$\mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{R}^n$ İÇERİSİNDE GÖMÜLÜ KATMANLAR ÜZERİNDE İNTEGRASYON

İsmail ÇUVALCI
Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı
Ocak – 2009

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

İsmail Çuvalcı'nın " $\mathbb{R}^n$ **ve** $\mathbb{R}^n$ **İçerisinde Gömülü Katmanlar Üzerinde İntegrasyon** " başlıklı **Matematik** Anabilim Dalındaki, Yüksek Lisans Tezi 18.12.2008 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

		Adı-Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	:	Prof.Dr. SADETTİN ERDEM	....
Üye	:	Doç.Dr. NEDİM DEĞİRMENCİ	....
Üye	:	Yard.Doç.Dr. HAKAN CEBECİ	....

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

$\mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{R}^n$ İÇERİSİNDE GÖMÜLÜ KATMANLAR ÜZERİNDE İNTEGRASYON

İsmail ÇUVALCI

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Sadettin ERDEM
2009, 131 sayfa

Bu çalışmada, $\mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{R}^n$ içerisinde gömülü katmanlar üzerinde sayısal değerli fonksiyonların integrali incelenmiştir. Bu amaçla sekiz bölümden oluşan bu çalışmanın, ilk bölümünde ileriki bölümler için gerekli tanım, önerme ve teoremler sunulmuştur. İkinci bölümde sıfır ölçüm ve sıfır içerik tanımlamıştır. Ayrıca ikinci bölüm içerisinde sıfır ölçümlü ve sıfır içerikli küme örnekleri verilip, bu iki kavram arasındaki ilişki ifade edilmiş, temel sonuçlar kanıtlanmıştır. Üçüncü bölümde integrallenebilme için gerekli ve yeterli bir koşul verilip, integralin genel özellikleri sunulmuştur. Ayrıca integrasyon $\mathbb{R}^n$ içindeki kapalı dörtgenlerden herhangi sınırı kümeler üzerine genişletilip, bu genişlemenin genel özellikleri incelenmiştir. Dördüncü bölümde Fubini Teoremi ifade edilmiş ve kanıtlanmıştır. Beşinci bölümde Has Olmayan İntegraller tanımlanıp genel özellikleri sunulmuştur. Ayrıca, yine bu bölüm içerisinde bundan önceki bölümlerde yer alan integral ile has olmayan integral arasındaki ilişki ifade edilmiştir. Altıncı bölümde Birimin Parçalanışı tanımlanıp, varlığı kanıtlanmıştır. Yedinci bölümde Değişken Değiştirme Teoremi ifade edilmiştir. Son bölümde ise $\mathbb{R}^n$-uzayı içinde katmanlar tanımlanıp, çeşitli katman örnekleri verildikten sonra, bu katmanlar üzerinde sayısal değerli fonksiyonların integrali incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: İntegral, Sıfır Ölçüm, Sıfır İçerik, Has Olmayan İntegraller, Birimin Parçalanışı, Katman

ABSTRACT

Master of Science Thesis

INTEGRATION ON $\mathbb{R}^n$ AND MANIFOLDS WHICH ARE IMMERSED IN $\mathbb{R}^n$

İsmail ÇUVALCI

Anadolu University
Graduate School of Sciences
Mathematics Program

Supervisor: Prof. Dr. Sadettin ERDEM

2009, 131 pages

In this thesis, integration of scaler functions on $\mathbb{R}^n$ and on manifolds which are immersed in $\mathbb{R}^n$ is examined in detail. For this purpose; some definition, propositions and theorems -which are needed for the remaining sections- are presented in the first section of total eight. In the second, the concepts of measure zero and content zero are introduced. Furthermore examples of measure zero and content zero sets are provided and interrelation between these two concepts are expressed and some basic results are proved. In the third section, necessary and sufficient condition for integrability of functions are given, and some general properties of integration are expressed. Moreover the integration on a closed rectangle in $\mathbb{R}^n$ is generalized to on an arbitrary bounded subset of $\mathbb{R}^n$ and again; some basic properties of it are investigated. In the fourth part, Fubini's Theorem is stated and proved. In the fifth part, Improper Integrals are defined and general properties of them are presented. Further, interrelation between the ordinary and improper integral are expressed. In the sixth part, Partition of Unity is defined and its existence is proved. In the the seventh part, Change of Variables Theorem is expressed. Finally, in the last part, manifolds in $\mathbb{R}^n$ are defined and various examples are given. Moreover, the concept of integration of scaler functions is generalized to on such manifolds and some of its properties are investigated.

Keywords : Integral, Measure Zero, Content Zero, Improper Integral, Partition of Unity, Manifold

TEŞEKKÜR

Anadolu Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümündeki değerli hocalarıma, arkadaşlarım İlhan KORKMAZ ve Mehmet ERGEN ile özellikle bu çalışmanın başlangıcından bitimine kadar geçen süre içerisinde bilgisi, desteği, anlayışı ve sabrı nedeniyle değerli hocam Prof. Dr. Sadettin ERDEM'e teşekkürü bir borç bilirim.

İsmail ÇUVALCI
Ocak 2009

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}$	:	Gerçel sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	:	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar kümesi
A^o	:	A kümesinin iç noktalar kümesi
∂A	:	A kümesinin kabuk noktaları kümesi
$\overline{A}$	:	A kümesinin kapanışı
$B_\varepsilon(x)$	:	x merkezli-küb
P	:	Parçalanış
$L(f,P)$	:	P parçalanışına göre f fonksiyonunun alt toplamı
$U(f,P)$	:	P parçalanışına göre f fonksiyonunun üst toplamı
$\int_D f$	:	D dörtgeni üzerinden f fonksiyonunun integrali
$o(f,x)$	:	f fonksiyonunun x noktasındaki salınımı
χ_A	:	A kümesinin karakteristik fonksiyonu
$\int_A f$	:	A kümesi üzerinden f fonksiyonunun integrali
$v(A)$	:	A kümesinin hacmi
$J_g(x)$	:	g dönüşümünün x noktasındaki Jaobiyen matrisi
B^{tr}	:	B matrisinin devriği
$\mathcal{P}$	:	n-paralel yüzlü
$\int_M f dV$	:	M katmanı üzerinden f fonksiyonunun integrali

1 GİRİŞ

Bu bölüm içerisinde ilerideki bölümlere temel teşkileden, bazı tanım, önerme ve teoremler ifade edilip kanıtlanacaktır.

$D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ kapalı dikdörtgeni olmak üzere, $f : D \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun integrali tek değişkenli fonksiyonların integraline benzer şekilde tanımlanır. İntegral tanımına geçmeden önce fonksiyonlarımızın tanım kümeleri olarak alacağımız kapalı dikdörtgenleri ve bu kümelere ait parçalanış kavramını tanımlayacağız:

Tanım 1.1 $[a_1, b_1], [a_2, b_2], ..., [a_n, b_n]$ *kapalı aralıklarının sıralı çarpım kümesi*

$$D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_n, b_n] = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$$

ye, $\mathbb{R}^n$ *de* ***n-boyutlu kapalı dikdörtgen*** *yada kısaca* ***kapalı dörtgen*** *denir. Benzer şekilde* $(a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_n, b_n)$ *açık aralıklarının sıralı çarpım kümesi*

$$D = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times ... \times (a_n, b_n) = \prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i)$$

ye, $\mathbb{R}^n$ *de* ***n-boyutlu açık dikdörtgen*** *yada kısaca* ***açık dörtgen*** *denir.*

Aksi belirtilmedikce kapalı dikdörtgen için D ve $\mathbb{R}^n$ nin herhangi bir alt kümesini göstermek için ise, A kullanılacaktır.

Tanım 1.2 *Kapalı* $[a, b]$ *aralığının* P *parçalanışı*

$$a = t_0 < t_1 < ... < t_k = b$$

olmak üzere $< t_0, t_1, ..., t_k >$ *sonlu dizisidir.* P *parçalanışı* $[a, b]$ *aralığını* k *tane* $[t_{i\ -1}, t_i]$ *alt aralığına böler. Benzer şekilde* $[a_i, b_i]$ *kapalı aralığının parçalanışı* $P_i =< t_0^i, ..., t_{k_i}^i >$ *ler* $D = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$ *dörtgeninin bir* $P = (P_1, ...P_n)$ *parçalanışını verir.* P *nin tipik bir öğesi*

$$S = [t_{j_1-1}^1, t_{j_1}^1] \times [t_{j_2-1}^2, t_{j_2}^2] \times ... \times [t_{j_n-1}^n, t_{j_n}^n] \qquad j_r \in \{0, 1, ..., k_r\}\,, \quad r = 1, ..., n$$

şeklindedir. Bu durumda P *parçalnışı,* $k = k_1.k_2.....k_n$ *tane alt dörtgenden oluşan bir parçalanış olur. Gerek duyulduğunda parçalanış* P *için,*

$$P = \{S_1, ...S_k\} \quad \textit{veya} \quad P = (P_1, ...P_n)$$

gösterimini kullanacağız ve P *nin her alt dörtgeni için* $S_i \in P$ *yazacağız.*

Örnek 1.3

$[0, 1]$ kapalı aralığının bir parçalanışı $P_1 =< 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1 >$ ve $[2, 4]$ için ise $P_2 =< 2, 3, 4 >$ olsun. Bu durumda

$$S_1 = [0, \frac{1}{2}] \times [2, 3]\,, \; S_2 = [0, \frac{1}{2}] \times [3, 4]\,, \; ... \quad , \quad S_6 = [\frac{3}{4}, 1] \times [3, 4]$$

olmak üzere;

$$P = \{S_1, S_2, ..., S_6\} = (P_1, P_2)$$

$D = [0, 1] \times [2, 4]$ kapalı dikdörtgeninin bir parçalanışını verir.

$f : D \to \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon ve D nin bir parçalanışı P olsun. P parçalanışının bir alt dörtgeni

$$S = [t^1_{j_1-1}, t^1_{j_1}] \times [t^2_{j_2-1}, t^2_{j_2}] \times ... \times [t^n_{j_n-1}, t^n_{j_n}]$$

için $m_S(f)$ ve $M_S(f)$ sayıları

$$m_S(f) := \inf\{f(x) : x \in S\}$$

$$M_S(f) := \sup\{f(x) : x \in S\}$$

ile tanımlanır. Ayrıca

$$v(S) := \left(t^1_{j_1} - t^1_{j_1-1}\right)\left(t^2_{j_2} - t^2_{j_2-1}\right).....\left(t^n_{j_n} - t^n_{j_n-1}\right)$$

sayısına da S **dikdörtgeninin hacmi** denir. Görülür ki, herhangi kapalı

$$D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_n, b_n]$$

ve açık

$$D' = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times ... \times (a_n, b_n)$$

dikdörtgenleri için

$$v(D) = v(D') = (b_1 - a_1).(b_2 - a_2)...(b_n - a_n)$$

olur. f fonksiyonunun P parçalanışına göre *alt toplamı* olarak anılan $L(f,P)$ sayısı

$$L(f,P) = \sum_{S \in P} m_S(f) v(S)$$

olarak ve *üst toplam* $U(f,P)$ sayısı ise

$$U(f,P) = \sum_{S \in P} M_S(f) v(S)$$

olarak tanımlanır. Aşikar olarak $L(f,P) \leq U(f,P)$ olur.

Bir I aralığın $P =< t_0, t_1, ..., t_r >$ ve $P^{'} =< s_0, s_1, ..., s_l >$ gibi iki parçalanışı olsun. $\{t_0, t_1, ..., t_r\} \cup \{s_0, s_1, ..., s_l\}$ kümesini

$$e_0 = t_0 = s_0 < e_1 < ... < e_m = t_r = s_l$$

olmak üzere $\{e_0, e_1, ..., e_m\}$ olarak yazarsak, $< e_0, e_1, ..., e_m >$ bize I aralığının yeni bir parçalanışını verir. Bu parçalanışı, $P \cup P^{'}$ ile gösterip, $P \cup P^{'} =< e_0, e_1, ..., e_m >$ yazacağız. Görülür ki, $m \leq r + l$ olur.

P ve $P^{'}$ ler bir $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ dörtgeninin parçalanışları olması durumunda ise, $P = (P_1, ..., P_n)$ ve $P^{'} = (P_1^{'}, ..., P_n^{'})$ olarak yazarsak, $P \cup P^{'}$ de D nin yeni bir parçalanışıdır ve

$$P \cup P^{'} := (P_1 \cup P_1^{'}, ..., P_n \cup P_n^{'})$$

olarak tanımlanır.

Tanımdan kolayca görülür ki, $P = \{T_1, ..., T_k\}$, $P^{'} = \{S_1, ..., S_l\}$ ve $P \cup P^{'} = \{E_1, ..., E_q\}$ gösterimleriyle verildiğinde $\forall\, T_i \in P$ için bazı $E_{i_1}, ..., E_{i_\alpha} \in P \cup P^{'}$ vardır öyle ki,

$T_i = \bigcup\limits_{j=1}^{\alpha} E_{i_j}$ ve $\forall\ S_i \in P^{'}$ için bazı $E^{'}_{i_1}, ..., E^{'}_{i_\beta} \in P \cup P^{'}$ vardır öyle ki, $S_i = \bigcup\limits_{j=1}^{\beta} E^{'}_{i_j}$ olur.

Bu özellik önemli olduğundan, aşağıdaki tanımı vereceğiz.

Tanım 1.4 *$P = \{T_1, ..., T_k\}$ ve $Q = \{E_1, ..., E_q\}$ bir dikdörtgenin birer parçalanışı olsunlar. Eğer $\forall\ T_i \in P$ alt dörtgeni için $T_i = \bigcup\limits_{j=1}^{\alpha} E_{i_j}$ koşulunu sağlayan bazı $E_{i_1}, ..., E_{i_\alpha} \in Q$ alt dörtgenleri bulunabiliyorsa, Q* ***parçalanışı** P **nin bir incelmişi*** *(ya da Q* ***parçalanışı** P **den daha incedir)*** *denir.*

Buradan kolayca görülür ki, herhangi iki parçalanış P ve P' için $P \cup P^{'}$ parçalanışı hem P den hem de $P^{'}$ den daha incedir.

Önerme 1.5 *D nin iki ayrı parçalanışı P ve P' olsunlar. Eğer P' parçalanışı P den daha ince ise bu durumda*

$$L(f,P) \leq \ L(f,P') \qquad ve \qquad U(f,P') \leq \ U(f,P)$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

Kanıt. P' daha ince olduğundan, P nin her bir S alt dörtgeni, P' nün bazı alt dörtgenleri $S_1, ..., S_\alpha$ nin birleşimi olarak yazılabilir. Her $i = 1, ..., \alpha$ için $S_i \subseteq S$ olması nedeniyle $m_S(f) \leq m_{S_i}(f)$ olacağından

$$m_S(f)v(S) = m_S(f)\left[v(S_1) + ... + v(S_\alpha)\right] \leq m_{S_1}(f)v(S_1) + ... + m_{S_\alpha}(f)v(S_\alpha)$$

olur. Buradan

$$L(f,P) \leq L(f,P')$$

bulunur. Benzer şekilde $i = 1, ..., \alpha$ için $S_i \subseteq S$ olması nedeniyle $M_S(f) \geq M_{S_i}(f)$ olacağından

$$U(f,P') \leq \ U(f,P)$$

elde edilir. □

Sonuç 1.6 *D nin herhangi iki parçalanışı P ve P' ise*

$$L(f,P') \leq U(f,P)$$

olur.

Kanıt. P'' parçalanışı P ve P' lerden daha ince olsun. (Böyle bir parçalanış her zaman mevcuttur. Örneğin $P'' = P \cup P'$ seçilebilir.) Bu durumda

$$L(f,P') \leq L(f,P'') \leq U(f,P'') \leq U(f,P)$$

eşitsizliği bize sonucu verir. □

Yukarıdaki sonuca göre f fonksiyonunun alt toplamlarının en küçük üst sınırı, üst toplamların en büyük alt sınırından küçük veya eşittir. Yani

$$\sup_P \{L(f,P)\} \leq \inf_P \{U(f,P)\}$$

olur.

Tanım 1.7 *$f : D \to \mathbb{R}$ kapalı bir dikdörtgen üzerinde sınırlı bir fonksiyon olma üzere*

$$\sup_P \{L(f,P)\} = \inf_P \{U(f,P)\} = k$$

koşulu sağlanırsa f ***fonksiyonuna** D* ***dikdörtgeni üzerinde integrallenebilirdir*** *denir. Bu k sayısına da f fonksiyonunun D üzerindeki* ***integrali*** *denir.*

Bu durumda k sayısı $\int_D f$ veya $\int_D f(x^1,..,x^n)dx^1...dx^n$ ile gösterilir. $a \leq b$ olmak üzere $D = [a,b]$ alınırsa $f : D \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun integrali bilinen $\int_a^b f(x)dx$ Riemann integralidir. [1-4]

Teorem 1.8 *Kapalı bir dikdörtgen üzerinde sınırlı, $f : D \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun integrallenebilmesi için gerek ve yeter koşul, verilen her $\varepsilon > 0$ sayısı için*

$$U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) < \varepsilon$$

koşulunu sağlayan D nin bir P_ε parçalanışının varlığıdır.

Kanıt. f integre edilebilir ve $\varepsilon > 0$ sayısı verilmiş olsun.

$$k = \sup_P \{L(f,P)\} = \inf_P \{U(f,P)\}$$

yazalım. O zaman

$$k - \frac{\varepsilon}{3} < L(f,P') \leq k \quad \text{ve} \quad k \leq U(f,P'') < k + \frac{\varepsilon}{3}$$

eşitsizlikleri bazı P' ve P'' parçalanışları için sağlanır. Buradan $P_\varepsilon = P' \cup P''$ olarak alındığında, Sonuç(1.5) kullanılarak,

$$U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) < \varepsilon$$

elde edilir. Yani P_ε aranan parçalanıştır.

Tersine, her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir P_ε parçalanışı mevcut olsun öyle ki,

$$U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) < \varepsilon$$

koşulu sağlansın. O zaman $U(f,P_\varepsilon) < L(f,P_\varepsilon) + \varepsilon$ olur ve buradan $U(f,P_\varepsilon) < \sup\limits_P \{L(f,P)\} + \varepsilon$ elde edilir. Buradan;

$$\inf_P \{U(f,P)\} \leq U(f,P_\varepsilon) < \sup_P \{L(f,P)\} + \varepsilon$$

olur. Öyleyse

$$\inf_P \{U(f,P)\} - \sup_P \{L(f,P)\} < \varepsilon$$

olur. Bu eşitsizlik her $\varepsilon > 0$ sayısı için geçerli olduğundan

$$\inf_P \{U(f,P)\} = \sup_P \{L(f,P)\}$$

elde edilir. Yani f integrallenebilirdir. $\square$

Örnek 1.9

1) $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$, $\forall x \in D$ olsun, yani f fonksiyonu D üzerinde sabit olsun. D nin keyfi bir parçalanışı P nin her alt dörtgeni S için $m_S(f) = M_S(f) = c$ olacağından

$$L(f,P) = U(f,P) = \sum_{S \in P} cv(S) = cv(D) = k$$

elde edilir. Dolayısıyla f integre edilebilirdir ve bu integral k ye eşittir.

2) $f : D = [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & , \quad x \in \mathbb{Q} \\ 1 & , \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

olsun.

D nin bir parçalanışı P ve P nin herhangi bir alt dörtgeni S olsun. S içinde $x \in \mathbb{Q}$ olmak üzere (x,y) noktaları olduğu gibi x in rasyonel olmadığı (x,y) noktaları da vardır. Bu nedenle $m_S(f) = 0$, $M_S(f) = 1$ olur. Buradan

$$L(f,P) = \sum_S 0v(S) = 0, \quad \forall P$$

iken

$$U(f,P) = \sum_S 1v(S) = v(D) = 1, \quad \forall P$$

elde edilir. Tanım gereğince f integrallenebilir değildir.

2 SIFIR ÖLÇÜM VE SIFIR İÇERİK

Tanım 2.1 $\mathbb{R}^n$ *nin bir alt kümesi* A *için verilen her* $\varepsilon > 0$ *sayısına bağlı,*

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i \qquad ve \qquad \sum_{i=1}^{\infty} v(D_i) \ < \ \varepsilon$$

koşulunu sağlayan bir kapalı dikdörtgenler dizisi $\{D_1, D_2 ...\}$ *varsa,* A ***nın (n-boyutlu) ölçümü sıfırdır*** *denir.*

A nın ölçümü sıfır ve $B \subset A$ ise, B nin ölçümünün de sıfır olacağı açıktır.

Önerme 2.2 $A \subset \mathbb{R}^n$ *sıfır ölçümlü bir küme olsun. Bu durumda verilen her* $\varepsilon > 0$ *sayısına bağlı* A *yı örten bir açık dikdörtgenler dizisi* $\{U_1, U_2, ...\}$ *bulunabilir öyle ki,*

$$\sum_{k=1}^{\infty} v(U_k) < \varepsilon$$

olur.

Kanıt. $\varepsilon > 0$ sayısı verilmiş olsun. A sıfır ölçümlü olduğundan,

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k \ \text{ ve } \ \sum_{k=1}^{\infty} v(D_k) \ < \ \frac{\varepsilon}{2^n}$$

koşulunu sağlayan bir

$$\{D_1, D_2, ...\}$$

kapalı dikdörtgenler dizisi vardır.

$$D_k = [a_1^k, b_1^k] \times ... \times [a_n^k, b_n^k]$$

ise,

$$r_k \leq min\{(b_t^k - a_t^k) : t = 1, .., n\}$$

olmak üzere

$$U_k = \left(a_1^k - \frac{1}{2} r_k \ , \ b_1^k + \frac{1}{2} r_k\right) \times ... \times \left(a_n^k - \frac{1}{2} r_k \ , \ b_n^k + \frac{1}{2} r_k\right)$$

olarak seçelim. U_k dörtgenin hacmi,

$$v(U_k) = (b_1^k - a_1^k + r_k).(b_2^k - a_2^k + r_k).....(b_n^k - a_n^k + r_k)$$

olur. Bu durumda; $J = \{1, ..., n\}$, $J_t = \{j_1, ..., j_t\} \subset J$, $h_t^k = b_t^k - a_t^k$; $t = 1, ..., n$ ve $H_{J_t}^k = h_1^k h_2^k ... h_t^k$ yazalım. J_0 boş kümeyi göstermek üzere, $H_{J_0}^k = 1$ diyelim. O zaman,

$$\begin{aligned} v(U_k) &= (h_1^k + r_k)(h_2^k + r_k).....(h_1^k + r_k) \\ &= \sum_{t=0}^{n} \sum_{J_t \subset J} H_{J_t}^k r_k^{n-t} \end{aligned}$$

olur. Ama; eşitliğin sağındaki terim sayısı, J kümesinin tüm alt kümeleri sayısı olan 2^n ye eşit ve her $t = 1, ..., n$ için

$$H_{J_t}^k r_k^{n-t} \leq H_{J_n}^k = h_1^k h_2^k ... h_n^k = v(D_k)$$

olacağından,

$$v(U_k) \leq 2^n v(D_k)$$

elde edilir. Buradan

$$\sum_{k=1}^{\infty} v(U_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^n v(D_k) = 2^n \sum_{k=1}^{\infty} v(D_k) < 2^n \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$$

ve

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$$

elde edilir. $\square$

Sonuç 2.3 $A \subset \mathbb{R}^n$ *kümesi sıfır ölçümlüdür ancak ve ancak her* $\varepsilon > 0$ *sayısına bağlı,* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} v(U_i) < \varepsilon$ *şartını sağlayan ve* A *yı örten bir açık dikdörtgenler dizisi* $\{U_1, U_2 ...\}$ *vardır.*

Böylece sıfır ölçümlü tanımı için kapalı dikdörtgenler yerine açık dikdörtgenler kullanılabilir.

Örnek 2.4

Sonlu kümelerin ölçümü sıfırdır. Aslında her sayılabilir $A \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin ölçümü de sıfırdır. Gerçekten de; $A = \{a_1, a_2, ...\}$ sayılabilir kümesini ele alalım. Verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına bağlı, $a_i \in D_i$ ve $v(D_i) < \dfrac{\varepsilon}{2^i}$ olacak şekilde D_i kapalı dikdörtgenini seçelim. Görülür ki, $\{D_i\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi A yı örter ve $\sum\limits_{i=1}^{\infty} v(D_i) < \varepsilon$ şartını sağlar. Yani, A sıfır ölçümlüdür. Bunun bir uygulaması olarak, $\mathbb{R}$ de tüm rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{Q}$ nün sıfır ölçümlü olduğu görülür. Özel olarak da $I = [0,1]$ aralığındaki tüm rasyonel sayılar $\mathbb{Q} \cap I$ kümesi de sıfır ölçümlüdür.

Teorem 2.5 $\mathbb{N}$ *doğal sayılar kümesini göstermek üzere her* $i \in \mathbb{N}$ *için* A_i *kümesinin ölçümü sıfır ise* $A = \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i$ *kümesinin ölçümü de sıfırdır.*

Kanıt. A_i kümesinin ölçümü sıfır olduğundan verilen $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık A_i nin $\sum\limits_{j=1}^{\infty} v(U_{ij}) < \frac{\varepsilon}{2^i}$ koşulunu sağlayan kapalı dikdörtgenlerden oluşan $\{U_{ij}\}_j$ örtüsü vardır. $\{U_{ij}\}_{i,j}$ ailesi A yı örter ve aşağıdaki gibi sıralanabilir:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow \\
 & U_{11} & & U_{12} & & U_{13} & \ldots \\
 / & & / & & / & & \\
 & U_{21} & & U_{22} & & U_{23} & \ldots \\
 / & & / & & & & \\
 & U_{31} & & U_{32} & & U_{33} & \ldots \\
 / & & & & & &
\end{array}$$

Dolasısiyle $V_1, V_2, V_3, ...$ izisi olarak yazılabilir. $\{V_i\}$ dizisi

$$\sum_{i=1}^{\infty} v(V_i) < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon$$

koşulunu sağladığından A kümesi sıfır ölçümlü olur. $\square$

Tanım 2.6 $A \subset \mathbb{R}^n$ *herhangi bir alt küme olsun. Bu durumda verilen her* $\varepsilon > 0$ *sayısına karşılık,* A *kümesini örten ve*

$$\sum_{i=1}^{k} v(D_i) \ < \ \varepsilon$$

*koşulunu sağlayan **sonlu** sayıda kapalı dikdörtgenler*

$$\{D_1, ..., D_k\}$$

varsa, o zaman A ***nın (n-boyutlu) içeriği sıfırdır*** *denir.*

Önerme 2.7 $A \subset \mathbb{R}^n$ *sıfır içerikli bir küme olsun. Bu durumda her* $\varepsilon > 0$ *sayısına bağlı,* A *yı örten ve*

$$\sum_{i=1}^{k} v(U_i) \ < \ \varepsilon$$

koşulunu sağlayan bir açık dikdörtgenler dizisi $\{U_1, ..., U_k\}$ *vardır.*

Kanıt. Önerme(2.2) nin kanıtına benzer bir şekilde bulunabilir. □

Uyarı 2.8 *Sıfır ölçümlü her kümenin sıfır içerikli olması gerekmez. Örnek olarak* $\mathbb{N}$ *doğal sayılar kümesi olmak üzere,* $\mathbb{N}$ *sayılabilir bir kümedir ve Örnek(2.4) den sıfır ölçümlü bir kümedir. Öte yandan* $\mathbb{N}$ *sıfır içerikli bir küme değildir. Çünkü, her şeyden önce, örtü olma (yani,* $\mathbb{N} \subset \bigcup_{i=1}^{p} D_i$ *) koşulunu şağlayan kapalı aralıklardan oluşan,* $\{D_i : i = 1, ..., p\}$ *sonlu ailesi bulunamaz:*

Gerçekten de; diyelim ki, $\{D_i : i = 1, ..., p\}$ *ailesi örtme koşulunu sağlasın. Bu durumda en az bir* i_0 *için* D_{i_0} *kapalı aralığı sonsuz sayıda doğal sayı içermek zorunda kalacaktır. Bu da mümkün değildir.*

Bu örnek ile, sıfır ölçümlü her kümenin sıfır içerikli olmayacağını gördük. Öte yandan sıfır ölçümlü bir kümenin hangi koşul yada koşullar altında sıfır içerikli olacağı sorusu gündeme gelir. Bu soruya cevabımızı Teorem(2.10) da vereceğiz.

Teorem 2.9 $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$, *aralığının içeriği sıfır değildir. Ayrıca, eğer* $\{D_1, ..., D_k\}$ *kapalı aralıklar kümesi* $[a, b]$ *aralığının herhangi bir örtüsü ise*

$$\sum_{i=1}^{k} v(D_i) \geq b - a$$

olur.

Kanıt. $\{D_1, ..., D_k\}$ kapalı aralıklar kümesi $[a, b]$ aralığının örtüsü olsun. Örtüdeki D_i kümelerinin, $[a, b]$ kapalı aralığı içinde kaldığını varsayalım. (Eğer D_i, $[a, b]$ içinde kalmıyorsa $[a, b]$ ile arakesitini alarak varsayım sağlatılır.) $\{D_i\}$ örtüsündeki aralıkların tüm uç noktalarından oluşan $P =< a = t_0, t_1, ..., t_r = b >$ parçalanış, $[a, b]$ aralığının bir parçalanışını verecektir. (Bu durumda, $r \leq 2k$ olduğu görülür.) Buradan

$$\sum_{i=1}^{k} v(D_i) \geq \sum_{j=1}^{r} (t_j - t_{j-1}) = b - a$$

olacağı kolayca görülür. □

Teorem 2.10 *Eğer A tıkız ve sıfır ölçümlü ise A sıfır içeriklidir.*

Kanıt. $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. A sıfır ölçümlü olduğundan A yı örten ve

$$\sum_{i=1}^{\infty} v(U_i) \; < \; \varepsilon$$

koşulunu sağlayan açık dikdörtgenler dizisi $\{U_1, U_2, ...\}$ vardır. A tıkız olduğundan bunların sonlu tanesi A yı örter. Bu sonlu alt aile $\{U_{i_1}, ..., U_{i_m}\}$ aşağıdaki eşitsizliği sağlar:

$$\sum_{k=1}^{m} v(U_{i_k}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} v(U_i) < \varepsilon$$

Buradan,tanım gereği, A nın sıfır içerikli olduğu görülür. □

Sonuç 2.11 *Eğer $a < b$ ise $[a, b]$ sıfır ölçümlü değildir.*

Kanıt. Eğer $[a, b]$ sıfır ölçümlü olsaydı, tıkız olduğundan Teorem(2.10) gereğince sıfır içerikli olurdu. Bu ise $[a, b]$ nin sıfır içerikli olmayışıyla (Teorem(2.9)) çelişir. □

Tanım 2.12 $D = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ *kapalı bir dikdörtgen için*

$$A_i^j = \begin{cases} [a_i, b_i] & , \; i \neq j \\ \{a_i\} & , \; i = j \end{cases} \qquad B_i^j = \begin{cases} [a_i, b_i] & , \; i \neq j \\ \{b_i\} & , \; i = j \end{cases}$$

olmak üzere,

$$\partial D := \bigcup_{j=1}^{n} \left(\prod_{i=1}^{n} A_i^j\right) \bigcup \bigcup_{j=1}^{n} \left(\prod_{i=1}^{n} B_i^j\right)$$

olarak tanımlanan kümeye D *nin* ***kabuk noktaları kümesi*** *yada kısaca,* ***kabuğu*** *denir.*

$d_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $d_1(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - y_i^2)}$ öklid metriğini göstersin. Bu durumda $\varepsilon > 0$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ için $B'_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : d_1(x,y) < \varepsilon\}$ olmak üzere, $\mathcal{B}' = \{B'_\varepsilon(x) : \varepsilon > 0$ ve $x \in \mathbb{R}^n\}$ kümesinin taban olduğu $\mathcal{T}$ topolojisine, $\mathbb{R}^n$ nin standart topolojisi denir. Öte yandan $d : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $d(x,y) = \max\{|x_i - y_i| : 1 \leq i \leq n|\}$ maksimum metriğini göstersin. $\varepsilon > 0$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ için $B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x,y) < \varepsilon\}$ olmak üzere, $\mathcal{B} = \{B_\varepsilon(x) : \varepsilon > 0$ ve $x \in \mathbb{R}^n\}$ kümesi de, $\mathbb{R}^n$ nin $\mathcal{T}$ standart topolojisi için bir taban oluşturur. Bu gerçek, (teknik ayrıntıları bu çalışmanın kapsamı içerisinde değildir) d ve d_1 metriklerinin, denk metrikler olmasının bir sonucudur. Bu açıklamalar ışığında, $\mathbb{R}^n$ nin $\mathcal{T}$ standart topolojisi için, d maksimum metriği nin ürettiği yuvarları taban alacağız. Bu yuvarlar: $n = 1$ için **açık aralık**, $n = 2$ için **açık kare**, $n = 3$ için **açık küp** ve herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için ise **açık n-küp** olarak adlandırılır. Buradan sonra; süreklilik, iç nokta v.b kavramları için kullanılacak açık kümeler, burada tanımladığımız, n-küpler olacaktır. Aksi belirtilmedikce, d ile maksimum metriğini göstereceğiz.

Kapalı dörtgenler ve açık dörtgenler, $\mathbb{R}^n$ nin standart topolojisi $\mathcal{T}$ ya göre de sırasıyla kapalı ve açıktırlar. D dörtgeninin (kapalı yada açık olabilir) kabuğu ∂D ile, D nin $\mathcal{T}$ ya göre kabuk noktaları kümesi aynıdır. Herhangi bir $A \subset \mathbb{R}^n$ kümesi için, ∂A ile, A nın $\mathcal{T}$ ya göre kabuk noktaları kümesini göstereceğiz. Ayrıca $\overline{A} := A \cup \partial A$ kümesine A nın **kapanışı** denir ve kapalı kümedir. A° ile A kümesinin $\mathcal{T}$ ya göre iç noktaları kümesini göstereceğiz. Buna göre $\overline{A} := A^\circ \cup \partial A$ olur ve $A^\circ \cap \partial A = \varnothing$, boş kümedir.

Önerme 2.13 *$a \in \mathbb{R}$ olmak üzere*

$$C = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_{n-1}, b_{n-1}] \times \{a\} \subset \mathbb{R}^n$$

kümesinin n-boyutlu içeriği (ve dolayısıyla n-ölçümü)sıfırdır.

Kanıt. Verilen $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık

$$k = \frac{\varepsilon}{2(a_1 - b_1).....(a_{n-1}, b_{n-1})}$$

olarak seçilsin ve

$$B_k = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_{n-1}, b_{n-1}] \times [a - k, a + k]$$

olarak tanımlansın. $C \subset B_k$ olduğu açıktır. Öte yandan

$$\begin{aligned} v(B_k) &= (2k).(a_1 - b_1).....(a_{n-1}, b_{n-1}) \\ &= 2.\frac{\varepsilon}{2(a_1 - b_1).....(a_{n-1}, b_{n-1})}.(a_1 - b_1).....(a_{n-1}, b_{n-1}) \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Böylece C sıfır içeriklidir. □

Önerme 2.14 *$D = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ bir kapalı dikdörtgen için, D nin kabuğu ∂D kümesinin (n-boyutlu) içeriği sıfırdır.*

Kanıt. Sıfır içerikli kümelerin sonlu birleşiminin sıfır içerikli olmasının ve Önerme(2.13) ün sonucudur. □

Uyarı 2.15 *Bir D dörtgeninin kabuğu ∂D her zaman sıfır içerikli ve dolayısıyla sıfır ölçümlüdür. Ancak, bu herhangi bir $A \subset \mathbb{R}^n$ kümesi için doğru değildir. Yani, (aşağıdaki örneklerde olduğu gibi,) ∂A sıfır ölçümlü olmak zorunda değildir.*□

Örnek 2.16

$I = [0,1]$ yazarsak, $I^o = (0,1)$ açık ralığı olduğu görülür. $J := I^o \cap \mathbb{Q}$ kümesi sayılabilirdir. $J = \{r_1, r_2, ..., r_s, ...\}$ olarak yazarsak, her $r_n \in J$ için $t_n < \min\left\{r_n, 1 - r_n, \frac{1}{2^{n+2}}\right\}$ ve bu durumda $A_n = (r_n - t_n, r_n - t_n)$ olsun. Kolayca görülür ki,

i) $v(A_n) = 2t_n < 2\frac{1}{2^{n+2}} = \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\frac{1}{2^n}$ ve dolayısıyla

$$\sum_{n=1}^{\infty} v(A_n) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}$$

olur.

ii) $A_n \subset I^o$ ve A_n açık olduğundan $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset I^o$ olur. A açık bir kümedir, yani $A = A^o$.

iii) $\{0,1\} \subset I - A$ olur ve $I - A$ kümesi $0, 1$ rasyonel sayıları dışında rasyonel sayı içermez.

iv) $\overline{A} = \partial A \cup A^o \subset I$ olur, çünkü A nın kapanışı $\overline{A}$, A yı içeren en küçük kapalı kümedir. Ayrıca I da A yı içerir ve kapalıdır. Dolayısıyla $\partial A \subset I - A^o = I - A$ olur.

