KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLERİN RADYAL TÜREVLERİ VE UYGULAMALARI

Gonca İNCEOĞLU

Doktora Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Ekim-2008

JÜRİ ve ENSTİTÜ ONAYI

Gonca İNCEOĞLU' nun " **Küme Değerli Dönüşümlerin Radyal Türevleri ve Uygulamaları**" başlıklı Matematik Anabilim Dalındaki Doktora tezi 26.09.2008 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	Adı Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	**: Doç. Dr. REFAİL KASIMBEYLİ**	**……**
Üye	**: Prof. Dr. YALÇIN KÜÇÜK**	**…….**
Üye	**: Prof. Dr. MEMMEDAĞA MEMMEDLİ**	**…….**
Üye	**: Prof. Dr. ABBAS AZİMLİ**	**.........**
Üye	**: Doç. Dr. HALUK HÜSEYİN**	**…….**

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu' nun ……………… tarih ve ……………….sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLERİN RADYAL TÜREVLERİ VE UYGULAMALARI

Gonca İNCEOĞLU

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Refail KASIMBEYLİ

2008, 67sayfa

Bu tezde konveks olmayan küme değerli dönüşümler için radyal epitürev kavramının bir genellemesi olan genelleştirilmiş radyal epitürev kavramı ve bu kavramla çok yakın ilişkili olan iki yeni epitürev kavramı tanımlanmıştır. Bu yeni epitürevler yardımıyla konveks olmayan küme değerli optimizasyonda optimallik koşulları elde edilmiştir.

Bu çalışmada öncelikle gerekli temel tanımlar verilmiştir. Sonra klasik subdiferansiyelin bir genellemesi olan zayıf subdiferansiyel kavramı verilmiştir. Bu kavramın bazı temel özellikleri ve konveks olamayan durumda yöne göre türevle arasındaki ilişki incelenmiştir. Bir küme değerli dönüşüm için radyal epitürev kavramının özellikleri incelenmiş ve bu kavram konvekslik ve sınırlılık varsayımları olmaksızın küme değerli optimizasyon problemleri için gerekli ve yeterli optimallik koşullarını elde etmek için kullanılmıştır. Konveks olmayan küme değerli dönüşümler için radyal epitürevin bir genellemesi olan genelleştirilmiş radyal epitürev kavramı tanımlanmış ve özellikleri incelenmiştir. Bu kavram yardımıyla gerekli ve yeterli optimallik koşulları elde edilmiştir. Bilinen genelleştirilmiş radyal epitürev kavramı geliştirilmiş ve iki yeni epitürev tanıtılmıştır. Bu epitürevlerin varlık teoremleri ve karakterizasyonları verilmiştir. Aynı zamanda genelleştirilmiş radyal epitürev ve radyal epitürev arasındaki ilişki incelenmiştir. En son olarak skalerizasyon yoluyla Benson has etkinliğin karakterizasyonu ile ilgili önemli teorem ispatlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Küme Değerli Optimizasyon, Küme Değerli Analiz, Radyal Epitürev, Genelleştirilmiş Radyal Epitürev, Radyal Koni, Optimallik Koşulları

ABSTRACT

PhD Dissertation

RADIAL DERIVATIVES AND APPLICATIONS OF SET VALUED MAP

Gonca İNCEOĞLU

Anadolu University
Graduate School of Sciences
Mathematics Program

Supervisor: Doç. Dr. Refail KASIMBEYLİ
2008, 67 pages

In this thesis for nonconvex set valued mapping generalized radial epiderivative concept which is generalization of radial epiderivative and two new concept related to its are defined. With the aid of this epiderivatives for nonconvex set valued map optimality conditions is obtained.

In this work firstly necessary fundamental definitions is given. Later weakly subdifferential which is generalization of classical subdifferential is given. Some basic property of this concept and for nonconvex situation its relation with directional derivative are investigated. The radial epiderivative concept for a set valued map is examined and this concept is exercised to obtained necessary an sufficient optimality conditions without convexity and boundless assumptions. The generalized radial epiderivative which is generalization of radial epiderivative concept is introduced and its roperty are investigated. With the aid of this concept necessary and sufficient optimality conditions are obtained. Knowing generalized radial epiderivative is developed and two new concept are introduced. Existence theorems of this epiderivatives and characterizations are given. At the same time the relation between radial epiderivative and generalized radial epiderivtives is investigated. Finally via scalarization the characterization theorem of Benson proper efficiency is proved.

Keywords : Set-valued Optimization, Radial Cones, Radial Epiderivative, Generalized Radial Epiderivative, Optimalitiy Conditions.

TEŞEKKÜR

Doktora çalışmam boyunca fikirleriyle her zaman yol gösteren ve beni daima çalışmaya sevk eden çok değerli hocam ve tez danışmanım Doç. Dr. Refail KASIMBEYLİ ‘e ve her zaman bana destek olan yüksek lisans tez hocam Prof. Dr. Yalçın KÜÇÜK’ e , seminer çalışmalarında bulunduğumuz Yrd. Doç. Dr. Nergis KASIMBEYLİ, Prof. Dr. Maide KÜÇÜK hocalarımıza ve arkadaşım Mustafa SOYERTEM’ e bu süreçte oğlumu büyütürken maddi ve manevi olarak destek olan anneme, babama, eşime ve tabi ki çok sevgili canım oğlum Alp’e teşekkürü bir borç bilirim.

Gonca İNCEOĞLU

Ekim - 2008

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

X	:	Gerçel topolojik lineer uzay
X'	:	X uzayının cebirsel duali
X^*	:	X uzayının topolojik duali
S+T	:	İki kümenin cebirsel toplamı
S-T	:	İki kümenin cebirsel farkı
λS	:	Kümenin skaler çarpımı (gerçel bir λ için)
cor(S)	:	S kümesinin cebirsel içi
int(S)	:	S kümesinin içi
cl(S)	:	S kümesinin kapanışı
C	:	Koni
cone(S)	:	S kümesinin ürettiği koni
$\leq$	:	Gerçel lineer uzayda kısmi sıralama
$\leq_C$	:	C konisinin tanımladığı kısmi sıralama
$\partial F(x)$	:	F ‘nin subdiferansiyeli
$C_{X'}$	:	C_X konisinin duali
$C^{\#}_{X'}$	:	C_X konisinin dualinin quasi içi
$\|\cdot\|$	:	Norm
$(X, \|\cdot\|_X)$	:	X normlu uzayı
$\partial^W F(x)$	:	F ‘nin zayıf subdiferansiyeli
$f'(\bar{x})$	:	f ’nin $\bar{x}$ noktasındaki yönlü türevi
T(S, $\bar{x}$)	:	S’nin $\bar{x}$ noktasındaki contingent konisi
R(S, $\bar{x}$)	:	S’nin $\bar{x}$ noktasındaki radyal konisi
epi(F)	:	F’nin epigrafiği
Hypo(F)	:	F’nin hypo grafiği
D_r F($\bar{x}$, $\bar{y}$	:	F’nin radyal epitürevi
$D_{gr}F(\bar{x},\bar{y})$	:	F’nin genelleştirilmiş radyal epitürevi
$D_{wr}F(\bar{x},\bar{y})$	:	F ‘nin has radyal epitürevi

Min(D,C)| : D kümesinin C konisine göre minimal noktalar kümesi

WMin(D,C) : D kümesinin C konisine göre zayıf minimal noktalar kümesi

PrMin(D,C) : D kümesinin C konisine göre has minimal noktalar kümesi

1 Giriş

Küme değerli analizde ve küme değerli optimizasyon problemlerinde türev kavramı çok yoğun bir şekilde kullanılmış ve türev kavramı yardımıyla bir çok optimallik koşulları elde edilmiştir. Bu nedenle küme değerli dönüşümler için türev kavramları son yıllarda önem kazanan çalışma konusu haline gelmiş ve literatürde çeşitli yollarla küme değerli dönüşümler için formule edilmiştir (bkz [3, 5, 6, 7, 12, 20, 21]).

Contingent türev kavramı ilk olarak Aubin tarafından verilmiştir [1]. Küme değerli dönüşümler için contingent türev kavramı küme değerli optimizasyonda önemli bir rol oynar ve optimallik koşullarının elde edilmesinde kullanılmıştır [13, 24, 25]. Fakat gerekli optimallik koşulları [13, Theorem 4.1] ve yeterli optimallik koşullarının [13, Teorem 4.2] standart varsayımlar altında çakışmadığı ortaya çıktmıştır. Bu da küme değerli optimizasyonda optimallik koşullarının elde edilmesinde contingent türevin doğru bir araç olmadığı görülmüştür. Bu nedenle Aubin tarafından diğer bir türev kavramı olan contingent epitürev ilk olarak ' üst contingent türev ' adıyla tanımlanmıştır. Daha sonra kontekste genişletilmiş reel değerli fonksiyonlar için contingent epitürev adıyla kullanılmıştır [2]. Jahn ve Rauh konveks problemler için contingent epitürev kavramını kullanarak küme değerli optimizasyon problemleri için önemli teoremler vermişlerdir [20]. Literatürde konveks küme değerli optimizasyon problemleri için Jahn ve Rauh tarafından verilen contingent epitürev kavramı çok rağbet görmüş ve izleyen çalışmalarda kullanılmıştır [6, 7, 12, 21, 22, 23, 27, 28]. Jahn ve Rauh [20] de tek değişkenli durumda yöne göre türevin mümkün olan tek bir genelleştirilmesi olduğunu gösterdiler. Bu kavramı kullanarak onlar konveks küme değerli optimizasyonda zayıf minimal çözümler için optimallik koşullarını elde ettiler.

Fakat genelde bir küme değerli dönüşüm için contingent epitürevin varlığı açık bir sorudur. Bu zorluğun üstesinden gelmek için Chen ve Jahn küme değerli dönüşümler için contingent epitürevin bir genellemesi olarak bilinen genelleştirilmiş contingent epitürev kavramını [12] de tanıttılar.

Daha sonra Jahn ve Khan [21] de ilk olarak Chen ve Jahn tarafından [12] de tanıtılan genelleştirilmiş contingent epitürev ve bu türevle çok yakın ilişkili olan iki yeni epitürev kavramını da tanıttılar ve bu epitürevlerin bazı özelliklerini incelediler. Genelleştirilmiş contingent epitürev ve onun çeşitlerinin bazı varlık teoremlerini ve karakterizasyonlarını verdiler.

Konveks olmayan problemlerde kullanılmak üzere Bazan tarafından radyal epitürev kavramı tanımlanmıştır. Bazan [6,Tanım 1.6]' da verilen radyal epitürev kavramını kullanarak küme değerli optimizasyonda konvekslik
varsayımı olmaksızın zayıf-minimal çözümler için optimallik koşullarını elde etti. Ama [6] de Bazan tarafından kullanılan radyal epiderivativin tanımı Tanım1.5 anlamında küme değerli dönüşümlerin infimum değerlerinin varlığını kabul eder. Üstelik temel karakterizasyon teoremi sıralama konisi C' nin konveks, pointed ve $C \cup (-C) = Y$ varsayımı altında ispatlanır. Bu koşulların yazar tarafından da kısıtlayıcı olarak nitelendirildiği de görülmüştür [6].

Konveks analizden konveks olmayan duruma geçildiğinde ortaya çıkan zorlukların temel nedeni konveks olmayan durumların farklı formlarda ortaya çıkabilir olmasıdır ve her bir durumun özel bir araştırma yöntemi ve yaklaşım gerektirmesidir. Kasımbeyli bir küme değerli dönüşüm için yeni bir radyal epitürev kavramını tanımladı ve konvekslik ve sınırlılık varsayımları olmaksızın küme değerli dönüşümler için radyal epitürevleri kullanarak gerekli ve yeterli optimallik koşullarını elde etti [17].

Amacımız çok kısıtlayıcı olarak bilinen ve Bazan' ın da kısıtlayıcı bulduğu tanıma alternatif olarak konveks olmayan durumlar için Kasımbeyli' nin yeni bir epitürev tanımını derinlemesine öğrenmek ve bu kavram kullanılarak konveks olmayan optimizasyon problemleri için optimallik özelliklerinin araştırılmasıdır. Ayrıca Kasımbeyli' nin [17] de tanımladığı radyal epitürevin bir genellemesi olan genelleştirilmiş radyal epitürev tanımını vermek ve onun radyal epitürevle arasındaki bağıntıyı araştırmaktır. Genelleştirilmiş radyal epitürev yoluyla yeterli optimallik koşulları türetmektir. Daha sonra genelleştirilmiş radyal epitürev ve buna çok yakın ilişkili olan iki yeni epitürev kavramını tanıtacağız. Bu epitürevlerin bazı özellikleri incelenecek ve örnekler verilecektir. Bunların yanında genelleştirilmiş radyal epitürev ve çeşitleri için varlık teoremleri ve karakterizasyonlar verilecek ve skalerizasyon yoluyla Benson has etkinliğin karakterizasyonu sunulacaktır.

Literatürde araştırılan bu türev kavramlarının hangi tür optimizasyon problemleri için araştırmaya olanak sağladığını görmek için bu kavramların bazılarına ve temel tanımlara göz atalım.

1.1 Temel Kavramlar

Tanım 1.1 *Herhangi bir X kümesi verilsin ve X kümesi üzerinde toplama ve skalerle çarpma işlemleri; yani $+ : X \times X \to X$ ve $. : \mathbb{R} \times X \to X$ tanımlansın. Eğer her $x, y, z \in X$ ve her $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki aksiyomlar sağlanıyorsa o zaman X kümesine reel lineer uzay denir:*

a) $(x + y) + z = x + (y + z)$,

b) $x + y = y + x$,

c) bir $0_X \in X$ elemanı vardır öyle ki her $x \in X$ için $x + 0_X = x$,

d) her $x \in X$ için bir $y \in X$ vardır öyle ki $x + y = 0_X$,

e) $\lambda (x + y) = \lambda x + \lambda y$,

f) $(\lambda + \mu) x = \lambda x + \mu x$,

g) $\lambda (\mu x) = (\lambda \mu) x$,

h) $1x = x$.

(c) altında verilen 0_X elemanı X' in sıfır elemanı olarak adlandırılır.

Tanım 1.2 *S ve T kümeleri reel normlu X uzayının boş olmayan alt kümeleri olsun. S ve T kümelerinin cebirsel toplamı ve cebirsel farkı sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır:*

$$\begin{aligned} S+T &: = \{x+y : x \in S \text{ ve } y \in T\} \\ S-T &: = \{x-y : x \in S \text{ ve } y \in T\}. \end{aligned}$$

Keyfi bir $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\lambda S := \{\lambda x : x \in S\}$ dir.

Tanım 1.3 *X bir reel normlu uzay olsun. X' kümesi X uzayından $\mathbb{R}$ uzayına tüm lineer dönüşümlerin kümesi olsun. Her φ, $\psi \in X$ ve her $\lambda \in \mathbb{R}$ için*

$$\begin{aligned} (\varphi+\psi)(x) &= \varphi(x)+\psi(x), \quad \forall x \in X \\ (\lambda\varphi)(x) &= \lambda\varphi(x), \quad \forall x \in X \end{aligned}$$

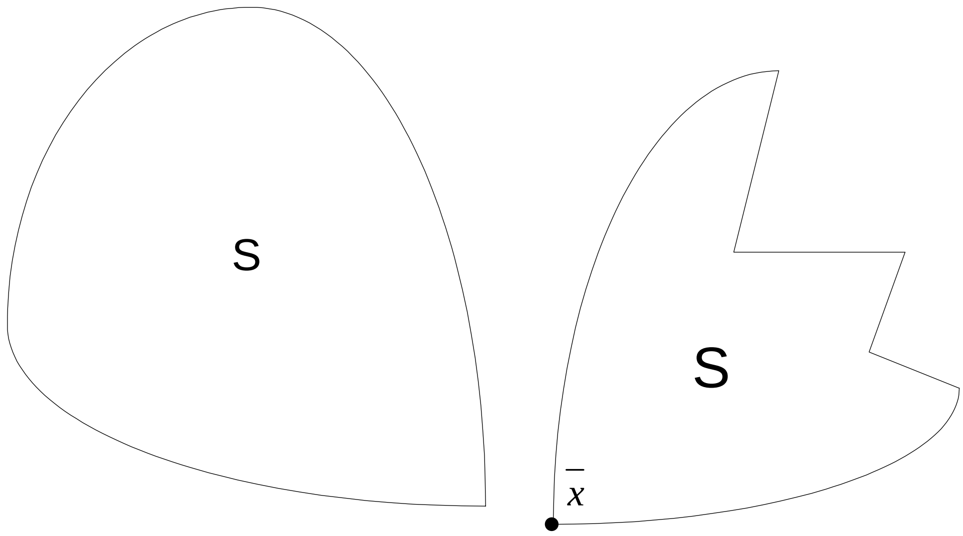
ise X' uzayına bir reel lineer uzay ve X uzayının cebirsel duali denir. X' uzayının cebirsel duali de X'' ile gösterilir ve X uzayının ikinci cebirsel duali olarak adlandırılır.

Tanım 1.4 *$(X, \|.\|_X)$ reel normlu uzay, S kümesi X reel lineer uzayının boş olmayan bir alt kümesi olsun.*

a) $\bar{x} \in S$ verilsin. Eğer her $x \in S$ ve $\lambda \in [0,1]$ için $\lambda x + (1-\lambda)\bar{x} \in S$ ise S kümesi $\bar{x}$ noktasında yıldız şekillidir denir (bkz Şekil 1.1).

b) Her x, $y \in S$ ve her $\lambda \in [0,1]$ için $\lambda x + (1-\lambda) y \in S$ ise S kümesi konveks olarak adlandırılır (bkz Şekil 1.1).

c) $cor(S) := \left\{\bar{x} \in S : \forall x \in X, \exists\bar{\lambda} > 0, \forall \lambda \in \left[0, \bar{\lambda}\right] \ \bar{x} + \lambda x \in S\right\}$ kümesine S kümesinin cebirsel içi veya koru denir.



