langle s_t - s_0, q \rangle \\
&= t\left[\langle s_t, q \rangle - \langle s_0, q \rangle\right] \\
&\leq t\left[\sup_{s_t \in S} \langle s_t, q \rangle - \langle s_0, q \rangle\right] \\
&= t\left[\sigma_S(q) - \langle s_0, q \rangle\right] < +\infty
\end{aligned}$$

bulunur. Üstelik $t \downarrow 0$ için $\langle p, q\rangle \leq 0$ elde edilir. Böylece,

$$(S_\infty)^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall p \in S_\infty \text{ için } \langle p, x\rangle \leq 0\}$$

olduğundan $q \in (S_\infty)^\circ$ elde edilir. O halde $dom\sigma_S \subseteq (S_\infty)^\circ$ ve dolayısıyla $cldom\sigma_S \subseteq (S_\infty)^\circ$ bulunur. Tersine, $q \in (dom\sigma_S)^\circ$ alınsın. $(dom\sigma_S)^\circ$ bir koni olduğundan $\forall t > 0$ için $tq \in (dom\sigma_S)^\circ$ olur. $s \in S$ verilsin. Keyfi bir $p \in dom\sigma_S$ için,

$$\langle s_0 + tq, p\rangle = \langle s_0, p\rangle + t\langle q, p\rangle \leq \langle s_0, p\rangle \leq \sup_{s_0 \in S}\langle s_0, p\rangle = \sigma_S(p)$$

bulunur. O halde $s_0 + tq \in S$'dir. Dğer bir deyişle $\forall t > 0$ için $q \in \dfrac{S - s_0}{t}$ olur ki bu $q \in S_\infty$ olduğu anlamına gelir. Böylece $(dom\sigma_S)^\circ \subseteq S_\infty$ elde edilir. Sonuç olarak,

$$(S_\infty)^\circ \subseteq dom\sigma_S \subseteq cldom\sigma_S \subseteq (S_\infty)^\circ$$

ve böylece

$$(S_\infty)^\circ = cldom\sigma_S$$

olur. $\square$

2.3 Kapalı Konveks Kümeler ve Kapalı Sublineer Fonksiyonlar Arasındaki İzomorfizm

Destek fonksiyonunun kapalı ve sublineer olduğu daha önceki kesimde gösterilmiştir. Bunun yanısıra herhangi bir kapalı sublineer fonksiyona bir destek fonksiyonu gözüyle bakılabilir. Bunun sebebi ise sublineer fonksiyonların lineer fonksiyonlarla alttan sınırlandırılabilmesidir. Aşağıdaki teorem bunu açıklayacaktır.

Teorem 2.3.1. *[4] $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ kapalı sublineer bir fonksiyon olsun. Bu durumda σ'yı alttan sınırlayan bir lineer dönüşüm vardır. Üstelik σ kendisini alttan sınırlayan lineer dönüşümlerin supremumudur. Diğer bir deyişle σ fonksiyonu*

$$S_\sigma = \{s \in \mathbb{R}^n \mid \forall d \in \mathbb{R}^n \ \textit{için} \ \langle s, d\rangle \leq \sigma(d)\} \tag{2.3.17}$$

kümesinin destek fonksiyonudur.

Kanıt. σ konveks bir fonksiyon olduğundan onu alttan sınırlayan bir afin dönüşümün varlığı açıktır. O halde öyle bir $(s, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ vardır ki her $d \in \mathbb{R}^n$ için

$$\langle s, d\rangle - r \leq \sigma(d)$$

olur. Ayrıca $-r \leq \sigma(0) = 0$ olduğundan $r \geq 0$ olur. σ pozitif homojen olduğundan, her $t > 0$ ve her $d \in \mathbb{R}^n$ için

$$\begin{aligned} \langle s, td\rangle - r &\leq \sigma(td) \\ t\langle s, d\rangle - r &\leq t\sigma(d) \\ \langle s, d\rangle - \frac{r}{t} &\leq \sigma(d) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan $t \to \infty$ için limit alınırsa

$$\langle s, d\rangle \leq \sigma(d)$$

elde edilir. O halde σ sublineer fonksiyonu $s \in \mathbb{R}^n$ vektörüyle belirlenen lineer dönüşümle alttan sınırlanmaktadır. Buna göre

$$\begin{aligned}\sigma(d) &= \sup\{\langle s, d\rangle \mid \forall d \in \mathbb{R}^n \text{ için } \langle s, d\rangle \leq \sigma(d)\} \\ &= \sup_{s \in S_\sigma} \langle s, d\rangle = \sigma_{S_\sigma}(d)\end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece $\sigma = \sigma_{S_\sigma}$ elde edilir. □

Uyarı 2.3.2. *Teorem 2.3.1 sublineer σ fonksiyonunun epigrafı açısından da değerlendirilebilir. Kapalı konveks epiσ kümesi kendisini içine alan kapalı yarı uzayların arakesiti biçimindedir. Ancak epiσ aynı zamanda koni olduğundan bu yarı uzaylar sınırları lineer hiperdüzlemler olan yarı uzaylar olarak alınabilir.*

Teorem 2.3.1 'in en önemli sonucu kapalı sublineer fonksiyonların değerlendirilmesi ile ilgilidir. Daha önce kapalı konveks bir kümeye karşılık kapalı sublineer bir destek fonksiyonunun karşılık getirilebileceği gösterilmişti. Şimdi ise tersine, yine destek fonksiyonu yardımıyla herhangi bir kapalı sublineer fonksiyona bir kapalı konveks kümenin karşılık getirilebileceği gösterilmiştir. Böylece kapalı konveks kümeler ailesi ile kapalı sublineer fonksiyonlar ailesi arasında birebir örten bir eşleme kurulmuştur.

Sonuç 2.3.3. *[4] Kapalı konveks bir $S \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi ve kapalı sublineer bir σ fonksiyonu verilsin. X kümesi $\mathbb{R}^n$, $\bar{B}(0,1)$ veya $S(0,1)$ kümelerinden biri olmak üzere aşağıdakiler denktir:*

(i) σ fonksiyonu S 'nin destek fonksiyonudur.

(ii) $S = \{s \mid \forall d \in X \text{ için } \langle s, d\rangle \leq \sigma(d)\}$ 'dir.

3 SONLU KONVEKS FONKSİYONLARIN SUBDİFERANSİYELLERİ

Konveks fonksiyonlara bir nokta civarında sublineer fonksiyonlarla yaklaşılabileceği gösterilmişti. Bu bölümde öncelikle, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveks ve $x \in \mathbb{R}^n$ sabit bir nokta olmak üzere;

$$\begin{aligned} f'(x, \cdot) : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ d &\mapsto f'(x, d) := \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x + td) - f(x)}{t} \end{aligned}$$

ile tanımlı $f'(x, \cdot)$ fonksiyonunun varlığı, kapalı sonlu ve sublineer olduğu gösterilecektir. Dolayısıyla kapalı ve sonlu sublineer fonksiyonlarla kompakt konveks kümeler arasındaki $1-1$ eşleme ilişkisi göz önüne alındığında, $f'(x, \cdot)$ fonksiyonu boştan farklı kompakt ve konveks bir kümenin destek fonksiyonu olarak yazılabilir. İşte bu küme f fonksiyonunun x noktasındaki subdiferansiyelidir ve $\partial f(x)$ ile gösterilir. Eğer f fonksiyonu x noktasında diferansiyellenebilir ise yani $\nabla f(x)$ varsa, bu durumda $f'(x, \cdot)$ lineerdir ve $\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$ olur. Yani sublineerlik nasıl ki lineerliğin genellemesi ise, subdiferansiyel kavramı da gradientin genellemesidir.

Aksi söylenmedikçe bundan sonra $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sonlu ve konveks bir fonksiyon olarak alınacaktır. Böylece f'nin yerel Lipschitz sürekliliği garanti edilecektir.

3.1 Subdiferansiyelin Tanımı ve Yorumlar

Bu kesimde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sonlu ve konveks fonksiyonu için subdiferansiyelin üç farklı yoldan tanımı ve bu tanımların denkliği verilecektir.

3.1.1 Yönlü Türev Yardımıyla Subdiferansiyelin Tanımı

Tanım 3.1.1. *[4, 5] $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun ve $x \in \mathbb{R}^n$ noktası, $d \in \mathbb{R}^n$ yönü verilsin. Bu durumda* **f *'in* x *noktasındaki* d *yönündeki***

fark bölümü;

$$q(t) := \frac{f(x+td) - f(x)}{t} \ , \quad t > 0$$

ile tanımlanır.

Önerme 3.1.2. *[4, 5] f'in x'te d yönündeki fark bölümü olan $q(t)$ fonksiyonu monoton artandır. Yani $0 < s \leq t$ ise $q(s) \leq q(t)$'dir.*

Kanıt. $0 < s \leq t$ olsun. Bu durumda

$$f(x+sd) - f(x) = f\left(\frac{s}{t}\ (x+td) + \frac{t-s}{t}\ x\right) - f(x)$$

eşitliği yazılabilir. f konveks olduğundan,

$$\begin{aligned} f(x+sd) - f(x) &\leq \frac{s}{t}\ f(x+td) + \frac{t-s}{t}\ f(x) - f(x) \\ &= \frac{s}{t}\,[f(x+td) - f(x)] \end{aligned}$$

elde edilir. Eşitsizliğin her iki tarafı $s > 0$ sayısına bölünürse

$$\frac{f(x+sd) - f(x)}{s} \leq \frac{f(x+td) - f(x)}{t}$$

ve böylece

$$q(s) \leq q(t)$$

bulunur. Dolayısıyla $q(t)$ fonksiyonu monoton artandır. □

Teorem 3.1.3. *[4, 5] $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sonlu değer alan, konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda;*

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x+td) - f(x)}{t}$$

limiti her $x \in \mathbb{R}^n$ noktası ve her $d \in \mathbb{R}^n$ yönü için vardır.

Kanıt. $x, d \in \mathbb{R}^n$ keyfi seçilip sabitlensin. Her $t > 0$ sayısı için,

$$x = \frac{1}{1+t}\ (x+td) + \frac{t}{1+t}\ (x-d)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan f konveks olduğundan,

$$f(x) \leq \frac{1}{1+t}\ f(x+td) + \frac{t}{1+t}\ f(x-d)$$

olur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$(1+t)f(x) \leq f(x+td) + tf(x-d)$$

$$f(x) + tf(x) \leq f(x+td) + tf(x-d)$$

$$tf(x) - tf(x-d) \leq f(x+td) - f(x)$$

$$f(x) - f(x-d) \leq \frac{f(x+td) - f(x)}{t} = q(t)$$

elde edilir. f sonlu değer alan bir fonksiyon olduğundan eşitsizliğin sol tarafı sonlu bir değerdir. O halde $q(t)$ fonksiyonu alttan sınırlı bir fonksiyondur. Ayrıca $t \to 0^+$ için $q(t)$ monoton azalan olacağından ve alttan sınırlılıktan

$$\lim_{t\to 0^+} q(t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x+td) - f(x)}{t}$$

limiti vardır ve $t > 0$ değerleri üzerinden infimumuna eşittir. □

Tanım 3.1.4. *[4, 5] $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sonlu ve konveks fonksiyonu verilsin. Bu durumda* **f *'in* x *noktasında* d *yönündeki yönlü türevi***

$$f'(x,d) := \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x+td) - f(x)}{t} = \inf_{t>0} \frac{f(x+td) - f(x)}{t} \tag{3.1.18}$$

ile tanımlanır.

Uyarı 3.1.5. *$\varphi(t) := f(x+td)$ fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda f'in x'de d yönündeki yönlü türevi φ fonksiyonunun 0'daki sağ türevidir. Gerçekten,*

$$\begin{aligned} \varphi'_+(0) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{\varphi(0+h) - \varphi(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+hd) - f(x)}{h} = f'(x,d) \end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan fark bölümünde d yerine $-d$ alınırsa,

$$\begin{aligned} f'(x,-d) &= \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x-td) - f(x)}{t} \\ &= \lim_{k\to 0^-} \frac{f(x+kd) - f(x)}{-k} \\ &= -\lim_{k\to 0^-} \frac{f(x+kd) - f(x)}{k} \\ &= -\varphi'_-(0) \end{aligned}$$

elde edilir.

Önerme 3.1.6. *[4, 5] $x \in \mathbb{R}^n$ sabit olmak üzere, $f'(x,\cdot)$ yönlü türev fonksiyonu sonlu ve sublineerdir.*

Kanıt. $d_1, d_2 \in \mathbb{R}^n$, $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ ve $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ olsun. Her $t > 0$ sayısı için,

$$\begin{aligned} f(x + t(\alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2)) - f(x) &= f(\alpha_1(x + td_1) + \alpha_2(x + td_2)) - f(x) \\ &\leq \alpha_1 f(x + td_1) + \alpha_2 f(x + td_2) - \alpha_1 f(x) - \alpha_2 f(x) \\ &= \alpha_1(f(x + td_1) - f(x)) + \alpha_2(f(x + td_2) - f(x)) \end{aligned}$$

olur. Buradan eşitsizliğin her iki tarafı $t > 0$ sayısına bölünüp $t \to 0^+$ için limit alınırsa

$$f'(x, \alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2) \leq \alpha_1 f'(x, d_1) + \alpha_2 f'(x, d_2)$$

elde edilir. O halde $f'(x,\cdot)$ yönlü türevi konvekstir. Yönlü türevin pozitif homojenliği için $\lambda > 0$ alınsın.

$$\begin{aligned} f'(x, \lambda d) &= \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x + \lambda td) - f(x)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0^+} \lambda \frac{f(x + \lambda td) - f(x)}{\lambda t} \\ &= \lambda \lim_{s\to 0^+} \frac{f(x + sd) - f(x)}{s} = \lambda f'(x, d) \end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak $f'(x,\cdot)$ yönlü türev fonksiyonunun sonlu olduğu gösterilsin. Bunun için $\|d\| = 1$ olacak şekilde bir $d \in \mathbb{R}^n$ alınsın. f sonlu ve konveks olduğundan x noktası etrafında Lipschitz süreklidir. Yani $0 < t \leq \varepsilon$ için,

$$\begin{aligned} |f(x + td) - f(x)| &\leq L\|x + td - x\| \\ &= L\|td\| = Lt\|d\| = Lt \end{aligned}$$

olacak şekilde $\exists\varepsilon > 0$ ve $\exists L > 0$ sayıları vardır. Buradan,

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{|f(x + td) - f(x)|}{t} \leq L$$

ve dolayısıyla $|f'(x, d)| \leq L$ bulunur. Yani kapalı birim yuvar üzerindeki tüm d vektörleri için yönlü türev sonlu değer alır. $f'(x,\cdot)$ pozitif homojen olduğundan, keyfi $d \in \mathbb{R}^n$ için,

$$f'(x, d) = f'(x, \frac{d}{\|d\|} \cdot \|d\|) = \|d\| \cdot f'(x, \frac{d}{\|d\|})$$

olur. Böylece $\left|f'(x, \frac{d}{\|d\|})\right| \leq L$ olduğuna göre

$$\left|\frac{f'(x,d)}{\|d\|}\right| \leq L \quad \Rightarrow |f'(x,d)| \leq L \cdot \|d\|$$

bulunur. O halde, $f'(x,\cdot)$ tüm $\mathbb{R}^n$ üzerinde sonludur. $\square$

Uyarı 3.1.7. *Yukarıdaki önermenin kanıtına göre f 'in x noktası etrafındaki yerel Lipschitz sabiti olan L sayısı aynı zamanda yönlü türev fonksiyonunun da Lipschitz sabitidir. Gerçekten, $f'(x,\cdot)$ kapalı, sublineer ve sonlu bir fonksiyon olduğundan en iyi Lipschitz sabiti $L_f = \sup\{f'(x,d) \mid \|d\| = 1\}$ sayısıdır. O halde, $\forall d \in \mathbb{R}^n$ için $|f'(x,d)| \leq L \cdot \|d\|$ olduğundan,*

$$\sup_{\|d\|=1} f'(x,d) \leq \sup_{\|d\|=1} L \cdot \|d\|) = L$$

olur. Dolayısıyla bu L sayısı $f'(x,\cdot)$ için global Lipschitz sabitidir. Üstelik bu L sabiti x noktasının bir komşuluğu için de geçerlidir. Yani f 'in $B(x,\delta)$ yuvarı üzerindeki Lipschitz sabitinin L olduğunu varsayarsak, $\forall d_1, d_2 \in \mathbb{R}^n$ için,

$$\|y - x\| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f'(y,d_1) - f'(y,d_2)| \leq L\|d_1 - d_2\|$$

olur.

Böylelikle sonlu ve konveks bir f fonksiyonunun bir x noktasındaki yönlü türevinin, kapalı sonlu ve sublineer bir fonksiyon olduğu kanıtlanmıştır. O halde yönlü türev; kompakt ve konveks bir kümenin destek fonksiyonu biçiminde ifade edilebilir.

Tanım 3.1.8. *[4, 5][**Subdiferansiyel I**] Destek fonksiyonu $f'(x,\cdot)$ olan $\mathbb{R}^n$'nin boştan farklı kompakt konveks kümesine f 'in x noktasındaki **subdiferansiyeli** denir ve $\partial\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ile gösterilir. Kısaca,*

$$\partial f(x) := \{s \in \mathbb{R}^n \mid \forall d \in \mathbb{R}^n \text{ için } \langle s, d\rangle \leq f'(x,d)\} \tag{3.1.19}$$

*kümesiyle gösterilebilir. Bu kümenin her bir s vektörüne de f 'in x noktasındaki bir **subgradienti** denir.*

Bu tanımla oluşturulan subdiferansiyel kümesi bir iç çarpımla ilişkilendirildiğinden iç çarpım değiştikçe $\partial f(x)$ kümesinin de değişeceği açıktır. Ayrıca kompakt konveks kümeler ile sonlu sublineer fonksiyonlar arasındaki ilişkiye bağlı tüm özellikler $\partial f(x)$ kümesi ve $f'(x,\cdot)$ fonksiyonu için yeniden düzenlenebilir. Örneğin, $\partial f(x)$ kümesinin bir d vektörü yönündeki genişliği, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(t) = f(x+td)$ olmak üzere

$$f'(x,d) + f'(x,-d) = \varphi'_+(0) - \varphi'_-(0)$$

olarak elde edilir. Bu fark ise φ fonksiyonunun diferansiyellenebilme eksiğini verir.

Uyarı 3.1.9. *$f'(x,\cdot)$ sublineer fonksiyonu için*

$$U = \{d \in \mathbb{R}^n \mid f'(x,d) + f'(x,-d) = 0\}$$

kümesi doğrusallık altuzayını oluşturur. Diğer bir deyişle U altuzayı $\partial f(x)$ subdiferansiyel kümesinin 0-genişliğe sahip olduğu tüm yönlerin kümesidir.

$$f'(x,d) + f'(x,-d) = \varphi'_+(0) - \varphi'_-(0)$$

olduğundan U kümesi $\varphi(t) = f(x+td)$ tek değişkenli fonksiyonunu 0'da türevlenebilir yapan $d \in \mathbb{R}^n$ vektörlerinden oluşmaktadır.

Subdiferansiyelin tanımına diğer taraftan bakıldığında,

$$f'(x,d) = \sup_{s \in \partial f(x)} \langle s, d \rangle$$

yazılabilir. Üstelik $\partial f(x)$ kompakt olduğundan bu supremum değerine (d'ye bağlı) bir $s \in \partial f(x)$ vektörüyle ulaşılabilir. Yani $\forall d \in \mathbb{R}^n$ için,

$$f(x+td) = f(x) + t\langle s_d, d\rangle + t\ \varepsilon_d(t) \qquad (t \downarrow 0 \text{ için } \ \varepsilon_d(t) \to 0) \tag{3.1.20}$$

olacak şekilde $\exists s_d \in \partial f(x)$ vardır.

Sonlu ve sublineer bir fonksiyon olarak

$$d \mapsto f'(x,d) = \sigma_{\partial f(x)}(d)$$

fonksiyonunun kendisi de yönlü türeve ve subdiferansiyele sahiptir. $d = 0$ için bunlar aşağıdaki önermede incelenecektir.

Önerme 3.1.10. *[4, 5]* $d \mapsto \sigma(d) := \sigma_{\partial f(x)}(d)$ *sonlu sublineer fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar:*

(i) $\forall d \in \mathbb{R}^n$ *için* $\sigma'(0, d) = \sigma(d)$

(ii) $\partial\sigma(0) = \partial f(x)$

Kanıt. (i) Keyfi $d \in \mathbb{R}^n$ alınsın. σ fonksiyonu pozitif homojen ve $\sigma(0) = 0$ olduğundan,

$$\begin{aligned}\sigma'(0, d) &= \lim_{t\to 0^+} \frac{\sigma(0 + td) - \sigma(0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{\sigma(td)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t\sigma(d)}{t} = \sigma(d)\end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) Yukarıdaki eşitlikte $d \in \mathbb{R}^n$ keyfi olduğundan,

$$\sigma'(0, \cdot) = \sigma_{\partial f(x)}(\cdot) = f'(x, \cdot)$$

yazılabilir. Dolayısıyla bu kapalı sonlu ve sublineer fonksiyonlar aynı kompakt konveks kümeyi desteklerler. Yani;

$$\partial\sigma(0) = \partial f(x)$$

olur.

□

Sonuç 3.1.11. *[4, 5] Sonlu ve sublineer bir* σ *fonksiyonu* 0*'daki subdiferansiyelinin destek fonksiyonudur.*

Kanıt. Önerme 3.1.10(i)'den,

$$\begin{aligned}\partial\sigma(0) &= \{s \in \mathbb{R}^n \mid \forall d \in \mathbb{R}^n \text{ için } \langle s, d\rangle \le \sigma'(0, d)\} \\ &= \{s \in \mathbb{R}^n \mid \forall d \in \mathbb{R}^n \text{ için } \langle s, d\rangle \le \sigma(d)\}\end{aligned}$$

yazılabilir. Diğer taraftan σ sonlu ve sublineer olduğundan

$$S_\sigma = \{s \in \mathbb{R}^n \mid \forall d \in \mathbb{R}^n \text{ için } \langle s, d\rangle \leq \sigma(d)\}$$

kümesinin destek fonksiyonudur. Dolayısıyla,

$$\sigma = \sigma_{S_\sigma} = \sigma_{\partial\sigma(0)}$$

elde edilir. □

3.1.2 Afin Fonksiyonlar Yardımıyla Subdiferansiyelin Tanımı

Subdiferansiyelin ilk tanımı, önce yönlü türevin hesaplanması ve sonra bu fonksiyonun desteklediği kümenin belirlenmesi şeklinde iki aşamadan oluşmaktadır. Ancak şimdi bir konveks fonksiyonun subdiferansiyeli onu alttan sınırlayan afin fonksiyonlar kullanılarak direk bir tanımla elde edilecek ve bu tanımların birbirine denk olduğu kanıtlanacaktır.

Tanım 3.1.12. *[4, 5][**Subdiferansiyel II**] $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon ve $x \in \mathbb{R}^n$ verilsin. Her bir $y \in \mathbb{R}^n$ için*

$$f(y) \geq f(x) + \langle s, y - x\rangle \tag{3.1.21}$$

*koşulunu sağlayan tüm s vektörlerinin kümesine f'in x'teki **subdiferansiyeli** denir. Kısaca*

$$\partial f(x) = \{s \in \mathbb{R}^n \mid \forall y \in \mathbb{R}^n \text{ için } f(y) \geq f(x) + \langle s, y - x\rangle\}$$

şeklinde yazılabilir.

Teorem 3.1.13. *[4, 5] Subdiferansiyel için verilen Tanım 3.1.8 ve Tanım 3.1.12 birbirine denktir.*

Kanıt. Tanımlarda verilen kümeler sırasıyla U ve V ile gösterilsin. Yani

$$\begin{aligned} U &= \{s \in \mathbb{R}^n \mid \forall d \in \mathbb{R}^n \text{ için } \langle s, d\rangle \leq f'(x, d)\} \\ V &= \{s \in \mathbb{R}^n \mid \forall y \in \mathbb{R}^n \text{ için } f(y) \geq f(x) + \langle s, y - x\rangle\} \end{aligned}$$

olsun. Öncelikle $s \in V$ alınsın. O halde $\forall d \in \mathbb{R}^n$ için $\langle s, d\rangle \leq f'(x, d)$ olur. Buradan yönlü türevin tanımından $\forall d \in \mathbb{R}^n$ ve $\forall t > 0$ için,

$$\langle s, d\rangle \leq \frac{f(x+td) - f(x)}{t}$$

yazılabilir. $y := x + td$ olsun. Böylece d vektörü $\mathbb{R}^n$ uzayını ve t sayısı pozitif gerçel sayıları tararken, y vektörü tüm $\mathbb{R}^n$'de değer alır. O halde son eşitsizlik $\forall y \in \mathbb{R}^n$ için,

$$\langle s, d\rangle \leq \frac{f(y) - f(x)}{t}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece $\forall y \in \mathbb{R}^n$ için

$$f(y) \geq f(x) + \langle s, y - x\rangle$$

elde edilir. O halde $s \in U$ ve dolayısıyla $V \subseteq U$ bulunur.

Tersine $s \in U$ alınsın. O halde $\forall y \in \mathbb{R}^n$ için $f(y) - f(x) \geq \langle s, y - x\rangle$'tir. $t > 0$ ve $d \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $y := x + td$ denirse;

$$\begin{aligned}
f(x+td) - f(x) &\geq \langle s, td\rangle \\
f(x+td) - f(x) &\geq t\langle s, d\rangle \\
\frac{f(x+td) - f(x)}{t} &\geq \langle s, d\rangle \\
\lim_{t\to 0^+} \frac{f(x+td) - f(x)}{t} &\geq \langle s, d\rangle \\
f'(x, d) &\geq \langle s, d\rangle
\end{aligned}$$

bulunur ve böylece $s \in V$ yani $U \subseteq V$ elde edilir. Böylelikle istenen $U = V$ eşitliği elde edilmiş olur. □

Önerme 3.1.14. *[4, 5] Tanım 3.1.12 ile verilen subdiferansiyel aşağıdaki özellikleri sağlar:*

(i) $\partial f(x)$ boştan farklıdır.

(ii) $\partial f(x)$ kümesi kompakt ve konvekstir.

Kanıt. (i) f konveks olduğundan herhangi bir $x \in \mathbb{R}^n$ noktası için f'i o noktada alttan destekleyen en az bir afin dönüşüm vardır. Dolayısıyla $\partial f(x)$ boş kümeden farklıdır.

(ii) $s_1, s_2 \in \partial f(x)$, $\alpha \in (0,1)$ alınsın.

$$\begin{aligned}
f(x) + \langle \alpha s_1 + (1-\alpha) s_2, y - x\rangle &= f(x) + \alpha\langle s_1, y-x\rangle + (1-\alpha)\langle s_2, y-x\rangle \\
&= \alpha\left(f(x) + \langle s_1, y-x\rangle\right) + (1-\alpha)\left(f(x) + \langle s_2, y-x\rangle\right) \\
&\leq \alpha f(y) + (1-\alpha) f(y) = f(y)
\end{aligned}$$

bulunur. O halde $\alpha s_1 + (1-\alpha)s_2 \in \partial f(x)$ olur ki bu da $\partial f(x)$ 'in konveksliğini verir.

$\partial f(x)$'in kapalılığının gösterilmesi için $s \in cl(\partial f(x))$ alınsın. Bu durumda $\partial f(x)$ içinde öyle bir (s_n) dizisi vardır ki $s_n \to s$ 'dir. $\forall y \in \mathbb{R}^n$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için,

$$f(y) \geq f(x) + \langle s_n, y - x\rangle$$

olur. Buradan her iki tarafın $n \to \infty$ için limiti alınır ve iç çarpımın sürekliliği kullanılırsa

$$f(y) \geq f(x) + \lim_{n\to\infty} \langle s_n, y - x\rangle$$

$$f(y) \geq f(x) + \langle \lim_{n\to\infty} s_n, y - x\rangle$$

$$f(y) \geq f(x) + \langle s, y - x\rangle$$

yazılabilir. O halde $s \in \partial f(x)$ elde edilir. Dolayısıyla $\partial f(x)$ kapalıdır.

$\partial f(x)$'in sınırlılığının gösterilmesi için sıfırdan farklı bir $s \in \partial f(x)$ alınsın. Bu durumda $\forall y \in \mathbb{R}^n$ için $f(y) \geq f(x) + \langle s, y-x\rangle$ olduğu biliniyor. Keyfi bir $\delta > 0$ sayısı için $y := x + \delta \dfrac{s}{\|s\|}$ tanımlansın. Buna göre $y \in \overline{B}(x,\delta)$ yuvarındadır. Üstelik,

$$\begin{aligned}
f(y) \geq f(x) + \langle s, y - x\rangle &= f(x) + \langle s, \delta \frac{s}{\|s\|}\rangle \\
&= f(x) + \frac{\delta}{\|s\|}\langle s, s\rangle \\
&= f(x) + \frac{\delta}{\|s\|} \cdot \|s\|^2
\end{aligned}$$

olduğundan

$$f(y) \geq f(x) + \delta \cdot \|s\| \tag{3.1.22}$$

bulunur. $\overline{B}(x,\delta)$ kompakt ve f fonksiyonu konveks olduğundan öyle bir $L > 0$ sayısı vardır ki f bu yuvar üzerinde L sabitiyle Lipschitz'dir. Yani, $y = x +$

$\delta \dfrac{s}{\|s\|} \in \overline{B}(x,\delta)$ için,

$$|f(y)-f(x)| \leq L.\|y-x\| \quad \Rightarrow \quad |f(y)-f(x)| \leq L.\|\delta \frac{s}{\|s\|}\| = L.\delta$$

ve böylece

$$f(y) \leq f(x) + L.\delta \tag{3.1.23}$$

yazılabilir. Böylece (3.1.22) ve (3.1.23) 'den

$$f(x) + \delta\|s\| \leq f(y) \leq f(x) + L.\delta \quad \Rightarrow \quad \delta\|s\| \leq L.\delta \quad \Rightarrow \quad \|s\| \leq L$$

bulunur. Böylelikle $\forall 0 \neq s \in \partial f(x)$ için $\|s\| \leq L$ olduğundan $\partial f(x)$ sınırlıdır.

$\square$

Sonuç olarak Tanım 3.1.12 ile verilen subdiferansiyel boştan farklı konveks ve kompakt bir küme olduğundan sonlu değerli bir destek fonksiyonuna sahiptir. Üstelik Teorem 1.2.2 dikkate alınırsa bu destek fonksiyonu $d \mapsto f'(x,d)$ yönlü türev fonksiyonundan başka birşey değildir.

3.1.3 Normal ve Teğet Koniler Kullanılarak Subdiferansiyelin Geometrik Kuruluşu

Tanım3.1.12'e göre, $\partial f(x)$ 'in elemanları olan subgradientler f'in epigrafını $(x, f(x))$ noktasında destekleyen hiperdüzlemlerin eğimleridir. Bu bölümde bu geometrik sonuç teğet ve normal koniler yardımıyla ifade edilecektir. Bu ifade ise subdiferansiyel ve yönlü türevin bir üçüncü tanımını sunacaktır.

Önerme 3.1.15. *[4, 5] $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda,*

(i) Bir $s \in \mathbb{R}^n$ vektörünün f'in x'teki subgradienti olması için gerek ve yeter koşul $(s, -1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ vektörünün $(x, f(x))$ noktasında $epi f$'e normal olmasıdır. Diğer bir deyişle,

$$N_{epif}(x, f(x)) = \{(\lambda s, -\lambda) \mid s \in \partial f(x),\ \lambda \geq 0\} \tag{3.1.24}$$

olur.

(ii) $epi f$ kümesinin $(x, f(x))$ noktasındaki teğet konisi $f'(x, \cdot)$ yönlü türev fonksiyonunun epigrafıdır. Yani;

$$T_{epif}(x, f(x)) = \{(d, r) \mid f'(x, d) \leq r\} \tag{3.1.25}$$

olur.

Kanıt. (i) Normal koninin tanımı gereği, $(s, -1) \in N_{epif}(x, f(x))$ olması için gerek ve yeter koşul $\forall (y, r) \in epif$ için $\langle (s, -1), (y, r) - (x, f(x)) \rangle \leq 0$ olmasıdır. Yani,

$$\begin{aligned}
(s, -1) \in N_{epif}(x, f(x)) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall (y, r) \in epif \text{ için } \langle (s, -1), (y, r) - (x, f(x)) \rangle \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \forall (y, r) \in epif \text{ için } \langle s, y - x \rangle + (-1).[r - f(x)] \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \forall (y, r) \in epif \text{ için } \langle s, y - x \rangle + f(x) \leq r
\end{aligned}$$

yazılabilir. O halde özel olarak $\forall y \in \mathbb{R}^n$ için $(y, f(y)) \in epif$ olduğundan son yazılışa denk olarak

$$(s, -1) \in N_{epif}(x, f(x)) \Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}^n \text{ için } \langle s, y - x \rangle + f(x) \leq f(y)$$

yazılabilir. O halde,

$$\begin{aligned}(s,-1)\in N_{epif}(x,f(x)) &\Leftrightarrow \forall y\in\mathbb{R}^n \text{ için } \langle s,y-x\rangle + f(x)\leq f(y)\\ &\Leftrightarrow s\in\partial f(x)\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $(s,-1)$ vektörleri $epif$'in $(x,f(x))$'teki normal konisinin taban vektörü gibi düşünülebilir. Yani $\lambda\geq 0$ için,

$$\begin{aligned}\langle\lambda(s,-1),(y,r)-(x,f(x))\rangle\leq 0 &\Leftrightarrow \langle\lambda s,y-x\rangle+(-\lambda)[r-f(x)]\leq 0\\ &\Leftrightarrow \lambda\langle s,y-x\rangle-\lambda r+\lambda f(x)\leq 0\\ &\Leftrightarrow \langle s,y-x\rangle+f(x)\leq r\end{aligned}$$

olduğundan,

$$N_{epif}(x,f(x))=\{\lambda(s,-1)\mid s\in\partial f(x),\ \lambda\geq 0\}$$

elde edilir.