Sav 1: $\partial A = I - A$ ve dolayısıyla $I = \partial A \cup A$ olur.

Bunun için, *(iv)* den, $I - A \subset \partial A$ olduğunu göstermek yeterlidir: $x \in I - A$ diyelim. $\forall \varepsilon > 0$ için $B_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ aralığı her zaman bir r rasyonel sayı içerir, çünkü $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ dir. Ama $r \in A_k$ olacak şekilde bir $k \in J$ vardır. Buradan $B_\varepsilon(x) \cap A_k \neq \varnothing$ olur. Dolayısıyla $B_\varepsilon(x) \cap A \neq \varnothing$ elde edilir. Öte yandan $B_\varepsilon(x) \cap (\mathbb{R} - A) \neq \varnothing$ olduğundan $x \in \partial A$ olur. Böylece $\partial A = I - A$ elde edilir.

Sav 2: ∂A kümesi sıfır ölçümlü değildir.

Bunun için ∂A nın sıfır ölçümlü olduğunu varsayalım. Bu durumda, $\varepsilon = \frac{1}{4}$ için, kapalı dörtgenlerden oluşan, ve $\sum_{i=1}^{\infty} v(U_i) < \frac{1}{4}$ koşulunu sağlayan, ∂A nın bir

$\{U_i\}$ örtüsü vardır. Ama, bu kez,

$$I = \partial A \cup A \subset \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right)$$

olduğundan

$$1 = v(I) \leq \sum_{j=1}^{\infty} v(U_j) + \sum_{i=1}^{\infty} v(A_i) \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

yani, $1 \leq \dfrac{3}{4}$ elde edilir. Bu bir çelişkidir. Öyleyse ∂A sıfır ölçümlü olamaz. A açık küme olmasına rağmen ∂A sıfır ölçümlü değildir.

3 İNTEGRALLENEBİLİR FONKSİYONLARA YENİDEN BAKIŞ

Bu bölüm içerisinde kapalı dikdörtgenler üzerinde tanımlı sınırlı fonksiyonların integrallenebilir olması için gerekli ve yeterli bir koşul verilip, integral kavramı, dikdörtgen olmayan sınırlı kümelere genişletilecektir.

$f : A \to \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun. f nin $a \in A$ noktasında süreklilikten ne kadar uzaklaştığı net bir şekilde belirlenebilir. $\delta > 0$ sayısına karşılık,

$$B_\delta(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(a,x) < \delta\} \quad a \text{ merkezli bir küb ve } S = A \cap B_\delta(a)$$

olmak üzere

$$M(a,f,\delta) := M_S(f) \quad , \quad m(a,f,\delta) := m_S(f) \quad \text{ve}$$

$$F(a,\delta) := F(\delta) := M(a,f,\delta) - m(a,f,\delta)$$

yazalım.

Tanım 3.1 $f : A \to \mathbb{R}$ *fonksiyonunun* $a \in A$ *noktasındaki salınımı,*

$$o(f,a) = \lim_{\delta \to 0} [M(a,f,\delta) - m(a,f,\delta)] = \lim_{\delta \to 0} F(\delta)$$

sayısı olarak tanımlanır.

δ azaldıkça $M(a,f,\delta) - m(a,f,\delta)$ farkı azalacağından yada sabit kalacağından bu limit her zaman mevcuttur. $o(f,a)$ ile ilgili iki önemli ifademiz vardır:

Önerme 3.2 $f : A \to \mathbb{R}$ *sınırlı fonksiyonunun,* $a \in A$ *noktasında sürekli olabilmesi için gerek ve yeter koşul* $o(f,a) = 0$ *olmasıdır.*

Kanıt. Önce f fonksiyonunun $a \in A$ noktasında sürekli olduğunu kabul edelim. Bu durumda keyfi her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $x \in A$ ve $d(x,a) < \delta$ için

$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabilir. Böylece $M(a, f, \delta) - m(a, f, \delta) < 2\varepsilon$ olur. Bu durum her $\varepsilon > 0$ sayısı için doğru olması sebebiyle, $\lim\limits_{\delta \to 0} F(\delta) = o(f, a) = 0$ olur.

Tersine, $o(f, a) = 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, $\delta_1 > 0$ vardır öyle ki, $0 < \delta < \delta_1$ koşulunu sağlayan her δ sayısı için $F(\delta) < \varepsilon$ olur. Ama $d(x, a) < \delta$ koşulunu sağlayan her $x \in A$ için $|f(x) - f(a)| \leq F(\delta) < \varepsilon$ olacağından, f fonksiyonu a da sürekli olur. □

Önerme 3.3 $A \subset \mathbb{R}^n$ *kapalı bir küme olsun.* $f : A \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu sınırlı ise, her* $\varepsilon > 0$ *sayısına karşılık,* $K = \{a \in A : o(f, a) \geq \varepsilon\}$ *kümesi kapalıdır.*

Kanıt. Bunun için $\mathbb{R}^n - K$ kümesinin açık olduğunu göstermek yeterlidir.
$x \in \mathbb{R}^n - K$ ise iki durum söz konusudur. Ya $x \notin A$ olur veya $x \in A$ ve $o(f, x) < \varepsilon$ olur. Birinci durumda A kapalı bir küme olduğundan x i içeren öyle bir C açık n-kübü vardır ki,

$$C \subset \mathbb{R}^n - A \subset \mathbb{R}^n - K$$

olur.

İkinci durumda ise $x \in [(\mathbb{R}^n - K) \cap A]$ alalım. O zaman

$$o(f, x) = \lim_{\delta \to 0} [M(x, f, \delta) - m(x, f, \delta)] = \lim_{\delta \to 0} F(x, \delta) < \varepsilon$$

olur. Buradan, bir $\delta_x > 0$ sayısı bulunabilir öyle ki, $F(x, \delta_x) < \varepsilon$ olur. Görülür ki,

Sav: $C = B_{\delta_x}(x)$ n-kübü için $C \subset (\mathbb{R}^n - K)$ olur. Gerçekten de, herhangi bir $y \in C$ için,

$$k_\delta = \min\{\delta_x - d(x, y), d(x, y)\}$$

yazalım. O zaman $B_{k_\delta}(y) \subset C$ olur. Dolayısıyla $F(y, k_{\delta_x}) \leq F(x, \delta_x) < \varepsilon$ elde edilir. Buradan,

$$o(f, y) = \lim_{k \to 0} F(y, k_{\delta_x}) \leq \lim_{\delta \to 0} F(x, \delta) = o(f, x) < \varepsilon, \quad (\delta \to 0 \Rightarrow k \to 0)$$

olacağından $y \notin K$ ve dolayısıyla $y \in [(\mathbb{R}^n - K) \cap A]$ elde edilir. Bu da istenen sonucu verir. $\square$

Önerme 3.4 *$f : D \to \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon olsun. $\varepsilon > 0$ sayısı ve her $x \in D$ için $o(f,x) < \varepsilon$ şartı sağlansın. Bu durumda D dikdörtgeninin*

$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon v(D)$$

koşulunu sağlayan bir P parçalanışı vardır.

Kanıt. $x = (x_1, ..., x_n) \in D$ için $o(f,x) < \varepsilon$ şartı sağlandığından bir $\delta_x > 0$ sayısı vardır öyle ki, $B_{\delta_x}(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x,y) < \delta_x\}$ ve $S = D \cap B_{\delta_x}(x)$ olmak üzere,

$$o(f,x) = \lim_{\delta_x \to 0} [M(x,f,\delta_x) - m(x,f,\delta_x)] = \lim_{\delta_x \to 0} [M_S(f)\} - m_S(f)] < \varepsilon$$

olur. Şimdi,

$$W_x = \left[x_1 - \frac{\delta_x}{4},\ x_1 + \frac{\delta_x}{4}\right] \times ... \times \left[x_n - \frac{\delta_x}{4},\ x_n + \frac{\delta_x}{4}\right] \subset B_{\delta_x}(x)$$

olacağı açıktır. Öte yandan, W_x in iç noktaları kümesi W_x^o ile gösterilmek üzere, $\{W_x^o : x \in D\}$ ailesi, D nin bir açık örtüsüdür. D tıkız olduğundan bu ailenin sonlu $\left\{W_{x_1}^o, ..., W_{x_r}^o\right\}$ alt ailesi D yi örter. Ayrıca $\{W_{x_1}, ..., W_{x_r}\}$ kapalı dörtgenlerden oluşan sonlu aile de D yi örter. Bu durumda

$$V_{x_i} := W_{x_i} \cap D \qquad i = 1, ..., r$$

olarak kapalı V_x dörtgenini tanımlayalım. Her $x \in D$ için, bir i_0 vardır öyle ki, $x \in V_{x_{i_0}}$ olur. Ayrıca V_{x_i} nin tanımından $M_{V_{x_i}}(f) - m_{V_{x_i}}(f) < \varepsilon$ şartı sağlanacağı görülür. P parçalanışı, D nin öyle bir parçalanışı olsun ki, P nin her alt dörtgeni bir V_{x_i} içinde kalsın. (Örneğin, V_{x_i} dikdörtgeninin keyfi bir parçalanışı $\left\{R_1^i, ...R_{t_i}^i\right\}$ olsun. Bu durumda,

$$P' = \left\{D \cap R_l^i : i = 1, ..., r\ ; l = 1, ..., t_i\right\}$$

aranan parçalanıştır.) O zaman, P nin her alt dörtgeni R için

$$M_R(f) - m_R(f) < \varepsilon$$

olacağından,

$$\begin{aligned} U(f,P) - L(f,P) &= \sum_{R\in P}[M_R(f) - m_R(f)]v(S) \\ &< \varepsilon \sum_{R\in P} v(R) = \varepsilon v(D) \end{aligned}$$

elde edilir. □

Teorem 3.5 *$f : D \to \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon olsun. f nin süreksiz olduğu noktaların kümesi H ise f nin D üzerinde integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul H nin sıfır ölçümlü bir küme olmasıdır.*

Kanıt. Varsayalım ki, H sıfır ölçümlü bir küme olsun. Verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık,

$$H \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i^o \qquad \text{ve} \qquad \sum_{i=1}^{\infty} v(U_i) < \varepsilon$$

koşulunu sağlayan kapalı U_i dikdörgenlerini alalım. Öte yandan her $x \in D - H$ için, f fonksiyonu x de sürekli olduğundan, $\delta_x > 0$ vardır öyle ki $\forall y \in B_{\delta_x}(x)$ için $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ olur. $V_x = \overline{B_{\delta_x}(x)}$ yazarsak görülür ki,

$$\{U_i^o : i = 1, 2, ...\} \cup \{V_x^o : x \in D - H\}$$

dörtgenler ailesi D nin bir açık örtüsüdür. D tıkız olduğundan bazı $r, t \in \mathbb{N}$ için

$$D \subset \left(\bigcup_{k=1}^{r} U_{i_k}^o\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{t} V_{x_j}^o\right)$$

olur. Gösterimi sadeleştirmek adına, $U_k = D \cap U_{i_k}^o$ ve $V_j = D \cap V_{x_j}^o$ yazarsak,

$$D = \left(\bigcup_{k=1}^{r} U_k^o\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{t} V_j^o\right)$$

elde edilir.

$I_1^k, ..., I_n^k$ lar U_k dörtgeninin ve $J_1^k, ..., J_n^k$ lar da V_k dörtgeninin bileşen aralıkları olsunlar ve dolayısıyla $U_k = I_1^k \times ... \times I_n^k$ olarak yazılabilsin.

D nin l. bileşen aralığı D_l ile gösterilmek üzere,

$$D_l = \left(\bigcup_{k=1}^{r} I_l^k \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{t} J_l^j \right)$$

olur. Bu I_l^k ve J_l^j aralıklarının uç noktaları, bize D_l aralığının bir parçalanışını verir. Her $l = 1, ..., n$ içi, böylece elde edilen D_l aralıklarının parçalanışları ise, bize, D nin bir P parçalanışını verir. P nin alt dörtgenlerini iki ayrı ayrık kümeler P_1 ve P_2 ye bölelim ve Böylece $P = P_1 \cup P_2$ olsun:

$$\begin{aligned} P_1 &= \{S \in P : \ S, \ \text{bir} \ k \in \{1, ..., r\} \ \text{için,} \ U_k \ \text{nın alt kümesi}\} \\ P_2 &= P - P_1 \end{aligned}$$

olur. Ayrıca

$$K = \sup \{|f(x)| : x \in D\}$$

yazalım, bu durumda

$$\begin{aligned} & U(f, P) - L(f, P) \\ = & \left(\sum_{C \in P_1} M_C(f) v(C) + \sum_{E \in P_2} M_E(f) v(E) \right) - \left(\sum_{C \in P_1} m_C(f) v(C) + \sum_{E \in P_2} m_E(f) v(E) \right) \\ = & \left(\sum_{C \in P_1} M_C(f) v(C) - \sum_{C \in P_1} m_C(f) v(C) \right) + \left(\sum_{E \in P_2} M_E(f) v(E) - \sum_{E \in P_2} m_E(f) v(E) \right) \\ = & \left(\sum_{C \in P_1} [M_C(f) - m_C(f)] \, v(C) \right) + \left(\sum_{E \in P_2} [M_E(f) - m_E(f)] \, v(E) \right) \\ < & \ 2K \sum_{C \in P_1} v(C) + 2\varepsilon \sum_{E \in P_2} v(E) < \varepsilon \left(2v(D) + 2K \right) \end{aligned}$$

olur. Buradan, f nin integrallenebilir olduğu elde edilir.

Tersine, varsayalım ki, f integrallenebilir olsun. Görülür ki,

$$H_\varepsilon = \{x \in D : o(f, x) \geq \varepsilon\}$$

için $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_{\frac{1}{n}}$ olur. Gerçekten de, f fonksiyonu x de süreksiz (yani, $x \in H$) ise,

$$o(f,x) = \lim_{\delta \to 0} F(x,\delta) = k > 0$$

olur. Buradan, $\frac{1}{t} \leq k$ koşulunu sağlayan $t \in \mathbb{N}$ için $x \in H_{\frac{1}{t}} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} H_{\frac{1}{n}}$ olur. Yani $H \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} H_{\frac{1}{n}}$ olur. Öte yandan, Teorem (3.2) den, $\bigcup_{n=1}^{\infty} H_{\frac{1}{n}} \subset H$ olduğundan,

$$H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_{\frac{1}{n}}$$

elde edilir. Böylece H nin sıfır ölçümlü olduğunu göstermek için, ölçümü sıfır olan kümelerin sayılabilir bir birleşiminin ölçümü de sıfır olacağından, her bir $H_{\frac{1}{m}}$ kümesinin sıfır ölçümlü oluğunu göstermek yeterlidir. Bunun için : $\varepsilon > 0$ sayısı verilmiş olsun. D kapalı dikdörtgeninin

$$U(f,P) - L(f,P) < \frac{\varepsilon}{m}$$

koşulunu sağlayan bir $P = \{S_1, ..., S_t\}$ parçalanışını seçelim. (D üzerinde f integrallenebilir olduğundan, bu seçim yapılabilir.) $H_{\frac{1}{m}}$ kümesinin noktalarını aşağıdaki şekilde iki gruba ayıralım:

$$G_1 = \left(\bigcup_{j=1}^{t} \partial S_j \right) \cap H_{\frac{1}{m}}, \qquad G_2 = \left(\bigcup_{j=1}^{t} S_j^o \right) \cap H_{\frac{1}{m}}$$

Açık olarak, $H_{\frac{1}{m}} = G_1 \cup G_2$ olur. Öte yandan bu iki küme G_1 ve G_2 sıfır ölçümlüdür. Gerçekten de, $G_1 \subset \bigcup_{j=1}^{t} \partial S_j$ ve her bir ∂S_j ($j = 1, ..., t$) sıfır içerikli olduğundan (Önerme(2.14)), $\bigcup_{j=1}^{t} \partial S_j$ sıfır içerikli olur. Buradan, G_1 sıfır içerikli ve dolayısıyla sıfır ölçümlü bir küme olur.

Öte yandan, $\mathcal{A} = \left\{ S \in P : H_{\frac{1}{m}} \cap S^o \neq \varnothing \right\}$ olsun. O zaman her $S \in \mathcal{A}$ için bir $x \in H_{\frac{1}{m}} \cap S^o$ noktasını ele alalım. $x \in S^o$ olduğundan, bir $\delta_1 > 0$ için $B_{\delta_1}(x) \subset S^o$ olur. Öte yandan $x \in H_{\frac{1}{m}}$ olduğundan, bir $0 < \delta < \delta_1$ için,

$$\frac{1}{m} \leq \lim_{\delta \to o} F(x,\delta) \leq F(x,\delta_1) = M(x,f,\delta_1) - m_S(x,f,\delta_1)$$

bulunur. Ama $B_{\delta_1}(x) \subset S$ olduğundan, $S \in \mathcal{A}$ için

$$\frac{1}{m} \leq F(x, \delta_1) \leq M_S(f) - m_S(f)$$

elde edilir. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m}\sum_{S\in\mathcal{A}} v(S) &\leq \sum_{S\in\mathcal{A}}[M_S(f) - m_S(f)]v(S) \\
&\leq \sum_{S\in P}[M_S(f) - m_S(f)]v(S) \\
&< \frac{\varepsilon}{m} \\
\sum_{S\in\mathcal{A}} v(S) &< \varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, $G_2 \subset \bigcup_{S\in\mathcal{A}} S$ olduğundan, G_2 nin sıfır içerikli ve dolayısıyla sıfır ölçümlü olduğu görülür.

Böylece G_1 ve G_2 sıfır ölçümlü kümelerdir ve dolayısıyla $H_{\frac{1}{m}} = G_1 \cup G_2$ sıfır ölçümlü bir kümedir. $\square$

Önerme 3.6 *(İntegralin Bazı Özellikleri (1)) $D \subset \mathbb{R}^n$ kapalı dörtgen ve $f, f_1,\ f_2 : D \to \mathbb{R}$ sınırlı fonksiyonlar ve $k \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda:*

1) (Doğrusallık) Eğer f_1 ve f_2 fonksiyonları D üzerinde integrallenebilir ise $(f_1 + f_2) : D \to \mathbb{R}$ ve $(kf) : D \to \mathbb{R}$

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x), \qquad x \in D$$

$$(kf)(x) = kf(x), \qquad x \in D$$

fonksiyonları D üzerinde integrallenebilirdir ve

$$\begin{aligned}
\int_D (f_1 + f_2) &= \int_D f_1 + \int_D f_2 \\
\int_D (kf) &= k\int_D f
\end{aligned}$$

2) Eğer f_1 ve f_2 fonksiyonları D üzerinde integrallenebilir ise $h = (f_1.f_2) : D \to \mathbb{R}$

$$h(x) = (f_1.f_2)(x) = f_1(x).f_2(x) \qquad x \in D$$

fonksiyonu D üzerinde integrallenebilirdir. Özel olarak $f : D \to \mathbb{R}$ fonksiyonu D üzerinde integrallenebilir ise, $(f^2) : D \to \mathbb{R}$

$$f^2(x) = f(x).f(x) \qquad x \in D$$

fonksiyonu D üzerinde integrallenebilirdir.

3) (Karşılaştırma) Eğer f_1 ve f_2 fonksiyonları D üzerinde integrallenebilir ve her $x \in D$ için $f_1(x) \leq f_2(x)$ ise

$$\int_D f_1 \leq \int_D f_2$$

olur.

Kanıt.

1)

i) f_1 ve f_2 fonksiyonları D kapalı dikdörtgeni üzerinde integre edilebilir olduklarından, sırasıyla, birer sıfır ölçümlü $H \subset D$ ve $M \subset D$ kümeleri dışında, süreklidirler. Böylece $L = H \cup M \subset D$ sıfır ölçümlü alt kümesi yada L nin bir alt kümesi dışında $(f_1 + f_2)$ fonksiyonu D üzerinde süreklidir. Buradan $(f_1 + f_2)$ fonksiyonu Teorem(3.5) gereğince D üzerinde integre edilebilirdir.

D nin herhangi bir P parçalanışını alalım. $S \in P$ olsun. O zaman her $x \in S$ için

$$m_S(f_1) + m_S(f_2) \leq f_1(x) + f_2(x) = (f_1 + f_2)(x)$$

ifadesi geçerlidir. Böylece

$$m_S(f_1) + m_S(f_2) \leq m_S(f_1 + f_2)$$

elde edilir. Buradan

$$L(f_1, P) + L(f_2, P) \leq L(f_1 + f_2, P) \leq \int_D (f_1 + f_2)$$

elde edilir. Benzer bir tartışma ile,

$$U(f_1, P) + U(f_2, P) \geq U(f_1 + f_2, P) \geq \int_D (f_1 + f_2)$$

olduğu görülür.

$\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. Bu durumda

$$\left(\int_D f_1\right) - \frac{\varepsilon}{4} \leq L(f_1, P^1) \quad \text{ve} \quad \left(\int_D f_2\right) - \frac{\varepsilon}{4} \leq L(f_2, P^2)$$

olacak şekilde D dörtgeninin P^1 ve P^2 parçalanışları vardır. Benzer şekilde

$$\left(\int_D f_1\right) + \frac{\varepsilon}{4} \geq U(f_1, P^3) \quad \text{ve} \quad \left(\int_D f_2\right) + \frac{\varepsilon}{4} \geq U(f_2, P^4)$$

olacak şekilde D dörtgeninin P^3 ve P^4 parçalanışları vardır. D nin

$$P = P^1 \cup P^2 \cup P^3 \cup P^4$$

parçalanışı, $i = 1, 2, 3, 4$ için, P^i den daha ince bir parçalanıştır. Böylece

$$\begin{aligned}
\left(\int_D f_1\right) - \frac{\varepsilon}{4} + \left(\int_D f_2\right) - \frac{\varepsilon}{4} &\leq L(f_1, P^1) + L(f_1, P^2) && (3.1)\\
&\leq L(f_1, P) + L(f_1, P)\\
&\leq L(f_1 + f_2, P)\\
&\leq \int_D (f_1 + f_2) && (3.2)\\
&\leq U(f_1 + f_2, P)\\
&\leq U(f_1, P^3) + U(f_2, P^4)\\
&\leq \left(\int_D f_1\right) + \frac{\varepsilon}{4} + \left(\int_D f_2\right) + \frac{\varepsilon}{4} && (3.3)
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Öte yandan (3.1),(3.2) ve (3.3) den

$$\left(\int_D f_1 + \int_D f_2\right) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \int_D (f_1 + f_2) \leq \left(\int_D f_1 + \int_D f_2\right) + \frac{\varepsilon}{2}$$

eşitsizliği elde edilir ki, bu eşitsizlik her $\varepsilon > 0$ sayısı için geçerli olduğundan

$$\int_D (f_1 + f_2) = \int_D f_1 + \int_D f_2$$

elde edilir.

ii) Eğer $k = 0$ ise savımız aşikardır. $k > 0$ olsun. f fonksiyonu D üzerinde integre edilebilir olduğundan sıfır ölçümlü $H \subset D$ alt kümesi dışında süreklidir. (kf) fonksiyonuda sıfır ölçümlü $H \subset D$ alt kümesi dışında sürekli olacağından (kf) fonksiyonu Teorem(3.5) gereğince D üzerinde integre edilebilirdir.

D nin herhangi bir P parçalanışını alalım. $S \in P$ olsun. O zaman her $x \in S$ için

$$km_S(f) \leq kf(x) = (kf)(x)$$

eşitliği geçerlidir. Böylece

$$km_S(f) \leq m_S(kf)$$

elde edilir. Buradan

$$kL(f, P) \leq L(kf, P) \leq \int_D (kf)$$

elde edilir. Benzer bir tartışma ile

$$kU(f, P) \geq U(kf, P) \geq \int_D (kf)$$

olduğu görülür.

$\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. Bu durumda

$$\left(\int_D f \right) - \frac{\varepsilon}{4k} \leq L(f, P^1) \quad \text{ve} \quad \left(\int_D f \right) + \frac{\varepsilon}{4k} \geq U(f, P^2)$$

olacak şekilde D dörtgeninin P^1 ve P^2 parçalanışları vardır. D nin

$$P = P^1 \cup P^2$$

parçalanışı $i = 1, 2$ için P^i den daha ince bir parçalanıştır. Böylece

$$\begin{aligned} k\left(\int_D f - \frac{\varepsilon}{4k}\right) &\leq kL(f, P^1) & (3.4)\\ &\leq kL(f, P)\\ &\leq L(kf, P)\\ &\leq \int_D (kf) & (3.5)\\ &\leq U(kf, P)\\ &\leq kU(f, P^2)\\ &\leq k\left(\int_D f + \frac{\varepsilon}{4k}\right) & (3.6)\end{aligned}$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Öte yandan (3.4),(3.5) ve (3.6) dan

$$\left(k\int_D f\right) - \frac{\varepsilon}{4} \leq \int_D (kf) \leq \left(k\int_D f\right) + \frac{\varepsilon}{4}$$

eşitsizliği elde edilir ki, bu eşitsizlik her $\varepsilon > 0$ sayısı için geçerli olduğundan

$$k\int_D f = \int_D (kf)$$

elde edilir.

Şimdi $k = -1$ için savımızın doğruluğunu gösterip (1) için kanıtı bitirelim: D nin herhangi bir P parçalanışını alalım. $S \in P$ olsun. O zaman, her $x \in S$ için

$$m_S(f) \leq f(x) \leq M_S(f) \quad \text{olduğundan} \quad -M_S(f) \leq -(f(x)) = (-f)(x) \leq -m_S(f)$$

olur. Buradan, $-M_S(f) \leq -m_S(f)$ ve $M_S(-f) \leq -m_S(f)$ olur. Aslında,

$$m_S(-f) = -M_S(f) \quad \text{ve} \quad M_S(-f) = -m_S(f)$$

eşitlikleri geçerlidir. (Eğer $m_S(-f) = -M_S(f)$ olmasaydı her $x \in S$ için $(-f)(x) \geq m_S(-f) > -M_S(f)$ olurdu. O zaman her $x \in S$ için

$$f(x) \leq -m_S(-f) < M_S(f)$$

sonuçu elde edilir ki, bu ise $M_S(f)$ sayısının en küçük üst sınır olmasıyla çelişir. Benzer şekilde $M_S(-f) = -m_S(f)$ eşitliğinin doğruluğu görülür.) Buradan

$$L(-f,P) = -U(f,P) \quad \text{ve} \quad U(-f,P) = -L(f,P)$$

elde edilir. O zaman,

$$\begin{aligned}
\inf_P \{U(f,P)\} &\leq U(f,P), \quad \forall P \\
&\Rightarrow -\inf_P \{U(f,P)\} \geq -U(f,P) = L(-f,P), \quad \forall P \\
&\Rightarrow -\int_D f = -\inf_P \{U(f,P)\} \geq -U(f,P) = L(-f,P), \quad \forall P \\
&\Rightarrow -\int_D f \geq \sup_P \{L(-f,P)\} = \int_D (-f) \\
&\Rightarrow -\int_D f \geq \int_D (-f)
\end{aligned}$$

olur. Öte yandan,

$$\begin{aligned}
-\int_D f &= -\sup_P \{L(f,P)\} \leq -L(f,P) = U(-f,P) \\
&\Rightarrow -\int_D f \ \text{ sayısı } \ \{U(-f,P)\} \ \text{ kümesinin bir alt sınırı} \\
&\Rightarrow -\int_D f \leq \inf_P \{U(-f,P)\} = \int_D (-f) \\
&\Rightarrow -\int_D f \leq \int_D (-f)
\end{aligned}$$

olur.

2) $k = 1,2$ olmak üzere $\alpha_k = \{x \in D : f_k$ fonksiyonu x de süreklidir$\}$ ve $\beta = \{x \in D : h = f_1.f_2$ fonksiyonu x de süreklidir$\}$ kümeleri için şu gözlemi yapabiliriz:

f_1 ve f_2 fonksiyonlarının birlikte sürekli oldukları noktalar kümesi $\alpha_1 \cap \alpha_2$ ve sürekli fonksiyonların çarpımıda sürekli olacağından, $\alpha_1 \cap \alpha_2 \subset \beta$ olur. Buradan

$$D - \beta \subset D - (\alpha_1 \cap \alpha_2) = (D - \alpha_1) \cup (D - \alpha_2)$$

elde edilir.

Öte yandan; f_1 ve f_2 fonksiyonları D üzerinde integrallenebilir olduğundan $D-\alpha_1$ ve $D-\alpha_2$ kümeleri sıfır ölçümlüdür ve dolayısıyla $D-\beta$ kümesi sıfır ölçümlüdür. Ama, $D-\beta$ kümesi h nin süreksiz olduğu tüm noktalar kümesi olduğundan, Teorem(3.5) gereğince, çarpım fonksiyonu $h = f_1.f_2$, D üzerinde integrallenebilirdir.

Yukarıdaki tartışmada özel olarak $f_1 = f_2 = f$ olarak alınırsa f^2 nin D üzerinde integrallenebilirliği kolayca görülür.

3) f_1 ve f_2 fonksiyonları D üzerinde integrallenebilir ve her $x \in D$ için $f_1(x) \leq f_2(x)$ olsun. D nin herhangi bir parçalanışı P ve $S \in P$ olsun. Her $x \in D$ için $f_1(x) \leq f_2(x)$ olduğundan $m_S(f_1) \leq f_1(x) \leq f_2(x)$ ve buradan $m_S(f_1) \leq m_S(f_2)$ elde edilir. Buradan, her P için

$$L(f_1, P) \leq L(f_2, P) \leq \sup_P \{L(f_2, P)\} = \int_D f_2$$

olur. Yani $\int_D f_2$ sayısı, $\{L(f_1, P) : P \text{ bir parçalanış}\}$ kümesinin bir üst sınırıdır. O zaman

$$\int_D f_2 \geq \sup_P \{L(f_1, P)\} = \int_D f_1$$

olur. □

Teorem 3.7 *$D \subset \mathbb{R}^n$ kapalı bir dikdörtgen $f : D \to \mathbb{R}$ fonksiyonu D üzerinde integrallenebilir olsun. Bu durumda*

1) Eğer f fonksiyonu sıfır ölçümlü bir küme dışında sıfırlanıyor (yani, bir $E \subset D$ sıfır ölçümlü kümesi var olsun öyle ki, her $x \in D - E$ için $f(x) = 0$) ise $\int_D f = 0$ dır.

2) Eğer her $x \in D$ için $f(x) \geq 0$ ve $\int_D f = 0$ ise $C = \{x \in D : f(x) > 0\}$ kümesi sıfır ölçümlüdür.

Kanıt.

1) f fonksiyonu sıfır ölçümlü $E \subset D$ dışında sıfırlansın. D kapalı dikdörtgeninin herhangi bir parçalanışı P olsun. P nin herhangi bir R alt dörtgeni, E kümesi tarafından kapsanamaz. (Aksi halde E sıfır ölçümlü olmazdı.) Bu durumda bir $a \in R$ için $f(a) = 0$ olur. Böylece $m_R(f) \leq 0$ ve $M_R(f) \geq 0$ dır. Buradan $L(f, P) \leq 0$ ve $U(f, P) \geq 0$ olduğu görülür. P herhangi bir parçalanış olduğundan, $\sup\{L(f, P)\} \leq 0$ ve $\inf\{U(f, P)\} \geq 0$ elde edilir. Öte yandan f fonksiyonu D üzerinde integre edilebilir olduğundan, $\sup\{L(f, P)\} = \inf\{U(f, P)\} = \int_D f = 0$ elde edilir.

2) $A = \{x \in D : f \text{ fonksiyonu } x \text{ de süreklidir}\}$ kümesi için $A \subset D - C$ olduğunu göstereceğiz. Bir başka deyişle, "$a \in A$, yani, f fonksiyonu a da sürekli ise, $f(a) = 0$ olur, yani, $a \in D - C$ olur." ifadesini kanıtlayacağız. Böylece bu bize " $C \subset D - A$ " yı vereceğinden ve Teorem(3.5) den ötürü, f nin süreksiz olduğu noktalar kümesi $D - A$, sıfır ölçümlü olacağından, C sıfır ölçümlü olacaktır.

$a \in A$ ve $\varepsilon = f(a) > 0$ olduğunu varsayalım. f fonksiyonu a da sürekli olduğundan bir $\delta > 0$ sayısı vardır öyle ki, her $x \in D \cap B_\delta(a)$ için

$$f(x) \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f(a)) \text{ ve dolayısıyla } f(x) > \frac{\varepsilon}{2}$$

sağlanır. Şimdi D nin bir P parçalanışını şu şekilde seçelim:

Eğer $S = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n] \in P$ ise

$$\max_i \{|a_i - b_i|\} < \frac{\delta}{n}$$

şartı sağlansın. Bu durumda, $R \subset B_\delta(a)$ olack şekilde bir $R \in P$ alt dörtgeni vardır. Buradan $m_R(f) \geq \frac{\varepsilon}{2}$ olur. Öte yandan, R den başka, diğer her S alt dörtgeni için $m_S(f) \geq 0$ olur. Bu gözlemler altında P parçalanışı için alt toplam yazılırsa

$$L(f, P) = \sum_{S \in P} m_S(f) v(S) \geq (\frac{\varepsilon}{2}) v(R) > 0$$

elde edilir. Ama

$$L(f,P) \leq \int_D f = 0$$

olacağından bu bir çelişkidir. Öyleyse $f(a) = 0$ olur, buradan $a \in D - C$ ve dolayısıyla $A \subset D - C$ elde edilir. Bu ise kanıtı tamamlar. $\square$

Örnek 3.8

Teorem (3.7) da yer alan (1) ifadesinin doğruluğu için $\int_D f$ integralinin var olduğu varsayımı zorunludur. Aksi halde $I = [0,1]$ ve $f : I \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1\ , & x \in \mathbb{Q} \cap I \\ 0\ , & x \notin \mathbb{Q} \cap I \end{cases}$$

olarak tanımlansın. f fonksiyonu, $\mathbb{Q} \cap I$ sıfır ölçümlü kümesi dışında sıfırlanır. Öte yandan $\int_I f$ tanımlı değildir, çünkü f fonksiyonu I üzerinde integrallenebilir değildir.

Teorem(3.7) in bir sonucu olarak:

Sonuç 3.9 *$D \subset \mathbb{R}^n$ kapalı bir dikdörtgen $f : D \to \mathbb{R}$ fonksiyonu D üzerinde integrallenebilir ve $A \subset D$ sıfır ölçümlü bir alt küme olsun. $g : D \to \mathbb{R}$, her $x \in D - A$ için $g(x) = f(x)$ olacak şekilde bir fonksiyon olsun. Eğer g fonksiyonu D üzerinde integrallenebilir ise*

$$\int_D g = \int_D f$$

olur.

Kanıt. f ve g fonksiyonları D üzerinde integre edilebilir olduğundan Önerme(3.6)/(1) den $(g - f) : D \to \mathbb{R}$,

$$(g-f)(x) = g(x) - f(x) \qquad x \in D$$

fonksiyonu D üzerinde integre edilebilirdir. Öte yandan $x \in D - A$ için $(g-f)(x) = 0$ olduğundan $(g - f)$ fonksiyonu $A \subset D$ sıfır ölçümlü kümesi dışında sıfırlanır. O zaman Teorem(3.7)/(1) gereğince

$$\int_D (g - f) = 0$$

olur. Böylece integralin doğrusallık özelliğinden

$$\int_D g = \int_D f$$

elde edilir. $\square$

Bu sonuç integre edilebilirlik korunduğu sürece, $\int_D f$ sayısının, f fonksiyonunun sıfır ölçümlü bir küme üzerindeki değerinden bağımsız olduğunu ortaya koyar.

$\mathbb{R}^n$ de kapalı dikdörtgen olmayan kümeler üzerinde tanımlı fonksiyonların integrali, dörtgenler üzerindeki integrale indirgenir.

Önerme 3.10 *$D, D' \subset \mathbb{R}^n$ kapalı dikdörtgenler ve $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu $D \cap D'$ dışında sıfırlanıyor ise, f fonksiyonunun D üzerinde integrallenebilmesi için gerek ve yeter koşul f fonksiyonunun D' üzerinde integrallenebilmesidir ve bu durumda:*

$$\int_D f = \int_{D'} f$$

Kanıt. İlk olarak $D \subset D'$ durumunu göz önüne alalım:

f fonksiyonu D üzerinde integrallenebilir olsun. f fonksiyonu, D üzerinde integrallenebilir olduğundan,

$$E = \{x \in D : f \text{ fonksiyonu } x \text{ de süreksizdir}\}$$

kümesi sıfır ölçümlüdür.

Gözlem: Her $x \in (D' - D)$ için $f(x) = 0$ olduğundan (f fonksiyonu $D' \cap D = D$ dışında sıfırlanıyor olması gerçeğinden.) f fonksiyonu $(D' - D)$ üzerinde süreklidir.