Şekil 1.1: Konvesk ve $\bar{x}$ noktasında yıldız şekilli küme

Tanım 1.5 $(X, \|.\|_X)$ *reel normlu uzay, C kümesi X reel lineer uzayının boş olmayan bir alt kümesi olsun.*

a) Her $x \in C$ ve her $\lambda \geq 0$ için $\lambda x \in C$ ise C kümesine bir koni denir.

b) $C \cap (-C) = \{0_X\}$ ise C konisine pointed koni denir (bkz Şekil 1.3).

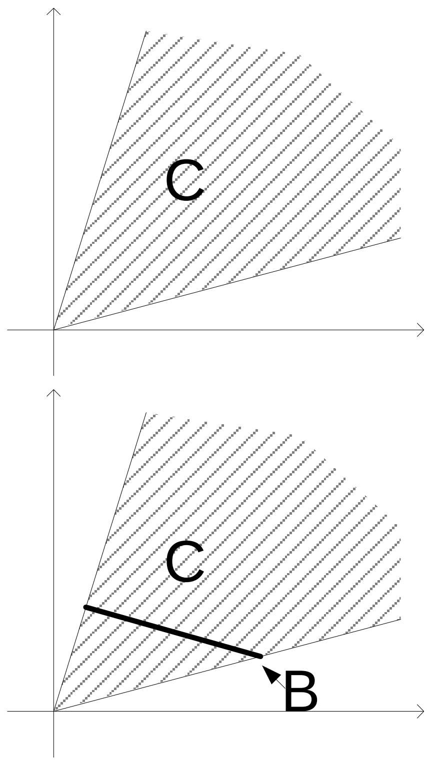
c) $C - C = X$ ise C konisine yeniden üretilen koni denir.

d) $C \neq \{0_X\}$ konveks koni ve $\emptyset \neq B \subset C$ konveks olsun. Herbir $x \in C \setminus \{0_X\}$ en az bir $\lambda > 0$ ve en az bir $b \in B$ için $x = \lambda b$ olacak şekilde tek bir biçimde yazılabiliyorsa o zaman B kümesi C konveks konisi için bir taban olarak adlandırılır (bkz Şekil 1.2).

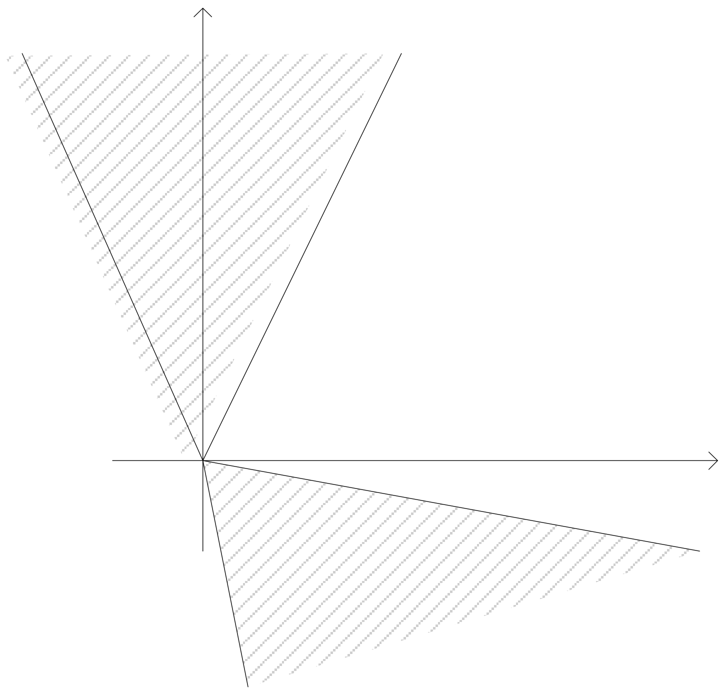
Tanım 1.6 *S kümesi bir X reel lineer uzayının boş olmayan bir alt kümesi olsun.*

$$cone\,(S) := \{x \in X : \; x = \lambda s \quad en\ az\ bir\ \lambda \geq 0\ ve\ en\ az\ bir\ s \in S\}$$

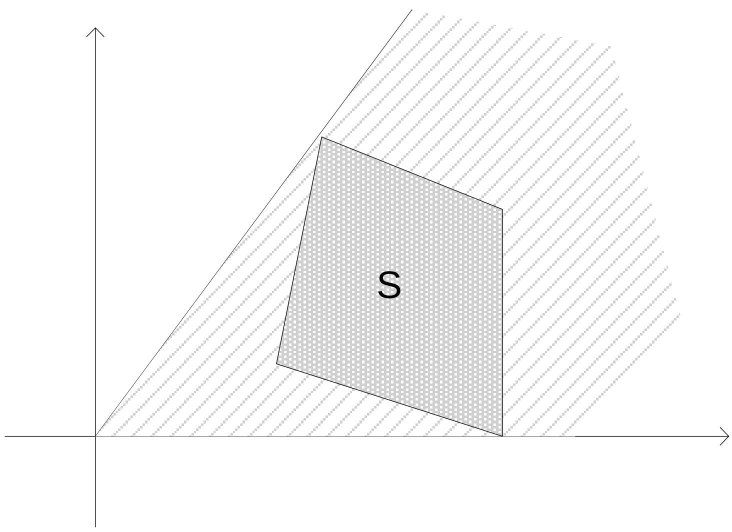
konisine S ile üretilen koni denir (bkz Şekil1.4).



Şekil 1.2: C konisi ve tabanı



Şekil 1.3: Pointed koni



Şekil 1.4: $cone\,(S)$

Tanım 1.7 *X bir reel lineer uzay olsun.*

a) $X \times X$ çarpım uzayının herbir R alt kümesi X üzerinde bir adi bağıntı olarak adlandırılır.

b) Keyfi $x,\ y,\ z,\ w \in X$ için aşağıdaki aksiyomlar sağlanıyorsa X üzerinde "$\leq$" adi bağıntısı bir kısmi sıralama bağıntısı olarak adlandırılır.

$$\begin{aligned}(i)\, x &\leq x,\\ (ii)\, x &\leq y,\, y \leq z \Longrightarrow x \leq z\\ (iii)\, x &\leq y,\, w \leq z \Longrightarrow x + w \leq y + z\\ (iv)\, x &\leq y,\, \alpha \in \mathbb{R}_{+} \Longrightarrow \alpha x \leq \alpha y.\end{aligned}$$

c) Keyfi $x,\, y \in X$ için $x \leq y,\, y \leq x \Longrightarrow x = y$ ise X üzerindeki "$\leq$" kısmi sıralama bağıntısı antisimetrik olarak adlandırılır.

Tanım 1.8 *Bir reel normlu uzayda kısmi sıralamayı karakterize eden bir konveks koni sıralama konisi olarak adlandırılır.*

Tanım 1.9 *X reel normlu uzay, C_X bir konveks koni olsun.*

a) $C_{X'} := \{x' \in X : x'(x) \geq 0,\, \forall x \in C_X\}$ ile tanımlanan koniye C_X için dual koni denir. $C_{X'}$ ile oluşturulan X' uzayındaki kısmi sıralama dual kısmi sıralama olarak adlandırılır.

b) $C^{\#}_{X'} := \{x' \in X : x'(x) > 0,\, \forall x \in C_X \diagdown \{0_X\}\}$ ile tanımlanan kümeye C_X için dual koninin quasi-içi denir.

Tanım 1.10 *X boş kümeden farklı bir küme olsun ve bu kümenin bazı alt kümelerinden oluşan bir τ.ailesi verilsin.*

a) Aşağıdaki üç koşul sağlanıyorsa τ ailesi X kümesi üzerinde bir topolojik yapıdır ya da kısaca τ bir topolojidir denir:

T1) $\emptyset \in \tau$, $X \in \tau\tau$' nun kümelerinin keyfi birleşimi yine τ' ya aittir.

T2) τ ailesine ait herhangi iki kümenin arakesiti τ ailesine aittir.

T3) τ ailesinin herhangi bir alt ailesinin birleşimi de τ ailesine aittir.

τ ailesi X kümesi üzerinde bir topolojik yapı oluşturuyorsa (X, τ) sıralı çiftine bir topolojik uzay ve τ' nun elemanlarına da açık küme denir.

b) (X, τ) bir topolojik uzay, S kümesi X uzayının bir alt kümesi olsun ve $x \in X$ verilsin. Bir açık $T \in \tau$ kümesi $x \in T \subset S$ olacak şekilde varsa S kümesi x elemanının bir komşuluğu olarak adlandırılır. x elemanının S kümesinde içerilen bir T komşuluğu varsa x elemanına S kümesinin iç elemanı denir ve S kümesinin tüm iç elemanlarının kümesine S kümesinin içi denir, $int\,(S)$ ile gösterilir. $X \diagdown S$ açıksa S kümesi kapalıdır.

c) I kümesi üzerinde "$\leq$" bağıntısı aşağıdaki koşulları sağlıyorsa I kümesine "$\leq$" bağıntısına göre yönlendirilmiş küme veya sadece yönlendirilmiş bir küme denir:

i) Her $p \in I$ için $p \leq p$,

ii) Her p, q, $r \in I$ için $p \leq q$ ve $q \leq r \Longrightarrow p \leq r$,

iii) Her p, $q \in I$ için $p \leq s$ ve $q \leq s$ olacak şekilde bir $s \in I$ vardır.

e) (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Yönlendirilmiş bir I kümesinden X kümesine tanımlanan bir dönüşüme X de bir ağ denir ve $(x_i)_{i \in I}$ ile gösterilir.

f) (X, τ) topolojik uzay, $(x_i)_{i \in I}$ X de bir ağ ve $x \in X$ olsun. x noktasını içeren her U açık kümesi ve her $n \in I$ için $i \in I$ vardır öyle ki $\forall i \geq n$ için $x_i \in U$ ise x noktasına $(x_i)_{i \in I}$ ağının bir yığılma noktası veya bir limit noktası denir.

Tanım 1.11 *S kümesi bir (X, τ) topolojik uzayının boş olmayan bir alt kümesi ve $x \in S$ olsun. x noktasını içeren bir açık U kümesi x noktasından başka* *hiçbir elemanını içermeyecek şekilde bulunabiyorsa; yani $x \in U$ özelliğindeki en az bir $U \in T$ için $U \cap (S \backslash \{x\}) = \emptyset$ ise x noktasına S kümesinin bir yığılma noktası denir ve S kümesinin tüm yığılma noktaları kümesi S' ile gösterilir.*

Tanım 1.12 *S kümesi bir (X, τ) topolojik uzayının boş olmayan bir alt kümesi olsun. $S \cup S'$ kümesine S kümesinin kapanışı denir.*

Tanım 1.13 *S kümesi bir (X, τ) topolojik uzayının boş olmayan bir alt kümesi olsun. S kümesinin bir örtüsü $S \subset \bigcup\limits_{U \in \mathcal{U}} U$ özelliğini sağlayan kümelerin bir ailesidir. S kümesinin verilen bir $\mathcal{U}$ örtüsünün alt örtüsü S' nin $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ özelliğindeki bir örtüsüdür. Eğer $\mathcal{U}$ ailesi sonlu bir elemandan oluşuyorsa $\mathcal{U}$ örtüsüne sonlu örtü denir ve $\mathcal{U}$ örtüsünün elemanları τ topolojisinin açıklarından oluşuyorsa $\mathcal{U}$ örtüsüne S kümesinin açık örtüsü denir*

Tanım 1.14 *(X, τ) bir topolojik uzay olsun. X' in her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa (X, τ) topolojik uzayına kompakt uzay denir.*

Tanım 1.15 *X boş kümeden farklı bir küme olsun. $d : X \times X \to \mathbb{R}$ dönüşümü her $x,\ y,\ z \in X$ için aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bir metrik olarak adlandırılır (X, d)' ye de bir metrik uzay denir:*

i) $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y;$

ii) $d(x, y) = d(y, x);$

iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$

Tanım 1.16 *X bir reel vektör uzayı ve τ da X üzerinde bir topoloji olsun.*

a)

$$\begin{array}{rcl} (x, y) & \longmapsto & x + y,\ x,\ y \in X \\ (\alpha, x) & \longmapsto & \alpha x,\ \alpha \in \mathbb{R},\ x \in X \end{array}$$

dönüşümleri sırasıyla $X \times X$ ve $\mathbb{R} \times X$ üzerinde sürekli ise (X, τ) bir reel topolojik vektör uzayı olarak adlandırılır.

b) (X, τ) bir reel topolojik vektör uzayı ve $S \subset X$ olsun. 0_X ' ın herbir U komşuluğu için bir $\lambda \in \mathbb{R}$ vardır öyle ki $S \subset \lambda U$ ise S kümesi sınırlıdır denir.

Tanım 1.17 *X bir reel topolojik vektör uzayı olsun.*

a) S kümesi 0_X' ın komşuluklarının bir kümesi ve $B \subset S$ olsun. Her $a \in S$ için bir $T \in B$ var öyle ki $T \subset S$ ise B kümesine $0_{X'}$ 'ın komşuluklar tabanı denir.

b) X uzayı $0_{X'}$' in konveks komşuluklar tabanına sahipse bir reel yerel konveks topolojik lineer uzay veya bir reel yerel konveks uzay olarak adlandırılır.

Tanım 1.18 *X ve Y reel lineer uzaylar, $C_Y \subset Y$ konveks bir koni olsun. $\|.\| : X \to C_Y$ dönüşümü her x, y, $z \in X$ için aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bir vektörel norm olarak adlandırılır:*

a) $\|x\| = 0_Y \Longleftrightarrow x = 0_X$;

b) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$;

c) $\|x + z\| \leq_{C_Y} \|x\| + \|y\|$.

Ek olarak $Y = \mathbb{R}$ ve $C_Y = \mathbb{R}_+$ ise $\|.\|$ dönüşümü bir norm olarak adlandırılır ve $\|.\|$ ile gösterilir. $(X, \|.\|)$ reel normlu uzay olarak adlandırılır. (a) koşulu sağlanmazsa $\|.\|$ dönüşümü bir yarı norm olarak adlandırılır.

Tanım 1.19 *X bir reel lineer uzay ve Y cebirsel dual uzay X' dual uzayının boş olmayan bir alt kümesi olsun.*

a) $x' \in Y$ için $p(x) = |x'(x)|$ ile tanımlanan $p : X \to \mathbb{R}$ fonksiyoneli bir yarı norm olsun. Tüm bu yarı normları sürekli yapan X üzerindeki en kaba topolojiye Y ile üretilen X üzerindeki zayıf topoloji denir ve $\sigma(X, Y)$ ile gösterilir.

b) X üzerinde bir topoloji tanımlansın o zaman X' uzayına ait tüm sürekli lineer fonksiyonların uzayı X^* X uzayının topolojik dual uzayı olarak adlandırılır. $Y = X^*$ için $\sigma(X, X^*)$ basitçe X üzerindeki zayıf topoloji olarak adlandırılır.

Tanım 1.20 *X bir reel topolojik lineer uzay, C bir sıralama konisi olsun. Bir alt sınıra sahip her azalan ağ ($i \leq j \Rightarrow x_j \geq x_i$) bir infimumuna yakınsıyorsa ozaman C konisine Daniell denir.*

Tanım 1.21 *X ve Y reel lineer uzaylar ve $T : X \to Y$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ ve her $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ için*

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y)$$

ise T dönüşümüne bir lineer dönüşüm denir.

Tanım 1.22 *X ve Y reel lineer uzaylar, $C_Y \subset Y$ bir koni ve S kümesi X uzayının boş kümeden farklı bir alt kümesi, $f : S \to Y$ bir dönüşüm olsun. Her $x,\ y \in S$ ve her $\lambda \in [0, 1]$ için*

$$\lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y) - f(\lambda x + (1 - \lambda) y) \in C_Y \tag{1.1}$$

ise f dönüşümüne konveks bir dönüşüm veya C_Y-konveks denir. Y reel normlu uzayı C_Y konisi ve "$\leq_{C_Y}$" bağıntısı ile kısmi sıralı ise ozaman yukarıdaki konvekslik koşulu

$$f(\lambda x + (1 - \lambda) y) \leq_{C_Y} \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y) \tag{1.2}$$

olarak yazılabilir.

Tanım 1.23 *X ve Y reel normlu uzaylar, $C_Y \subset Y$ konveks bir koni, $S \subset X$ boş olmayan bir alt küme olsun ve bir $f : S \to Y$ dönüşümü verilsin.*

$$epi(f) := \{(x, y) : x \in S,\ y \in \{f(x)\} + C_Y\} \tag{1.3}$$

ile tanımlanan kümeye f dönüşümünün epigrafı denir.

$$epi\,(f) := \{(x, y) : x \in S,\ f\,(x) \leq_{C_Y} y\}$$

olarak da yazılabilir.

Tanım 1.24 *S yansıyan ve geçişken "$\leq$" bağıntısıyla kısmi sıralı, boş kümeden farklı keyfi bir küme olsun.*

a) Her x, $y \in S$ için ya $x \leq y$ ya da $y \leq x$ ise S kümesine tam sıralı denir.

b) T kümesi S kümesinin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Her $x \in T$ için

$$x \leq \bar{x}$$

ise $\bar{x} \in S$ elemanı T'nin bir üst sınırı olarak adlandırılır. Her $x \in T$ için

$$\bar{x} \leq x$$

ise $\bar{x} \in S$ elemanı T'nin bir alt sınırı olarak adlandırılır.

c)

$$x \in S,\ \bar{x} \leq x \Longrightarrow x \leq \bar{x}$$

ise $\bar{x} \in S$ elemanı S'nin bir maksimal elemanı olarak adlandırılır.

$$x \in S,\ x \leq \bar{x} \Longrightarrow \bar{x} \leq x$$

ise $\bar{x} \in S$ elemanı S'nin bir minimal elemanı olarak adlandırılır.