(ii) $epif$'in teğet konisi, normal konisinin poları olduğundan, $T_{epif}(x,f(x))$ kümesi $\forall s\in\partial f(x)$ ve $\forall\lambda\geq 0$ için $\langle(\lambda s,-\lambda),(d,r)\rangle\leq 0$ eşitsizliğini sağlayan $(d,r)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ vektörlerinin kümesidir. Yani;

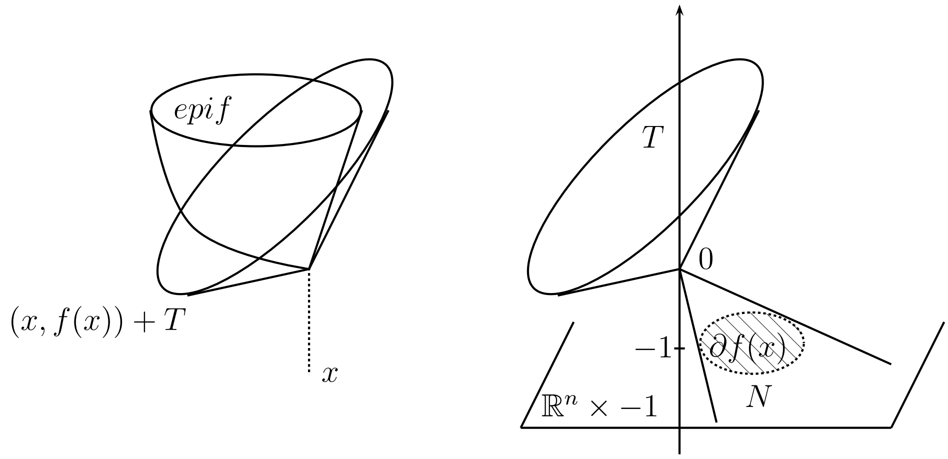
$$\begin{aligned}T_{epif}(x,f(x)) &= \{(d,r)\mid\langle(\lambda s,-\lambda),(d,r)\rangle\leq 0,\ \forall s\in\partial f(x),\forall\lambda\geq 0\}\\ &= \{(d,r)\mid\langle\lambda s,d\rangle-\lambda r\leq 0,\ \forall s\in\partial f(x),\forall\lambda\geq 0\}\\ &= \{(d,r)\mid\lambda\langle s,d\rangle-\lambda r\leq 0,\ \forall s\in\partial f(x),\forall\lambda\geq 0\}\\ &= \{(d,r)\mid\langle s,d\rangle\leq r,\ \forall s\in\partial f(x)\}\\ &= \{(d,r)\mid\sup_{s\in\partial f(x)}\langle s,d\rangle\leq r\}\\ &= \{(d,r)\mid f'(x,d)\leq r\}\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece istenen gösterilmiş olur. □

Şimdi keyfi bir $x\in\mathbb{R}^n$ verildiğinde, f fonksiyonunun $f(x)$-altdüzey kümesi

$$Sf(x):=\{y\in\mathbb{R}^n\mid f(y)\leq f(x)\}$$

gözönüne alınsın. Bu küme $\partial f(x)$ ile yakından ilişkilidir.



Şekil 3.11: Teğet ve normal koniler kullanılarak subdiferansiyelin elde edilmesi

Yardımcı Teorem 3.1.16. *[4, 5] $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyonu verilsin. Bu durumda her bir $x \in \mathbb{R}^n$ için,*

$$T_{Sf(x)}(x) \subseteq \{d \mid f'(x, d) \leq 0\} \tag{3.1.26}$$

kapsaması sağlanır.

Kanıt. Keyfi $s \in Sf(x)$ ve $t > 0$ alınsın ve $d := t(y-x)$ tanımlansın. Böylece $d \in \mathbb{R}^+[Sf(x) - x]$ olur. $y \in Sf(x)$ olduğundan $f(y) - f(x) \leq 0$'dır. Buradan,

$$0 \geq t(f(y) - f(x)) = \frac{f(x + (y-x)) - f(x)}{1/t} = \frac{f(x + \frac{d}{t}) - f(x)}{1/t}$$

elde edilir. Üstelik

$$f'(x, d) = \inf_{k>0} \left\{ \frac{f(x + kd) - f(x)}{k} \right\}$$

olduğundan $1/t = k$ denirse,

$$0 \geq \frac{f(x + kd) - f(x)}{k} \geq \inf_{k>0} \left\{ \frac{f(x + kd) - f(x)}{k} \right\} = f'(x, d)$$

bulunur. O halde $f'(x, d) \leq 0$'dır yani $d \in \{d \mid f'(x, d) \leq 0\}$ olur. Böylece,

$$\mathbb{R}^+[Sf(x) - x] \subseteq \{d \mid f'(x, d) \leq 0\} \tag{3.1.27}$$

elde edilir. $f'(x,\cdot)$ kapalı bir fonksiyon olduğundan, 0-altdüzey kümesi olan $\{d \mid f'(x,d) \leq 0\}$ kapalı bir kümedir. Buna göre,

$$T_{Sf(x)}(x) = cl\left(\mathbb{R}^+[Sf(x) - x]\right)$$

olduğundan (3.1.27)'da her iki tarafın kapanışını alırsak,

$$T_{Sf(x)}(x) \subseteq \{d \mid f'(x,d) \leq 0\}$$

sonucuna ulaşılır. □

Önerme 3.1.17. *[4, 5] $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyonu verilsin ve $\exists x_0 \in \mathbb{R}^n$ için $g(x_0) < 0$ olsun. Bu durumda,*

$$cl\{z \mid g(z) < 0\} = \{z \mid g(z) \leq 0\} \tag{3.1.28}$$

$$int\{z \mid g(z) \leq 0\} = \{z \mid g(z) < 0\}$$

$$bd\{z \mid g(z) \leq 0\} = \{z \mid g(z) = 0\}$$

eşitlikleri geçerlidir.

Teorem 3.1.18. *[4, 5] $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveks ve $0 \notin \partial f(x)$ olsun. Bu durumda,*

$$T_{Sf(x)}(x) = \{d \in \mathbb{R}^n \mid f'(x,d) \leq 0\}$$

olur.

Kanıt. $0 \notin \partial f(x)$ olduğundan $\exists d \in \mathbb{R}^n$ için $0 = \langle 0, d\rangle > f'(x,d)$ olmalıdır. Öyleyse bu $d \in \mathbb{R}^n$ için,

$$f'(x,d) = \inf_{t>0} \frac{f(x+td) - f(x)}{t} < 0$$

olur. Dolayısıyla yeterince küçük bir $t > 0$ sayısı için,

$$\frac{f(x+td) - f(x)}{t} < 0 \ \Rightarrow \ f(x+td) < f(x)$$

elde edilir. Buna göre $(x+td) \in Sf(x)$'tir. Diğer taraftan

$$d = \frac{1}{t}[(x+td) - x]$$

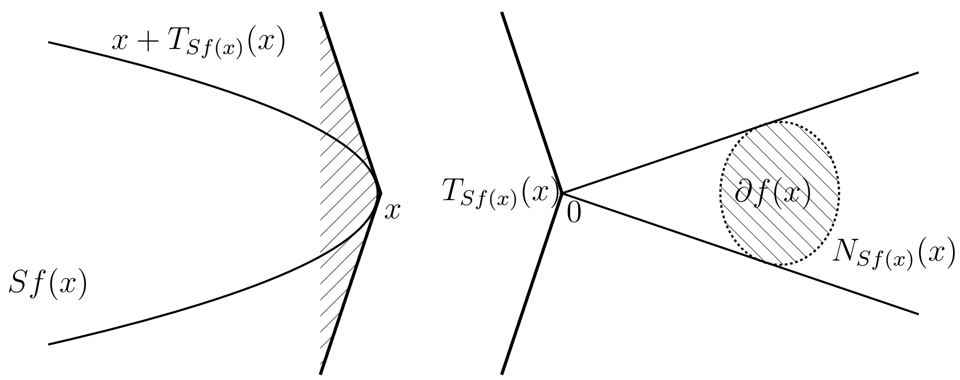
formunda yazılırsa $d \in \mathbb{R}^+[Sf(x) - x]$ olur. Böylece $d \in \{d \mid f'(x,d) < 0\}$ iken $d \in \mathbb{R}^+[Sf(x) - x]$ elde edilmiş olur. Yani,

$$d \in \{d \mid f'(x,d) < 0\} \subseteq \mathbb{R}^+[Sf(x) - x]$$

olur. Her iki tarafın kapanışı alınırsa,$f'(x,d) < 0$ olan en az bir $d \in \mathbb{R}^n$ var olduğundan (3.1.28) eşitliğinden

$$\{d \mid f'(x,d) \leq 0\} \subseteq cl\left(\mathbb{R}^+[Sf(x) - x]\right) = T_{Sf(x)}(x)$$

bulunur. Kapsamanın diğer yönü ise Yardımcı Teorem 3.1.16'de verilmişti. O halde istenen eşitlik elde edilmiş olur. $\square$



Şekil 3.12: Alt-düzey kümesi için teğet ve normal koniler kullanılarak subdiferansiyelin elde edilmesi

3.2 Subdiferansiyelin Yerel Özellikleri

Şimdi gradient kavramının genellemesi olarak kabul edilen $\partial f(x)$ subdiferansiyelinin verilen bir noktadaki bazı özellikleri incelenecektir.

3.2.1 Birinci Mertebeden Yaklaşımlar

$f'(x,\cdot)$ yönlü türev fonksiyonu $\partial f(x)$ kümesinin destek fonksiyonu olduğu gösterilmişti. Yani;

$$f'(x,d) = \sup_{s\in\partial f(x)} \langle s,d\rangle \text{ 'dir.}$$

Üstelik $\partial f(x)$ kompakt konveks bir küme olduğundan her bir $d \in \mathbb{R}^n$ için

$$f'(x,d) = \langle s_d, d\rangle$$

olacak şekilde $\exists s_d \in \partial f(x)$ subgradienti vardır. O halde,

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(x+td)-f(x)}{t} = \langle s_d, d\rangle$$

eşitliğinden yola çıkılarak $\forall d \in \mathbb{R}^n$ ve $t \to 0^+$ $\varepsilon_d(t) \to 0$ olmak üzere

$$f(x+td) = f(x) + t\langle s_d, d\rangle + \varepsilon_d(t) \tag{3.2.29}$$

eşitliği yazılabilir. Böylelikle sonlu ve konveks fonksiyonlar için birinci mertebeden yönlü bir yaklaşımın varlığı gösterilmiş olur.

Yardımcı Teorem 3.2.1. *[4, 5] $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon ve $x \in \mathbb{R}^n$ olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ sayısı için,*

$$\|h\| < \delta \text{ iken } |f(x+h) - f(x) - f'(x,h)| \leq \varepsilon.\|h\| \tag{3.2.30}$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır.

Kanıt. $x \in \mathbb{R}^n$ verilsin. Öncelikle (3.2.30) gerektirmesini sağlayacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısının var olmadığı kabul edilsin. Yani $\exists\varepsilon_0 > 0$ ve her bir $\delta > 0$ sayısı için

$$|f(x+h_\delta) - f(x) - f'(x,h_\delta)| > \varepsilon_0.\|h_\delta\|$$

olacak şekilde $\|h_\delta\| \leq \delta$ olan $\exists h_\delta \in \mathbb{R}^n$ var olsun. Özel olarak $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\delta = \frac{1}{k}$ seçilirse $\|h_k\| := t_k \leq \frac{1}{k}$ olan ve

$$|f(x+h_k) - f(x) - f'(x,h_k)| > \varepsilon_0 t_k$$

olacak şekilde bir $(h_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ sınırlı dizisi vardır. Şimdi genelliği bozmadan (h_k) yakınsak kabul edilsin ve $\dfrac{h_k}{t_k} \to d$ ve $\|d\| = 1$ olan $d \in \overline{B}(0,1)$ ele alınsın. f konveks olduğundan yerel Lipschitz 'dir. Buna göre f 'in x noktasındaki yerel Lipschitz sabiti L olsun. Buradan

$$\begin{aligned}
\varepsilon_0 t_k &< |f(x+h_k) - f(x) - f'(x,h_k)| \\
&\leq |f(x+h_k) - f(x+t_kd)| + |f(x+t_kd) - f(x) - f'(x,t_kd)| + |f'(x,t_kd) - f'(x,h_k)| \\
&\leq L\|h_k - t_kd\| + |f(x+t_kd) - f(x) - f'(x,t_kd)| + L\|t_kd - h_k\| \\
&= 2L\|h_k - t_kd\| + |f(x+t_kd) - f(x) - f'(x,t_kd)|
\end{aligned}$$

olduğuna göre eşitsizliğin her iki tarafı önce $t_k > 0$ sayısına bölünüp daha sonra $t_k \to 0^+$ için limit alınırsa

$$\varepsilon_0 < 2L\left\|\lim_{t_k\to 0^+}\frac{h_k}{t_k} - d\right\| + \left|\lim_{t_k\to 0^+}\frac{f(x+t_kd) - f(x)}{t_k} - f'(x,t_kd)\right|$$

ve böylece

$$\varepsilon_0 \leq 2L\|d - d\| + |f'(x,t_kd) - f'(x,t_kd)|$$

elde edilir. Yani $\varepsilon_0 \leq 0$ bulunur ki bu $\varepsilon_0 > 0$ oluşu ile çelişir. O halde varsayım yanlış, dolayısıyla gerektirme doğrudur. □

Uyarı 3.2.2. *(3.2.30) ile verilen ifade* $\|h\| \to 0$ *iken* $\dfrac{o(\|h\|)}{\|h\|} \to 0$ *olmak üzere*

$$f(x+h) = f(x) + f'(x+h) + o(\|h\|) \tag{3.2.31}$$

şeklinde yazılabilir. Buna göre (3.1.20) ile (3.2.31) karşılaştırıldığında,

(i) h *yerine* $t > 0$ *olmak üzere* td

(ii) $f'(x,h)$ *yerine* $\exists s_d \in \partial f(x)$ *için* $t\langle s, d\rangle$

kullanıldığı gözlemlenebilir. Burada s_d vektörü $\langle s, d\rangle$ iç çarpımını maksimize eden subgradientlerden biridir. O halde böyle bir s_d vektörü $\partial f(x)$ 'in d ile belirlenen yüzündedir. Üstelik Önerme 1.3.11 gereğince d vektörü $\partial f(x)$ kümesinin s_d 'deki normal konisinin elemanıdır.

Sonuç 3.2.3. *$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Herhangi bir $x \in \mathbb{R}^n$ için*

$$s \in F_{\partial f(x)}(h) \quad yada \quad d \in N_{\partial f(x)}(s)$$

denk koşullarından biri sağlandığında

$$f(x+h) = f(x) + f'(x+h) + o(\|h\|)$$

elde edilir.

Uyarı 3.2.4. *$\partial f(x)$ kompakt olduğundan sıfırdan farklı her bir $h \in \mathbb{R}^n$ vektörü boştan farklı bir*

$$F_{\partial f(x)}(h) = \{s \in \partial f(x) \mid \langle s, h\rangle = f'(x, h)\}$$

biçiminde h tarafından ortaya çıkarılmış yüz ortaya koyar. Böylece h vektörleri $\mathbb{R}^n - \{0\}$ da dolaştıkça ortaya konan yüzler $\partial f(x)$ kümesinin sınırını oluştururlar. Çünkü $\partial f(x)$ kapalı ve konveks olduğundan

$$bd(\partial f(x)) = \bigcup \{F_{\partial f(x)}(h) \mid h \in \mathbb{R}^n - \{0\}\}$$

olur. Burada eğer $\partial f(x)$ kümesinin yalnızca bir yüzü varsa yani $\partial f(x)$ tek bir elemandan oluşuyorsa her $d \in \mathbb{R}^n$ için

$$f'(x, d) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x+td) - f(x)}{t} = \langle s, d\rangle$$

olacak şekilde tek bir $s \in \mathbb{R}^n$ vardır. Bu ise f 'in x noktasında yönlü türevlenebilir olduğunu gösterir. Dahası d ve t sırasıyla $-d$ ve $-t$ ile değiştirilirse, f 'in x noktasında Gateaux türevlenebilir olduğu görülür. Gerçekten;

$$\begin{aligned}
\lim_{k \to 0^-} \frac{f(x+kd) - f(x)}{k} &= \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x-td) - f(x)}{-t} \\
&= -\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x+t(-d)) - f(x)}{t} \\
&= -\langle s, -d\rangle = \langle s, d\rangle
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x+td)-f(x)}{t}=\lim_{t\to 0^-}\frac{f(x+td)-f(x)}{t}=\langle s,d\rangle$$

bulunur. O halde f x noktasında Gateaux türevlenebilirdir.

Sonuç 3.2.5. *[4, 5] $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ konveks fonksiyonu verilsin ve $x\in\mathbb{R}^n$ olsun. Eğer f fonksiyonu x noktasında Gateaux türevlenebilir ise, x noktasındaki tek subgradienti $\nabla f(x)$ 'tir. Tersine eğer $\partial f(x)=\{s\}$ biçiminde tek elemanlı ise, f fonksiyonu x noktasında Frechet türevlenebilirdir ve $\nabla f(x)=s$ 'dir.*

Kanıt. f Gateaux türevlenebilir ise

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x+td)-f(x)}{t}$$

limiti vardır ve üstelik

$$\mathbb{R}^n\ni d\mapsto G(d):=\lim_{t\to 0}\frac{f(x+td)-f(x)}{t}$$

fonksiyonu sürekli ve lineer bir fonksiyondur. O halde her bir $d\in\mathbb{R}^n$ için $G(d)=\langle s,d\rangle$ olacak şekilde tek bir $s\in\mathbb{R}^n$ vardır. Yani her $d\in\mathbb{R}^n$ için

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x+td)-f(x)}{t}=\langle s,d\rangle$$

olur. O halde her $d\in\mathbb{R}^n$ için

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x+td)-f(x)}{t}=\langle s,d\rangle$$

olacağından

$$\partial f(x)=\{p\in\mathbb{R}^n\mid \forall d\in\mathbb{R}^n \text{ için } \langle p,d\rangle\leq f'(x,d)\}=\{s\}$$

elde edilir. Yani subdiferansiyel tek elemanlıdır ki bu eleman da $\nabla f(x)$ 'tir.

Tersine $\partial f(x)=\{s\}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} N_{\partial f(x)}(s) &= \{h\mid \forall s'\in\partial f(x) \text{ için } \langle h,s'-s\rangle\leq 0\}\\ &= \{h\mid \langle h,s-s\rangle\leq 0\}\\ &= \{h\mid \langle h,0\rangle\leq 0\}=\mathbb{R}^n \end{aligned}$$

olduğuna göre Sonuç 3.2.3 gereğince her bir $h \in N_{\partial f(x)}(s) = \mathbb{R}^n$ için

$$f(x+h) = f(x) + f'(x,h) + o(\|h\|)$$

elde edilir. Buradan $D(h) := \langle s, h\rangle$ olarak tanımlanırsa,

$$f'(x,h) = \sup_{s' \in \partial f(x)} \langle s', h\rangle = \sup_{s' \in \{s\}} \langle s', h\rangle = \langle s, h\rangle = D(h)$$

olduğuna göre

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - D(h)}{\|h\|} = 0$$

olur. Yani f fonksiyonu x noktasında Frechet türevlenebilirdir. □

Uyarı 3.2.6. *Eğer $\{d_1, d_2, \ldots, d_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ $\mathbb{R}^n$'nin bir tabanı olmak üzere, her bir $i = 1, 2, \ldots, k$ için*

$$f'(x, d_i) = -f'(x, -d_i)$$

oluyorsa f x noktasında türevlenebilirdir. Özel olarak $\mathbb{R}^n$ 'nin standart tabanı $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ alınırsa her bir $i = 1, 2, \ldots, k$ için

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = f'(x, e_i) = -f'(x, -e_i)$$

kısmi türevlerinin varlığı, konveks f fonksiyonunun x noktasındaki türevlenebilirliğini garanti eder.

Subdiferansiyelin tek vektörden oluşmadığı genel duruma bakıldığında, ortaya çıkarılan yüzleri tanımlamak için alternatif bi yol vardır: $f'(x, \cdot)$ sublineer olduğundan kendisinin subdiferansiyeli vardır. İşte bu subdiferansiyeller $\partial f(x)$ 'in ortaya çıkarılan yüzlerini oluşturular.

Önerme 3.2.7. *[4, 5] $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun ve $x \in \mathbb{R}^n$ noktası ile $d \in \mathbb{R}^n$ yönü verilsin. Bu durumda, f 'in x noktasındaki subdiferansiyelinin d yönünde ortaya çıkarılmış yüzü, f'in x noktasındaki yönlü türev fonksiyonunun d 'deki subdiferansiyeline eşittir. Yani;*

$$F_{\partial f(x)}(d) = \partial[f'(x, \cdot)](d)$$

olur.

Kanıt. $s \in F_{\partial f(x)}(d)$ alınsın. $\sigma_{\partial f(x)}(d) = f'(x, d)$ olduğuna göre

$$f'(x, d) - \langle s, d\rangle = 0$$

olur. Ayrıca $s \in \partial f(x)$ olduğuna göre her $d' \in \mathbb{R}^n$ için

$$\langle s, d'\rangle \leq f'(x, d')$$

elde edilir. Buradan her $d' \in \mathbb{R}^n$ için

$$f'(x, d') \geq \langle s, d'\rangle + f'(x, d) - \langle s, d\rangle \tag{3.2.32}$$

ve böylece

$$f'(x, d') \geq f'(x, d) + \langle s, d' - d\rangle$$

elde edilir. O halde $s \in \partial[f'(x, \cdot)](d)$ bulunur.

Tersine $s \in \partial[f'(x, \cdot)](d)$ alınsın. O halde her $d' \in \mathbb{R}^n$ için

$$f'(x, d') \geq f'(x, d) + \langle s, d' - d\rangle$$

olur. Ayrıca $d'' = d' - d$ denirse $f'(x, \cdot)$ sublineer olduğundan alt toplamsallık özelliğinden

$$\begin{aligned} f'(x, d') &= f'(x, (d' - d) + d) \\ &\leq f'(x, d' - d) + f'(x, d) \\ &= f'(x, d'') + f'(x, d) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla her $d', d'' \in \mathbb{R}^n$ için

$$f'(x, d'') + f'(x, d) \geq f'(x, d') \geq f'(x, d) + \langle s, d''\rangle$$

ve böylelikle her bir $d'' \in \mathbb{R}^n$ için

$$f'(x, d'') \geq \langle s, d''\rangle$$

bulunur. O halde $s \in \partial f(x)$ 'tir. Ayrıca (3.2.32) eşitsizliğinde $d' = 0$ alınırsa

$$f'(x, 0) \geq f'(x, d) + \langle s, -d\rangle$$

olduğundan

$$f'(x,d) \leq \langle s,d \rangle$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin ters yönü her zaman geçerli olduğundan özel olarak $d \in \mathbb{R}^n$ için $f'(x,d) = \langle s,d \rangle$ olur ki bu $s \in F_{\partial f(x)}(d)$ olduğunu gösterir. Böylece istenen eşitlik gösterilmiş olur. □

3.2.2 Konveks Fonksiyonların Minimal Noktaları

Bu kesimde subdiferansiyel yardımıyla bir fonksiyonun minimal noktalarının karekterizasyonu yapılacaktır. Subdiferansiyelin tanımından aşağıdaki temel sonuç hemen verilebilir:

Teorem 3.2.8. *[4] $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyonu için aşağıdaki özellikler denktir:*

(i) $x \in \mathbb{R}^n$ f 'in global minimum noktasıdır. Yani her $y \in \mathbb{R}^n$ için

$$f(y) \geq f(x) \text{ 'tir}$$

(ii) $0 \in \partial f(x)$ 'tir.

(iii) Her bir $d \in \mathbb{R}^n$ için $f'(x,d) \geq 0$ 'dır.

Kanıt. Öncelikle ilk iki koşulun denkliği gösterilsin

$$\begin{aligned} \forall y \in \mathbb{R}^n \text{ için } f(y) \geq f(x) &\Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}^n \text{ için } f(y) \geq f(x) + \langle 0, y-x \rangle \\ &\Leftrightarrow 0 \in \partial f(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} 0 \in \partial f(x) &\Leftrightarrow \forall d \in \mathbb{R}^n \text{ için } \langle 0, d \rangle \leq f'(x,d) \\ &\Leftrightarrow \forall d \in \mathbb{R}^n \text{ için } f'(x,d) \geq 0 \end{aligned}$$

olduğundan (ii) ile (iii) denkliği de gösterilmiş olur. □

$0 \in \partial f(x)$ ise x noktası **kritik nokta** olarak adlandırılabilir. Ayrıca teoremde verilen $(i) \Leftrightarrow (iii)$ denkliği; f 'in x noktasında minimal olması için gerek ve yeter koşulun $f'(x, \cdot)$ fonksiyonunun 0 'da minimal olması anlamına gelmektedir. Burada şu noktayı vurgulamak gerekir: x noktası f fonksiyonunun bir yerel minimumu ise (iii) koşulu yine sağlanmaktadır. O halde $(i) \Leftrightarrow (iii)$ denkliğinden dolayı x noktası f 'in global minimumu olacaktır. Böylece konveks bir fonksiyon için yerel minimum nokta aslında global minimum noktayı verecektir.

Tanım 3.2.9. *[4] $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $\partial f(x)$ 'in birden fazla elemana sahip olduğu yani f 'in türevlenemediği x noktasına f 'in* ***köşe noktası*** *adı verilir.*

Uyarı 3.2.10. *$0 \in \partial f(x)$ özelliği analizden bilinen $\nabla f(x) = 0$ şartının bir genelleştirilmiş halidir. Bir konveks fonksiyon tanım kümesinin hemen hemen her noktasında türevlenebilirdir ancak bu durum konveks bir fonksiyonun minimum noktasında bir gradiente sahip olacağı anlamnına gelmez. x noktası hakkındaki bilgiler arttıkça onun bir köşe noktası olup olmadığı daha kolay belirlenebilir. Örneğin bir kritik noktanın köşe noktası olma ihtimali herhangi bir x noktasına göre oldukça yüksektir.*

3.2.3 Konveks Fonksiyonlar İçin Ortalama Değer Teoremleri

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyonu ve $x \neq y \in \mathbb{R}^n$ noktaları verilsin. Buna göre bu kesimde şu soruların yanıtları aranacaktır: İlk olarak f'in $[x, y]$ doğru parçası üzerindeki subdiferansiyeli biliniyorsa $f(y) - f(x)$ farkı hesaplanabilir mi? İkinci soru ise, f fonksiyonu subdiferansiyelinin integrali olarak ifade edilebilir mi? Bu sorular ortalama değer teoremlerinin amacını ortaya koyar.

Bu problemler f fonksiyonu $[x, y]$ doğru parçası üzerine indirgenerek çözülecektir. Bunun göre, her $t \in [0, 1]$ için

$$\varphi(t) := f(ty + (1 - t)x)$$

fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda

$$\varphi(1) - \varphi(0) = f(y) - f(x)$$

olur. Önce φ fonksiyonunun t'deki subdiferansiyeli, f 'in $ty + (1-t)x$ noktasındaki subdiferansiyeli cinsinden nasıl hesaplanacağı gösterilecektir.

$x \neq y \in \mathbb{R}^n$ seçildikten sonra sabitlenen noktalar olmak üzere her $t \in [0,1]$ için

$$x_t := ty + (1-t)x$$

noktası tanımlansın.

Yardımcı Teorem 3.2.11. *[4] $\varphi(t) = f(x_t)$ fonksiyonu için*

$$\begin{aligned} \partial\varphi(t) &= \{\langle s, y-x\rangle \mid s \in \partial f(x_t)\} \\ &= \langle \partial f(x_t), y-x\rangle \end{aligned}$$

olur.

Kanıt. φ fonksiyonunun t noktasındaki sol ve sağ türevleri hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \varphi'_+(t) &= \lim_{k\to 0^+} \frac{\varphi(k+t) - \varphi(t)}{k} \\ &= \lim_{k\to 0^+} \frac{f((k+t)y + (1-t-k)x) - f(ty + (1-t)x)}{k} \\ &= \lim_{k\to 0^+} \frac{f(ty + (1-t)x + k(y-x)) - f(ty + (1-t)x)}{k} \\ &= \lim_{k\to 0^+} \frac{f(x_t + k(y-x)) - f(x_t)}{k} \\ &= f'(x_t, y-x) \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde

$$\varphi'_-(t) = \lim_{k\to 0^-} \frac{f(x_t + k(y-x)) - f(x_t)}{k} = -f'(x_t, -(y-x))$$

bulunur. Diğer taraftan

$$f'(x_t, y-x) = \max_{s\in\partial f(x_t)} \langle s, y-x\rangle \quad \text{ve} \quad -f'(x_t, -(y-x)) = \min_{s\in\partial f(x_t)} \langle s, y-x\rangle$$

olduğundan

$$\partial\varphi(t) = \left[\varphi'_-(t), \varphi'_+(t)\right] = \{\langle s, y-x\rangle \mid s \in \partial f(x_t)\}$$

elde edilir. □

Uyarı 3.2.12. *Sayılabilir bir küme dışında φ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde türevlenebilirdir. Ancak bu f'in $[x,y]$ doğru parçası üzerinde sayılabilir nokta dışında türevlenebilir olduğu anlamına gelmez. Örneğin; $f(x,y) = |x|$ fonksiyonu $a = (0,0)$ ve $b = (0,1)$ olmak üzere $[a,b]$ doğru parçasının tamamı üzerinde türevlenebilir olmayan bir fonksiyondur. Yukarıdaki önermede asıl garanti edilen $\partial f(x_t)$ 'nin $d = y-x$ yönünde hemen hemen her $t \in [0,1]$ için 0-genişliğe sahip olduğudur. Yani;*

$$f'(x_t, y-x) + f'(x_t, x-y) = 0 \text{ 'dır.}$$

Teorem 3.2.13. *[4] $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon ve birbirinden farklı $x, y \in \mathbb{R}^n$ noktaları verilsin. Bu durumda $\exists t \in (0,1)$ ve $\exists s \in \partial f(x_t)$ için*

$$f(y) - f(x) = \langle s, y-x \rangle$$

olur. Diğer bir deyişle

$$f(y) - f(x) \in \bigcup_{t\in(0,1)} \{\langle \partial f(x_t), y-x \rangle\}$$

yazılabilir.

Kanıt. $t \in [0,1]$ için $\varphi(t) = f(ty + (1-t)x)$ fonksiyonundan yararlanarak

$$\psi(t) := \varphi(t) - \varphi(0) - t[\varphi(1) - \varphi(0)]$$

fonksiyonu oluşturulsun. ψ 'nin konveks olduğu tanımlanışı gereği açıktır. Üstelik,

$$\begin{aligned}
\psi'_+(t) &= \lim_{k\to0^+} \frac{\psi(t+t) - \psi(t)}{k} \\
&= \lim_{k\to0^+} \frac{\varphi(t+k) - \varphi(0) - (t+k)[\varphi(1) - \varphi(0)] - \varphi(t) + \varphi(0) + t[\varphi(1) - \varphi(0)]}{k} \\
&= \lim_{k\to0^+} \frac{\varphi(t+k) - \varphi(t) - k[\varphi(1) - \varphi(0)]}{k} \\
&= \lim_{k\to0^+} \frac{\varphi(t+k) - \varphi(t)}{k} - \lim_{k\to0^+} [\varphi(1 - \varphi(0))] \\
&= \varphi'_+(t) - [\varphi(1 - \varphi(0))]
\end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\partial\psi(t) = \partial\varphi(t) - [\varphi(1 - \varphi(0))]$$

bulunur. Diğer yandan ψ konveks olduğundan $[0,1]$ üzerinde süreklidir ve $\psi(0) = \psi(1) = 0$ 'dır. O halde en az bir $t \in (0,1)$ için $\psi(t)$ minimum değerini alır. Teorem 3.2.8 gereğince bu $t \in (0,1)$ için $0 \in \partial\psi(t)$ 'dir. O halde

$$0 \in \varphi(t) - [\varphi(1) - \varphi(0)] = \{\langle s, y - x\rangle \mid s \in \partial f(x_t)\} - [\varphi(1) - \varphi(0)]$$

olduğundan $\exists s \in \partial f(x_t)$ için

$$0 = \langle s, y - x\rangle - [\varphi(1) - \varphi(0)]$$

olur. Böylece $\exists s \in \partial f(x_t)$ için

$$\langle s, y - x\rangle = \varphi(1) - \varphi(0) = f(y) - f(x)$$

elde edilir. □

Yukarıda verilen ortalama değer teoremi integral formunda da verilebilir.

Teorem 3.2.14. *[4] $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda $x, y \in \mathbb{R}^n$ için*

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 \langle \partial f(x_t), y - x\rangle dt$$

olur.