Böylece f fonksiyonunun, D' üzerinde süreksiz olduğu noktalar kümesi E', D nin bir alt kümesidir. Bu da bize $E' = E$ yi verir. Böylece, E' sıfır ölçümlü olacağından, Teorem(3.5) gereğince, f fonksiyonu, D' üzerinde integre edilebilir olur.

Tersine, f fonksiyonu D' üzerinde integre edilebilir olsun. Bu durumda, $E' = \{x \in D' : f \text{ fonksiyonu } x \text{ de süreksizdir}\}$ kümesi sıfır öiçümlüdür.

Gözlem 1: f fonksiyonu $(D \cap E') \subset D$ alt kümesi dışında, D kümesi üzerinde süreklidir.

Gözlem 2: $(D \cap E') \subset E'$, sıfır ölçümlü bir alt kümedir. (sıfır ölçümlü bir kümenin her alt kümesinin de sıfır ölçümlü olmasından) Böylece Gözlem (1) ve (2) den f fonksiyonunun, D üzerinde integre edilebilir olduğu elde edilir. Buradan integrallerin eşitliğine geçelim:

$D' = [a'_1, b'_1] \times ... \times [a'_n, b'_n]$ nin herhangi bir parçalanışı $P = (P_1, ..., P_n)$ olsun. $D = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]$ olsun ve , D' nün P ye göre incelmiş bir parçalanışı $P' = (P'_1, ..., P'_n)$ yi şu şekilde seçelim:

$P'_i =< a'_i = t_{i_0}, ..., t_{i_k} = b'_i >$ ise $a_i, b_i \in \{t_{i_0}, ..., t_{i_k}\}$ olsun. Bu durumda D kapalı dikdörtgeni P' parçalanışının belirlediği bir takım alt dörtgenlerin birleşimine eşittir. Eğer P' parçalanışının belirlediği S alt dörtgeni D tarafından kapsanmıyor ise f fonksiyonu S nin bazı noktalarında sıfırlanır. Böylece $m_S(f) \leq 0$ dır. Buradan f fonksiyonunun P parçalanışına göre alt toplamı için aşağıdaki eşitsizlikler geçerli olur:

$$\begin{aligned} L_{D'}(f, P) &\leq L_{D'}(f, P') && (\text{ Parçalanışın incelmesinden }) \\ &\leq \sum_{S \subset D} m_S(f) v(S) && \left(\begin{array}{c} S \not\subseteq D \text{ özelliğindeki alt dörtgenlerin} \\ \text{toplamdan çıkarılmasından} \end{array} \right) \\ &\leq \int_D f && (\text{ integral tanımından }) \end{aligned}$$

Yani;

$$L_{D'}(f, P) \leq \int_D f$$

elde edilir. Benzer tartışma ile $U_{D'}(f, P) \geq \int_D f$ olduğu elde edilir. P parçalanışı

D' nün herhangi bir parçalanışı olduğundan

$$\int_D f = \int_{D'} f$$

elde edilir.

Genel durum için D ve D' kapalı dikdörtgenlerinin her ikisinide içine alan bir D'' kapalı dikdörtgenini ve

$$\int_D f = \int_{D''} f = \int_{D'} f$$

eşitliğini göz önüne almak yeterlidir. $\square$

Tanım 3.11 *$A \subset \mathbb{R}^n$ bir sınırlı alt küme olsun. $f : A \to \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon olsun. A yı kapsayan herhangi bir D kapalı dörtgeni için f nin D ye bir genişlemesi $f^* : D \to \mathbb{R}$*

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x \in A \\ 0 & , \quad x \in D - A \end{cases}$$

olarak verilsin. Eğer f^* fonksiyonu D üzerinden integrallenebilir ise f fonksiyonu A üzerinde integrallenebilirdir denir ve bu integralin değeri

$$\int_A f := \int_D f^*$$

olarak verilir.

Görülür ki, Önerme(3.10) in bir sonucu olarak $\int_A f$ iyi tanımlıdır, yani, bu integralin değeri, A yı kapsayan D dörtgenin seçilişinden bağımsızdır.

Ayrıca eğer f foksiyonu D kapalı dörtgeni üzerinde tanımlı ise Tanım(3.11) in özel bir hali olarak Tanım(3.13) verilebilir. İlkin, bir kümenin karakteristik fonksiyonunu tanımlıyoruz:

Tanım 3.12 *$A \subset \mathbb{R}^n$ ise, A nın karakteristik fonksiyonu $\chi_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0 \ , & x \notin A \\ 1 \ , & x \in A \end{cases}$$

olarak verilir.

Tanım 3.13 *D kapalı bir dörtgen, $A \subset D$ bir alt küme olsun. $F : D \to \mathbb{R}$ sınırlı ve $F.\chi_A : D \to \mathbb{R}$ fonksiyonu D üzerinde integrallenebilir ise, bu durumda, F fonksiyonu A üzerinde integrallenebilirdir denir ve bu integral değeri*

$$\int_A F := \int_D F.\chi_A$$

olarak verilir.

Uyarı 3.14 *D kapalı bir dörtgen ve $f : D \to \mathbb{R}$ sınırlı fonksiyonu D üzerinde integre edilebilir olsun. Her $A \subset D$ için f fonksiyonu A üzerinde integre edilebilir olması gerekmemektedir. Gerçekten de:*

$D = [0,1] \times [0,1]$ olmak üzere $f : D \to \mathbb{R}$ her $x \in D$ için $f(x) = 1$ sabit fonksiyon olsun. $A = \{z = (x,y) \in D : x, y \in \mathbb{Q}\}$ olmak üzere $(f.\chi_A) : D \to \mathbb{R}$

$$(f.\chi_A)(x,y) = \begin{cases} 1 \;, & (x,y) \in A \\ 0 \;, & (x,y) \in D - A \end{cases}$$

olur. Öte yandan $(f.\chi_A)$ fonksiyonu D üzerinde integre edilebilir değildir. Çünkü $(f.\chi_A)$ fonksiyonun süreksiz olduğu noktalar kümesi D nin tamamdır ve D kümesi sıfır ölçümülü değildir. Dolayısıyla f, tanım gereği A üzerinde integrallenebilir değildir. Böylece D üzerinde integre edilebilirliğin D nin her alt kümesi için integre edilebilirliği gerektirmeyeceği görülür.

Teorem 3.15 *$A \subset D$ herhangi bir alt küme olmak üzere, $\chi_A : D \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun integrallenebilirliği için gerek ve yeter koşul, $A \subset D$ kümesinin kabuğu ∂A nın sıfır ölçümlü olmasıdır.*

Kanıt. A kümesinin iç noktaları kümesi A° ile gösterilmek üzere $x \in A^\circ$ için $x \in U \subset A$ koşulunu sağlayan açık bir U dikdörtgeni vardır. U üzerinde 1 olan χ_A, x noktasında süreklidir. Benzer şekilde eğer $x \in \mathbb{R}^n - \overline{A}$ ise $x \in U \subset \mathbb{R}^n - \overline{A}$ koşulunu sağlayan U açık dikdörtgeni vardır. χ_A fonksiyonu $U \cap D$ üzerinde sıfır olacağından x noktasında süreklidir. $x \in \partial A$ ise x noktasını içeren her U açık dikdörtgeni için

$$y_1 \in U \cap A, \qquad y_2 \in U \cap (\mathbb{R}^n - A)$$

noktaları vardır. $\chi_A(y_1) = 1$ ve $\chi_A(y_2) = 0$ olacağından χ_A fonksiyonu x noktasında sürekli değildir. Böylece χ_A fonksiyonunun süreksiz olduğu noktalar kümesi ∂A olacağından Teorem(3.5) gereği, istenen sonuça ulaşılır. $\square$

Tanım 3.16 *$A \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı kümesi için, A nın kabuk noktaları kümesi ∂A sıfır ölçümlü ise A kümesine **Jordan-Ölçülebilir** denir.*

İleride bir kümenin Jordan -Ölçülebilir olduğunu belirtmek için (J.Ö) kısaltmasını kullanacağız.

Uyarı 3.17 *$\mathbb{R}^n$ nin her alt dörtgeni (J.Ö) olmasına karşın herhangi bir sınırlı küme (J.Ö) olmak zorunda değildir. (Bakınız, Örnek(2.16))*

Tanım 3.18 *Herhangi bir alt küme $C \subset \mathbb{R}^n$ için $\int_C 1$ integraline (eğer tanımlı ise) C kümesinin **(n-boyutlu) hacmi** denir. Bu durumda, yine, $v(C) = \int_C 1$ yazarız.*

Bir boyutlu hacim **uzunluk**, iki boyutlu hacim ise **alan** olarak bilinir. Eğer özel olarak, $C = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ bir dikdörtgen ise, aşikardır ki,

$$v(C) = \int_C 1 = (b_1 - a_1) \ldots.. (b_n - a_n)$$

olur.

Önerme 3.19 *$A \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bir küme ve $f, g : A \to \mathbb{R}$ sınırlı iki fonksiyon olsun. Bu durumda $F, G : A \to \mathbb{R}$*

$$F(x) = \max\{f(x), g(x) : x \in A\}$$

$$G(x) = \min\{f(x), g(x) : x \in A\}$$

olarak tanımlanan F ve G fonksiyonları için:

a) Eğer A üzerinde f ve g sürekli fonksiyonlar ise F ve G fonksiyonları da A üzerinde sürekli fonksiyonlardır.

b) Eğer A üzerinde f ve g integrallenebilir fonksiyonlar ise F ve G fonksiyonları da A üzerinde integrallenebilir fonksiyonlardır.

Kanıt.

a) f ve g fonksiyonları A üzerinde sürekli olsunlar. Bu durumda keyfi $x_0 \in A$ noktası için $x \in A$ olmak üzere, verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına bağlı,

$$d(x, x_0) < \delta(\varepsilon) \text{ iken } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \text{ ve } |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$$

koşullarını sağlayacak şekilde bir $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır. Burada

$$\delta(\varepsilon) = \min \left\{ \delta_f(\varepsilon), \delta_g(\varepsilon) : \begin{array}{l} d(x, x_0) < \delta_f(\varepsilon) \text{ iken } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \\ d(x, x_0) < \delta_g(\varepsilon) \text{ iken } |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon \end{array} \right\}$$

olarak seçilebilir.

1.Durum: $f(x_0) = g(x_0) = r$ olsun. Bu durum da $F(x_0) = G(x_0) = r$ olacaktır. Verilen $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $x \in A$ olmak üzere $d(x, x_0) < \delta(\varepsilon)$ iken

$$|F(x) - r| = |f(x) - r| \;\; veya \;\; |F(x) - r| = |g(x) - r|$$

ve dolayısıyla, $|F(x) - r| < \varepsilon$ olacağından F fonksiyonu $x_0 \in A$ noktasında sürekli olur. Benzer şekilde G nin sürekliliği elde edilir.

2.Durum: $f(x_0) > g(x_0)$ olsun. Bu durumda f ve g sürekli fonksiyonlar olduğundan x_0 ın öyle bir $U \subset A$ komşuluğu bulunabilir ki, her $x \in U$ için $f(x) > g(x)$ olur. (Örnek olarak, $k = \dfrac{|f(x_0) - g(x_0)|}{2}$ olmak üzere

$$U = f^{-1}(B_k(f(x_0))) \cap g^{-1}(B_k(g(x_0)))$$

olarak seçilebilir.) Buradan, U üzerinde $F(x) = f(x)$ ve $G(x) = g(x)$ olacağı görülür. Buradan istenen sonuç elde edilir.

3.Durum: $f(x_0) < g(x_0)$ olsun. Bu durumda yukarıda yapılan tartışmada f ve g fonksiyonlarının yerlerini değiştirmek yeterli olacaktır.

b) f ve g fonksiyonları A üzerinde integrallenebilir olsunlar. A yı kapsayan bir D kapalı dikdörtgeni için $f^*, g^* : D \to \mathbb{R}$ fonksiyonları ,varsayım gereğince, integrallenebilirdir. Böylece f^* fonksiyonu D dikdörtgeninin sıfır ölçümlü bir K alt kümesi dışında süreklidir. Benzer şekilde g^* fonksiyonu D dikdörtgeninin sıfır ölçümlü bir L alt kümesi dışında süreklidir. Öte yandan

$$(F^*)(x) = \max\{f^*(x), g^*(x) : x \in D\}$$

$$(G^*)(x) = \min\{f^*(x), g^*(x) : x \in D\}$$

eşitlikleri göz önüne alındığında F^* ve G^* fonksiyonlarının D nin sıfır ölçümlü $K \cup L$ alt kümesi dışında sürekli oldukları elde edilir. Böylece, Teorem(3.5) gereğince, F^* ve G^* fonksiyonları D üzerinde integrallenebilirdir ve dolayısıyla F ve G fonksiyonları A üzerinde integrallenbilirdir. $\square$

Önerme 3.20 *(İntegralin Bazı Özellikleri (2))* $A \subset \mathbb{R}^n$ *sınırlı bir küme ve* $f, f_1, f_2 : A \to \mathbb{R}$ *sınırlı fonksiyonlar olsunlar. Bu durumda* $k \in \mathbb{R}$ *olmak üzere:*

1) (Doğrusallık) Eğer f, f_1 *ve* f_2 *fonksiyonları* A *üzerinde integrallenebilir ise, her* $x \in A$ *için* $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$, $(kf)(x) = kf(x)$ *olarak tanımlı* $(f_1 + f_2) : A \to \mathbb{R}$ *ve* $(kf) : A \to \mathbb{R}$ *fonksiyonları* A *üzerinde integrallenebilirdir ve*

$$\int_A (f_1 + f_2) = \int_A f_1 + \int_A f_2, \qquad \int_A (kf) = k\int_A f$$

2) Eğer f_1 *ve* f_2 *fonksiyonları* A *üzerinde integrallenebilir ise, her* $x \in A$ *için* $h(x) = (f_1.f_2)(x) = f_1(x).f_2(x)$ *olarak tanımlı* $h = (f_1.f_2) : A \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu* A *üzerinde integrallenebilirdir. Özel olarak* $f : A \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu* A *üzerinde integrallenebilir ise,* $f^2 : A \to \mathbb{R}$ *her* $x \in A$ *için*

$$f^2(x) = f(x).f(x)$$

fonksiyonu A üzerinde integrallenebilirdir.

3) (Karşılaştırma) Eğer f_1 ve f_2 fonksiyonları A üzerinde integrallenebilir ve her $x \in A$ için $f_1 \leq f_2$ ise

$$\int_A f_1 \leq \int_A f_2$$

olur. Ayrıca, eğer f fonksiyonu A üzerinde integrallenebilir ise $|f|$ fonksiyonu da A üzerinde integrallenebilirdir ve

$$\left| \int_A f \right| \leq \int_A |f|$$

4) Her $x \in A$ için $f(x) \geq 0$ olsun. Eğer $T \subset A$ olmak üzere f fonksiyonu T ve A üzerinde integrallenebilir ise

$$\int_T f_T \leq \int_A f_A$$

olur.

5) $A = A_1 \cup A_2 \subset \mathbb{R}^n$ için eğer $f : A \to \mathbb{R}$ sınırlı fonksiyonu A_1 ve A_2 üzerinde integrallenebilir ise f fonksiyonu A ve $A_3 = A_1 \cap A_2$ üzerinde de integrallenebilirdir ve $f_1 = f\,|_{A_1}$, $f_2 = f\,|_{A_2}$, $f_3 = f\,|_{A_3}$ yazarsak

$$\int_A f = \int_{A_1} f_1 + \int_{A_2} f_2 - \int_{A_3} f_3$$

eşitliği geçerlidir.

Kanıt. D, aksi belirtilmedikce, A kümesini kapsayan bir dörtgeni göstersin.

1) f_1 ve f_2 fonksiyonları A üzerinde integre edilebilir olduklarından $(f_1)^*$ ve $(f_2)^*$ fonksiyonları D üzerinde integre edilebilirdir. Buradan Önerme(3.6)/(1-i) den $(f_1)^* + (f_2)^*$ fonksiyonu D üzerinde integre edilebilirdir ve

$$\int_A (f_1 + f_2) = \int_D [(f_1)^* + (f_2)^*] = \int_D (f_1)^* + \int_D (f_2)^* = \int_A f_1 + \int_A f_2$$

elde edilir.

Benzer şekilde (kf) fonksiyonunun integre edilebilirliği ve

$$\int_A (kf) = k \int_A f$$

eşitliği elde edilir.

2) f_1 ve f_2 fonksiyonları A üzerinde integre edilebilir olduklarından, tanım gereği, $(f_1)^*, (f_2)^* : D \to \mathbb{R}$ fonksiyonları D üzerinde integre edilebilirdir. Öte yandan her $x \in D$ için $[(f_1.f_2)^*](x) = (f_1)^*(x).(f_2)^*(x)$ olduğundan $h = (f_1.f_2)$ fonksiyonunun A üzerinde integre edilebilir olğunu göstermek için, tanım gereği, $[(f_1)^*.(f_2)^*]$ fonksiyonunun D üzerinde integrallenebilir olduğunu göstermeliyiz. Bu ise Önerme(3.6)/(2) den kolayca elde edilir.

Benzer şekilde $f_1 = f_2 = f$ alınarak f^2 fonksiyonunun integre edilebilirliği elde edilir.

3) f_1 ve f_2 fonksiyonları A üzerinde integrallenebilir ve her $x \in A$ için $f_1(x) \leq f_2(x)$ olsun. Bu durumda, tanım gereği, $(f_1)^*$ ve $(f_2)^*$ fonksiyonları D üzerinde integre edilebilirdir ve her $x \in D$ için $(f_1)^*(x) \leq (f_2)^*(x)$ olduğundan Önerme(3.6)/(3) den:

$$\int_A f_1 = \int_D (f_1)^* \leq \int_D (f_2)^* = \int_A f_2$$

olur.

$|f^*|(x) = \max\{f^*(x), -f^*(x)\}$ olduğundan ve f^*, $-f^*$ ler D üzerinde integrallenebilir olduğundan Önerme (3.19) gereği $|f^*|$ de D üzerinde integrallenebilirdir. Ama $|f^*| = |f|^*$ olduğundan $|f|$, A üzerinde integrallenebilirdir.

Ayrıca,

$$(-|f|)^*(x) \leq f^*(x) \leq |f|^*(x), \quad \forall x \in D$$

Buradan,

$$\begin{aligned} -\int_D |f^*| &= \int_D -|f^*| \leq \int_D f^* \leq \int_D |f|^* \\ &\Rightarrow \left|\int_D f^*\right| \leq \int_D |f|^* \\ &\Rightarrow \left|\int_A f\right| \leq \int_A |f| \end{aligned}$$

elde edilir.

4) A yı kapsayan bir D dörtgeni için f_T^* ve f_A^* lar sırasıyla $f\,|_T$ ve $f\,|_A$ fonksiyonlarının D ye genişlemeleri olsunlar. $f\,|_T$ ve $f\,|_A$ lar sırasıyla T ve A üzerinde integrallenebilir olduklarından ve $f_T^*(x) \leq f_A^*(x),\ \forall x \in D$ eşitsizliğinden,

$$\int_T f\,|_T = \int_D f_T^* \leq \int_D f_A^* = \int_A f\,|_A$$

olur; yani, $\int_T f\,|_T \leq \int_A f\,|_A$ elde edilir.

5) $A_3 = A_1 \cap A_2$ dersek, $f_i^* = \begin{cases} f_i(x) & , \quad x \in A_i \\ 0 & , \quad x \in D - A_i \end{cases}$; $i = 1, 2, 3$ fonksiyonları için aşağıdaki gözlemde bulunabiliriz:

$k = 1, 2$ için $\alpha_k = \{x \in D : \ f_k^* \text{ fonksiyonu } x\text{de süreksiz}\}$ olmak üzere, α_1 ve α_2 kümelerinin her ikisinin de ölçümü, f fonksiyonu A_1 ve A_2 üzerinde integrallenebilir olduğundan, sıfırdır. Böylece $\alpha_1 \cup \alpha_2$ ve $\alpha_1 \cap \alpha_2$ kümeleri de sıfır ölçümlüdür.

İlkin, f fonksiyonunun $A_3 = A_1 \cap A_2 \subset D$ üzerinden integrallenebilir olduğunu gösterelim. Bunun için $f_3^* : D \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun D üzerinde integrallenebilir olduğunu göstermeliyiz. Her $x \in D - A_3$ için $f_3(x) = 0$ ve her $x \in A_3$ için

$$f_3^*(x) = f_1(x) = f_2(x) = f(x)$$

olduğundan, f_3^* fonksiyonu $D - (\alpha_1 \cap \alpha_2)$ kümesi dışında süreklidir. Böylece f_3^* fonksiyonu $\alpha_1 \cap \alpha_2$ sıfır ölçümlü kümesi dışında, D üzerinde sürekli olacağından, Teorem(3.5) gereği D üzerinde integre edilebilirdir. Böylece f fonksiyonu $A_3 = A_1 \cap A_2$ üzerinde integre edilebilirdir.

Şimdi f fonksiyonunun $A = A_1 \cup A_2$ üzerinde integrallenebilirliğini göstererek kanıtı bitirelim. Bunun için,

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x \in A \\ 0 & , \quad x \in D - A \end{cases}$$

fonksiyonunun D üzerinde integrallenebilir olduğunu göstermeliyiz: Her $x \in D$ için

$$f^*(x) = f_1^*(x) + f_2^*(x) - f_3^*(x) \tag{3.8}$$

eşitliği geçerli olduğundan ve f^* fonksiyonu $\alpha_1 \cup \alpha_2$ sıfır ölçümlü kümesi dışında, D üzerinde sürekli olacağından, Teorem(3.5) gereği, D üzerinde integre edilebilirdir. Böylece f fonksiyonu A üzerinde integre edilebilirdir. İntegralin değeri ile ilgili eşitlik ise, (3.8) eşitliğine integralin doğrusallık özelliği uygulanılarak

$$\int_A f = \int_{A_1} f_1 + \int_{A_2} f_2 - \int_{A_3} f_3$$

elde edilir. $\square$

Sonuç 3.21 *$S_1, ..., S_k \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı kümeler olsunlar. Varsayalım ki, $i \neq j$ olmak üzere her $i, j = 1, ..., k$ için $S_i \cap S_j$ sıfır ölçümlü olsun. $S = \bigcup_i S_i$ olsun. Eğer $f : S \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $i = 1, ..., k$ için S_i üzerinde integre edilebilir ise f fonksiyonu S üzerinde integre edilebilirdir ve $f|_{S_i} = f_i$ olmak üzere,*

$$\int_S f = \int_{S_1} f_1 + ... + \int_{S_k} f_k$$

olur.

Örnek 3.22

Burada, Önerme(3.20) de yer alan bazı özelliklerin yanlış yorumlanmasını önlemek amaçıyla birkaç örnek sunulacaktır.

$I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ olsun. $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{Q}'$, sırasıyla, rasyonel ve irrasyonel sayıları göstersin.

1) $f, g : I \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} 0\,, & x \in \mathbb{Q} \cap I \\ 1\,, & x \in \mathbb{Q}' \cap I \end{cases} \\ g(x) &= \begin{cases} 1\,, & x \in \mathbb{Q} \cap I \\ 0\,, & x \in \mathbb{Q}' \cap I \end{cases} \end{aligned}$$

olsun. f ve g fonksiyonları I aralığının hiçbir noktasında sürekli olmadıklarından, I üzerinde integre edilebilir değildirler. Öte yandan her $x \in I$ için $(f+g)(x) = 1$ ve $(fg)(x) = 0$ sabit fonksiyonları I üzerinde integre edilebilirdir. Buradan görülür ki, fonksiyonların toplamı (çarpımı) integrallenebilir iken toplamdaki (çarpımdaki) her bir terim (çarpan) integrallenebilir olmak zorunda değildir.

2) $f : I \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1\,, & x \in \mathbb{Q} \cap I \\ -1\,, & x \in \mathbb{Q}' \cap I \end{cases}$$

olsun. Açık olarak, f fonksiyonu I üzerinde integre edilebilir değildir. Öte yandan her $x \in I$ için $(f^2)(x) = 1$ olduğundan, f^2, I üzerinde sabit fonksiyondur ve dolayısıyla integrallenebilirdir. Yani f^2 nin integrallenebilir olması için f nin integrallenebilir olması gerekmez. Ayrıca $x \in D$ için $(|f|)(x) = 1$ olduğundan, $|f|$ sabit fonksiyondur ve dolayısıyla integrallenebilirdir. Yani $|f|$ nin integrallenebilir olması için f nin integrallenebilir olması gerekmez.

D dörtgeni üzerinde $f : D \to \mathbb{R}$ nın integrallenebilmesi için f nin D üzerinde sürekli olması yeterlidir, (Teorem(3.5)). Ancak herhangi bir S kümesi için f nin S de sürekliliği yeterli olmayabilir. Bu durum ∂D nin her zaman sıfır ölçümlü olmasına karşın, ∂S nin sıfır ölçümlü olmayabileceği (Örnek(2.16) da olduğu gibi) gerçeğinden kaynaklanmaktadır. Aşağıdaki teorem bu duruma ışık tutmaktadır:

Teorem 3.23 *$S \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bir küme, $f : S \to \mathbb{R}$ sınırlı sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda,*

$$E = \left\{ x_0 \in \partial S : \lim_{x \to x_0} f(x) \neq 0 \right\} \subset \partial S$$

için, eğer E sıfır ölçümlü bir küme ise, f fonksiyonu S üzerinde integre edilebilirdir.

Kanıt. f fonksiyonunun integrallenebilmesi, tanımı gereği, S yi kapsayan bir kapalı dörtgen D olmak üzere, $f^* : D \to \mathbb{R}$

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x \in S \\ 0 & , \quad x \in D - S \end{cases}$$

fonksiyonunun D üzerinden integrallenebilir olduğunu göstermeliyiz. Bunun için ise, Teorem(3.5) gereğince,

$$N = \{x \in D : f^* \text{ fonksiyonu } x \text{ de süreksiz}\} \subset D$$

kümesinin sıfır ölçümlü olduğunu göstermeliyiz. Aşağıdaki gözlemlerde bulunalım:

Gözlem 1: S nin iç noktaları kümesi S^o olmak üzere, her $x \in S^o$ için $f^*(x) = f(x)$ eşitliği ve f fonksiyonunun sürekliliğinden f^* nin S^o üzerinde sürekli olduğu elde edilir.

Gözlem 2: Her $x \in [D - (S \cup \partial S)] = K$ için $f^*(x) = 0$ sabit fonksiyon olduğundan, f^* fonksiyonu K üzerinde süreklidir.

Gözlem (1) ve (2) den $N \subset \partial S$ olduğu elde edilir. Bu durumda $N \subset E \subset \partial S$ olduğunu göstermemiz bize sonucu verecektir. Bunun için, $x_0 \in \partial S - E$ noktasında f^* fonksiyonunun sürekli olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır:

Şimdi $x_0 \in \partial S - E$ olsun. İki durum söz konusudur:

1.Durum: $x_0 \in S$ olsun.

$x_0 \in S$ olduğundan, tanım gereği, $f(x_0) = f^*(x_0)$ olur. Ayrıca $x_0 \notin E$ ve f fonksiyonu S üzerinde sürekli olduğundan,

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S}} f^*(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S}} f(x) = 0 = f(x_0) = f^*(x_0)$$

olur. Buradan verilen $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, bir $\delta > 0$ sayısı vardır öyle ki, $[B_\delta(x_0) \cap S] = K_1$ olmak üzere, her $y \in K_1$ için,

$$|f^*(x_0) - f^*(y)| < \varepsilon$$

elde edilir. Öte yandan, $f^*(x)$ fonksiyonu S nin dışında sıfırlandığından, her $y \in [B_\delta(x_0) \cap D]$ için

$$|f^*(x_0) - f_S(y)| < \varepsilon$$

olur. Dolayısıyla, f^* fonksiyonu x_0 da sürekli olur.

2.Durum: $x_0 \notin S$ olsun. Görülür ki,

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S}} f^*(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S}} f(x) = 0$$

çünkü $x_0 \in \partial S - E$ dir. Ama $f^*(x_0) = 0$, çünkü $x_0 \notin S$ dir. Böylece

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S}} f^*(x) = 0 = f^*(x_0)$$

elde edilir. Buradan verilen $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, bir $\delta > 0$ sayısı vardır öyle ki, $[B_\delta(x_0) \cap S] = Y$ olmak üzere, her $y \in Y$ için,

$$|f^*(x_0) - f^*(y)| < \varepsilon$$

elde edilir. Öte yandan, $f^*(x)$ fonksiyonu S nin dışında sıfırlandığından, ve $Y \subset B_\delta(x_0) \cap D$ olduğundan, her $y \in [B_\delta(x_0) \cap D]$ için

$$|f^*(x_0) - f^*(y)| < \varepsilon$$

olur. Dolayısıyla, f^* fonksiyonu x_0 da sürekli olur.

Böylece $N \subset E$ olduğundan, N sıfır ölçümlü bir kümedir ve Teorem(3.5) gereği, f^* fonksiyonu D üzerinde integrallenebilirdir. Buradan f fonksiyonu S üzerinde integrallenebilirdir. $\square$

Önerme 3.24 $S \subset \mathbb{R}^n$ *sınırlı bir küme,* $f : S \to \mathbb{R}$ *sınırlı sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer* f *fonksiyonu* S *üzerinde integre edilebilir ise* f *fonksiyonu,* S *nin içi,* S^o *üzerinde integre edilebilirdir ve* $\int_S f = \int_{S^o} f$ *olur.*

Kanıt. S yi kapsayan kapalı dörtgen D olsun. Böylece $S^o \subset S \subset D$ olur. $(f_{S^o})^*, (f_{S^o})^* : D \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını ele alalım.

Sav:

$$E = \{x \in D : (f_S)^* \text{ fonksiyonu } x \text{ de süreksiz}\}$$

olmak üzere, eğer $(f_S)^*$ fonksiyonu bir $x_0 \in D$ noktasında sürekli ise,(yani $x_0 \in D - E$ ise) $(f_{S^o})^*$ fonksiyonununda x_0 noktasında süreklidir ve $(f_S)^*(x_0) = (f_{S^o})^*(x_0)$ olur.

Bunun için $(f_S)^*$ fonksiyonu bir $x_0 \in D$ noktasında sürekli olsun.

i) Eğer $x_0 \in S^o$ ise; her $x \in S^o$ için, $(f_S)^*(x_0) = f(x_0) = (f_{S^o})^*(x_0)$ ve S^o açık olduğundan, $(f_{S^o})^*$, x_0 da sürekli olacaktır.

ii) Eğer $x_0 \in A := (D - \overline{S}) = D - (S^o \cup \partial S)$ ise her $x \in A$ için $(f_S)^*(x) = (f_{S^o})^*(x) = 0$ olur. Dolayısıyla $(f_{S^o})^*$ fonksiyonu, A üzerinde sabittir ve böylece süreklidir.

iii) Eğer $x_0 \in \partial S$ ise bu durumda verilen $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, bir $\delta_0 > 0$ sayısı bulunabilir öyleki, her $y \in B_{\delta_0}(x_0)$ için

$$|(f_S)^*(x_0) - (f_S)^*(y)| < \varepsilon$$

olur. Çünkü $(f_S)^*$ fonksiyonu x_0 da süreklidir. Öte yandan $(f_S)^*(x_0) = 0$ olmak zorundadır. Aksi halde, yani $(f_S)^*(x_0) \neq 0$ için, $\varepsilon = \dfrac{|(f_S)^*(x_0)|}{2}$ olarak seçildiğinde ve $y \in (D - \overline{S})$ için ($x_0 \in \partial S$ olduğundan her $\delta > 0$ için $\left[B_\delta(x_0) \cap (D - \overline{S})\right] \neq \varnothing$ olur.)

$$|(f_S)^*(x_0) - (f_S)^*(y)| = |(f_S)^*(x_0) - 0| = |(f_S)^*(x_0)| < \frac{|(f_S)^*(x_0)|}{2}$$

olur ki, bu bir çelişkidir. Böylece $(f_S)^*(x_0) = 0$ olur. Yani, $y \in B_{\delta_0}(x_0)$ için

$$|(f_S)^*(x_0) - (f_S)^*(y)| = |0 - (f_S)^*(y)| = |(f_S)^*(y)| < \varepsilon$$

Öte yandan $x_0 \notin S^o$ olduğundan, tanım gereği, $(f_{S^o})^*(x_0) = 0$ dır. Böylece $(f_{S^o})^*(x_0) = (f_S)^*(x_0) = 0$ olur. Şimdi $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. $\delta = \delta_0 > 0$ olarak seçelim. Görülür ki; her $y \in B_\delta(x_0) = B_{\delta_0}(x_0)$ için

$$|(f_{S^o})^*(x_0) - (f_{S^o})^*(y)| < \varepsilon$$

olur. Gerçekten, $(f_{S^o})^*(y) = 0$ yada $(f_{S^o})^*(y) = (f_S)^*(y)$ olduğundan,

$$\begin{aligned} |(f_{S^o})^*(x_0) - (f_{S^o})^*(y)| &= |(f_S)^*(x_0) - (f_{S^o})^*(y)| \\ &= |0 - (f_{S^o})^*(y)| \\ &\leq |-(f_S)^*(y)| < \varepsilon \end{aligned}$$

olur.

Böylece $(f_{S^o})^*$ fonksiyonu, x_0 da sürekli olur. Bu da savın kanıtını tamamlar.

Şimdi,

$$E_o = \{x \in D : (f_{S^o})^* \text{ fonksiyonu } x \text{ de süreksiz}\}$$

yazalım. Savın sonucu olarak, görülür ki, $E_o \subset E$ olur. Öte yandan, $(f_S)^*$ fonksiyonu D üzerinde integre edilebilir olduğundan, Teorem(3.5) gereğince, E sıfır ölçümlüdür ve dolayısıyla E_o sıfır ölçümlüdür. Buradan $(f_{S^o})^*$ ın D üzerinde integre edilebilir olduğu sonucuna ulaşılır. Yani f fonksiyonu S üzerinde integrallenebilir ise, S^o üzerinde integre edilebilirdir. Şimdi E sıfır ölçümlü, her $x \in (D - E)$ için $((f_S)^* - (f_{S^o})^*)(x) = 0$ ve $(f_S)^*, (f_{S^o})^*$ fonksiyonları D üzerinde integre edilebilir olduğundan Önerme(3.7)/(1) den:

$$\begin{aligned} \int_D ((f_S)^* - (f_{S^o})^*) &= 0 \\ \int_D (f_S)^* &= \int_D (f_{S^o})^* \end{aligned}$$

elde edilir. □

Önerme(3.24) ün özel hali olarak:

Sonuç 3.25 *$D \subset \mathbb{R}^n$ kapalı dörtgen ve $f : D \to \mathbb{R}$ sınırlı sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda, D nin iç noktaları kümesi D^o olmak üzere, f fonksiyonu D^o üzerinde integre edilebilirdir ve*

$$\int_D f = \int_{D^o} f$$

olur.

4 FUBİNİ TEOREMİ

Fubini Teoremi; $\mathbb{R}^n$ uzayında kapalı dikdörtgenler üzerindeki integralleri, gerçel sayılarda kapalı aralıklar üzerindeki integrallere indirger. Teoremin ana fikri, özel bir durum için, aşağıdaki örnekte açıklanacaktır:

Örnek 4.1

$D_1 = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $D_2 = [c, d] \subset \mathbb{R}$ iki kapalı aralık ve $D = D_1 \times D_2 \subset \mathbb{R}^2$ kapalı dörtgen olsun. $f : D \to \mathbb{R}$ pozitif, sürekli bir fonksiyon olsun. D_1 aralığının bir parçalanışı

$$P_{D_1} =< t_0, t_1, ..., t_n >$$

olsun. $\{t_i\} \times D_2$ doğru parçaları ile D dikdörtgenini n şeride ayıralım. $g_x : D_2 \to \mathbb{R}$

$$g_x(y) = f(x, y), \qquad y \in D_2$$

ile tanımlanan fonksiyon olsun. Bu durumda $x \in D_1$ olmak üzere $\{x\} \times D_2$ üzerinde f nin grafiği ile sınırlı bölgenin alanı

$$\int_c^d g_x = \int_c^d f(x, y)dy$$

olur. $i = 1, ..., n$ için, f fonksiyonunun $[t_{i-1}, t_i] \times D_2$ dörtgeni üzerindeki grafiği ile üsten ve $[t_{i-1}, t_i] \times D_2$ dörtgeni ile alttan sınırlanan bölgenin hacmi $\mathcal{H}$ olsun. Her $x \in [t_{i-1}, t_i]$ için, $\mathcal{H}$ nin yaklaşık değeri,

$$\mathcal{H} \simeq h(x) = (t_{i-1} - t_i) \int_c^d f(x, y)dy$$

olarak verilir. Dolayısıyla, $x_i \in [t_{i-1}, t_i]$ olmak üzere,

$$\int_D f = \sum_{i=1}^{n} \int_{[t_{i-1}, t_i] \times D_2} f$$

değeri yaklaşık olarak

$$\sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \int_c^d f(x_i, y)dy$$

sayısına eşittir. Anımsanacağı gibi,

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx$$

de yukarıdaki toplama benzer toplamlar ile tanımlanır. Bu nedenle, $h : D_1 \to \mathbb{R}$, her $x \in D_1$ için

$$h(x) = \int_c^d g_x = \int_c^d f(x,y)dy$$

ise, h fonksiyonunun D_1 aralığı üzerinde integrallenebilir olduğunu ve integralinin ise

$$\int_a^b h = \int_D f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx$$

ile verilmesini beklemek yerinde olacaktır. Gerçekten, f sürekli ise bu gözlemin doğru olduğunu aşağıda göreceğiz. Diğer yandan f sürekli değilse bir takım sorunlarla karşılaşırız. Örneğin f fonksiyonunun süreksizlikleri $x_0 \in [a,b]$ olmak üzere $\{x_0\} \times [c,d]$ biçiminde ise f fonksiyonu $[a,b] \times [c,d]$ üzerinde integrallenebilir olsa dahi

$$h(x_0) = \int_c^d f(x_0, y)dy$$

tanımlı bile olmayabilir.