Tanım 1.25 *$(X, \|.\|_X)$ reel normlu bir uzay, S kümesi bu reel normlu uzayın boş olmayan bir alt kümesi olsun ve $f : S \to \mathbb{R}$ fonksiyoneli verilsin.*

$$f\,(\bar{x}) \leq \lim_{x \to \bar{x}} \inf\, f\,(x)$$

koşulu sağlanıyorsa f fonksiyoneline $\bar{x} \in S$ noktasında alttan yarı sürekli denir.

Tanım 1.26 *U kümesi $(X, \|.\|_X)$ reel normlu uzayın boş olmayan bir alt kümesi olsun ve $\bar{z} \in cl(U)$ verilsin. Bir $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset U$ dizisi ve pozitif reel sayıların bir λ_n dizisi $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \bar{z}$ ve $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n (z_n - \bar{z}) = z$ olacak şekilde varsa $z \in X$ vektörü U kümesine $\bar{z}$ noktasında tanjant vektördür denir ve U kümesine $\bar{z}$ noktasında tüm tanjant vektörlerin kümesi de contingent koni (veya Bouligand' ın tanjant konisi) olarak adlandırılır ve $T(U, \bar{z})$ ile gösterilir.*

Tanım 1.27 *U kümesi $(X, \|.\|_X)$ reel normlu uzayın boş olmayan bir alt kümesi olsun ve $\bar{z} \in cl(U)$ verilsin. U kümesinin $\bar{z}$ noktasındaki kapalı radyal konisi $R(U, \bar{z})$ ile gösterilir ve*

$$R(U,\bar{z}) = \left\{ \begin{array}{c} z \in X : \exists \lambda_n > 0,\ \exists (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X,\ \lim\limits_{n\to+\infty} z_n = z,\ \forall n \in \mathbb{N}\ i\c{c}in \\ \bar{z} + \lambda_n z_n \in U \end{array} \right\} \tag{1.4}$$

olarak tanımlanır.

Kapalı radyal koni denk olarak aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 1.28 *U kümesi $(X, \|.\|_X)$ reel normlu uzayın boş olmayan bir alt kümesi olsun ve $\bar{z} \in cl(U)$ verilsin. U kümesinin $\bar{z}$ noktasındaki kapalı radyal konisi*

$$R(U,\bar{z}) = \left\{ z \in X : \exists \lambda_n > 0,\ \exists (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset U,\ \lim_{n\to+\infty} \lambda_n (z_n - \bar{z}) = z \right\} \tag{1.5}$$

olarak tanımlanır.

Bu tanımlardan

$$R(U,\bar{z}) = cl(cone(U - \bar{z})) \tag{1.6}$$

olduğu görülür.

Tanım 1.29 *$(X, \|.\|_X)$ ve $(Y, \|.\|_Y)$ reel normlu uzaylar, S kümesi X uzayının boş olmayan bir alt kümesi ve $F : S \rightrightarrows Y$ küme değerli bir dönüşüm olsun.*

a)

$$graph(F) = \{(x,y) \in X \times Y : x \in S, y \in F(x)\} \tag{1.7}$$

kümesi F küme değerli dönüşümünün grafiği olarak adlandırılrr,

b)

$$dom\,(F) = \{x \in X : F\,(x) \neq \emptyset\} \tag{1.8}$$

kümesi F küme değerli dönüşümünün tanım kümesi olarak adlandırılır,

c) Y reel normlu uzayı bir $C \subset Y$ konveks konisiyle kısmi sıralı olsun.

$$epi\,(F) = \{(x, y) \in X \times Y : x \in S, y \in F\,(x) + C\} \tag{1.9}$$

kümesi F küme değerli dönüşümünün epigrafiği olarak adlandırılır,

d) $(\bar{x}, \bar{y}) \in graph\,(F)$ verilsin. Epigrafı F küme değerli dönüşümünün epigrafiğine $(\bar{x}, \bar{y})$ noktasındaki contingent konisine eşit olan tek değerli $DF\,(\bar{x}, \bar{y}) : X \to Y$ dönüşüme, yani

$$epi\,(DF\,(\bar{x}, \bar{y})) = T\,(epi\,(F)\,, (\bar{x}, \bar{y}))\,, \tag{1.10}$$

F küme değerli dönüşümünün $(\bar{x}, \bar{y})$ noktasındaki contingent epitürevi denir.

Tanım 1.30 $(Y, \|.\|_Y)$ *reel normlu uzay,* A *kümesi* Y *uzayının boş olmayan bir alt kümesi ve* Y *uzayı bir* $C \subset Y$ *konveks konisiyle kısmi sıralı olsun. Her* $y \in A$ *için* $y - a \in C$ *veya* $a \leq_C y$ *ise* $a \in A$ *elemanına* A *kümesinin bir alt sınırı denir.* A *kümesinin alt sınırlarının en büyüğüne* A *kümesinin infimumu denir ve* $\inf A$ *ile gösterilir, yani* A *kümesinin diğer her* b *alt sınırı için* $a \geq b$ *ise* $a \in A$ *alt sınırına* A *kümesinin en büyük alt sınırı denir ve* $\inf A$ *ile gösterilir [6].*

Aşağıdaki tanım ilk olarak Bazan tarafından [6] de tanıtıldı.

Tanım 1.31 $(X, \|.\|_X)$ *ve* $(Y, \|.\|_Y)$ *reel normlu uzaylar,* S *kümesi* X *uzayının boş olmayan bir alt kümesi ve* $F : S \rightrightarrows Y$ *küme değerli bir dönüşüm olsun.* F *küme değerli dönüşümünün* $(\bar{x}, \bar{y}) \in graph\,(F)$ *noktasında radyal epitürevi (Bazan anlamında)* $D_e^R F\,(\bar{x}, \bar{y}) : X \to Y$ *aşağıdaki gibi tanımlanan tek değerli bir dönüşümdür:*

$$D_e^R F\,(\bar{x}, \bar{y}) = \inf\,\{y \in Y : (x, y) \in R\,(epi\,(F)\,, (\bar{x}, \bar{y}))\}\,. \tag{1.11}$$

Tanım 1.32 $(Y, \|.\|_Y)$ *reel normlu uzayı bir* $C \subset Y$ *konveks, pointed konisiyle kısmi sıralı,* D *kümesi* Y *uzayının boş olmayan bir alt kümesi ve* $\bar{y} \in D$ *olsun.*

a) $D \cap (\{\bar{y}\} - C) = \{\bar{y}\}$ ise $\bar{y}$ elemanı D kümesinin minimal elemanı olarak adlandırılır;

b) $D \subset \{\bar{y}\} + C$ ise $\bar{y}$ elemanı D kümesinin güçlü (strongly) minimal elemanı olarak adlandırılır,

c) Sıralama konisi C boş olmayan bir içe $int\,(C)$' ye sahip olsun.
$D \cap (\{\bar{y}\} - int\,(C)) = \emptyset$ ise $\bar{y}$ elemanına D kümesinin zayıf minimal elemanı olarak adlandırılır;

d) $\bar{y}$ elemanı D kümesinin minimal elemanı ve Y uzayının sıfır noktası 0_Y
$T\,(D + C, \bar{y})$ contingent konisinin minimal elemanı ise, yani,
$T\,(D + C, \bar{y}) \cap (-C) = \{0_Y\}$ ise $\bar{y}$ elemanı D kümesinin has minimal elemanı (Borwein anlamında) olarak adlandırılır [11],

e) $\bar{y}$ elemanı D kümesinin minimal elemanı ve Y uzayının sıfır noktası 0_Y
$R\,(D + C, \bar{y}) = cl\,(cone\,(D + C - \{\bar{y}\}))$ radyal konisinin minimal elemanı ise, yani, $R\,(D + C, \bar{y}) \cap (-C) = \{0_Y\}$ ise y elemanı D kümesinin has minimal elemanı (Benson anlamında) olarak adlandırılır [8]. D kümesinin C konisine göre tüm minimal, zayıf minimal ve has minimal elemanlarının kümesi sırasıyla $Min\,(D, C)\,,\, WMin\,(D, C)\,,\, \Pr Min\,(D, C)$ ile gösterilir.

2 Zayıf Subdiferansiyeller

Klasik subdiferansiyelin bir genellemesi olan zayıf subdiferansiyel kavramı Azimov ve Gasimov tarafından geliştirildi [3]. Bu kavramı kullanarak konveks olmayan optimizasyon problemlerinin geniş bir sınıfı için sıfır ikil aralık koşullarının bir ailesi türetildi. Zayıf subdiferansiyel kümesi konveks olmayan optimizasyon problemlerinin araştırılmasında iyi bir araç olarak biliniyor. Bu kısımda [3] de verilen zayıf subdiferansiyellerin bazı özelliklerini inceleyeceğiz ve konveks olmayan durumda zayıf subdiferansiyeller ve yöne göre türevler arasında bazı ilişkileri inceleyeceğiz.
Önce [30] de verilen klasik subdiferansiyelin tanımını hatırlatalım.

Tanım 2.33 *$F : X \to \mathbb{R}$ tek değerli fonksiyon olsun ve $\bar{x} \in X$ verilsin. $\forall x \in X$ için*

$$F(x) - F(\bar{x}) \geq \langle x^*, x - \bar{x} \rangle \tag{2.12}$$

ise $x^* \in X^*$ vektörüne F fonksiyonunun $\bar{x}$ noktasındaki subgradienti denir. F fonksiyonunun $\bar{x}$ noktasındaki tüm subgradientleri kümesine F fonksiyonunun $\bar{x}$ noktasındaki subdiferansiyeli denir ve $\partial F(\bar{x})$ ile gösterilir.

Şimdi konik yüzeyin [3] de verilen tanımını verelim.

Tanım 2.34 *$(X, \|.\|_X)$ bir reel normlu uzay ve X^* uzayı X uzayının topolojik duali olsun. $\mathbb{R}_+$ negatif olmayan olmayan reel sayıların kümesi olmak üzere $(x^*, c) \in X^* \times \mathbb{R}_+$ olsun. $\bar{x} \in X$ de tepe noktası olan bir konik yüzey $C(\bar{x}, x^*, c) \subset X$ aşağıdaki gibi tanımlanır:*

$$C(\bar{x}, x^*, c) = \{x \in x : \langle x^*, x - \bar{x} \rangle - c\|x - \bar{x}\| = 0\}. \tag{2.13}$$

O zaman üst ve alt konik yarı uzaylar sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$C^+(\bar{x}, x^*, c) = \{x \in x : \langle x^*, x - \bar{x} \rangle - c\|x - \bar{x}\| \leq 0\} \tag{2.14}$$

ve

$$C^-(\bar{x}, x^*, c) = \{x \in x : \langle x^*, x - \bar{x} \rangle - c\|x - \bar{x}\| \geq 0\}. \tag{2.15}$$

$c = 0$ ise konik yüzey $C(\bar{x}, x^*, c)$ bir hiperdüzlem olur. Böylece hiperdüzlemin basit genelleştirilmesi olan destek koni aşağıdaki gibi tanımlanır [17].

Tanım 2.35 *$S \subset C^+(\bar{x}, x^*, c)$ (veya $S \subset C^-(\bar{x}, x^*, c)$) ve $cl(S) \cap C(\bar{x}, x^*, c) \neq \emptyset$ ise $C(\bar{x}, x^*, c)$ konisi $S \subset X$ kümesine destek koni olarak adlandırılır.*

Alt konik yarı uzay $C^-(\bar{x}, x^*, c)$, tepesi $\bar{x}$ olan konveks bir konidir.

Tanım 2.36 *$(X, \|.\|_X)$ reel normlu uzay olsun. $F : X \to \mathbb{R}$ tek değerli fonksiyonu verilsin.*

$$hypo(F) = \{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R} : F(x) \geq \alpha\} \tag{2.16}$$

kümesine F tek değerli fonksiyonunun hypografiği denir.

Tanım 2.37 *$F : X \to \mathbb{R}$ tek değerli fonksiyon olsun ve $\bar{x} \in X$ verilsin. Eğer $\forall x \in X$ için*

$$F(x) - F(\bar{x}) \geq \langle x^*, x - \bar{x} \rangle - c\|x - \bar{x}\| \tag{2.17}$$

ise $(x^*, c) \in X^* \times \mathbb{R}_+$ ikilisine F fonksiyonunun $\bar{x}$ noktasındaki zayıf subgradienti denir.

$$\partial^w F(\bar{x}) = \left\{ \begin{array}{c} (x^*, c) \in X^* \times \mathbb{R}_+ : F(x) - F(\bar{x}) \geq \langle x^*, x - \bar{x} \rangle - c\|x - \bar{x}\|, \\ \forall x \in X \end{array} \right\} \tag{2.18}$$

kümesi F fonksiyonunun $\bar{x}$ noktasındaki tüm zayıf subgradientleri kümesidir ve F fonksiyonunun $\bar{x}$ noktasındaki zayıf subdiferansiyeli olarak adlandırılır. $\partial^w F(\bar{x}) \neq \emptyset$ ise F fonksiyonu $\bar{x}$ noktasında zayıf subdiferansiyellenebilir olarak adlandırılır.

Uyarı 2.1 *F fonksiyonu $\bar{x} \in X$ noktasında subdiferansiyellenebilirse, (klasik anlamda) o zaman F aynı zamanda zayıf subdiferansiyellenebilirdir, yani $x^* \in \partial F(\bar{x})$ ise her $c \geq 0$ için $(x^*, c) \in \partial^w F(\bar{x})$ dir. Tanım 2.31' den sürekli ve konkav*

$$g(x) = \langle x^*, x - \bar{x} \rangle + F(\bar{x}) - c\|x - \bar{x}\|, \tag{2.19}$$

fonksiyonu

$$\begin{aligned} g(x) &\leq F(x), \forall x \in X \\ g(\bar{x}) &= F(\bar{x}) \end{aligned}$$

olacak şekilde varsa $(x^*, c) \in X^* \times \mathbb{R}_+$ *ikilisi* F *fonksiyonunun* $\bar{x} \in X$ *noktasında zayıf subgradientidir.* $hypo(g) = \{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R} : g(x) \geq \alpha\}$ *kümesi tepesi* $(\bar{x}, F(\bar{x}))$ *olan kapalı konveks bir konidir. Gerçekten,*

$$\begin{aligned} & hypo(g) - (\bar{x}, F(\bar{x})) \\ = \; & \{(x - \bar{x}, \alpha - F(\bar{x})) \in X \times \mathbb{R} : \langle x^*, x - \bar{x} \rangle - c\|x - \bar{x}\| \geq \alpha - F(\bar{x})\} \\ = \; & \{(u, \beta) \in X \times \mathbb{R} : \langle x^*, u \rangle - c\|u\| \geq \beta\}. \end{aligned}$$

Böylece (2.17) ve (2.19) dan,

$$graph(g) = \{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R} : g(x) = \alpha\}$$

konisi

$$epi(F) = \{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R} : F(x) \leq \alpha\}$$

kümesine $(\bar{x}, F(\bar{x}))$ noktasında

$$epi(F) \subset epi(g) \text{ ve } cl(epi(F) \cap graph(g)) \neq \emptyset \tag{2.20}$$

anlamında destekleyen konik bir yüzeydir. Bu uyarı ve Tanım 2.31' den zayıf subdiferansiyellenebilir fonksiyonların sınıfının subdiferansiyellenebilir fonksiyonların sınıfından temel olarak daha geniş olduğunu söylebiliriz
Şimdi zayıf subdiferansiyelin bazı özelliklerini inceleyelim.