Kanıt. $\varphi(t) = f(x_t)$ biçiminde tanımlanan φ fonksiyonu konveks olduğundan $intdom\varphi = (0,1)$ aralığının hemen hemen her noktasında türevlenebilirdir. Dolayısıyla diferansiyel ve integral hesabının temel teoreminden

$$\int_0^1 \partial\varphi(t)dt = \varphi(1) - \varphi(0)$$

olur. Buradan $\partial\varphi(t) = \langle \partial f(x_t), y - x\rangle$ ve $\varphi(1) - \varphi(0) = f(y) - f(x)$ olduğundan

$$\int_0^1 \langle \partial f(x_t), y - x\rangle dt = f(y) - f(x)$$

elde edilir. □

Uyarı 3.2.15. *İntegral formunda verilen ortalama değer teoreminin anlamı şudur: Herhangi bir $t \in [0,1]$ için $s_t \in \partial f(x_t)$ olmak üzere*

$$\int_0^1 \langle s_t, y - x\rangle dt$$

değeri s_t vektörünün seçiminden bağımsızdır ve $f(y) - f(x)$ değerine eşittir.

3.2.4 Destek, Norm ve Minkowski Fonksiyonlarının Subdiferansiyelleri

Bu kesimde iyi bilinen bazı fonksiyonların subdiferansiyelleri hesaplanacaktır.

(i) Destek Fonksiyonu

$\emptyset \neq C \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt konveks bir küme ve σ_C bu kümenin destek fonksiyonu olsun. Bir sonlu sublineer fonksiyon 0 'daki subdiferansiyelinin destek fonksiyonu olduğundan

$$\sigma_{\partial\sigma_C(0)} = \sigma_C$$

olur. O halde

$$\partial\sigma_C(0) = C$$

yazılabilir. Böylece destek fonksiyonunun 0 'daki subdiferansiyeli elde edilmiş olur. Ayrıca sonlu sublineer fonksiyonların 0 'daki yönlü türevleri kendilerine eşit olduklarından

$$(\sigma_C)'(0, \cdot) = \sigma_C = \sigma_{\partial\sigma_C(0)}$$

elde edilir. Şimdi bu bilgiler kullanılarak herhangi bir $x \in \mathbb{R}^n$ için σ_C 'nin x noktasındaki subdiferansiyeli hesaplansın. Önerme 3.1.10 (ii) gereğince

$$\partial\sigma_C(0) = \partial f(x) = C \;\text{ ve }\; f'(x, \cdot) = \sigma_C$$

olacak şekilde bir f sonlu konveks fonksiyonu vardır. Bu nedenle herhangi bir kompakt konveks C kümesi, sonlu ve konveks bir f fonksiyonunun x noktasındaki subdiferansiyeli olarak düşünülebilir. $x \neq 0$ için $\partial f(x) = C$ ve

$$F_{\partial f(x)} = \partial[f'(x, \cdot)]$$

olduğuna göre

$$F_C(\cdot) = \partial\sigma_C(\cdot)$$

elde edilir. Buradan, subdiferansiyel kümesinin destek fonksiyonu yönlü türev olduğundan, her iki tarafın destek fonksiyonu alınırsa

$$\sigma_{F_C} = \sigma_{\partial\sigma_C}$$

ve dolayısıyla

$$\sigma_{F_C} = (\sigma_C)'(x, \cdot)$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\partial \sigma_C(x) = \begin{cases} C & , \quad x = 0 \\ F_C(x) & , \quad x \neq 0 \end{cases}$$

bulunur.

(ii) Norm Fonksiyonu

$\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı herhangi bir $\|\cdot\|$ verilsin. $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ ve $B^* = \{s \mid \langle s, x\rangle \leq \|x\|, \ \forall x \in \mathbb{R}^n\}$ olmak üzere

$$\|x\| = \gamma_B(x) = \sigma_{B^*}(x)$$

olduğu daha önce gösterilimişti. Dolayısıyla destek fonksiyonlarının subdiferansiyeli kullanılırsa $\|\cdot\|$ fonksiyonunun 0 'daki subdiferansiyeli

$$\begin{aligned} \partial \|\cdot\|(0) &= \{s \in \mathbb{R}^n \mid \langle s, \frac{d}{\|d\|}\rangle \leq 1\} \\ &= \{s \in \mathbb{R}^n \mid \max_{\|d\|=1} \langle s, d\rangle \leq 1\} \end{aligned}$$

yazılabilir. Diğer taraftan keyfi bir $x \in \mathbb{R}^n$ için $\partial(\sigma_C(\cdot))(d) = F_C(d)$ olduğuna göre

$$\partial \|\cdot\|(x) = \partial(\sigma_{B^*}(\cdot))(x) = F_{B^*}(x)$$

olacaktır. O halde

$$\begin{aligned} \partial \|\cdot\|(x) = F_{B^*}(x) &= \{s \in B^* \mid \langle s, x\rangle = \sigma_{B^*}(x)\} \\ &= \{s \in B^* \mid \langle s, x\rangle = \|x\|\} \\ &= \{s \in B^* \mid \langle s, \frac{x}{\|x\|}\rangle = 1\} \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$\partial \|\cdot\|(x) = \begin{cases} B^* & , \quad x = 0 \\ bd(B^*) & , \quad x \neq 0 \end{cases}$$

olur. Ayrıca $\|p\|^* = \max_{\|x\|\leq 1}\langle p, x\rangle$ ile tanımlı olduğundan her bir $s \in \partial\|\cdot\|(x)$ için

$$\langle s, x\rangle = \|x\| \;\Rightarrow\; \max_{\|x\|\leq 1}\langle s, x\rangle = 1 \;\Rightarrow\; \|s\|^* = 1$$

olur. Yani herhangi bir x noktasında $\|\cdot\|$ fonksiyonunun tüm subgradientlerinin dual normu 1 'dir.

(iii) Minkowski Fonksiyonu

C kapalı konveks bir küme ve $0 \in intC$ olsun. Bu durumda γ_C sonlu ve konveks bir fonksiyondur. Üstelik

$$C^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle s, x\rangle \leq 1,\ \forall s \in C\}$$

C 'nin polar kümesi olmak üzere $\gamma_C = \sigma_{C^\circ}$ olduğundan

$$\partial\gamma_C(0) = \partial\sigma_{C^\circ}(0) = C^\circ$$

ve böylece

$$(\gamma_C)'(0,\cdot) = (\sigma_{C^\circ})'(0,\cdot) = \sigma_{C^\circ} = \gamma_C$$

bulunur. O halde herhangi bir $x \in \mathbb{R}^n$ için ise

$$\partial\gamma_C(x) = \partial\sigma_{C^\circ}(x) = F_{C^\circ}(x)$$

ve

$$(\gamma_C)'(x,\cdot) = (\sigma_{C^\circ})'(x,\cdot) = \sigma_{F_{C^\circ}(x)}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\partial\gamma_C(x) = \begin{cases} C^\circ & , \quad x = 0 \\ F_{C^\circ}(x) & , \quad x \neq 0 \end{cases}$$

bulunur.

4 KONVEKS ANALİZDE EŞLENİKLİK

Klasik gerçel analizde türevlenebilir bir $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun gradienti önemli bir rol oynar. Gradient,

$$\begin{aligned} s : X \subseteq \mathbb{R}^n &\to S \subseteq \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto s(x) := \nabla f(x) \end{aligned}$$

biçiminde çok değişkenli vektör değerli bir dönüşüm olarak ele alındığında bu dönüşümün tersini bulma oldukça ilginçtir. Yani verilen bir $s \in S$ elemanına karşılık $s = \nabla f(x)$ olacak şekilde bir ve yalnız bir $x \in X$ bulmak her zaman mümkün müdür? Bu sorunun yanıtı genelde olumsuzdur. Herhangi bir dönüşümün tersi her zaman var olmayabilir ancak en azından yerel olarak düşünüldüğünde bir cevap bulunabilir. (Local Inverse Theorem)

Gradient dönüşümünün tersi araştırılırken, geometrik olarak, $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ uzayında $(s, -1)$ vektörüyle belirlenen bir hiperdüzlemin $(x, f(x))$ noktasında f 'in grafiğine teğet olacak şekilde bir $x \in X$ noktasının varlığı araştırılmaktadır. Eğer böyle bir x noktası var ve tek ise anlamlı bir problem elde edilmiş olur.

Analitik olarak ise şu gerçek oldukça önemlidir: ∇f terslenebilir bir dönüşüm ise, tersi de f fonksiyonuna bağlı olarak tanımlanmış özel bir fonksiyonun gradientidir. Gerçekten;

$$x(\cdot) = (\nabla f)^{-1}(\cdot) = \nabla h(\cdot)$$

denirse bu h fonksiyonu

$$\begin{aligned} h : S \subseteq \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ s &\mapsto h(s) := \langle s, x(s) \rangle - f(x(s)) \end{aligned}$$

biçiminde ifade edilebilir. Daha açık olarak, f türevlenebilir bir fonksiyon ve ∇f terslenebilir ise

$$s \mapsto h(s) = \langle s, (\nabla f)^{-1}(s) \rangle - f((\nabla f)^{-1}(s))$$

dönüşümüne f 'in Legendre Dönüşümü denir. Legendre dönüşümünün kuruluşu gereği f'in ve h'ın gradientleri birbirinin tersidir. Yani,

$$s = \nabla f(x) \;\Leftrightarrow\; x = \nabla h(s) \tag{4.0.33}$$

olur. Üstelik h fonksiyonuna Legendre dönüşümünü uygulanırsa f fonksiyonuna geri dönülür. Bu simetri h fonksiyonunun kuruluş ifadesinde görülebilir. Gerçekten; (4.0.33) ifadesiyle ilişkilendirilen x ve s elemanları için

$$f(x) + h(s) = \langle s, x \rangle$$

yazılabilir.

Şimdiye kadar özetlenen tüm bilgiler ∇f^{-1} iyi tanımlı iken geçerlidir. Konveks analiz tüm bunları anlamlı kılan bir yapı ortaya koyar. f konveks bir fonksiyon olduğunda $x \mapsto \nabla f(x)$ gradient dönüşümüne benzer bir dönüşüm olarak $x \mapsto \partial f(x)$ subdiferansiyel küme değerli dönüşümünü karşılık getirir. Bu dönüşümün tersinin bulunması verilen bir s elemanı için $s \in \partial f(x)$ olacak şekilde bir $x \in \mathbb{R}^n$ bulunmasıdır. Üstelik bu x tek olmak zorunda değildir. Böylece küme değerli $(\partial f(x))^{-1}$ dönüşümü elde edilecektir. Bu $x(s)$ elemanının bulunabilmesi için aşağıdaki yol izlenecektir: Öncelikle

$$s \in \partial f(x) \;\Leftrightarrow\; 0 \in \partial f(x) - \{s\}$$

olduğu açıktır. f konveks bir fonksiyon olduğundan,

$$\begin{aligned} 0 \in \partial f(x) - \{s\} \quad &\Leftrightarrow \quad x \text{ noktası } \mathbb{R}^n \text{ üzerinde } f - \langle s, \cdot \rangle \text{ 'nin minimalleştiricisidir.} \\ &\Leftrightarrow \quad f(x) - \langle s, x \rangle = \min_{y \in \mathbb{R}^n} f(y) - \langle s, y \rangle \text{ 'dir.} \end{aligned}$$

Diğer bir deyişle $x(s)$'nin bulunması için

$$\inf\{f(x) - \langle s, x \rangle \mid x \in \mathbb{R}^n\} \tag{4.0.34}$$

probleminin çözümü bulunmalıdır. Dolayısıyla Legendre dönüşümü (4.0.34) ile verilen problemin tek bir çözümü olduğunda iyi tanımlı bir dönüşümdür. Üstelik (4.0.34) problemi ($-\infty$ değeri de dahil olmak üzere) her zaman bir çözüme sahip olduğundan, bu problem iyi bir genelleştirme için bir taban oluşturur.

Özetlemek gerekirse f konveks bir fonksiyon ise (4.0.34) problemi, sonlu bir çözüme sahip olduğu durumda, Legendre dönüşümünü tanımlamak için olası bir yoldur. Dolayısıyla f fonksiyonu

- Türevenebilir (böylece tersi bulunacak bir ∇f var olacaktır),

-Kesin konveks (böylece (4.0.34) probleminin tek çözümü var olacaktır),

-$\nabla f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$ (böylece (4.0.34) problemi her bir $s \in \mathbb{R}^n$ için bir çözüme sahip olacaktır)

koşullarını sağlıyorsa (4.0.34) problemi Legendre dönüşümü olacaktır.

Bu özelliklerin sağlanmadığı diğer durumlarda ise iyi tanımlı bir Legendre dönüşümünden sözedilebilmesi mümkün değildir. Ancak (4.0.34) ile verilen dönüşüm ∇f 'in tersinin genellenmesi anlamında yeni bir tanım olarak alınabilir ve bu tanım konveks olmayan ve (4.0.34) dönüşümünü anlamlı kılan başka fonksiyonlara da genişletilebilir. Eşleniklik kavramı ise işte bu noktada ortaya çıkmış olur. Konveks analizde eşleniklik konusu yukarıdaki gözlemlerin bir sonucu olarak ortaya çıkar ve bir çok kullanım alanına sahiptir.

Bu bölümde eşleniklik kavramı, önce en basit haliyle $\mathbb{R}$ gerçel sayılar uzayı üzerinde tanımlı fonksiyonlar için, sonra daha genel olarak sonlu boyutlu $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı fonksiyonlar için ve son olarak herhangi bir topolojik vektör uzayı üzerinde tanımlı fonksiyonlar için tanıtılacaktır. En temel özellikleriyle incelenecek, subdiferansiyel kavramıyla ilişkisi kurulacak ve eşlenik fonksiyonunun yerel özellikleri araştırılacaktır.

4.1 $\mathbb{R}$ Üzerinde Tanımlı Konveks Fonksiyonların Eşleniği

Bu kesimde $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık olmak üzere $f : I \to \mathbb{R}$ tanımlı fonksiyonların konveksliği için bir karakterizasyon verilecek ve daha sonra I üzerinde tanımlı konveks fonksiyonların eşlenik fonksiyonları tanımlanacaktır. Son olarak eşlenikliğin subdiferansiyelle ilişkisi kurulacak ve eşlenik fonksiyonunun temel özellikleri incelenecektir.

Tanım 4.1.1. *[10] $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık, $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $x_0 \in I$ olsun. Eğer her bir $x \in I$ için $A(x) \leq f(x)$ olacak şekilde bir*

$$A(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$$

*afin fonksiyonu varsa A 'ya **f 'in $\mathbf{x_0}$ noktasındaki destek fonksiyonu** denir. A afin fonksiyonunun grafiğine de **f 'in $\mathbf{x_0}$ noktasındaki destek doğrusu** denir.*

Teorem 4.1.2. *[10] $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda f 'in konveks olması için gerek ve yeter koşul, her bir $x \in (a, b)$ için f 'in x noktasında bir destek doğrusuna sahip olmasıdır.*

Kanıt. Öncelikle f konveks olsun. Keyfi $x_0 \in (a, b)$ ve $m \in [f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$ seçilsin. Bu durumda

$$x > x_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq m$$

$$x < x_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq m$$

olur. Her iki durumda da

$$f(x) - f(x_0) \geq m(x - x_0)$$

elde edilir. Buradan $A(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$ denirse her $x \in (a, b)$ için $f(x) \geq A(x)$ olur ve böylece aranan destek doğrusu elde edilmiş olur.

Tersine (a,b)'nin her noktasında f fonksiyonu bir destek doğrusuna sahip olsun. $x, y \in (a,b)$ ve $\lambda \in [0,1]$ olmak üzere $x_0 = \lambda x + (1-\lambda)y$ noktası oluşturulsun. f 'in x_0'da bir destek fonksiyonu vardır. Bu destek fonksiyonu $A(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} f(x_0) = A(x_0) &= A(\lambda x + (1-\lambda)y) \\ &= \lambda A(x) + (1-\lambda)A(y) \\ &\leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \end{aligned}$$

ve böylece

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

elde edilir. O halde f konvekstir. □

Teorem 4.1.3. *[10] $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon ve $x_0 \in (a,b)$ olsun. Bu durumda f 'in x_0 noktasında türevlenebilir olması için gerek ve yeter koşul f'in x_0 'da tek bir destek doğrusuna sahip olmasıdır. Üstelik bu destek doğrusu*

$$A(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

fonksiyonu ile belirlidir.

Kanıt. Bir önceki teoremin kanıtında ifade edildiği gibi $x_0 \in (a,b)$ noktası alındığında buna karşılık her bir $m \in [f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$ sayısı f'i bu noktada destekleyen bir doğru verir. Eğer x_0 noktasındaki destek doğrusu tek ise bu $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$ olduğunu gösterir. O halde f fonksiyonu x_0 noktasında türevlenebilirdir. Tersine $f'(x_0)$ var olsun. f konveks olduğundan x_0 'da en az bir destek doğrusuna sahiptir. Bu noktadaki destek doğrusunun tekliğinin gösterilmesi için keyfi bir $A(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$ destek fonksiyonu alınsın. Buna göre her $x \in (a,b)$ için $f(x) - f(x_0) \geq m(x - x_0)$ 'dır. Buradan $x_1 < x_0 < x_2$ için,

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq m \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$$

olur. Böylece

$$\lim_{x_1 \to x_0^-} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq m \leq \lim_{x_2 \to x_0^+} \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$$

elde edilir. Yani $f'_-(x_0) \leq m \leq f'_+(x_0)$ 'dır. $f'(x_0)$ var olduğundan

$$f'_-(x_0) = m = f'_+(x_0)$$

olur ki bu durumda m sayısı yani f 'in x_0 noktasındaki destek doğrusu tektir. Dahası bu doğru $A(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ fonksiyonunun grafiğidir. □

Tanım 4.1.4. *[10] $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık, $f : I \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda*

$$\begin{aligned} f^* : I &\to \mathbb{R} \\ y &\mapsto f^*(y) := \sup_{x \in I} [xy - f(x)] \end{aligned} \tag{4.1.35}$$

*ile tanımlı fonksiyona **f 'in eşlenik (conjugate) fonksiyonu** adı verilir.*

Uyarı 4.1.5. *(4.1.35) ile verilen eşlenik fonksiyonu $I^* := \{y \in \mathbb{R} \mid f^*(y) < +\infty\}$ olmak üzere $I^* \subseteq I$ üzerinde tanımlı olarak değerlendirilebilir.*

Tanımlanışı gereği afin fonksiyonların supremumu biçiminde yazılan eşlenik fonksiyonu bu özelliğinden dolayı kapalı ve konveks bir fonksiyondur.

Teorem 4.1.6. *[10] $f : I \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon ise f'in eşleniği $f^* : I^* \to \mathbb{R}$ kapalı ve konvekstir.*

Kanıt. Öncelikle $I^* \neq \emptyset$ olduğu gösterilsin. Eğer $I = \{x_0\}$ ise f konveks olduğundan her bir $y \in \mathbb{R}$ için $A(x) = f(x_0) + y(x - x_0)$ fonksiyonu f 'i destekler. I 'nın tek nokta kümesi olmadığı diğer durumlarda ise $x_0 \in I^\circ$ alınırsa ve $y \in [f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$ seçilirse $A(x) = f(x_0) + y(x - x_0)$ afin fonksiyonu f'i yine x_0'da destekler. Dolayısıyla her durumda öyle bir y elemanı vardır ki $A(x) = f(x_0) + y(x - x_0)$ afin fonksiyonu için

$$f(x) \geq A(x), \quad \forall x \in I$$

olur. O halde $\forall x \in I$ için

$$xy - f(x) \leq x_0 y - f(x_0) \tag{4.1.36}$$

olacak şekilde bir $y \in \mathbb{R}$ vardır. $I^* = \{y \in \mathbb{R} \mid \forall x \in I$ için $xy - f(x) < +\infty\}$ olarak yazılabileceğinden (4.1.36) 'den $I^* \neq \emptyset$ elde edilir.

Diğer taraftan her bir $x \in I$ için $g_x(y) := xy - f(x)$ fonksiyonları afindir. Üstelik $f^*(y) = \sup\limits_{x \in I} g_x(y)$ olduğundan f^* eşlenik fonksiyonu konvekstir.

Son olarak f^* 'ın kapalılığı her bir $r \in \mathbb{R}$ için $S_r f^* : \{y \in I^* \mid f^*(y) \leq r\}$ alt düzey kümelerinin kapalılığı ile gösterilecektir. Keyfi $r \in \mathbb{R}$ ve $\bar{y} \in \overline{S_r f^*}$ alınsın. O halde öyle bir $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq S_r f^*$ dizisi vardır ki $y_n \to \bar{y}$ 'dir. Dolayısıyla her $n \in \mathbb{N}$ için $f^*(y_n) \leq r$ yani, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\sup_{x \in I} [x y_n - f(x)] \leq r$$

olur. Böylece $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in I$ için

$$x y_n - f(x) \leq r$$

ve $n \to \infty$ için limit alınırsa $\forall x \in I$ için

$$x \bar{y} - f(x) \leq r$$

bulunur. O halde $f^*(\bar{y}) \leq r$ yani, $\bar{y} \in S_r f^*$ elde edilir. O halde $\overline{S_r f^*} \subseteq S_r f^*$ olduğundan her bir $S_r f^*$ alt düzey kümesi ve böylece f^* kapalıdır. □

Bir konveks fonksiyonun tanım kümesinin içi üzerinde sürekli olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla sürekliliğin bozulabileceği tek yer tanım kümesinin sınır (uç) noktalarıdır. O halde şu karakterizasyon verilebilir:

Önerme 4.1.7. *[10] $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda f 'in kapalı olması için gerek ve yeter koşul f 'in I aralığının uç noktalarında sürekli olması ve I 'da bulunmayan uç noktalar için de f 'in bu noktalardaki limitinin $+\infty$ olmasıdır.*

Bir konveks fonksiyonun tanım kümesinin her noktasında türevlenebilir olmadığı bilinmektedir. Şimdi, 3. bölümde $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı konveks fonksiyonlar için ele alınan subdiferansiyel kavramının $\mathbb{R}$ üzerindeki fonksiyonlarda kısa bir incelemesi yapılacaktır.

Tanım 4.1.8. *[10] $f : I \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun ve $x \in I$ verilsin. Bu durumda f 'in x noktasındaki destek doğrularının eğimlerinin oluşturduğu kümeye **f 'in x noktasındaki subdiferansiyeli** denir ve $\partial f(x)$ ile gösterilir. Kısaca*

$$\partial f(x) = \{m \in \mathbb{R} \mid \forall y \in \mathbb{R} \text{ için } f(y) \geq f(x) + m(y-x)\}$$

yazılabilir.

Subdiferansiyel küme değerli bir dönüşüm olarak ele alınabilir. Eğer f fonksiyonu her bir $x \in I$ noktasında türevlenebilir ise bu durumda $\partial f : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ fonksiyonu tek değerli olur.

Tanım 4.1.9. *[10] $\Gamma \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kümesi verilsin. Eğer her $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \Gamma$ için*

$$(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \geq 0$$

*oluyorsa Γ 'ya **monoton artan küme** adı verilir. Eğer Γ monoton artan bir küme ve başka bir monoton artan kümenin alt kümesi değilse bu durumda Γ kümesine **maksimal monoton artan küme** adı verilir. Üstelik eğer Γ maksimal monoton artan bir küme ise*

$$\Gamma^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in \Gamma\}$$

kümesi de maksimal monoton artandır.

Teorem 4.1.10. *[10] $f : I \to \mathbb{R}$ konveks ve kapalı bir fonksiyon ise, subdiferansiyeli ∂f 'in grafiği maksimal monoton artandır.*

Kanıt. f konveks olduğundan $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ için

$$f'_-(x_1) \leq f'_+(x_1) \leq f'_-(x_2) \leq f'_+(x_2) \tag{4.1.37}$$

olduğu bilinmektedir. Diğer taraftan f'in bir $x \in I$ noktasındaki subdiferansiyeli

$$\partial f(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid f'_-(x) \leq y \leq f'_+(x)\} \tag{4.1.38}$$

biçiminde yazılabilir. Şimdi $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \partial f$ alınsın. Buna göre $y_1 \in \partial f(x_1)$ ve $y_2 \in \partial f(x_2)$ olur. Eğer $x_1 < x_2$ ise (4.1.37) eşitsizliği ve (4.1.38) 'den

$$y_1 \leq f'_+(x_1) \leq f'_-(x_2) \leq y_2$$

elde edilir. Dolayısıyla $x_2 - x_1 > 0$ ve $y_2 - y_1 \geq 0$ olduğundan

$$(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \geq 0$$

bulunur. Eğer $x_1 = x_2$ ise bu eşitsizliğin sağlandığı açıktır. Son olarak eğer $x_2 < x_1$ ise bu kez

$$y_2 \leq f'_+(x_2) \leq f'_-(x_1) \leq y_1$$

olur ki böylece yine

$$(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \geq 0$$

elde edilir. O halde ∂f monoton artan bir kümedir. Şimdi maksimallik için $(x_1, y_1) \notin \partial f$ iken $(x - x_1)(y - y_1) < 0$ olacak şekilde $\exists (x, y) \in \partial f$ olduğu gösterilmelidir.

$$h(x) = f(x - x_1) + x y_1$$

fonksiyonu tanımlansın. h fonksiyonu da kapalı konvekstir ve üstelik $h(x_1) = f(0) + x_1 y_1$ ve böylece $\partial h(x_1) = \partial f(0) + y_1$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
(x_1, y_1) \notin \partial h \quad &\Leftrightarrow \quad y_1 \notin \partial h(x_1) \\
&\Leftrightarrow \quad y_1 \notin \partial f(0) + y_1 \\
&\Leftrightarrow \quad 0 \notin \partial f(0) \\
&\Leftrightarrow \quad (0, 0) \notin \partial f
\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre maksimallik problemi $(0, 0) \notin \partial f$ iken $xy < 0$ olan bir $(x, y) \in \partial f$ bulma problemine dönüşmüş olur. O halde $(0, 0) \notin \partial f$ kabul edilsin. Kapalılığın Önerme 4.1.7 'de verilen karakterizasyonuna göre,

(i) Her $x \in dom \partial f$ için $x < 0$ ise, I üstten sınırlıdır ve f kapalı olduğundan x'ler bu üst sınıra yaklaşırken $f(x) \to +\infty$ olur. O halde $xy < 0$ olacak şekilde $\exists y \in \partial f(x)$ vardır.

(ii) Her $x \in dom\partial f$ için $x > 0$ ise, I alttan sınırlıdır ve f kapalı olduğundan x'ler bu alt sınıra yaklaşırken $f(x) \to -\infty$ olur. O halde $xy < 0$ olacak şekilde $\exists y \in \partial f(x)$ vardır.

(iii) Eğer $0 \in dom\partial f$ ise $(0,0) \notin \partial f$ olduğundan $0 \notin \partial f(0)$ 'dır. Ancak bu durumda $f(0)$ değeri f'in minimumu olamayacağından $f(x_2) < f(0)$ olan bir $x_2 \in I$ vardır. Eğer $x_2 < 0$ ise $f'_+(x_3) > 0$ olan $\exists x_3 \in [x_2, 0)$ vardır. O halde (4.1.38) 'ten $(x_3, f'_+(x_3)) \in \partial f$ olur. Üstelik $x_3 f'_+(x_3) < 0$ olduğundan aranan eleman bulunmuş olur. Benzer şekilde eğer $x_2 > 0$ ise $f'_+(x_3) < 0$ olan $\exists x_3 \in [x_2, 0)$ bulunabilir ve yine $x_3 f'_+(x_3) < 0$ elde edilir.

Sonuç olarak her durumda istenen eşitsizliği sağlayacak şekilde elemanlar bulunabilir. Böylece ∂f'in maksimal monoton artan bir küme olduğu gösterilmiş olur. $\square$

Teorem 4.1.11. *[10] $f : I \to \mathbb{R}$ kapalı ve konveks bir fonksiyon ise her bir $x, c \in I$ için*

$$f(x) - f(c) = \int_c^x \partial f(s) ds$$

dir.

Şimdi eşlenik fonksiyonu ile ilgili en temel özellikler şu ana kadar verilen ön bilgiler kullanılarak verilecektir.

Teorem 4.1.12. *[10] $f : I \to \mathbb{R}$ kapalı ve konveks olsun. Bu durumda $f^* : I^* \to \mathbb{R}$ eşlenik fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar:*

(i) Her $x \in I$ ve her $y \in I^*$ için $xy \leq f(x) + f^*(y)$ 'dir.

(ii) $xy = f(x) + f^*(y) \Leftrightarrow y \in \partial f(x)$

(iii) $\partial(f^*) = (\partial f)^{-1}$

(iv) $f^{**} = f$

Kanıt. (i) Eşlenik fonksiyonu bir $y \in I^*$ için $f^*(y) = \sup\limits_{x \in I}[xy - f(x)]$ şeklinde tanımlandığından, her $x \in I$ ve her $y \in I^*$ için

$$f^*(y) \geq xy - f(x)$$

ve böylece

$$xy \leq f(x) + f^*(y)$$

bulunur.

(ii) Bir $g : I \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyonu verildiğinde, g'nin bir $x \in I$ noktasında minimum değerini alması için gerek ve yeter koşul $0 \in \partial g(x)$ olmasıdır. Buna göre,

$$-f^*(y) = -\sup_{x \in I}[xy - f(x)] = \inf_{x \in I}[f(x) - xy]$$

olduğundan $g(x) = f(x) - xy$ denirse,

$$\begin{aligned} g \text{ bir } x \in I \text{ noktasında infimum değerini alır} \quad &\Leftrightarrow \quad 0 \in \partial g(x) = \partial f(x) - y \\ &\Leftrightarrow \quad y \in \partial f(x) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$-f^*(y) = f(x) - xy \Leftrightarrow y \in \partial f(x)$$

ve böylece

$$xy = f(x) + f^*(y) \Leftrightarrow y \in \partial f(x)$$

bulunur.

(iii) Bir $x \in I$ alınıp sabitlensin. Her bir $y \in I^*$ için

$$f^*(y) - xy \geq -f(x) \tag{4.1.39}$$

olduğu (i) şıkkından açıktır. (ii) şıkkına göre ise bu eşitsizliğin eşitlik olduğu durumda $y \mapsto f^*(y) - xy$ fonksiyonu minimum değerini alır. Diğer bir deyişle $y \in \partial f(x)$ olduğunda $y \mapsto f^*(y) - xy$ minimum değerini alır. Yani,

$$x \in (\partial f)^{-1}(y) \ \Rightarrow \ y \in \partial f(x) \ \Rightarrow \ 0 \in \partial f^*(y) - x \ \Rightarrow \ x \in \partial f^*(y)$$

ve böylelikle

$$(\partial f)^{-1} \subseteq \partial f^*$$

bulunur. Teorem 4.1.10 'da ∂f 'in maksimal monoton artanlığı verilmişti. Üstelik bu durumda $(\partial f)^{-1}$ de maksimal monoton artandır. Dolayısıyla

$$(\partial f)^{-1} = \partial f^*$$

elde edilir.

(iv) Bir önceki (iii) şıkkı f^* eşlenik fonksiyonuna uygulanırsa

$$\partial(f^{**}) = (\partial f^*)^{-1} = ((\partial f)^{-1})^{-1} = \partial f$$

bulunur. Buradan Teorem 4.1.11 kullanılırsa $\forall x, c \in I$ ve $\forall x, c \in I^{**}$ için,

$$f(x) - f(c) = \int_c^x \partial f(s) ds = f^*(x) - f^*(c)$$

olur. O halde $I = I^{**}$ 'dır. Şimdi $y_0 \in \partial f(c_0)$ olacak şekilde bir $c_0 \in I$ ve $y_0 \in I^*$ alınsın. Buna göre (iii) şıkkından

$$c_0 \in (\partial f)^{-1}(y_0) = \partial(f^*)(y_0)$$

olur. Böylelikle (ii) şıkkından

$$c_0 y_0 = f(c_0) + f^*(y_0) = f^*(y_0) + f^{**}(c_0)$$

yazılabilir. O halde $f(c_0) = f^{**}(c_0)$ elde edilir. $c_0 \in I$ keyfi seçildiğinden $f = f^{**}$ sonucuna ulaşılır.

$\square$

4.2 $\mathbb{R}^n$ Üzerinde Tanımlı Fonksiyonların Eşleniği

Bu kesimde, bir önceki kesimde $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı fonksiyonlar için ele alınan konular $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı fonksiyonlara genişletilecektir.

4.2.1 Tanım ve Yorumlar

Bir f fonksiyonunun eşleniğinin bulunması (4.0.34) probleminde ifade edildiği gibi onun bir pertürbasyonunun minimalleştiricisinin bulunmasıdır. Ancak eşlenik bulunurken kaçınılması gereken iki durum vardır. Birincisi bir $s \in \mathbb{R}^n$ için

$$\inf\{f(x) - \langle s, x\rangle \mid x \in \mathbb{R}^n\} = +\infty$$

olmasıdır. İkincisi ise her bir $s \in \mathbb{R}^n$ için bu infimum değerinin $-\infty$ olmasıdır. Bu iki durumdan kaçınmak için $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ fonksiyonunun

$$\begin{array}{l} (i)\ f \not\equiv +\infty \\ (ii)\ \mathbb{R}^n \text{ üzerinde} f \text{ 'i minorize eden en az bir afin dönüşüm vardır.} \end{array} \tag{4.2.40}$$

koşullarını sağladığı kabul edilecektir.

Tanım 4.2.1. *[4] $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ fonksiyonu (4.2.40) koşullarını sağlasın. Bu durumda*

$$\begin{aligned} f^* : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ s &\mapsto f^*(s) := \sup\{\langle s, x\rangle - f(x) \mid x \in dom f\} \end{aligned}$$

*biçiminde tanımlanan fonksiyona **f 'in eşlenik fonksiyonu** denir.*

Uyarı 4.2.2. *Tanımda verilen supremum bazı durumlarda kolaylık için tüm $\mathbb{R}^n$ üzerinden alınabilir.*

Uyarı 4.2.3. *(4.2.40) koşullarını sağlayan bir f fonksiyonunu eşleniğine götüren $f \mapsto f^*$ dönüşümüne **Legendre-Fenchel Dönüşümü** adı verilir.*

Eşlenik fonksiyonunun tanımından elde edilebilecek ilk gözlem, $\mathbb{R}^n$ üzerindeki iç çarpıma bağlı olmasıdır. İç çarpım değiştikçe f^* değişecektir.