$D \subset \mathbb{R}^n$ kapalı dörtgeni üzerinde tanımlı ve sınırlı $f : D \to \mathbb{R}$ fonksiyonu integrallenebilir olmasa da

$$L\left(\int_D f\right) = \sup_P \{L(f,P)\} \quad \text{ve} \quad U\left(\int_D f\right) = \inf_P \{U(f,P)\}$$

sayılar her zaman vardır. ($\mathbb{R}$ de boştan farklı, sınırlı her kümenin en küçük üst sınırı ve en büyük alt sınırı her zaman vardır.) Bu açıklamaların ışığında:

Tanım 4.2 $L\left(\int_D f\right)$ *ve* $U\left(\int_D f\right)$ *ifadelerine,* f *fonksiyonunun* D *dörtgeni üzerindeki, sırasıyla,* ***alt integrali*** *ve* ***üst integrali*** *denir.*

Bu bölümün devamında aksi belirtilmedikçe aşağıdaki gösterimler geçerli olacaktır.

Gösterim 4.3 *$D_1 \subset \mathbb{R}^n, D_2 \subset \mathbb{R}^m$ kapalı dikdörtgenler,*

$$f : D_1 \times D_2 \subset \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$$

integrallenebilir bir fonksiyon olsun. $x \in D_1$ için $g_x : D_2 \to \mathbb{R}$

$$g_x(y) = f(x,y), \qquad y \in D_2$$

olarak ve $\mathcal{L}, \mathcal{U} : D_1 \to \mathbb{R}$ fonksiyonları

$$\mathcal{L}(x) := L\left(\int_{D_2} g_x\right) = L\left(\int_{D_2} f(x,y)dy\right), \qquad x \in D_1$$

$$\mathcal{U}(x) := U\left(\int_{D_2} g_x\right) = U\left(\int_{D_2} f(x,y)dy\right), \qquad x \in D_1$$

olarak tanımlı olacaktır.

Teorem 4.4 *(Fubini Teoremi) $f : D_1 \times D_2 \subset \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda, $\mathcal{L}$ ve $\mathcal{U}$ fonksiyonları D_1 üzerinde integrallenebilir fonksiyonlardır ve*

$$\begin{aligned}\int_{D_1 \times D_2} f &= \int_{D_1} \mathcal{L} = \int_{D_1} \left[L\left(\int_{D_2} f(x,y)dy\right)\right] dx \\ \int_{D_1 \times D_2} f &= \int_{D_1} \mathcal{U} = \int_{D_1} \left[U\left(\int_{D_2} f(x,y)dy\right)\right] dx\end{aligned}$$

olur.

Sağ taraftaki integrallere f nin *katlı integralleri* denir.

Kanıt. D_1 nın bir parçalanışı P_{D_1} ve, D_2 nin ki, P_{D_2} olsun. Böylece $D_1 \times D_2$ nin bir parçalanışı $P = (P_{D_1}, P_{D_2})$ dir. Eğer $S \in P$ ise $S_{D_1} \in P_{D_1}$ ve $S_{D_2} \in P_{D_2}$ olmak üzere $S = S_{D_1} \times S_{D_2}$ olarak ifade edilir. Bu nedenle

$$\begin{aligned}L(f,P) &= \sum_S m_S(f)v(S) = \sum_{S_{D_1}, S_{D_2}} m_{S_{D_1} \times S_{D_2}}(f) v(S_{D_1} \times S_{D_2}) \\ &= \sum_{S_{D_1}} \left(\sum_{S_{D_2}} m_{S_{D_1} \times S_{D_2}}(f) v(S_{D_2})\right) v(S_{D_1})\end{aligned}$$

olur. Her $x \in S_{D_1}$ için $(\{x\} \times S_{D_2}) \subset S_{D_1} \times S_{D_2}$ olacağından

$$m_{S_{D_1} \times S_{D_2}}(f) \leq m_{S_{D_2}}(g_x)$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\sum_{S_{D_2}} m_{S_{D_1} \times S_{D_2}}(f) v(S_{D_2}) &\leq \sum_{S_{D_2}} m_{S_{D_2}}(g_x) v(S_{D_2}) \\
&= L(g_x, P_{D_2}) \leq \sup_{P \in P_{D_2}} \{L(f, P)\} \\
&\leq L\left(\int_{D_2} g_x\right) = \mathcal{L}(x)
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
L(f, P) &= \sum_{S_{D_1}} \left(\sum_{S_{D_2}} m_{S_{D_1} \times S_{D_2}}(f) v(S_{D_2}) \right) v(S_{D_1}) \\
&\leq \sum_{S_{D_1}} m_{S_{D_1}}(\mathcal{L}) v(S_{D_1}) = L(\mathcal{L}, P_{D_1})
\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde

$$\sum_{S_{D_2}} M_{S_{D_1} \times S_{D_2}}(f) v(S_{D_2}) \geq \sum_{S_{D_2}} M_{S_{D_2}}(g_x) v(S_{D_2}) \geq U\left(\int_{D_2} g_x\right) = \mathcal{U}(x)$$

bulunur. Dolayısıyla

$$U(f, P) = \sum_{S_{D_1}} \left(\sum_{S_{D_2}} M_{S_{D_1} \times S_{D_2}}(f) v(S_{D_2}) \right) v(S_{D_1}) \geq U(\mathcal{U}, P_{D_1})$$

elde edilir. Ayrıca, kolayca görülür ki, her $x \in A$ için $\mathcal{L}(x) \leq \mathcal{U}(x)$ olur. Bu sonuçlar birleştirilerek:

$$L(f, P) \leq L(\mathcal{L}, P_{D_1}) \leq U(\mathcal{L}, P_{D_1}) \leq U(\mathcal{U}, P_{D_1}) \leq U(f, P)$$

bulunur. f integrallenebilir olduğundan

$$\sup\{L(f, P)\} = \inf\{U(f, P)\} = \int_{D_1 \times D_2} f$$

olacaktır. Sonuç olarak varılan

$$\sup\{L(\mathcal{L}, P_{D_1})\} = \inf\{U(\mathcal{L}, P_{D_1})\} = \int_{D_1 \times D_2} f$$

eşitliği, $\mathcal{L}$ fonksiyonunun D_1 üzerinden integrallenebilirliğini ve

$$\int_{D_1\times D_2} f = \int_{D_1} \mathcal{L} = \int_{D_1} \left[L\left(\int_{D_2} f(x,y)dy \right) \right] dx$$

olduğunu gösterir. $\mathcal{U}$ için, $\int_{D_1\times D_2} f = \int_{D_1} \mathcal{U}$ savı, benzer şekilde,

$$L(f,P) \leq L(\mathcal{L}, P_{D_1}) \leq L(\mathcal{U}, P_{D_1}) \leq U(\mathcal{U}, P_{D_1}) \leq U(f,P)$$

eşitsizliklerinden kanıtlanır. $\square$

Uyarı 4.5 *i) Benzer bir kanıt*

$$\int_{D_1\times D_2} f = \int_{D_2} (L \int_{D_1} f(x,y)dx)dy = \int_{D_2} (U \int_{D_1} f(x,y)dx)dy$$

olduğunu verecektir. Teoremdeki sıranın tersi yönünde alınan bu integrallere de f fonksiyonunun katlı integralleri denir. İntegralde sıranın değiştirilebilmesi uygulamada pek çok kolaylıklar sağlar.

ii) $C = \{x \in D_1 : g_x$ fonksiyonu D_2 üzerinde integrallenebilirdir$\}$ kümesi için

a^o) Eğer $C = D_1$ ise, yani ,her $x \in D_1$ için g_x fonksiyonu D_2 üzerinde integrallenebilir ise (özel olarak $f : D_1 \times D_2 \to \mathbb{R}$ sürekli ise) o zaman

$$L\left(\int_{D_2} f(x,y)dy \right) = L\left(\int_{D_2} g_x \right) = \int_{D_2} g_x = \int_{D_2} f(x,y)dy$$

olacağından,

$$\int_{D_1\times D_2} f = \int_{D_1} \left[\int_{D_2} f(x,y)dy \right] dx \tag{4.1}$$

eşitliği elde edilir.

b^o) (4.1) eşitliğini elde etmek için, (a^o) daki $C = D_1$ koşulu gevşetilebilir. $D_1 - C = E$ kümesi, $\mathcal{L}$ fonksiyonunun D_1 üzerinde integre edilebilirliğinin bozulmayacağı şekilde, sıfır ölçümlü bir küme olmak koşuluyla, boş kümeden farklı olabilir. Yani $g_x : D_2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, her $x \in D_1$ için, integrallenebilir olmak zorunda değildir. Öte yandan $\mathcal{L}$ fonksiyonunun, D_1 üzerindeki integral değeri,

$\int_{D_1} \mathcal{L}$, *sıfır ölçümlü* E *kümesi üzerindeki* $\mathcal{L}$ *fonksiyonunun değerlerinden bağımsız olduğundan:*

$$\int_{D_1 \times D_2} f = \int_{D_1} \mathcal{L} = \int_{D_1} \left(\int_{D_2} g_x \right) = \int_{D_1} \left[\int_{D_2} f(x,y)dy \right] dx$$

eşitliği geçer

c^o) *Şimdi yukarıdaki açıklamanın her zaman geçerli olamayacağına ilişkin bir örnek vereceğiz. Yani,* $h : D_1 \to \mathbb{R}$ *her* $x \in D_1$ *için*

$$h(x) = \int_{D_2} g_x = \int_{D_2} f(x,y)dy$$

olmak üzere

$$\int_{D_1 \times D_2} f = \int_{D_1} h = \int_{D_1} \left(\int_{D_2} g_x \right) = \int_{D_1} \left[\int_{D_2} f(x,y)dy \right] dx$$

eşitlikleri ile, her zaman Fibuni Teoremi ifade edilemez. Gerçekten:

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad D = [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R} \\ f(x,y) \quad &= \quad \begin{cases} 1 & , \quad x \notin \mathbb{Q} \\ 1 & , \quad x \in \mathbb{Q}, y \notin \mathbb{Q} \\ 1 - \frac{1}{q} & , \quad y \in \mathbb{Q}, x = \frac{p}{q}, \ (p,q) = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

olarak tanımlanan f *fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu durumda*

Sav 1: f *fonksiyonu* D *nin* $E = \{(x,y) \in D : x, y \in \mathbb{Q}\}$ *alt kümesi dışında süreklidir.*

Şimdi bunu görelim: $1 > \varepsilon > 0$ *sayısı için sürekliliği göstermek yeterlidir. Ayrıca,* ε *sayıları* $N > 1$, $N \in \mathbb{N}$, *doğal sayılar kümesi, ve* $1 > \varepsilon = \dfrac{1}{N} > 0$ *olacak şekilde seçildiğinde, de sürekliliği göstermek yeterli olacaktır:*

1) $z_0 = (x_0, y_0) \in D$ $x_0, y_0 \notin \mathbb{Q}$, *yani* x_0 *ve* y_0 *irrasyonel olsun. Bu durumda* $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ *açık aralığı dışındaki* $1 - \frac{1}{q}$ *değerleri sonludur, yani,*

$$0 < 1 - \frac{1}{q} < 1 - \frac{1}{N} < 1$$

şartını sağlayacak şekilde $q \in \mathbb{N}$ *sayıları sonludur. Çünkü* $q > N+1$ *olamaz. Eğer olsaydı*

$$
\begin{aligned}
1-\frac{1}{N+1} &< 1-\frac{1}{N} \\
\frac{1}{N+1} &> \frac{1}{N} \\
N &> N+1
\end{aligned}
$$

elde edilir ki, bu bir çelişkidir. Böylece

$$K=\left\{x=\frac{p}{q}\in[0,1]:(p,q)=1 \text{ ve } 1<q<N+1\right\}$$

kümesi sonlu bir kümedir. $\delta = \dfrac{\min\{|x_0-x| : x\in K\}}{n}$ *olarak seçelim. Kolayca görülür ki,* $B_\delta(z_0)$ *n-kübü içerisindeki her* z *için*

$$|f(z_0)-f(z)|<\varepsilon=\frac{1}{N}$$

sağlanır. Çünkü

$$f(z_0)-f(z)=1-1=0<\varepsilon, \quad \text{yada} \quad f(z_0)-f(z)=1-1+\frac{1}{q_z}<\varepsilon=\frac{1}{N}$$

sağlanır. Böylece f *fonksiyonu* z_0 *da sürekli olur.*

2) $z_0=(x_0,y_0)\in D$ $x_0\in\mathbb{Q}$ *ve* $y_0\notin\mathbb{Q}$, *yani* x_0 *rasyonel ve* y_0 *irrasyonel olsun. (1) de yer alan tartışmaya benzer bir tartışma ile* f *fonksiyonu* z_0 *da sürekli olduğu görülür.*

Sonuç olarak f *fonksiyonu* $D-E$ *kümesi dışında* D *üzerinde süreklidir.*

Sav 2: E *sıfır ölçümlü bir kümedir.*

Aslında, E *sayılabilir bir kümedir. Sayılabilir her küme sıfır ölçümlü olduğundan* E *sıfır ölçümlüdür.*

Böylece Teorem(3.5) gereğince, f *fonksiyonu* D *üzerinde integrallenebilirdir.*

Sav 3: $\int_D f = 1$ *olur.*

$\alpha : D \to \mathbb{R}$, *her* $x\in D$ *için* $\alpha(x)=1$ *olsun. Bu durumda* α *fonksiyonu* D *üzerinde integrallenebilirdir ve* $\int_D \alpha = 1$ *olacağı açıktır. Öte yandan* f *ve*

α *fonksiyonları* D *üzerinde integrallenebilir olduğundan* $(f-\alpha)$ *fonksiyonu da* D *üzerinde integrallenebilirdir. Ayrıca,* $(f-\alpha)$ *fonksiyonu,* E *sıfır ölçümlü kümesi dışında* D *üzerinde sıfırlandığından, Teorem(3.7)/(1) den*

$$\begin{aligned}\int_D (f-\alpha) &= 0\\ \int_D f &= \int_D \alpha = 1\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi $x\in[0,1]$*,* $g_x:[0,1]\to\mathbb{R}$

$$g_x(y)=f(x,y), \qquad y\in[0,1]$$

fonksiyonunu göz önüne alalım:

Gözlem 1: $x\notin\mathbb{Q}$ *ise* $g_x(y)=1$ *ve* $\int_{[0,1]} g_x=1$ *olacaktır.*

Gözlem 2: $x\in\mathbb{Q}$ *ise*

$$g_x(y)=\begin{cases} 1 & , \ y \ \textit{irrasyonel}\\ 1-\dfrac{1}{q} & , \ y \ \textit{rasyonel}\end{cases}$$

bu durumda g_x *bütün* $[0,1]$ *üzerinde süreksiz ve böylece* $[0,1]$ *üzerinde integre edilebilir değildir. Yani,* $\int_{[0,1]} g_x$ *sayısı yoktur.*

Böylece, Gözlem(1) ve Gözlem(2) den, her $x\in[0,1]$ *için* $h(x)=\int_{D_2} g_x$ *fonksiyonunun bütün* $[0,1]$ *üzerinde süreksiz olduğu elde edilir. Böylece Teorem(3.5) gereğince* h *fonksiyonu* $[0,1]$ *üzerinde integre edilebilir değildir. Buradan*

$$\int_{D_1\times D_2} f=\int_{D_1} h=\int_{D_1}\left(\int_{D_2} g_x\right)=\int_{D_1}\left[\int_{D_2} f(x,y)dy\right]dx$$

olamaz. Çünkü $\int_{D_1} h$ *sayısı yoktur.*

iii) $D=[a_1,b_1]\times\ldots\times[a_n,b_n]$*, olmak üzere* $f:D\to\mathbb{R}$ *(ii)/(*a^o*) gibi bir fonksiyon olmak üzere*

$$\int_D f=\int_{a_1}^{b_1}\left(\ldots\left(\int_{a_n}^{b_n} f dx^n\right)\ldots\right)dx^1$$

olur. Gerçekten $D_1 = [a_1, b_1]$ *ve* $D' = [a_2, b_2] \times ... \times [a_n, b_n]$ *için* $D = D_1 \times D'$ *olur. Öte yandan, Fubini teoremi gereğince,*

$$\int_D f = \int_{D_1} \left(\int_{D'} f \right) = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{D'} f \right) dx^1 \tag{4.2}$$

$D_2 = [a_2, b_2]$ *ve* $D'' = [a_3, b_3] \times ... \times [a_n, b_n]$ *için* $D' = D_2 \times D''$ *olur. Öte yandan Fubini teoremi gereğince*

$$\int_{D'} f = \int_{D_2} \left(\int_{D''} f \right) = \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{D''} f \right) dx^2 \tag{4.3}$$

(4.2) ve (4.3) den

$$\int_D f = \int_{D_1} \left(\int_{D'} f \right) = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{D'} f \right) dx^1 = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{D''} f \right) dx^2 \right) dx^1$$

elde edilir. Bu işlem n kez tekrarlandığında,

$$\int_D f = \int_{a_1}^{b_1} \left(... \left(\int_{a_n}^{b_n} f dx^n \right) ... \right) dx^1$$

elde edilir.

iv) $f : D_1 \times D_2 \to \mathbb{R}$ *sınırlı bir fonksiyon ve* $C \subset D_1 \times D_2$ *herhangi bir alt küme olmak üzere* $\int_c f$ *integrali, tanım gereği,* $\int_{D_1 \times D_2} f \chi_C$ *olduğundan,* $\int_c f$ *nin değeri, Fubini teoremi kullanılarak hesaplanabilir. Örneğin,*

$$C = [-1, 1] \times [-1, 1] - \{(x, y) : ||(x, y)|| < 1\}$$

kümesi ise

$$\int_c f = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} f(x, y) \chi_C(x, y) dy \right) dx$$

olacaktır.

$$\chi_C(x, y) = \begin{cases} 1 \quad , \quad y > \sqrt{1 - x^2} \quad \text{veya } y < -\sqrt{1 - x^2} \\ 0 \quad , \quad \text{diğer durum} \end{cases}$$

olacağından

$$\int_{-1}^{1} f(x, y) \chi_C(x, y) dy = \int_{-1}^{-\sqrt{1 - x^2}} f(x, y) dy + \int_{\sqrt{1 - x^2}}^{1} f(x, y) dy$$

elde edilir. Genelde, $C \subset D_1 \times D_2$ *üzerinde* $\int_c f$ *integralinin hesaplanmasındaki esas sorun* $x \in D_1$ *için* $C \cap (\{x\} \times D_2)$ *kümesinin tayinidir. Eğer* $y \in D_2$ *için* $C \cap (D_1 \times \{y\})$ *kümesi daha kolay betimlenebiliyorsa*

$$\int_c f = \int_{D_2} \left(\int_{D_1} f(x,y)\chi_C(x,y)dx \right) dy$$

kullanılmalıdır.

5 HAS OLMAYAN İNTEGRALLER

Tanım 5.1 *$A \subset \mathbb{R}^n$ açık bir küme ve $f : A \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer her $x \in A$ için $f(x) \geq 0$ ise f fonksiyonunun A* ***üzerinde genişletilmiş anlamda integrali,*** *supremumun var olması koşulu ile,*

$$\int_A f := \sup\left\{\int_K f : K \subset A,\ K \text{ tıkız ve (J.Ö)}\right\}$$

olarak verilir. Daha genel olarak, f fonksiyonu A üzerinde herhangi ($f(x) \geq 0$ koşulu olmaksızın) sürekli bir fonksiyon olsun. $f_+,\ f_- : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonları her $x \in A$ için

$$f_+(x) := \max\{f(x), 0\} \quad \text{ve} \quad f_-(x) := \max\{-f(x), 0\}$$

olarak tanımlanmış olsun. Görülür ki, her $x \in A$ için $f_+(x) \geq 0$ ve $f_-(x) \geq 0$ olur. Bu durumda f fonksiyonunun A üzerinden genişletilmiş integrali, f_+ ve f_- fonksiyonlarının A üzerinden genişletilmiş anlamda integrallenebilmesi koşulu ile,

$$\int_A f := \int_A f_+ - \int_A f_-$$

olarak verilir.

Uyarı 5.2 *Bu bölüm içerisinde aksi belirtilmedikce, integre edilebilirlik, genişletilmiş anlamda integre edilebilirlik anlamında kullanılacaktır ve bu durumu göstermek için*

$$\int_A f := (g.a)\int_A f$$

yazılacaktır. Öte yandan gerekli olduğunda integralin eski anlamda tanımlanışını "bilinen anlamda" integral olarak ifade edip, gösterim olarak

$$\int_A f := (b.a)\int_A f$$

yazılacaktır. (Kuşkusuz, burada A sınırlı küme olmak zorundadır.)

$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $d(x,y) = \max\{|x_i - y_i| : 1 \le i \le n|\}$ maksimum metriğini göstersin. $C \subset \mathbb{R}^n$, boştan farklı bir alt küme olmak üzere $d_C : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$d_C(x) = d(x,C) = \inf\{d(x,b) : b \in C\}$$

olarak tanımlayalım.

Önerme 5.3 *Boştan farklı herhangi bir $C \subset \mathbb{R}^n$ için $d_C : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu süreklidir.*

Kanıt. $b \in C$ ve $x, y \in \mathbb{R}^n$ için

$$\begin{aligned} d_C(x) - d(x,y) &= d(x,C) - d(x,y) \le d(x,b) - d(x,y) \\ &\le d(b,y) \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu eşitsizlik her $b \in C$ için geçerli olduğundan

$$d_C(x) - d(x,y) \le d(y,C) = d_C(y)$$

olur. Buradan

$$d_C(x) - d_C(y) \le d(x,y)$$

elde edilir. Öte yandan,

$$-\left(d_C(x) - d_C(y)\right) = d_C(y) - d_C(x) \le d(y,x) = d(x,y)$$

olacağından

$$|d_C(x) - d_C(y)| \le d(x,y) \tag{5.1}$$

bulunur.

Şimdi $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. $\delta = \varepsilon$ seçilsin. (5.1) eşitsizliği, her $x \in \mathbb{R}$ için, d_C fonksiyonunun, sürekliliği verir. $\square$

Önerme 5.4 *$A \subset \mathbb{R}^n$ açık bir alt küme olsun. Bu durumda, aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde bir kümeler ailesi $\{C_N : N = 1, 2, ...\}$ vardır: Her $N = 1, 2, ...$ için*

1) $C_N \subset A$

2) C_N (J.Ö) (yani, ∂C_N sıfır ölçümlü) ve tıkızdır.

3) C_{N+1} kümesinin iç noktaları C^{o}_{N+1} ile gösterilmek üzere, $C_N \subset C^{o}_{N+1}$

4) $A = \bigcup\limits_{N=1}^{\infty} C_N$

Kanıt. $E = \mathbb{R}^n - A$ olsun. $\overline{0} = (0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$ noktasını göstermek üzere, her N pozitif tamsayısı için

$$F_N = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : d(x, E) \geq \frac{1}{N} \text{ ve } d(x, \{\overline{0}\}) \leq N \right\}$$

olarak tanımlansın.

Sav: $F_N \subset \mathbb{R}^n$ tıkızdır.

Gerçekten de;

Gözlem 1: F_N kapalı bir kümedir.

$$A_N = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : d(x, E) \geq \frac{1}{N} \right\} \quad \text{ve} \quad A'_N = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : d(x, \{\overline{0}\}) \leq N \right\}$$

olarak tanımlansın. $F_N = A_N \cap A'_N$ olacağı açıktır. Şimdi

$$d_E : \mathbb{R}^n \to [0, \infty) \qquad \text{ve} \qquad d_{\{\overline{0}\}} : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$$

fonksiyonları için $d_E(A_N) = [\frac{1}{N}, \infty)$ ve $d_{\{\overline{0}\}}(A'_N) = [0, N]$ olacaktır. Böylece $d_E(A_N) \cap d_{\{\overline{0}\}}(A'_N) = [\frac{1}{N}, N] \subset \mathbb{R}$ kapalı bir alt küme olur. d_E ve $d_{\{\overline{0}\}}$ fonksiyonların her ikisi de sürekli olduklarından,

$$d_E^{-1}\left([\frac{1}{N}, N] \right) \subset \mathbb{R}^n \quad \text{ve} \quad d_{\{\overline{0}\}}^{-1}\left([\frac{1}{N}, N] \right) \subset \mathbb{R}^n$$

kümelerinin her ikiside kapalı olacaktır. Böylece,

$$\left[d_E^{-1}\left([\frac{1}{N}, N] \right) \right] \bigcap \left[d_{\{\overline{0}\}}^{-1}\left([\frac{1}{N}, N] \right) \right] = F_N$$

olacağından F_N kapalı bir küme olur.

Gözlem 2: F_N sınırlı bir kümedir.

Gerçekten de, $F_N \subset B_N(\overline{0}) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : d(x, \left\{\overline{0}\right\}) \leq N\right\}$ kapsamından istenen sonuç elde edilir.

Gözlem(1) ve Gözlem(2) den F_N nin tıkız olduğu görülür. Bu da savın kanıtını tamamlar.

Şimdi şu gözlemlerde bulunalım:

Gözlem 3: Her $N = 1, 2, ..$ için $F_N \subset A$ dır. Gerçekten de; $x \in F_N$ ise $d(x, E) \geq \dfrac{1}{N}$, olacağından, $x \notin E$ ve dolayısıyla $x \in A$ olur. Böylece $F_N \subset A$ elde edilir.

Gözlem 4: $A \subset \overset{\infty}{\underset{N=1}{\cup}} F_N$ olur. Gerçekten de; $x \in A$ için bir $N_1 > 0$ doğal sayısı vardır öyle ki, $d(x, \left\{\overline{0}\right\}) = d_{\left\{\overline{0}\right\}}(x) < N_1$ olur. Öte yandan $d(x, E) > 0$ olduğundan, bir $N_2 > 0$ doğal sayısı vardır öyle ki, $d(x, E) > \dfrac{1}{N_2}$ olur. $N_0 = \max\left\{N_1, N_2\right\}$ için görülür ki, $d(x, E) > \dfrac{1}{N_0}$ ve $d(x, \left\{\overline{0}\right\}) < N_0$ olur. Böylece $x \in F_{N_0} \subset \overset{\infty}{\underset{N=1}{\cup}} F_N$ elde edilir.

Gözlem(3) ve Gözlem(4) den $A = \overset{\infty}{\underset{N=1}{\cup}} F_N$ elde edilir.

Gözlem 5: Her $N = 1, 2, ...$ için $F_N \subset F_{N+1}^o$ olur.

Bunun için,

$$M_{N+1} = \left\{x \in \mathbb{R}^n : d(x, E) > \frac{1}{N+1} \text{ ve } d(x, \overline{0}) < N + 1\right\}$$

kümesini ele alalım. Kolayca görülür ki, $F_N \subset M_{N+1}$ olur. Ayrıca d_E ve $d_{\left\{\overline{0}\right\}}$ fonksiyonları sürekli olduğundan

$$M_{N+1} = d_E^{-1}\left(\left(\frac{1}{N+1}, \infty\right)\right) \bigcap d_{\left\{\overline{0}\right\}}^{-1}\left((0, N+1)\right)$$

açık bir kümedir. $M_{N+1} \subset F_{N+1}$ ve M_{N+1} açık küme olduğundan $F_N \subset M_{N+1} \subset F_{N+1}^o$ elde edilir.

F_N kümeleri tam olarak aradığımız kümeler değildir. Çünkü F_N lerin sınır noktalarının ölçümünün sıfır olmasını garanti edebilicek bir koşul söz konusu değildir. Bununla birlikte F_N kümeleri yardımıyla bu koşulu da sağlayacak kümeler ailesi inşa edilebilir. Bunu yapacağız:

Her $x \in F_N$ için x merkezli ve F_{N+1}^o içerisinde kalan kapalı küp K_x olsun. K_x in iç noktaları kümesi K_x^o olmak üzere, $\{K_x^o : x \in F_N\}$ ailesi, F_N nin bir açık örtüsü olduğu açıktır. F_N tıkız olduğundan bu örtünün sonlu bir alt örtüsü $\left\{K_p^o : p = 1, ..., s\right\}$ vardır ve dolayısıyla, $F_N \subset \bigcup_{p=1}^{s} K_p^o$ olur.

$$C_N = \bigcup_{p=1}^{s} K_p$$

olsun. Böylece $\{C_N : N = 1, 2, ...\}$ önermenin tüm şartlarını sağlar. Gerçekten her N pozitif tamsayısı için

$$F_N \subset C_N^o \subset C_N \subset F_{N+1}$$

kapsamlarından önermenin (1),(3) ve (4).üncü şartları sağlanır. Önermenin (2).inci şartı ise C_N nin kapalı küplerin birleşimi olmasının bir sonucudur. $\square$

Bu önermenin yardımıyla genişletilmiş anlamda integral tanımı için bir başka yol aşağıdaki teoremden elde edilir:

Teorem 5.5 *$A \subset \mathbb{R}^n$ açık bir küme ve $f : A \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. A kümesi için, $\{C_N\}$ kümeler ailesi Önerme(5.4) de yer alan şartları sağlasın. Bu durumda f fonksiyonunun A üzerinde genişletilmiş anlamda integrallenebilmesi için gerek ve yeter koşul*

$$\left\{(b.a) \int_{C_N} |f| : N = 1, 2, ...\right\}$$

dizisinin sınırlı olmasıdır. Bu durumda

$$(g.a) \int_A f = \lim_{N \to \infty} (b.a) \int_{C_N} f$$

olur.

Kanıt.

1.Adım: $f = |f|$ pozitif bir fonksiyon olsun. $(b.a)\int_{C_N} f$ dizisinin artan olması sebebiyle ($C_N \subset C_{N+1}$ kapsamı ve integralin monotonluk özelliğinden.) bu dizinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul bu dizinin üstten sınırlı olmasıdır.

f fonksiyonu, A üzerinde genişletilmiş anlamda integre edilebilir olsun. $F \subset A$, tıkız ve (J.Ö) herhangi bir alt küme olsun. Özel olarak, her N için, C_N de tıkız ve (J.Ö) olduğundan,

$$(b.a)\int_{C_N} f \leq \sup_D \left\{(b.a)\int_D f\right\} = (g.a)\int_A f$$

elde edilir. Bu ise $(b.a)\int_{C_N} f$ dizisinin üstten sınırlı olduğunu ve

$$r : \lim_{N\to\infty}(b.a)\int_{C_N} f \leq (g.a)\int_A f \tag{5.2}$$

olduğunu verir.

Tersine, $\left\{(b.a)\int_{C_N} f\right\}$ dizisi üstten sınırlı olsun. $F \subset A$, tıkız ve (J.Ö) herhangi bir alt küme olsun. Bu durumda $F \subset \bigcup_{N=1}^{\infty} C_N^o$ olur. Öte yandan F tıkız bir küme ve $C_N^o \subset C_{N+1}$, her $N = 1, 2, ...$, olduğundan bir $m \in \mathbb{N}$ için, $F \subset \bigcup_{N=1}^{m} C_N^o$ bulunur. Böylece

$$(b.a)\int_D f \leq (b.a)\int_{C_M} f \leq \lim_{N\to\infty}(b.a)\int_{C_N} f = r$$

elde edilir. Bu eşitsizlik bize, F kümesi, A nın herhangi bir tıkız, (J.Ö) alt kümesi olduğundan, $\left\{(b.a)\int_F f\right\}$ kümesinin üsten sınırlı olduğunu gösterir. Buradan

$$\sup_F \left\{(b.a)\int_F f\right\} = (g.a)\int_A f \leq r \tag{5.3}$$

elde edilir. Ayrıca (5.2) ve (5.3) den,

$$r = \lim_{N\to\infty}(b.a)\int_{C_N} f = (g.a)\int_A f$$

elde edilir.

2.Adım: $f : A \to \mathbb{R}$ herhangi bir sürekli fonksiyon olsun. Tanım gereğince f fonksiyonunun A üzerinde integrallenebilmesi için gerek ve yeter koşul f_+ ve f_-

fonksiyonlarının A üzerinde integrallenebilmesidir. Bunun olabilmesi için, 1.adımdan, gerekli ve yeterli koşul ise $\left\{(b.a)\int_{C_N} f_+ : N = 1, 2, ...\right\}$ ve $\left\{(b.a)\int_{C_N} f_- : N = 1, 2, ...\right\}$ dizilerinin sınırlı olmasıdır. Öte yandan

$$\begin{aligned} |f(x)| &= f_+(x) + f_-(x) \ \text{ için} \\ 0 &\leq f_+(x) \leq |f(x)| \ \text{ ve } \ 0 \leq f_-(x) \leq |f(x)| \end{aligned}$$

eşitlik ve eşitsizlikleri göz önüne alındığında, $\left\{(b.a)\int_{C_N} f_+ : N = 1, 2, ...\right\}$ ve $\left\{(b.a)\int_{C_N} f_+ : N = 1, 2, ...\right\}$ dizilerinin sınırlı olması için gerek yeterli koşulun $\left\{(b.a)\int_{C_N} |f| : N = 1, 2, ...\right\}$ dizisinin sınırlı olması olduğu görülür. Bu dizinin sınırlı olması koşulu altında, $\left\{(b.a)\int_{C_N} f_+\right\}$ ve $\left\{(b.a)\int_{C_N} f_-\right\}$ dizileri sırasıyla $(g.a)\int_A f_+$ ve $(g.a)\int_A f_-$ sayılarına yakınsar. Öte yandan, yakınsak dizilerin terim terim farkı ile elde edilecek olan dizi, limitler farkına yakınsayacağından ve her N için;

$$(b.a)\int_{C_N} f = (b.a)\int_{C_N} f_+ - (b.a)\int_{C_N} f_-$$

eşitliği geçerli olduğundan,

$$(g.a)\int_A f = (g.a)\int_A f_+ - (g.a)\int_A f_-$$

elde edilir. Bu ise $(g.a)\int_A f$ nın tanımıdır. $\square$

Sonuç 5.6 *f fonksiyonunun A üzerinde genişletilmiş anlamda integrallenebilir olması için gerekli ve yeterli koşul $|f|$ fonksiyonunun A üzerinde integrallenebilir olmasıdır.*

Aşağıdaki teoremde genişletilmiş anlamda integralin bazı özellikleri ifade edilip kanıtlanacaktır:

Teorem 5.7 *$A \subset \mathbb{R}^n$ açık bir küme ve $f, g : A \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar olsunlar. Bu durumda:*

1) (Doğrusallık) $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere eğer f ve g fonksiyonları A üzerinde integre edilebilir ise $af + bg$ fonksiyonu A üzerinde integre edilebilirdir ve

$$\int_A (af + bg) = a \int_A f + b \int_A g$$

olur.

2) (Karşılaştırma) f ve g fonksiyonları A üzerinde integre edilebilir ve her $x \in A$ için $f(x) \leq g(x)$ olsun. Bu durumda

$$\int_A f \leq \int_A g$$

olur. Özel olarak,

$$\left| \int_A f \right| \leq \int_A |f|$$

olur.

3) (Monotonluk) $C \subset A$ olmak üzere, A ve C birer açık küme olsun. Eğer f fonksiyonu her $x \in A$ için $f(x) \geq 0$ koşulunu sağlıyor ve f fonksiyonu A üzerinde integre edilebiliyor ise f fonksiyonu C üzerinde integre edilebilirdir ve

$$\int_C f \leq \int_A f$$

olur.

4) (Toplamsallık) $\mathbb{R}^n$ nin A, C açık alt kümeleri için f fonksiyonu $A \cup C$ üzerinde sürekli olsun. Eğer f fonksiyonu A ve B kümeleri üzerinde integre edilebilir ise, f fonksiyonu $A \cup C$ ve $A \cap C$ kümeleri üzerinde de integre edilebilirdir ve

$$\int_{A \cup C} f = \int_A f + \int_C f - \int_{A \cap C} f$$

olur.

Kanıt.