Önerme 2.1 $F : X \to \mathbb{R}$ *tek değerli fonksiyonu* $\bar{x} \in X$ *noktasında zayıf subdiferansiyellenebilir olsun. O zaman* $\partial^w F(\bar{x})$ *zayıf kapalı bir kümedir.*

Kanıt. $\partial^w F(\bar{x})$ kümesinin kapalı olduğunu göstermek için $(x_n^*, c_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \partial^w F(\bar{x})$ dizisi için $(x_n^*, c_n) \to (x^*, c)$ olduğunda $(x^*, c) \in \partial^w F(\bar{x})$

olduğunu göstererirsek zayıf subdiferansiyel kümesinin kapalı oldugunu göstermiş olacağız. $(x_n^*, c_n) \in \partial^w F(\bar{x}) \Rightarrow \forall x_n \in X$ için

$$F(x) - F(\bar{x}) \geq \langle x_n^*, x - \bar{x} \rangle - c_n \|x - \bar{x}\| \tag{2.21}$$

dir. Diğer yandan $(x_n^*, c_n) \rightarrow (x^*, c)$ olduğundan (2.21) eşitsizliğinde $n \rightarrow \infty$ iken limit alırsak $\forall x \in X$ için

$$F(x) - F(\bar{x}) \geq \langle x^*, x - \bar{x} \rangle - c \|x - \bar{x}\|$$

elde edilir. O halde $(x^*, c) \in \partial^w F(\bar{x})$ dir. Dolayısıyla $\partial^w F(\bar{x})$ kümesi zayıf kapalıdır. ■

Önerme 2.2 *$F : X \rightarrow \mathbb{R}$ tek değerli fonksiyonu $\bar{x} \in X$ noktasında zayıf subdiferansiyellenebilir olsun. O zaman $\partial^w F(\bar{x})$ konveks bir kümedir.*

Kanıt. $\partial^w F(\bar{x})$ konveks bir küme olduğunu göstermek için
$(x_1^*, c_1) \in \partial^w F(\bar{x})$, $(x_2^*, c_2) \in \partial^w F(\bar{x})$ ve $\lambda \in [0,1]$ için
$\lambda(x_1^*, c_1) + (1-\lambda)(x_2^*, c_2) \in \partial^w F(\bar{x})$ olduğunu göstermeliyiz.

$$(x_1^*, c_1) \in \partial^w F(\bar{x}) \Rightarrow -c_1 \|x - \bar{x}\| + \langle x - x, x_1^* \rangle \leq F(x) - F(\bar{x}), \forall x \in X \tag{2.22}$$

ve

$$(x_2^*, c_2) \in \partial^w F(\bar{x}) \Rightarrow -c_2 \|x - \bar{x}\| + \langle x - x, x_2^* \rangle \leq F(x) - F(\bar{x}), \forall x \in X \tag{2.23}$$

dir. (2.22) eşitsizliğini λ ile ve (2.23) eşitsizliğini $(1-\lambda)$ ile çarpalım.

$$(x_1^*, c_1) \in \partial^w F(\bar{x}) \Rightarrow -\lambda c_1 \|x - \bar{x}\| + \langle x - \bar{x}, \lambda x_1^* \rangle \leq \lambda (F(x) - F(\bar{x})), \forall x \in X \tag{2.24}$$

$$\begin{aligned} (x_2^*, c_2) &\in \partial^w F(\bar{x}) \Rightarrow (1-\lambda) c_2 \|x - \bar{x}\| + \langle x - \bar{x}, (1-\lambda) x_2^* \rangle \\ &\leq (1-\lambda)(F(x) - F(\bar{x})), \forall x \in X \end{aligned} \tag{2.25}$$

Bu (2.24) ve (2.25) eşitsizliğini taraf tarafa toplarsak

$$-\lambda c_1 \|x - \bar{x}\| - (1-\lambda) c_2 \|x - \bar{x}\| + \langle x - \bar{x}, \lambda x_1^* + (1-\lambda) x_2^* \rangle$$

$$\leq \lambda\left(F\left(x\right)-F\left(\bar{x}\right)\right)+\left(1-\lambda\right)\left(F\left(x\right)-F\left(\bar{x}\right)\right),\forall x\in X$$

$$-\left(\lambda c_1+\left(1-\lambda\right)c_2\right)\|x-\bar{x}\|+\langle x-\bar{x},\lambda x_1^*+\left(1-\lambda\right)x_2^*\rangle\leq F\left(x\right)-F\left(\bar{x}\right),\forall x\in X$$

elde edilir. Buradan da $\lambda\left(x_1^*,c_1\right)+\left(1-\lambda\right)\left(x_2^*,c_2\right)\in\partial^w F\left(\bar{x}\right)$ elde edilir. ■

Önerme 2.3 *$F:X\to\mathbb{R}$ tek değerli fonksiyonu $\bar{x}\in X$ noktasında zayıf subdiferansiyellenebilir olsun. Eğer $\alpha>0$ ise $\partial^w\left(\alpha F\right)\left(\bar{x}\right)=\alpha\partial^w F\left(\bar{x}\right)$ dir.*

Kanıt. $(x^*,c)\in\partial^w\left(\alpha F\right)\left(\bar{x}\right)$ olsun. O zaman $\forall x\in X$ için

$$\begin{aligned}
\left(\alpha F\right)\left(x\right)-\left(\alpha F\right)\left(\bar{x}\right) &\geq -c\|x-\bar{x}\|+\langle x-\bar{x},x^*\rangle\\
\alpha F\left(x\right)-\alpha F\left(\bar{x}\right) &\geq -c\|x-\bar{x}\|+\langle x-\bar{x},x^*\rangle\\
F\left(x\right)-F\left(\bar{x}\right) &\geq -\frac{c}{\alpha}\|x-\bar{x}\|+\left\langle x-\bar{x},\frac{x^*}{\alpha}\right\rangle\\
&\Rightarrow \left(\frac{x^*}{\alpha},\frac{c}{\alpha}\right)\in\partial^w F\left(\bar{x}\right)\\
&\Rightarrow (x^*,c)\in\alpha\partial^w F\left(\bar{x}\right)
\end{aligned}$$

$$\partial^w\left(\alpha F\right)\left(\bar{x}\right)\subset\alpha\partial^w F\left(\bar{x}\right) \tag{2.26}$$

Şimdi ters kapsamı gösterelim.$(x^*,c)\in\alpha\partial^w F\left(\bar{x}\right)$ olsun. O zaman $\frac{1}{\alpha}\left(x^*,c\right)\in\partial^w F\left(\bar{x}\right)$ dir. O halde $\forall x\in X$ için

$$\begin{aligned}
F\left(x\right)-F\left(\bar{x}\right) &\geq -\frac{c}{\alpha}\|x-\bar{x}\|+\left\langle x-\bar{x},\frac{x^*}{\alpha}\right\rangle\\
\alpha F\left(x\right)-\alpha F\left(\bar{x}\right) &\geq -c\|x-\bar{x}\|+\langle x-\bar{x},x^*\rangle\\
\left(\alpha F\right)\left(x\right)-\left(\alpha F\right)\left(\bar{x}\right) &\geq -c\|x-\bar{x}\|+\langle x-\bar{x},x^*\rangle\\
&\Rightarrow (x^*,c)\in\partial^w\left(\alpha F\right)\left(\bar{x}\right)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\alpha\partial^w F\left(\bar{x}\right)\subset\partial^w\left(\alpha F\right)\left(\bar{x}\right) \tag{2.27}$$

dir. O halde $\alpha>0$ için $\partial^w\left(\alpha F\right)\left(\bar{x}\right)=\alpha\partial^w F\left(\bar{x}\right)$ elde edilir. ■

Önerme 2.4 *$F,G:X\to\mathbb{R}$ tek değerli fonksiyonları bir $\bar{x}\in X$ noktasında zayıf subdiferansiyellenebilir olsunlar. $\partial^w F\left(\bar{x}\right)+\partial^w G\left(\bar{x}\right)\subset\partial^w\left(F+G\right)\left(\bar{x}\right)$ dir.*

Kanıt. $\partial^w F(\bar{x}) \neq \emptyset$ ve $\partial^w G(\bar{x}) \neq \emptyset$ olsun. Keyfi $(x_1^*, c_1) \in \partial^w F(\bar{x})$ ve $(x_2^*, c_2) \in \partial^w G(\bar{x})$ alalım. O zaman $\forall x \in X$ için

$$F(x) - F(\bar{x}) \geq -c_1 \|x - \bar{x}\| + \langle x - \bar{x}, x_1^* \rangle$$

ve $\forall x \in X$ için

$$G(x) - G(\bar{x}) \geq -c_2 \|x - \bar{x}\| + \langle x - \bar{x}, x_2^* \rangle$$

dir. $\forall x \in X$ için

$$(F(x) + G(x)) - (F(\bar{x}) - G(\bar{x})) \geq -(c_1 + c_2) \|x - \bar{x}\| + \langle x - \bar{x}, x_1^* + x_2^* \rangle$$

dir. $(x_1^* + x_2^*, c_1 + c_2) \in \partial^w (F + G)(\bar{x})$ dir. O halde

$$\partial^w F(\bar{x}) + \partial^w G(\bar{x}) \subset \partial^w (F + G)(\bar{x})$$

elde edilir. ■

Önerme 2.5 *$F : X \to (-\infty, +\infty]$ fonksiyonu bir $\bar{x}$ noktasında zayıf subdiferansiyellenebilir ve bu noktada bir bütünsel (global) minimuma sahip olsun. O zaman $(0,0) \in \partial^w F(\bar{x})$ dir.*

Kanıt. F fonksiyonu bir $\bar{x}$ noktasında bütünsel minimuma sahipse o zaman $\forall x \in X$ için

$$\begin{aligned} F(x) &\geq F(\bar{x}) \\ F(x) &\geq F(\bar{x}) - 0 \|x - \bar{x}\| + \langle x - \bar{x}, 0 \rangle \\ &\Rightarrow (0,0) \in \partial^w F(\bar{x}) \end{aligned}$$

dır. ■

Önerme 2.6 *$F, G : X \to (-\infty, +\infty]$ fonksiyonları verilsin. $F + G$ fonksiyonları $\bar{x} \in X$ noktasında zayıf subdiferansiyellenebilir ve $(-G)$ fonksiyonu $\bar{x} \in X$ noktasında hem subdiferansiyellenebilir hem de türevlenebilir olsun. O zaman*

$$(x^*, c) \in \partial^w (F + G)(\bar{x}) \Rightarrow (x^* - G'(\bar{x}), c) \in \partial^w F(\bar{x}).$$

Kanıt. : $(x^*, c) \in \partial^w (F+G)(\bar{x})$ olsun. O zaman

$$(F+G)(x) - (F+G)(\bar{x}) \geq -c\|x-\bar{x}\| + \langle x-\bar{x}, x^*\rangle$$

$$F(x) + G(x) - F(\bar{x}) - G(\bar{x}) \geq -c\|x-\bar{x}\| + \langle x-\bar{x}, x^*\rangle \tag{2.28}$$

dir. G fonksiyonu $\bar{x} \in X$ noktasında subdiferansiyellenebilir olduğundan dolayı $\forall x \in X$ için

$$-G(x) \geq -G(\bar{x}) + \langle x-\bar{x}, -G'(\bar{x})\rangle$$

dır. Buradan

$$G(x) \leq G(\bar{x}) + \langle x-\bar{x}, G'(\bar{x})\rangle \tag{2.29}$$

elde edilir. (2.28) ve (2.29) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} -c\|x-\bar{x}\| + \langle x-\bar{x}, x^*\rangle &\leq F(x) + G(x) - F(\bar{x}) - G(\bar{x}) \\ &\leq F(x) + G(\bar{x}) + \langle x-\bar{x}, G'(\bar{x})\rangle - F(\bar{x}) - G(\bar{x}) \\ &\leq F(x) - F(\bar{x}) + \langle x-\bar{x}, G'(\bar{x})\rangle \end{aligned}$$

$$-c\|x-\bar{x}\| + \langle x-\bar{x}, x^* - G'(\bar{x})\rangle \leq F(x) - F(\bar{x})$$

dir. Buradan da

$$(x^* - G'(\bar{x}), c) \in \partial^w F(\bar{x})$$

elde edilir. ∎

Şimdi [17] de verilen bir tanımı hatırlayalım.

Tanım 2.38 $(X, \|.\|_X)$ *reel normlu uzay ve* $S \subset X$ *olsun.*

$$\delta(x \mid S) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \in S \\ +\infty & \quad\ \text{diğer} \end{cases}$$

olarak tanımlanan $\delta(. \mid S) : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *fonksiyonuna* $S \subset X$ *kümesinin indikatör fonksiyonu denir.*

Özel bir durum olarak indikatör fonksiyonunun zayıf subdiferansiyellenebilirliğini düşünelim. Aşağıdaki teoremi Gasimov indikatör fonksiyonunun subdiferansiyellenebilirliği ve konveks bir kümeye destek hiperdüzlemi arasındaki ilişkiyi ifade eden konveks analizde de iyi bilinen teoremin bir genellemesi olarak vermiştir [17].

Teorem 2.1 *: $S \subset X$ boş olmayan kapalı bir küme ve $\bar{x} \in X$ olsun. O zaman S kümesinin indikatör fonksiyonu $\delta(. \mid S)$' nun $\bar{x} \in X$ noktasında zayıf subdiferansiyellenebilir olması için gerekli ve yeterli koşul bir $(x^*, c) \in X \times \mathbb{R}_+$ ikilisi vardır öyle ki (2.13) ile tanımlanan konik yüzey $C(\bar{x}; x^*, c)$ S kümesine $\bar{x} \in S$ noktasında bir destek konidir.*

Kanıt. S kümesinin indikatör fonksiyonu $\delta(. \mid S)$ $\bar{x}$ noktasında zayıf subdiferansiyellenebilirse o zaman bir $(x^*, c) \in X \times \mathbb{R}_+$ ikilisi vardır öyle ki her $\bar{x} \in X$ için

$$\delta(x \mid S) - \delta(\bar{x} \mid S) \geq \langle x^*, x - \bar{x} \rangle - c \|x - \bar{x}\|.$$

$\bar{x} \in S$ ve her $x \in S$ için

$$0 \geq \langle x^*, x - \bar{x} \rangle - c \|x - \bar{x}\|$$

dir ve bu ise (2.13) ile tanımlanan konik yüzey $C(\bar{x}; x^*, c)$' in S kümesine $\bar{x} \in S$ de destek koni olduğunu gösterir. ■

Gasimov aşağıdaki teorem ile yöne göre türev ve zayıf subdiferansiyeller arasında bir ilişki kurdu [17].

Teorem 2.2 *$F : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu bir $\bar{x} \in X$ noktasında zayıf subdiferansiyellenebilir olsun. F fonksiyonu bir $\bar{x} \in X$ noktasında ve bir $h \in X$ yönünde yöne göre diferansiyellenebilirse o zaman*

$$F'(\bar{x})(h) \geq \sup \{\langle x^*, h \rangle - c \|h\| : (x^*, c) \in \partial^w F(\bar{x})\} \tag{2.30}$$

Kanıt. Keyfi bir $(x^*, c) \in \partial^w F(\bar{x})$ için

$$F'(\bar{x})(h) = \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{F(\bar{x} + \lambda h) - F(\bar{x})}{\lambda} \geq \langle x^*, h \rangle - c \|h\|.$$

Bu teorem için aşağıdaki örnekleri verelim [17]. ■

Örnek 2.1 *$X = \mathbb{R}$ ve $F(x) = -|x|$ olsun. O zaman $F'(0)(h) = -|h|$ dır. Diğer yandan zayıf subdiferansiyelin tanımından her $x \in \mathbb{R}$ için*

$$(a,c) \in \partial^w F(0) \Leftrightarrow (a,c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \text{ ve } -|x| \geq ax - c|x|. \tag{2.31}$$

Böylece zayıf subdiferansiyel

$$\partial^w F(0) = \{(a,c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ : |a| \leq c - 1\} \tag{2.32}$$

olarak yazılabilir. (2.30) dan

$$F'(0)(h) = \max\{ah - c\|h\| : (a,c) \in \partial^w F(0)\} = -|h| \tag{2.33}$$

olduğu görülür.

Örnek 2.2 *$X = \mathbb{R}$ ve $F(x) = -|x^2 - 1|$ olsun. Her $h \in \mathbb{R}$ için $F'(\bar{x})(h) = 2|h|$ ve $\partial^w F(1) = \{(a,c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ : -c \leq |a| \leq c + 2\}$.*

$$\max\{ah - c|h| : (a,c) \in \partial^w F(1)\} = \begin{cases} 0, & h < 0 \\ 2h, & h \geq 0. \end{cases} \tag{2.34}$$

(2.30) eşitsizliğinin eşitlik olarak sağlanması ilginç bir sorudur.

3 Radyal Epitürevler

Kasımbeyli bir küme değerli dönüşüm için radyal epitürev kavramını tanımladı ve konvekslik ve sınırlılık varsayımları olmaksızın radyal epitürevleri kullanarak gerekli ve yeterli optimallik koşullarını türetti [17]. Bir küme değerli dönüşüm için radyal epitürev kavramı ilk olarak Bazan tarafından [6] de farklı bir biçimde tanımlandı. Kasımbeyli' nin [17] de verdiği tanım Jahn ve Rauh tarafından [20] de verilen contingent epitürev kavramına benzerdir. Giriş bölümünde verdiğimiz contingent koni, radyal koni tanımlarını hatırlayım.

Tanım 3.39 *U kümesi $(X, \|.\|_X)$ reel normlu uzayın boş olmayan bir alt kümesi olsun ve $\bar{z} \in cl\,(U)$ verilsin. Eğer bir $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset U$ dizisi ve pozitif reel sayıların bir λ_n dizisi $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \bar{z}$ ve $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n (z_n - \bar{z}) = z$ olacak şekilde varsa $z \in X$ vektörü U kümesine $\bar{z}$ noktasında tanjant vektördür denir ve U kümesine $\bar{z}$ noktasında tüm tanjant vektörlerin kümesi de contingent koni (veya Bouligand' ın tanjant konisi) olarak adlandırılır ve $T\,(U, \bar{z})$ ile gösterilir. (bkz Şekil3.5)*

Tanım 3.40 *U kümesi $(X, \|.\|_X)$ reel normlu uzayın boş olmayan bir alt kümesi olsun ve $\bar{z} \in cl\,(U)$ verilsin. U kümesinin $\bar{z}$ noktasındaki kapalı radyal konisi*

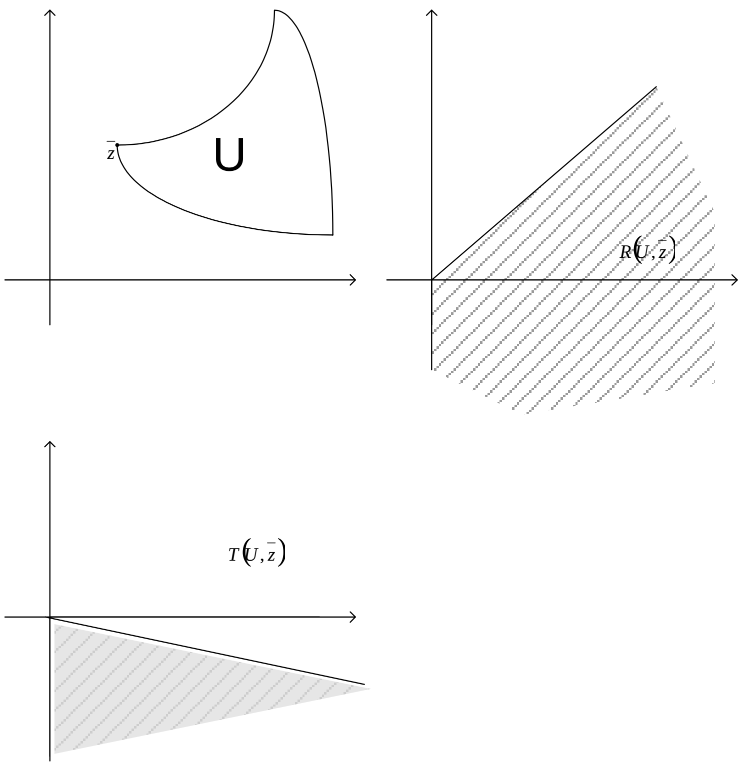
$$R\,(U, \bar{z}) = \left\{ \begin{array}{c} z \in X : \exists \lambda_n > 0,\ \exists\,(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X,\ \lim\limits_{n\to+\infty} z_n = z,\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ için} \\ \bar{z} + \lambda_n z_n \in U \end{array} \right\} \tag{3.35}$$

olarak tanımlanır. (bkz Şekil 3.5)

Öncelikle Jahn ve Rauh tarafından verilen contingent epitürev tanımını hatırlayalım [20].