İkinci olarak (4.0.34) problemiyle bağlantılı olarak eşlenik fonksiyonu

$$f^*(s) = -\inf\{f(x) - \langle s, x\rangle \mid x \in domf\}$$

biçiminde yazılabilir. Diğer taraftan f^* 'ın tanımı gereği $\forall(x,s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ için

$$\langle s, x\rangle \leq f^*(s) + f(x) \tag{4.2.41}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğe **Fenchel Eşitsizliği** adı verilir. Fenchel Eşitsizliğinden açıkça görülebilir ki f^* fonksiyonu da (4.2.40) koşullarını sağlamaktadır.

Uyarı 4.2.4. *Bundan böyle aksi belirtilmedikçe $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ fonksiyonu (4.2.40) koşullarını sağlayan bir fonksiyon olarak alınacaktır.*

Teorem 4.2.5. *$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ fonksiyonunun eşleniği f^* kapalı ve konveks bir fonksiyondur.*

Kanıt. f fonksiyonunu $\mathbb{R}^n$ üzerinde minorize eden afin dönüşüm

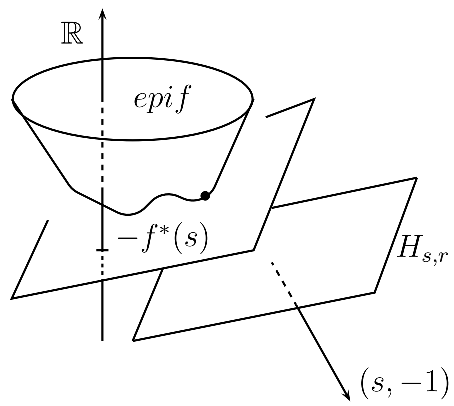
$$x \mapsto \langle s_0, x\rangle + r_0$$

olsun. Bu durumda $f^*(s_0) < +\infty$ olur. O halde f^* en az bir noktada sonlu değer alan ve afin fonksiyonların supremumu biçiminde yazılan bir fonksiyon olarak kapalı ve konvekstir. □

Bir f fonksiyonu için eşleniğin hesaplanması geometrik olarak $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ grafikler uzayında yorumlanabilir. Öncelikle verilen bir $s \in \mathbb{R}^n$ vektörü için $r \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x \mapsto \langle s, x\rangle - r$ afin dönüşümlerinin ailesi ele alınsın. Bu afin dönüşümler, normal vektörü $(s, -1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ olan $H_{s,r}$ hiperdüzlemlerine karşılık gelir. Bu hiperdüzlemler ise $s \in domf^*$ ve r sayısı yeterince büyük seçildiğinde f 'in grafiğinin altında kalırlar. $f^*(s)$ 'yi oluşturmak için bu hiperdüzlemler f 'in grafiğine alttan bir $(x, f(x))$ noktasında teğet oluncaya kadar yukarı kaldırılırlar. Böylece bu $(x, f(x))$ noktası için $\langle s, x\rangle - r = f(x)$ yada $r = \langle s, x\rangle - f(x)$ eşitliği yazılabilir. Böylelikle $r = f^*(s)$ elde edilir.

Buna göre, teğet olan $H_{s,r}$ hiperdüzleminin $\{0\} \times \mathbb{R}$ düşey eksenini kestiği nokta $-f^*(s)$ değerini verir.

Bu geometrik yorum f^* eşlenik fonksiyonunun yeni bir tanımını verir: $H_{s,r}$ hiperdüzleminin normali olan $(s, -1)$ vektörü aynı zamanda, $H_{s,r}$ ile $epif$ 'in kesiştikleri noktada f'in epigrafının da normali olur.



Şekil 4.13: $f^*(s)$ değerinin geometrik olarak hesaplanması

Önerme 4.2.6. *$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda her bir $s \in \mathbb{R}^n$ için*

$$f^*(s) = \sigma_{epif}(s, -1) \tag{4.2.42}$$

olur. Böylece epif kümesinin destek fonksiyonu

$$\sigma_{epif}(s, -u) = \begin{cases} uf^*(\frac{1}{u}s) & , \quad u > 0 \\ \sigma_{domf}(s) & , \quad u = 0 \\ +\infty & , \quad u < 0 \end{cases} \tag{4.2.43}$$

biçiminde ifade edilebilir.

Kanıt. $s \in \mathbb{R}^n$ alınsın.

$$\begin{aligned}
\sigma_{epif}(s,-1) &= \sup_{(x,r)\in epif} \langle (x,r),(s,-1)\rangle \\
&= \sup_{(x,r)\in epif} \langle x,s\rangle - r \\
&= \sup_{x\in domf}\left(\sup_{f(x)\le r} (\langle x,s\rangle - r)\right) \\
&= \sup_{x\in domf} (\langle x,s\rangle - f(x)) \\
&= f^*(s)
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$\sigma_{epif}(s,-u) = \sup_{(x,r)\in epif} \langle (x,r),(s,-u)\rangle = \sup_{(x,r)\in epif} \langle x,s\rangle - ru$$

olduğuna göre

(i) Eğer $u < 0$ ise,

$r \to +\infty$ için $-ru \to +\infty$ olduğundan

$$\sigma_{epif}(s,-u) = +\infty$$

elde edilir.

(ii) Eğer $u = 0$ ise,

$$\sigma_{epif}(s,0) = \sup_{(x,r)\in epif} \langle x,s\rangle - 0 = \sup_{(x,r)\in epif} \langle x,s\rangle = \sigma_{domf}(s)$$

bulunur.

(iii) Eğer $u > 0$ ise,

$$\begin{aligned}
\sigma_{epif}(s,-u) &= \sup_{(x,r)\in epif} \langle x,s\rangle - ru \\
&= \sup_{(x,r)\in epif} u\left(\langle x,\tfrac{1}{u}s\rangle - r\right) \\
&= u \sup_{(x,r)\in epif} \langle x,\tfrac{1}{u}s\rangle - r \\
&= u\ \sigma_{epif}(\tfrac{1}{u}s,-1) \\
&= uf^*(\tfrac{1}{u}s)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece kanıt biter.

$\square$

Eğer $f \in \overline{conv}\mathbb{R}^n$ kabul edilirse, az önceki geometrik yorumda elde edilen optimal hiperdüzlem ile $epif$ 'in arakesiti olan nokta yada noktalar kümesi, $epif$ 'in $(s,-1)$ vektörüyle ortaya çıkarılan yüzüdür. Ayrıca bir $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için,

$$\begin{aligned} \tilde{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ (u,x) &\mapsto \tilde{f}(u,x) := \begin{cases} u.f(\frac{1}{u}x) & , \quad u > 0 \\ +\infty & , \quad u \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı **Perspektif Fonksiyonu** gözüönüne alınırsa, $u \neq 0$ için $u \mapsto -u$ değişken değişimi uygulandığında σ_{epif} ile f^* 'ın perspektif fonksiyonu çakışmaktadır. $u = 0$ için ise aşağıdaki ilişki oldukça kullanışlı olacaktır.

Önerme 4.2.7. *Her $s \in \mathbb{R}^n$ için, $\sigma_{domf}(s) = \sigma_{epif}(s,0) = (f^*)'_\infty(s)$ 'dir.*

4.2.2 Eşlenik fonksiyonunun Temel Özellikleri

Şimdi Eşlenik fonksiyonunun tanımından direkt elde edilebilen bazı özellikleri verilecektir.

Önerme 4.2.8. *[4] $f, f_1, f_2, \ldots, f_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ fonksiyonları verilsin. Bu durumda;*

(i) $r \in \mathbb{R}$ için, $g(x) = f(x) + r$ ise $g^*(s) = f^*(s) - r$ 'dir.

(ii) $t > 0$ için, $g(x) = tf(x)$ ise $g^*(s) = tf^*(\frac{s}{t})$ 'dir.

(iii) $t \neq 0$ için, $g(x) = f(tx)$ ise $g^*(s) = f^*(\frac{s}{t})$ 'dir.

(iv) $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ terslenebilir bir lineer dönüşüm ise,

$$(f \circ A)^* = f^* \circ (A^{-1})^*$$

olur.

(v) $x_0 \in \mathbb{R}^n$ için, $g(x) = f(x - x_0)$ ise $g^*(s) = f^*(s) + \langle s, x_0 \rangle$ 'dır.

(vi) $s_0 \in \mathbb{R}^n$ *için,* $g(x) = f(x) + \langle s_0, x \rangle$ *ise* $g^*(s) = f^*(s - s_0)$ *'dır.*

(vii) $f_1 \leq f_2$ *ise* $f_1^* \geq f_2^*$ *'dır.*

(viii) Legendre-Fenchel Dönüşümü konvekstir. Yani $dom f_1 \cap dom f_2 \neq \emptyset$ *ve* $\alpha \in [0,1]$ *için,*

$$[\alpha f_1 + (1-\alpha) f_2]^* \leq \alpha f_1^* + (1 - \alpha f_2^*)$$

olur.

(ix) Legendre-Fenchel dönüşümü ayrışımı korur. Yani;

$$\mathbb{R}^n := \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n_m}$$

ve $x \mapsto f(x) = \sum_{j=1}^{m} f_j(x_j)$ *olmak üzere,*

$$f^*(s_1, s_2, \ldots, s_m) = \sum_{j=1}^{m} f_j^*(s_j)$$

olur.

Kanıt. (i) Eşlenik fonksiyonun tanımından

$$\begin{aligned} g^*(s) &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} [\langle s, x \rangle - g(x)] \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} [\langle s, x \rangle - f(x) - r] \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} [\langle s, x \rangle - f(x)] - r \\ &= f^*(s) - r \end{aligned}$$

bulunur.

(ii) Eşlenik fonksiyonun tanımından

$$\begin{aligned} g^*(s) &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} [\langle s, x \rangle - g(x)] \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} [\langle s, x \rangle - t f(x)] \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} [t \langle \tfrac{s}{t}, x \rangle - t f(x)] \\ &= t \sup_{x \in \mathbb{R}^n} [\langle \tfrac{s}{t}, x \rangle - f(x)] \\ &= t f^*(\tfrac{s}{t}) \end{aligned}$$

bulunur.

(iii) Eşlenik fonksiyonun tanımından

$$
\begin{aligned}
g^*(s) &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n}[\langle s,x\rangle - g(x)] \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^n}[\langle s,x\rangle - f(tx)] \\
&= \sup_{tx\in\mathbb{R}^n}[\langle \tfrac{s}{t},tx\rangle - f(tx)] \qquad (tx = y \text{ alınırsa}) \\
&= \sup_{y\in\mathbb{R}^n}[\langle \tfrac{s}{t},y\rangle - f(y)] \\
&= f^*(\tfrac{s}{t})
\end{aligned}
$$

bulunur.

(iv) A terslenebilir bir lineer dönüşüm olsun. Buna göre A 'nın adjointi A^* dönüşümü de terslenebilirdir ve $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ olur. Buna göre;

$$
\begin{aligned}
(f\circ A)^*(s) &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n}[\langle s,x\rangle - (f\circ A)(x)] \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^n}[\langle s,A^{-1}(A(x))\rangle - f(A(x))] \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^n}[\langle (A^{-1})^*(s),A(x)\rangle - f(A(x))] \qquad (A(x) = y \text{ alınırsa}) \\
&= \sup_{y\in\mathbb{R}^n}[\langle (A^{-1})^*(s),y\rangle - f(y)] \\
&= f^*((A^{-1})^*(s)) = (f^*\circ (A^{-1})^*)(s)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

(v) Eşlenik fonksiyonun tanımından

$$
\begin{aligned}
g^*(s) &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n}[\langle s,x\rangle - g(x)] \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^n}[\langle s,x\rangle - f(x-x_0)] \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^n}[\langle s,x-x_0\rangle + \langle s,x_0\rangle - f(x-x_0)] \\
&= \langle s,x_0\rangle + \sup_{x\in\mathbb{R}^n}[\langle s,x-x_0\rangle - f(x-x_0)] \qquad (x - x_0 = y \text{ alınırsa}) \\
&= \langle s,x_0\rangle + \sup_{y\in\mathbb{R}^n}[\langle s,y\rangle - f(y)] \\
&= \langle s,x_0\rangle + f^*(s)
\end{aligned}
$$

bulunur.

(vi) Eşlenik fonksiyonun tanımından

$$\begin{aligned} g^*(s) &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n}[\langle s,x\rangle - g(x)] \\ &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n}[\langle s,x\rangle - f(x) - \langle s_0,x\rangle] \\ &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n}[\langle s-s_0,x\rangle - f(x)] \\ &= f^*(s-s_0) \end{aligned}$$

bulunur.

(vii) $\forall x\in\mathbb{R}^n$ için $f_1(x)\le f_2(x)$ olsun. Buna göre $\forall x\in\mathbb{R}^n$ için

$$-f_2(x)\le -f_1(x)$$

olur. Böylece,

$$\begin{aligned} f_2^*(s) &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n}[\langle s,x\rangle - f_2(x)] \\ &\le \sup_{x\in\mathbb{R}^n}[\langle s,x\rangle - f_1(x)] \\ &= f_1^*(s) \end{aligned}$$

elde edilir.

(viii) $U := dom f_1 \cap dom f_2 \neq \emptyset$ olsun ve $\alpha\in[0,1]$ alınsın.

$$\begin{aligned} [\alpha f_1 + (1-\alpha)f_2]^*(s) &= \sup_{x\in U}[\langle s,x\rangle - (\alpha f_1 + (1-\alpha)f_2)(x)] \\ &= \sup_{x\in U}[\langle s,x\rangle - \alpha f_1(x) - (1-\alpha)f_2(x)] \\ &= \sup_{x\in U}[\alpha\langle s,x\rangle + (1-\alpha)\langle s,x\rangle - \alpha f_1(x) - (1-\alpha)f_2(x)] \\ &= \sup_{x\in U}[\alpha[\langle s,x\rangle - f_1(x)] + (1-\alpha)[\langle s,x\rangle - f_2(x)]] \\ &\le \alpha\sup_{x\in U}[\langle s,x\rangle - f_1(x)] + (1-\alpha)\sup_{x\in U}[\langle s,x\rangle - f_2(x)] \\ &= \alpha f_1^*(s) + (1-\alpha)f_2^*(s) \end{aligned}$$

elde edilir.

(ix) Eşlenik fonksiyonun tanımı gereği

$$\begin{aligned} f^*(s_1, s_2, \ldots, s_m) &= \sup_{x_i \in \mathbb{R}^{n_i}} \left[\langle (s_1, s_2, \ldots, s_m), (x_1, x_2, \ldots, x_m) - \textstyle\sum_{j=1}^m f_j(x_j) \right] \\ &= \sup_{x_i \in \mathbb{R}^{n_i}} \left[\textstyle\sum_{j=1}^m s_j x_j - \sum_{j=1}^m f_j(x_j) \right] \\ &= \sup_{x_i \in \mathbb{R}^{n_i}} \left[\textstyle\sum_{j=1}^m [s_j x_j - f_j(x_j)] \right] \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^m \left[\displaystyle\sup_{x_i \in \mathbb{R}^{n_i}} [s_j x_j - f_j(x_j)] \right] \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^m f_j^*(s_j) \end{aligned}$$

elde edilir.

□

Önerme 4.2.9. *[4] $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ fonksiyonu veriilsin. $H \subseteq \mathbb{R}^n$ bir alt uzay ve P_H H alt uzayı üzerinde dik izdüşüm fonksiyonu olsun. Eğer f fonksiyonu en az bir $x \in H$ noktasında sonlu değer alıyorsa, $f + i_H$ fonksiyonu da (4.2.40) koşullarını sağlar ve*

$$(f + i_H)^* = (f \circ P_H)^* \circ P_H$$

dır.

Kanıt. Keyfi $y \in \mathbb{R}^n$ alınıp bu y noktası $\mathbb{R}^n$ uzayında dolaştırıldığı zaman $x := P_H(y)$ değeri de H alt uzayını tarayacaktır. Üstelik P_H dik izdüşüm dönüşümü simetrik bir dönüşüm olduğundan her bir $s \in \mathbb{R}^n$ için

$$\langle P_H(s), y \rangle = \langle s, P_H(y) \rangle$$

olur. Buna göre;

$$\begin{aligned} (f + i_H)^*(s) &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} [\langle s, x \rangle - (f + i_H)(x)] \\ &= \sup_{x \in H} [\langle s, x \rangle - f(x)] \\ &= \sup_{y \in \mathbb{R}^n} [\langle s, P_H(y) \rangle - f(P_H(y))] \\ &= \sup_{y \in \mathbb{R}^n} [\langle P_H(s), y \rangle - (f \circ P_H)(y))] \\ &= (f \circ P_H)^*(P_H(s)) \\ &= [(f \circ P_H)^* \circ P_H](s) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece aranan eşitlik elde edilmiş olur. □

Uyarı 4.2.10. *$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ fonksiyonu, $H \subseteq \mathbb{R}^n$ alt uzayı verilsin ve $domg \subseteq H$ olsun. Bu durumda $s \in H^{\perp}$ ise her bir $x \in domg$ için*

$$g^*(x+s) = g^*(x)$$

olur. Gerçekten; $s \in H^{\perp}$ ve $x \in domg$ alınsın.

$$\begin{aligned} g^*(x+s) &= \sup_{y \in domg} \langle y, x+s \rangle - g(y) \\ &= \sup_{y \in domg} \langle y, x \rangle + \langle y, s \rangle - g(y) \quad (\langle y, s \rangle = 0 \text{ olduğundan}) \\ &= g^*(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Üstelik bu özelliğin tersi de doğrudur. Yani bir $x_0 \in domg$ için

$$g(x_0 + y) = g(x_0) \quad (\forall y \in H)$$

oluyorsa $domg^* \subseteq H^{\perp}$ olur. Gerçekten her bir $y \in H$ için yukarıdaki eşitliği sağlayan bir $x_0 \in domg$ alınsın. H alt uzayında olmayan bir s elemanına karşılık öyle bir $y_0 \in H$ seçilsin ki $\langle s, y_0 \rangle = \alpha \neq 0$ olsun. Bu durumda her bir $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\langle s, \lambda y_0 \rangle - g(x_0 + \lambda y_0) = \lambda \alpha - g(x_0)$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} g^*(s) &\geq \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} [\langle s, x_0 + \lambda y_0 \rangle - g(x_0 + \lambda y_0)] \\ &= \langle s, x_0 \rangle + \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} [\lambda \alpha - g(x_0)] = +\infty \end{aligned}$$

bulunur. Yani

$$s \notin H^{\perp} \;\Rightarrow\; g^*(s) = +\infty$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadenin değili alınırsa

$$g^*(s) < +\infty \;\Rightarrow\; s \in H^{\perp}$$

olacaktır. Böylece $domg^* \subseteq H^{\perp}$ bulunur.

Önerme 4.2.9 ile verilen formül farklı bir bakış açısıyla değerlendirilebilir. Kabul edilsin ki f fonksiyonunun üzerinde tanımlı olduğu $\mathbb{R}^n$ uzayı daha büyük boyutlu bir $\mathbb{R}^{n+p}$ uzayına gömülmüş olsun. Bu durumda f'in bu uzaya çok çeşitli genişlemeleri mevcuttur. Bunlardan biri

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x \in \mathbb{R}^n \\ +\infty & , \quad x \notin \mathbb{R}^n \end{cases}$$

biçimindedir. Bir diğeri de her bir $y \in \mathbb{R}^p$ için

$$\bar{f}(x+y) = f(x)$$

yatay ötelemesi şeklinde verilebilir. Bu iki genişleme birbirinin dualidir. Aslında böyle bir duallik, genişletilmiş iç çarpımın $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ çarpım uzayının yapısını koruduğu takdirde geçerlidir. Bu noktada alt uzaylar yerine afin kümeler düşünülürse aşağıdaki sonuç yazılabilir.

Önerme 4.2.11. *[4] $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ fonksiyonu verilsin. $aff dom f$ kümesine paralel olan altuzay V olmak üzere $U := V^\perp$ olsun. Bu durumda herhangi bir $z \in aff dom f$ ve $s \in \mathbb{R}^n$ alındığında $s = s_u + s_v$ biçimindeki ayrışımı için,*

$$f^*(s) = \langle s_u, z\rangle + f^*(s_v)$$

dir.

Kanıt. $z \in aff dom f$ ise $z + V \supseteq aff dom f$ olduğu açıktır.

$$\begin{aligned} f^*(s) &= \sup_{x \in aff dom f} [\langle s, x\rangle - f(x)] \\ &= \sup_{v \in V} [\langle s_u + s_v, z + v\rangle - f(z+v)] \\ &= \sup_{v \in V} [\langle s_u, z+v\rangle + \langle s_v, z+v\rangle - f(z+v)] \\ &= \sup_{v \in V} [\langle s_u, z\rangle + \langle s_u, v\rangle + \langle s_v, z+v\rangle - f(z+v)] \quad (\langle s_u, v\rangle = 0 \text{ olduğundan}) \\ &= \langle s_u, z\rangle + \sup_{v \in V} [\langle s_v, z+v\rangle - f(z+v)] \\ &= \langle s_u, z\rangle + f^*(s_v) \end{aligned}$$

elde edilir. □

4.2.3 Bir Fonksiyonun Biconjugate Fonksiyonu

Bir f fonksiyonunun (4.2.40) koşullarını sağladığı durumda eşleniği f^* 'ın da bu koşulları sağladığı gösterilmişti. Dolayısıyla f^* eşlenik fonksiyonunun da eşleniğinden bahsedilebilir.

Tanım 4.2.12. *[4] $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda*

$$f^{**}(x) := \sup_{s \in \mathbb{R}^n} [\langle s, x \rangle - f^*(s)]$$

ile tanımlı f^{**} fonksiyonuna f 'in ***biconjugate fonksiyonu*** *denir.*

Daha önce herhangi bir g fonksiyonunun kapalı konveks zarf fonksiyonu

$$\overline{co}(g)(x) = \sup\{\langle s, x \rangle - b \mid \forall y \in \mathbb{R}^n \text{ için } \langle s, y \rangle - b \leq g(y)\}$$

biçiminde tanımlanmıştı. Aşağıdaki önermede bu fonksiyon ile biconjugate arasındaki ilişki verilecektir.

Teorem 4.2.13. *[4] $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda f^{**} fonksiyonu f 'i alttan sınırlayan afin fonksiyonların noktasal supremumudur. Yani;*

$$f^{**} = \overline{co}(f) \text{ 'dir.} \tag{4.2.44}$$

Kanıt. $\Sigma := \{(s, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid \langle s, x \rangle - r \leq f(x) \ , \forall x \in \mathbb{R}^n\}$ kümesi tanımlansın. Buna göre;

$$\begin{aligned}
(s, r) \in \Sigma \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) \geq \langle s, x \rangle - r \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n) \\
&\Leftrightarrow \quad r \geq \langle s, x \rangle - f(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n) \\
&\Leftrightarrow \quad r \geq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} [\langle s, x \rangle - f(x)] \\
&\Leftrightarrow \quad r \geq f^*(s) \\
&\Leftrightarrow \quad s \in dom f^*
\end{aligned}$$

yazılabilir. O halde $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için,

$$\begin{aligned}
\overline{co}(f) &= \sup_{(s,r)\in\Sigma}[\langle s,x\rangle - r] \\
&= \sup\{\langle s,x\rangle - r \mid s \in dom f^*,\ -r \leq -f^*(s)\} \\
&= \sup\{\langle s,x\rangle - f^*(s) \mid s \in dom f^*\} \\
&= (f^*)^*(x) = f^{**}(x)
\end{aligned}$$

bulunur. □

Geometrik olarak, $(s, r) \in \Sigma$ ikilisine karşılık gelen afin dönüşümlerin epigrafları, $epi f$'i içeren kapalı yarı uzaylardır. Dolayısıyla bu kapalı yarı uzayların arakesiti $epi f$ 'in kapalı konveks zarfını verecektir.

Uyarı 4.2.14. *Biconjugate fonksiyonu verilen f fonksiyonunun özelliklerine göre şu şekilde sıralanabilir:*

(i) f (4.2.40) koşullarını sağlayan herhangi bir fonksiyon ise $f^{**} = \overline{co}(f)$ olur.

(ii) f konveks bir fonksiyon ise $f^{**} = cl f$ olur.

(iii) f kapalı ve konveks bir fonksiyon ise $f^{**} = f$ olur.

Sonuç 4.2.15. *$f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ fonksiyonları verilsin. Eğer*

$$\overline{co} f \leq g \leq f$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $g^* = f^*$ olur.

Kanıt.

$$\begin{aligned}
\overline{co} f \leq g \leq f &\Leftrightarrow f^{**} \leq g \leq f \\
&\Leftrightarrow (f^{**})^* \leq g^* \leq f^* \quad (f^{**} \text{ kapalı ve konveks olduğundan}) \\
&\Leftrightarrow f^* \leq g^* \leq f^*
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece $f^* = g^*$ elde edilmiş olur. □

4.2.4 Eşleniklik ve Coercive Fonksiyonlar

Daha önce Tanım 1.5.6 ve Tanım 1.5.7 ile verilen coercive fonksiyonlar yardımıyla bir f fonksiyonunun eşleniğinin ne zaman sonlu değer aldığı sorusuna cevap bulunabilir.

Önerme 4.2.16. *$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ fonksiyonu 1-coercive olsun. Bu durumda her bir $s \in \mathbb{R}^n$ için $f^*(s) < +\infty$ olur.*

Kanıt. Keyfi $s \in \mathbb{R}^n$ alınsın. f 1-coercive olduğundan

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \frac{f(x)}{\|x\|} = +\infty$$

yazılabilir. O halde $\|s\| > 0$ sayısı için öyle bir $R > 0$ sayısı vardır ki $\|x\| \geq R$ için

$$f(x) \geq \|s\|.\|x\| \geq \langle s, x\rangle$$

elde edilir. Buna $\|x\| \geq R$ olan her bir $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\langle s, x\rangle - f(x) \leq \langle s, x\rangle - \|s\|.\|x\| \leq 0$$

yazılabilir. Böylece

$$\sup\{\langle s, x\rangle - f(x) \mid \|x\| \geq R\} \leq 0 \tag{4.2.45}$$

elde edilir.

Diğer taraftan f (4.2.40) koşullarını sağladığından öyle bir $(s_0, r_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ vardır ki her bir $x \in \mathbb{R}^n$ için $f(x) \geq \langle s_0, x\rangle - r_0$ olur. Buna göre;

$$\begin{aligned}
\sup_{\|x\| \leq R} [\langle s, x\rangle - f(x)] &\leq \sup_{\|x\| \leq R} [\langle s, x\rangle - \langle s_0, x\rangle + r_0] \\
&= \sup_{\|x\| \leq R} [\langle s - s_0, x\rangle + r_0] \quad \text{(Cauchy-Schwartz Eşitsizliğinden)} \\
&\leq r_0 + \sup_{\|x\| \leq R} \|s - s_0\|.\|x\| \\
&= r_0 + \|s - s_0\|.R
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece $M : r_0 + \|s - s_0\|.R$ denirse

$$\sup\{\langle s, x\rangle - f(x) \mid \|x\| \leq R\} \leq M \tag{4.2.46}$$

olacak şekilde bir $M \in \mathbb{R}$ sayısı bulunmuş olur. Sonuç olarak (4.2.45) ve (4.2.46) eşitsizliklerinden

$$f^*(s) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} [\langle s, x \rangle - f(x)] \leq \max\{0, M\} < +\infty$$

elde edilir. □

Önerme 4.2.17. *$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda,*

(i) $x_0 \in intdomf$ ise $s \mapsto f^*(s) - \langle x_0, s \rangle$ fonksiyonu 0-coercive 'dir.

(ii) f tüm $\mathbb{R}^n$ üzerinde sonlu ise f^* 1-coercive 'dir.

Kanıt. (i) Teorem 2.2.8 (iii) gereğince $S = domf$ olmak üzere

$$x_0 \in intdomf \;\Leftrightarrow\; \forall (0 \neq) s \in \mathbb{R}^n \text{ için } \langle s, x_0 \rangle < \sigma_{domf}(s)$$

yazılabilir. Üstelik Önerme 4.2.7 gereğince $\forall (0 \neq) s \in \mathbb{R}^n$ için

$$(f^*)'_\infty(s) - \langle s, x_0 \rangle > 0$$

elde edilir. O halde $f^* - \langle x_0, \cdot \rangle$ fonksiyonu 0-coercive 'dir.

(ii) f tüm $\mathbb{R}^n$ üzerinde sonlu değer alıyorsa $domf = \mathbb{R}^n$ 'dir. Buna göre

$$(f^*)'_\infty = \sigma_{domf} = \sigma_{\mathbb{R}^n} = i_{\{0\}}$$

elde edilir. O halde f^* 1-coercive 'dir.

□

Uyarı 4.2.18. *Eğer $f \in \overline{conv}\mathbb{R}^n$ kabul edilirse*

$$\begin{aligned} x_0 \in intdomf \;&\Leftrightarrow\; s \mapsto f^*(s) - \langle x_0, s \rangle \;\; 0\text{-coercive 'dir.} \\ domf = \mathbb{R}^n \;&\Leftrightarrow\; f^* \;\; 1\text{-coercive 'dir.} \end{aligned}$$

denklikleri geçerli olur.

4.2.5 Genişletilmiş Değerli Fonksiyonların Subdiferansiyeli ve Eşleniklik

(4.2.40) koşullarını sağlayan bir f fonksiyonu için

$$\partial f(x) := \{s \in \mathbb{R}^n \mid f(y) \geq f(x) + \langle s, y - x\rangle \ , \forall y \in \mathbb{R}^n\}$$

kümesi göz önüne alınsın. f 'in sonlu ve konveks olduğu durumda bu küme f'in x noktasındaki subdiferansiyelinden başka birşey değildir. Ancak burada $\partial f(x)$ kümesi daha genel düşünülmelidir.

Teorem 4.2.19. *[4] $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (4.2.40) koşullarını sağlasın ve $x \in dom f$ verilsin. Bu durumda*

$$s \in \partial f(x) \ \Leftrightarrow \ f^*(s) + f(x) = \langle s, x\rangle$$

olur.

Kanıt. $\partial f(x)$ kümesinin tanımlanışı gereği

$$\begin{aligned} s \in \partial f(x) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall y \in dom f \text{ için } f(y) \geq f(x) + \langle s, y - x\rangle \\ &\Leftrightarrow \quad \forall y \in dom f \text{ için } \langle s, y\rangle - f(y) \leq \langle s, x\rangle - f(x) \\ &\Leftrightarrow \quad \sup_{y \in dom f} [\langle s, y\rangle - f(y)] \leq \langle s, x\rangle - f(x) \\ &\Leftrightarrow \quad f^*(s) \leq \langle s, x\rangle - f(x) \\ &\Leftrightarrow \quad f(x) + f^*(s) \leq \langle s, x\rangle \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Eşitsizliğin ters yönü (4.2.41) ile verilen Fenchel eşitsizliğinden açıktır. Dolayısıyla istenen eşitlik elde edilmiş olur. □

Daha önce sonlu konveks fonksiyonların subdiferansiyelleri için kanıtlandığı gibi burada da, $\partial f(x)$ kümesi kapalı ve konvekstir. Çünkü $\partial f(x)$ kümesi kapalı ve konveks olan $g := f^* - \langle \cdot, x\rangle$ fonksiyonunun $r := -f(x)$ 'teki alt düzey kümesidir. Gerçekten;

$$
\begin{aligned}
S_{-f(x)}g &= \{s \in \mathbb{R}^n \mid f^*(s) - \langle s, x\rangle \leq -f(x)\} \\
&= \{s \in \mathbb{R}^n \mid \sup_{y \in \mathbb{R}^n} [\langle s, y\rangle - f(y)] - \langle s, x\rangle \leq -f(x)\} \\
&= \{s \in \mathbb{R}^n \mid \langle s, y\rangle - f(y) - \langle s, x\rangle \leq -f(x) \ , \forall y \in \mathbb{R}^n\} \\
&= \{s \in \mathbb{R}^n \mid f(y) \geq f(x) + \langle s, y - x\rangle \ , \forall y \in \mathbb{R}^n\} \\
&= \partial f(x)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece f 'in bir x noktasındaki subgradienti f'i alttan sınırlayan ve x noktasında f ile çakışan afin fonksiyonun eğimidir.

Teorem 4.2.20. *[4] $f \in conv\mathbb{R}^n$ verilsin. Eğer $x \in ridomf$ ise $\partial f(x) \neq \emptyset$ dir.*

Kanıt. f konveks bir fonksiyon olduğundan her noktasında alttan sınırlayan en az bir afin fonksiyonun varlığı bilinmektedir. Üstelik Önerme 1.4.12 den $x \in ridomf$ için $affdomf$ 'e paralel V alt uzayı içinde öyle bir s elemanı vardır ki her bir $y \in \mathbb{R}^n$ için

$$f(y) \geq f(x) + \langle s, y - x\rangle$$

olur. Buna göre $s \in \partial f(x)$ ve böylece $\partial f(x) \neq \emptyset$ elde edilir. □

Yukarıdaki teoremin bir sonucu olarak $\partial f(x) \neq \emptyset$ olduğu durumda x noktasında, f ile konveksleştirilmiş $\overline{co}f$ arasında şöyle bir ilişki kurulabilir.