1) A kümesi için $\{C_N\}$, Önerme(5.4) de yer alan şartları sağlayacak şekilde bir kümeler ailesi olsun. (b.a) integralin doğrusallık ve karşılaştırma özelliklerinden

$$(b.a)\int_{C_N}(af+bg)=(b.a)a\int_{C_N}f+(b.a)b\int_{C_N}g$$

eşitliği ve buradan da limit alınarak sonuç elde edilir.

2) Eğer her $x \in A$ için $f(x) \leq g(x)$ ise her N için

$$(b.a)\int_{C_N}f \leq (b.a)\int_{C_N}g$$

eşitsizliği geçerli olduğundan, limit alınarak sonuç elde edilir.

3) Her $x \in A$ için $f(x) \geq 0$ olduğundan, tanım gereği,

$$(g.a)\int_C f=\sup_E\left\{(b.a)\int_E f : E\subset C \text{ tıkız ve (J.Ö)}\right\}$$

olur. Ama C nin her tıkız ve (J.Ö) alt kümesi, A nın da aynı özellikleri taşıyan bir alt kümesi olacağından,

$$(g.a)\int_C f \quad \leq \quad \sup_F\left\{(b.a)\int_F f : F\subset A \text{ tıkız ve (J.Ö)}\right\}:=(g.a)\int_A f$$

elde edilir.

4) C kümesi için $\{G_N\}$, Önerme(5.4) de yer alan şartları sağlayacak şekilde bir kümeler ailesi olsun.

$$E_N=C_N\cup G_N \quad \text{ve} \quad F_N=C_N\cap G_N$$

yazalım.

Sav: $\{E_N\}$ ve $\{F_N\}$ aileleri, sırasıyla $A\cup B$ ve $A\cap B$ kümeleri için Önerme(5.4) de yer alan şartları sağlarlar.

Bunun için sadece, her bir $N=1,2,...$ için $E_N \subset E^o_{N+1}$ ve $F_N \subset F^o_{N+1}$ kapsamlarını göstereceğiz. (Diğer özelliklerin de sağlayacağı kolayca görülür.)

Eğer $x \in E_N$ ise $x \in C_N$ yada $x \in D_N$ olur. $x \in C_N$ ise $C_N \subset C^o_{N+1}$ kapsamından, x in bir U komşuluğu vardır öyle ki, $U \subset C^o_{N+1}$ ve böylece

$$x \in U \subset C^o_{N+1} \subset E^o_{N+1}$$

elde edilir. Benzer tartışma ile, eğer $x \in D_N$ ise $x \in E^o_{N+1}$ olacağı görülür.

Eğer $x \in F_N$ ise, x in bir U komşuluğu vardır öyle ki, $U \subset C^o_{N+1}$ ve x in bir V komşuluğu vardır öyle ki, $V \subset D^o_{N+1}$ dir. Öte yandan, x in $U \cap V$ komşuluğu F_{N+1} içerisindedir ve böylece $x \in F^o_{N+1}$ olur. Böylece savın kanıtı tamamlanır.

Öte yandan bilinen integralin Önerme(3.19) (6) da yer alan özelliğinden:

$$(b.a)\int_{E_N}|f| = (b.a)\int_{C_N}|f| + (b.a)\int_{D_N}|f| - (b.a)\int_{F_N}|f| \tag{5.4}$$

eşitliği elde edilir. Bu ise $\left\{(b.a)\int_{E_N}|f|\right\}$ ve $\left\{(b.a)\int_{F_N}|f|\right\}$ dizilerinin üstten

$$(g.a)\int_A |f| + (g.a)\int_B |f|$$

ile sınırlı olduğunu verir. Böylece Teorem(5.5) den, f fonksiyonu, $A \cup B$ ve $A \cap B$ kümeleri üzerinde integrallenebilirdir. İntegrallerin değerleri için, (5.4) eşitliğinde limit almak yeterlidir. $\square$

Aşağıdaki teorem ile bilinen integral ile genişletilmiş anlamda integral arasındaki bir ilişki ortaya koyulacaktır:

Teorem 5.8 *$A \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı ve açık bir alt küme olsun. $f : A \to \mathbb{R}$ sınırlı sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda*

i) A üstünde f, $(g.a)$ integrallenebilirdir, yani $(g.a)\int_A f$ vardır.

ii) Eğer A üstünde f, $(b.a)$ integrallenebilir ise, o zaman

$$(b.a)\int_A f = (g.a)\int_A f$$

olur.

Kanıt. A yı içeren herhangi bir kapalı dikdörtgen D olsun.

i) Her $x \in A$ için $|f(x)| \leq M$ olacak şekilde $M \in \mathbb{R}$ sayısını seçelim. A kümesinin herhangi bir tıkız Jordan ölçülebilir alt kümesi K olsun. Bu durumda

$$(b.a)\int_K |f| \leq (b.a)\int_K M \leq Mv(D)$$

eşitsizliği geçerlidir. Böylece, K keyfi seçildiğinden,

$$\left\{(b.a)\int_K f : K \text{ tıkız ve (J.Ö)}\right\}$$

kümesi sınırlıdır. Dolayısıyla, Teorem(5.5) gereği, f fonksiyonu A üzerinde (g.a) integrallenebilir.

ii) f fonksiyonunun negatif olmadığı durumu göz önüne alalım. Varsayalım ki, f fonksiyonunun, A üzerinden (b.a) integrali mevcut olsun. Yani, A yı kapsayan herhangi bir kapalı D dörtgeni için, $f^* : D \to \mathbb{R}$

$$(f^*)(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x \in A \\ 0 & , \quad x \in D - A \end{cases}$$

olmak üzere,

$$(b.a)\int_A f := (b.a)\int_D f^*$$

var olsun. Öte yandan, A nın herhangi bir tıkız (J.Ö) alt kümesi K için, $f_{|K} = (f^*)_{|K}$ olduğundan,

$$\begin{aligned} (b.a)\int_K f &= (b.a)\int_K (f^*) \\ &\leq (b.a)\int_D (f^*) \quad ((b.a) \text{ nın monotonluk özelliğinden}) \\ &= (b.a.)\int_A f \end{aligned}$$

Böylece, K kümesi, A nın herhangi bir tıkız Jordan ölçülebilir alt küme olduğundan

$$(g.a.)\int_A f \leq (b.a.)\int_A f$$

bulunur.

Buradan, tanım gereğince,

$$(g.a.)\int_A f = \sup_K \left\{ (b.a)\int_K f : K \subset A, \text{ tıkız ve (J.Ö)} \right\} \leq (b.a.)\int_A f \tag{5.5}$$

elde edilir.

Ayrıca, D kapalı dörtgeninin herhangi bir parçalanışı P ve $R \in P$ olsun. P parçalanışının belirlediği ve A içerisinde kalan alt dörtgenler $R_1, ..., R_s$ olsun. $L = R_1 \cup ... \cup R_s$ diyelim. L nin tıkız, (J.Ö) ve $L \subset A$ olduğu açıktır. Bu durumda, eğer $R \subset A$ ise $m_R((f^*)) = m_R(f)$ ve $R \nsubseteq A$ ise $m_R((f^*)) = 0$ olur. O zaman,

$$L((f^*), P) = \sum_{i=1}^{s} m_{R_i}(f^*)v(R_i) = \sum_{i=1}^{s} m_{R_i}(f)v(R_i) \tag{5.6}$$

elde edilir. Ama

$$m_{R_i}(f)v(R_i) \leq (b.a)\int_{R_i} f$$

olduğundan ve (5.6) dan,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{s} m_{R_i}(f)v(R_i) &\leq \sum_{i=1}^{s} (b.a)\int_{R_i} f \\
&= (b.a)\int_L f \qquad \text{(toplamsallık özelliğinden)} \\
&\leq \sup_K \left\{ (b.a)\int_K f : K \subset A, \text{ tıkız ve (J.Ö)} \right\} \\
&\leq (g.a)\int_A f \quad \text{(tanımdan)}
\end{aligned}$$

P herhangi bir parçalanış olduğundan

$$(b.a)\int_A f \leq (g.a)\int_A f \tag{5.7}$$

elde edilir. Böylece (5.5) ve (5.7) den

$$(b.a)\int_A f = (g.a)\int_A f \tag{5.8}$$

elde edilir.

Şimdi genel durumu göz önüne alalım: $f = f_+ - f_-$ olarak yazalım. f fonksiyonu A üzerinde bilinen anlamda integrallenebilir olduğundan

$$\begin{aligned}
(b.a)\int_A f &= (b.a)\int_A f_+ - (b.a)\int_A f_- \quad \text{(integralin doğrusallık özelliğinden)} \\
&= (g.a)\int_A f_+ - (g.a)\int_A f_- \quad \text{((5.8) den)} \\
&= (g.a)\int_A f \quad \text{(tanımdan)}
\end{aligned}$$

□

Sonuç 5.9 *$S \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bir küme olsun. $f : S \to \mathbb{R}$ sınırlı sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu S üzerinde (b.a) integre edilebilir ise,*

$$(b.a.)\int_S f = (g.a.)\int_{S^o} f$$

dir. Burada S^o ile, S kümesinin iç noktaları kümesi gösterilmektedir.

Kanıt.

$$(b.a.)\int_S f = (b.a.)\int_{S^o} f$$

eşitliği, Teorem(3.24) elde edilir. Öte yandan, Teorem(5.8) den,

$$(b.a)\int_S f = (g.a)\int_S f$$

eşitliği vardır. Böylece

$$(b.a.)\int_S f = (g.a.)\int_{S^o} f$$

elde edilir. □

Teorem 5.10 *$\mathbb{R}^n$ nin sınırlı açık bir alt kümesi A olsun. $f : A \to \mathbb{R}$ sürekli (ama sınırlı olmak zorunda değil) bir fonksiyon olsun. $\mathcal{U} = \{U_i \subset A : U_i \text{ açık}, i \in \mathbb{N}\}$ ailesi de $U_i \subset U_{i+1}$, $i \in \mathbb{N}$ koşulunu sağlayan , A nın bir açık örtüsü olsun.*

Bu durumda $(g.a.)\int_A f$ var olması için gerekli ve yeterli koşul $(g.a)\int_{U_i} |f|$ integrallerinin var olması ve $\left\{(g.a)\int_{U_i} |f|\right\}$ dizinin sınırlı olmasıdır. O zaman,

$$(g.a.)\int_A f = \lim_{N\to\infty} (g.a)\int_{U_N} f$$

olur.

Kanıt. $(g.a.)\int_A f = (g.a.)\int_A f_+ - (g.a.)\int_A f_-$, ve f_+ , f_- ler negatif olmayan fonksiyonlar olduklarından, f fonksiyonunun negatif olmadığı durum için kanıtı yapmak yeterli olacaktır. Önce kabul edelim ki, $(g.a.)\int_A f$ var olsun. Genişletilmiş anlamda integralin monotonluk özelliği, f fonksiyonunun U_N üzerinden integrallenebildiğini ve her bir N için,

$$(g.a.)\int_{U_N} f \leq (g.a.)\int_A f$$

olduğunu verir. Böylece $\left\{(g.a.)\int_{U_N} f\right\}$ dizisi artan ve üstten sınırlı olduğundan yakınsaktır. Böylece,

$$\lim_{N\to\infty}(g.a.)\int_{U_N} f \leq (g.a.)\int_A f \tag{5.9}$$

elde edilir.

Tersine, her bir N için, $(g.a.)\int_{U_N} f$ integralleri var ve $\left\{(g.a.)\int_{U_N} f\right\}$ dizisi sınırlı olsun. F kümesi A nın tıkız ve (J.Ö) herhangi bir alt kümesi olsun. $F \subset A$ olduğundan $U_1 \subset U_2 \subset ...$ özelliğindeki,

$$\mathcal{U} = \{U_i \subset A : U_i \text{ açık},\ i \in \mathbb{N}\}$$

ailesi, F nin bir açık örtüsüdür. F tıkız olduğundan bu örtünün sonlu tanesi ile F örtülür. Böylece yeteri kadar büyük bir M indeksi için $F \subset U_M$ elde edilir. Öte yandan,

$$(b.a)\int_F f \leq (g.a.)\int_{U_M} f \leq \lim_{N\to\infty}(g.a.)\int_{U_N} f$$

olur. F kümesi, A nın herhangi bir tıkız (J.Ö) alt kümesi olduğundan,

$$(g.a.)\int_A f \leq \lim_{N\to\infty}(g.a.)\int_{U_N} f \tag{5.10}$$

elde edilir. (5.9) ve (5.10) dan

$$\lim_{N\to\infty}(g.a.)\int_{U_N} f = (g.a.)\int_A f$$

olur. □

6 BİRİMİN PARÇALANIŞI

Bu bölümde; birimin parçalanışını tanımlayıp, varlığı ile ilgili bir teoremi kanıtladıktan sonra, integrallenebilmeyle ((g.a) ve (b.a) integrallenebilme) ilişkisini ortaya koyacağız. İlkin birimin parçalanışı için gerekli bir tanım, birkaç önerme ve sonuç ifade edilecektir.

Tanım 6.1 *$U \subset \mathbb{R}^n$, açık bir alt küme, $f : U \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu, U üzerinde sürekli ise f fonksiyonuna C^0* ***sınıfındandır*** *denir ve $f \in C^0(U)$ yazılır. $k > 0$ bir doğal sayı olsun. Eğer f nin k ıncı mertebeden bütün kısmi türevleri var ve sürekli ise, f fonksiyonuna C^k* ***sınıfındandır*** *denir ve $f \in C^k(U)$ yazılır. Eğer her $k \geq 0$ doğal sayısı için, $f \in C^k(U)$ ise, f fonksiyonu C^∞* ***sınıfındandır*** *denir ve $f \in C^\infty(U)$ yazılır. Eğer $f \in C^\infty(U)$ ise f fonksiyonuna U* ***üzerinde düzgündür*** *denir.*

Kolayca görülür ki,

$$C^\infty(U) \subset ... \subset C^k(U) \subset ... \subset C^1(U) \subset C^0(U)$$

olur.

Önerme 6.2 *$U \subset \mathbb{R}^n$, açık bir alt küme, $f, g : U \to \mathbb{R}$ fonksiyonlar olsun. $f(U) \subset V \subset \mathbb{R}$, olacak şekilde açık bir alt küme V ve $h : V \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda:*

1) $f, g \in C^\infty(U)$ ise $(f \mp g)$, $(f.g) \in C^\infty(U)$

2) $f \in C^\infty(U)$ ve $h \in C^\infty(V)$ ise $(h \circ f) \in C^\infty(U)$

3) Eğer f sabit fonksiyon ise $f \in C^\infty(U)$ olur.

Önerme 6.3 *$k \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu*

$$b(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^k}}, & x \neq 0 \\ 0 \quad , & x = 0 \end{cases}$$

olarak verilsin. O zaman, $b \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ *ve* $\forall n \in \mathbb{N}$ *için,* b *nin* n*. türevi* $b^{(n)}$ *olmak üzere,* $b^{(n)}(0) = 0$ *olur. (* $n = 0$ *durumunda,* b *nin sıfırıncı türevi, her* $x \in \mathbb{R}$ *için,* $b^{(0)}(x) := b(x)$ *olarak verilir.)*

Kanıt. $x \neq 0$ için

$$\begin{aligned} b'(x) &= +\frac{k}{x^{k+1}} b(x) \\ b''(x) &= \left(-\frac{k(k+1)}{x^{k+2}} - \frac{k^2}{x^{2(k+1)}} \right) b(x) \\ &\vdots \\ b^{(n)}(x) &= P_n(\frac{1}{x}) b(x), \quad P_n(\frac{1}{x}) \text{ bir polinom} \end{aligned}$$

Gözlem: $A = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^N} e^{-\frac{1}{x^k}} = 0, \quad \forall N, \, k \in \mathbb{N}$ olur.

Gerçekten de, $x = \dfrac{1}{s}$ için:

$$\begin{aligned} A &= \lim_{s \to \infty} s^N e^{-s^k} \\ &= \lim_{s \to \infty} \frac{s^N}{e^{s^k}} = \frac{\infty}{\infty} \\ &= \lim_{s \to \infty} \frac{N s^{N-1}}{k s^{k-1} e^{s^k}} \\ &= \lim_{s \to \infty} \frac{N}{k} \frac{s^{N-k}}{e^{s^k}} \\ &= \lim_{s \to \infty} \frac{N(N-k)}{k^2} \frac{s^{N-2k}}{e^{s^k}} \\ &= \lim_{s \to \infty} \frac{N(N-k)(N-2k)}{k^3} \frac{s^{N-3k}}{e^{s^k}} \\ &\vdots \\ &= \lim_{s \to \infty} \frac{N(N-k)...(N-(r-1)k)}{k^r} \frac{s^{N-rk}}{e^{s^k}} \end{aligned}$$

$r \in \mathbb{N}$ ve $N - rk < 0$ olacak şekilde r seçildiğinde, görülür ki:

$$A = \lim_{s \to \infty} \frac{s^N}{e^{s^k}} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^N} e^{-\frac{1}{x^k}} = 0 \ ; \quad \text{her } k, N \in \mathbb{N}$$

sağlanır.

$n = 1$ için, Gözlem gereği:

$$\begin{aligned} b^{(1)}(0) &= b'(0) \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{b(x) - b(0)}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} b(x) = 0. \end{aligned}$$

Şimdi $n = t$ için $b^{(t)}(0) = 0$ kabul edelim ve $b^{(t+1)}(0)$ ı bulalım:

$$\begin{aligned} b^{(t+1)}(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{b^{(t)}(x) - b^{(t)}(0)}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} P_t(\frac{1}{x}) e^{-\frac{1}{x^k}} \\ &= \lim_{x\to 0} \sum_{N=1}^{m} a_N \frac{1}{x^N} e^{-\frac{1}{x^k}}, \quad a_N \in \mathbb{R} \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Tümevarım yöntemi gereği, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $b^n(0) = 0$ olur. $\square$

Sonuç 6.4 *$a \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $b_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu*

$$b_1(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{(x-a)^k}}, & x \neq a \\ 0 \quad , & x = a \end{cases}$$

olarak verilsin. Bu durumda, $b_1 \in C^\infty(\mathbb{R})$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için, $b_1^{(n)}(a) = 0$ olur.

Kanıt. $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ her $x \in \mathbb{R}$ için $s(x) = s = x - a$ ve b, Önerme(6.3) deki fonksiyon olmak üzere,

$$b_1(x) = (b \circ s)(x) = b(s) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{s^k}}, & s \neq 0 \\ 0 \quad , & s = 0 \end{cases}$$

olduğundan, sonuca kolayca ulaşılır. $\square$

Sonuç 6.5 *Her $a \in \mathbb{R}$ için $b_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu*

$$b_2(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{(x-a)^k}}, & x > a \\ 0 \quad , & x \leq a \end{cases}$$

olarak verilsin. Bu durumda, $b_2 \in C^\infty(\mathbb{R})$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için, $b_2^{(n)}(a) = 0$ olur.

Sonuç 6.6 *Her* $a \in \mathbb{R}$ *için* $b_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu*

$$b_3(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{a^k - x^k}}, & x \neq a \\ 0 \quad , & x = a \end{cases}$$

olarak verilsin. Bu durumda, $b_3 \in C^\infty(\mathbb{R})$ *ve* $\forall n \in \mathbb{N}$ *için,* $b_3^{(n)}(a) = 0$ *olur.*

Kanıt. $t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ her $x \in \mathbb{R}$ için, $t(x) = t = a^k - x^k$ ve b_1, Sonuç(6.4) deki fonksiyon olmak üzere,

$$b_3(x) = (b_1 \circ t)(x) = b_1(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}}, & t \neq 0 \\ 0 \quad , & t = 0 \end{cases}$$

olduğundan, sonuca ulaşılır. $\square$

Sonuç 6.7 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu*

$$h(x) = \begin{cases} \left(e^{-\frac{1}{(x-1)^2}}\right)\left(e^{-\frac{1}{(x+1)^2}}\right) & , \; x \in (-1,1) \\ 0 & , \; x \notin (-1,1) \end{cases}$$

olarak verilsin. Bu durumda, h *fonksiyonu,* $\mathbb{R}$ *üzerinde düzgündür, yani* $h \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Kanıt. Bunun için önce:

Sav 1: $x > -1$ için h düzgündür.

Gerçekten:

$h_1 : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$

$$h_1(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{(x-1)^2}}, & -1 < x < 1 \\ 0 \quad , & x \geq 1 \end{cases}$$

$h_2 : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$

$$h_2(x) = e^{-\frac{1}{(x+1)^2}}$$

olmak üzere $x > -1$ için $h(x) = h_1(x).h_2(x)$ olur. Böylece h nin düzgün olduğunu görmek için, iki düzgün fonksiyonun çarpımı düzgün olacağından, h_1 ve h_2 fonksiyonlarının düzgün olduğunun gösterilmesi yeterli olacaktır: h_1 in düzgün oluşu Sonuç(6.5) den görülür. h_2 nin düzgün oluşu açıktır. Böylece h fonksiyonu $x > -1$ için düzgün olur. Böylece Sav(1) in kanıtı tamamlanır.

Benzer şekilde:

Sav 2: $x < 1$ için h düzgündür.

$$g_1 : (-\infty, 1) \to \mathbb{R} \qquad\qquad g_2 : (-\infty, 1) \to \mathbb{R}$$

$$g_1(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{(x+1)^2}}, & -1 < x < 1 \\ 0 \quad , & x \leq -1 \end{cases} \qquad\qquad g_2(x) = e^{-\frac{1}{(x-1)^2}}$$

olmak üzere, $x < 1$ için, $h(x) = g_1(x).g_2(x)$ olur. Yukarıdaki tartışmanın benzeri bir tartışma ile sonuç elde edilir.

Böylece Sav(1) ve Sav(2) den, h fonksiyonun $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün olduğu görülür. $\square$

Teorem 6.8 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *sürekli bir fonksiyon olmak üzere,* $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu*

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

olarak verilsin. Bu durumda, F *fonksiyonu* $[a, b]$ *aralığında türevlenebilirdir ve* $\forall x \in [a, b]$ *için,* $F^{(1)}(x) = F'(x) = f(x)$ *olur. Burada* $x = a$ *noktasındaki türev*

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F(a+h) - F(a)}{h} = f(a)$$

olarak verilen sağdan türevdir. Benzer şekilde $x = b$ *noktasındaki türev*

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{F(b+h) - F(b)}{h} = f(b)$$

olarak verilen soldan türevdir.

Sonuç 6.9 $h_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu*

$$h_\varepsilon(x) = \begin{cases} \left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)\left(e^{-\frac{1}{(x-\varepsilon)^2}}\right) & , \quad x \in (0, \varepsilon) \\ 0 & , \quad x \in ((-\infty, 0] \cup [\varepsilon, \infty)) \end{cases}$$

olmak üzere, $g : \mathbb{R} \to [0, 1]$

$$g(x) = \frac{\int_0^x h_\varepsilon}{\int_0^\varepsilon h_\varepsilon}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda, $x \leq 0$ *için* $g(x) = 0$, $x \geq \varepsilon$ *için* $g(x) = 1$ *ve* $x \in (0, \varepsilon)$ *için* $0 < g(x) < 1$ *olur. Ayrıca* g *fonksiyonu* $\mathbb{R}$ *üzerinde düzgündür.*

Kanıt.

i) İlkin, g nin değerleri ile ilgili savlarımız gösterilecektir:

$x \leq 0$ için $h_\varepsilon(x) = 0$ olduğundan, $\int_0^x h_\varepsilon = 0$ ve böylece $g(x) = 0$ olur. $x \geq \varepsilon$ için $h_\varepsilon(x) = 0$ olduğundan, $\int_0^x h_\varepsilon = \int_0^\varepsilon h_\varepsilon$ ve böylece $g(x) = 1$ elde edilir. $0 < x < \varepsilon$ için $0 < \int_0^x h_\varepsilon < \int_0^\varepsilon h_\varepsilon$ olduğundan, $0 < g(x) < 1$ olur.

ii) $z = \dfrac{1}{\int_0^\varepsilon h_\varepsilon}$ sabit bir sayı, $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ her $x \in \mathbb{R}$ için

$$r(x) = zh_\varepsilon(x)$$

olsun. h_ε düzgün olduğundan, r düzgündür.

Şimdi, $x \in (\mathbb{R} - (0, \varepsilon))$ için g sabit fonksiyon olduğundan düzgündür. $x \in (0, \varepsilon)$ ise r düzgün ve

$$g(x) = \int_0^x r(t)dt$$

olduğundan, Teorem(6.8) gereğince,

$$g^{(1)}(x) = g'(x) = r(x)$$

olur. Buradan $k > 1$ için

$$g^{(k)}(x) = r^{(k-1)}(x)$$

ocağından her $x \in (0, \varepsilon)$ için g düzgün olur. Şimdi $x = 0$ için g nin düzgünlüğünü gösterelim:

İlkin $x = 0$ noktsında g nin sürekli olduğunu gösterelim:

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{h \to 0} g(0+h) = \lim_{h \to 0} \int_0^{0+h} r(t)dt = \lim_{h \to 0} \left[\int_0^0 r(t)dt + \int_0^h r(t)dt \right] = 0 = g(0)$$

elde edilir. Şimdi Teorem(6.8) den

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = r(0) = 0 \tag{6.1}$$

olur. Öte yandan

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{0 - 0}{h} = 0 = r(0) \tag{6.2}$$

olur. (6.1) ve (6.2) den

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=r(0)=0$$

elde edilir. Bu ise g nin $x=0$ da türevlenebildiğini ve türevinin $r(0)=0$ a eşit olduğunu verir. Benzer şekilde $k>1$ için

$$\begin{aligned} g^{(k)}(0) &= \lim_{h\to 0}\frac{g^{(k-1)}(0+h)-g^{(k-1)}(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{r^{(k-2)}(0+h)-r^{(k-2)}(0)}{h} \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Böylece g fonksiyonu $x=0$ noktasında düzgündür. Benzer şekilde $x=\varepsilon$ için g nin düzgünlüğü görülebilir. Buradan g fonksiyonu, $\mathbb{R}$ üzerinde düzgündür. $\square$

Sonuç 6.10 *$a=(a_1,...,a_n)\in\mathbb{R}^n$ olmak üzere, $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlansın:*

$h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu

$$h(x)=\begin{cases}\left(e^{-\frac{1}{(x-1)^2}}\right)\left(e^{-\frac{1}{(x+1)^2}}\right) & , \quad x\in(-1,1)\\ 0 & , \quad x\in((-\infty,-1]\cup[1,\infty))\end{cases}$$

olmak üzere,

$$f(x)=h\left(\frac{(x_1-a_1)}{\varepsilon}\right).....h\left(\frac{(x_n-a_n)}{\varepsilon}\right), \qquad x=(x_1,..,x_n)\in\mathbb{R}^n$$

f fonksiyonu $(a_1-\varepsilon,\, a_1+\varepsilon)\times...\times(a_n-\varepsilon,\, a_n+\varepsilon)$ üzerinde pozitif diğer yerlerde sıfır değerlerini alır ve $\mathbb{R}^n$ üzerinde de düzgündür.

Kanıt. $1\le i\le n$ ve $x=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$ olmak üzere; $\pi_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, her $x\in\mathbb{R}^n$ için $\pi_i(x)=x_i$ olarak ve $\alpha_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, her $p\in\mathbb{R}$ için $\alpha_i(p)=\dfrac{p-a_i}{\varepsilon}$ olarak tanımlansın. Bu durumda,

$$f(x)=(h\circ\alpha_1\circ\pi_1)(x).....(h\circ\alpha_n\circ\pi_n)(x)=\prod_{i=1}^{n}(h\circ\alpha_i\circ\pi_i)(x)$$

olur. h ve α_i, π_i ($i = 1, ..., n$) fonksiyonları düzgün olduğundan, f nin düzgün olduğu sonucu elde edilir.

Şimdi, eğer $x \in (a_1 - \varepsilon,\ a_1 + \varepsilon) \times ... \times (a_n - \varepsilon,\ a_n + \varepsilon)$ ise, $1 \leq i \leq n$ olmak üzere, her i için $\dfrac{(x_i - a_i)}{\varepsilon} \in (-1, 1)$ olur. Buradan, h nin tanımı gereğince, $h\left(\frac{(x_i - a_i)}{\varepsilon}\right) > 0$ olduğundan, $f(x) > 0$ elde edilir. Eğer $x \notin (a_1 - \varepsilon,\ a_1 + \varepsilon) \times ... \times (a_n - \varepsilon,\ a_n + \varepsilon)$ ise, en az bir $i_0 \in \{1, 2, ..., n\}$ için $\dfrac{(x_{i_0} - a_{i_0})}{\varepsilon} \notin (-1, 1)$ olur. Buradan $h\left(\frac{(x_{i_0} - a_{i_0})}{\varepsilon}\right) = 0$ elde edilir. O zaman, $f(x) = 0$ olur. $\square$

Önerme 6.11 *$A \subset \mathbb{R}^n$ açık bir küme ve $C \subset A$ tıkız olsun. Bu durumda, aşağıdaki şartları sağlayan bir $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır:*

i) $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$

ii) $C \subset K \subset A$ koşulunu sağlayan tıkız bir K kümesi bulunabilir öyle ki, her $x \in C$ için $f(x) > 0$ ve her $x \in \mathbb{R}^n - K$ için $f(x) = 0$ olur.

Kanıt. $a = (a_1, ..., a_n) \in C$ ve

$$r = \min\{1, \quad \sup\{\varepsilon \in \mathbb{R}|\ B(a, \varepsilon) \subset A; \varepsilon > 0\}\}$$

olmak üzere,

$$D_a = \overline{B(a, \frac{r}{4})} = \left[a_1 - \frac{r}{4},\ a_1 + \frac{r}{4}\right] \times ... \times \left[a_n - \frac{r}{4},\ a_n + \frac{r}{4}\right]$$

olarak tanımlansın. D_a nın iç noktaları kümesi D_a^o olmak üzere,

$$\{D_a^o : a \in C\}$$

ailesi C nin bir açık örtüsüdür. C tıkız olduğundan, bu örtünün sonlu bir alt ailesi

$$\left\{D_{a^i}^o : i = 1, .., k \text{ ve } a^i = (a_1^i, ..., a_n^i) \in C\right\}$$

C yi örter. Şimdi $i = 1,..,k$ için $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$h(x) = \begin{cases} \left(e^{-\frac{1}{(x-1)^2}}\right)\left(e^{-\frac{1}{(x+1)^2}}\right) & , \quad x \in (-1,1) \\ 0 & , \quad x \notin (-1,1) \end{cases}$$

olmak üzere,

$$f_i(x) = h\left(\frac{2\left(x_1 - a_1^i\right)}{r}\right).....h\left(\frac{2\left(x_n - a_n^i\right)}{r}\right), \qquad x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$$

olarak tanımlansın. Görülür ki, (Sonuç(6.10) gereği) f_i fonksiyonu, D_{a^i} tıkız kümesi üzerinde pozitif ve $K_{a^i} = \overline{B(a^i, \frac{r}{2})} \subset A$ tıkız kümesi dışında sıfır olan düzgün bir fonksiyondur. $W = \bigcup_{i=1}^k D_{a^i}$ ve $K = \bigcup_{i=1}^k K_{a^i}$ olmak üzere, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} f_i(x)$$

olarak tanımlayalım.

Sav: f fonksiyonu A üzerinde düzgündür. Ayrıca, $\forall x \in C$ için $f(x) > 0$ ve $\forall x \in A - K$ için $f(x) = 0$ olur.

Gerçekten:

i) f nin düzgünlüğü, f_i lerin düzgünlüğüne bağlıdır. Çünkü düzgün fonksiyonların toplamı düzgündür. f_i lerin düzgünlüğü ise Sonuç(6.10) da yapılan tartışmadan görülür.

ii) Öte yandan, $x = (x_1, ..., x_n) \in C$ ise en az bir i_0 için $x \in D_{a^{i_0}}$ ve $f_{i_0}(x) > 0$ olacağından, $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{k} f_i(x) > 0$ elde edilir. Eğer $x \in A - K$ ise $x \notin K$, yani $1 \leq i \leq k$ olmak üzere, her i için, $x \notin K_{a^i}$, böylece $f_i(x) = 0$ olacağından, $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{k} f_i(x) = 0$ elde edilir. □

Önerme 6.12 *$A \subset \mathbb{R}^n$ açık bir küme ve $C \subset A$ tıkız olsun. Bu durumda, $\alpha : \mathbb{R}^n \to [0,1] \subset \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlayacak şekilde vardır:*

i) $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

ii) Her $x \in C$ için $\alpha(x) = 1$ ve $C \subset K \subset A$ olacak şekilde tıkız K kümesi vardır öyle ki, $\forall x \in \mathbb{R}^n - K$ için $\alpha(x) = 0$ olur.

Kanıt. $a = (a_1, ..., a_n) \in C$ ve

$$r = \min\{1, \quad \sup\{\varepsilon \in \mathbb{R} | \ B(a, \varepsilon) \subset A; \varepsilon > 0\}\}$$

olmak üzere,

$$D_a = \left[a_1 - \frac{r}{4}, \ a_1 + \frac{r}{4}\right] \times ... \times \left[a_n - \frac{r}{4}, \ a_n + \frac{r}{4}\right]$$

olarak tanımlansın. D_a nın iç noktaları kümesi D_a^o olmak üzere,

$$\{D_a^o : a \in C\}$$

ailesi C nin bir açık örtüsüdür. C tıkız olduğundan, bu örtünün

$$\left\{D_{a^i}^o : i = 1, .., k \text{ ve } a^i = (a_1^i, ..., a_n^i) \in C\right\}$$

sonlu alt ailesi, C yi örter. Şimdi $i = 1, .., k$ için $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$h(x) = \begin{cases} \left(e^{-\frac{1}{(x-1)^2}}\right)\left(e^{-\frac{1}{(x+1)^2}}\right) & , \ x \in (-1, 1) \\ 0 & , \ x \notin (-1, 1) \end{cases}$$

olmak üzere,

$$p_i(x) = h\left(\frac{3\left(x_1 - a_1^i\right)}{r}\right).....h\left(\frac{3\left(x_n - a_n^i\right)}{r}\right) \qquad x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$$

olarak tanımlansın. p_i fonksiyonu D_{a^i} tıkız kümesi üzerinde pozitif, $K_{a^i} = \overline{B(a^i, \frac{r}{3})} \subset A$ tıkız kümesi dışında sıfır olan düzgün bir fonksiyondur.

$$W = \bigcup_{i=1}^k D_{a^i} \quad \text{ve} \quad K = \bigcup_{i=1}^k K_{a^i}$$

olmak üzere, $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu

$$F(x) = \sum_{i=1}^k p_i(x)$$

olsun. F fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ üzerinde düzgündür. $\forall x \in C$ için $F(x) > 0$ ve $\forall x \in \mathbb{R}^n - K$ için $F(x) = 0$ olacağı, Önerme(6.11) den kolayca görülür. Öte yandan, F yardımıyla, aşağıdaki gözlem ışığında, α yı inşa edebiliriz:

Gözlem: F düzgün olduğundan süreklidir. F sürekli olduğundan, $F(W)$ tıkız bir kümedir. $\varepsilon = \inf\limits_{x \in W} \{F(x)\}$ olsun. Yine W tıkız olduğundan bir $y \in W$ vardır öyle ki, $F(y) = \varepsilon$ olur. Buradan $\varepsilon > 0$ elde edilir. Çünkü $\forall x \in W$ için $F(x) > 0$ olur.

Şimdi g Sonuç(6.9) de yer alan fonksiyon olmak üzere $\alpha : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\alpha(x) = (g \circ F)(x) = g(F(x))$$

olarak tanımlansın. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
x &\in C \subset W \text{ için } \quad F(x) \geq \varepsilon \qquad \text{ve} \qquad g(F(x)) = \alpha(x) = 1 \\
x &\in A - K \text{ için } F(x) = 0 \quad \text{ve} \quad g(F(x)) = \alpha(x) = 0 \\
x &\in K \text{ için } F(x) \geq 0 \qquad \text{ve} \qquad g(F(x)) = \alpha(x) \geq 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Öte yandan $\alpha \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ savımız ise, düzgün fonksiyonların bileşkesinin düzgün olacağı gerçeğinin sonucudur. $\square$

Önerme 6.13 *$U \subset \mathbb{R}^n$ açık bir küme ve $C \subset U$ tıkız olsun. Bu durumda, K nın iç noktaları kümesi K^o olmak üzere, $C \subset K^o$ ve $K \subset U$ olacak şekilde tıkız bir K kümesi vardır.*

Kanıt. C nin iç noktaları kümesi C^o olmak üzere, C tıkız olduğundan, $C = \partial C \cup C^o$ olur. ∂C kapalı ve sınırlı olduğundan tıkızdır. $x \in \partial C$ için

$$r = \min\{1, \quad \sup\{\varepsilon \in \mathbb{R} | \ B(a, \varepsilon) \subset A; \varepsilon > 0\}\}$$

olarak tanımlansın. $\left\{B(x, \frac{r}{2}) : x \in \partial C\right\}$ ailesi ∂C nin bir açık örtüsüdür. ∂C tıkız olduğundan bu açık örtünün, $\left\{B(x_i, \frac{r}{2}) : i = 1, ..., k \text{ ve } x_i \in \partial C\right\}$ sonlu alt ailesi, ∂C yi örter. Bu durumda $K = \left(\bigcup_{i=1}^{k} \overline{B(x_i, \frac{r}{2})}\right) \cup C$ olarak tanımlanırsa, K istenen şartları sağlar.