Tanım 3.41 *$(X, \|.\|_X)$ ve $(Y, \|.\|_Y)$ reel normlu uzaylar, S kümesi X uzayının boş olmayan bir alt kümesi ve $F : S \rightrightarrows Y$ küme değerli bir dönüşüm olsun. $(\bar{x}, \bar{y}) \in graph\,(F)$ verilsin. epigrafiği F küme değerli dönüşümünün epigrafiğine $(\bar{x}, \bar{y})$ noktasındaki contingent konisine eşit olan yani,*

$$epi\,(DF\,(\bar{x}, \bar{y})) = T\,(epi\,(F)\,, (\bar{x}, \bar{y}))\,, \tag{3.36}$$



Şekil 3.5: U kümesinin $\bar{x}$ noktasındaki contingent ve radyal konileri

tek değerli dönüşüm $DF(\bar{x},\bar{y}) : X \to Y$ *F küme değerli dönüşümünün* $(\bar{x},\bar{y})$ *noktasındaki contingent epitürevi olarak adlandırılır.*

Şimdi Kasımbeyli tarafından verilen radyal epitürevin tanımını sunalım [17].

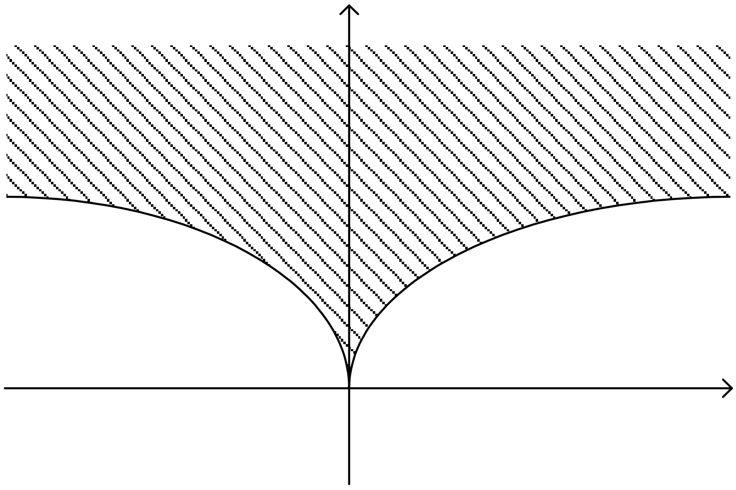
Tanım 3.42 $(X, \|.\|_X)$ *ve* $(Y, \|.\|_Y)$ *reel normlu uzaylar, S kümesi X uzayının boş olmayan bir alt kümesi ve* $F : S \rightrightarrows Y$ *küme değerli bir dönüşüm olsun ve* $(\bar{x},\bar{y}) \in graph(F)$ *verilsin. Epigrafiği F küme değerli dönüşümünün epigrafiğine* $(\bar{x},\bar{y})$ *noktasındaki radyal konisine eşit olan yani,*

$$epi(D_r F(\bar{x},\bar{y})) = R(epi(F),(\bar{x},\bar{y})), \tag{3.37}$$

tek değerli dönüşüm $D_r F(\bar{x},\bar{y}) : X \to Y$ *F küme değerli dönüşümünün* $(\bar{x},\bar{y})$ *noktasındaki radyal epitürevi olarak adlandırılır.*

Örnek 3.3 $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ *dönüşümü*

$$F(x) = \left[\sqrt{|x|}, +\infty\right)$$



Şekil 3.6: Örnek 3.3' deki F'nin grafiği

ile tanımlansın (bkz Şekil 3.6). Bu dönüşümün $(0,0)$ *noktasında radyal epitürevini ve contingent epitürevini bulalım. Burada* $epi\,(F) = graph\,(F)$ *dir.* $epiF$ *kümesinin* $(0,0)$ *noktasındaki radyal konisi*

$$R\,(graph\,F,(0,0)) = R\,(epiF,(0,0)) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\, y \geq 0\right\},$$

ve contingent konisi

$$T\,(epiF;(0,0)) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\, y = 0\right\} \cup \{0\}$$

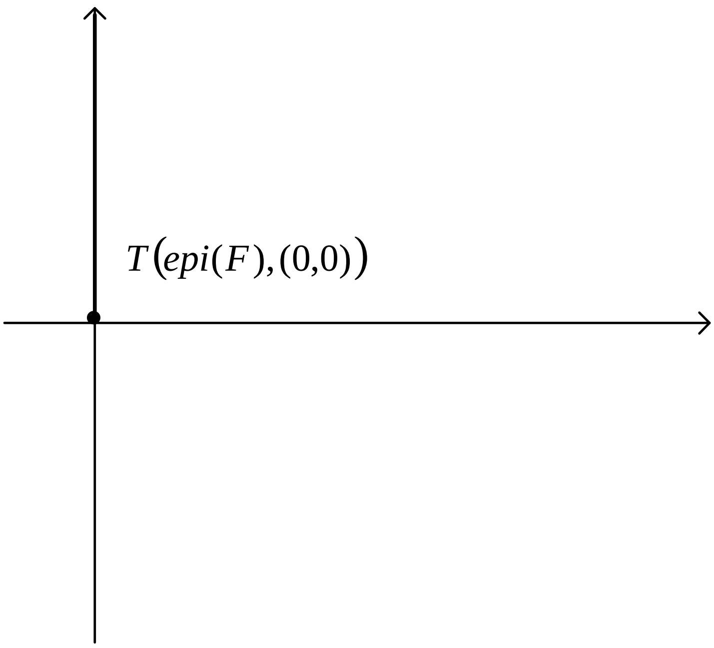
dir. F *küme değerli dönüşümünün* $(0,0)$ *noktasındaki radyal epitürevi* $\forall x \in \mathbb{R}$ *için*

$$D_r F\,(0,0)\,(x) = 0$$

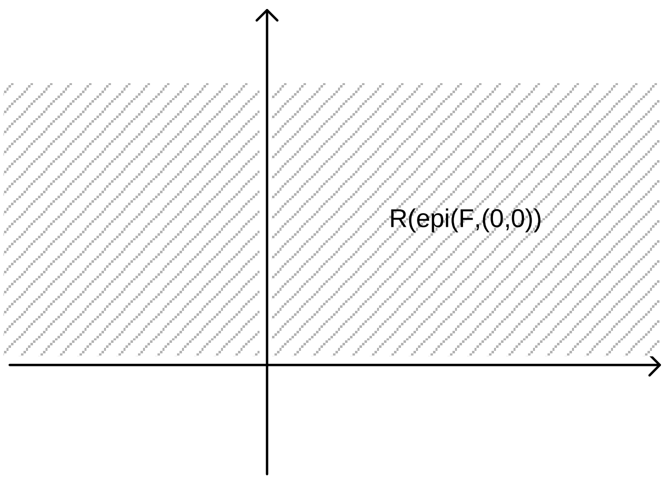
dir ve tektir. Şimdi ise contingent epitürevini bulalım.

$$DF\,(0,0)\,(x) = \left[\begin{array}{cc} 0 & ,x=0 \\ yoktur & ,x \neq 0 \end{array}\right.$$

O halde F *küme değerli dönüşümünün* $(0,0)$ *noktasında radyal epitürevi var fakat contingent epitürevi yoktur.*



Şekil 3.7: Örnek 3.3 için $T\left(epi\left(F\right),(0,0)\right)$



Şekil 3.8: Örnek 3.3 için $R\left(epi\left(F\right),(0,0)\right)$

Örnek 3.4 $F(x) = |1 - x^2| + \mathbb{R}_+$ *ile tanımlanan* $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ *küme değerli dönüşümü düşünelim. (bkz Şekil 3.7)* $epiF$ *kümesinin* $(0,1)$ *noktasındaki contingent konisini hesaplayalım.*

$$T(epiF;(0,1)) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$$

dir. Dolayısıyla $(0,1)$ *noktasındaki contingent epitürevi*

$$DF(0,1) = 0$$

dır.

Şimdi $epiF$ *kümesinin* $(0,1)$ *noktasındaki radyal konisine bakacak olursak*

$$R(epiF;(0,1)) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq -|x|\}$$

dir ve dolayısıyla bu noktadaki radyal epitürevi

$$D_r F(0,1)(x) = -|x|$$

olur. Şimdi F *küme değerli dönüşümünün* $(-1,0)$ *ve* $(1,0)$ *noktalarındaki contingent ve radyal epitürevlerini bulalım.* $(\bar{x},\bar{y}) = (-1,0)$ *için contingent koni*

$$T(epi(F),(-1,0)) = \{(x,y) : y \geq |2x|\}$$

olup bu noktadaki contingent epitürevi

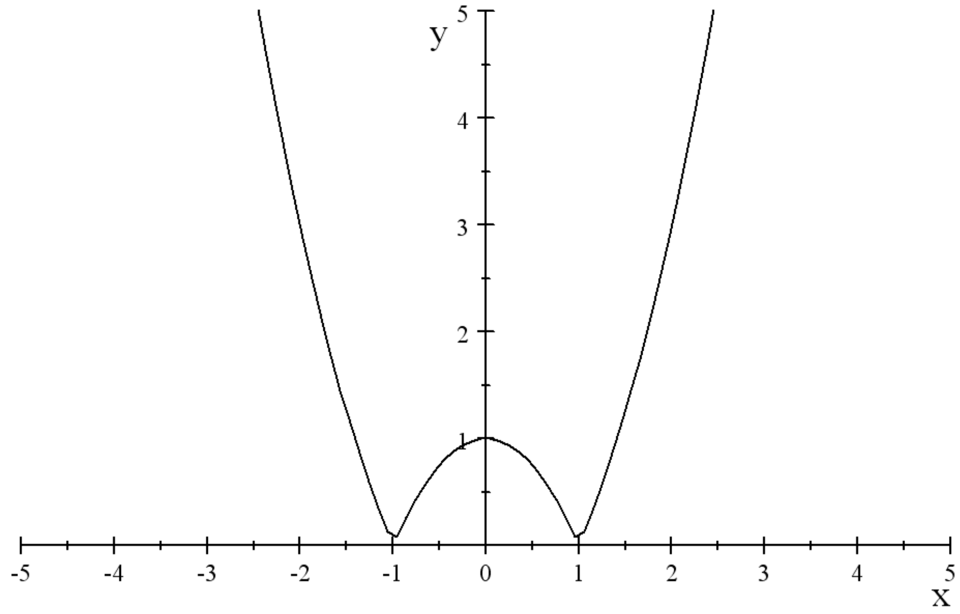
$$DF(-1,0)(x) = |2x|$$

dir. $(\bar{x},\bar{y}) = (-1,0)$ *noktasındaki radyal konisi*

$$R(epi(F),(-1,0)) = \begin{cases} y \geq 2x & , x \leq 0 \\ y \geq 0 & , x > 0 \end{cases}$$

olup radyal epitürevi

$$D_r F(-1,0)(x) = \begin{cases} y = 2x & , x \leq 0 \\ y = 0 & , x > 0 \end{cases}$$



Şekil 3.9: Örnek 3.4 'deki F'nin grafiği

olur. $(\bar{x}, \bar{y}) = (1,0)$ *için contingent koni*

$$T\left(epi\left(F\right), (1,0)\right) = \{(x,y) : y \geq |2x|\}$$

olup bu noktadaki contingent epitürevi

$$DF\left(1,0\right)\left(x\right) = |2x|$$

dir. $(\bar{x}, \bar{y}) = (1,0)$ *noktasındaki radyal konisi*

$$R\left(epi\left(F\right), (1,0)\right) = \begin{cases} y \geq 0 & , x \leq 0 \\ y \geq 2x & , x > 0 \end{cases}$$

olup radyal epitürevi

$$D_r F\left(1,0\right)\left(x\right) = \begin{cases} y = 0 & , x \leq 0 \\ y = 2x & , x > 0 \end{cases}$$

olur. Şimdi $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ *noktasındaki contingent ve radyal epitürevlerini bulalım. Contigent konisi*

$$T\left(epi\left(F\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)\right) = \{(x,y) : y \geq -|x|\}$$

ve dolayısıyla contingent epitürevi

$$DF\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)(x) = -\left|x\right|$$

olur. Radyal konisi ve radyal epitürevi ise sırasıyla

$$R\left(epi\left(F\right),(1,0)\right) = \begin{cases} y \geq \frac{x}{2} & ,\ x \leq 0 \\ y \geq -\frac{3}{2}x & ,\ x > 0 \end{cases}$$

$$D_r F\left(-1,0\right)(x) = \begin{cases} y = \frac{x}{2} & ,\ x \leq 0 \\ y = -\frac{3}{2}x & ,\ x > 0 \end{cases}$$

olur.

Kasımbeyli $Y = \mathbb{R}$ özel durumunda radyal epitürevler için varlık teoremini verdi Bu teorem Jahn ve Rauh tarafından (bkz [20,Teorem1]) formule edilen contingent epitürevler için varlık teoreminin basit bir genellemesidir [17].

Teorem 3.3 $(X, \|.\|_X)$ *reel normlu uzay, S kümesi X uzayının boş olmayan bir alt kümesi ve $F : S \rightrightarrows \mathbb{R}$ küme değerli bir dönüşüm olsun. $\bar{x} \in S$ ve $\bar{y} \in F(\bar{x})$ elemanları verilsin. $f, g : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $epi\left(g\right) \subset R\left(epiF, (\bar{x},\bar{y})\right) \subset epi\left(f\right)$ olacak şekilde var olsun. O zaman radyal epitürev $D_r F\left(\bar{x},\bar{y}\right)$ her $x \in X$ için*

$$D_r F\left(\bar{x},\bar{y}\right) = \min\left\{y \in \mathbb{R} : (x,y) \in R\left(epi\left(F\right),(\bar{x},\bar{y})\right)\right\} \qquad (3.38)$$

olarak verilir.

Kanıt. $D_r F\left(\bar{x},\bar{y}\right) : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ fonksiyonelini $\forall x \in X$ için

$$D_r F\left(\bar{x},\bar{y}\right) = \inf\left\{y \in \mathbb{R} : (x,y) \in R\left(epi\left(F\right),(\bar{x},\bar{y})\right)\right\}$$

ile tanımlayalım. $epi\left(g\right) \subset R\left(epiF, (\bar{x},\bar{y})\right)$ olduğundan her $x \in X$ için en az bir $y \in \mathbb{R}$ elemanı $(x,y) \in R\left(epi\left(F\right),(\bar{x},\bar{y})\right)$ olacak şekilde vardır. Böylece $D_r F\left(\bar{x},\bar{y}\right)$ fonksiyoneli X uzayı üzerinde iyi tanımlıdır. Şimdi $D_r F\left(\bar{x},\bar{y}\right)$' in F küme değerli dönüşümünün radyal epitürevi olduğunu gösterelim. Bunu göstermek için keyfi bir $x \in X$ alalım. O zaman $D_r F(\bar{x}, \bar{y})$ 'a yakınsayan bir infimal $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $(x, y_n) \in R(epi(F), (\bar{x}, \bar{y}))$ olacak şekilde vardır. Bir normlu uzayda radyal koni daima kapalı olduğundan

$$(x, D_r F(\bar{x}, \bar{y})(x)) \in R(epi(F), (\bar{x}, \bar{y})).$$

Varsayımla $-\infty < f(x) \leq D_r F(\bar{x}, \bar{y})(x)$ dir ve böylece (3.38) sağlanır.
$epi(D_r F(\bar{x}, \bar{y})) = R(epi(F), (\bar{x}, \bar{y}))$ olduğu bu eşitlikten görülür. Böylece $D_r F(\bar{x}, \bar{y})$ fonksiyoneli F küme değerli dönüşümünün $\bar{x}$ noktasında radyal epitürevidir. ■

Kasımbeyli tarafından verilen aşağıdaki teorem Teorem 3.3' den açıktır. Jahn ve Rauh tarafından (bkz Sonuç 1) contingent epitürevler için verilen benzer teorem subdiferansiyellenebilirliği garanti etmek için temel olan konveksliği varsayar. Aşağıdaki teoremde Kasımbeyli radyal epitürevler için, fonksiyonun konveksliğini gerektirmeyen zayıf subdiferansiyel kavramını kullandı [17].

Teorem 3.4 $(X, \|.\|_X)$ *bir reel normlu uzay olsun ve* $\bar{x} \in X$ *verilsin. Ek olarak* $F : X \to \mathbb{R}$ *tek değerli fonksiyonu* $\bar{x}$ *noktasında zayıf subdiferansiyellenebilir olsun. O zaman* $\bar{y} \in F(\bar{x})$ *olduğunda radyal epitürev* $D_r F(\bar{x}, \bar{y})$ *(3.38) eşitliği ile verilebilir.*

Kanıt. $(x^*, c) \in \partial^w F(\bar{x})$ F fonksiyonunun zayıf subgradienti olsun. O zaman zayıf subgradient tanımı ile $\forall x \in X$ için

$$F(x) - F(\bar{x}) \geq \langle x^*, x - \bar{x} \rangle - c \|x - \bar{x}\|$$

veya

$$f(x) = \langle x^*, x - \bar{x} \rangle - c \|x - \bar{x}\| + \bar{y}$$

oluşturarak $\forall x \in X$ için $F(x) \geq f(x)$ elde ederiz. f fonksiyonunun hypografiği $epi(F)$ kümesini alttan destekleyen konveks bir koni olduğundan (bak Uyarı 2.1) dolayı $epi(F) \subset R(epi(F), (\bar{x}, \bar{y})) + \{(\bar{x}, \bar{y})\} \subset epi(f)$ elde ederiz. Teoremin 3.3' ün varsayımları sağlanır, bu da iddiayı doğrular. ■

Kasımbeyli aşağıdaki teoremle radyal epitürevler ve zayıf subdiferansiyeller arasında bir ilişki kurdu [17].