Önerme 4.2.21. *[4] $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ verilsin. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır:*

(i) $\partial f(x) \neq \emptyset$ ise $(\overline{co}f)(x) = f(x)$ 'tir.

(ii) $\overline{co}f \leq g \leq f$ ve $g(x) = f(x)$ ise $\partial f(x) = \partial g(x)$ olur.

(iii) $s \in \partial f(x)$ ise $x \in \partial f^*(s)$ 'dir.

Kanıt. (i) $\partial f(x) \neq \emptyset$ olsun ve $s \in \partial f(x)$ alınsın. Bu durumda her bir $y \in \mathbb{R}^n$ için

$$f(y) \geq f(x) + \langle s, y - x \rangle$$

olur. Buna göre;

$$\begin{aligned} \ell_s : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ y &\mapsto \ell_s(y) := f(x) + \langle s, y - x \rangle \end{aligned}$$

fonksiyonu tanımlansın. Tanımlanışı gereği ℓ_s fonksiyonu afindir ve f 'i alttan sınırlar. Buradan

$$\ell_s \leq \overline{co} f \leq f$$

yazılabilir. Üstelik

$$\ell_s(x) = f(x) + \langle s, x - x \rangle = f(x)$$

olduğundan

$$\ell_s(x) = \overline{co} f(x) = f(x)$$

elde edilir.

(ii) $\overline{co} f \leq g \leq f$ ve $g(x) = f(x)$ olsun. Sonuç 4.2.15 gereğince $g^* = f^*$ 'dır. Buna göre

$$\begin{aligned} s \in \partial f(x) &\Leftrightarrow f^*(s) + f(x) = \langle s, x \rangle \\ &\Leftrightarrow g^*(s) + g(x) = \langle s, x \rangle \\ &\Leftrightarrow s \in \partial g(x) \end{aligned}$$

ve böylece

$$\partial f(x) = \partial g(x)$$

bulunur.

(iii) $s \in \partial f(x)$ alınsın. $f^{**} = \overline{co} f \leq f$ olduğuna göre,

$$f^*(s) + f^{**}(s) - \langle s, x \rangle \leq f^*(s) + f(x) - \langle s, x \rangle \leq 0$$

olur. O halde,

$$f^*(s) + f^{**}(s) - \langle s, x \rangle \leq 0$$

ve böylece

$$x \in \partial f^*(s)$$

bulunur.

$\square$

Sonuç 4.2.22. *[4] $f \in \overline{conv}\mathbb{R}^n$ ise aşağıdaki denklikler geçerlidir:*

$$f(x) + f^*(s) - \langle s, x\rangle = 0 \ (\leq 0) \ \Leftrightarrow \ s \in \partial f(x) \ \Leftrightarrow \ x \in \partial f^*(s)$$

Kanıt. f kapalı ve konveks olduğundan $f^{**} = f$ olduğu açıktır. Üstelik (4.2.40) koşullarını sağlayan herhangi bir f fonksiyonu için, Teorem 4.2.19 ve bir önceki önermeden dolayı,

$$f(x) + f^*(s) - \langle s, x\rangle = 0 \ (\leq 0) \ \Leftrightarrow \ s \in \partial f(x) \ \Rightarrow \ x \in \partial f^*(s)$$

gerektirmelerinin sağlandığı açıktır. O halde kanıt için f kapalı ve konveks iken, $x \in \partial f^*(s)$ ise $s \in \partial f(x)$ olduğunun gösterilmesi yeterlidir. $x \in \partial f^*(s)$ alınsın. O halde

$$f^{**}(x) + f^*(s) - \langle s, x\rangle \leq 0$$

olur. $f^{**} = f$ olduğundan

$$f(x) + f^*(s) - \langle s, x\rangle \leq 0$$

ve böylece $s \in \partial f(x)$ bulunur. Böylece kanıt biter. $\square$

4.2.6 Eşleniklik Dönüşümü Üzerinde Temel Hesap Kuralları

Eşleniği hesaplanmak istenen bir f fonksiyonunun eşleniği çoğunlukla, eşlenikleri bilinen başka fonksiyonlar türünden hesaplanır. Bu bölümde bu hesaplama kurallarının bazıları verilecek ve özellikleri incelenecektir.

(i) Lineer Dönüşüm Altında Görüntü Fonksiyonunun Eşleniği

$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ fonksiyonu (4.2.40) koşullarını sağlasın ve $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ lineer dönüşümü verilsin. Buna göre g 'nin A altındaki görüntü fonksiyonu

$$\mathbb{R}^n \ni x \mapsto (Ag)(x) := \inf\{g(y) \mid Ay = x\}$$

biçiminde tanımlanmıştı. Ag dönüşümünün eşleniğinden bahsedilebilmesi için (4.2.40) koşullarının sağlandığı garantilenmelidir. O halde bazı kabuller altında görüntü fonksiyonunun eşleniği elde edilebilir.

Teorem 4.2.23. *$ImA^* \cap domg^* \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda Ag görüntü fonksiyonu (4.2.40) koşullarını sağlar ve eşleniği*

$$(Ag)^* = g^* \circ A^*$$

olur.

Kanıt. Öncelikle $\mathbb{R}^m$ üzerindeki iç çarpım $\langle\cdot,\cdot\rangle_m$ ve $\mathbb{R}^n$ üzerindeki iç çarpım $\langle\cdot,\cdot\rangle_n$ ile gösterilsin. $y_0 \in domg$ olmak üzere,

$$(Ag)(x) = \inf\{g(y) \mid Ay = x\} \leq g(y_0) < +\infty$$

olduğundan $Ag \not\equiv +\infty$ olur. İkinci olarak $ImA^* \cap domg^* \neq \emptyset$ olduğundan $\exists s_0 \in \mathbb{R}^n$ için $p_0 = A^* s_0$ ve $g^*(p_0) < +\infty$ olacak şekilde bir $p_0 \in \mathbb{R}^m$ vardır. Buradan keyfi $y \in \mathbb{R}^m$ için Fenchel Eşitsizliği'nden

$$g(y) \geq \langle p_0, y\rangle - g^*(p_0) = \langle A^* s_0, y\rangle_m - g^*(p_0) = \langle s_0, Ay\rangle_n - g^*(p_0)$$

yazılabilir. Böylece

$$\inf\{g(y) \mid Ay = x\} \geq \inf\{\langle s_0, Ay\rangle_n - g^*(p_0) \mid Ay = x\}$$

olacağından

$$Ag(x) \geq \inf\{\langle s_0, Ay\rangle_n - g^*(p_0) \mid Ay = x\} \geq \langle s_0, x\rangle_n - g' * (p_0)$$

elde edilir. O halde Ag dönüşümü $\langle s_0, \cdot\rangle_n - g^*(p_0)$ afin fonksiyonu ile alttan sınırlıdır. Sonuç olarak Ag fonksiyonu (4.2.40) koşullarını sağlar. O halde Ag fonksiyonunun eşleniği hesaplanabilir.

$$\begin{aligned}
(Ag)^*(s) &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n}[\langle s, x\rangle - Ag(x)] \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^n}[\langle s, x\rangle - \inf_{Ay=x}[g(y)]] \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^n}[\langle s, x\rangle + \sup_{Ay=x}[-g(y)]] \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\ Ay=x}[\langle s, x\rangle - g(y)] \\
&= \sup_{y\in\mathbb{R}^m}[\langle s, Ay\rangle - g(y)] \\
&= \sup_{y\in\mathbb{R}^m}[\langle A^*s, y\rangle - g(y)] \\
&= g^*(A^*(s)) = (g^* \circ A^*)(s)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $(Ag)^* = g^* \circ A^*$ bulunur. □

Teorem 4.2.23 'ün bir sonucu olarak marjinal fonksiyonun eşleniği incelenebilir. $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$f(x) := \inf\{g(x, z) \mid z \in \mathbb{R}^p\}$$

ile tanımlanan marjinal fonksiyonun eşleniğini bulmak için A lineer dönüşümü izdüşüm dönüşümü olarak alınabilir.

Sonuç 4.2.24. *$g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ fonksiyonu verilsin ve $g \not\equiv +\infty$ olsun. Eğer $(s_0, 0) \in domg^*$ olacak şekilde $\exists s_0 \in \mathbb{R}^n$ bulunabiliyorsa bu durumda $f(x) = \inf\{g(x, z) \mid z \in \mathbb{R}^p\}$ marjinal fonksiyonunun eşleniği*

$$f^*(s) = g^*(s, 0)$$

olur.

Kanıt.

$$\begin{aligned} A:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p &\to \mathbb{R}^n \\ (x,z) &\mapsto A(x,z)=x \end{aligned}$$

izdüşüm dönüşümü ele alınsın. Bu durumda,

$$\begin{aligned} Ag(x) &= \inf\{g(x,z) \mid A(x,z)=x\} \\ &= \inf\{g(x,z) \mid z\in\mathbb{R}^p\} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

olduğu açıktır. Üstelik her bir $y_1=(x_1,z_1)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p=\mathbb{R}^m$ ve her $x\in\mathbb{R}^n$ için

$$\begin{aligned} \langle y_1, A^*x_2\rangle_m &= \langle Ay_1, x_2\rangle_n \\ &= \langle x_1, x_2\rangle_n \\ &= \langle x_1, x_2\rangle_n + \langle z_1, 0\rangle_p \\ &= \langle (x_1,z_1),(x_2,0)\rangle_m \\ &= \langle y_1,(x_2,0)\rangle_m \end{aligned}$$

olduğundan

$$\langle y_1, A^*x_2\rangle_m = \langle y_1,(x_2,0)\rangle_m$$

ve böylelikle

$$A^*(x_2)=(x_2,0)$$

elde edilir. O halde Teorem 4.2.23 gereğince,

$$\begin{aligned} f^*(s) &= (Ag)^*(s) \\ &= (g^*\circ A^*)(s) \\ &= g^*(A^*(s)) \\ &= g^*(s,0) \end{aligned}$$

bulunur. □

Son olarak iki fonksiyonun infimal konvolüsyonunun eşleniği, yine görüntü fonksiyonunun eşleniği yardımıyla incelenecektir.

$f_1, f_2:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ fonksiyonlarının infimal konvolüsyonu

$$\begin{aligned} (f_1\nabla f_2)(x) &:= \inf\{f_1(x_1)+f_2(x_2) \mid x_1+x_2=x\} \\ &= \inf_{y\in\mathbb{R}^n}[f_1(y)+f_2(x-y)] \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanmıştı. Şimdi eğer $m = 2n$, $g(x_1, x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$ ve $A(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ alınırsa Teorem 4.2.23 kullanılarak eşlenik elde edilebilir.

Sonuç 4.2.25. *$f_1, f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ fonksiyonları verilsin ve $f_1, f_2 \not\equiv +\infty$ olsun. Eğer $dom f_1^* \cap dom f_2^* \neq \emptyset$ ise $f_1 \nabla f_2$ fonksiyonu (4.2.40) koşullarını sağlar ve*

$$(f_1 \nabla f_2)^* = f_1^* + f_2^*$$

olur.

Kanıt. $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g(x_1, x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$ fonksiyonu tanımlansın. O halde Önerme 4.2.8 (ix) gereğince

$$g^*(s_1, s_2) = f_1^*(s_1) + f_2^*(s_2)$$

olur. Ayrıca

$$\begin{array}{rcl} A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ (x_1, x_2) & \mapsto & A(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \end{array}$$

lineer dönüşümü tanımlanırsa

$$\begin{array}{rcl} (Ag)(x) & = & \inf\{g(x_1, x_2) \mid A(x_1, x_2) = x\} \\ & = & \inf\{f_1(x_1) + f_2(x_2) \mid x_1 + x_2 = x\} \\ & = & (f_1 \nabla f_2)(x) \end{array}$$

olacaktır. O halde $Ag = f_1 \nabla f_2$ dönüşümünün eşleniğinin hesaplanması için A lineer dönüşümünün adjointi olan A^* bulunmalıdır. $A(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ lineer dönüşümü

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}_{n \times 2n}}_{Q} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{2n \times 1} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

biçiminde yazılabildiğinden Q^T matrisi A dönüşümünün adjointini verecektir. Yani;

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{2n \times n} \cdot \begin{bmatrix} s \end{bmatrix}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} s \\ s \end{bmatrix}_{2n \times 1}$$

olduğuna göre $A^*(s) = (s, s)$ olur. Sonuç olarak

$$(Ag)^*(s) = g^*(A^*(s)) = g^*(s, s) = f_1^*(s) + f_2^*(s)$$

ve böylelikle

$$(f_1 \nabla f_2)^*(s) = f_1^*(s) + f_2^*(s)$$

elde edilir. □

(ii) Bir Konveks Fonksiyonun Bir Afin Fonksiyonla Sağdan Bileşkesinin Eşleniği

Daha önce Önerme 1.4.35 ile bir konveks fonksiyonun bir afin fonksiyonla sağdan bileşkesinin konveks olduğu gösterilmişti. O halde bu bileşke fonksiyonunun da eşleniğinden bahsedilebileceği açıktır. Üstelik eşleniklik dönüşümünün simetri özelliği göz önüne alınırsa A bir lineer dönüşüm olarak alındığında g konveks fonksiyonu ile sağdan bileşkesi $g \circ A$ 'nın eşleniğinin $A^* g^*$ olması beklenir. Ancak buradaki simetride şöyle bir sorunla karşı karşıya kalınmaktadır. $A^* g^*$ görüntü fonksiyonu her zaman kapalı olmak zorunda değildir. Ancak eşlenik her zaman kapalı ve konveks bir fonksiyondur.

Teorem 4.2.26. *$g \in \overline{conv}\mathbb{R}^m$, $A_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bir lineer dönüşümü ve $y_0 \in \mathbb{R}^m$ olsun. $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $A(x) := A_0(x) + y_0$ afin dönüşümü için $A(\mathbb{R}^n) \cap domg \neq \emptyset$ sağlansın. Bu durumda, $g \circ A \in \overline{conv}\mathbb{R}^n$ olur ve eşleniği*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ s & \mapsto & \inf\limits_{p \in \mathbb{R}^m} \{ g^*(p) - \langle y_0, p \rangle_m \mid A_0^* p = s \} \end{array} \tag{4.2.47}$$

fonksiyonunun kapanışına eşittir.

Kanıt. Öncelikle lineer durum için $y_0 = 0$ kabul edilsin. $h \in \overline{conv}\mathbb{R}^m$ alınsın ve $A(\mathbb{R}^n) \cap domh \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda Teorem 4.2.23 gereğince h^* ve A_0^* fonksiyonları için

$$(A_0^* h^*)^* = h \circ A_0$$

elde edilir. Her iki tarafın eşleniği alınırsa $A_0^* h^*$ konveks olduğundan

$$(A_0^* h^*)^{**} = cl(A_0^* h^*) = (h \circ A_0)^*$$

bulunur. Afin durum için ise $h(\cdot) := g(\cdot + y_0)$ fonksiyonu tanımlansın. Buna göre $h \in \overline{conv}\mathbb{R}^m$ 'dir ve üstelik

$$h^* = g^* - \langle y_0, \cdot \rangle_m$$

olur. Buradan

$$(g \circ A)(x) = g(A_0(x) + y_0) = h(A_0(x)) = (h \circ A_0)(x)$$

elde edilir. O halde lineer durumdan

$$\begin{aligned}
(g \circ A)^*(s) &= (h \circ A_0)^*(s) \\
&= cl(A_0^* h^*)(s) \\
&= cl\left(\inf_{p \in \mathbb{R}^m} \{h^*(p) \mid A_0^* p = s\} \right) \\
&= cl\left(\inf_{p \in \mathbb{R}^m} \{g^*(p) - \langle y_0, p \rangle \mid A_0^* p = s\} \right)
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. □

Teorem 4.2.26 'dan bir afin dönüşümle bileşke fonksiyonunun eşleniğinin direkt hesaplanamayacağı görülmüş olur. Yani bu eşleniği hesaplamak için kapanış işlemine ihtiyaç vardır. O halde doğal olarak (4.2.47) ile verilen fonksiyonun ne zaman kapalı olacağı yada (4.2.47) 'deki infimum değere bir p noktasında hangi koşullar altında ulaşılabileceği soruları sorulabilir.

Yardımcı Teorem 4.2.27. *$g \in \overline{conv}\mathbb{R}^m$ fonksiyonu $0 \in domg$ koşulunu sağlasın ve $A_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineer dönüşümü verilsin. Eğer $ImA_0 \cap ridomg \neq \emptyset$ ise yani $0 \in ridomg - ImA_0$ oluyorsa, bu durumda*

$$(g \circ A_0)^* = A_0^* g^*$$

olur ve her bir $s \in dom(g \circ A_0)^*$ için,

$$\inf_{p \in \mathbb{R}^m} \{g^*(p) \mid A_0^* p = s\}$$

probleminin en az bir $\bar{p}$ çözümü vardır ve böylece

$$(g \circ A_0)^*(s) = (A_0^* g^*)(s) = g^*(\bar{p})$$

olur.

Kanıt. $(g \circ A_0)^* = A_0^* g^*$ eşitliğinin kanıtlanması için $A_0^* g^*$ görüntü fonksiyonunun kapalı olduğu gösterilmelidir. Bunun için ise $A_0^* g^*$ 'ın alt düzey kümelerinin kapalılığı gösterilmelidir. Keyfi $r \in \mathbb{R}$ verilsin ve $\bar{s} \in \overline{S_r(A_0^* g^*)}$ alınsın. Bu durumda öyle bir $(s_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq S_r(A_0^* g^*)$ dizisi vardır ki $s_k \to \bar{s}$ 'dir. O halde her bir $k \in \mathbb{N}$ için $A_0^* g^*(s_k) \leq r$ 'dir. $A_0^* g^*$ fonksiyonunun tanımı gereği her $\delta_k > 0$ sayısı için $\exists p_k \in \mathbb{R}^m$ vardır ki

$$g^*(p_k) \leq r + \delta_k \ \text{ ve } \ A_0^* p_k = s_k$$

olur. Şimdi $V := spandomg - ImA_0$ altuzayı oluşturulsun ve her bir $k \in \mathbb{N}$ için $proj_V(p_k) = q_k$ olsun. V alt uzayı $spandomg$ 'yi içerdiğinden Önerme 4.2.11 gereğince $\forall z \in affdomf$ ve $\forall p_k \in \mathbb{R}^m$ için $p_k = p_k^u + p_k^v$ olmak üzere

$$g^*(p_k) = \langle p_k^u, z\rangle + g^*(p_k^v)$$

olur. Her $k \in \mathbb{N}$ için $p_k^v = q_k$ olduğundan ve özel olarak $z = 0$ için

$$g^*(p_k) = \langle p_k^u, 0\rangle + g^*(q_k) = g^*(q_k)$$

elde edilir. Üstelik $V^\perp = (spandomg)^\perp \cap KerA_0^*$ olduğundan $q_k - p_k \in KerA_0^*$ yazılabilir ki böylece $A_0^*(p_k) = A_0^*(q_k)$ olur. O halde sonuç olarak her $\delta_k > 0$ sayısı için öyle bir $q_k \in V$ vardır ki

$$g^*(q_k) \leq r + \delta_k \ \text{ ve } \ A_0^* q_k = s_k \tag{4.2.48}$$

olur. Öncelikle bu şekilde oluşturulan $(q_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq V$ dizisinin sınırlı olduğu gösterilsin. Hipotezden $0 \in ri(domg - ImA_0)$ olduğundan $\exists\varepsilon > 0$ sayısı için $B_m(0,\varepsilon) \cap V \subseteq domg - ImA_0$ olur. O halde her bir $z \in B_m(0,\varepsilon) \cap V$ için öyle bir $y \in domg$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ bulunabilir ki $z = y - A_0 x$ şeklinde yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} \langle q_k, z\rangle_m &= \langle q_k, y\rangle_m - \langle q_k, A_0 x\rangle_m \\ &= \langle q_k, y\rangle_m - \langle A_0^* q_k, x\rangle_n \\ \text{(Fenchel Eşitsizliği'nden)} &\leq g(y) + g^*(q_k) - \langle A_0^* q_k, x\rangle_n \\ \text{((4.2.48) eşitsizliğinden)} &\leq g(y) + r + \delta_k - \langle s_k, x\rangle_n \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $y \in domg$ olduğundan $g(y) < \infty$ ve $k \to \infty$ için $\delta_k \to 0$ ve $s_k \to \bar{s}$ olduğuna göre

$$\sup\{\langle q_k, z\rangle \mid k = 1, 2, \ldots\}$$

değeri her bir $z \in B_m(0, \varepsilon) \cap V$ için sınırlı bir değerdir. Buradan $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi V alt uzayı üzerinde sınırlıdır. O halde (q_k) yakınsak bir dizidir yada yakınsak bir alt dizisi vardır. Genellik bozulmadan $q_k \to \tilde{q}$ kabul edilsin. g^* alttan yarı sürekli bir fonksiyon olduğuna göre (4.2.48) 'dan

$$g^*(\tilde{q}) = g^*(\liminf q_k) \leq \liminf g^*(q_k) \leq r \quad \text{ve} \quad A_0^* \tilde{q} = \bar{s}$$

elde edilir.

$$A_0^* g^*(\bar{s}) = \inf_{\tilde{q}}\{g^*(\tilde{q})\} \leq r$$

olduğundan $\bar{s} \in S_r(A_0^* g^*)$ bulunur. $S_r(A_0^* g^*)$ kapalıdır. □

Teorem 4.2.28. *$g \in \overline{conv}\mathbb{R}^m$, $A_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineer bir fonksiyon ve $y_0 \in \mathbb{R}^m$ olmak üzere $A(x) = A_0(x) + y_0$ afin fonksiyonu verilsin. Eğer*

$$A(\mathbb{R}^n) \cap ridomg \neq \emptyset$$

oluyorsa bu durumda her bir $s \in dom(g \circ A_0)^*$ için

$$\min_{p\in\mathbb{R}^m}\{g^*(p) - \langle p, y_0\rangle \mid A_0^* p = s\}$$

probleminin en az bir $\bar{p}$ çözümü vardır ve

$$(g \circ A)^*(s) = g^*(\bar{p}) - \langle \bar{p}, y_0\rangle$$

dır.

Kanıt. $A(\mathbb{R}^n) \cap ridomg \neq \emptyset$ olduğundan $\bar{y} := A(\bar{x}) \in ridomg$ olacak şekilde bir $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ vardır. Buna göre $\bar{g}(x) := (\bar{y} + x) \in \overline{conv}\mathbb{R}^m$ fonksiyonu göz önüne alınsın. O halde

$$\begin{aligned}
(g \circ A)(x) &= g(A(x) - \bar{y} + \bar{y}) \\
&= \bar{g}(A(x) - \bar{y}) \\
&= \bar{g}(A(x) - A(\bar{x})) \\
&= \bar{g}(A_0(x) + y_0 - A_0(\bar{x}) - y_0) \\
&= \bar{g}(A_0(x - \bar{x})) \\
&= (\bar{g} \circ A_0)(x - \bar{x})
\end{aligned}$$

olur. Böylece Önerme 4.2.8 (v) şıkkından dolayı

$$(g \circ A)^*(s) = (\bar{g} \circ A_0)^*(s) + \langle s, \bar{x} \rangle$$

olacaktır. O halde bir önceki lemma kullanılarak bu eşlenik fonksiyon hesaplanabilir. Ancak öncelikle $ridom\bar{g} \cap ImA_0 \neq \emptyset$ olduğu gösterilmelidir. $\bar{y} \in ridomg$ ve $ridom\bar{g} = ridomg - \{\bar{y}\}$ olduğundan $0 \in ridom\bar{g}$ 'dir. Üstelik $0 \in ImA_0$ olduğundan $0 \in ridom\bar{g} \cap ImA_0$ elde edilir. O halde Yardımcı Teorem 4.2.27 'den her bir $s \in dom(\bar{g} \circ A_0)^*$ için

$$(\bar{g} \circ A_0)^*(s) = \min_{p \in \mathbb{R}^m} \{\bar{g}^*(p) \mid A_0^* p = s\} = \bar{g}^*(\bar{p})$$

olacak şekilde $\exists \bar{p} \in \mathbb{R}^m$ vardır. Böylece

$$\begin{aligned}
(g \circ A)^*(s) - \langle s, \bar{x} \rangle &= (\bar{g} \circ A_0)^*(s) \\
&= \min_{p \in \mathbb{R}^m} \{g^*(p) - \langle p, A_0\bar{x} + y_0 \rangle \mid A_0^* p = s\} \\
&= \min_{p \in \mathbb{R}^m} \{g^*(p) - \langle p, A_0\bar{x} \rangle - \langle p, y_0 \rangle \mid A_0^* p = s\} \\
&= \min_{p \in \mathbb{R}^m} \{g^*(p) - \langle A_0^* p, \bar{x} \rangle - \langle p, y_0 \rangle \mid A_0^* p = s\} \\
&= \min_{p \in \mathbb{R}^m} \{g^*(p) - \langle s, \bar{x} \rangle - \langle p, y_0 \rangle \mid A_0^* p = s\} \\
&= \min_{p \in \mathbb{R}^m} \{g^*(p) - \langle p, y_0 \rangle \mid A_0^* p = s\} - \langle s, \bar{x} \rangle
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$(g \circ A)^*(s) = \min_{p \in \mathbb{R}^m} \{g^*(p) - \langle p, y_0 \rangle \mid A_0^* p = s\}$$

eşitliği elde edilir. □

(iii) İki Konveks Fonksiyonun Toplamının Eşleniği

Eşlenikliğin simetriklik özelliği göz önüne alınırsa Sonuç 4.2.25 gereğince herhangi iki fonksiyonun toplamının eşleniğinin, fonksiyonların eşleniklerinin infimal konvolüsyonu olması beklenir. Ancak görüntü fonksiyonu için karşılaşılan bazı güçlükler iki fonksiyonun toplamının eşleniği hesaplanırken de ortaya çıkacaktır.

Teorem 4.2.29. *$g_1, g_2 \in \overline{conv}\mathbb{R}^n$ fonksiyonları verilsin ve $dom g_1 \cap dom g_2 \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda*

$$(g_1 + g_2)^* = cl(g_1^* \nabla g_2^*)$$

olur.

Kanıt. Eğer $dom f_1^* \cap dom f_2^* \neq \emptyset$ ise

$$(f_1 \nabla f_2)^* = f_1^* + f_2^*$$

olduğu gösterilmişti. O halde, kapalı konveks fonksiyonlar olarak $g_1 = f_1^*$ ve $g_2 = f_2^*$ alınırsa

$$(g_1^* \nabla g_2^*)^* = g_1 + g_2$$

yazılabilir. Buradan her iki tarafın eşleniği alınırsa

$$\overline{co}(g_1^* \nabla g_2^*) = (g_1 + g_2)^*$$

elde edilir. g_1^* ve g_2^* konveks olduklarından $g_1^* \nabla g_2^*$ konveks olacaktır. Böylece

$$(g_1 + g_2)^* = cl(g_1^* \nabla g_2^*)$$

elde edilir. □

Görüldüğü gibi $g_1 + g_2$ 'nin eşleniğinin hesaplanabilmesi için yine kapanış alma işlemine ihtiyaç duyulmaktadır. Buna göre $g_1^* \nabla g_2^*$ fonksiyonunun ne zaman kapalı olacağı sorusu doğal olarak sorulabilir.

Teorem 4.2.30. *$g_1, g_2 \in \overline{conv}\mathbb{R}^n$ fonksiyonları verilsin ve*

$$ridomg_1 \cap ridomg_2 \neq \emptyset \quad [denk\ olarak\ \ 0 \in ri(domg_1 - domg_2)]$$

koşulu sağlansın. Bu durumda

$$(g_1 + g_2)^* = g_1^* \nabla g_2^*$$

olur ve her bir $s \in (g_1 + g_2)^*$ için

$$\inf\{g_1^*(p) + g_2^*(q) \mid p + q = s\}$$

probleminin $(\bar{p}, \bar{q})$ gibi en az bir çözümü vardır ve bu çözüm

$$g_1^*(\bar{p}) + g_2^*(\bar{q}) = (g_1^* \nabla g_2^*)(s) = (g_1 + g_2)^*$$

eşitliğini sağlar.

Kanıt. Kanıt için öncelikle

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto & g(x_1, x_2) := g_1(x_1) + g_2(x_2) \end{array}$$

kapalı konveks fonksiyonu ve

$$\begin{array}{rcl} A : \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ x & \mapsto & A(x) := (x, x) \end{array}$$

lineer dönüşümü tanımlansın. Bu durumda $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$(g \circ A)(x) = g(A(x)) = g(x, x) = g_1(x) + g_2(x) = (g_1 + g_2)(x)$$

olduğundan $g_1 + g_2 = g \circ A$ elde edilir. Diğer taraftan

$$ridomg = ridomg_1 \times ridomg_2 \ \text{ ve } \ ridomg_2 \cap ridomg_2 \neq \emptyset$$

olduğundan $(s_0, s_0) \in ridomg_1 \times ridomg_2 = ridomg$ olacak şekilde $s_0 \in \mathbb{R}^n$ vardır. Üstelik $(s_0, s_0) \in ImA$ olacağından $0 \in ridomg - ImA$ elde edilir. O halde Yardımcı Teorem 4.2.27 koşulları sağlandığından

$$(g_1 + g_2)^* = (g \circ A)^* = A^* g^*$$

olur. Buna göre A lineer dönüşümünün adjointi olan A^* 'ın ve g^* 'ın hesaplanması gerekir. Keyfi $x \in \mathbb{R}^n$ ve $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ için,

$$\begin{aligned}\langle Ax, (y_1, y_2)\rangle_{2n} &= \langle (x, x), (y_1, y_2)\rangle_{2n} \\ &= \langle x, y_1\rangle_n + \langle x, y_2\rangle_n \\ &= \langle x, y_1 + y_2\rangle_n\end{aligned}$$

olduğuna göre

$$A^*(y_1, y_2) = y_1 + y_2$$

bulunur. Diğer taraftan Önerme 4.2.8 (ix) kuralından her bir $p, q \in \mathbb{R}^n$ için

$$g^*(p, q) = g_1^*(p) + g_2^*(q)$$

olacaktır. Böylelikle her bir $s \in \mathbb{R}^n$ için

$$\begin{aligned}(g_1 + g_2)^*(s) &= A^* g^*(s) \\ &= \inf_{p,q \in \mathbb{R}^n} \{g^*(p, q) \mid A^*(p, q) = s\} \\ &= \inf_{p,q \in \mathbb{R}^n} \{g_1^*(p) + g_2^*(q) \mid p + q = s\} \\ &= (g_1^* \nabla g_2^*)(s)\end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$(g_1 + g_2)^* = g_1^* \nabla g_2^*$$

sonucuna ulaşılır. □

Uyarı 4.2.31. *Teorem 4.2.30 'un optimizasyon problemlerine önemli bir uygulaması vardır:*

$g_1, g_2 \in \overline{conv}\mathbb{R}^n$ *fonksiyonları verilsin ve*

$$\mu := \inf\{g_1(x) + g_2(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$$

sonlu bir değer olsun. Bu durumda

$$0 \in ri(domg_1 - domg_2)$$

şartı getirilirse

$$[(g_1 + g_2)^*(0) =] - \mu = \inf_{s \in \mathbb{R}^n} [g_1^*(s) + g_2^*(-s)]$$

eşitliği elde edilir ki bu Fenchel Dualite Teoremi olarak bilinir.

(iv) Eşlenik Fonksiyonların İnfimumu ve Supremumu

Eşleniklik dönüşümünün fonksiyonların toplamı ile infimum konvolüsyonları arasında ve görüntü fonksiyonu ile lineer dönüşümle sağdan bileşke arasında bir simetri oluşturduğu gösterilmiştir. Şimdi ise eşleniklik dönüşümü fonksiyonların supremumları ile infimumlarının kapalı konveks zarfı arasında bir simetri kuracaktır.

Teorem 4.2.32. $\{f_j\}_{j\in J}$ *(4.2.40) koşullarını sağlayan fonksiyonların bir ailesi ve* $\exists s \in \mathbb{R}^n$ *için*

$$\sup\{f_j^*(s) \mid j \in J\} < +\infty$$

olsun. Bu durumda $f := \inf\limits_{j\in J} f_j$ *fonksiyonu da (4.2.40) koşullarını sağlar ve*

$$f^* = (\inf_{j\in J} f_j)^* = \sup_{j\in J} f_j^* \tag{4.2.49}$$

olur.

Kanıt. Keyfi $s \in \mathbb{R}^n$ alınsın. Eşlenik fonksiyonun tanımı gereği

$$\begin{aligned}
f^*(s) &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n} [\langle s, x\rangle - f(x)] \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^n} [\langle s, x\rangle - \inf_{j\in J} f_j(x)] \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^n} [\langle s, x\rangle + \sup_{j\in J}(-f_j(x))] \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sup_{j\in J} [\langle s, x\rangle - f_j(x)] \\
&= \sup_{j\in J} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} [\langle s, x\rangle - f_j(x)] \\
&= \sup_{j\in J} f_j^*(s)
\end{aligned}$$

bulunur. □

Örnek 4.2.33. $\emptyset \neq C \subseteq \mathbb{R}^n$ *kümesi verilsin ve* C *kümesine uzaklık fonksiyonu olan*

$$\mathbb{R}^n \ni x \mapsto d_C(x) = \inf\{\|x - y\| \mid y \in C\}$$

fonksiyonu ele alınsın. $f_y(x) := \|x-y\|$ *denirse,* $\|\cdot\|$ *fonksiyonun eşleniği birim yuvarın indikatör fonksiyonu olduğundan ve Önerme 4.2.8 (v) kuralından*

$$f_y^*(s) = i_{B(0,1)}(s) + \langle s, y\rangle$$

elde edilir. O halde

$$(d_C)^*(s) = i_{B(0,1)}(s) + \sup_{y\in C}\langle s, y\rangle = i_{B(0,1)}(s) + \sigma_C(s)$$

olduğundan

$$(d_C)^* = i_{B(0,1)} + \sigma_C$$

elde edilir.