Gerçekten: K nın inşasında kullanılan kümelerin herbiri, U nun alt kümeleri olduğundan, $K \subset U$ olur. K inşasında kullanılan kümelerin herbiri kapalı ve sınırlı olduğundan, K kapalı ve sınırlıdır, yani K tıkızdır. K içerisindeki en geniş açık küme, K nın iç noktaları kümesi K^o dir. Böylece $C \subset K$ olduğundan $C^o \subset K^o$ olur. Öte yandan, $C = \partial C \cup C^o$, $\partial C \subset \left(\bigcup_{i=1}^{k} B(x_i, \frac{r}{2})\right) \subset K^o \subset K$, kapsamalarından, $C \subset K^o$ elde edilir.□ □

Önerme 6.14 *$A \subset \mathbb{R}^n$ tıkız bir alt küme olsun. A nın bir açık bir örtüsü,*

$$\mathcal{F} = \{U_r : r \in \Gamma, \Gamma \text{ indeks kümesi}\}$$

olsun. $\Phi = \{\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \varphi, \text{ düzgün bir fonksiyon}\}$, ailesi aşağıdaki şartları sağlayacak şekilde vardır:

1) $\forall x \in A$ için, $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ eşitsizliği sağlanır.

2) $\forall x \in A$ için, x in açık komşuluğu V_x ve $\Phi_x = \left\{\varphi_x^1, ..., \varphi_x^{t_x}\right\} \subset \Phi$ sonlu ailesi vardır öyle ki,

$$\forall \varphi \notin \Phi_x \quad \text{için} \quad \varphi(v) = 0, \quad v \in V_x$$

olur.

3) $\forall x \in A$ için, $\sum_{\varphi \in \Phi} \varphi(x) = \sum_{i=1}^{t_x} \varphi_x^i(x) = 1$ olur.

4) $\forall \varphi \in \Phi$ için, bir $U_\varphi \in \mathcal{F}$ ve $K_\varphi \subset U_\varphi$ tıkız kümesi bulunabilir öyle ki, her $x \in (\mathbb{R}^n - K_\varphi)$ için $\varphi(x) = 0$ olur.

Kanıt. Aksi belirtilmedikce "^{o}" ile ilgili kümenin iç noktaları gösterilmektedir. Örneğin A^o kümesi, A kümesinin iç noktarı kümesidir.

A tıkız olduğundan A nın

$$\mathcal{F}' = \{V_i \in \mathcal{F} : i = 1, ..., p\} \subset \mathcal{F}$$

sonlu bir alt örtüsü seçilebilir.

Şimdi $W_1 = A - (V_2 \cup V_3 \cup ... \cup V_p)$, olsun. Görülür ki, $W_1 \subset V_1$ ve W_1 tıkız bir kümedir. Böylece, Önerme(6.13) den,

$$W_1 \subset C_1^o \subset C_1 \subset V_1$$

olacak şekilde tıkız bir C_1 kümesi vardır. Benzer şekilde,

$W_2 = A - (C_1^o \cup V_3 \cup ... \cup V_p)$ olsun. $W_2 \subset V_2$ ve W_2 tıkızdır. Yine,

$$W_2 \subset C_2^o \subset C_2 \subset V_2$$

olacak şekilde tıkız C_2 kümesi vardır. Benzer şekilde $2 \leq k \leq (p-1)$ için:

$W_k = A - \left(C_1^o \cup ... \cup C_{k-1}^o \cup V_{k+1} \cup ... \cup V_p\right) \subset V_k$ ve W_k tıkızdır. Ayrıca,

$$W_k \subset C_k^o \subset C_k \subset V_k$$

olacak şekilde tıkız C_k kümesi vardır. Benzer şekilde, $k = p$ için,

$W_p = A - \left(C_1^o \cup ... \cup C_{p-1}^o\right) \subset V_p$ ve W_p tıkızdır. Ayrıca,

$$W_p \subset C_p^o \subset C_p \subset V_p$$

olacak şekilde tıkız C_p kümesi vardır.

Kolayca görülür ki, $\left\{C_1^o, ..., C_p^o\right\}$ ailesi A nın açık bir örtüsüdür. Şimdi $1 \leq i \leq p$ olmak üzere, aşağıdaki şartları sağlayan, $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını ele alalım:

i) $f_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

ii) $\forall x \in C_i$ için $f_i(x) > 0$

ii) $C_i \subset K_i \subset V_i$ şartını sağlayan tıkız bir K_i kümesi ve $\forall x \in (\mathbb{R}^n - K_i)$ için, $f_i(x) = 0$

Bu şartları sağlayan, f_i ler seçilebilir. (Bakınız Önerme(6.11)) $C = \bigcup_{i=1}^p C_i$ dersek, $C^o = \bigcup_{i=1}^p C_i^o$ olur ve her $x \in C^o$ için

$$F(x) = f_1(x) + ... + f_p(x) > 0$$

olur.

Ayrıca aşağıdaki şartları sağlayan $\alpha : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ fonksiyonunu ele alalım, (bakınız Önerme(6.13))

i) $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

ii) $A \subset H \subset C^o$ olacak şekilde tıkız H kümesi vardır öyle ki, $\forall x \in A$ için $\alpha(x) > 0$ ve $\forall x \in (\mathbb{R}^n - H)$ için, $\alpha(x) = 0$

Şimdi $1 \leq i \leq p$ için, $\varphi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \alpha(x)\frac{f_i(x)}{F(x)} & , \quad x \in C^o \\ 0 & , \quad x \in \mathbb{R}^n - C^o \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa, $\Phi = \{\varphi_i : k = 1, ..., p\}$ aradığımız aile olur. Gerçekten:

1) Her $i \in \{1, ..., p\}$ ve $\forall x \in A$ için, $0 \leq \varphi_i(x) \leq 1$

2) Φ sonlu bir aile olduğundan, $V_x = C^o$ seçilirse Önermedeki 2. şartın sağlandığı kolayca görülür.

3) $x \in A$ için

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{p} \varphi_i\right)(x) &= \sum_{i=1}^{p}\left(\alpha(x)\frac{f_i(x)}{F(x)}\right) \\ &= \alpha(x)\sum_{i=1}^{p}\left(\frac{f_i(x)}{F(x)}\right) \\ &= \alpha(x).1 \\ &= \alpha(x) \qquad (\forall x \in A \text{ için } \alpha(x) = 1 \text{ olduğundan}) \\ &= 1 \qquad \text{elde edilir.} \end{aligned}$$

4) f_i nin sıfırılandığı küme, $K_i \subset V_i$ düşünmek yeterli olacaktır. □

Önerme 6.15 *Her* $i = 1, 2, ...$ *için* $A_i \subset \mathbb{R}^n$ *tıkız bir küme ve* $A_i \subset A_{i+1}^o$ *olsun.* $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ *diyelim.* A *nın bir açık bir örtüsü,*

$$\mathcal{F} = \{U_r : r \in \Gamma, \Gamma \text{ indeks kümesi}\}$$

olmak üzere aşağıdaki şartları sağlayan

$$\Phi = \{\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \varphi, \text{ düzgün bir fonksiyon}\}$$

ailesi vardır:

1) $\forall x \in A$ *için,* $0 \leq \varphi(x) \leq 1$

2) $\forall x \in A$ *için,* x *in açık komşuluğu* V_x *ve* $\Phi_x = \left\{\varphi_x^1, ..., \varphi_x^{t_x}\right\} \subset \Phi$ *sonlu ailesi vardır öyle ki,*

$$\forall \varphi \notin \Phi_x \quad \text{için} \quad \varphi(v) = 0, \quad v \in V_x$$

olur.

3) $\forall x \in A$ *için,* $\sum\limits_{\varphi \in \Phi} \varphi(x) = \sum\limits_{i=1}^{t_x} \varphi_x^i(x) = 1$ *olur.*

4) $\forall \varphi \in \Phi$ *için, bir* $U_\varphi \in \mathcal{F}$ *ve* $K_\varphi \subset U_\varphi$ *tıkız kümesi bulunabilir öyle ki, her* $x \in (\mathbb{R}^n - K_\varphi)$ *için* $\varphi(x) = 0$ *olur.*

Kanıt. Aşağıdaki tanımlamaları yapalım:

$\mathcal{F}_1 = \{U \cap A_2^o : U \in \mathcal{F}\}$, $B_1 = A_1$, tıkız

$\mathcal{F}_2 = \{U \cap A_3^o : U \in \mathcal{F}\}$, $B_2 = A_2 - A_1^o$, tıkız

$\mathcal{F}_3 = \{U \cap (A_4^o - A_1) : U \in \mathcal{F}\}$, $B_3 = A_3 - A_2^o$, tıkız

$\mathcal{F}_4 = \{U \cap (A_5^o - A_2) : U \in \mathcal{F}\}$, $B_4 = A_4 - A_3^o$, tıkız

$\vdots$

$\mathcal{F}_i = \left\{U \cap (A_{i+1}^o - A_{i-2}) : U \in \mathcal{F}\right\}$, $B_i = A_i - A_{i-1}^o$, tıkız

$\vdots$

Kabul ediyoruz ki, $A_{-1} = A_0 = \varnothing$

Kolayca görülür ki, $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ olur. B_i tıkız kümeleri için, Önerme(6.14) den $\mathcal{F}_i$ açık örtüsüne göre biçilmiş bir birimin parçalanışı $\Phi_i = \{\varphi_1, ..., \varphi_{n_i}\}$ olsun.

$\Phi = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Phi_i$ yazalım. Bu birleşim içerisindeki fonksiyonları yeniden indisleyerek $\Phi = \{\varphi_1, ..., \varphi_n, ..\}$ olarak yazalım. Her bir i için Φ_i sonlu bir küme ve sonlu kümelerin sayılabilir birleşimi sayılabilir olduğundan, bu her zaman yapılabilir.

Sav: $x \in A$ için,

$$\sigma(x) := \sum\nolimits_{\varphi_i \in \Phi} \varphi_i(x)$$

olarak tanımlanan toplam sonlu bir toplamdır. Gerçekten, $x \in A_i$ ve $j \geq i+2$ olmak üzere, $B_j \cap B_{i+2} = \varnothing$ olduğundan, $\varphi \in \Phi_j$ için $\varphi(x) = 0$ olur. Öte yandan her $x \in A$ için

$$\sigma(x) = \sum\nolimits_{\varphi_i \in \Phi} \varphi_i(x) > 0$$

olur.

Şimdi $\beta_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x \in \mathbb{R}^n$ için,

$$\beta_i(x) = \begin{cases} \dfrac{\varphi_i(x)}{\sigma(x)} & , \quad x \in C^o \\ 0 & , \quad x \in \mathbb{R}^n - C^o \end{cases}$$

Burada C^o Önerme(6.14) de φ_i fonksiyonunun inşası için tanımlanan kümedir. Burada $x \in C^o$ için, $x \in A$ olduğundan $\sigma(x) > 0$ olacaktır. Böylece

$$\Phi = \{\beta_i : i = 1, 2, ...\}$$

ailesi istenen birimin parçalanışı olacaktır. Gerçekten:

1) Her $i = 1, 2, ...$ ve $\forall x \in A$ için, $0 \leq \beta_i(x) \leq 1$ olur.

2) $\forall x \in A$ ise, $x \in A_{i_0}$ ve $j \geq i_0+2$ olmak üzere, $B_j \cap B_{i_0+2} = \varnothing$ olduğundan, $\varphi \in \Phi_j$ için $\varphi(x) = 0$ olur. Böylece x in açık komşuluğu $V_x = A^o_{i_0+1}$ olarak seçilsin. $\Phi_x = \bigcup_{i=1}^{i_0+2} \Phi_i \subset \Phi$ sonlu ailesi için,

$$\forall \varphi \notin \Phi_x \quad \text{için} \quad \varphi(v) = 0, \quad v \in V_x$$

olur.

3) $x \in A$ için

$$\begin{aligned} \left(\sum\nolimits_{i=1}^{p} \beta_i\right)(x) &= \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{\varphi_i(x)}{\sigma(x)}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{\varphi_i(x)}{\sum_{i=1}^{p} \varphi_i(x)}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

4) $\varphi_i(x)$ nin sıfırlandığı kümeyi düşünmek yeterli olacaktır. $\square$

Teorem 6.16 $A \subset \mathbb{R}^n$ *alt kümesinin açık bir örtüsü,*

$$\mathcal{F} = \{U_r : r \in \Gamma, \Gamma \text{ indeks kümesi, } U_r \subset \mathbb{R}^n \text{ açık küme}\}$$

olsun. Bu durumda, aşağıdaki şartları sağlayacak şekilde,

$$\Phi = \{\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \varphi, \text{ düzgün bir fonksiyon}\}$$

ailesi vardır:

1) $\forall x \in A$ *için,* $0 \leq \varphi(x) \leq 1$

2) $\forall x \in A$ *için,* x *in açık komşuluğu* V_x *ve* $\Phi_x = \left\{\varphi_x^1, ..., \varphi_x^{t_x}\right\} \subset \Phi$ *sonlu ailesi vardır öyle ki,*

$$\forall \varphi \notin \Phi_x \quad \text{için} \quad \varphi(v) = 0, \quad v \in V_x$$

olur.

3) $\forall x \in A$ *için,* $\sum\limits_{\varphi \in \Phi} \varphi(x) = \sum\limits_{i=1}^{t_x} \varphi_x^i(x) = 1$ *olur.*

4) $\forall \varphi \in \Phi$ *için, bir* $U_\varphi \in \mathcal{F}$ *ve* $K_\varphi \subset U_\varphi$ *tıkız kümesi bulunabilir öyle ki, her* $x \in (\mathbb{R}^n - K_\varphi)$ *için* $\varphi(x) = 0$ *olur.*

(1-3) şartlarını sağlayan Φ ailesine, A *kümesi için* **birimin bir düzgün parçalanışı** yada **birimin** C^∞ **bir parçalanışı** adı verilir. Φ ailesi ek olarak (4) koşulunu sağlarsa Φ ailesi $\mathcal{F}$ örtüsüne göre **biçilmiştir** denir.

Kanıt. Eğer $A \subset \mathbb{R}^n$ açık bir alt küme ise $i = 1, 2, ...$ olmak üzere,

$$A_i = \left\{ x \in A : ||x|| \leq i \quad \text{ve} \quad d(x, \partial A) \geq \frac{1}{i} \right\}$$

olsun. Burada $d(x, \partial A)$ sayısı, x noktasının, A kümesinin kabuğu ∂A ya olan uzaklığını ve $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere,

$$||x|| := \sqrt{\sum\nolimits_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Bu durumda A_i kümeleri aşağıdaki şartları sağlar:(Bakınız Önerme(5.4)) *i)* Her bir i için A_i tıkız

ii) Her bir i için $A_i \subset A^o_{i+1}$

iii) $A = A_1 \cup A_2 \cup ... = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

Böylece Önerme(6.15) den sonuca ulaşılır.

Şimdi genel durumu kanıtlayalım:

A kümesini keyfi alalım. Eğer $B = \bigcup_{U\in\mathcal{F}} U$ ise, açık bir küme olan B için, yukarıdaki açıklamadan elde edilen birimin parçalanışı, A için de birimin parçalanışı olur. $\square$

Uyarı 6.17 *Teorem(6.14) ün (2.) özelliğinin önemli bir sonucu, $C \subset A$ tıkız alt kümesi üzerinde sadece sonlu tane $\varphi \in \Phi$ sıfır olmadığıdır. Çünkü $x \in C$ için x i içeren açık V_x kümesi üzerinde sıfırdan farklı sonlu tane $\varphi \in \Phi$ vardır. C tıkız olduğundan, V_x lerin, $\{V_{x^i} : i = 1, ..., p\}$ sonlu tanesi C kümesini örter. Böylece Φ ailesinin sonlu öğesi dışında tüm elemanları C üzerinde sıfırlanır.*

Tanım 6.18 *$A \subset \mathbb{R}^n$ açık kümesinin açık örtüsü $\mathcal{F}$ nin her U öğesi $U \subset A$ özelliğinde ise $\mathcal{F}$ örtüsü uygundur denir.*

Önerme 6.19 *$A \subset \mathbb{R}^n$ açık bir küme, $f : A \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $C \subset A$ tıkız bir alt küme ve her $x \in A - C$ için $f(x) = 0$ ise $(g.a)\int_A f$ ve $(b.a)\int_C f$ sayıları vardır ve*

$$(g.a)\int_A f = (b.a)\int_C f$$

Kanıt. İlkin integrallerin varlığını gösterelim:

D, $C \subset D$ koşulunu sağlayan kapalı bir dörtgen olsun. f fonksiyonu A üzerinde sürekli ve C tıkız kümesi dışında sıfırlandığından, f fonksiyonu, bütün $\mathbb{R}^n$ üzerinde sürekli bir, $f^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ 0 \quad , & x \notin A \end{cases}$$

genişlemesine sahiptir. f nin D ye kısıtlanışı $f_{|D}$ için $f_D = f_{|D}$ yazalım. Her $x \in C$ için $f_D(x) = f^*(x) = f(x)$ olacağından ve her $x \in D$ için $f_D(x) = f^*(x)$ olduğundan, f_D fonksiyonu D üzerinde sürekli dolayısıyla integrallenebilirdir. Böylece

$$(b.a)\int_C f := (b.a)\int_D f_D$$

vardır. Şimdi $(g.a)\int_A f$ var olduğunu gösterelim: $\{K_n : n = 1, 2, ...\}$ ailesi A kümesi için Önerme(5.4) yer alan özellikleri sağlayan bir aile olsun. Bu durumda, K_n nin iç noktaları kümesi K_n^o olmak üzere, $C \subset \bigcup_{i=1}^{s} K_i^o$ olur. Çünkü C tıkız bir kümedir. Böylece $C \subset K_s$ elde edilir. f fonksiyonu C dışında sıfırlandığından her $m > s$ için

$$(b.a)\int_C f = (b.a)\int_{K_m} f$$

olur. Bu ifade $|f|$ fonksiyonuna uygulanmasından $\lim\limits_{m\to\infty}(b.a)\int_{C_m}|f|$ var olduğu görülür. Böylece $(g.a)\int_A f$ vardır. Öte yandan

$$(b.a)\int_C f = \lim_{m\to\infty}(b.a)\int_{C_m}|f| = (g.a)\int_A f$$

eşitliği kanıtı bitirir. □

Teorem 6.20 $A \subset \mathbb{R}^n$ *açık bir küme,*

$$\mathcal{F} = \{U_r : r \in \Gamma, \Gamma \text{ indeks kümesi, } U_r \subset \mathbb{R}^n \text{ açık küme}\}$$

A kümesinin uygun bir örtüsü $\mathcal{F}$ olsun. $f : A \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. $\Psi = \{\psi_i : i = 1, 2, ..\}$ ailesi $\mathcal{F}$ ye göre biçilmiş bir birimin parçalanışı olsun. ψ_i nin dışında sıfırlandığı tıkız küme S_i olmak üzere, $(g.a)\int_A f$ nın var olması için gerek ve yeter koşul

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[(g.a)\int_A (\psi_i|f|)\right]$$

serisinin yakınsak olmasıdır. Bu durumda

$$(g.a)\int_A f = \sum_{i=1}^{\infty}\left[(g.a)\int_A (\psi_i|f|)\right] \tag{6.3}$$

olur. Ayrıca bir önceki önerme gereğince,

$$(g.a)\int_A f=\sum_{i=1}^{\infty}\left[(g.a)\int_A(\psi_i|f|)\right]=\sum_{i=1}^{\infty}\left[(b.a)\int_{S_i}(\psi_i|f|)\right]$$

eşitliği geçerlidir.

Kanıt. İlkin f fonksiyonunun pozitif olduğu durum için kanıtı yapalım.

Gözlem1: $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left[(g.a)\int_A(\psi_i|f|)\right]$ serisinin yakınsak olduğunu kabul edelim. Bu durumda $(g.a)\int_A f$ var olduğunu ve

$$(g.a)\int_A f\leq\sum_{i=1}^{\infty}\left[(g.a)\int_A(\psi_i|f|)\right]=\sum_{i=1}^{\infty}\left[(g.a)\int_A(\psi_i f)\right]$$

olduğunu göstereceğiz.

$K\subset A$ herhangi bir tıkız (J.Ö) alt küme olsun. Bu durumda $\{\psi_i : i=1,2,..\}$ ailesinin sonlu elemanı dışındaki, tüm elemanları K üzerinde sıfırlanır. Bu sonlu aile yeniden sıralanarak, $\{\psi_j : j=1,2,...,M\}$ olarak yazılabilir. Böylece her $x\in K$ için

$$f(x)=\sum_{j=1}^{M}\psi_j(x)f(x)$$

olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}(b.a)\int_K f &= \sum_{j=1}^{M}\left[(b.a)\int_K(\psi_i f)\right] && \text{(doğrusallık)}\\ &\leq \sum_{j=1}^{M}\left[(b.a)\int_{K\cup S_i}(\psi_i|f|)\right] && \text{(monotonluk)}\\ &= \sum_{i=1}^{M}\left[(g.a)\int_A(\psi_i|f|)\right] && \text{(Önerme(6.17))}\\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty}\left[(g.a)\int_A(\psi_i|f|)\right]\end{aligned}$$

elde edilir. K herhangi bir tıkız (J.Ö) alt küme olduğundan, f fonksiyonu, A üzerinde (g.a) integrallenebilirdir.

Gözlem2: f nin A üzerinde (g.a) integrallenebilir olduğunu kabul edip

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[(g.a)\int_A(\psi_i f)\right]\leq(g.a)\int_A f$$

olduğunu göstereceğiz.

Herhangi bir N pozitif tamsayısı için

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}\left[(g.a)\int_A(\psi_i f)\right] &= (g.a)\int_A\left(\sum_{i=1}^{N}\psi_i f\right) && \text{(doğrusallık)}\\ &\le (g.a)\int_A f && \text{(karşılaştırma)}\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Böylece $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left[(g.a)\int_A(\psi_i f)\right]$ yakınsak olur. Çünkü bu serinin keyfi her kısmi toplamlar serisi, $(g.a)\int_A f$ sayısından küçük yada eşit kalmaktadır. Böylece (6.3) eşitliği pozitif fonksiyonlar için geçerli olacaktır.

Gözlem3: $f : A \to \mathbb{R}$ herhangi bir sürekli bir fonksiyon olsun. Teorem(5.5) gereğince, $(g.a)\int_A f$ var olması için gerek ve yeter koşul $(g.a)\int_A |f|$ var olmasıdır. Öte yandan, Gözlem(1) ve Gözlem(2) den, $(g.a)\int_A |f|$ var olması için gerek ve yeter koşul

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[(g.a)\int_A(\psi_i|f|)\right]$$

serisinin yakınsak olmasıdır. Başka bir deyişle, $(g.a)\int_A f$ var ise

$$\begin{aligned}(g.a)\int_A f &= (g.a)\int_A f_+ - (g.a)\int_A f_- && (6.4)\\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\left[(g.a)\int_A(\psi_i f_+)\right] - \sum_{i=1}^{\infty}\left[(g.a)\int_A(\psi_i f_-)\right] && (6.5)\\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\left[(g.a)\int_A(\psi_i f)\right] && (6.6)\end{aligned}$$

elde edilir. Burada (6.4) tanımdan, (6.5) Gözlem(1) ve Gözlem(2) den, (6.6) yakınsak seriler terim terim toplanabilir olması gerçeğinden yazıldı. □

Önerme 6.21 *$A \subset \mathbb{R}^n$ açık bir küme,*

$$\mathcal{F} = \{U_r : r \in \Gamma, \Gamma \text{ indeks kümesi, } U_r \subset \mathbb{R}^n \text{ açık küme}\}$$

A kümesinin uygun bir örtüsü $\mathcal{F}$ olsun. $f : A \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. $\Psi = \{\psi_i : i = 1, 2, ..\}$ ailesi $\mathcal{F}$ ye göre biçilmiş bir birimin parçalanışı olsun.

$\Phi = \{\varphi_j : j = 1, 2, ..\}$ ailesi de $\mathcal{F}$ ye göre biçilmiş bir başka birimin parçalanışı olsun. Bu durumda eğer $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \left[(g.a) \int_A (\psi_i |f|)\right]$ serisi yakınsak ise $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \left[(g.a) \int_A (\varphi_j |f|)\right]$ serisi yakınsar ve

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[(g.a) \int_A (\psi_i |f|)\right] = \sum_{j=1}^{\infty} \left[(g.a) \int_A (\varphi_j |f|)\right] \tag{6.7}$$

eşitliği geçerlidir.

Kanıt. ψ_i fonksiyonunun sıfırlandığı tıkız küme S_i olsun. $\psi_i f$ fonksiyonu S_i kümesi dışında sıfırlanır. Ayrıca S_i tıkız olduğundan Φ ailesinin sonlu elemanı $\{\varphi_j : i = 1, 2, .., p_i\}$ haricinde tüm elemanlar S_i dışında sıfırlanır. Böylece

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \left[(g.a) \int_A (\psi_i f)\right] &= \sum_{i=1}^{\infty} \left[(g.a) \int_A \left(\textstyle\sum_{j=1}^{p_i} \varphi_j\right) (\psi_i f)\right] && (6.8) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \left[\textstyle\sum_{j=1}^{p_j} (g.a) \displaystyle\int_A (\varphi_j \psi_i f)\right] && (6.9) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \left[\textstyle\sum_{j=1}^{\infty} (g.a) \displaystyle\int_A (\varphi_j \psi_i f)\right] && (6.10) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \left[(g.a) \int_A (\varphi_j \psi_i f)\right] && (6.11) \end{aligned}$$

Burada (6.8) deki eşitlik her $x \in A$ için $\sum\limits_{j=1}^{p_i} \varphi_j(x) = 1$ den elde edilir. (6.8) den (6.9) a (g.a) integralin doğrusallık özelliğinden geçildi. (6.9) dan (6.10) a

$$\Phi - \{\varphi_j : j = 1, 2, .., p_i\}$$

ailesindeki elemanların S_i dışında sıfırlanmanlarından geçildi. (6.11) ise (6.8) in solunda yer alan serinin yakınsaklığından yazıldı. Öte yandan (6.11) de yer alan çifte toplam $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \left[(g.a) \int_A (\varphi_j f)\right]$ serisinin yakınsaklığını ve

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[(g.a) \int_A (\psi_i f)\right] = \sum_{j=1}^{\infty} \left[(g.a) \int_A (\varphi_j f)\right]$$

eşitliğini verir ki, bu eşitliğe $|f|$ fonksiyonuna uygulanılarak (6.3) eşitliği elde edilir.

□

7 DEĞİŞKEN DEĞİŞTİRME TEOREMİ

Tanım 7.1 *$U \subset \mathbb{R}^k$, açık bir alt küme olsun. $i = 1, ..., n$; $f_i : U \to \mathbb{R}$ olmak üzere $f = (f_1, ..., f_n) : U \to \mathbb{R}^n$ dönüşümünü ele alalım. Eğer herbir f_i; $i = 1, ..., n$ fonksiyonları , C^r sınıfından iseler (bakınız Tanım(6.1)) f dönüşümü C^r-* ***sınıfındandır*** *denir ve $f \in C^r(U)$ yazılır. Ayrıca $x \in U$ için,*

$$J_f(x) := \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_k}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_k}(x) \end{bmatrix}_{n \times k}$$

olarak tanımlanan matrise, f ***dönüşümünün Jakobi-matrisi*** *denir. Özel olarak, $k = n$ ise*

$$\det[J_f(x)]$$

sayısına, f ***dönüşümünün*** *x* ***noktasındaki Jakobiyeni*** *denir.*

Bu bölüm içerisinde, aksi belirtilmedikçe, $\mathbb{R}^n$ nin açık bir alt kümesini U ile göstereceğiz.

Tanım 7.2 *$k \geq 1$ olacak şekilde bir doğal sayı olmak üzere, $g : U \to g(U) = V \subset \mathbb{R}^n$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlasın:*

1) g, 1-1 bir dönüşüm

2) $g \in C^k(U)$

Bu durumda, eğer $g^{-1} : V \to U$ dönüşümü, $g^{-1} \in C^k(V)$ koşulunu sağlarsa, g ***dönüşümüne C^k-sınıfından bir difeomorfizm*** *denir. Kolayca görülür ki, her $x \in U$ için $\det[J_g(x)] \neq 0$ olur.*

Teorem 7.3 *(Ters Fonksiyon Teoremi) $U \subset \mathbb{R}^n$, açık bir küme $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, C^k sınıfından dönüşüm olsun öyle ki, bir $p \in U$ için $\det[J_f(p)] \neq 0$ olsun. O zaman p nin bir açık komşuluğu $V_p \subset U$ vardır öyle ki;*

a) $f(V_p) \subset \mathbb{R}^n$, *açık bir kümedir*

b) $f : V_p \to f(V_p)$ *bir* C^k*-sınıfından difeomorfizmdir. [1]*

Önerme 7.4 $g : U \to \mathbb{R}^n$, C^1 *sınıfından bir difeomorfizm olsun. Eğer* $E \subset U$, *sıfır ölçümlü bir alt küme ise* $g(E) \subset \mathbb{R}^n$, *kümesi de sıfır ölçümlüdür. [2]*

Önerme 7.5 $U \subset \mathbb{R}^n$, *açık bir alt küme olsun.*

$$g : U \to g(U) = V \subset \mathbb{R}^n$$

C^r*-sınıfından bir difeomorfizm,* $K \subset U$, *tıkız bir alt küme ve* $g(K) = E$ *olsun.* K, E *nin iç noktaları kümeleri sırasıyla,* K^o, E^o *ve* K, E *nin kabuk noktaları kümeleri sırasıyla,* ∂K, ∂E *olmak üzere,*

i) $g(K^o) = E^o$ *ve* $g(\partial K) = \partial E$ *olur.*

ii) Eğer K *(J.Ö) (Jordan Ölçülebilir) bir küme ise* E *de (J.Ö) bir kümedir.*

Kanıt.

i) g difeomorfizm olduğundan sürekli ve açık dönüşümdür. Dolayısıyla, $g(K^o)$ açıktır. $g(K^o) \subset E$ olduğundan, $g(K^o) \subset E^o$ elde edilir. Benzer şekilde g sürekli olduğundan, $g^{-1}(E^o) \subset K^o$ olur ve böylece

$$E^o = g\left(g^{-1}(E^o)\right) \subset g(K^o)$$

elde edilir. Buradan $g(K^o) = E^o$ bulunur. Ayrıca K ve E kapalı kümeler olduklarından

$$K = K^o \cup \partial K \qquad \text{ve} \qquad E = E^o \cup \partial E$$

olur. Buradan

$$E = g(K) = g(\partial K) \cup g(K^o) = g(\partial K) \cup E^o = E^o \cup \partial E$$

elde edilir. $g(\partial K) \cap E^o = \partial E \cap E^o = \varnothing$ olduğundan $g(\partial K) = \partial E$ olur.

ii) K (J.Ö) olsun. Jordan Ölçülebilirlik tanımı gereği, ∂K sıfır ölçümlü bir kümedir. Öte yandan Önerme(7.4) gereği, $g(\partial K) = \partial E$ sıfır ölçümlüdür. Böylece E (J.Ö) bir kümedir. $\square$

Önerme 7.6 *$I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ olsun. $g : I \to \mathbb{R}$, C^1 sınıfından, her $x \in (0, 1)$ için, $g'(x) \neq 0$ olacak şekilde bir fonksiyon olsun. Bu durumda $g(I) = J$, uç noktaları $g(a)$ ve $g(b)$ olan kapalı bir aralıktır. Eğer $f : J \to \mathbb{R}$ ye sürekli bir dönüşüm ise*

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f = \int_a^b (f \circ g) g'$$

yada eşdeğeri olan

$$\int_J f = \int_I (f \circ g)|g'|$$

eşitliği geçerlidir. [3]

Teorem 7.7 *(Değişken Değiştirme Teoremi) $U \subset \mathbb{R}^n$ açık bir alt küme olsun. $g : U \to g(U) = V \subset \mathbb{R}^n$, dönüşümü C^1 sınıfından bir difeomorfizm olsun. $f : V \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olsun. Bu durumda f fonksiyonunun V üzerinde integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul $(f \circ g)|\det J_g|$ fonksiyonunun U üzerinde integrallenebilir olmasıdır ve bu durumda*

$$\int_V f = \int_U (f \circ g)|\det J_g|$$

eşitliği geçerlidir. [2]

Gösterim 7.8 *i)* $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ *vektörünü ele alınan konu bağlamında,*

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

matrisi olarakta kullanacağız.

ii) $n \times n$ *lik gerçel girdili kare matrisi* $[a_{ij}]_{n\times n}$ *ile ve tüm* $n \times n$ *lik gerçel girdili kare matrisler kümesini ise* $\mathcal{M}$ *ile göstereceğiz. Yine* $[a_1 ... a_k]$ *ile sütunları*

$$a_i = \begin{bmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{in} \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

vektörleri olan $n \times k$ *lık* $[a_{ij}]_{n\times k}$ *matrisini göstereceğiz. Özel olarak* $[a_{ij}]_{n\times n} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ *ise bu matrise* ***birim matris*** *denir ve* I_n *ile gösterilir.*

iii) $\mathbb{R}^n$ *nin standart tabanı* $\{e_1, ..., e_2\}$ *ile göstereceğiz.*

Teorem 7.9 $A \in \mathcal{M}$ *ve* $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, *her* $x \in \mathbb{R}^n$ *için,*

$$h(x) = A.x = A. \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

olarak verilen doğrusal bir dönüşüm olsun. $S \subset \mathbb{R}^n$, *tıkız ve (J.Ö) bir alt küme ve* $T = h(S)$ *yazalım. Bu durumda*

a) T *nin hacmi tanımlıdır, yani* $v(T) := \int_T 1$ *vardır.*

b) $v(T) = |\det A|\, v(S)$ *olur.*

Kanıt.

i) İlk olarak A tekil olmayan (yani terslenebilir) bir matris olsun.

a) Bu durumda h bir difeomorfizmdir. Böylece Önerme(7.5) gereğince $h(S^o) = T^o$ ve T tıkız, (J.Ö) bir kümedir. Böylece Teorem(3.15) gereğince $v(T) = \int_T 1$ sayısı vardır.

b) Öte yandan Jordan Ölçülebilirliğin tanımı ve Teorem(7.10) gereğince,

$$\begin{aligned}
v(T) &= v(T^o) \\
&= \int_{T^o} 1_{T^o} \\
&= \int_{S^o} (1_{T^o} \circ h).\, |\det J_h| \\
&= \int_{S^o} 1_{S^o}.\, |\det J_h| \\
&= |\det A| \int_{S^o} 1_{S^o} \\
&= |\det A|\, v(S)
\end{aligned}$$

elde edilir.

ii) A matrisi tekil olsun.

a) $v(T) = \int_T 1$ sayısının varlığını gösterelim: h, doğrusal dönüşüm olduğundan, süreklidir. S tıkız olduğundan ve h sürekli olduğundan, $h(S) = T$ tıkızdır. Böylece $T = \overline{T} = T \cup \partial T$ olur.

Sav1: T sıfır ölçümlü bir kümedir.

Gerçekten, $k \in \mathbb{N}$, $k < n$ olmak üzere, h dönüşümü $\mathbb{R}^n$ uzayını $\mathbb{R}^n$ nin k-boyutlu bir alt uzayına taşır. Yani $h(\mathbb{R}^n) = W \subset \mathbb{R}^n$ ve $boy(W) = k < n$ olur. (Eğer $k = n$ olsaydı, A tersinir bir matris olurdu.) W alt uzayının, $\mathbb{R}^n$ içerisinde n-ölçümü sıfır olduğundan, özel olarak $T \subset W$, alt kümesinin ölçümü de sıfır olur.