Teorem 3.5 *$(X, \|.\|_X)$ bir reel normlu uzay olsun ve $\bar{x} \in X$ verilsin. Ek olarak $F : X \to \mathbb{R}$ tek değerli fonksiyonu $\bar{x}$ noktasında zayıf subdiferansiyellenebilir olsun. O zaman $\bar{y} \in F(\bar{x})$,$\forall h \in X$ için*

$$D_r F(\bar{x}, \bar{y})(h) \geq \sup\{\langle x^*, h\rangle - c\|h\| : (x^*, c) \in \partial^w F(\bar{x})\}. \tag{3.39}$$

Kanıt. Zayıf subdiferansiyelin tanımı ile

$$f_{(x^*,c)}(x) = \langle x^*, x\rangle - c\|x\| \tag{3.40}$$

fonksiyonunun grafiği herbir $(x^*, c) \in \partial^w F(\bar{x})$ için $epi(F) - \{(\bar{x}, \bar{y})\}$ kümesine bir destek konidir. Uyarı 2.1 ile bu $epi(F) - \{(\bar{x}, \bar{y})\} \subset epi(f)$ anlamına gelir. $epi(f)$ kapalı bir koni olduğundan dolayı son eşitlik

$$cl(cone(epi(F) - \{(\bar{x}, \bar{y})\})) \subset \bigcap_{(x^*,c)\in\partial^w F(\bar{x})} epi\left(f_{(x^*,c)}(x)\right)$$

olmasını gerektirir. Radyal epitürevin tanımı ile $\forall h \in X$ için

$$D_r F(\bar{x}, \bar{y}))(h) \geq \sup\{\langle x^*, h\rangle - c\|h\| : (x^*, c) \in \partial^w F(\bar{x})\} \tag{3.41}$$

elde edilir. ■

Kasımbeyli radyal epitürev varsa tek olduğunu gösterdi [17].

Teorem 3.6 *$S \subset X$ boş olmayan kümesi, $\bar{x} \in S$, $\bar{y} \in F(\bar{x})$ verilsin ve $F : S \rightrightarrows \mathbb{R}$ küme değerli bir dönüşüm olsun. Radyal epitürev $D_r F(\bar{x}, \bar{y})$ varsa tektir.*

Kanıt. Varsayalım ki $\tilde{D}_r F(\bar{x}, \bar{y})$ ve $D_r F(\bar{x}, \bar{y})$ farklı iki radyal epitürev olsun. O zaman bir $x \in S$ noktası

$$\tilde{D}_r F(\bar{x}, \bar{y})(x) \neq D_r F(\bar{x}, \bar{y})(x)$$

olacak şekilde vardır. Sonuç olarak

$$epi\left(\tilde{D}_r F(\bar{x}, \bar{y})\right) \neq epi(D_r F(\bar{x}, \bar{y})) = R(epi(F), (\bar{x}, \bar{y}))$$

olur. Bu ise $\tilde{D}_r F(\bar{x}, \bar{y})$' in de radyal epitürev olmasıyla çelişir. O halde varsayımımız yanlış radyal epitürev $D_r F(\bar{x}, \bar{y})$ tektir. ■

Eğer $(\bar{x}, \bar{y}) \in int(epi(F))$ ise radyal koni $R(epi(F), (\bar{x}, \bar{y})) = X \times Y$ olur ve bu durumda radyal epitürev yoktur.

Şimdi skaler optimizasyon problemini düşünelim. $S \subset X$ boş olmayan küme ve $F : X \to \mathbb{R}$ bir reel değerli fonksiyon olsun.

$$minimize\, F(x) \tag{SP}$$

$$x \in X$$

problemini düşünelim.

Kasımbeyli radyal epitürevin $x = 0$ noktasında global minimumua sahip olması için bir karakterizasyon vermiştir [17].

Teorem 3.7 $F : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *herhangi proper fonksiyon olsun. Bir* $\bar{x}$ *noktası* $\bar{y} = F(\bar{x})$ *ile (SP) probleminin global bir çözümüolması için gerekli ve yeterli koşul radyal epitürev* $D_r F(\bar{x}, \bar{y})$ $x = 0$ *noktasında bütünsel (global) minimuma sahiptir.*

Kanıt. $\bar{x}$ noktası $\bar{y} = F(\bar{x})$ ile (SP) probleminin bir global çözümü olsun. İlk olarak $(\bar{x}, \bar{y})$ noktasında radyal epitürevin $D_r F(\bar{x}, \bar{y})$ varlığını ispatlayalım. $\bar{x}$ noktası (SP) probleminin bir global çözümü olduğundan dolayı $\forall x \in X$ için

$$F(x) - F(\bar{x}) \geq 0$$

dir. Sonuç olarak $\forall x \in X$ için

$$F(x) - F(\bar{x}) \geq \langle 0, x - \bar{x} \rangle$$

olur , bu da F fonksiyonunun $\bar{x}$ noktasında subdiferansiyellenebilir olduğu anlamına gelir. Uyarı 2.1 ile F fonksiyonu aynı zamanda zayıf subdiferansiyellenbilirdir ve Teorem 3.4 ile radyal epitürev $D_r F(\bar{x}, \bar{y})$ X uzayındaki herbir noktada vardır. ve (3.38) eşitliği ile verilir.

Şimdi radyal epitürev $D_r F(\bar{x},\bar{y})$' in $x=0$ noktasında bütünsel (global) minimuma sahip olduğunu gösterelim. Aksini varsayalım, bir $u \in X$ noktası vardır öyle ki

$$D_r F(\bar{x},\bar{y})(u) < D_r F(\bar{x},\bar{y})(0) = 0. \tag{3.42}$$

Radyal epitürevin tanımı ile

$$(u, D_r F(\bar{x},\bar{y})(u)) \in R(epi(F), (\bar{x},\bar{y})),$$

ve sonuç olarak pozitif reel sayıların $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi ve $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset epi(F)$ dizisi

$$(u, D_r F(\bar{x},\bar{y})(u)) = \lim_{n\to+\infty} \lambda_n (x_n - \bar{x}, y_n - F(\bar{x}))$$

olacak şekilde vardır. Varsayım (3.42) ile $D_r F(\bar{x},\bar{y})(u) < 0$ olduğundan bir pozitif bir $N \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall n > N$ için

$$y_n - F(\bar{x}) < 0.$$

O zaman $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset epi(F)$ kapsamından $y_n \geq F(x_n)$ ve böylece $\forall n > N$ için

$$F(x_n) - F(\bar{x}) \leq y_n - F(\bar{x})$$

olur, bu ise $\bar{x}$ noktasının (SP) probleminin global çözümü olmasıyla çelişir.
Şimdi radyal epitürev $D_r F(\bar{x},\bar{y})$' ın $0 \in X$ noktasında bütünsel (global) minimuma sahipse $\bar{x}$ noktasının (SP) probleminin bir bütünsel (global) çözümü olduğunu gösterelim. Aksini varsayalım $\exists x \in X \ni F(x) < F(\bar{x})$ olsun. Radyal epitürev (bkz 3.38) eşitliği ile tanımlandığından dolayı $\forall u \in X$ için

$$D_r F(\bar{x},\bar{y})(u) = \min\{y \in \mathbb{R} : (u,y) \in R(epi(F), (\bar{x},\bar{y}))\} \tag{3.43}$$

dir. $(x-\bar{x}, F(x) - F(\bar{x})) \in R(epi(F), (\bar{x},\bar{y}))$ olduğu açıktır ve varsayım ile $F(x) - F(\bar{x}) < 0$ olduğundan (3.43)' dan

$$D_r F(\bar{x},\bar{y})(x-\bar{x}) \leq F(x) - F(\bar{x}) < 0 = D_r F(\bar{x},\bar{y})(0) = 0$$

elde edilir, bu ise radyal epitürev $D_r F(\bar{x},\bar{y})$' in $0 \in X$ de bir global minimuma sahip olmasıyla çelişir. Bu da ispatı tamamlar. ■

Şimdi Bazan tarafından verilen radyal türev kavramını hatırlayalım [6].

Tanım 3.43 $(X, \|.\|_X)$ *ve* $(Y, \|.\|_Y)$ *reel normlu uzaylar,* $F : X \rightrightarrows Y$ *bir küme değerli dönüşüm olsun.* $(\bar{x}, \bar{y}) \in graph\,(F)$ *verilsin. Grafiği* F *küme değerli dönüşümünün grafiğinin* $(\bar{x}, \bar{y})$ *noktasındaki radyal konisine eşit olan; yani*

$$graph\,(D_R F\,(\bar{x}, \bar{y})) = R\,(graph\,(F)\,, (\bar{x}, \bar{y}))\,,$$

$D_R F\,(\bar{x}, \bar{y}) : X \rightrightarrows Y$ *küme değerli dönüşümüne* F *küme değerli dönüşümünün* $(\bar{x}, \bar{y})$ *noktasındaki radyal türevi denir.*

Burada Jahn ve Rauh tarafından konveks küme değerli dönüşümler için verilen ([20,Teorem 3]) contingent epitürev ve contingent türev arasındaki bağıntıyı konveks olmayan durumda radyal epitürev ve radyal türev arasında bir verelim.

Teorem 3.8 $(X, \|.\|_X)$ *ve* $(Y, \|.\|_Y)$ *reel normlu uzaylar ve* Y *uzayı bir kapalı ve konveks* $C \subset Y$ *konisiyle kısmi sıralı,* $F : X \rightrightarrows Y$ *bir küme değerli dönüşüm olsun.* $\bar{x} \in X$, $\bar{y} \in F\,(\bar{x})$ *olmak üzere* $(\bar{x}, \bar{y}) \in graph\,(F)$ *verilsin. Radyal türev* $D_R F\,(\bar{x}, \bar{y})$ *ve radyal epitürev* $D_r F\,(\bar{x}, \bar{y})$ *varsa o zaman*

$$epi\,(D_R F\,(\bar{x}, \bar{y})) \subset epi\,(D_r F\,(\bar{x}, \bar{y}))$$

dir.

Kanıt.

$$\begin{aligned}
epi\,(D_r F\,(\bar{x}, \bar{y})) &= R\,(epiF, (\bar{x}, \bar{y})) \\
&= cl\,(cone\,(epi\,(F) - \{(\bar{x}, \bar{y})\})) \\
&= cl\,(cone\,(graph\,(F) - \{(\bar{x}, \bar{y})\} + (\{0\} \times C))) \\
&\supset cl\,(cone\,(graph\,(F) - \{(\bar{x}, \bar{y})\})) + cl\,(\{0\} \times C) \\
&= cl\,(cone\,(graph\,(F) - \{(\bar{x}, \bar{y})\})) + (\{0\} \times C) \\
&= R\,(graph\,(F)\,, (\bar{x}, \bar{y})) + (\{0\} \times C) \\
&= epi\,(D_R F\,(\bar{x}, \bar{y}))\,.
\end{aligned}$$

■

Teorem 3.9 *$(X, \|.\|_X)$ ve $(Y, \|.\|_Y)$ reel normlu uzaylar ve Y uzayı bir kapalı ve konveks $C \subset Y$ konisiyle kısmi sıralı, $F : X \rightrightarrows Y$ bir küme değerli dönüşüm olsun. $\bar{x} \in X$, $\bar{y} \in F(\bar{x})$ olmak üzere $(\bar{x}, \bar{y}) \in graph(F)$ verilsin. Radyal epitürev $D_r F(\bar{x}, \bar{y})$ varsa alttan yarı süreklidir.*

Kanıt. Radyal koni bir normlu uzayda kapalı ve $epi(D_r F(\bar{x}, \bar{y})) = R(epiF, (\bar{x}, \bar{y}))$ olduğundan radyal epitürevin epigrafiği de kapalıdır. Böylece radyal epitürev $D_r F(\bar{x}, \bar{y})$ alttan yarı süreklidir. ■

3.1 Küme Değerli Optimizasyonda Optimallik Koşulları

Bu kısımda Kasımbeyli tarafından verilen küme değerli optimizasyon problemleri için optimallik koşullarını elde etmek için radyal epitürev kavramını kullanacağız [17]. $(X, \|.\|_X)$ ve $(Y, \|.\|_Y)$ reel normlu uzaylar, Y uzayı bir konveks $C \subset Y$ konisiyle kısmi sıralı, S kümesi X uzayının boş olmayan bir alt kümesi ve $F : S \rightrightarrows Y$ küme değerli bir dönüşüm olsun.

$$minimize\, F(x) \qquad \text{(VP)}$$

$$x \in S$$

problemini düşünelim.

Bu problem için standart optimallik koşullarını hatırlayalım.

Tanım 3.44 *(VP) problemi verilsin. $F(S) = \underset{x \in S}{\cup} F(x)$ kümesi F küme değerli dönüşümünün görüntü kümesini göstersin. $\bar{x} \in S$ ve $\bar{y} \in F(\bar{x})$ olsun. $\bar{y}$ elemanı $F(S)$ kümesinin zayıf minimal elemanı (has minimal) ise $(\bar{x}, \bar{y})$ ikilisine (VP) probleminin bir zayıf minimelleştiricisi (has minimalleştircisi).*

Optimallik koşulları Corley [13] ve Luc [24] tarafından contingent türevler yolu ile verilir. Jahn ve Rauh [20] de contingent epitürev kavramını tanıttı ve küme değerli optimizasyonda konvekslik koşulları altında güçlü (ideal) ve zayıf minimizerlar için optimallik koşullarını sundu. Bazan vektör değerli fonksiyonlar için alt ve üst radyal epitürev kavramlarını tanıttı ve uygun konvekslik koşulları altında zayıf minimal ve ideal çözümler için bazı optimallik koşullarını türetti [7]. Burada Kasımbeyli' nin verdiği konvekslik ve sınırlılık koşulları olmaksızın küme değerli optimizasyon problemi (VP)' nin has ve zayıf minimizerları için gerekli ve yeterli optimallik koşullarını sunacağız [17].

Teorem 3.10 *$\bar{x} \in S$, $\bar{y} \in F(\bar{x})$ olmak üzere $(\bar{x}, \bar{y})$ ikilisi verilsin. Radyal epitürev $D_r F(\bar{x}, \bar{y})$ varsa, ozaman bir $(\bar{x}, \bar{y})$ noktası (VP) probleminin has minimalleştiricisi olması için gerekli ve yeterli koşul her $\bar{x} \neq x \in S$ için*

$$D_r F(\bar{x}, \bar{y})(x - \bar{x}) \notin -C. \tag{3.44}$$

Aşağıdaki yardımcı teorem Jahn ve Rauh tarafından konvekslik varsayımı altında verilen (bkz [20,Lemma 3]) yardımcı teorem konvekslik koşulu kaldırılarak verilecektir ve bir sonraki teoremin ispatında kullanılacaktır [17].

Yardımcı Teorem 3.1 *$F : S \rightrightarrows Y$ herhangi küme değerli dönüşüm ve $(\bar{x}, \bar{y}) \in graph(F)$ olsun. Radyal epitürev varsa o zaman her $x \in S$ için*

$$F(x) - \{\bar{y}\} \subset \{D_r F(\bar{x}, \bar{y})(x - \bar{x})\} + C.$$

Teorem 3.11 *$(\bar{x}, \bar{y})$ ikilisi $\bar{x} \in S$, $\bar{y} \in F(\bar{x})$ ile verilsin. Eğer radyal epitürev $D_r F(\bar{x}, \bar{y})$ varsa, ozaman bir $(\bar{x}, \bar{y})$ noktası (VP) probleminin has minimizerıdır gerekli ve yeterli koşul her $\bar{x} \neq x \in S$ için*

$$D_r F(\bar{x}, \bar{y})(x - \bar{x}) \notin int(-C). \tag{3.45}$$

Bu teorem çalışmada radyal epitürev kavramının önemini gösterir [17]. Contigent epitürevler yardımıyla konveks olmayan durumda zayıf minimizerlar için bir karakterizasyon vermek mümkün değildir. Bazan tarafından [6] de verilen radyal epitürev kavramı bir $(\bar{x}, \bar{y})$ zayıf minimalleştiricinin epigrafı radyal koniye eşit olan F küme değerli dönüşümünün alttan sınırlı olması durumunda karakterize etmeye olanak verir. Bazan' ın karakterizasyon teoreminde sıralama konisi C 'nin $C \cup (-C) = Y$ olması durmunda geçerlidir, bu da Y uzayının tüm uzaya eşit olması ile mümkündür.

4 Genelleştirilmiş Radyal EpiTürev

Son yıllarda küme değerli optimizasyon problemlerindeki araştırmalara artan bir ilgi vardır. Jahn ve Rauh küme değerli dönüşümler için contingent epitürev kavramını tanıttılar ve küme değerli optimizasyonda optimallik koşullarını açık bir şekilde ifade ettiler [20]. Kasımbeyli ise [17] de ilk olarak Bazan tarafından [6] de verilen radyal epitürev kavramını konveks olmayan küme değerli dönüşümler için tanımladı. Küme değerli optimizasyonda konvekslik ve sınırlılık koşulları olmaksızın gerekli ve yeterli optimallik koşullarını yeni tanımladığı radyal epitürevleri kullanarak verdi. Fakat genel bir oluşumda küme değerli dönüşümler için radyal epitürevin varlığı açık bir sorudur. Bu zorluğun üstesinden gelmek için konveks olmayan durumda genelleştirilmiş radyal epitürev tanımı vereceğiz. Radyal epitürev ve genelleştirilmiş radyal epitürev arasındaki bağıntıyı sunacağız.

Bu bölümde aşağıdaki standart varsayımları kullanacağız: $(X, \|.\|_X)$ reel normlu uzay, S kümesi X uzayının boş olmayan bir alt kümesi, $(Y, \|.\|_Y)$ reel normlu uzayı bir pointed konveks $C \subset Y$ konisiyle kısmi sıralı, $F : S \rightrightarrows Y$ küme değerli bir dönüşüm olsun ve $\bar{x} \in S$ ve $\bar{y} \in F(\bar{x})$ verilsin.