Örnek 4.2.34. *$f \in \overline{conv}\mathbb{R}^n$ fonksiyonu ve $\partial f(x_0) \neq \emptyset$ olan bir $x_0 \in domf$ verilsin. $t > 0$ olmak üzere fark bölüm fonksiyonu*

$$\mathbb{R}^n \ni d \mapsto f_t(d) := \frac{f(x_0 + td) - f(x_0)}{t}$$

biçiminde tanımlanmıştı. $d = 0$ seçilirse her $t > 0$ sayısı için $f_t(d) = 0 < +\infty$ olacağından $\sup_{t>0} f_t(0) < +\infty$ olur. Diğer taraftan $s_0 \in \partial f(x_0)$ olmak üzere her bir $d \in \mathbb{R}^n$ için $f_t(d) \geq \langle s_0, d\rangle$ olur. Gerçekten;

$$\begin{aligned} s_0 \in \partial f(x_0) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall d \in \mathbb{R}^n \text{ için } \langle s_0, d\rangle \leq f'(x_0, d) \\ &\Leftrightarrow \quad \forall d \in \mathbb{R}^n \text{ için } \langle s_0, d\rangle \leq \inf_{t>0} f_t(d) \leq f_t(d) \\ &\Leftrightarrow \quad \forall d \in \mathbb{R}^n \text{ için } f_t(d) \geq \langle s_0, d\rangle \end{aligned}$$

olur. O halde f_t fonksiyonlarının herbiri $\langle s_0, \cdot\rangle$ lineer dönüşümü ile alttan sınırlıdır. Üstelik f_t 'ler t 'ye göre artan olduklarından $t \to 0^+$ için $\inf f_t$ değeri vardır ve bu değer $f'(x_0, \cdot)$ yönlü türevine eşittir. Dolayısıyla

$$[f'(x_0, \cdot)]^*(s) = \sup_{t>0}[f_t^*(s)]$$

olmalıdır. Ayrıca Önerme 4.2.8 ile verilen kurallar kullanılarak

$$f_t^*(s) = \frac{f^*(s) + f(x_0) - \langle s, x_0\rangle}{t}$$

elde edilir. Böylelikle

$$[f'(x_0, \cdot)]^*(s) = \sup_{t>0} \frac{f^*(s) + f(x_0) - \langle s, x_0\rangle}{t}$$

bulunur. Buradan

$$f^*(s) + f(x_0) + \langle s, x_0\rangle = 0 \;\Leftrightarrow\; s \in \partial f(x_0)$$

olduğuna göre

$$[f'(x_0, \cdot)]^* = i_{\partial f(x_0)}$$

sonucuna ulaşılır.

Teorem 4.2.35. *$\{g_j\}_{j\in J}$ $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı kapalı konveks fonksiyonların bir ailesi olsun. Eğer $g := \sup_{j\in J} g_j \not\equiv +\infty$ oluyorsa, g kapalı ve konveks bir fonksiyondur ve*

$$g^* = (\sup_{j\in J} g_j)^* = \overline{co}(\inf_{j\in J} g_j^*)$$

olur.

Kanıt. Teorem 4.2.32 gereğince $\sup_{j\in J} g_j \not\equiv +\infty$ koşulu sağlandığında

$$(\inf_{j\in J} f_j)^* = \sup_{j\in J} f_j^*$$

olduğu açıktır. Buna göre her bir $j \in J$ için $f_j = g_j^*$ ve böylece $f_j^* = g_j^{**} = g_j$ alınırsa,

$$(\inf_{j\in J} g_j^*)^* = \sup_{j\in J} g_j^*$$

olur. Her iki tarafın tekrar eşleniği alınırsa

$$(\inf_{j\in J} g_j^*)^{**} = \overline{co}(\inf_{j\in J} g_j^*) = (\sup_{j\in J} g_j)^*$$

elde edilir. □

(v) Bir Konveks Fonksiyonun Artan Bir Konveks Fonksiyonla Soldan Bileşkesinin Eşleniği

Daha önce Önerme 1.4.36 ile bir konveks fonksiyonun artan bir konveks fonksiyonla soldan bileşkesinin konveks olduğu gösterilmişti. O halde bu bileşke fonksiyonunun da eşleniğinden bahsedilebilebilir. Şimdi bu fonksiyonun eşleniği hesaplanacaktır.

Teorem 4.2.36. *$f \in \overline{conv}\mathbb{R}^n$ ile $g \in \overline{conv}\mathbb{R}$ artan fonksiyonu verilsin ve $f(\mathbb{R}^n) \cap intdomg \neq \emptyset$ olsun. Ayrıca her bir $s \in dom(g \circ f)^*$ için*

$$\mathbb{R} \ni \alpha \mapsto \psi_s(\alpha) := \begin{cases} \alpha f^*(\frac{s}{\alpha}) + g^*(\alpha) & , \quad \alpha > 0 \\ \sigma_{domf}(s) + g^*(0) & , \quad \alpha = 0 \\ +\infty & , \quad \alpha < 0 \end{cases}$$

biçimindeki $\psi_s \in \overline{conv}\mathbb{R}$ fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda

$$(g \circ f)^*(s) = \min_{\alpha \in \mathbb{R}} \psi_s(\alpha)$$

olur.

Kanıt. g fonksiyonu artan olduğundan ve

$$i_{epif}(x, r) = \begin{cases} 0 & , \quad f(x) \leq r \\ +\infty & , \quad f(x) > r \end{cases}$$

ile tanımlandığından, eşlenik fonksiyonun tanımı gereği

$$\begin{aligned} -(g \circ f)^*(s) &= -\sup_{x \in \mathbb{R}^n} [\langle s, x \rangle - (g \circ f)(x)] \\ &= \inf_{x \in \mathbb{R}^n} [(g(f(x)) - \langle s, x \rangle] \\ &= \inf_{(x,r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} \{(g(r) - \langle s, x \rangle \mid f(x) \leq r\} \\ &= \inf_{(x,r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} [g(r) - \langle s, x \rangle + i_{epif}(x, r)] = \mu \end{aligned}$$

olur. Burada $f_1(x, r) = g(r) - \langle s, x \rangle$ ve $f_2(x, r) = i_{epif}(x, r)$ olarak alınırsa eşlenik bulma problemi

$$\mu = \inf\{f_1(x, r) + f_2(x, r) \mid (x, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}\}$$

biçimindeki infimum bulma problemine dönüşmüş olur. Üstelik f_1 ve f_2'nin tanımlanışları gereği $domf_1 = \mathbb{R}^n \times domg$ ve $domf_2 = epif$ olduğuna göre ve hipotez gereğince

$$intdomf_1 \cap intdomf_2 = (\mathbb{R}^n \times domg) \cap epif \neq \emptyset$$

koşulu sağlandığına göre, Uyarı 4.2.31 ile verilen Fenchel Dualite Teoremi kullanılarak

$$(f_1+f_2)^*(0) = -\mu = \min_{(p,\alpha)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}}[f_1^*(p,\alpha)+f_2^*(-(p,\alpha))]$$

yzaılabilir. Böylece

$$(g\circ f)^*(s) = -\min_{(p,\alpha)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}}[f_1^*(-p,\alpha)+f_2^*(p,-\alpha)]$$

olduğundan öncelikle f_1^* ve f_2^* hesaplanmalıdır. Buna göre $f_1^*(p,\alpha) = g^*(\alpha) + i_{\{-s\}}(p)$ ve $f_2^*(p,\alpha) = \sigma_{epif}(p,\alpha)$ olduğuna göre

$$(g\circ f)^*(s) = \min_{(p,\alpha)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}}\big[g^*(\alpha)+i_{\{s\}}(-p)+\sigma_{epif}(p,-\alpha)\big]$$

olur. Ayrıca

$$\sigma_{epif}(p,-\alpha) = \begin{cases} \alpha f^*(\frac{p}{\alpha}) & , \quad \alpha>0 \\ \sigma_{domf}(p) & , \quad \alpha=0 \\ +\infty & , \quad \alpha<0 \end{cases}$$

olduğuna göre

$$(g\circ f)^*(s) = \min_{(p,\alpha)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}} \begin{cases} \alpha f^*(\frac{s}{\alpha})+g^*(\alpha) & , \quad \alpha>0 \\ \sigma_{domf}(s)+g^*(0) & , \quad \alpha=0 \\ +\infty & , \quad \alpha<0 \end{cases}$$

elde edilir. □

4.2.7 Eşlenik Fonksiyonunun Türevlenebilirliği

Eğer f kapalı konveks bir fonksiyon ise

$$s \in \partial f(x) \;\Leftrightarrow\; x \in \partial f^*(s)$$

olduğu önceki bölümde gösterilmişti. Bu geometrik olarak $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ uzayında ∂f ve ∂f^* küme değerli dönüşümlerinin grafiklerinin

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \\ (x,s) & \mapsto & (s,x) \end{array}$$

dönüşümü altında birbirlerinin görüntüleri olduğunu gösterir. Buna göre, bir konveks fonksiyonun, subdiferansiyelinin tek nokta kümesi olduğu durumda türevlenebilir olduğunu kullanarak f^* eşlenik dönüşümünün türevlenebilirliği ile ∂f 'in monotonluk özellikleri arasında bir ilişki kurulabilir.

Teorem 4.2.37. *[4] $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ kesin konveks ve kapalı bir fonksiyon olsun. Bu durumda $intdomf^* \neq \emptyset$ 'dir ve f^* eşlenik fonksiyonu $intdomf^*$ üzerinde sürekli türevlenebilirdir.*

Kanıt. $x_0 \in domf$ ve sıfırdan farklı bir $d \in \mathbb{R}^n$ alınsın. Bu durumda f kesin konveks olduğundan her $t > 0$ sayısı için

$$\frac{f(x_0+td)-f(x_0)}{t} + \frac{f(x_0-td)-f(x_0)}{t} > 0$$

olur. Gerçekten, $x_0 = \frac{1}{2}(x_0+td) + \frac{1}{2}(x_0-td)$ olduğundan ve f 'in kesin konveksliğinden

$$f(x_0) < \frac{1}{2}f(x_0+td) + \frac{1}{2}f(x_0-td)$$

olur. Buradan gerekli düzenlemeler yapılarak

$$\frac{1}{2}[f(x_0+td)-f(x_0)] + \frac{1}{2}[f(x_0-td)-f(x_0)] > 0$$

bulunur. Bu eşitsizlik $\frac{2}{t} > 0$ sayısı ile çarpılırsa

$$\frac{f(x_0+td)-f(x_0)}{t} + \frac{f(x_0-td)-f(x_0)}{t} > 0$$

elde edilir. Buradan $t > 0$ sayıları üzerinden supremum alınırsa

$$f'_\infty(d) + f'_\infty(-d) > 0$$

elde edilir. $f'_\infty = \sigma_{domf^*}$ olduğuna göre

$$\sigma_{domf^*}(d) + \sigma_{domf^*}(-d) > 0$$

yazılabilir. Yani $domf^*$ kümesi, sıfırdan farklı her bir $d \in \mathbb{R}^n$ yönü için pozitif genişliğe sahiptir. Bu ise Teorem 2.2.8 (iii) gereğince $intdomf^* \neq \emptyset$ olduğunu gösterir.

Şimdi f^* 'ın $intdomf^*$ üzerinde en az bir noktada türevlenebilir olmadığı kabul edilsin. O halde $\exists s \in intdomf^*$ için $\partial f^*(s)$ iki farklı $s_1 \neq s_2$ subgradientlerine sahiptir. Buna göre $s \in \partial f(x_1) \cap \partial f(x_2)$ ve böylece

$$f^*(s) + f(x_1) = \langle s, x_1 \rangle \quad \text{ve} \quad f^*(s) + f(x_2) = \langle s, x_2 \rangle$$

olur. Buradan $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ ve $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f^*(s) + \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) &= \alpha_1(f^*(s) + f(x_1)) + \alpha_2(f^*(s) + f(x_2)) \\ &= \alpha_1\langle s, x_1 \rangle + \alpha_2\langle s, x_2 \rangle \\ &= \langle s, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \rangle \\ &\leq f^*(s) + f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \end{aligned}$$

olur. Yani

$$f^*(s) + \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) \leq f^*(s) + f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$$

ve böylelikle

$$\alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) \leq f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$$

bulunur ki bu eşitsizlik f fonksiyonunun kesin konveks oluşuyla çelişir. O halde kabul yanlıştır yani f^* $intdomf^*$ üzerinde türevlenebilirdir. $\square$

Örnek 4.2.38. *$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1 + \|x\|^2}$ fonksiyonu verilsin. Bu fonksiyonun eşleniği*

$$f^*(s) = \begin{cases} -\sqrt{1 - \|s\|^2} & , \quad \|s\| \leq 1 \\ +\infty & , \quad \|s\| > 1 \end{cases}$$

fonksiyonudur. Buna göre dom$f^* = \overline{B}(0,1)$ *olur. Burada* f *kesin konvekstir,* int*dom*$f^* = B(0,1) \neq \emptyset$ *'dir ve* f^* $B(0,1)$ *üzerinde türevlenebilirdir. Ancak birim yuvarın sınırı olan* $S(0,1)$ *üzerinde* $\nabla f^* = \emptyset$ *olduğu açıktır. Yani kesin konveks fonksiyonlar için türevlenebilme etkin tanım kümesinin sınırı üzerinde bozulabilir. Üstelik burada* f^* *da kesin konveks bir fonksiyondur ve böylece* f *'in türevlenebilirliği söylenebilir.*

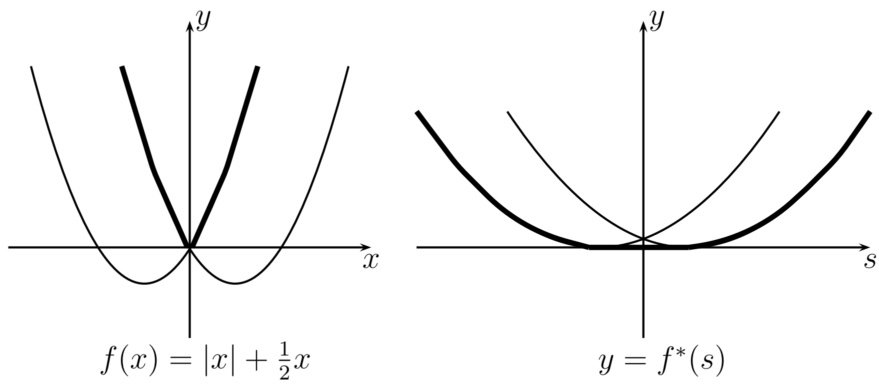
Örnek 4.2.39. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x| + \frac{1}{2}x^2 = \max\{\frac{1}{2}x^2 + x, \frac{1}{2}x^2 - x\}$ *fonksiyonu verilsin. Buna göre* f $x = 0$ *noktasında türevlenebilir değildir. Ayrıca*

$$f^*(s) = \begin{cases} \frac{1}{2}(s+1)^2 & , \quad s \leq -1 \\ \frac{1}{2}(s-1)^2 & , \quad s \geq 1 \\ 0 & , \quad |s| \leq 1 \end{cases}$$

olur. $s_1 = 1,\ s_2 = -1 \in dom f^*$ *alınırsa* $\alpha \in [0,1]$ *olmak üzere*

$$f^*(\alpha s_1 + (1-\alpha)s_2) = 0 = \alpha f^*(s_1) + (1-\alpha)f^*(s_2)$$

olduğundan f^* *kesin konveks değildir.*



Şekil 4.14: $x = 0$ noktasında türevlenebilir olmayan ve eşleniği kesin konveks olmayan f fonksiyonu

Bir kapalı konveks fonksiyonun türevlenebilir olması ile ilgili bir yeter koşul verildi. Sınırda oluşabilecek sorunlar dışında bu koşul aynı zamanda gerekli koşul olarak verilebilir.

Teorem 4.2.40. *[4] $f \in \overline{conv}\mathbb{R}^n$ fonksiyonu verilsin ve f $\Omega := intdomf$ üzerinde türevlenebilir olsun. Bu durumda f^* her bir $C \subseteq \nabla f(\Omega)$ konveks kümesi üzerinde kesin konveks olur.*

Kanıt. $C \subseteq \nabla f(\Omega)$ konveks bir küme olmak üzere f^* 'ın C üzerinde kesin konveks olmadığı kabul edilsin. Bu durumda öyle iki farklı $s_1, s_2 \in C$ noktaları vardır ki f^* $[s_1, s_2]$ doğru parçası üzerinde afindir.

$$s := \frac{1}{2}(s_1 + s_2) \in C \subseteq \nabla f(\mathbb{R}^n)$$

tanımlansın. Buna göre öyle bir $x \in \Omega$ vardır ki $\nabla f(x) = s$ 'dir. Bu ise $x \in \partial f^*(s)$ olduğu anlamına gelir. Şimdi f^* 'ın $[s_1, s_2]$ üzerinde afin olduğu kullanılarak

$$\begin{aligned} 0 &= f(x) + f^*(s) - \langle s, x \rangle \\ &= f(x) + f^*(\tfrac{1}{2}(s_1 + s_2)) - \langle \tfrac{1}{2}(s_1 + s_2), x \rangle \\ &= f(x) + \tfrac{1}{2} f^*(s_1) + \tfrac{1}{2} f^*(s_2) - \tfrac{1}{2}\langle s_1, x \rangle - \tfrac{1}{2}\langle s_2, x \rangle \\ &= \tfrac{1}{2}\underbrace{[f(x) + f^*(s_1) - \langle s_1, x \rangle]}_{\geq 0} + \tfrac{1}{2}\underbrace{[f(x) + f^*(s_2) - \langle s_2, x \rangle]}_{\geq 0} \end{aligned}$$

yazılabilir. O halde

$$f(x) + f^*(s_1) - \langle s_1, x \rangle = 0 \text{ ve } f(x) + f^*(s_2) - \langle s_2, x \rangle$$

elde edilir. Buna göre

$$x \in \partial f^*(s_1) \text{ ve } x \in \partial f^*(s_2)$$

ve böylece

$$s_1, s_2 \in \partial f(s)$$

bulunur. $x \in \Omega$ olduğundan bu durum f 'in Ω üzerinde türevlenebilir olması ile çelişir. dolayısıyla kabul yanlıştır, f^* kesin konvekstir. $\square$

Uyarı 4.2.41. *f^* eşlenik fonksiyonunun kesin konveksliği genel olarak $\nabla f(intdomf)$ kümesinin dışına genişletilemez ve bu küme tahmin edilenden çok daha küçük bir küme olabilir.*

Şimdi bu bölüm Legendre Dönüşümü 'nün iyi tanımlılığını veren bir karakterizasyon ile sonuçlandırılsın.

Sonuç 4.2.42. *[4] $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kesin konveks, türevlenebilir ve 1-coercive bir fonksiyon olsun. Bu durumda*

(i) $domf^* = \mathbb{R}^n$ 'dir, f^* kesin konveks, 1-coercive ve türevlenebilir bir fonksiyondur.

(ii) $\nabla f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sürekli fonksiyonu birebirdir ve tersi de süreklidir.

(iii) Her bir $s \in \mathbb{R}^n$ için $f^*(s) = \langle s, (\nabla f)^{-1}(s)\rangle - f((\nabla f)^{-1}(s))$ olur.

Kanıt.

(i) Önerme 4.2.7 gereğince $\sigma_{domf^*} = f'_\infty$ olduğu açıktır. f fonksiyonu 1-coercive olduğundan $f'_\infty = i_{\{0\}}$ 'dır. Böylece

$$\sigma_{domf^*} = i_{\{0\}} = \sigma_{\mathbb{R}^n}$$

olduğundan $domf^* = \mathbb{R}^n$ elde edilir.

İkinci olarak $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sonlu değer alan bir fonksiyon olduğundan

$$domf = intdomf = \mathbb{R}^n$$

olduğu açıktır. Üstelik f $\mathbb{R}^n$ üzerinde türevlenebilir olduğundan Teorem 4.2.40 gereğince, f^* fonksiyonu her bir $C \subseteq \nabla f(\mathbb{R}^n)$ konveks kümesi üzerinde kesin konvekstir. O halde f^* 'ın tüm $\mathbb{R}^n$ üzerinde kesin konveks olduğunun kanıtlanabilmesi için

$$\nabla f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$$

olduğu gösterilmelidir. Bunun için keyfi bir $r_0 \in \mathbb{R}^n$ alınsın. $\nabla f(x_0) = r_0$ olacak şekilde $\exists x_0 \in \mathbb{R}^n$ vektörü var mıdır? Öncelikle $x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$g(x) := f(x) - \langle r_0, x\rangle$$

fonksiyonu tanımlansın. Tanımlanışı gereği g kesin konveks, türevlenebilir bir fonksiyondur ve $\nabla g(x) = \nabla f(x) - r_0$ 'dır. Diğer taraftan f 1-coercive olduğundan 0-coercive bir fonksiyondur. Dolayısıyla

$$\lim_{\|x\|\to\infty} g(x) = \lim_{\|x\|\to\infty} f(x) - \langle r_0, x\rangle = +\infty$$

elde edilir. O halde g fonksiyonu da 0-coercive olur. Böylece 0-coercive, kesin konveks ve türevlenebilir bir fonksiyon olarak g 'nin $\mathbb{R}^n$ üzerinde en az bir global minimum noktası vardır. Yani $\exists x_0 \in \mathbb{R}^n$ için $\nabla g(x_0) = 0$ olur. O halde bu $x_0 \in \mathbb{R}^n$ vektörü için $\nabla f(x_0) = r_0$ elde edilir. Böylece $\nabla f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$ eşitliği gösterilmiş olur. Sonuç olarak f^* tüm $\mathbb{R}^n$ üzerinde kesin konvekstir.

Diğer taraftan f kesin konveks ve $intdomf^* = \mathbb{R}^n$ olduğundan Teorem 4.2.37 gereğince f^* tüm $\mathbb{R}^n$ üzerinde sürekli türevlenebilirdir.

Son olarak f^* 'ın 1-coercive olduğunun kanıtlanması için

$$(f^*)'_\infty = i_{\{0\}} = \sigma_{\mathbb{R}^n}$$

eşitliği gösterilmelidir. $(f^*)'_\infty = \sigma_{domf}$ olduğundan ve $domf = \mathbb{R}^n$ olduğuna göre istenen eşitlik elde edilmiş olur.

(ii) Teorem 4.2.37 f^* kesin konveks fonksiyonuna uygulanırsa, f^{**} fonksiyonu $intdomf^*$ üzerinde sürekli türevlenebilirdir. O halde $f^{**} = f$ olduğundan ve $intdomf^* = \mathbb{R}^n$ eşitliğine göre f tüm $\mathbb{R}^n$ üzerinde sürekli türevlenebilirdir. Yani ∇f sürekli bir fonksiyondur.

Diğer taraftan $x, y \in \mathbb{R}^n$ ve $\nabla f(x) \neq \nabla f(y)$ olsun. f kesin konveks olduğundan ∇f kesin monoton bir fonksiyondur. Yani

$$\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y\rangle > 0$$

olur. O halde $x \neq y$ olmalıdır. Dolayısıyla ∇f birebirdir. ∇f örten de olduğundan tersi vardır ve süreklidir.

(iii) Eşlenik fonksiyonunun tanımı gereği

$$f^*(s) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} [\langle s, x\rangle - f(x)]$$

olduğundan $g(x) := \langle s, x \rangle - f(x)$ denirse

$$\nabla g(x) = s - \nabla f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; s = \nabla f(x) \;\Leftrightarrow\; x = (\nabla f)^{-1}(s)$$

elde edilir. O halde

$$f^*(s) = \langle s, (\nabla f)^{-1}(s) \rangle - f((\nabla f)^{-1}(s))$$

bulunur. $\square$

4.3 Herhangi Bir Topolojik Vektör Uzayı Üzerinde Tanımlı Fonksiyonların Eşleniği

Bu bölümde öncelikle yerel konveks topolojik vektör uzayları ile herhangi bir topolojik vektör uzayının topolojik duali tanımlanacak ve dual vektör uzayı çiftleri tanıtılacaktır. Daha sonra gerçel topolojik vektör uzayları üzerinde tanımlı konveks fonksiyonlar için Sandviç Teoremi ve konveks kümeler için zayıf ve güçlü ayrıma teoremleri verilecektir. Tüm bu hazırlıklar E yerel konveks uzayı üzerinde tanımlı fonksiyonların Gamma Regülerizasyonunun ve daha sonra eşlenik fonksiyonun tanımlanması ve aralarındaki ilişkilerin araştırılmasında kullanılacaktır. Böylelikle eşleniklik kavramı en genel haliyle bu bölümde incelenecek ve en temel özellikleri sunulacaktır.

4.3.1 Yerel Konveks Uzaylar ve Bazı Özellikler

Tanım 4.3.1. *[14] E bir topolojik vektör uzayı olsun. Eğer sıfırın her bir komşuluğu, sıfırın bir konveks komşuluğunu içeriyorsa bu durumda E 'ye **yerel konveks vektör uzayı** denir.*

Tanım 4.3.2. *[14] E bir topolojik vektör uzayı, $M \subseteq E$ ve $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\mp\infty\}$ olmak üzere $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda*

*(i) $domf := \{x \in M \mid f(x) < +\infty\}$ kümesine f'in **etkin tanım kümesi**,*

*(ii) $epif := \{(x,t) \in M \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq t\}$ kümesine f'in **epigrafı**,*

*(iii) $domf \neq \emptyset$ ve her bir $x \in M$ için $f(x) > -\infty$ oluyorsa f 'e **proper fonksiyon** denir.*

Tanım 4.3.3. *[14] E bir topolojik vektör uzayı, $M \subseteq E$ ve $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu verilsin. Eğer $epif$ kapalı bir küme ise bu durumda f fonksiyonu **kapalıdır** denir.*

Tanım 4.3.4. *[14] E bir topolojik vektör uzayı, $M \subseteq E$ konveks bir küme olsun ve $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu verilsin. Eğer her bir $x, y \in M$ ve her $\alpha \in [0,1]$*

sayısı için

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$$

*eşitszliği sağlanıyorsa f 'e **konveks fonksiyon** adı verilir.*

Önerme 4.3.5. *[14] E bir topolojik vektör uzayı, $\emptyset \neq M \subseteq E$ konveks bir küme olsun ve $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda*

(i) f 'in konveks olması için gerek ve yeter koşul, $epif$ 'in konveks bir küme olmasıdır.

(ii) Eğer f konveks ise her bir $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\{x \in M \mid f(x) \leq \lambda\}$ kümesi konvekstir.

Konveks fonksiyonları alttan sınırlayan afin dönüşümler daha önce ele alınmıştı. Şimdi ise konveks fonksiyonları afin bir dönüşümle ayırmak için Sandviç teoremi ifade edilecektir.

Teorem 4.3.6. ***(Sandviç Teoremi)***

E bir topolojik vektör uzayı olsun, $p, q : E \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\mp\infty\}$ proper, konveks fonksiyonları her bir $x \in E$ için $-q(x) \leq p(x)$ eşitsizliğini sağlasın ve

(i) $intdomp \cap domq \neq \emptyset$ ve p fonksiyonu $intdomp$ 'nin en az bir noktasında süreklidir.

(i') $intdomq \cap domp \neq \emptyset$ ve q fonksiyonu $intdomq$ 'nun en az bir noktasında süreklidir.

koşullarından biri sağlansın. Bu durumda $\forall x \in E$ için

$$-q(x) \leq \langle v, x \rangle + c \leq p(x)$$

olacak şekilde en az bir $v : E \to \mathbb{R}$ lineer fonksiyoneli ve $c \in \mathbb{R}$ sayısı vardır.

Şimdi ise konveks kümeler için ayırma kavramı tanıtılarak zayıf ve güçlü ayırma teoremleri ifade edilecektir.

Tanım 4.3.7. *[14] E bir topolojik vektör uzayı olmak üzere*

$$E^* := \{x^* : E \to \mathbb{R} \mid x^* \text{ sürekli lineer fonksiyonel}\}$$

biçiminde tanımlanan vektör uzayına E 'nin ***topolojik duali*** *denir. Buna göre her bir $x^* \in E^*$ fonksiyoneli, her $x \in E$ için*

$$\langle x^*, x\rangle = x^*(x)$$

ile gösterilir.

Tanım 4.3.8. *[14] E bir topolojik vektör uzayı verilsin ve E^* onun topolojik duali olsun. Bu durumda $x^* \in E^*$ fonksiyoneli ve $\alpha \in \mathbb{R}$ sayısı için*

$$[x^* = \alpha] := \{x \in E \mid \langle x^*, x\rangle = \alpha\}$$

biçiminde tanımlı kümeye E 'de bir ***hiperdüzlem*** *adı verilir. Buna göre*

$$[x^* \leq \alpha] := \{x \in E \mid \langle x^*, x\rangle \leq \alpha\} \quad \text{ve} \quad [x^* \geq \alpha] := \{x \in E \mid \langle x^*, x\rangle \geq \alpha\}$$

kümelerine de $[x^* = \alpha]$ hiperdüzleminin belirttiği ***kapalı yarı-uzaylar*** *denir.*

Tanım 4.3.9. *[14] E bir topolojik vektör uzayı ve $A, B \subseteq E$ olsun. Bu durumda,*

(i) Eğer bir $[x^* = \alpha]$ hiperdüzlemi ve bir $\alpha \in \mathbb{R}$ sayısı için $A \subseteq [x^* \leq \alpha]$ ve $B \subseteq [x^* \geq \alpha]$ oluyorsa **A *ile* B *kümeleri ayrılır*** *denir.*

(ii) Eğer bir $[x^* = \alpha]$ hiperdüzlemi, bir $\alpha \in \mathbb{R}$ ve en az bir $\varepsilon > 0$ sayısı için $A \subseteq [x^* \leq \alpha - \varepsilon]$ ve $B \subseteq [x^* \geq \alpha + \varepsilon]$ oluyorsa **A *ile* B *kümeleri güçlü ayrılır*** *denir.*

Teorem 4.3.10. *[14]**(Zayıf Ayırma Teoremi)***
E bir topolojik vektör uzayı olsun, $\emptyset \neq A, B \subseteq E$ konveks kümeleri verilsin ve $intA \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

(i) A ile B ayrılır.

(ii) $intA \cap B = \emptyset$ *'dir.*

Teorem 4.3.11. *[14]**(Güçlü Ayırma Teoremi-1)***
E bir yerel konveks uzay, $\emptyset \neq A, B \subseteq E$ *konveks kümeler olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:*

(i) A *ile* B *güçlü ayrılır.*

(ii) $0 \notin cl(A - B)$ *'dir.*

Teorem 4.3.12. *[14]**(Güçlü Ayırma Teoremi-2)***
E bir yerel konveks uzay, $\emptyset \neq A, B \subseteq E$ *konveks kümeleri verilsin. Eğer A kapalı, B kompakt ve* $A \cap B = \emptyset$ *ise A ile B güçlü ayrılır.*

Tanım 4.3.13. *[14]* E, F *gerçel vektör uzayları olmak üzere*

(i) $a : E \times F \to \mathbb{R}$ *fonksiyoneli verilsin. Eğer seçilip sabitlenmiş her bir* $u \in F$ *için* $a(\cdot, u)$ *fonksiyonu E üzerinde lineer ve her bir* $x \in E$ *için* $a(x, \cdot)$ *fonksiyonu F üzerinde lineer oluyorsa, a fonksiyoneline* $E \times F$ *üzerinde bir **bilineer fonksiyonel** yada **bilineer form** adı verilir.*

(ii) $a : E \times F \to \mathbb{R}$ *bilineer formu verilsin. Eğer*

$$\begin{aligned} \forall x \in E \quad \text{için} \quad a(x, u) = 0 \quad &\Rightarrow \quad u = 0_F \\ \forall u \in F \quad \text{için} \quad a(x, u) = 0 \quad &\Rightarrow \quad x = 0_E \end{aligned} \tag{4.3.50}$$

koşulları sağlanıyorsa, (E, F) *çiftine a bilineer formuna göre **dual vektör uzayı çifti** yada kısaca **dual çift** denir.*

Önerme 4.3.14. *[14] E bir yerel konveks uzay olsun. Bu durumda* (E, E^*) *çifti her* $x \in E$ *ve her* $x^* \in E^*$ *için*

$$a(x, x^*) := \langle x^*, x \rangle$$

bilineer formuna göre dual çifttir.

Tanım 4.3.15. *[14] (E, F) a bilineer formuna göre dual çift olsun. Bu durumda E üzerindeki en zayıf topolojiye* ***zayıf topoloji*** *denir ve $\sigma(E, F)$ ile gösterilir. Daha açık olarak zayıf topoloji her bir $u \in F$ için*

$$E \ni x \mapsto a(x, u)$$

lineer fonksiyonelini sürekli yapan en kaba topolojidir.

Uyarı 4.3.16. *(E, τ) bir yerel konveks topolojik uzay olsun. (E, E^*) bir dual çift olduğundan, E üzerindeki $\sigma(E, E^*)$ zayıf topolojisi tanımlanışı gereği τ topolojisinden daha kabadır. E^* dual uzayı üzerinde ise $\sigma(E^*, E)$* **zayıf* topoloji** *olarak adlandırılır. Ayrıca $(\sigma(E^*, E))$ ve $(\sigma(E^*, E^{**}))$ topolojileri göz önüne alınırsa*

$$[(E, \sigma(E, E^*)), (E^*, \sigma(E^*, E))] \quad ve \quad [(E, \sigma(E, E^*), (E^*, \sigma(E^*, E^{**}))]$$

birbirinden farklı yerel konveks dual çiftlerini oluştururlar.