Buradan $\partial T \subset T$ olduğundan, ∂T nin sıfır ölçümlü bir küme olduğu elde edilir. Şimdi D, $T \subset D \subset \mathbb{R}^n$ koşulunu sağlayan bir dörtgen olmak üzere

$$v(T) = \int_T 1 := \int_D (1.\chi_T)$$

integrali vardır. Burada χ_T nin, T kümesinin karekteristik fonksiyonu olduğunu hatırlatalım.

b)

Sav2: $v(T) = |\det A|\, v(S)$

A singüler olduğundan $\det A = 0$ ve $|\det A|\, v(S) = 0$ olur. Öte yandan $v(T) = \int_D (1.\chi_T)$ için, $(1.\chi_T)$ fonksiyonu sıfır ölçümlü T kümesi dışında sıfırlandığından, Teorem(3.7)/(1) gereğince $\int_D (1.\chi_T) = 0 = v(T)$ olur. $\square$

Tanım 7.10 $a_1, ..., a_k \in \mathbb{R}^n$, *doğrusal bağımsız vektörler olmak üzere.*

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(a_1, ..., a_k) := \{x = c_1 a_1 + ... + c_k a_k | \ \ 0 \leq c_i \leq 1, \quad i = 1, ..., k\}$$

olarak tanımlanan kümeye ***k-boyutlu parelel yüzlü*** *denir.* $a_1, ..., a_k$ *vektörlerine* $\mathcal{P}$ ***parelel yüzlüsünün kenarları*** *denir. Özel olarak* $\{e_1, ..., e_n\}$ *standart taban vektörlerine karşılık gelen paralel yüzlünün*

$$\mathcal{P}(e_1, ..., e_n) := I^n = [0,1] \times ... \times [0,1] = [0,1]^n$$

kübü olacağını belirtelim.

Teorem 7.11 $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}^n$, *doğrusal bağımsız vektörler olmak üzere* $A = [a_1 ... a_n]$ *matrisi için*

$$v(\mathcal{P}(a_1, ..., a_n)) = |\det A|$$

olur.

Kanıt. $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, doğrusal dönüşümünü her $x \in \mathbb{R}^n$ için,

$$h(x) = A.x$$

olarak tanımlayalım. $j = 1, ..., n$ için, $h(e_j) = A.e_j = a_j$ olduğundan, h doğrusal dönüşümü $e_1, ..., e_n$ standart taban vektörlerini sırasıyla, $a_1, ..., a_n$ vektörlerine taşır. Dahası h doğrusal dönüşümü $I^n = [0,1]^n$ parelel yüzlüsünü, $\mathcal{P}(a_1, ..., a_n)$ parelel yüzlüsüne resmeder. Böylece Teorem(7.9) dan

$$v(\mathcal{P}(a_1, ..., a_n)) = |\det A|\, v(I^n) = |\det A|$$

elde edilir. $\square$

Tanım 7.12 $\alpha = \{a_1, ..., a_k\} \subset \mathbb{R}^n$ *kümesi için,* $<, >$, $\mathbb{R}^n$ *nin standart iç çarpımını göstermek üzere*

i) $\langle a^i, a^j \rangle = 0$, $i \neq j$, *ise* α *ya bir* ***dik kümedir*** *denir.*

ii) $\langle a^i, a^j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ *ise* α *ya* ***birim dik kümedir*** *deniri.*

iii) $A = [a_{ij}]_{n \times k}$ *matrisi için* $A^{tr} := [a_{ji}]_{k \times n}$ *olarak verilen matrise* A ***matrisinin devriği*** *denir.*

iv) $\{a_1, ..., a_n\} \subset \mathbb{R}^n$ *kümesi birim dik küme ise* $A = [a_1 ... a_n]_{n \times n}$ *matrisine* ***dik matris*** *denir.*

Kolayca görülür ki, A *bir dik matristir ancak ve ancak* $A^{tr}.A = I_n$ *olur.*

v) A *bir dik matris olmak üzere,* $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *dönüşümü*

$$h(x) = A.x$$

olarak verilmiş ise h *ye* ***dik dönüşüm*** *denir.*

8 KATMANLAR

Tanım(7.10) da $\mathbb{R}^n$ içerisinde k-boyutlu paralel yüzlü tanımlandı. Teorem(7.11) de ise $k = n$ özel hali için, bir n-boyutlu paralel yüzlünün hacmi için bir eşitlik yazıldı. Bu bölüme , $k < n$ durumunda, bir k-boyutlu paralel yüzlünün hacmini tanımlayarak başlayacağız. Bu tanımlama $\mathbb{R}^n$ içerisindeki, k-boyutlu bir katman üzerinde integralin tanımlanmasında önemli bir rol oynayacaktır. İlkin bu tanımlama için gerekli birkaç önerme ve teorem ifede edilecektir.

Önerme 8.1 $\mathbb{R}^n$ *nin k-boyutlu doğrusal bir alt uzayı* W *olsun. Bu durumda* $\mathbb{R}^n$ *nin bir dik tabanı,* $\{a_1, ..., a_k, ..., a_n\}$ *vardır öyle ki, bu tabanın* $\{a_1, ..., a_k\}$ *, ilk k elamanı* W *için dik bir tabandır.*

Teorem 8.2 $\mathbb{R}^n$ *nin k-boyutlu doğrusal bir alt uzayı* W *olsun. Bu durumda bir* $H_W = H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *dik dönüşümü vardır öyle ki,*

$$H(W) = \mathbb{R}^k \times \{\overline{0}\}$$

olur. Burada $\overline{0} = (0, ..., 0) \in \mathbb{R}^{n-k}$.

Bu bölüm içerisinde aksi belirtilmedikçe, $\overline{0} = (0, ..., 0) \in \mathbb{R}^{n-k}$ olarak kullanılacaktır.

Teorem 8.3 *Aşağıdaki şartları sağlayacak şekilde tek bir* $V : \underbrace{\mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^n}_{k\text{-kez}} \to [0, \infty) \subset \mathbb{R}$ *fonksiyonu vardır:*

1) $x_1, ..., x_k \in \mathbb{R}^n$ *olmak üzere, eğer* $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *herhangi bir dik dönüşüm ise*

$$V(h(x_1), ..., h(x_k)) = V(x_1, ..., x_k)$$

2) Eğer $y_1, ..., y_k \in \mathbb{R}^n$, *için* $y_1, ..., y_k \in \mathbb{R}^k \times \{\overline{0}\}$ *ise yani,* $i = 1, ..., k$ *olmak üzere,* $z_i \in \mathbb{R}^k$ *ve*

$$y_i = \begin{bmatrix} z_i \\ \overline{0} \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

ise

$$V(y_1, ..., y_k) = |\det [z_1 ... z_k]|$$

olur.

$V(x_1, ..., x_k)$ gösterimi yerine genellikle, $X = [x_1, ..., x_k]_{n\times k}$ olmak üzere, $V(X)$ yazılacaktır.

Kanıt. Verilen $X = [x_1, ..., x_k]$ için, $F : \underbrace{\mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^n}_{\text{k-kez}} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu,

$$F(X) = \det(X^{tr}.X)$$

olarak tanımlansın. Burada X^{tr} ile X matrisinin devriği gösterilmektedir. Ayrıca $(X^{tr}.X)$ ifadesinin X ve X^{tr} matrislerinin çarpımı olduğuna işaret edelim.

Gözlem 1: $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dik dönüşümü verilmiş olsun. O zaman A bir dik matris olmak üzere, her $x \in \mathbb{R}^n$ için $h(x) = A.x$ olur. Bu durumda,

$$\begin{aligned} F([Ax_1 ... Ax_k]) &= F(A.X) = \det\left[(A.X)^{tr}.(A.X)\right] \\ &= \det\left[X^{tr}.A^{tr}.A.X\right] \\ &= \det\left[X^{tr}.I_n.X\right] \\ &= \det\left(X^{tr}.X\right) \\ &= F(X) \end{aligned}$$

elde edilir. Yani F fonksiyonu yukarıdaki (1) deki koşulusağlar. Ayrıca eğer Z, $k \times k$ lık bir matris olmak üzere, Y

$$Y = \begin{bmatrix} Z \\ \bar{0} \end{bmatrix}_{n\times k}, \qquad \text{burada} \qquad \bar{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{(n-k)\times k}$$

$n \times k$ lık bir matris ise

$$\begin{aligned}
F(Y) &= \det\left[Y^{tr}.Y\right] \\
&= \det\left(\begin{bmatrix} Z^{tr} & \overline{0}^{tr} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} Z \\ \overline{0} \end{bmatrix}\right) \\
&= \det(Z^{tr}.Z) \\
&= (\det(Z))^2
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Gözlem 2: Şimdi F fonksiyonunun negatif değerler almadığı görelim: Verilen $x_1, ..., x_k \in \mathbb{R}^n$ için, bu vektörleri içeren k-boyutlu doğrusal alt uzay W olsun. $H(W) = \mathbb{R}^k \times \left\{\overline{0}\right\}$ koşulunu sağlayan $H_W = H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dik dönüşümü, $B_H = B$ bir dik matris olmak üzere, $H(x) = Bx$ olarak verilsin. Bu durumda, $X = [x_1, ..., x_k]_{n \times k}$ olmak üzere,

$$B.X = \begin{bmatrix} Z \\ \overline{0} \end{bmatrix} \tag{8.1}$$

eşitliği geçerlidir. Buradan,

$$\begin{aligned}
F(X) &= F(B.X) \quad \text{(Gözlem(1) den)} \\
&= (\det(Z))^2 \quad \text{((8.1) den)} \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

olduğu elde edilir.

Şimdi $X = [x_1, ..., x_k]$ olmak üzere

$$V(X) = (F(X))^{1/2}$$

olarak tanımlansın.

Sav 1: V, (1) ve (2) koşullarını sağlar.

Bu Gözlem(1) ve Gözlem(2) den kolayca görülür.

Sav 2: V tektir.

Gerçekten, V ve V' fonksiyonları yukarıdaki (1) ve (2) koşullarını sağlıyor olsunlar. Keyfi her $X = [x_1, ..., x_k] \in \mathbb{R}^n \times .... \times \mathbb{R}^n$ için

$$V(X) = V(A_0 X) = \det Z \qquad \text{ve} \qquad V'(X) = V'(A_0 X) = \det Z$$

olur. Bu da V nin tekliğini verir. $\square$

Önerme 8.4 *V fonksiyonunun sıfırlanması için gerek ve yeter koşul $x_1, ..., x_k$ vektörlerinin doğrusal bağımlı olmasıdır. Yani $V(x_1, ..., x_k) = 0$ olur ancak ve ancak $\{x_1, ..., x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ vektörleri doğrusal bağımlıdır.*

Kanıt. $X = [x_1, ..., x_k]$ için $V(X) = (F(X))^{1/2} = 0 \Leftrightarrow F(X) = \det Z = 0$, $BX = \begin{bmatrix} Z \\ \bar{0} \end{bmatrix} \Leftrightarrow Z = [z_1 ... z_k]_{k \times k}$; $z_i \in \mathbb{R}^k$, $i = 1, ..., k$ tekil bir matristir ve dolayısıyla $\{z_1, ..., z_k\}$ vektörleri doğrusal bağımlıdır.$\Leftrightarrow$ (B dik bir matris ve dolayısıyla tersinir olduğundan) $\{x_1, ..., x_k\}$ doğrusal bağımlıdır. $\square$

Tanım 8.5 *Eğer $x_1, ..., x_k \in \mathbb{R}^n$, doğrusal bağımsız vektör ise bu vektörlerin belirlediği $\mathcal{P} = \mathcal{P}(x_1, ..., x_k)$ paralel yüzlüsünün k-boyutlu hacmi*

$$v(\mathcal{P}(x_1, ..., x_k)) := V(x_1, ..., x_k)$$

sayısıdır.

Tanım 8.6 *k, n doğal sayıları $0 < k \leq n$ şartını sağlasınlar. $A \subset \mathbb{R}^k$, açık bir küme olsun. $\alpha : A \to \alpha(A) = Y \subset \mathbb{R}^n$ aşağıdaki koşulları sağlayacak sekilde bir dönüşüm olsun:*

i) α, $1 - 1$ dönüşüm,

ii) α düzgün bir dönüşüm, yani $\alpha \in C^\infty(A, \mathbb{R}^n)$,

iii) Her $x \in A$ için $rank\,[J_\alpha(x)] = k$

Bu durumda α dönüşümü ile birlikte $Y = \alpha(A)$ kümesine, $\mathbb{R}^n$ içerisinde C^∞***-sınıfından bir k-boyutlu paremetrelendirilmiş katman*** *denir.*

Aksi belirtilmedikçe paremetrelendirilmiş katmanları genel olarak Y_α ile göstereğiz. Y_α nın *k-boyutlu hacmi*

$$v(Y_\alpha) := \int_A V(J_\alpha) = \int_A \left[\det\left(J_\alpha^{tr}.J_\alpha\right)\right]^{1/2}$$

olarak verilir.

Bu bölümün devamında, $\mathbb{R}^n$ içerisindeki her k-boyutlu parametrelendirilmiş katmanın $\mathbb{R}^n$ standart topolojisinin indirgediği alt uzay topolojisine sahip olduğunu varsayacağız.

Tanım(8.6) da verdiğimiz hacim tanımı için aşağıdaki gözlemde bulunalım:

$D \subset \mathbb{R}^k$, kapalı bir dörtgen ve D nin iç noktaları kümesi D^o olsun. Bu durumda $\alpha : D^o \subset \mathbb{R}^k \to \alpha(D^o) = Y_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ aşağıdaki özelliklere sahip bir dönüşüm olsun:

i) α, $1-1$ dönüşüm,

ii) $\alpha \in C^\infty(D^o)$,

iii) Her $x \in D^o$ için $rank\,[J_\alpha(x)] = k$ olsun.

Ayrıca D nin bir parçalanışı P ve P nin belirlediği bir alt dörtgen

$$R = [a_1,\ a_1 + h_1] \times ... \times [a_k,\ a_k + h_k]$$

olsun. α dönüşümü R dörtgenini Y_α içerisinde $\alpha(R)$ "yamulmuş dörtgene" taşır. Özel olarak da $e_i = (\delta_{i1}, ..., \delta_{ik})$ ve δ_{ik} ler de Kroneker deltayı göstermek üzere, R dörtgeninin a ve $a + h_i e_i$ uç noktalarına sahip kenarını, $\mathbb{R}^n$ içerisinde bir eğri üzerine taşır. Bu eğrinin başlangıç ve bitiş noktalarını birleştiren vektör

$$\alpha(a + h_i e_i) - \alpha(a)$$

olur. Bu vektörün birinci mertebeden yaklaşığı

$$v_i = J_\alpha(a).h_i e_i = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_i}(a)\right) h_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_i}(a) h_i \\ \vdots \\ \frac{\partial \alpha_n}{\partial x_i}(a) h_i \end{pmatrix}$$

olacaktır. O zaman, bir bağlamda, $\mathcal{P}(v_1, ..., v_k)$ paralel yüzlüsünün $\alpha(R)$ "yamulmuş dörtgenine" çok benzer olduğunu düşünebiliriz. $\mathcal{P}(v_1, ..., v_k) = \mathcal{P}$ paralel yüzlüsünün k-boyutlu hacmi

$$\begin{aligned}
v(\mathcal{P}) &= \left[\det \left(\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial\alpha}{\partial x_1}(a)\right) h_1 \\ \vdots \\ \left(\frac{\partial\alpha}{\partial x_k}(a)\right) h_k \end{bmatrix}_{k\times n} \cdot \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial\alpha}{\partial x_1}(a)\right) h_1 & \dots & \left(\frac{\partial\alpha}{\partial x_k}(a)\right) h_k \end{bmatrix}_{n\times k} \right) \right]^{1/2} \\
&= \left[\left(h_1^2 .....h_k^2\right) . \det \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_1}(a)\right]^2 & \dots & \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_1}(a).\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_k}(a)\right] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_1}(a).\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_k}(a)\right] & \dots & \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_k}(a)\right]^2 \end{bmatrix}_{k\times k} \right]^{1/2} \\
&= V\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x_1}(a), ..., \frac{\partial\alpha}{d x_k}(a)\right)(h_1 ... h_k) \\
&= V(J_\alpha(a))v(R)
\end{aligned}$$

sayısıdır.

Öte yandan, $m_R(V\,(J_\alpha(a)) \leq J_\alpha(a) \leq M_R(V\,(J_\alpha(a))$ eşitliği göz önüne alınıp, $V(J_\alpha)$ fonksiyonunun P parçalanışına göre alt ve üst toplamlarına bakıldığında

$$\sum_{R\in P} m_R(V\,(J_\alpha(a))v(R) \leq \sum_{R\in P} V(J_\alpha(a))v(R)v(R) \leq \sum_{R\in P} M_R(V\,(J_\alpha(a))v(R)$$

elde edilir ki, buradan $\sum\limits_{R\in P} V(J_\alpha(a))v(R)v(R) = k,$ sayısının uygun P parçalanışları seçilerek

$$\int_{D^o} V(J_\alpha)$$

integraline istenildiği kadar yaklaştırılabileceği görülür.

Tanım 8.7 $A \subset \mathbb{R}^k$, *açık bir küme olsun.*

$$\alpha : A \to \alpha(A) = Y_\alpha \subset \mathbb{R}^n$$

Y_α, C^∞ *sınıfından bir k-boyutlu paremetrelendirilmiş katman olsun.* $f : Y_\alpha \to \mathbb{R}$ *sürekli bir fonksiyon olsun. (Burada süreklilik,* Y_α *kümesi üzerine* $\mathbb{R}^n$

nin indirgediği alt uzay topolojisi için ifade edilmiştir.) Bu durumda f *fonksiyonunun integrali*

$$\int_{Y_\alpha} f dV := \int_A (f \circ \alpha) V(J_\alpha) = \int_A (f \circ \alpha) \left[\det\left(J_\alpha^{tr}.J_\alpha\right)\right]^{1/2}$$

olarak verilir.

Tanım 8.8 *$A \subset \mathbb{R}^k$ açık bir küme olsun. $g : A \to g(A) = B \subset \mathbb{R}^k$, C^∞ sınıfından bir difeomorfizm olsun. $\beta : B \to \mathbb{R}^n$, C^∞ sınıfından her $x \in B$ için $rank\,[J_\beta(x)] = k$ olacak şekilde bir dönüşüm olsun ve $Y_\beta = \beta(B)$ yazalım. $\alpha : A \to \mathbb{R}^n$, her $x \in A$ için*

$$\alpha(x) = (\beta \circ g)(x)$$

olsun. Bu durumda $Y_\alpha = \alpha(A)$ k-boyutlu parametrelendirilmiş katmanına, Y_β k-boyutlu katmanının ***yeniden parametrelendirilmesi*** *denir.*

Bu durumda $Y = Y_\alpha = Y_\beta$ gösterimini kullanacağız.

Tanım(8.8) den sonra Tanım(8.7) verdiğimiz integral tanımının yeniden parametrelendirme ile ilişkisinin ne olduğu sorusu gündeme gelecektir. Bu soruya yanıtımızı aşağıdaki önermede vereceğiz:

Önerme 8.9 *Tanım(8.8) deki gösterimleri saklı tutmak kaydıyla $f : Y \to \mathbb{R}$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda*

$$\int_Y f dV = \int_{Y_\alpha} f dV = \int_{Y_\beta} f dV$$

olur.

Bu önerme f fonksiyonunun Y üzerinden integralinin yeniden parametrelendirmeden bağımsız olduğunu ifade eder.

Kanıt. Tanım gereği

$$\begin{aligned}\int_{Y_\alpha} f dV &= \int_A (f\circ\alpha)V(J_\alpha) = \int_A (f\circ\alpha)\left[\det\left(J_\alpha^{tr}.J_\alpha\right)\right]^{1/2}\\ \int_{Y_\beta} f dV &= \int_B (f\circ\beta)V(J_\beta) = \int_B (f\circ\beta)\left[\det\left(J_\beta^{tr}.J_\beta\right)\right]^{1/2}\end{aligned}$$

eşitlikleri için

$$\int_A (f\circ\alpha)V(J_\alpha) = \int_B (f\circ\beta)V(J_\beta)$$

eşitliğini göstermeliyiz.

İlkin $F : B \to \mathbb{R}$ her $x \in B$ için

$$F(x) = ((f\circ\beta).V(J_\beta))\,(x) = \left((f\circ\beta).\left[\det\left(J_\beta^{tr}.J_\beta\right)\right]^{1/2}\right)(x)$$

olmak üzere, değişken değiştirme teoremi gereğince

$$\int_B F = \int_A (F\circ g)|\det(J_g)|$$

eşitliği geçerlidir. Bu eşitlikten

$$\begin{aligned}\int_B F &= \int_A (F\circ g).|\det(J_g)| &(8.2)\\ &= \int_A \left[((f\circ\beta).V\,(J_\beta))\circ g\right].|\det(J_g)| &(8.3)\\ &= \int_A \left[f\circ\beta\circ g\right].\left[V(J_\beta)\circ g\right].|\det(J_g)| &(8.4)\end{aligned}$$

elde edilir.

Sav: $V(J_\alpha) = [V(J_\beta)\circ g]\,.|\det(J_g)|$ olur.

Gerçekten $x \in A$ için $g(x) = y$ yazalım. Kolayca görülür ki, türevin zincir kuralı gereğince

$$J_\alpha(x) = J_\beta(y).J_g(x)$$

olur. Öte yandan

$$\begin{aligned}
[V(J_\alpha(x))]^2 &= \left[\left[\det\left(J_\alpha^{tr}(x).J_\alpha(x)\right)\right]^{1/2}\right]^2 \\
&= \det\left(J_\alpha^{tr}.J_\alpha\right) \\
&= \det\left((J_\beta(y).J_g(x))^{tr}.(J_\beta(y).J_g(x))\right) \\
&= \det\left(J_g^{tr}(x).J_\beta^{tr}(y).J_\beta(y).J_g(x)\right) \\
&= \det(J_\beta^{tr}(y).J_\beta(y)).\det(J_g^{tr}(x).J_g(x)) \\
&= [VJ_\beta(y)]^2.[\det J_g(x)]^2 \\
&= [VJ_\beta(g(x))]^2.[\det J_g(x)]^2
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlik her $x \in A$ için geçerli olduğundan

$$V(J_\alpha) = ([V(J_\beta) \circ g].|\det(J_g)|)$$

elde edilir. Böylece savın kanıtı biter.

(8.4) eşitliği ve sav bize istenen sonucu verir. □

Tanım 8.10 *$f : S \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^k$ nın boş olmayan bir alt kümesi S üzerinde bir dönüşüm ve $g : U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, dönüşümü de S kümesini kapsayan açık bir U kümesi üzerinde bir düzgün dönüşüm, yani $g \in C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$ olsun.*

i) Eğer g dönüşümü

$$g(x) = f(x), \qquad \forall x \in S$$

*koşulunu sağlarsa, o zaman g ye f nin U **kümesine bir düzgün genişlemesi**, yada kısaca bir C^∞**-genişlemesi** denir.*

ii) Eğer f nin bir düzgün genişlemesi varsa f dönüşümü, S üzerinde düzgündür yada C^∞ dur denir. Bu durumda $f \in C^\infty(S)$ yazarız.

Önerme 8.11 *$S \subset \mathbb{R}^k$, $f_1 : S \to f_1(S) = T \subset \mathbb{R}^n$, $f_1 \in C^\infty(S)$ ve $f_2 : T \to \mathbb{R}^p$, $f_2 \in C^\infty(T)$ olsun. Bu durumda $h = f_2 \circ f_1 : S \to \mathbb{R}^p$, dönüşümü de C^∞-sınıfındandır, yani $h \in C^\infty(S)$ olur.*

Kanıt. $f_1 \in C^\infty(S)$ olduğundan $S \subset U_1 \subset \mathbb{R}^k$, şartını sağlayan U_1, açık kümesi ve $g_1 : U_1 \to \mathbb{R}^n$, $g_1 \in C^\infty(U_1)$ dönüşümü vardır. Benzer şekilde $f_2 \in C^\infty(T)$ olduğundan, $f_1(S) = T \subset U_2 \subset \mathbb{R}^k$, şartını sağlayan U_2, açık kümesi ve $g_2 : U_2 \to \mathbb{R}^p$, $g_2 \in C^\infty(U_2)$ dönüşümü vardır. Şimdi g_1 sürekli bir dönüşüm olduğundan $V = g_1^{-1}(U_2) \subset U_1$ açık bir kümedir. O zaman $G = (g_2 \circ g_1) : V \subset U_1 \to \mathbb{R}^p$ dönüşümü h nin istenen koşullarda bir genişlemesidir. İlkin V, $S \subset V \subset \mathbb{R}^k$ ve açık bir küme olma şartlarını sağlar. $G \in C^\infty(V)$ olur. (Çünkü C^∞-sınıfından iki fonksiyonun bileşkesi yine C^∞-sınıfındandır.) Öte yandan her $x \in S$ için

$$\begin{aligned} G(x) &= (g_2 \circ g_1)(x) = g_2(g_1(x)) \\ &= g_2(f_1(x)) = f_2(f_1(x)) = h(x) \end{aligned}$$

eşitliklerinden sonuca ulaşılır. □

Önerme 8.12 $f : S \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^k$ *nın boş olmayan bir alt kümesi* S *üzerinde bir dönüşüm olsun. Eğer her* $x \in S$ *için* x *in bir açık komşuluğu üzerine bir* C^∞*-genişlemesi varsa, o zaman* $f \in C^\infty(S)$ *olur. Yani* f *nin* S *yi kapsayan bir açık küme üzerine, bir* C^∞*-genişlemesi vardır.*

Bu önerme f nin yerel olarak C^∞-sınıfından olmasının, bütün küme üzerinde C^∞-sınıfından olmayı getireceğini ortaya koymaktadır.

Kanıt. $x \in S$ için U_x, x in bir açık komşuluğu ve $g_x : U_x \to \mathbb{R}^n$, dönüşümü, f nin U_x üzerine bir C^∞-genişlemesi olsun. İlkin $\mathcal{F} = \{U_x : x \in S\}$ ailesi S nin bir açık örtüsüdür. $A = \bigcup_{x \in S} U_x$ yazalım. A için $\mathcal{F}$ örtüsüne göre biçilmiş birimin C^∞ bir parçalanışı $\{\psi_i : i = 1, 2, ...\}$ olsun. Her bir i için, ψ_i nin dışında sıfırlandığı L_{ψ_i} tıkız kümesini içeren U_x kümesini seçelim ve $g_x : U_x \to \mathbb{R}^n$ dönüşümünü göstermek için g^i yazalım. Bu durumda

$$\psi_i.g^i = (\psi_i.g_1^i, ..., \psi_i.g_n^i) : U_x \to \mathbb{R}^n$$

dönüşümü $L_{\psi_i} \subset U_x$ tıkız alt kümesi dışında sıfırlanır ve $(\psi_i.g^i) \in C^\infty(U_x)$ olur. O zaman $h_i : A \to \mathbb{R}^n$

$$h_i(x) = \begin{cases} (\psi_i.g^i)(x) & , \quad x \in U_x \\ \overline{0} & , \quad A - U_x \end{cases}$$

olarak tanımlanan h_i dönüşümü için kolayca görülür ki, $h_i \in C^\infty(A)$ olur. Şimdi $G : A \to \mathbb{R}^n$ dönüşümü

$$G(x) = \sum_{i=1}^{\infty} h_i(x), \qquad \forall x \in A$$

olarak tanımlayalım.

Sav: G dönüşümü f nin istenen özelliklerde bir genişlemesidir.

Gerçekten; her $x \in A$ için x in bir komşuluğu vardır öyle ki, h_i fonksiyonlarının sonlu tanesi dışında hepsi sıfır olur ve her bir i için h_i ler C^∞-sınıfından olduklarından, G dönüşümü A üzerinde C^∞-sınıfından olur. Ayrıca her $x \in S$ ve $\psi_i(x) \neq 0$ için

$$h_i(x) = (\psi_i.g^i)(x) = \psi_i(x).f(x)$$

olduğundan,

$$G(x) = \sum_{i=1}^{\infty} h_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} [\psi_i(x).f(x)] = f(x).\sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(x) = f(x).1 = f(x)$$

elde edilir.

Böylece önermenin kanıtı tamamlanmış olur. □

Tanım 8.13

$$\mathbb{H}^k := \Big\{(x_1, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k : x_k \geq 0\Big\}$$
$$\mathbb{H}^k_+ := \Big\{(x_1, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k : x_k > 0\Big\}$$

olarak tanımlanan kümelere sırasıyla $\mathbb{R}^k$ *içerisinde* ***üst yarı-uzay*** *ve* ***açık üst yarı-uzay*** *denir.*

$\mathbb{H}^k$ ve $\mathbb{H}^k_+$ kümeleri, $\mathbb{R}^k$ dan gelen alt uzay topolojisilerine sahiptirler.

$f : S \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^k$ nın herhangi bir alt kümesi S üzerinde bir dönüşüm ve β, γ lar da f nin birer C^∞ genişlemeleri olsunlar. Bu durumda, genel olarak, β ve γ nın Jakobi matrisleri eşit olmak zorunda değildirler. Yani, bazı $x \in S$ için

$$J_\beta(x) \neq J_\gamma(x)$$

olabilir. Ancak, bazı özel seçilmiş kümeler üzerinde, takip eden önermede görüleceği gibi, Jacobi matrisleri eşittir.

Önerme 8.14 *$\alpha : S \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^k$-açık olmayan, ama $\mathbb{H}^k$-açık olan bir S kümesi üzerinde tanımlı bir dönüşüm olsun. Eğer β ve γ lar α nın iki ayrı C^∞-genişlemeleri iseler, o zaman*

$$J_\beta(x) = J_\gamma(x), \qquad \forall x \in S$$

olur. Yani, Jacobi matrisleri, S üzerinde C^∞-genişlemelerinden bağımsızdırlar.

Kanıt. Jakobi-matrisinin tanımlanışı gereği, $x \in S$ için $\dfrac{\partial \beta_i}{\partial x_j}(x)$ değerlerini hesaplayalım. İlkin $x \in S^o$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \beta}{\partial x_j}(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\beta(x+he_j) - \beta(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\alpha(x+he_j) - \alpha(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\gamma(x+he_j) - \gamma(x)}{h} \\
&= \frac{\partial \gamma}{\partial x_j}(x)
\end{aligned}$$

elde edilir. $x \in S \cap \partial\mathbb{H}^k$ olsun. Eğer $j \neq k$ ise

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \beta}{\partial x_j}(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\beta(x+he_j) - \beta(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\alpha(x+he_j) - \alpha(x)}{h} \\
&= \frac{\partial \gamma}{\partial x_j}(x)
\end{aligned}$$

olur. Eğer $j = k$ ise

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \beta}{\partial x_k}(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\beta(x+he_k)-\beta(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+}\frac{\alpha_i(x+he_j)-\alpha(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\gamma(x+he_k)-\gamma(x)}{h} \\
&= \frac{\partial \gamma}{\partial x_k}(x)
\end{aligned}$$

elde edilir ki, buradan her $x \in S$ için $J_\beta(x) = J_\alpha(x)$ olur. □

Böylece α nın bir $x \in S$ noktasındaki Jacobi matrisi, $J_\alpha(x) = J_\beta(x)$ olarak verilir. Bu önerme aşağıdaki tanımlamaları yapmamıza olanak sağlar:

Tanım 8.15 *M kümesi $\mathbb{R}^n$ nin bir topolojik alt uzayı ve $k \le n$ olmak üzere, $U \subset \mathbb{R}^k$ bir alt küme olsun.*

$$\alpha : U \to \alpha(U) = W \subset M \subset \mathbb{R}^n$$

olmak üzere (U, α) ikilisi aşağıdaki şartları sağlasın:

i) U, bir $\mathbb{R}^k$-açık küme

ii) $\alpha \in C^\infty(U)$ ve α $1-1$ bir dönüşüm

iii) $j : M \to \mathbb{R}^n$, $\forall m \in M$ için, $j(m) = m$ olmak üzere

$$\beta = (j \circ \alpha) : U \xrightarrow{\alpha} W \xrightarrow{j} \mathbb{R}^n$$

düzgün bir dönüşüm, yani $\beta \in C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$

iv) $\alpha^{-1} : W \to U$, sürekli bir dönüşüm,

v) Her $x \in U$ için $rank(J_\alpha(x)) = k$,

Bu durumda (U, α) ikilisine, M üzerinde k-boyutlu ***C^∞-sınıfından bir bileşen yaması*** *(yada kısaca,* ***C^∞-yaması*** *veya* ***bileşen yaması*** *) denir.*

Bu tanımda (i)

i^o) U, $\mathbb{R}^k$-açık olmayan, ama $\mathbb{H}^k$-açık olan bir küme

koşulu ile değiştirilirse, o zaman (U, α) *ikilisine,* M *üzerinde* ***k-boyutlu*** C^∞***-sınıfından kabuklu bileşen yaması*** *(yada kısaca,* ***kabuklu*** C^∞***-yaması*** *veya* ***kabuklu bileşen yaması*** *) denir.*

Tanım 8.16 $M \subset \mathbb{R}^n$, *topolojik bir alt uzayı olsun.* $k \leq n$ *olmak üzere, eğer her* $p \in M$ *noktasına karşılık* $p \in W_p = \alpha_p(U_p)$ *olacak şekilde bir*

a) (U_p, α_p) *bileşen yaması varsa,* M *topolojik uzayına,* ***k-boyutlu*** C^∞*-katman yada* ***düzgün k-katman*** *denir.*

b) k-kabuklu, C^∞*-yaması yada k-boyutlu, kabuklu* C^∞*-yaması,* (U, α) *varsa,* M *topolojik uzayına,* ***k-boyutlu kabuklu*** C^∞***-katman (*** *yada* ***kabuklu düzgün k-katman)*** *denir.*

Tanım 8.17 $k = 0$ *özel hali için,* $\mathbb{R}^n$ *içerisindeki ayrık noktalar kümesine* **0-*katman*** *denir.*

Uyarı 8.18 *Tek bileşen yamalı her katman açık olarak parametrelendirilmiş bir katmandır. Öte yandan her parametrelendirilmiş katmanın, katman olması gerekmez. Gerçekten:* $\alpha : U = (0, \pi) \subset \mathbb{R} \to \alpha(U) \subset \mathbb{R}^2$

$$\alpha(t) = (\sin t)(|\cos t|, \sin t), \qquad \forall t \in U$$

olsun. Kolayca görülür ki, $\alpha(U)$ *kümesi* $\mathbb{R}^2$ *içerisinde parametrelendirilmiş bir katman olur. Öte yandan* $\alpha^{-1} : \alpha(U) \to U$ *dönüşümü* $\overline{0} = (0,0) \in \alpha(U)$ *noktasında sürekli değildir. Böylece* $\alpha(U) \subset \mathbb{R}^2$ *bir katman değildir.*

Önerme 8.19 $\mathbb{R}^n$ *içerisinde bir katman* M *olsun.* M *üzerinde bir (kabuklu) bileşen yaması* (U, α) *olsun. Eğer* $U_0 \subset U$, *açık bir küme (burada* U, $\mathbb{R}^k$*-açık ise* U_0 *da* $\mathbb{R}^k$*-açık ve* U, $\mathbb{H}^k$*-açık ise* U_0 *da* $\mathbb{H}^k$*-açık) ise* α *dönüşümünün* U_0 *a kısıtlanmışı* $\alpha_{|U_0}$, *olmak üzere* $\left(U_0, \alpha_{|U_0}\right)$ *ikilisi* M *üzerinde bir (kabuklu) bileşen yaması olur.*

Kanıt. İlkin $U_0 \subset U$, açık bir küme ve $\alpha \in C^\infty(U)$ olduğundan $\alpha_{|U_0} \in C^\infty(U_0)$ olur. Benzer şekilde $\alpha^{-1} : W \to U$ sürekli olduğundan, $\left(\alpha_{|U_0}\right)^{-1} : W_0 \to U_0$ dönüşümü süreklidir. $x \in U$ için $rank(J_\alpha(x)) = k$ ve

$$J_\alpha(x) = J_{\alpha_{|U_0}}(x) \qquad x \in U_0$$

eşitliğinden sonuça ulaşılır. $\square$

Teorem 8.20 *$\mathbb{R}^n$ içerisinde bir katman M olsun. (U_1, α_1) ve (U_2, α_2), M üzerinde iki bileşen yaması olsun. $W_1 \cap W_2 = W$ yazalım. Bu durumda*

$$\xi = \left(\alpha_1^{-1} \circ \alpha_2\right) : \alpha_2^{-1}(W) \subset \mathbb{R}^k \to \alpha_1^{-1}(W) \subset \mathbb{R}^k$$

dönüşümü C^∞-sınıfındandır ve her $x \in \alpha_2^{-1}(W)$ için $\det\left[J_\xi(x)\right] \neq 0$ olur.

Burada ξ dönüşümüne, α_1 ve α_2 dönüşümleri arasında **geçiş dönüşümü** denir.

Kanıt.

Sav 1: M üzerinde herhangi bir bileşen yaması (U, α) ise

$$\alpha^{-1} : W \subset M \subset \mathbb{R}^n \to U \subset \mathbb{R}^k$$

dönüşümünün C^∞-sınıfından olduğunu göstermek yeterlidir.

Gerçekten, bu durumda α_1^{-1} ve α_2, C^∞-sınıfından iki dönüşüm olacaktır. Böylece bu dönüşümlerin bileşkesi de C^∞-sınıfındandır. Öte yandan, benzer bir tartışma ile $\alpha_2^{-1} \circ \alpha_1$ dönüşümünün C^∞-sınıfından olduğu elde edilir. Buradan

$$h = I_{\alpha_2^{-1}(W)} := (\alpha_2^{-1} \circ \alpha_1 \circ \alpha_1^{-1} \circ \alpha_2) : \alpha_2^{-1}(W) \to \alpha_2^{-1}(W)$$

dönüşümü birim dönüşüm olur. Açık olarak her $x \in \alpha_2^{-1}(W)$ için

$$\det\left[J_h(x)\right] \neq 0$$

olur. Böylece türevin zincir kuralı gereğince $\forall x \in \alpha_2^{-1}(W)$ için

$$\det[J_\xi(x)] \neq 0$$

olacağı elde edilir. Böylece savın kanıtı biter.