Daha sonraki teoremlerde kullanacağımız [12] de verilen birkaç tanımı hatırlayalım.

Tanım 4.45 *Y reel normlu uzayı konveks, pointed bir $C \subset Y$ konisiyle kismi sıralı olsun.*

a) Y de bir alt sınıra sahip herhangi azalan dizi infimumuna yakınsarsa C konisi Daniell olarak adlandırılır.

b) $D \subset \{y\} + C$ olacak şekilde bir $y \in Y$ varsa o zaman $D \subset Y$ kümesine alttan sınırlı küme denir.

c) $D \subset MinD + C$ oluyorsa $D \subset Y$ kümesi baskınlık (domination) özelliğine sahiptir denir.

Aşağıdaki kavram [17] de verilen radial epitürevin bir karakterizasyonunu genelleştirir.

Tanım 4.46 *$\bar{x} \in S$ ve $\bar{y} \in F(\bar{x})$, $MinD$ kümesi D kümesinin tüm minimal elemanlarının kümesini göstersin. Aşağıdaki gibi tanımlanan*

$$D_{gr}F(\bar{x},\bar{y})(x) = Min\{y \in Y : (x,y) \in R(epiF,(\bar{x},\bar{y}))\}, \quad \forall x \in S - \{\bar{x}\}$$

$D_{gr}F(\bar{x},\bar{y}) : S - \{\bar{x}\} \rightrightarrows Y$ küme değerli dönüşüme F küme değerli dönüşümünün $(\bar{x},\bar{y})$ noktasındaki genelleştirilmiş radyal epitürevi denir.

En az bir $x \in S - \{\bar{x}\}$ için $\{y \in Y : (x,y) \in R(epiF,(\bar{x},\bar{y}))\}$ kümesi boş olabilir. Bu durumda $D_{gr}F(\bar{x},\bar{y})(x) = \emptyset$ elde ederiz.

Tanım 4.47 *X bir reel lineer uzay ve Y reel lineer uzayı bir konveks $C \subset Y$ konisiyle kısmi sıralı, $F : X \rightrightarrows Y$ bir küme değerli dönüşüm olsun.*

a) $\forall \alpha > 0$ ve $\forall x \in X$ için $F(\alpha x) = \alpha F(x)$ ise F kesin pozitif homojen,

b) $\forall x_1, x_2 \in X$ için $F(x_1) + F(x_2) \subset F(x_1 + x_2) + C$ ise F alt toplamsal (subadditive) olarak adlandırılır.

Eğer $\alpha \geq 0$ ile a) ve b) özellikleri geçerli ise F dönüşümü alt toplamsal (sublineer) olarak adlandırılır.

$$G(x) = \{y \in Y : (x,y) \in R(epiF,(\bar{x},\bar{y}))\} \tag{4.46}$$

olarak tanımlansın.

Teorem 4.12 *$C \subset Y$ kapalı, pointed, konveks koni ve $S = X$ ve her $x \in X$ için genelleştirilmiş radyal epitürev $D_{gr}F(\bar{x},\bar{y}) \neq \emptyset$ olsun. O zaman $D_{gr}F(\bar{x},\bar{y})(x)$ kesin pozitif homojendir.*

Kanıt. Herhangi $\alpha > 0$ ve $x \in X$ alalım. O zaman

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha} D_{gr} F(\bar{x}, \bar{y})(\alpha x) &= Min\left\{ \frac{1}{\alpha} y \in Y : (\alpha x, y) \in R(epiF, (\bar{x}, \bar{y})) \right\} \\
&= Min\{u \in Y : (\alpha x, \alpha u) \in R(epiF, (\bar{x}, \bar{y}))\} \\
&= Min\{u \in Y : (x, u) \in R(epiF, (\bar{x}, \bar{y}))\} \\
&= D_{gr} F(\bar{x}, \bar{y})(x).
\end{aligned}$$

Böylece $D_{gr} F(\bar{x}, \bar{y})(\alpha x) = \alpha D_{gr} F(\bar{x}, \bar{y})(x)$ ve $D_{gr} F(\bar{x}, \bar{y})(x)$ kesin pozitif homojendir. ■

Aşağıda genelleştirilmiş radyal epitürevin varlık teoremini verelim.

Teorem 4.13 *C konisi kapalı, pointed, konveks, Daniell ve her $x \in S$ için (4.46) eşitliği ile verilen $G(x)$ alttan sınırlı olsun. O zaman her $x \in S$ için $D_{gr} F(\bar{x}, \bar{y})(x)$ vardır.*

Kanıt. Radyal koni daima kapalı olduğundan dolayı her $x \in S$ için $G(x)$ minorizeddır ve kapalıdır. Minimal elemanların varlık teoreminden (bkz. [24] Teorem 3.3 sayfa 46) dolayı $MinG(x)$ boştan farklıdır; yani $D_{gr} F(\bar{x}, \bar{y})$ iyi tanımlıdır. ■

Tanım 4.48 *Y üzerinde yansıyan, geçişme ve antisimetrik bir bağıntı tanımlı olsun. Y' nin elemanlarının her ikilisi bir en küçük üst sınıra ve bir en büyük alt sınıra sahipse Y' ye lattice denir. Y lattice için üstten sınırlı her $A \subset Y$ alt kümesi bir en küçük üst sınıra sahip ($\sup A$) (ya da alttan sınırlı her $B \subset Y$ alt kümesi bir en büyük alt sınıra sahipse ($\inf B$) Y tam lattice olarak adlandırılır.*

Şimdi bir tam vektör latticinde radyal epi türevin varlık teoremini verelim.

Teorem 4.14 $(X, \|.\|_X)$ *reel normlu uzay, S kümesi X uzayının boş olmayan bir alt kümesi, $(Y, \|.\|_Y)$ reel normlu uzayı bir pointed konveks $C \subset Y$ konisiyle kısmi sıralı, $F : S \rightrightarrows Y$ küme değerli bir dönüşüm olsun ve $\bar{x} \in S$ ve $\bar{y} \in F(\bar{x})$*

verilsin. (Y, C) *bir tam vektör lattice olsun. O zaman herhangi* $\bar{x} \in S$ *ve* $\bar{y} \in F(\bar{x})$ *için radyal epitürev vardır ve*

$$D_r F(\bar{x}, \bar{y})(x) = \inf \{y \in Y : (x, y) \in R(epiF, (\bar{x}, \bar{y}))\}, \quad \forall x \in X.$$

Burada $inf D$ *kümesi* D *kümesinin* C *konisine göre en büyük alt sınırıdır.*

Kanıt.

$$g(x) = \inf \{y \in Y : (x, y) \in R(epiF, (\bar{x}, \bar{y}))\} \ \forall x \in X$$

tanımlayalım. (Y, C) bir tam sıralı vektör lattice olduğundan dolayı $g(x)$ her $x \in X$ için iyi tanımlıdır ve $g(x)$ tek değerlidir. Şimdi $g = D_r F(\bar{x}, \bar{y})$ olduğunu kanıtlayalım. Y uzayının tam sıralılığından (4.46) ile verilen $G(x)$ için

$$g(x) + C \supset G(x) \ \forall x \in X.$$

elde ederiz. Buradan da $(x, y) \in R(epiF, (\bar{x}, \bar{y}))$ için $y \in G(x) \subset g(x) + C$ elde ederiz. O zaman $(x, y) \in epig$ ve dolayısıyla $R(epiF, (\bar{x}, \bar{y})) \subset epig$ dir. Herhangi $x \in X$ için

$$(x, g(x)) \in R(epiF, (\bar{x}, \bar{y})).$$

Böylece

$$\begin{aligned} epig &\subset R(epiF, (\bar{x}, \bar{y})) + \{0\} \times C \\ &= epi(D_r F(\bar{x}, \bar{y})) + \{0\} \times C \\ &= epi(D_r F(\bar{x}, \bar{y})) \\ &= R(epiF, (\bar{x}, \bar{y})). \end{aligned}$$

Buradan $epig = R(epiF, (\bar{x}, \bar{y}))$ elde ederiz. Sonuç olarak g [20, Teorem 3.5] ile tek olan radyal epitürev $D_r F(\bar{x}, \bar{y})$' e eşittir. ■

Aşağıdaki teoremle radyal epitürev ve genelleştirilmiş radyal epitürevin epigraflarının arasındaki ilişkiyi vereceğiz.

Teorem 4.15 *Standart varsayımlar geçerli olsun, $S = X$ olsun ve $\bar{x} \in S$ ve $\bar{y} \in F(\bar{x})$ verilsin. Radyal epitürev varsa ve (4.46) ile verilen $G(x)$ kümesi her $x \in X$ için baskınlık (domination) özelliğini sağlıyorsa, o zaman*

$$epi\left(D_r F(\bar{x}, \bar{y})\right) = epi\left(D_{gr} F(\bar{x}, \bar{y})\right).$$

Kanıt. $D_{gr} F(\bar{x}, \bar{y})$' in tanımı ile

$$\begin{aligned} epiD_{gr}F(\bar{x}, \bar{y}) &\subset R(epiF, (\bar{x}, \bar{y})) + \{0\} \times C \\ &= epiD_r F(\bar{x}, \bar{y}) + \{0\} \times C \\ &= epiD_r F(\bar{x}, \bar{y}) \end{aligned}$$

olup $epiD_{gr}F(\bar{x}, \bar{y}) \subset epiD_r F(\bar{x}, \bar{y})$ dir. Ters kapsamı göstermek için varsayalım ki $(x, \tilde{y}) \in epiD_r F(\bar{x}, \bar{y})$ fakat $(x, \tilde{y}) \notin epiD_{gr}F(\bar{x}, \bar{y})$, yani
$\tilde{y} \notin D_{gr}F(\bar{x}, \bar{y}) + C$ veya

$$\tilde{y} \notin Min\{y \in Y : (x, y) \in R(epiF, (\bar{x}, \bar{y}))\} + C \tag{4.47}$$

olsun. $(x, \tilde{y}) \in epiD_r F(\bar{x}, \bar{y})$ yani $(x, \tilde{y}) \in R(epiF, (\bar{x}, \bar{y}))$ olduğundan dolayı $\tilde{y} \in \{y \in Y : (x, y) \in R(epiF, (\bar{x}, \bar{y}))\}$ dir. Baskınlık (domination) özelliği ile

$$\exists y_0 \in Min\{y \in Y : (x, y) \in R(epiF, (\bar{x}, \bar{y}))\}$$

ve $\exists c_0 \in C$ öyle ki $\tilde{y} = y_0 + c_0$ dır. Böylece

$$\tilde{y} \in Min\{y \in Y : (x, y) \in R(epiF, (\bar{x}, \bar{y}))\} + C$$

olur ki bu ise (4.47) ile çelişir. Bundan dolayı

$$epi\left(D_r F(\bar{x}, \bar{y})\right) = epi\left(D_{gr} F(\bar{x}, \bar{y})\right)$$

dir. ■

4.1 Optimallik Koşulları

Konveks durum için Chen ve Jahn genelleştirilmiş contingent epitürevler yoluyla küme değerli dönüşümler için gerekli ve yeterli optimallik koşullarını vermişlerdir [12]. Amacımız konveks olmayan durumu genelleştirilmiş radyal epitürevler yoluyla ele almak ve küme değerli dönüşümler için gerekli ve yeterli optimallik koşullarını elde etmektir. Dördüncü bölümde verdiğimiz standart varsayımlar altında aşağıdaki küme değerli optimizasyon problemini düşünelim:

$$\min_{x\in S} F(x) \tag{4.48}$$

Tanım 4.49 *Sıralama konisi C boş olmayan bir $intC$' ye sahip olsun. $\bar{y}$ elemanı $F(S) = \bigcup_{x\in S} F(x)$ kümesinin zayıf minimal elemanı ise $\bar{x} \in S$ ve $\bar{y} \in F(\bar{x})$ olmak üzere $(\bar{x}, \bar{y})$ ikilisi (4.48) probleminin zayıf minimalleştiricisi olarak adlandırılır.*

Bizim ilk sonucumuz zayıf minimalleştirici için bir gerekli optimallik koşuludur.

Teorem 4.16 *C boş olmayan bir $intC$' ye sahip ve $(\bar{x}, \bar{y})$ noktası (4.48) probleminin zayıf minimalleştiricisi olsun O zaman $W = Y \diagdown (-intC)$ olduğunda $\forall x \in S$ için*

$$D_{gr}F(\bar{x}, \bar{y})(x - \bar{x}) \subset W.$$

Kanıt. Bu teoremi aksini varsayarak ispatlayalım.

$$D_{gr}F(\bar{x}, \bar{y})(s - \bar{x}) \not\subseteq W,$$

olacak şekilde bir $s \in S$ var olsun. O zaman bir $z \in D_{gr}F(\bar{x}, \bar{y})(s - \bar{x})$ elemanı

$$z \in (-intC) \tag{4.49}$$

olacak şekilde vardır. $D_{gr}F(\bar{x}, \bar{y})$' nin tanımı ile $(s - \bar{x}, z) \in R(epiF, (\bar{x}, \bar{y}))$. Bundan dolayı $epiF$ de bir$(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi ve pozitif reel sayıların bir $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi vardır öyle ki

$$(s - \bar{x}, z) = \lim_{n\to\infty} \lambda_n (x_n - \bar{x}, y_n - \bar{y}). \tag{4.50}$$

(4.49) ve (4.50) ile $y_n - \bar{y} \in (-intC)$ olduğundan bir $M \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall n \geq M$ için

$$y_n \in \{\bar{y}\} - intC.$$

Her $n \in \mathbb{N}$ için $(x_n, y_n) \in epiF$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için bir $\tilde{y}_n \in F(x_n)$ $y_n \in \{\tilde{y}_n\} + C$ olacak şekilde vardır. Böylece $\forall n \geq M$ için

$$\tilde{y}_n \in \{y_n\} - C \subset \{\bar{y}\} - intC - C = \{\bar{y}\} - intC.$$

Bu ise $\bar{y}$ noktasının $F(S)$ kümesinin zayıf minimalleştiricisi olmasıyla çelişir. O halde $(\bar{x}, \bar{y})$ noktası (4.48)' in zayıf minimalleştiricisidir. ■

Yardımcı Teorem 4.2 $(X, \|.\|_X)$ *reel normlu uzay, S kümesi X uzayının boş olmayan bir alt kümesi, $(Y, \|.\|_Y)$ reel normlu uzayı bir pointed, konveks ve Daniell $C \subset Y$ konisiyle kısmi sıralı, $F : S \rightrightarrows Y$ küme değerli bir dönüşüm, her $x \in S$ için $F(S)$ baskınlık özelliğine sahip olsun ve $\bar{x} \in S$ ve $\bar{y} \in F(\bar{x})$ verilsin. Genelleştirilmiş radyal epitürev $D_{gr}F(\bar{x}, \bar{y})$ varsa her $x \in S$ için*

$$F(x) - \{\bar{y}\} \subset D_{gr}F(\bar{x}, \bar{y})(x - \bar{x}) + C.$$

Kanıt. $(\bar{x}, \bar{y}) \in graph(F)$ verilsin $x \in S$ ve $y \in F(x)$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\lambda_n = 1$, $x_n = x$, $y_n = y$ alarak $(x_n, y_n) \in epi(F)$ ve
$\lambda_n (x_n - \bar{x}, y_n - \bar{y}) \to (x - \bar{x}, y - \bar{y})$ elde ederiz.
Sonuç olarak $(x - \bar{x}, y - \bar{y}) \in R(epi(F), (\bar{x}, \bar{y})) = epi(D_r F(\bar{x}, \bar{y}))$ dir bu ise $y - \bar{y} \in D_{gr}F(\bar{x}, \bar{y})(x - \bar{x}) + C$ olması anlamına gelir. ■

Teorem 4.17 *Yardımcı Teorem 4.2' nin varsayımları sağlansın ve $intC \neq \emptyset$ olsun. $\bar{x} \in S$ ve $\bar{y} \in F(\bar{x})$ için $W = Y \diagdown (-intC)$ olduğunda $\forall x \in S$ için*

$$\emptyset \neq D_{gr}F(\bar{x}, \bar{y})(x - \bar{x}) \subset W \tag{4.51}$$

oluyorsa $(\bar{x}, \bar{y})$ noktası (4.48) probleminin bir zayıf minimalleştiricisidir.

Kanıt. (4.51) ile her $x \in S$ için

$$D_{gr}F(\bar{x}, \bar{y})(x - \bar{x}) \cap (-intC) = \emptyset$$

dir. Buradan her $x \in S$ için

$$(D_{gr}F(\bar{x}, \bar{y})(x - \bar{x}) + C) \cap (-intC) = \emptyset.$$

Yardımcı Teorem 4.2 ile her $x \in S$ için

$$(F(x) - \{\bar{y}\}) \cap (-intC) = \emptyset$$

elde edilir. Böylece $\bar{y}$ elemanı $F(S)$ kümesinin zayıf minimal elemanıdır ve dolayısıyla $(\bar{x}, \bar{y})$ noktası (4.48) probleminin bir zayıf minimalleştiricisidir. ■

5 Genelleştirilmiş Radyal Epitürev İçin Varlık Teoremleri ve Karakterizasyonu

Bu bölümde bir önceki bölümde tanımladığımız genelleştirilmiş radyal epitürev ve birbirleriyle yakın ilişkili olan bu kavramın iki yeni çeşitini tanıtacağız. Bu epitürevlerin bazı faydalı özelliklerini inceleyip örnekler vereceğiz ve de genelleştirilmiş radyal epitürev ve onun çeşitlerinin bazı varlık teoremlerini ve karakterizasyonlarını vereceğiz.

Tanım 5.50

$$P_F(x) = F(x) + C$$

ile tanımlanan $P_F : X \to 2^Y$ *dönüşüme* $F : X \rightrightarrows Y$ *küme değerli dönüşümünün profil dönüşümü denir.*
$(X, \|.\|_X)$ *ve* $(Y, \|.\|_Y)$ *reel normlu uzaylar* $G : X \to 2^Y$

$$G(x) = \{y \in Y : (x, y) \in R(epi(F), (\bar{x}, \bar{y}))\} \tag{5.52}$$

ile tanımlanan bir küme değerli dönüşüm olsun.