Şimdi, daha önce üzerinde tanımlı fonksiyonlar için tanımlanan kapalılık özelliğine denk olan alttan yarı süreklilik topolojik vektör uzayları üzerinde incelenecektir.

Tanım 4.3.17. *[14] E bir topolojik vektör uzayı, $\emptyset \neq M \subseteq E$ kümesi, $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu ve $\bar{x} \in M$ noktası verilsin. Bu durumda*

(i) $f(\bar{x}) = -\infty$ veya her bir $k < f(\bar{x})$ sayısı için $\bar{x}$ noktasının bir U komşuluğu her bir $s \in M \cap U$ için $f(x) > k$ olacak şekilde bulunabiliyorsa, **f** ***fonksiyonu*** **x̄** ***noktasında alttan yarı süreklidir*** *denir. Eğer her $\bar{x} \in M$ için f alttan yarı sürekli oluyorsa* **f** ***fonksiyonu*** **M** ***üzerinde alttan yarı süreklidir*** *denir. Eğer $-f$ fonksiyonu $\bar{x}$ noktasında alttan yarı sürekli ise* **f** ***fonksiyonu*** **x̄** ***noktasında üstten yarı süreklidir*** *denir.*

(ii) $x_n \to \bar{x}$ olan her bir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq M$ dizisi için

$$f(\bar{x}) = \liminf_{n \to \infty} f(x_n)$$

oluyorsa **f** ***fonksiyonu*** $\bar{\mathrm{x}}$ ***noktasında alttan dizisel yarı süreklidir*** *denir.*

Önerme 4.3.18. *[14] E bir topolojik vektör uzayı, $M \subseteq E$ boştan farklı bir küme ve $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ verilsin. Bu durumda aşağıdakiler denktir:*

(i) f fonksiyonu M üzerinde alttan yarı süreklidir.

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için $M_\lambda := \{x \in M \mid f(x) \leq \lambda\}$ kümesi M 'ye göre kapalıdır.

(iii) $epif$ $M \times \mathbb{R}$ 'de kapalıdır.

Önerme 4.3.19. *[14] E bir normlu vektör uzayı, $M \subseteq E$ kapalı konveks bir küme ve $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ proper ve konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:*

(i) f fonksiyonu M üzerinde alttan yarı süreklidir.

(ii) f fonksiyonu M üzerinde zayıf alttan yarı süreklidir.

(iii) f fonksiyonu M üzerinde zayıf dizisel alttan yarı süreklidir.

Önerme 4.3.20. *[14] E bir Banach uzayı, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ proper konveks bir fonksiyon ve $intdomf \neq \emptyset$ olsun. Eğer f fonksiyonu alttan yarı sürekli ise $intdomf$ üzerinde süreklidir.*

4.3.2 Gamma Regülerizasyon

Bu kesimde bir yerel konveks uzay üzerinde tanımlı fonksiyonları alttan sınırlayan sürekli ve afin fonksiyonlar yardımıyla gamma regülerizasyonları oluşturulacak ve bazı özellikler incelenecektir. Bunun için bu kesimde tersi söylenmedikçe (E, E^*) yerel konveks uzayların bir dual çifti olarak kabul edilecektir.

Tanım 4.3.21. *[14] $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu verilsin. Buna göre f 'i alttan sınırlayan sürekli ve afin fonksiyonların ailesi*

$$A(f) := \{a : E \to \mathbb{R} \mid a \leq f,\ a \text{ sürekli ve afin}\}$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda $\sup \emptyset = -\infty$ *olmak üzere*

$$\begin{array}{rcl} f^{\Gamma} : E & \to & \overline{\mathbb{R}} \\ x & \mapsto & f^{\Gamma}(x) := \sup\{a(x) \mid a \in A(f)\} \end{array}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona f'in ***Gamma Regülerizasyonu*** *denir.*

Önerme 4.3.22. *[14]* $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ *proper bir fonksiyon ise aşağıdakiler denktir:*

(i) $f = f^{\Gamma}$ *'dır.*

(ii) f *konveks ve alttan yarı süreklidir.*

Kanıt. $(ii) \Rightarrow (i)$ Öncelikle her bir $a \in A(f)$ için $a \leq f$ olduğundan

$$\sup_{a \in A(f)} a(x) \leq f$$

ve böylece

$$f^{\Gamma} \leq f$$

olduğu açıktır.

Ters eşitsizliğin gösterilmesi için $f > f^{\Gamma}$ olduğu kabul edilsin. O halde $\exists x_0 \in E$ ve $\exists k \in \mathbb{R}$ sayısı için

$$f^{\Gamma}(x_0) < k < f(x_0) \tag{4.3.51}$$

yazılabilir. Kanıt için $a(x_0) > k$ olacak şekilde bir $a \in A(f)$ sürekli afin fonksiyonunun varlığı gösterilecek ve böylece $f^{\Gamma}(x_0) > k$ elde edilerek (4.3.51) ile çelişki ortaya çıkarılacaktır.

f konveks ve alttan yarı sürekli olduğundan $epi f$ kapalı ve konvekstir. $(x_0, k) \notin epi f$ olduğuna göre Teorem 4.3.12 gereğince öyle bir $w \in (E \times \mathbb{R})^*$ ve bir $\alpha \in \mathbb{R}$ sayısı vardır ki her bir $(x, t) \in epi f$ için

$$w(x,t) \leq \alpha \quad \text{ve} \quad w(x_0, k) > \alpha \tag{4.3.52}$$

olur. Burada $\langle x^*, x \rangle := w(x, 0)$ ve $c := w(0, 1)$ olarak tanımlanırsa

$$w(x,t) = \langle x^*, x \rangle + ct$$

elde edilir. Ayrıca $x^* \in E^*$ olduğu da açıktır. $(x,t) \in epif$ iken $\forall t' > t$ için $(x,t') \in epif$ olduğundan (4.3.52) 'den her $t' > t$ için

$$\alpha \geq \langle x^*, x\rangle + ct$$

ve böylelikle

$$\alpha - \langle x^*, x\rangle \geq ct$$

bulunur. O halde $\forall t' > \max\{0,t\}$ için

$$\frac{\alpha - \langle x^*, x\rangle}{t} \geq c$$

olur. buradan $t \to +\infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\alpha - \langle x^*, x\rangle}{t} \geq c$$

olduğuna göre $c \leq 0$ olur.

1. Durum: $f(x_0) < +\infty$ olsun. (4.3.52) ile verilen eşitsizliklerde $t := f(x_0)$ alınırsa

$$\langle x^*, x_0\rangle + cf(x_0) \leq \alpha < \langle x^*, x_0\rangle + ck$$

elde edilir. $f(x_0) > k$ olduğundan

$$\langle x^*, x_0\rangle + ck - \langle x^*, x_0\rangle - cf(x_0) > 0$$

ve böylece $c(k - f(x_0)) > 0$ elde edilir. O halde $c < 0$ olmalıdır. Şimdi

$$\begin{array}{rcl} a : E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & a(x) := \dfrac{\alpha}{c} - \dfrac{1}{c}\langle x^*, x\rangle = \dfrac{1}{c}[\alpha - \langle x^*, x\rangle] \end{array}$$

fonksiyonu tanımlansın. Bu şekilde tanımlanan a fonksiyonu sürekli ve afindir. Eğer $x \in domf$ ise $(x, f(x)) \in epif$ ve dolayısıyla (4.3.52) eşitsizliğinden

$$w(x, f(x)) \leq \alpha$$

olur. Yani $\alpha - w(x, f(x)) \geq 0$ 'dır. Buna göre

$$\begin{aligned} a(x) &= \frac{\alpha}{c} - \frac{1}{c}\langle x^*, x\rangle \\ &= \frac{\alpha}{c} - \frac{1}{c}\langle x^*, x\rangle - f(x) + f(x) \\ &= \frac{\alpha}{c} - \frac{1}{c}\langle x^*, x\rangle - \frac{1}{c}\ cf(x) + f(x) \\ &= \frac{1}{c}(\alpha - \langle x^*, x\rangle - cf(x)) + f(x) \\ &= \underbrace{\frac{1}{c}}_{<0}(\underbrace{\alpha - w(x, f(x))}_{\geq 0}) + f(x) \leq f(x) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde her bir $x \in domf$ için $a(x) \leq f(x)$ olduğuna göre $a \in A(f)$ 'tir. Eğer $x \notin domf$ ise $a(x) < +\infty = f(x)$ olduğundan yine $a \in A(f)$ elde edilir. Üstelik bu sürekli afin dönüşüm için (4.3.52) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} w(x_0, k) > \alpha \ &\Rightarrow \ \langle x^*, x_0\rangle + ck > \alpha \\ &\Rightarrow \ ck > \alpha - \langle x^*, x_0\rangle \\ &\Rightarrow \ k < \frac{1}{c}(\alpha - \langle x*, x_0\rangle) \end{aligned}$$

olduğuna göre

$$a(x_0) = \frac{1}{c}(\alpha - \langle x*, x_0\rangle) > k$$

elde edilir. O halde sonuç olarak $f(x_0)$ 'ın sonlu değer aldığı durumda $a(x_0) > k$ olan bir $a \in A(f)$ bulunmuştur.

2. Durum: $f(x_0) = +\infty$ olsun. $c \leq 0$ olduğu gösterilmişti. Eğer $c < 0$ ise a afin dönüşümü 1. durumda olduğu gibi tanımalnırsa istenen özellikleri sağlayacaktır. O halde $c = 0$ olduğu kabul edilsin. f proper olduğundan bir $y_0 \in domf$ vardır. 1. duruma göre x_0 yerine y_0 kullanılarak bir $a_0 \in A(f)$ elde edilebilir. (Çünkü $y_0 \in domf$ olduğuna göre 1. duruma göre $c < 0$ olur.) Buradan,

$$\rho := \frac{|k - a_0(x_0)|}{\langle x^*, x\rangle - \alpha} + 1$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} a : E &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto a(x) := a_0(x) + \rho(\langle x^*, x\rangle - \alpha) \end{aligned}$$

fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda a sürekli ve afin bir dönüşümdür. Üstelik her bir $x \in domf$ için $a(x) \leq a_0(x) \leq f(x)$ olur. Dolayısıyla $a \in A(f)$ 'tir. Son olarak $a_0(x_0) + |k - a_0(x_0)| \geq k$ ve $\langle x^*, x\rangle > \alpha$ olduğuna göre

$$\begin{aligned} a(x_0) &= a_0(x_0) + \frac{|k - a_0(x_0)| + \langle x^*, x\rangle - \alpha}{\langle x^*, x\rangle - \alpha}(\langle x^*, x\rangle - \alpha) \\ &= a_0(x_0) + |k - a_0(x_0)| + \langle x^*, x\rangle - \alpha \\ &\geq k + \langle x^*, x\rangle - \alpha > k \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $x_0 \notin domf$ olduğu durumda da $a \leq f$ ve $a(x_0) > k$ olacak şekilde bir $a \in A(f)$ bulunmuş olur. O halde kabul yanlış, $f \leq f^\Gamma$ 'dır. Böylelikle $f = f^\Gamma$ bulunur. □

4.3.3 Eşlenik Fonksiyoneli

Bu kesimde herhangi bir yerel konveks uzay üzerinde tanımlı genişletilmiş gerçel değerli fonksiyonların eşlenik fonksiyoneli tanımlanacak ve geometrik olarak yorumlanacaktır. Daha sonra bazı özellikleri incelenecek ve biconjugate tanımlanacaktır. Böylelikle eşleniklik kavramı en genel haliyle araştırılmış olacaktır.

Tanım 4.3.23. *[14] $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda*

$$\begin{aligned} f^* : E^* &\rightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ x^* &\mapsto f^*(x^*) := \sup_{x\in E}[\langle x^*, x\rangle - f(x)] \end{aligned}$$

ile tanımlanan f^* fonksiyoneline f 'in ***eşlenik fonksiyoneli*** *denir.*

Uyarı 4.3.24. *Eğer f proper bir fonksiyon ise eşlenik fonksiyonelinin tanımı gereği her bir $x \in E$ ve $x^* \in E^*$ için*

$$\langle x^*, x\rangle \leq f(x) + f^*(x^*)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğe ***Fenchel Eşitsizliği*** *adı verilir.*

Geometrik Yorum:

$f^*(x^*) \in \mathbb{R}$ olacak şekilde $x^* \in E^*$ alınsın.

$$\begin{aligned} a : E &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto a(x) := \langle x^*, x\rangle - f^*(x^*) \end{aligned}$$

fonksiyonu tanımlansın. a sürekli ve afin bir fonksiyondur. Üstelik tanımı gereği f fonksiyonunu alttan sınırlar, yani $a \in A(f)$ 'tir. Öte yandan eşlenik fonksiyonunun supremum ile tanımlanışı gereği her $\varepsilon > 0$ sayısı için öyle bir $x_\varepsilon \in E$ vardır ki

$$\langle x^*, x_\varepsilon\rangle - f(x_\varepsilon) > f^*(x^*) - \varepsilon$$

olur. Böylelikle

$$a(x_\varepsilon) > f(x_\varepsilon) - \varepsilon$$

elde edilir. Dolayısıyla örneğin $E = \mathbb{R}$ için a dönüşümü f 'in grafiğinin bir teğeti olarak düşünülebilir. Üstelik

$$a(0) = -f^*(x^*)$$

olduğuna göre, $f^*(x^*)$ değeri, f 'in grafiğine alttan bir $(x, f(x))$ noktasında teğet olan a afin fonksiyonunun 0 'daki değerinin ters işaretlisidir.

Örnek 4.3.25. *$p \in (1, +\infty)$ olmak üzere $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{|x|^p}{p}$ fonksiyonu tanımlansın. f konveks bir fonksiyondur. f 'in eşleniğinin hesaplanması için bir $x^* \in \mathbb{R}$ alınıp sabitlensin ve*

$$\varphi(x) := x^*x - f(x)$$

fonksiyonu verilsin. φ konkav ve türevlenebilir bir fonksiyondur. Dolayısıyla φ 'nin tek bir global maksimalleştiricisi vardır ki bu x_0 noktası olsun. O halde $\varphi'(x_0) = 0$ 'dır. Buna göre

$$\varphi'(x_0) = x^* - sgn(x_0).|x_0|^{p-1} = 0$$

olur. Böylece

$$x^* = sgn(x_0).|x_0|^{p-1} \quad \Rightarrow \quad |x^*| = |sgn(x_0)|.|x_0|^{p-1} = |x_0|^{p-1}$$

elde edilir. O halde

$$\begin{aligned} f^*(x^*) = \varphi(x_0) &= x^*x_0 - f(x_0) = x^*x_0 - \frac{|x_0|^p}{p} \\ &= sgn(x_0).|x_0|^{p-1}x_0 - \frac{|x_0|^p}{p} = |x_0|.|x_0|^{p-1} - \frac{|x_0|^p}{p} \\ &= |x_0|^p - \frac{|x_0|^p}{p} = \frac{p-1}{p}|x_0|^p \end{aligned}$$

bulunur. Burada $\dfrac{p-1}{p} = \dfrac{1}{q}$ *denirse* $|x_0|^p = |x^*|^q$ *elde edilir. Böylece*

$$f^*(x^*) = \frac{|x^*|^q}{q}$$

bulunur. Üstelik buradan Young Eşitsizliği olarak bilinen eşitsizlik hemen yazılabilir. Yani $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ *olmak üzere*

$$x^*x \leq \frac{|x|^p}{p} + \frac{|x^*|^q}{q}$$

olur.

Önerme 4.3.26. *[14]* $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ *fonksiyonu verilsin. Bu durumda*

(i) f^* *alttan yarı sürekli ve konveks bir fonksiyondur.*

(ii) $domf \neq \emptyset$ *ise her bir* $x^* \in E^*$ *için* $f^*(x^*) > -\infty$ *'dur.*

(iii) f *proper, konveks ve alttan yarı sürekli bir fonksiyon ise* f^* *eşlenik fonksiyoneli de proper, konveks ve alttan yarı süreklidir.*

Kanıt.

(i) $x^*, y^* \in E^*$ ve $\alpha \in [0,1]$ alınsın. Eşlenik fonksiyonun tanımlanışından

$$\begin{aligned}
f^*(\alpha x^* + (1-\alpha)y^*) &= \sup_{x\in E}[\langle \alpha x^* + (1-\alpha)y^*, x\rangle - f(x)] \\
&= \sup_{x\in E}[(\alpha\langle x^*, x\rangle + (1-\alpha)\langle y^*, x\rangle) - (\alpha f(x) + (1-\alpha)f(x))] \\
&= \sup_{x\in E} \ \alpha[\langle x^*, x\rangle - f(x)] + (1-\alpha)[\langle y^*, x\rangle - f(x)] \\
&\leq \alpha \sup_{x\in E}[\langle x^*, x\rangle - f(x)] + (1-\alpha)\sup_{x\in E}[\langle y^*, x\rangle - f(x)] \\
&= \alpha f^*(x^*) + (1-\alpha)f^*(y^*)
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde f^* konvekstir. Öte yandan her bir $x \in E$ için

$$\begin{aligned}
\varphi_x : E^* &\to \mathbb{R} \\
x^* &\mapsto \varphi_x(x^*) := \langle x^*, x\rangle - f(x)
\end{aligned}$$

fonksiyonu E^* üzerinde sürekli bir fonksiyondur. Dolayısıyla $f^* = \sup_{x\in E}\varphi_x$ olduğundan f^* alttan yarı süreklidir.

(ii) $domf \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda $f(x_0) < +\infty$ olacak şekilde $x_0 \in E$ vardır. Yani $-f(x_0) > -\infty$ 'dur. Keyfi bir $x^* \in E^*$ alınsın. Buna göre

$$f^*(x^*) = \sup_{x\in E}[\langle x^*, x\rangle - f(x)] \geq \langle x^*, x_0\rangle - f(x_0) > -\infty$$

elde edilir.

(iii) f^* 'ın her durumda konveks ve alttan yarı sürekli olduğu (i) şıkkında gösterildiğine göre burada yalnızca proper olduğunun gösterilmesi yeterlidir. f proper olduğundan $\exists x_0 \in domf$ vardır. Önerme 4.3.22 'nin kanıtında $f(x_0) < +\infty$ durumu için x_0 'a bağlı olarak tanımlanan $a(x) = \dfrac{1}{c}(\alpha - \langle x^*, x\rangle)$ afin fonksiyonu için $a \in A(f)$ olduğu gösterilmişti. Dolayısıyla $A(f) \neq \emptyset$ 'dir. O halde her $x \in E$ için

$$\langle x^*, x\rangle + c \leq f(x)$$

olacak şekilde $\exists\ x^* \in E^*$ ve $\exists\ c \in \mathbb{R}$ sayısı vardır. Bu $x^* \in E^*$ için

$$f^*(x^*) = \sup_{x\in E}[\langle x^*, x\rangle - f(x)] \leq \langle x^*, x\rangle - f(x) \leq -c < +\infty$$

olduğundan $x^* \in domf^*$ 'dır. Böylece $domf^* \neq \emptyset$ ve ek olarak (ii) şıkkından f^* proper bir fonksiyondur. $\square$

Yukarıda gösterildiği gibi proper, konveks ve alttan yarı sürekli bir fonksiyon olarak, eşlenik fonksiyonelinin de eşleniğinden bahsedilebilir.

Tanım 4.3.27. *[14] $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda*

$$\begin{aligned} f^{**} : E &\to \overline{\mathbb{R}} \\ x &\mapsto f^{**}(x) := \sup_{x^* \in E^*} [\langle x^*, x\rangle - f^*(x^*)] \end{aligned}$$

*ile tanımlı fonksiyona f'in **biconjugate fonksiyoneli** denir.*

Teorem 4.3.28. *[14] $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu verilsin.*

(i) $f^{**} = f^{\Gamma} \leq f$ 'dir.

(ii) f proper ise, $f^{**} = f$ 'tir $\Leftrightarrow$ f konveks ve alttan yarı süreklidir.

Kanıt.
(i) f^{Γ} 'nın tanımı gereği $f^{\Gamma} \leq f$ olduğu açıktır. Kanıt için $f^{**} = f^{\Gamma}$ eşitliği gösterilecektir. Keyfi bir $x^* \in E^*$ ve $c \in \mathbb{R}$ alındığında

$$\forall x \in E \text{ için } \ \langle x^*, x\rangle + c \leq f(x) \ \Leftrightarrow \ f^*(x^*) \leq -c$$

olduğundan

$$f^{\Gamma}(x) = \sup\{\langle x^*, x\rangle + c \mid c \leq -f^*(x^*), \ x^* \in E^*, \ c \in \mathbb{R}\} \tag{4.3.53}$$

elde edilir. Burada eğer $\forall x^* \in E^*$ için $f^*(x^*) > -\infty$ ise, her bir $x \in E$ için

$$f^{\Gamma}(x) = \sup\{\langle x^*, x\rangle - f^*(x^*) \mid x^* \in E^*\} = f^{**}(x)$$

bulunur. Eğer en az bir $x^* \in E^*$ için $f^*(x^*) = -\infty$ oluyorsa

$$f^{\Gamma}(x) = +\infty = f^{**}(x)$$

bulunur.
(ii) Önerme 4.3.22 'den f proper olduğunda, $f = f^{\Gamma}$ olması için gerek ve yeter koşulun f 'in konveks ve alttan yarı sürekli olması olduğu bilinmektedir. Buna göre (i) göz önüne alınırsa

$$f = f^{\Gamma} = f^{**} \ \Leftrightarrow \ f \text{ konveks ve alttan yarı süreklidir.}$$

sonucuna ulaşılır. □

Örnek 4.3.29. $\emptyset \neq A \subseteq E$ *olmak üzere*

$$i_A(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \in A \\ +\infty & , \quad x \notin A \end{cases}$$

indikatör fonksiyonunun eşleniği

$$i_A^*(x^*) = \sup_{x \in E}[\langle x^*, x\rangle - i_A(x)] = \sup_{x \in A}\langle x^*, x\rangle = \sigma_A(x^*)$$

olur. Özel olarak E bir normlu vektör uzayı ve $A = \bar{B}(0,1)$ seçilirse

$$i_A^*(x^*) = \sigma_{\bar{B}(0,1)}(x^*) = \sup_{\|x\| \leq 1}\langle x^*, x\rangle = \|x^*\|$$

elde edilir. Yani $i^*_{\bar{B}(0,1)}(x^*)$ fonksiyonu E^* üzerine bir norm belirtir.

Tanım 4.3.30. *[14] $f, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ proper fonksiyonlar olsun.*

$$\begin{aligned} f\nabla g : E &\to \overline{\mathbb{R}} \\ x &\mapsto (f\nabla g)(x) := \inf_{y \in E}[f(x-y) + g(y)] \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona f ile g 'nin ***infimal konvolüsyonu*** *denir.*

Teorem 4.3.31. *[14]**(Toplam Teoremi)***

$f, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ proper fonksiyonlar olsun. Bu durumda;

(i) $f^* + g^* = (f\nabla g)^*$ *ve* $(f+g)^* \leq f^*\nabla g^*$ *'dır.*

(ii) f ile g konveks fonksiyonlar ve $\exists\ \bar{x} \in domf \cap domg$ için g fonksiyonu $\bar{x}$ noktasında sürekli ise

$$(f+g)^* = f^*\nabla g^*$$

olur. Üstelik her bir $x^* \in dom(f+g)^*$ için öyle bir $x_1^* \in domf^*$ ve bir $x_2^* \in domg^*$ vardır ki $x^* = x_1^* + x_2^*$ için

$$(f+g)^*(x^*) = f^*(x_1^*) + g^*(x_2^*)$$

yazılabilir.

Kanıt. (*i*) Eşlenik fonksiyonelin tanımlanışı gereği

$$\begin{aligned}
(f\nabla g)^*(x^*) &= \sup_{x\in E}\left[\langle x^*, x\rangle - \inf_{x=x_1+x_2}[f(x_1)+g(x_2)]\right] \\
&= \sup_{x\in E}\left[\langle x^*, x\rangle + \sup_{x=x_1+x_2}[-f(x_1)-g(x_2)]\right] \\
&= \sup_{x\in E}\left[\sup_{x=x_1+x_2}[\langle x^*, x_1+x_2\rangle - f(x_1)-g(x_2)]\right] \\
&= \sup_{x\in E}\left[\sup_{x=x_1+x_2}[\langle x^*, x_1\rangle - f(x_1)]+[\langle x^*, x_2\rangle - g(x_2)]\right] \\
&= \sup_{x_1\in E}[\langle x^*, x_1\rangle - f(x_1)] + \sup_{x_2\in E}[\langle x^*, x_2\rangle - g(x_2)] \\
&= f^*(x^*)+g^*(x^*) \\
&= (f^*+g^*)(x^*)
\end{aligned}$$

elde edilir. Öte yandan her proper f fonksiyonu için $f^{**}\leq f$ olduğundan

$$(f+g)^* = (f^*\nabla g^*)^{**} \leq f^*\nabla g^*$$

bulunur.

(*ii*) $x^*\in E^*$ alınsın ve $\alpha := (f+g)^*(x^*)$ olsun. Eğer $\alpha = +\infty$ ise $(f^*\nabla g^*)(x^*) \geq \alpha = +\infty$ olduğuna göre $(f^*\nabla g^*)(x^*) = +\infty$ olur. Böylece eşitlik sağlanır. O halde $\alpha < +\infty$ kabul edilsin. $dom(f+g) = domf \cap domg$ olduğuna göre hipotezden $\bar{x}\in dom(f+g)$ 'dir. Dolayısıyla Önerme 4.3.26 (*ii*) gereğince $dom(f+g)\neq\emptyset$ olduğundan her bir $x^*\in E^*$ için

$$\alpha = (f+g)^*(x^*) > -\infty$$

olur. O halde $\alpha\in\mathbb{R}$ 'dir. Şimdi $p := f$ ve $q := g - x^* + \alpha$ alınsın. Eğer $x\in domf\cap domg$ ise

$$\alpha = (f+g)^*(x^*) = \sup_{x\in E}[\langle x^*, x\rangle - (f+g)(x)] \geq \langle x^*, x\rangle - (f+g)(x)$$

olduğuna göre

$$\alpha \geq \langle x^*, x\rangle - f(x) - g(x) \;\Rightarrow\; f(x) \geq -(g(x) - \langle x^*, x\rangle + \alpha)$$

ve böylece

$$p(x) \geq -q(x)$$

bulunur. Üstelik hipotezden g fonksiyonu $\bar{x}$ 'de sürekli olduğundan q fonksiyonu da $\bar{x}$ 'de süreklidir. O halde Teorem 4.3.6 gereğince her bir $x \in E$ için

$$-q(x) \leq \langle x_0', x\rangle + c \leq p(x)$$

olacak şekilde bir $x_0' \in E^*$ ve $c \in \mathbb{R}$ vardır. Yani her bir $x \in E$ için

$$-g(x) + \langle x^*, x\rangle - \alpha \leq \langle x_0', x\rangle + c \leq f(x)$$

olur. Bu eşitsizliğin sağ tarafından

$$f^*(x_0') \leq -c \tag{4.3.54}$$

ve böylece $x_0' \in domf^*$ bulunur. $x_1' = x^* - x_0'$ alınırsa, eşitsizliğin sol tarafından

$$g^*(x_1') \leq \alpha + c \tag{4.3.55}$$

ve böylelikle $x_1' \in domg^*$ elde edilir. Buradan (4.3.54) ve (4.3.55) taraf tarafa toplanırsa

$$f^*(x_0') + g^*(x_1') \leq \alpha$$

bulunur. $x^* = x_1' + x_0'$ olduğuna göre

$$(f^*\nabla g^*)(x^*) = \inf_{x^*=x_1'+x_0'} \{f^*(x_0') + g^*(x_1')\} \leq \alpha$$

elde edilir. Sonuç olarak;

$$(f+g)^*(x^*) = \alpha = (f^*\nabla g^*)(x^*) = f^*(x_0') + g^*(x_1')$$

bulunur. Böylece kanıt biter. □

Son olarak, daha önce $\mathbb{R}^n$ 'de kapalı konveks kümeler ve kapalı sublineer fonksiyonlar arasında kurulan eşleme, bu kez yerel konveks uzaylar üzerinde kapalı konveks kümeler ile proper, sublineer ve alttan yarı sürekli fonksiyonlar arasında kurulacaktır. Bunun için destek fonksiyonları ve eşleniklik kavramından yararlanılacak ve böylece eşlenikliğin bir uygulaması elde edilecektir.

E^* dual uzayının bir M alt kümesi için, $x \in E$ olmak üzere

$$\sigma_M(x) := \sup_{x^* \in M} \langle x^*, x \rangle$$

biçiminde tanımlanan **destek fonksiyoneli** göz önüne alınsın.

Teorem 4.3.32. *[14] (E, E^*) yerel konveks dual çifti verilsin. Bu durumda,*

(i) $M \subseteq E^*$ kapalı konveks bir küme ise, σ_M destek fonksiyoneli proper, sublineer ve alttan yarı sürekli bir fonksiyondur ve üstelik

$$M = \{x^* \in E^* \mid \langle x^*, x \rangle \leq \sigma_M(x),\ \forall x \in E\} \tag{4.3.56}$$

olur.

(ii) $p : E \to \overline{\mathbb{R}}$ proper, sublineer ve alttan yarı sürekli ise

$$M_p := \{x^* \in E^* \mid \langle x^*, x \rangle \leq\ p(x),\ \forall x \in E\}$$

kümesi boştan farklı, kapalı ve konveks bir kümedir.

(iii) $M_1, M_2 \subseteq E^*$ kapalı konveks kümeleri için

$$M_1 \subseteq M_2 \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_{M_1} \leq \sigma_{M_2}$$

olur.

Kanıt. (i) M kapalı ve konveks bir küme olduğundan destek fonksiyonelinin proper, sublineer ve alttan yarı sürekli olduğu tanımlanışından açıktır. Kanıt için (4.3.56) eşitliği gösterilecektir. Bunun için (ii) şıkkındaki M_p kümesinin tanımına göre $p = \sigma_M$ alınırsa

$$\begin{aligned} M_{\sigma_M} &= \{x^* \in E^* \mid \langle x^*, x\rangle \leq \sigma_M(x),\ \forall x \in E\} \\ &= \{x^* \in E^* \mid \langle x^*, x\rangle - \sigma_M(x) \leq 0,\ \forall x \in E\} \end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan

$$\sigma_M^*(x^*) = \sup_{x\in E}[\langle x^*, x\rangle - \sigma_M(x)]$$

olduğuna göre

$$\sigma_M^*(x^*) = \begin{cases} 0 & , \quad x^* \in M_{\sigma_M} \\ +\infty & , \quad x^* \notin M_{\sigma_M} \end{cases}$$

olacaktır. Yani kısaca $\sigma_M^* = i_{M_{\sigma_M}}$ elde edilir. Üstelik Örnek 4.3.29 'den

$$\sigma_M^* = (i_{M^*})^* = i_M$$

olduğuna göre

$$\sigma_M^* = i_M = i_{M_{\sigma_M}}$$

ve böylece

$$M = M_{\sigma_M} = \{x^* \in E^* \mid \langle x^*, x\rangle \leq \ \sigma_M(x),\ \forall x \in E\}$$

bulunur.

(ii) Öncelikle M_p kümesinin boştan farklı olduğu gösterilecektir. p sublineer olduğundan $p(0) = 0$ 'dır. Ayrıca p alttan yarı sürekli olduğundan her bir $k < p(0) = 0$ sayısı için sıfırın öyle bir U komuşuluğu vardır ki $\forall x \in U$ için $p(x) > k$ olur. O halde özel olarak $k = -1$ sayısı için, sıfırın öyle bir U komuluğu vardır ki her bir $x \in U$ için $p(x) > -1$ 'dir. Buna göre,

$$E \ni x \mapsto q(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in U \\ +\infty & , \quad x \notin U \end{cases}$$

fonksiyonu tanımlansın. Tanımlanışları gereği $domp = E$ ve $domq = U$ olduğuna göre $domp \cap intdomq = U \neq \emptyset$ 'dir. Üstelik q fonksiyonu U üzerinde sürekli olduğundan öyle bir $x^* \in E^*$ ve $c \in \mathbb{R}$ vardır ki her $x \in E$ için

$$-q(x) \leq \langle x^*, x\rangle + c \leq p(x)$$

olur. Böylece

$$-1 \le \langle x^*, x\rangle + c \le p(x)$$

yazılabilir. p sublineer olduğundan onu alttan sınırlayan $x \mapsto \langle x^*, x\rangle + c$ afin fonksiyonunun lineer kısmı olan $x \mapsto \langle x^*, x\rangle$ dönüşümü de p 'yi alttan sınırlar. Yani her $x \in E$ için $\langle x^*, x\rangle \le p(x)$ olur. O halde $x^* \in M_p$ olduğundan $M_p \neq \emptyset$ elde edilir.

İkinci olarak M_p kümesinin kapalı olduğu gösterilecektir. Her bir $x \in E$ için

$$\varphi_x(x^*) := \langle x^*, x\rangle$$

fonksiyonu verilsin. Buna göre φ_x süreklidir ve dolayısıyla her $x \in E$ için $(-\infty, p(x)]$ kapalı kümesinin φ_x altındaki öngörüntüsü E^* dual uzayında kapalıdır. Yani;

$$\begin{aligned} \varphi_x((-\infty, p(x)]) &= \{x^* \in E^* \mid \varphi_x(x^*) \le p(x)\} \\ &= \{x^* \in E^* \mid \langle x^*, x\rangle \le p(x)\} \end{aligned}$$

kümesi kapalıdır. Bu kümeye M_x denirse $M_p = \bigcap\limits_{x \in E} M_x$ olduğundan M_p kapalıdır.