Sav(1) gereğince Teoremin kanıtlanması, M üzerinde herhangi bir bileşen yaması (U, α) için α^{-1} dönüşümünün C^∞-sınıfından bir genişlemeye sahip olmasına indirgenmiş olur. Öte yandan Önerme(8.12) gereğince, bu genişlemenin yerel olarak varlığının gösterilmesi yeterlidir. Yani α^{-1} dönüşümünün $p \in W$ noktasının $\mathbb{R}^n$-açık bir komşuluğunda tanımlı bir C^∞-genişlemeye sahip olduğunu göstereceğiz:

İlkin U kümesinin $\mathbb{H}^k$-açık ve $\mathbb{R}^k$-açık olmadığı durumu göz önüne alalım:

$\alpha \in C^\infty(U)$ olduğundan, bir $U' \subset \mathbb{R}^k$, $\mathbb{R}^k$-açık kümesi ve $\beta : U' \to \mathbb{R}^n$, $\beta \in C^\infty(U')$ dönüşümü, $U \subset U'$ ve her $x \in U$ için $\beta(x) = \alpha(x)$ olacak şekilde vardır. Her $x \in U$ için

$$J_\beta(x) = J_\alpha(x)$$

olduğundan (Bakınız Önerme(8.14)), her $x \in U$ için $rank(J_\beta(x)) = k$ olur. Böylece $J_\beta(x)$ matrisinde k tane doğrusal bağımsız sütunu vardır. Genelliği bozmadan ilk k sütunun doğrusal bağımsız olduğunu varsayalım. $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, her $x = (x_1, ..., x_k, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$\pi(x) = x = (x_1, ..., x_k)$$

olarak tanımlansın. Şimdi $g = (\pi \circ \beta) : U' \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ olsun. Bu durumda $x_0 \in U'$ için $\det[J_g(x_0)] \neq 0$ olur. Çünkü

$$J_g(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \beta_1}{\partial x_1}(x_0) & \ldots & \frac{\partial \beta_1}{\partial x_k}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \beta_k}{\partial x_1}(x_0) & \ldots & \frac{\partial \beta_k}{\partial x_k}(x_0) \end{bmatrix}_{k \times k}$$

olur. Buradan, Ters Fonksiyon Teoremin gereğince g dönüşümü, x_0 ın bir $W \subset \mathbb{R}^k$, $\mathbb{R}^k$-açık komşuluğundan $g(W) \subset \mathbb{R}^k$, açık kümesi arasında bir difeomorfizmdir.

Sav 2: $f = \left(g^{-1} \circ \pi\right) : \pi^{-1}(g(W)) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ olarak verilen f dönüşümünün p nin bir A, $\mathbb{R}^n$-açık komşuluğunda α^{-1} için aradığımız C^∞-genişleme olur.

İlkin $U \cap W = U_0$, U-açık kümedir. Buradan $W_0 = \alpha(U_0) \subset W$, M içerisinde açık kümedir. Bu ise $\mathbb{R}^n$-açık bir A kümesinin $W_0 = A \cap W$ olarak seçilebileceğini gösterir. Böylece f nin tanım kümesi içerisinde kalacak şekilde, $\mathbb{R}^n$-açık bir A kümesi seçilebilir. Eğer $A \nsubseteq \pi^{-1}(g(W))$ ise $\pi^{-1}(g(W)) \cap A = A'$ istenen şartda olacaktır. Öte yandan $f : A' \to \mathbb{R}^k$, C^∞-sınıfındandır. Çünkü g^{-1} ve π dönüşümleri C^∞-sınıfındandır. Ayrıca $y \in A'$ ise $\alpha(x) = y$ olacak şekilde $x_0 \in U$ vardır. Buradan

$$f(y) = f(\alpha(x)) = g^{-1}(\pi(\alpha(x))) = g^{-1}(\pi(\beta(x))) = g^{-1}(g(x)) = x = \alpha^{-1}(y)$$

elde edilir.

Benzer tartışma, U kümesinin $\mathbb{R}^k$-açık olduğu durum için geçerlidir. Bu durumda yukarıdaki tartışmada $U' = U$ ve $\beta = \alpha$ almak sonuça ulaşmak için yeterlidir. □

Tanım 8.21 $\mathbb{R}^n$ *içerisinde bir katman* M *olsun.* $p \in M$ *için*

i) $p \in W = \alpha(U)$ *olacak şekilde bileşen yamaları* (U, α) *lardan en az biri için* $U \subset \mathbb{R}^k$, $\mathbb{R}^k$*-açık ise* $p \in M$ *noktasına* M *nin bir* ***iç noktası*** *denir.*

ii) $p \in W = \alpha(U)$ *olacak şekilde bileşen yamaları* (U, α) *lar için* $U \subset \mathbb{R}^k$, $\mathbb{R}^k$*-açık olacak şekilde* U *kümesi yoksa, yani* p, *tanım kümesi* $U \subset \mathbb{H}^k$, $\mathbb{H}^k$*-açık ve* $\mathbb{R}^k$*-açık olmayan* U *kümesi üzerinde tanımlı* $\alpha : U \to \alpha(U) = W \subset M$ *dönüşümünü için,* $p \in W$ *ise* $p \in M$ *noktasına* M *nin bir* ***kabuk noktası*** *denir.* M *nin kabuk noktaları kümesini* ∂M *ile göstereceğiz.*

Uyarı 8.22 *Tanım(8.21) den sonra* ∂M *gösteriminin iki anlamı olduğuna işaret edelim. İlki* M *kümesinin topolojik anlamda kabuk noktaları kümesi ve ikincisi* M *nin katman olarak kabuk noktaları kümesi. Bu iki kavramın her zaman aynı* *olmadığını ve gerektiğinde, açık olarak hangisinin kastedildiğinin yazılacağını belirtelim. Öte yandan bu çalışmanın devamında, ∂M gösterimini bir katmanın kabuğu anlamında, kullanacağız.*

Önerme 8.23 $\mathbb{R}^n$ *içerisinde bir katman* M *olsun.* $p \in M$ *ve,* $p \in W = \alpha(U)$ *olacak şekilde bileşen yaması* (U, α) *için,*

i) $U \subset \mathbb{R}^k$, $\mathbb{R}^k$*-açık ise* p *noktası* M *nin bir iç noktasıdır.*

ii) $U \subset \mathbb{H}^k$, $\mathbb{H}^k$*-açık ve bir* $x_0 \in \mathbb{H}^k_+$ *için* $p = \alpha(x_0)$ *ise* p *noktası* M *nin bir iç noktasıdır.*

iii) $U \subset \mathbb{H}^k$, $\mathbb{H}^k$*-açık ve bir* $x_0 \in \left[\partial U \cap \left(\mathbb{R}^{k-1} \times \{0\}\right)\right]$ *(burada* ∂U *ile* U *kümesinin topolojik kabuk noktaları kümesi gösterilmektedir.) için* $p = \alpha(x_0)$ *ise* p *noktası* M *nin bir kabuk noktasıdır.*

Kanıt.

i) İç nokta tanımından hemen görülür.

ii) $U_0 = U \cap \mathbb{H}^k_+$ yazalım. Bu durumda kolayca görülür ki, $U_0 \subset \mathbb{R}^k$, $\mathbb{R}^k$-açık bir kümedir. O zaman $p \in W_0 = \alpha(U_0)$ olacak şekilde, $\left(U_0, \alpha_{|_{U_0}}\right)$ bir bileşen yamasıdır (bakınız Önerme(8.18)). Böylece yine iç nokta tanımından sonuca ulaşılır.

iii) $U_1 \subset \mathbb{H}^k$, $\mathbb{H}^k$-açık ve $\mathbb{R}^k$-açık olmayan bir küme ve $p \in W_1 = \alpha_1(U_1)$ olacak şekilde bir bileşen yaması (U_1, α_1) olsun.

Varsayalım ki, p noktası M nin bir iç noktası olsun. Yani $U_2 \subset \mathbb{R}^k$, $\mathbb{R}^k$-açık ve $p \in W_2 = \alpha_2(U_2)$ olacak şekilde bir bileşen yaması (U_2, α_2) var olsun. Bu durumda

$$\alpha_1(U_1) \cap \alpha_2(U_2) = W_1 \cap W_2 = W$$

kümesi, M-açık bir küme olur. $i = 1, 2$ için, $L_i = \alpha_i^{-1}(W)$ yazalım. Bu durumda

$$\xi = \left(\alpha_2^{-1} \circ \alpha_1\right) : L_1 \to L_2$$

geçiş dönüşümü, 1-1 ve sürekli bir dönüşümdür. Öte yandan bu iki koşul ile ξ dönüşümü bir homeomorfiz olur ki, bu mümkün değildir. Çünkü $L_1 \subset \mathbb{R}^k$, $\mathbb{R}^k$-açık bir küme değildir. Öte yandan $\xi(L_1) = L_2 \subset \mathbb{R}^k$, $\mathbb{R}^k$-açık bir kümedir. Öyleyse bu bir çelişkidir. O zaman varsayımımız yanlış yani p noktası M nin bir iç noktası değildir. Buradan $p \in \partial M$ elde edilir. □

Örnek 8.24

$\mathbb{H}^k \subset \mathbb{R}^k$ topolojik alt uzayını ve $\mathbb{H}^k \subset \mathbb{H}^k$, $\mathbb{H}^k$-açık bir küme için $i : \mathbb{H}^k \to \mathbb{R}^k$

$$i(x) = x, \qquad \forall x \in \mathbb{H}^k$$

dönüşümünü göz önüne alalım. Her $x \in \mathbb{H}^k$ için $\left(\mathbb{H}^k, i\right)$ ikilisi $\mathbb{H}^k$ üzerinde bir bileşen yamasıdır. Böylece $\mathbb{H}^k$ alt uzayı $\mathbb{R}^k$ içerisinde C^∞-sınıfından k-boyutlu kabuklu bir katman olur. Kolayca görülür ki, $\partial\mathbb{H}^k = \mathbb{R}^{k-1} \times \{0\}$ olur.

Teorem 8.25 *$\mathbb{R}^n$ içerisinde C^∞-sınıfından k-boyutlu bir katman M olsun. Eğer $\partial M \neq \varnothing$ ise $\partial M \subset \mathbb{R}^n$, kümesi $\mathbb{R}^n$ standart topolojisinin indirgediği alt uzay topolojisi ile C^∞-sınıfından (k–1)-boyutlu bir katman olur.*

Kanıt. $p \in \partial M$ ve $\alpha : U \subset \mathbb{H}^k \to \alpha(U) = W \subset M$, ve $p \in W$ olmak üzere, (U, α) ikilisi M üzerinde bir bileşen yaması olsun. Bir $x \in \mathbb{R}^k \times \{0\}$ için $\alpha(x) = p$ yazalım. Önerme(8.22) den $y \in U \cap \mathbb{H}^k_+$ ise $\alpha(y)$, M nin bir iç noktasıdır. Benzer şekilde $y \in U \cap \partial\mathbb{H}^k$ ise $\alpha(y) \in \partial M$ olur. Böylece α dönüşümünün $U \cap \partial\mathbb{H}^k$ kümesine kısıtlanmışı, $U \cap \partial\mathbb{H}^k \subset \partial\mathbb{H}^k$, $\partial\mathbb{H}^k$-açık kümesinden ∂M nin $W \cap \partial M = W_0$, ∂M-açık kümesi üzerine 1-1 bir dönüşümdür. $U_0 \times \{0\} = U \cap \partial\mathbb{H}^k$ olacak şekilde $U_0 \subset \mathbb{R}^{k-1}$, $\mathbb{R}^{k-1}$-açık kümesini seçelim. $\alpha_0 : U_0 \subset \mathbb{R}^{k-1} \to \alpha_0(U_0) = W_0 \subset \partial M$ her $x \in U_0$ için

$$\alpha_0(x) = \alpha((x, 0))$$

olarak tanımlayalım.

Sav: (U_0, α_0), $p \in W_0$ olacak şekilde ∂M üaerinde bir bileşen yamasıdır.

i) α dönüşümü C^∞-sınıfından olduğundan, α_0-dönüşümü C^∞-sınıfındandır.

ii) $\pi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{k-1}$ her $x = (x_1, ..., x_{k-1}, x_k) \in \mathbb{R}^k$ için

$$\pi(x) = (x_1, ..., x_{k-1})$$

olmak üzere, her $y \in W_0$ için $\left(\alpha_0^{-1}\right)(y) = \left(\pi(\alpha^{-1}_{|V_0})\right)(y)$ eşitliğinden ötürü α_0^{-1} sürekli bir dönüşümdür.

iii) Her $x \in U_0$ için $rank\,(J_{\alpha_0}(x)) = k - 1$ olur. Çünkü $J_{\alpha_0}(x)$ matrisi $J_\alpha(x, 0)$ matrisinin ilk (k-1) sütununa eşittir. $\square$

Teorem 8.26 *$A \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n$-açık bir küme, $f : A \to \mathbb{R}$ ve $f \in C^\infty(A)$ olsun.*

$$M = \{x \in A : f(x) = 0\} \qquad \textit{ve} \qquad N = \{x \in A : f(x) \geq 0\}$$

yazalım. Varsayalım ki, $M \neq \varnothing$ ve her $x \in M$ için $rank\,[J_f(x)] = 1$ olsun. Bu durumda N, $\mathbb{R}^n$ içerisinde C^∞-sınıfından bir n-katmandır ve $\partial N = M$ olur.

Kanıt.

i) $p \in N$ ve $f(p) > 0$ olsun.

$U = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > 0\}$ ve $\alpha : U \to U$ her $x \in U$ için

$$\alpha(x) = x$$

olsun. Böylece (U, α) ikilisinin N üzerinde bir bileşen yaması olacağı açıktır.

ii) $p \in N$ ve $f(p) = 0$ olsun. $rank\,[J_f(p)] = 1$ olduğundan

$$J_f(p) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{n \times 1}$$

olur. Genelliği bozmadan varsayalım ki, $\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(p) \neq 0$ olsun. $F : A \to \mathbb{R}^n$

$$F(x) = (x_1, ..., x_{n-1}, f(x)), \qquad \forall x = (x_1, ..., x_{n-1}, x_n) \in A$$

olsun.

$$J_F = \begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \\ * & \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

için $\det[J_F(p)] \neq 0$ olur. Böylece Ters Fonksiyon Teoremi gereğince F dönüşümü, p nin bir A_1, $\mathbb{R}^n$-açık komşuluğu ile $F(p)$ nin bir A_2, $\mathbb{R}^n$-açık komşuluğu arasında difeomorfizm olur. Öte yandan $x \in N$ gerek ve yeter koşul $f(x) \geq 0$ olması sebebiyle, N nin $A_1 \cap N$, N-açık kümesi için $F(A_1 \cap N) = A_2 \cap \mathbb{H}^n \subset \mathbb{H}^n$, $\mathbb{H}^n$-açık kümesine taşır. Benzer şekilde $x \in M$ gerek ve yeter koşul $f(x) = 0$ olması sebebiyle, M nin $A_1 \cap M$, M-açık kümesi için $F(A_1 \cap M) = A_2 \cap \partial\mathbb{H}^n \subset \partial\mathbb{H}^n$, $\partial\mathbb{H}^n$-açık kümesine resmeder. O zaman $F^{-1} : A_2 \cap \mathbb{H}^n \to A_1 \cap N$ olmak üzere $(A_2 \cap \mathbb{H}^n, F^{-1})$, ikilisi N üzerinde bir bileşen yaması olur.

(i) ve *(ii)* den N, C^∞-sınıfından k-boyutlu kabuklu bir katman olur.

Sav: $\partial N = M$.

a) $M \subset \partial N$ olur. Gerçekten $p = (p_1, ..., p_{n-1}, p_n) \in M$ olsun. $f(p) = 0$,

$$\begin{aligned} F(p) &= (p_1, ..., p_{n-1}, f(p)) \\ &= (p_1, ..., p_{n-1}, 0) \\ &= q \end{aligned}$$

$q \in A_2 \cap \partial\mathbb{H}^n$ olduğundan $p \in \partial N$ olur.

b) $\partial N \subset M$ olur. Gerçekten $p \in \partial N$ olsun. Bu durumda $p \in F^{-1}(A_1 \cap \partial\mathbb{H}^n)$ olur. Yani $p = F^{-1}(p_1, ..., p_{n-1}, 0)$ ve buradan $f(p) = 0$, ve $p \in M$ elde edilir. Böylece savın kanıtı biter. □

Tanım 8.27 *$a > 0$, $a \in \mathbb{R}$ için $B^n(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| \leq a\}$ kümesine $\mathbb{R}^n$ içerisinde* ***n-top*** *denir. $S^{n-1}(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| = a\}$ kümesine $\mathbb{R}^n$ içerisinde* ***(n–1)-küre*** *denir. Daha genel olarak, $b = (b_1, ..., b_n)$, $b_i \in \mathbb{R}$ ve $b_i > 0$, $i = 1, ..., n$ olmak üzere $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ için*

$$r_k^b(x) := \sum_{i=1}^{k} b_i x_i^2 - \sum_{i=k+1}^{n} b_i x_i^2$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_k^b(a) &= \left\{x \in \mathbb{R}^n : r_k^b(x) \leq a\right\} \\ \mathcal{B}_k^b(a) &= \left\{x \in \mathbb{R}^n : r_k^b(x) = a\right\}\end{aligned}$$

kümelerine sırasıyla, $\mathbb{R}^n$ *içerisinde,* ***n-küremsi*** *ve* ***n-yuvarımsı*** *denir.*

Sonuç 8.28 *i)* $\mathbb{R}^n$ *içerisinde* $B^n(a)$ *n-topu,* C^∞*-sınıfından kabuklu bir n-katmandır ve* $\partial B^n(a) = S^{n-1}(a)$ *olur.*

ii) $\mathbb{R}^n$ *içerisinde n-küremsi* $\mathcal{K}_k^b(a)$*,* C^∞*-sınıfından kabuklu bir n-katmandır ve* $\partial \mathcal{K}_k^b(a) = \mathcal{B}_k^b(a)$ *olur.*

Kanıt.

i) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$f(x) = a^2 - ||x||^2$$

olsun. Kolayca görülür ki,

$$J_f(x) = [-2x_1, ..., -2x_n]$$

ve her $x \in S^{n-1}$ için $J_f(x) \neq \overline{0}$ olur. Böylece Terorem(8.25) den sonuç elde edilir.

ii) $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$g(x) = a - r_k^b(x)$$

olsun. Kolayca görülür ki,

$$J_g(x) = [-2b_1x_1, ..., -2b_kx_k, 2b_{k+1}x_{k+1}, ..., 2b_nx_n]$$

ve her $x \in \mathcal{B}_k^b(a)$ için $J_g(x) \neq \overline{0}$ olur. Böylece Terorem(8.25) den sonuç elde edilir.
□

Bu bölüm içerisinde, bundan sonra $M \subset \mathbb{R}^n$, topolojik alt uzayının tıkız olduğu, M katmanlarını ele alacağız. Bu bağlamda M ile $\mathbb{R}^n$ içerisinde C^∞-sınıfından tıkız bir k-katmanı göstereceğiz.□

Tanım 8.29 *$f : M \to \mathbb{R}$, sürekli bir dönüşüm olsun. $A = \{x \in M : f(x) \neq 0\}$ olmak üzere*

$$suppf = \overline{A}$$

olarak tanımlanan kümeye, f ***fonksiyonunun dayanağı*** *denir. Burada $\overline{A}$ kümesi, A nın topolojik kapanışıdır.*

Tanım 8.30 *$f : M \to \mathbb{R}$, sürekli bir dönüşüm ve M üzerinde bir bileşen yaması (U, α) aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde var olsun:*

i) $C = suppf \subset \alpha(U) = W$

ii) $U \subset \mathbb{R}^k$, sınırlı bir küme

Bu durumda f fonksiyonunun M üzerinden integrali,

$$\int_M f dV = \int_{U^o} (f \circ \alpha) V(J_\alpha) = \int_{U^o} (f \circ \alpha) \left(\det \left(J_\alpha^{tr}.J_\alpha\right)\right)^{1/2}$$

olarak verilir. Burada U, $\mathbb{R}^k$-açık bir küme ise $U^o = U$ ve U, $\mathbb{H}^k$-açık bir küme, $\mathbb{R}^k$-açık olmayan bir küme ise $U^o = U \cap \mathbb{H}_+^k$ olarak tanımlıdır.

Bu tanımlama için aşağıdaki gözlemde bulunalım:

$F : U \to \mathbb{R}$ her $x \in U$ için

$$F(x) = ((f \circ \alpha)V(J_\alpha))(x)$$

olsun. F fonksiyonu U üzerinde sürekli olacağı açıktır. Ayrıca F fonksiyonu $\alpha^{-1}(C) \subset U$, tıkız kümesi dışında sıfırlanır ve böylece F sınırlı bir foksiyondur. Eğer U, $\mathbb{R}^k$-açık bir küme ise $K = \{x \in \partial U : F(x) \neq 0\} = \varnothing$ sıfır ölçümlüdür ve Önerme(3.24) gereğince F fonksiyonu U üzerinde integrallenebilirdir. Eğer U, $\mathbb{H}^k$-açık bir küme, $\mathbb{R}^k$-açık olmayan bir küme ise bu kez $K' = \{x \in \partial U : F(x) \neq 0\} \subset \partial \mathbb{H}^k$ sıfır ölçümlü olacağından yine Önerme(3.24) gereğince F fonksiyonu U üzerinde integrallenebilir olacaktır. Böylece $\int_M f dV$ integralinin bir değeri her zaman vardır. Öte yandan doğal olarak şöyle bir soru akla gelebilir: Eğer $C =$

$suppf \subset \alpha_1(U_1) = W_1$ olacak şekilde başka bir (U_1, α_1) bileşen yaması varsa integral değeri değişir mi? Bu soruya yanıtımızı aşağıdaki önermede veriyoruz:

Önerme 8.31 *$f : M \to \mathbb{R}$, sürekli fonksiyonu için $\int_M f dV$ integrali iyi tanımlıdır. Yani (U_1, α_1) ve (U_2, α_2) bileşen yamaları için $suppf \subset \alpha_1(U_1) = W_1$ ve $suppf \subset \alpha(U_2) = W_2$ ise*

$$\int_{U_1^o} (f \circ \alpha_1) V(J_{\alpha 1}) = \int_{U_2^o} (f \circ \alpha_2) V(J_{\alpha_2})$$

olur.

Kanıt. İlkin $suppf \subset \alpha(U) = W$ olacak şekilde herhangi bir bileşen yaması (U, α) için aşağıdaki gözlemde bulunalım:

Gözlem: $Z \subset U$, açık bir küme ve $suppf \subset Z$ ise

$$\int_{Z^o} (f \circ \alpha) V(J_\alpha) = \int_{U^o} (f \circ \alpha) V(J_\alpha)$$

eşitliği, $(f \circ \alpha)V(J_\alpha)$ fonksiyonunun Z dışında sıfırlanması sebebiyle geçerlidir.

Şimdi $W = W_1 \cap W_2$ ve $i = 1, 2$ için $A_i = \alpha_i^{-1}(W)$ yazalım. Yukarıdaki gözlem gereğince

$$\int_{U_1^o} (f \circ \alpha_1) V(J_{\alpha_1}) = \int_{U_2^o} (f \circ \alpha_2) V(J_{\alpha_2})$$

eşitliğini kanıtlamak için

$$\int_{A_1^o} (f \circ \alpha_1) V(J_{\alpha_1}) = \int_{A_2^o} (f \circ \alpha_2) V(J_{\alpha_2})$$

eşitliğini kanıtlamak yeterlidir. Bu eşitlik ise Önerme(8.9) un sonucudur. $\square$

Şimdi genel olarak, tıkız bir M katmanı üzerinde sürekli f fonksiyonunun integralini tanımlayacağız. Bu tanımlama için M üzerinde bir birimin parçalanışının varlığı gerekmektedir.

Önerme 8.32 $\{(U_r, \alpha_r) : r \in \Gamma,$ *bir indkes kümesi$\}$ olmak üzere*

$$\{\alpha_r(U_r) = W_r : r \in \Gamma\}$$

ailesi M katmanının bir M-açık örtüsü olsun. Bu örtüye karşılık aşağıdaki şartları sağlayacak şekilde öğeleri C^{∞}-sınıfından olan

$$\Phi = \{\varphi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} |\ i = 1, ..., l\}$$

ailesi vardır:

i) $\forall x \in \mathbb{R}^n$ *için* $\varphi_i(x) \geq 1, \ \ i = 1, ..., l$

ii) $\forall i = 1, ..., l$ *için* $supp\varphi_i \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n$*-tıkız ve* $supp\varphi_i \cap M \subset V_i$ *olur.*

iii) $\forall x \in M$ *için*

$$\sum_{i=1}^{l} \varphi_i(x) = 1$$

Φ ailesine M *üzerinde bileşen yamalarına göre biçilmiş bir birimin parçalanışı* denir.

Kanıt. $\mathcal{A} = \{A_r : W_r = A_r \cap M\}$ ve $L = \bigcup\limits_{r \in \Gamma} A_r$ yazalım. $\mathcal{A}$ ailesi M katmanının bir $\mathbb{R}^n$-açık örtüsüdür. Ayrıca L kümesinin de bir açık örtüsü olan $\mathcal{A}$ ya göre biçilmiş bir birimin parçalanışı

$$\Psi = \{\psi_j : j \in J, \text{ bir indeks kümesi}\}$$

olsun. Bu durumda biliyoruz ki, aşağıdaki dört koşul sağlanır:

1) $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için $\psi_j(x) \geq 0, \quad j \in J$

2) $\forall x \in L$ için x in bir W_x ($\mathbb{R}^n$-açık) komşuluğu vardır öyle ki, $\psi_j \in \Psi$ fonksiyonlarının sonlu tanesi dışında hepsi sıfır olur.

3) $\forall x \in L$ için

$$\sum_{j \in J} \psi_j(x) = 1$$

4) $\forall j \in J$ için $K_j \subset A_j$, $\mathbb{R}^n$-tıkız alt kümesi vardır öyle ki, $\forall x \in A_j - K_j$ için $\psi_j(x) = 0$ olur.

Şimdi (2) özelliğinden ötürü Ψ ailesinin sonlu sayıda elemanı dışında bütün elemanları M nin üzerinde sıfırlanır. Böylece Ψ ailesinin bu sonlu elamanı

$$\Phi = \{\varphi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} |\ i = 1, ..., l\}$$

olarak yazılırsa, kolayca *(i)*,*(ii)* ve *(iii)* nin sağlandığı görülür. □

Tanım 8.33 *$f: M \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $\Phi = \{\varphi_i |\ i = 1, ..., l\}$ ailesi M üzerinde bileşen yamalarına göre biçilmiş bir birimin parçalanışı olsun. Bu durumda f nin M üzerinden integrali*

$$\int_M f dV = \sum_{i=1}^{l} \left[\int_M (\varphi_i f) dV \right]$$

olarak verilir.

Önerme 8.34 *$f : M \to \mathbb{R}$, sürekli bir dönüşüm ve M üzerinde bir bileşen yaması (U, α) için $suppf \subset \alpha(U) = W$ olsun. Φ ailesin de M üzerinde bileşen yamalarına göre biçilmiş bir birimin parçalanışı olsun. Bu durumda*

$$\int_M f dV = \int_{U^o} (f \circ \alpha) V(J_\alpha) = \sum_{i=1}^{l} \left[\int_M (\varphi_i f) dV \right]$$

olur.

Bu önerme Tanım(8.30) ile Tanım(8.33) ün uyumlu olduğunu ortaya koymaktadır.

Kanıt.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{l} \left[\int_M (\varphi_i f) dV \right] &= \sum_{i=1}^{l} \left[\int_{U^o} (\varphi_i \circ \alpha)(f \circ \alpha) V(J_\alpha) \right], \quad \text{(tanımdan)} \\ &= \int_{U^o} \sum\nolimits_{i=1}^{l} (\varphi_i \circ \alpha)(f \circ \alpha) V(J_\alpha), \quad \text{(integralin doğrusallık özelliği)} \\ &= \int_{U^o} (f \circ \alpha) V(J_\alpha), \qquad \sum\nolimits_{i=1}^{l} (\varphi_i \circ \alpha) = 1 \ \ \forall x \in U^o \\ &= \int_M f dV \qquad\qquad \text{(tanımdan)} \end{aligned}$$

elde edilir. □

Önerme 8.35 *Birimin parçalanışı ile verilen integral tanımı iyi tanımlıdır. Yani birimin parçalanışı seçilişinden bağımsızdır.*

Kanıt. $\Phi = \{\varphi_i |\ i = 1, ..., l\}$ ve $\Omega = \{\psi_j |\ i = 1, ..., m\}$ M üzerinde bileşen yamalarına göre biçilmiş iki birimin parçalanışı olsunlar. Bu durumda

$$\sum_{i=1}^{l}\left[\int_M (\varphi_i f)dV\right] = \sum_{j=1}^{m}\left[\int_M (\psi_j f)dV\right]$$

olduğunu göstereceğiz.

İlk olarak

$$\int_M (\varphi_i f)dV = \sum_{j=1}^{m}\left[\int_M (\varphi_i \psi_i f)dV\right]$$

olur. i üzerinden toplam alınırsa

$$\sum_{i=1}^{l}\left[\int_M (\varphi_i f)dV\right] = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\left[\int_M (\varphi_i \psi_i f)dV\right] \tag{8.5}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\int_M (\psi_j f)dV = \sum_{i=1}^{l}\left[\int_M (\varphi_i \psi_j f)dV\right]$$

ve bu kez j üzerinden toplam alınırsa

$$\sum_{j=1}^{m}\left[\int_M (\psi_j f)dV\right] = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{l}\left[\int_M (\varphi_i \psi_j f)dV\right] \tag{8.6}$$

elde edilir. (8.5) ve (8.6) dan sonuç elde edilir. □

Önerme 8.36 *$f, g : M \to \mathbb{R}$, sürekli fonksiyonlar ve $a, b \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda*

$$\int_M (af + bg)dV = a\int_M f dV + b\int_M g dV$$

olur.

Kanıt. M üzerinde bileşen yamalarına göre biçilmiş bir birimin parçalanışı $\Phi = \{\varphi_i |\ i = 1, ..., l\}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\int_M (af + bg)dV &= \sum_{i=1}^{l} \left[\int_M (\varphi_i(af + bg))dV \right] \\
&= \sum_{i=1}^{l} \left[\int_M (\varphi_i(af) + \varphi_i(bg))dV \right] \\
&= \sum_{i=1}^{l} \left[\int_M (\varphi_i(af))dV \right] + \sum_{i=1}^{l} \left[\int_M (\varphi_i(bg))dV \right] \\
&= a\sum_{i=1}^{l} \left[\int_M (\varphi_i f)dV \right] + b\sum_{i=1}^{l} \left[\int_M (\varphi_i g)dV \right] \\
&= a\int_M f dV + b\int_M g dV
\end{aligned}$$

elde edilir. $\square$

Tanım 8.37 $\mathbb{R}^n$ *içerisinde* C^∞*-sınıfından tıkız bir k-katman* M *olsun.* $K \subset M$*, eğer sayılabilir çoklukta* (U_i, α_i) *bileşen yaması için*

$$K_i = \alpha_i^{-1}(K \cap U_i) \subset \mathbb{R}^k$$

kümelerinin herbirinin k-ölçümü sıfır ise K *kümesine,* M *içerisinde* ***sıfır ölçümlü bir küme*** *denir.*

Bu tanıma denk bir koşul M üzerinde herhangi bir bileşen yaması (U, α) için

$$K_\alpha = \alpha^{-1}(K \cap U) \subset \mathbb{R}^k$$

kümesinin k-ölçümünün sıfır olmasıdır.

Teorem 8.38 $\mathbb{R}^n$ *içerisinde aşağıdaki koşulları sağlayan,* C^∞*-sınıfından tıkız bir k-katman* M *olsun:*

i) $U_i \subset \mathbb{R}^k$, $\mathbb{R}^k$*-açık ve* U_i *sınırlı bir küme* $(i = 1, ..., r)$

ii) $\alpha_i : U_i \to M_i \subset M$, (U_i, α_i), M *üzerinde bileşen yamaları,* $i = 1, ..., r$

iii) $K \subset M$, M *içerisinde sıfır ölçümlü bir küme* *iv)* $M = (\bigcup_{i=1}^{r} M_i) \cup K,$ *buradaki birleşim ayrıktır,*

$f : M \to \mathbb{R}$ *sürekli olsun. Bu durumda*

$$\int_M f dV = \sum_{i=1}^{r} \left[\int_{M_i} f dV \right] = \sum_{i=1}^{r} \left[\int_{U_i} (f \circ \alpha_i) V(J_{\alpha_i}^{tr} . J_{\alpha_i}) \right] \tag{8.7}$$

olur.

Kanıt. (8.7) eşitliğinin her iki yanı f ye göre doğrusal olduğundan, f nin bir (U, α) bileşen yaması için $suppf \subset W = \alpha(U)$, özelliğinde olduğu durum için kanıtı yapmak yeterlidir. Bu durumda f fonksiyonunun M üzerinden integrali

$$\int_M f dV = \int_{U^o} (f \circ \alpha) V(J_\alpha)$$

olarak verilmişti. Şimdi aşağıdaki gözlemlerde bulunalım:

Gözlem 1: $W_i = \alpha^{-1}(M_i \cap W)$ ve $L = \alpha(K \cap W)$ yazalım. Bu durumda $U = (\bigcup_{i=1}^{r} W_i) \cup L$ olur ve bu birleşim ayrıktır. Ayrıca $W_i \subset \mathbb{R}^k$, $\mathbb{R}^k$-açık ve $L \subset \mathbb{R}^k$, nın k-ölçümü sıfırdır.

Şimdi,

$$\int_M f dV = \sum_{i=1}^{r} \left[\int_{W_i} (f \circ \alpha) V(J_\alpha) \right]$$

eşitliğini gösterelim. ilkin;

Sav 1: Her bir i için, W_i üzerinde integral vardır.

Gerçekten $F = (f \circ \alpha) V(I_\alpha) : U \to \mathbb{R}$, sınırlı sürekli bir fonksiyondur. Ayrıca $x \notin L$ ve $x \in \partial W_i$ için $F(x) = 0$ olur. O zaman Teorem(3.25) den, F fonksiyonu W_i üzerinde integre edilebilirdir. Böylece Savın kanıtı biter.

Şimdi

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{r} \left[\int_{W_i} F \right] &= \int_{U^0 - L} F && \text{(toplamsallıktan)} \\
&= \int_{U^0} F && \text{(L nin sıfır ölçümlü oluşundan)} \\
&= \int_M f dV && \text{(tanım gereği)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Sav 2: $F_i = (f \circ \alpha_i)V(J_{\alpha_i}) : U_i \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\int_{W_i} F = \int_{U_i} F_i$$

olur.

Gözlem 2: $\alpha_i^{-1} \circ \alpha : W_i \to Z_i = \alpha_i^{-1}(M_i \cap W)$ difeomorfizmi, W_i $\mathbb{R}^k$-açık kümesini, $Z_i = \alpha_i^{-1}(M_i \cap W)$ $\mathbb{R}^k$-açık kümesine taşır. Böylece Değişken Değiştirme Teoremi gereğince

$$\int_{W_i} F = \int_{Z_i} F_i$$

elde edilir.

Öte yandan

$$\int_{Z_i} F_i = \int_{U_i} F_i$$

olur. Gerçekten $C = suppf \subset M$, M-kapalı bir küme olduğundan $\alpha_i^{-1}(C) \subset Z_i$, $\mathbb{R}^k$-kapalıdır ve bu kümenin tümleyeni

$$H_i = U_i - \alpha_i^{-1}(C)$$

$\mathbb{R}^k$-açık bir kümedir. F_i fonksiyonu H_i üzerinde sıfırlanır. Böylece

$$\begin{aligned} \int_{U_i} F_i &= \int_{Z_i} F_i + \int_{H_i} F_i - \int_{Z_i \cap H_i} F_i \\ &= \int_{Z_i} F_i \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece Sav(2) nin kanıtı tamamlanır.

Sav(1) ve Sav(2) den kanıt tamamlanır. □

KAYNAKLAR

[1] Spivak, M., *Calculus on Manifold* Addison-Wesley Publishing Company, New York, 1965.

[2] Munkres, J.M., *Analysis on Manifolds* Westview Press, A.B.D. ,1991.

[3] Apostol, T.M.,*Mathematical Analysis* ADDISON-PUBLISHING COMPANY, London,1974.

[4] Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis* McGraw-Hill,London, 1976.