Son olarak $\sigma_{M_p} = p$ olduğu gösterilsin.

$$p^*(x^*) = \sup_{x \in E}[\langle x^*, x\rangle - p(x)] = \begin{cases} 0 & , \ x^* \in M_p \\ +\infty & , \ x^* \notin M_p \end{cases}$$

olduğuna göre $p^* = i_{M_p}$ 'dir. Teorem 4.3.28 gereğince p konveks ve alttan yarı sürekli olduğundan ve $p = p^{**} = i^*_{M_p} = \sigma_{M_p}$ olduğuna göre

$$p = \sigma_{M_p}$$

elde edilir.

(iii) $M_1 \subseteq M_2$ olsun. $x \in E$ olmak üzere

$$\sigma_{M_1}(x) = \sup_{x^* \in M_1} \langle x^*, x\rangle \le \sup_{x^* \in M_2} \langle x^*, x\rangle = \sigma_{M_2}(x)$$

elde edilir. Tersine $\sigma_{M_1} \le \sigma_{M_2}$ olsun.

$$M_1 = \{x^* \in E^* \mid \langle x^*, x\rangle \le \sigma_{M_1}(x), \ \forall x \in E\}$$

olduğuna göre

$$\begin{aligned} x^* \in M_1 &\Rightarrow \forall x \in E \text{ için } \langle x^*, x\rangle \leq \sigma_{M_1}(x) \leq \sigma_{M_2}(x) \\ &\Rightarrow \forall x \in E \text{ için } \langle x^*, x\rangle \leq \sigma_{M_2}(x) \\ &\Rightarrow x^* \in M_2 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $M_1 \subseteq M_2$ bulunur. $\square$

5 OPTİMİZASYON PROBLEMLERİ VE EŞLENİKLİ

Bu bölümde eşlenikliğin bir uygulama alanı olarak optimizasyon problemleri ele alınacaktır. Bir optimizasyon problemi verildiğinde eşlenik fonksiyonu yardımıyla bir dual problem elde edilebilir. Üstelik bazı durumlarda dual problemin çözümünün elde edilmesi, primal problemin çözümünün bulunmasından çok daha kolaydır.

Bu bölümde aksi belirtilmedikçe (V, V^*) topolojik uzayların dual çifti, (Y, Y^*) Hausdorff topolojik uzayların dual çifti olarak alınacaktır.

5.1 Primal Problem ve Dual Problem

Bu kesimde öncelikle primal problem tanıtılacak, bu probleme karşılık pertürbasyon problemleri oluşturulacak ve buna bağlı olarak dual problem kurulacaktır.

Tanım 5.1.1. *[2] V bir topolojik vektör uzayı olsun ve $F : V \to \overline{\mathbb{R}}$ konveks fonksiyonu verilsin. Buna göre*

$$(P) \quad \inf_{u \in V} F(u)$$

*biçiminde tanımlanan (P) problemine **primal problem** adı verilir ve (P) probleminin infimum değeri **infP** ile gösterilir. Ayrıca $F(u) = \inf P$ olacak şekildeki her bir $u \in V$ elemanı da $(\mathbf{P})$ **probleminin çözümü** olarak adlandırılır. Eğer $\exists\, u_0 \in V$ için $F(u_0) < +\infty$ oluyorsa (P) problemine **aşikar olmayan problem** denir.*

Tanım 5.1.2. *[2] V bir topolojik vektör uzayı ve Y bir Hausdorff topolojik vektör uzayı olsun ve bir (P) $\inf_{u \in V} F(u)$ primal problemi verilsin. Her bir $u \in V$ için $\phi(u, 0) = F(u)$ olacak şekilde bir $\phi : V \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu tanımlansın. $p \in Y$ olmak üzere*

$$(P_p) \quad \inf_{u \in V} \phi(u, p)$$

*problemine (P) probleminin **pertürbasyon problemi** denir.*

Uyarı 5.1.3. *Kuruluşu gereği pertürbasyon problemi ϕ 'nin seçilişine bağlıdır ve üstelik $p = 0$ için (P_0) pertürbasyon problemi primal probleme eşit olur.*

Tanım 5.1.4. *[2] (P) primal problemi verilsin ve $\forall u \in V$ için $\phi(u, 0) = F(u)$ olacak şekilde bir $\phi : V \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu seçilsin. ϕ fonksiyonunun eşlenik fonksiyoneli $\phi^* : V^* \times Y^* \to \overline{\mathbb{R}}$ olmak üzere*

$$(P^*) \quad \sup_{p^* \in Y^*} \{-\phi^*(0, p^*)\}$$

*problemine (P) 'nin **dual problemi** denir ve (P^*) probleminin supremum değeri $\sup \mathbf{P}^*$ ile gösterilir. Ayrıca $-\phi^*(0, p^*) = supP^*$ olacak şekildeki her bir $p^* \in Y^*$ elemanı da $(\mathbf{P}^*)$ **probleminin bir çözümü** olarak adlandırılır.*

Önerme 5.1.5. *[2] (P) ve (P^*) problemlerinin çözüm değerleri arasında*

$$-\infty \leq \sup P^* \leq \inf P \leq +\infty \tag{5.1.57}$$

bağıntısı geçerlidir.

Kanıt. $p^* \in Y^*$ alınsın.

$$\phi^*(0, p^*) = \sup_{(u,p) \in V \times Y} \langle p^*, p \rangle - \phi(u, p)$$

olduğuna göre her $u \in V$ ve her $p \in Y$ için

$$\phi^*(0, p^*) \geq \langle p^*, p \rangle - \phi(u, p)$$

olur. Özel olarak $p = 0$ alınırsa her bir $u \in V$ için

$$\phi^*(0, p^*) \geq -\phi(u, 0) \quad \Rightarrow \quad -\phi^*(0, p^*) \leq \phi(u, 0)$$

ve böylece

$$\sup P^* = \sup_{p^* \in Y^*} \{-\phi^*(0, p^*)\} \leq \inf_{u \in V} \phi(u, 0) = \inf P$$

elde edilir. □

Önerme 5.1.6. *[2] (P) problemi aşikar olmayan problem ise,*

$$\sup P^* \leq \inf P < +\infty$$

(P^*) dual problemi aşikar olmayan problem ise,

$$-\infty < \sup P^* \leq \inf P$$

ve (P) ile (P^*) problemlerinin her ikisi de aşikar olmayan problemler ise,

$$-\infty < \sup P^* \leq \inf P < +\infty$$

olur.

Kanıt. (P) aşikar olmayan problem ise $\exists u_0 \in V$ için $F(u_0) = \phi(u_0, 0) < +\infty$ olur. Dolayısıyla

$$\sup P^* \leq \inf P \leq \phi(u_0, 0) < +\infty$$

olur. Eğer (P^*) aşikar olmayan problem ise $\exists p_0^* \in Y^*$ için $-\phi^*(0, p_0^*) > -\infty$ olduğundan

$$-\infty < -\phi^*(0, p_0^*) \leq \sup P^* \leq \inf P$$

elde edilir. (P) ve (P^*) problemlerinin aşikar olmaması durumunda da kanıt benzer şekilde yapılır. □

5.2 Kararlı ve Normal Problemler

Bu kesimde ve bundan sonraki kesimlerde ϕ fonksiyonu konveks kabul edilecektir.

Tanım 5.2.1. *[2] (P) primal problemi verilsin ve $\phi : V \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ konveks fonksiyonu için (P_p) pertürbasyon problemi göz önüne alınsın. her bir $p \in Y$ için*

$$h(p) := \inf_{u \in V} \phi(u, p)$$

*biçiminde tanımlı fonksiyona **(P) probleminin pertürbasyon fonksiyonu** adı verilir.*

Yardımcı Teorem 5.2.2. *[2] (P) primal problemi verilsin ve $\phi : V \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ konveks olsun. Bu durumda pertürbasyon fonksiyonu h konvekstir.*

Kanıt. Keyfi $p, q \in Y$ ve $\lambda \in [0,1]$ alınsın.

$$h(\lambda p + (1-\lambda)q) \le \lambda h(p) + (1-\lambda)h(q)$$

eşitsizliği gösterilecektir. Eğer $h(p) = +\infty$ yada $h(q) = +\infty$ ise eşitsizliğin sağlandığı açıktır. O halde $h(p) < +\infty$ ve $h(q) < +\infty$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda $h(p) < a$ ve $h(q) < b$ olan her bir $a, b \in \mathbb{R}$ için öyle $u, v \in V$ vektörleri vardır ki

$$h(p) \le \phi(u,p) \le a \quad \text{ve} \quad h(q) \le \phi(v,q) \le b$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} h(\lambda p + (1-\lambda)q) &= \inf_{w \in V} \phi(w, \lambda p + (1-\lambda)q) \\ &= \phi(\lambda u + (1-\lambda)v, \lambda p + (1-\lambda)q) \\ &\le \lambda \phi(u,p) + (1-\lambda)\phi(v,q) \\ &\le \lambda a + (1-\lambda)b \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $q \to h(p)'+$ ve $b \to h(q)^+$ için limit alınırsa

$$h(\lambda p + (1-\lambda)q) \le \lambda h(p) + (1-\lambda)h(q)$$

elde edilir. $\square$

Yardımcı Teorem 5.2.3. *[2] (P) problemi verilsin. Bu durumda her bir $p^* \in Y^*$ için*

$$h^*(p^*) = \phi^*(0, p^*) \tag{5.2.58}$$

olur.

Kanıt. Keyfi $p^* \in Y^*$ alınsın. Pertürbasyon fonksiyonu ve eşlenik fonksiyonun tanımları gereği,

$$\begin{aligned}
h^*(p^*) &= \sup_{p\in Y}[\langle p^*, p\rangle - h(p)] \\
&= \sup_{p\in Y}[\langle p^*, p\rangle - \inf_{u\in V}\phi(u,p)] \\
&= \sup_{p\in Y}[\sup_{u\in V}\langle p^*, p\rangle - \phi(u,p)] \\
&= \sup_{(u,p)\in V\times Y}[\langle p^*, p\rangle + \langle 0^*, u\rangle - \phi(u,p)] \\
&= \sup_{(u,p)\in V\times Y}[\langle (0,p^*), (u,p)\rangle - \phi(u,p)] \\
&= \phi^*(0,p^*)
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Yardımcı Teorem 5.2.4. *[2] (P) problemi verilsin ve (P^*) onun dual problemi olsun. Bu durumda*

$$\sup P^* = \sup_{p^*\in Y^*}[-h^*(p^*)] = h^{**}(0) \tag{5.2.59}$$

olur.

Kanıt. $\sup P^* = \sup_{p^*\in Y^*}[-h^*(p^*)]$ eşitliği bir önceki yardımcı önermeden açıktır.

$$h^{**}(0) = \sup_{p^*\in Y^*}[\langle p^*, 0\rangle - h^*(p^*)] = \sup_{p^*\in Y^*}[h^*(p^*)]$$

elde edilir. □

Tanım 5.2.5. *[2] (P) problemi verilsin ve $h : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ bu problemin pertürbasyon fonksiyonu olsun. Eğer $h(0) < +\infty$ ve h 0 'da alttan yarı sürekli ise bu durumda (P) problemine* ***normal problem*** *adı verilir.*

Önerme 5.2.6. *[2] (P) problemi verilsin ve $\phi : V\times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu konveks olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:*

(i) (P) *normal problemdir.*

(ii) (P^*) *normal problemdir.*

(iii) $\inf P = \sup P^*$ *'dır ve bu değer sonludur.*

Kanıt.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ (P^*) normal olsun. Bu durumda $h^{**}(0)$ sonlu ve h^{**} 0 'da alttan yarı sürekli olur. ϕ konveks olduğundan $\inf P = \sup P^*$ olur. Buna göre

$$\inf P = \inf P^{**} \leq \sup P^* \leq \inf P$$

ve böylece

$$\inf P = \sup P^* = h^{**}(0) < +\infty$$

elde edilir.

$(iii) \Rightarrow (ii)$ $\inf P = \sup P^*$ ve bu değer sonlu olsun. O halde $\inf P = \sup P^* = h^{**}(0) < +\infty$ olur, yani $h^{**}(0)$ sonludur. Ayrıca $h^{**}(0) = (\bar{h}^{**})(0)$ olduğundan h^{**} alttan yarı süreklidir. Böylece (P^*) normaldir.

$(i) \Rightarrow (iii)$ (P) normal olsun. Bu durumda $h(0)$ sonlu ve h fonksiyonu 0 'da alttan yarı süreklidir. $\bar{h}$, h fonksiyonunun alttan yarı sürekli regülerizasyonu olsun. Bu durumda

$$h^{**} \leq \bar{h} \leq h$$

olur. h 0 'da alttan yarı sürekli olduğundan $h(0) = \bar{h}(0)$ 'dır. Dolayısıyla h konvekstir. Böylelikle $\bar{h}$ konveks ve alttan yarı sürekli olur. Buna göre $\bar{h} = \bar{h}^{**}$ olduğundan

$$h^* = h^{***} \geq \bar{h}^{**} \geq h^*$$

olur ki buradan $h^* = \bar{h}^*$ elde edilir. Buradan $h^{**} = \bar{h}^{**} = \bar{h}$ ve dolayısıyla $h^{**}(0) = h(0)$ bulunur. Böylelikle $\sup P^* = \inf P = h(0)$ ve bu değer sonlu olur.

$(iii) \Rightarrow (i)$ $\sup P^* = \inf P$ ve bu değer sonlu olsun. O halde $h^{**}(0) = h(0)$ 'dır. O halde $h(0)$ sonlu ve h konveks olduğundan $\bar{h}(0) = h^{**}(0) = h(0)$ olur. Dolayısıyla h fonksiyonu 0 'da alttan yarı süreklidir. $\square$

Yardımcı Teorem 5.2.7. *[2] (P^*) probleminin çözümler kümesi $\partial h^{**}(0)$ 'dır.*

Kanıt. $p^* \in Y^*$ (P^*) probleminin bir çözümü olsun. Bu durumda her $q^* \in Y^*$ için

$$-\phi^*(0, p^*) \geq -\phi^*(0, q^*)$$

olur. Buradan her $q^* \in Y^*$ için

$$-h^*(p^*) \geq -h^*(q^*)$$

ve böylece

$$-h^*(p^*) \geq \sup_{q^* \in Y^*} [\langle 0, q^* \rangle - h^*(q^*)] = h^{**}(0)$$

olur. Yani

$$h^{**}(0) + h^*(p^*) - \langle 0, p^* \rangle \leq 0$$

elde edilir. O halde $p^* \in \partial h^{**}(0)$ bulunur. □

Tanım 5.2.8. *[2] (P) problemi verilsin ve $h : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ bu problemin pertürbasyon fonksiyonu olsun. Eğer $h(0)$ sonlu ve h fonksiyonu 0 'da subdiferansiyellenebilir ise bu durumda (P) problemine **kararlı problem** adı verilir.*

(P) ve (P^*) problemlerinin normal veya kararlı olmaları bu problemlerin çözümlerinin varlığı ve karşılaştırılması ile ilgili bazı sonuçlar ortaya çıkarırlar.

Önerme 5.2.9. *(P) problemi verilsin ve (P^*) onun dual problemi olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:*

(i) (P) kararlıdır.

(ii) (P) normaldir ve (P^*) en az bir çözüme sahiptir.

Kanıt. $(i) \Rightarrow (ii)$ (P) kararlı olsun. Bu durumda $h(0)$ sonlu ve $\partial h(0) \neq \emptyset$ 'dir. $s \in \partial h(0)$ alındığında

$$y \mapsto \ell_s(y) = h(0) + \langle s, y \rangle$$

afin dönüşümü h fonksiyonunu alttan sınırlar. Dolayısıyla

$$\ell_s \leq \overline{co} h \leq h$$

olur. Üstelik $x = 0$ noktasında $\ell_s(0) = h(0)$ olduğundan

$$h(0) = \overline{co} h(0) = h^{**}(0)$$

elde edilir.

(ii) $\Rightarrow$ *(i)* (P) normal ve (P^*) en az bir çözüme sahip olsun. (P) normal olduğundan $h(0)$ sonlu ve $h(0) = \bar{h}(0)$ olur. Yani $h(0) = \bar{h}(0) = h^{**}(0)$ 'dır. Öte yandan (P^*) en az bir çözüme sahip olduğundan $\partial h^{**}(0) \neq \emptyset$ olmalıdır. O halde $\partial h^{**}(0) = \partial h(0) \neq \emptyset$ elde edilir. $h(0)$ sonlu ve $\partial h(0) \neq \emptyset$ olduğundan (P) kararlıdır. □

Sonuç 5.2.10. *[2] (P) problemi verilsin ve $\phi : V \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ konveks olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:*

(i) *(P) ve (P^*) normaldir ve çözüme sahiptirler.*

(ii) *(P) ve (P^*) kararlıdır.*

(iii) *(P) kararlıdır ve en az bir çözüme sahiptir.*

Kanıt. *(i)* $\Rightarrow$ *(iii)* (P) ve (P^*) normal iseler Önerme 5.2.9 gereğince (P) kararlıdır. (P) 'nin çözümünün varlığı ise hipotezde verilmiştir.

(iii) $\Rightarrow$ *(i)* (P) kararlı ve en az bir çözüme sahip olsun. Bu durumda Önerme 5.2.9 'dan (P) normaldir. (P) normal olduğuna göre Önerme 5.2.6 gereğince (P^*) normaldir ve $\sup P^* = \inf P$ olur.

(ii) $\Rightarrow$ *(iii)* (P) ve (P^*) kararlı olsun. Önerme 5.2.9 'dan (P) ve (P^*) normaldir ve üstelik (P) ve (P^*) problemlerinin her ikisi de en az bir çözüme sahiptir.

(iii) $\Rightarrow$ *(ii)* (P) kararlı ve en az bir çözüme sahip olsun. Bu durumda Önerme 5.2.9 'dan (P) normaldir ve böylece Önerme 5.2.6 gereğince (P^*) normaldir. Buradan (P^*) normal ve (P) en az bir çözüme sahip olduğundan Önerme 5.2.9 gereğince (P^*) kararlıdır. □

Önerme 5.2.11. *[2] (P) ve (P^*) problemleri çözüme sahip olsunlar. Ayrıca*

$$\inf P = \sup P^* < \infty \tag{5.2.60}$$

olsun. Bu durumda (P) probleminin tüm $\bar{u}$ çözümleri ile (P^*) probleminin tüm $\bar{p}^*$ çözümleri arasında

$$\phi(\bar{u}, 0) + \phi^*(0, \bar{p}^*) = 0 \tag{5.2.61}$$

yada denk olarak

$$(0, \bar{p}^*) \in \partial\phi(\bar{u}, 0) \tag{5.2.62}$$

bağıntıları geçerlidir. Tersine eğer $\bar{u} \in V$ ve $\bar{p}^* \in Y^*$ elemanları (5.2.61) bağıntısını sağlıyorlarsa $\bar{u}$ (P) probleminin, $\bar{p}^*$ ise (P^*) dual probleminin birer çözümleridir ve (5.2.60) gerçeklenir.

Kanıt. Öncelikle (5.2.60) sağlansın. $\inf P = \phi(\bar{u}, 0)$ ve $\sup P^* = -\phi^*(0, \bar{p}^*)$ olduğundan (5.2.60) bağıntısından

$$\phi(\bar{u}, 0) = -\phi^*(0, \bar{p}^*)$$

ve böylelikle

$$\phi(\bar{u}, 0) + \phi^*(0, \bar{p}^*) = 0$$

elde edilir. Buradan (5.2.61) bağıntısının gerçeklendiği açıktır. Tersine $\bar{u} \in V$ ve $\bar{p}^*) \in Y^*$ elemanları için (5.2.61) sağlansın. Buna göre $\phi(\bar{u}, 0) = -\phi^*(0, \bar{p}^*)$ olur. Ayrıca $\forall u \in V$ ve $\forall p^* \in P^*$ için

$$-\phi^*(0, p^*) \leq \phi(u, 0)$$

olduğundan

$$\inf P = \phi(\bar{u}, 0) = -\phi^*(0, \bar{p}^*) = \sup P^*$$

elde edilir. Böylece $\bar{u}$ (P) probleminin, $\bar{p}^*$ da (P^*) probleminin çözümleri olurlar ve $\inf P = \sup P^* < \infty$ olur. □

5.3 Lagrange Fonksiyonları ve Eyer Noktası

Bu bölümde bir (P) primal problemi için Lagrange Fonksiyonu olarak adlandırılan fonksiyonlar tanımlanacak ve bazı temel özellikleri incelendikten sonra (P) primal probleminin çözümlerinin araştırılmasında iyi bir araç olarak kullanılacaktır.

Tanım 5.3.1. *[2] (P) problemi verilsin ve $\phi : V \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu her bir $u \in V$ için $\phi(u, 0) = F(u)$ koşulunu sağlasın. Buna göre*

$$\begin{array}{rcl} L : V \times Y^* & \to & \overline{\mathbb{R}} \\ (u, p^*) & \mapsto & L(u, p^*) := -\sup\limits_{p \in Y}\{\langle p^*, p\rangle - \phi(u, p)\} \end{array}$$

*biçiminde tanımlanan L fonksiyonuna (P) probleminin verilen pertürbasyona göre **Lagrange Fonksiyonu** adı verilir.*

Uyarı 5.3.2. *Sabit bir $u \in V$ için $\phi_u(p) = \phi(u, p)$ fonksiyonu verilirse, L fonksiyonunun tanımlanışı gereği her bir $p^* \in Y^*$ için*

$$L(u, p^*) = -\phi_u^*(p^*) \tag{5.3.63}$$

biçiminde yazılabilir.

Yardımcı Teorem 5.3.3. *[2] (P) problemi verilsin ve L fonksiyonu (P) 'nin verilen bir pertürbasyona göre Lagrange fonksiyonu olsun. Bu durumda*

(i) Her bir $u \in V$ için

$$\begin{array}{rcl} L_u : Y^* & \to & \overline{\mathbb{R}} \\ p^* & \mapsto & L_u(p^*) := L(u, p^*) \end{array}$$

biçiminde tanımlanan L_u fonksiyonu konkav ve üstten yarı süreklidir.

(ii) Eğer $\phi : V \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ konveks ise her bir $p^* \in Y^*$ için

$$\begin{array}{rcl} L_{p^*} : Y^* & \to & \overline{\mathbb{R}} \\ u & \mapsto & L_{p^*}(u) := L(u, p^*) \end{array}$$

ile tanımlanan L_{p^*} fonksiyonu konvekstir.

Kanıt. (i) Her bir $u \in V$ ve her $p^* \in Y^*$ için $L_u(p^*) = L(u, p^*) = -\phi_u^*(p^*)$ 'dır. Buna göre, ϕ_u^* fonksiyonu konveks ve alttan yarı sürekli olduğuna göre $L_u = -\phi_u^*$ konkav ve üstten yarı sürekli bir fonksiyondur.

(ii) Keyfi $u, v \in V$ ve $\lambda \in [0, 1]$ alınsın. Eğer $L(u, p^*) = L(v, p^*) = +\infty$ ise konvekslik açıktır. O halde $L(u,p^*) < +\infty$ ve $L(v,p^*) < +\infty$ kabul edilsin. Buna göre $L_{p^*}(u) < a$ ve $L_{p^*}(v) < b$ olacak şekilde $a, b \in \mathbb{R}$ sayıları ele alınsın. Buradan Lagrange fonksiyonun tanımlanışı gereği

$$L_{p^*}(u) \leq \phi(u,p) - \langle p^*, p\rangle \leq a$$

$$L_{p^*}(v) \leq \phi(v,q) - \langle p^*, q\rangle \leq b$$

olacak şekilde $\exists\ p, q \in Y$ elemanları vardır. Buradan,

$$\begin{aligned}
L_{p^*}(\lambda u + (1-\lambda)v) &= L(\lambda u + (1-\lambda)v, p^*) \\
&\leq \phi(\lambda u + (1-\lambda)v, \lambda p + (1-\lambda)q) - \langle p^*, \lambda p + (1-\lambda)q\rangle \\
(\phi \text{ konveks olduğundan}) &\leq \lambda\phi(u,p) + (1-\lambda)\phi(v,q) - \lambda\langle p^*, p\rangle - (1-\lambda)\langle p^*, q\rangle \\
&\leq \lambda[\phi(u,p) - \langle p^*, p\rangle] + (1-\lambda[\phi(v,q) - \langle p^*, q\rangle]) \\
&\leq \lambda a + (1-\lambda)b
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ifadenin $a \to L_{p^*}(u)$ ve $b \to L_{p^*}(v)$ için limiti alınırsa

$$L_{p^*}(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq \lambda L_{p^*}(u) + (1-\lambda)L_{p^*}(v)$$

yazılabilir. O halde L_{p^*} konvekstir. $\square$

Şimdi (P) ve (P^*) problemleri Lagrange fonksiyonu cinsinden nasıl hesaplanabileceği sorusunun yanıtı aranacaktır. Öncelikle

$$\begin{aligned}
\phi^*(u^*, p^*) &= \sup_{(u,p)\in V\times Y} [\langle (u^*, p^*), (u,p)\rangle - \phi(u,p)] \\
&= \sup_{(u,p)\in V\times Y} [\langle u^*, u\rangle + \langle p^*, p)\rangle - \phi(u,p)] \\
&= \sup_{u\in V}[\langle u^*, u\rangle + \sup_{p\in Y}[\langle p^*, p\rangle - \phi(u,p)]] \\
&= \sup_{u\in V}[\langle w^{\cdot} u\rangle - L(u,p^*)]
\end{aligned}$$

bulunur. O halde

$$\phi^*(0,p^*) = \sup_{u\in V}\{-L(u,p^*)\} = -\inf_{u\in V} L(u,p^*) \tag{5.3.64}$$

elde edilir. Bu durumda (P^*) dual problemi

$$(P^*) \quad \sup_{p^*\in Y^*} \inf_{u\in V} L(u,p^*) \tag{5.3.65}$$

biçiminde ifade edilebilir.

Şimdi ϕ fonksiyonunun kapalı ve konveks olduğu varsayılsın. Bu durumda her bir $u \in V$ için $\phi_u(p) = \phi(u,p)$ fonksiyonu da kapalı ve konveks olacaktır. O halde $\phi_u^{**} = \phi_u$ olur. Buradan,

$$\begin{aligned} \phi_u(p) = \phi_u^{**}(p) &= \sup_{p^* \in Y^*} [\langle p^*, p\rangle - \phi_u^*(p^*)] \\ &= \sup_{p^* \in Y^*} [\langle p^*, p\rangle + L(u,p^*)] \end{aligned}$$

olduğuna göre

$$\phi(u,0) = \sup_{p^* \in Y^*} L(u,p^*) \tag{5.3.66}$$

elde edilir. Dolayısıyla (P) primal problemi

$$(P) \quad \inf_{u \in V} \sup_{p^* \in Y^*} L(u,p^*) \tag{5.3.67}$$

biçiminde ifade edilebilir.

Tanım 5.3.4. *[2] (P) problemi verilsin ve L fonksiyonu (P) probleminin verilen pertürbasyona göre Lagrange fonksiyonu olsun. $(\bar{u}, \bar{p}^*) \in V \times Y^*$ noktası verilsin. Eğer her bir $u \in V$ ve $p^* \in Y^*$ için*

$$L(\bar{u}, p^*) \leq L(\bar{u}, \bar{p}^*) \leq L(u, \bar{p}^*) \tag{5.3.68}$$

*eşitsizliği sağlanıyorsa $(\bar{u}, \bar{p}^*)$ ikilisine L fonksiyonunun **eyer noktası** denir.*

Önerme 5.3.5. *[2] (P) problemi verilsin ve L fonksiyonu (P) probleminin verilen pertürbasyona göre Lagrange fonksiyonu olsun. Eğer ϕ konveks ise aşağıdakiler denktir:*

(i) $(\bar{u}, \bar{p}^*)$ noktası L 'nin eyer noktasıdır.

(ii) $\bar{u}$ (P) 'nin, $\bar{p}^*$ (P^*) probleminin bir çözümüdür ve

$$\inf P = \sup P^*$$

olur.

Kanıt. $(i) \Rightarrow (ii)$ Her bir $u \in V$ ve $p^* \in Y^*$ için 5.3.68 sağlansın. İlk olarak her $u \in V$ için $L(\bar{u}, \bar{p}^*) \leq L(u, \bar{p}^*)$ olduğuna göre (5.3.64) gereğince

$$L(\bar{u}, \bar{p}^*) = \inf_{u \in V} L(u, \bar{p}^*) = -\phi^*(0, \bar{p}^*)$$

bulunur. İkinci olarak ise her bir $p^* \in Y^*$ için $L(\bar{u}, p^*) \leq L(\bar{u}, \bar{p}^*)$ olduğundan ve (5.3.66) gereğince

$$L(\bar{u}, \bar{p}^*) = \sup_{p^* \in Y^*} L(\bar{u}, p^*) = \phi(\bar{u}, 0)$$

olur. Buradan

$$\phi(\bar{u}, 0) + \phi^*(0, \bar{p}^*)$$

elde edilir ki, Önerme 5.2.11 'den $\bar{u}$ (P) 'nin, $\bar{p}^*$ (P^*) probleminin bir çözümüdür ve

$$\inf P = \sup P^*$$

sağlanır.

$(ii) \Rightarrow (i)$ $\bar{u}$ (P) 'nin, $\bar{p}^*$ (P^*) probleminin bir çözümü olsun ve $\inf P = \sup P^*$ sağlansın. Buna göre

$$-\phi^*(0, \bar{p}^*) = \inf_{u \in V} L(u, \bar{p}^*) \leq L(\bar{u}, \bar{p}^*)$$

ve

$$\phi(\bar{u}, 0) = \sup_{p^* \in Y^*} L(\bar{u}, p^*) \geq L(\bar{u}, \bar{p}^*)$$

olur. $\inf P = \sup P^*$ olduğundan $\phi(\bar{u}, 0) + \phi^*(0, \bar{p}^*) = 0$ 'dır. O halde

$$L(\bar{u}, \bar{p}^*) \leq \phi(\bar{u}, 0) = -\phi^*(0, \bar{p}^*) \leq L(\bar{u}, \bar{p}^*)$$

ve böylelikle

$$L(\bar{u}, \bar{p}^*) = \inf_{u \in V} L(u, \bar{p}^*) = \sup_{p^* \in Y^*} L(u, \bar{p}^*)$$

elde edilir. O halde her bir $u \in V$ ve $p^* \in Y^*$ için

$$L(\bar{u}, p^*) \leq L(\bar{u}, \bar{p}^*) \leq L(u, \bar{p}^*) \tag{5.3.69}$$

sağlanır. Böylece $(\bar{u}, \bar{p}^*)$ noktası L fonksiyonunun eyer noktasıdır. $\square$

Önerme 5.3.6. *[2] (P) problemi kararlı ve ϕ konveks ise aşağıdakiler denktir:*

(i) $\bar{u} \in V$ noktası (P) probleminin bir çözümüdür.

(ii) $(\bar{u}, \bar{p}^*)$ noktası L 'nin eyer noktası olacak şekilde bir $\bar{p}^* \in Y^*$ vardır.

Kanıt. $(i) \Rightarrow (ii)$ $\bar{u} \in V$ noktası (P) probleminin bir çözümü olsun. (P) kararlı olduğundan (P^*) probleminin en az bir $\bar{p}^* \in Y^*$ çözümü vardır ve $\in P = \sup P^*$ olur. O halde bşr önceki önermeden $(\bar{u}, \bar{p}^*)$ noktası L 'nin eyer noktasıdır.

$(ii) \Rightarrow (i)$ $(\bar{u}, \bar{p}^*)$ noktası L 'nin eyer noktası ise bir önceki önermeden $\bar{u} \in V$ noktası (P) probleminin bir çözümüdür. □

KAYNAKLAR

[1] Borwein J., Lewis A.S., *Convex Analysis and Nonlinear Optimization*, Springer Verlag, New York, 2000.

[2] Ekeland I., Temam R., *Convex Analysis and Variational Problems*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1976.

[3] Goh C.J., *Duality in Optimization and Variational Equalities*, Taylor& Francis, London,2002.

[4] Hiriart-Urruty J.-B, Lemarechal C., *Fundamentals of Convex Analysis*, Springer Verlag, Berlin, 2001.

[5] Hiriart-Urruty J.-B, Lemarechal C., *Convex Analysis and Minimization Algorithms I*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1993.

[6] Hiriart-Urruty J.-B, Lemarechal C., *Convex Analysis and Minimization Algorithms II*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1993.

[7] Lay S.R., *Convex Sets and their Applications*, Wiley & Sons, 1982.

[8] Pallaschke D., Rolewicz S., *Foundations of Mathematical Optimization*, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1997.

[9] Pallaschke D., Urbanski R., *Pairs of Compact Convex Sets-Fractional Arithmetic with Convex Sets*, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 2002.

[10] Roberts A.W., Varberg D.E., *Convex Functions*, Academic Press, 1973.

[11] Rockafellar R.T., *Convex Analysis*, Princeton university Press, 1970.

[12] Rockafellar R.T., *Conjugate Duality and Optimization*, Regional Conference Series in Applied Mathematics 16. SIAM Publications, 1974.

[13] Rockafellar R.T., Wets R.J.-B., *Variational Analysis*, Springer Verlag, Heidelberg, 1998.

[14] Schirotzek W., *Nonsmooth Analysis*, Springer Verlag, Berlin, 2007.