Jahn ve Khan [21] de konveks dönüşümler için genelleştirilmiş contingent epitürev kavramını tanımlamışlardır. Biz burada konveks olmayan durumda radyal koniyi kullanarak genelleştirilmiş radyal epitürev ve iki yeni çeşitinin tanımını vereceğiz.

Tanım 5.51 $(X, \|.\|_X)$ *ve* $(Y, \|.\|_Y)$ *reel normlu uzaylar* $C \subset Y$ *konveks bir koni,* $F : X \rightrightarrows Y$ *bir küme değerli dönüşüm ve* $(\bar{x}, \bar{y}) \in graph(F)$ *olsun.*

$$D_{gr}F(\bar{x}, \bar{y})(x) = Min(G(x), C) \tag{5.53}$$

ile tanımlanan $D_{gr}F(\bar{x}, \bar{y}) : X \rightrightarrows Y$ *küme değerli dönüşüme* F *küme değerli dönüşümünün* $(\bar{x}, \bar{y})$ *noktasındaki genelleştirilmiş radyal epitürevi denir. Eşitlik (5.53)' da* Min *yerine* $WMin$, $\Pr Min$ *alarak tanımlanan* $D_{wr}F(\bar{x}, \bar{y})$ *ve* $D_{pr}F(\bar{x}, \bar{y})$ *küme değerli dönüşümlere sırasıyla* F *küme değerli dönüşümünün*

$(\bar{x},\bar{y})$ noktasındaki zayıf radyal epitürevi ve has radyal epitürevi denir.
$\Pr Min(.,.) \subset Min(.,.) \subset WMin(.,.)$ *olduğundan dolayı*

$$D_{pr}F(\bar{x},\bar{y})(x) \subseteq D_{gr}F(\bar{x},\bar{y})(x) \subseteq D_{wr}F(\bar{x},\bar{y}) \tag{5.54}$$

kapsamları geçerlidir.

$(\bar{x},\bar{y}) \in int(epi(F))$ ise $R(epi(F),(\bar{x},\bar{y}))$ konisi $X \times Y$ uzayı ile çakışır. Böyle bir durumda radyal epitürev ve genelleştirilmiş radyal epitürev yoktur.

Has radyal epitürev $D_{pr}F(\bar{x},\bar{y})(x)$' in genelleştirilmiş radyal epitürev $D_{gr}F(\bar{x},\bar{y})(x)$' in bir has alt kümesi olduğunu bir örnekle açıklayalım.

Örnek 5.5 *:* $F(x) = \begin{cases} \emptyset & , x < 0 \\ \{(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1^2 + y_2^2 \leq x^2\} & , x \geq 0 \end{cases}$ *ile tanımlanan $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}^2$ küme değerli dönüşümü düşünelim. $\bar{x} = 0$ ve $\bar{y} = (0,0)$ olsun. $R(epi(F),(\bar{x},\bar{y})) = epi(F)$ dir, ve dolayısıyla $G : \mathbb{R}_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^2$ dönüşümü $G(x) = \left\{(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2 : (y_1,y_2) \in F(x) + \mathbb{R}_+^2\right\}$ ile verilir.*
Sonuç olarak genelleştirilmiş radyal üst türev $D_{gr}F(\bar{x},\bar{y}) : \mathbb{R}_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^2$

$$D_{gr}F(\bar{x},\bar{y})(x) := \left\{(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1^2 + y_2^2 = x^2,\ y_1 \leq 0,\ y_2 \leq 0\right\}$$

ile tanımlanır. $x = 1$ olsun. $(-1,0) \in D_{gr}F(\bar{x},\bar{y})(1)$ olsun.
$(-1,0) \notin D_{pr}F(\bar{x},\bar{y})(1)$ dir. Gerçekten;

$$R\left(G(1) + \mathbb{R}_+^2, (-1,0)\right) = \left\{(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2 :\ y_1 \geq 0,\ y_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

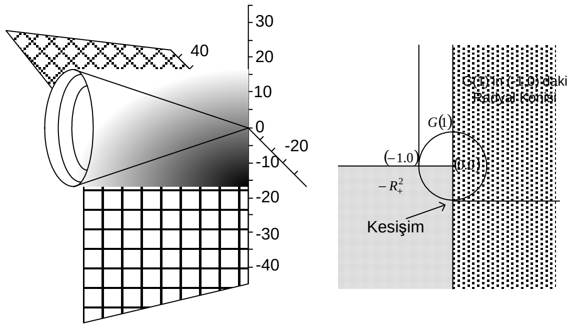
elde ederiz, bundan dolayı

$$\begin{aligned} R\left(G(1) + \mathbb{R}_+^2, (-1,0)\right) \cap \left(-\mathbb{R}_+^2\right) &= \left\{(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2 :\ y_1 = 0,\ y_2 \leq 0\right\} \\ &\neq \{0\}. \end{aligned}$$

Aslında $x = 1$ noktasında has radyal epitürev

$$D_{pr}F(\bar{x},\bar{y})(x) := \left\{(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1^2 + y_2^2 = 1,\ y_1 < 0,\ y_2 < 0\right\}$$

ile verilir. Şekil 5.8' de $epi(F)$ ve $G(1)$ kümelerinin görünleri verilmiştir.



Şekil 5.10: Örnek 5.5 için $epi\,(F)$ ve $G\,(1)$' in görüntüsü

Şimdi genelleştirilmiş radyal epitürev $D_{gr}F\,(\bar{x},\bar{y})\,(x)$' in zayıf radyal epitürev $D_{wr}F\,(\bar{x},\bar{y})\,(x)$' in bir has alt kümesi olduğuna dair bir örnek verelim. Bu örnek $D_{wr}F\,(\bar{x},\bar{y})\,(x) \diagdown D_{gr}F\,(\bar{x},\bar{y})\,(x)$ farkının cok geniş olabileceğini açıklar.

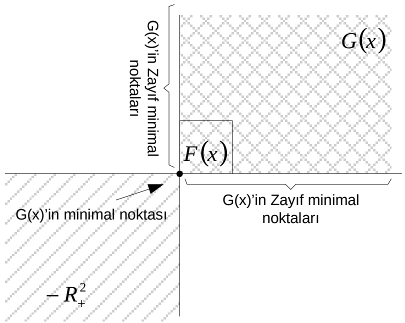
Örnek 5.6 *:* $F\,(x) = \left\{ \begin{array}{cc} \emptyset & ,\; x < 0 \\ \left\{ (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{c} 0 \leq y_1 \leq x \\ 0 \leq y_2 \leq x \end{array} \right\} & ,\; x \geq 0 \end{array} \right.$ *ile tanımlanan* $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}^2$ *küme değerli dönüşümü düşünelim.* $\bar{x} = 0$ *ve* $\bar{y} = (0,0)$ *olsun.* $R\,(epi\,(F)\,,(\bar{x},\bar{y})) = \{(x,(y_1,y_2)) \in \mathbb{R}^3 :\, x \geq 0,\, y_1 \geq 0,\, y_2 \geq 0\}$ *dir, ve dolayısıyla* $G : \mathbb{R}_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^2$ *dönüşümü* $G\,(x) = \{(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 \geq 0,\, y_2 \geq 0\}$ *ile verilir. Sonuç olarak genelleştirilmiş radyal epitürev* $D_{gr}F\,(\bar{x},\bar{y}) : \mathbb{R}_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^2$

$$D_{gr}F\,(\bar{x},\bar{y})\,(x) := \{(0,0)\}\,,$$

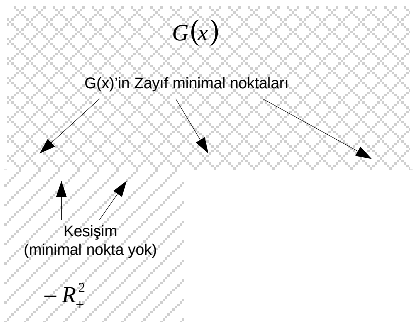
ve zayıf radyal epiürev $D_{wr}F\,(\bar{x},\bar{y}) : \mathbb{R}_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^2$

$$D_{wr}F\,(\bar{x},\bar{y})\,(x) = \left\{(0,y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_2 \geq 0 \in \mathbb{R}\right\} \cup \left\{(y_1,0) \in \mathbb{R}^2 : y_1 \geq 0\right\}$$

ile verilir. Açıkça her $x \in dom\,(D_{gr}F\,(\bar{x},\bar{y})) = dom\,(D_{wr}F\,(\bar{x},\bar{y})) = \mathbb{R}_+$ *için zayıf radyal epitürev* $D_{wr}F\,(\bar{x},\bar{y})\,(x)$ *genelleştirilmiş radyal epitürev* $D_{gr}F\,(\bar{x},\bar{y})\,(x)$*' den daha geniştir. Şekil 5.9' ve Şekil 5.10' da* $G\,(x)$ *kümesinin minimal ve zayıf minimal noktalar kümesi verilmiştir.*



Şekil 5.11: Örnek 5.6. için $G(x)$'in minimal noktalar kümesi



Şekil 5.12: Örnek 5.6 için $G(x)$' in zayıf minimal noktalar kümesi

Has minimal, minimal ve zayıf minimal noktalar arasındaki ilişkiden dolayı genelleştirilmiş radyal epitürev $D_{gr}F(\bar{x},\bar{y})(x)$ veya has radyal epitürev $D_{pr}F(\bar{x},\bar{y})(x)$ varsa o zaman sıralama konisi C' nin boş olmayan bir içe sahip olması koşuluyla zayıf radyal epitürev $D_{wr}F(\bar{x},\bar{y})(x)$ de vardır. Bu üç epitürevin dışında yalnızca zayıf radyal epitürev $D_{wr}F(\bar{x},\bar{y})(x)$ var olabilir. Böyle bir durumu aşağıdaki örnekte görelim.

Örnek 5.7 *:*

$$F(x) = \begin{cases} \emptyset & , x < 0 \\ \{(y_1, -y_1^2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y_1 \leq x\} \\ \cup \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 \leq 0,\ y_2 \geq 0\} & , x \geq 0 \end{cases}$$

ile tanımlanan $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}^2$ küme değerli dönüşümü düşünelim.

$\bar{x} = 0$ *ve* $\bar{y} = (0,0)$ *olsun.*

$R(epi(F), (\bar{x},\bar{y})) = \{(x,(y_1,y_2)) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0\}$ *ve dolayısıyla* $G : \mathbb{R}_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^2$ *dönüşümü* $G(x) = \{(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0\}$ *ile verilir. Sonuç olarak genelleştirilmiş radyal epitürev* $D_{gr}F(\bar{x},\bar{y}) : \mathbb{R}_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^2$

$$D_{gr}F(\bar{x},\bar{y})(x) := \{(0,0)\},$$

ve zayıf radyal epiürev $D_{wr}F(\bar{x},\bar{y}) : \mathbb{R}_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^2$

$$D_{wr}F(\bar{x},\bar{y})(x) = \left\{(0,y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_2 \geq 0\right\} \cup \left\{(y_1,0) \in \mathbb{R}^2 : y_1 \geq 0\right\}$$

ile verilir.

Şimdi [23] de verilen bir kavramı hatırlayıp daha sonra [29] de verilen regüler koni tanımını verelim.

Tanım 5.52 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ *bir dizi olsun. Eğer* $\forall m,n \in \mathbb{N}$, $m \leq n$ *için* $x_m - x_n \in C$ *ise* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dizisine* $C-$*azalandır denir.*

Tanım 5.53 *C konisindeki bir alt sınıra sahip her $C-$ azalan dizi C konisinin bir elemanına yakınsıyorsa C konveks konisi regüler olarak adlandırılır.*

Aşağıda Sontag ve Zalinescu [31] tarafından verilen yardımcı teoremi bir sonraki teoremin ispatında kullanacağız.

Yardımcı Teorem 5.3 $(Y, \|.\|_Y)$ *bir reel normlu uzay,* $C \subset Y$ *konveks bir koni ve* $D \subseteq Y$ *olsun*

a) C konisi regüler ve D kümesi kapalı ve C -alltan sınırlı ise o zaman $Min\,(D, C) \neq \emptyset$ ve baskınlık (domination) özelliği geçerlidir, yani, $D \subseteq Min\,(D, C) + C$ dir.

b) C kompakt bir tabana sahip ve D kümesi kapalı ve konveks olsun. $Min\,(D, C) \neq \emptyset$ ise $D \subseteq Min\,(D, C) + C$ dir.

Genelleştirilmiş radyal epitürev ve zayıf radyal epitürev için varlık teoremlerini verelim.

Teorem 5.18 $(X, \|.\|_X)$ *ve* $(Y, \|.\|_Y)$ *reel normlu uzaylar* $C \subset Y$ *konveks bir koni,* $F : X \rightrightarrows Y$ *bir küme değerli dönüşüm ve* $(\bar{x}, \bar{y}) \in graph\,(F)$ *olsun. Her* $x \in dom\,(G)$ *için (5.52) ile verilen* $G\,(x)$ *bir alt sınıra sahip ve* C *konisi regüler olsun. O zaman her* $x \in dom\,(G)$ *için genelleştirilmiş radyal epitürev vardır. Üstelik aşağıdaki bağıntı geçerlidir:*

$$epi\,(D_{gr}F\,(\bar{x}, \bar{y})) = R\,(epi\,(F)\,, (\bar{x}, \bar{y}))\,. \tag{5.55}$$

Ayrıca $int\,(C) \neq \emptyset$ *ise o zaman zayıf radyal epitürev de vardır ve*

$$epi\,(D_{wr}F\,(\bar{x}, \bar{y})) = R\,(epi\,(F)\,, (\bar{x}, \bar{y}))\,. \tag{5.56}$$

Kanıt. : Bir reel normlu uzayda radyal koni daima kapalı olduğu için $G\,(x)$ kümesi kapalıdır. Varsayımla bir alt sınıra sahip olduğundan dolayı $D_{gr}F\,(\bar{x}, \bar{y})\,(x)$' in varlığı $G\,(x)$ için C konveks konisine göre minimal noktaların varlığını garanti eden bir önceki Yardımcı Teorem 5.2 a) 'dan görülür. Üstelik aynı sonuçtan $G\,(x)$ kümesinin baskınlık özelliğine sahip olduğunu söyleyebiliriz, yani

$$G\,(x) \subseteq D_{gr}F\,(\bar{x}, \bar{y})\,(x) + C \tag{5.57}$$

dir. Üstteki kapsamda eşitliğin geçerli olduğunu gösterelim.
$u \in D_{gr}F(\bar{x},\bar{y}) + C$ olsun. O halde $u \in G(x) + C$. Şimdi $G(x) = G(x) + C$ gerçeğini kullanarak $u \in G(x)$ elde ederiz. Bu ise $G(x) \supseteq D_{gr}F(\bar{x},\bar{y})(x) + C$ kapsamını doğrular. Böylece $D_R P_F(\bar{x},\bar{y})(x)$ türevi F küme değerli dönüşümünün profil dönüşümünün radyal türevi olmak üzere,

$$D_{gr}F(\bar{x},\bar{y})(x) + C = G(x) = D_R P_F(\bar{x},\bar{y})(x)$$

dir. Son eşitlik ve radyal türevin tanımı ile

$$\begin{aligned} epi\left(D_{gr}F(\bar{x},\bar{y})\right) &= graph\left(D_R P_F(\bar{x},\bar{y})\right) \\ &= R\left(graph\left(P_F\right),(\bar{x},\bar{y})\right) \\ &= R\left(epi\left(F\right),(\bar{x},\bar{y})\right) \end{aligned}$$

elde ederiz.
Zayıf radyal epitürev $D_{wr}F(\bar{x},\bar{y})(x)$' in varlığı genelleştirilmiş radyal epitürev $D_{gr}F(\bar{x},\bar{y})(x)$'in varlığından ve $D_{gr}F(\bar{x},\bar{y})(x) \subset D_{wr}F(\bar{x},\bar{y})(x)$ kapsamından görülür.
Geriye (5.56) eşitliğini göstermek kalır. (5.53) tanımı ve (5.54) kapsamından dolayı $G(x) \subseteq D_{wr}F(\bar{x},\bar{y})(x) + C$ olduğu görülür. Ters kapsam yukarıdakine benzer olarak gösterilir. Bu da ispatı tamamlar. ■

Eşitlik (5.55) ve (5.56) bu yaklaşımda önemli bir rol oynar. Bunun temel nedeni; bu eşitliklerin karşılık gelen epitürevler hakkında çeşitli sonuçları elde etmek için radyal koninin özelliklerinin kullanılmasıdır. Eşitlik (5.55) ve (5.56)' ün elde edilmesinde (5.57) baskınlık özelliği önemli bir rol oynar.

Tanım 5.54 *X lineer uzayı bir sıralama konisi C ile kısmi sıralı ve S kümesi X uzayının boş olmayan bir alt kümesi olsun. Bir $x \in X$ için $S_x = (\{x\} - C) \cap S$ kümesi boş değilse S_x kümesi S kümesinin bir alt kesiti olarak adlandırılır [21].*

Aşağıda [11] de Borwein tarafından verilen teoremi bir sonraki teoremimizin ispatında kullanacağız.

Teorem 5.19 *X bir topoljik vektör uzayı K kümesi X uzayının boş olmayan bir alt kümesi, $C \subset X$ kapalı, konveks bir koni olsun. Varsayalım ki ya*

(a) K kümesi bir minorized kapalı bölüme sahip ve C Daniell, ya

(b) K kümesi kapalı ve sınırlı ve C Daniell ve sınırlı bir şekilde tam sıralı ise, ya da

(c) K kompakt bir bölüme sahipse o zaman $Min\,(K, C) \neq \emptyset$.

Aşağıdaki teorem; C sıralama konisinin sadece konveks ve kapalı olması durumunda genelleştirilmiş radyal epitürev ve zayıf radyal epitürevin varlık durumunu örneklemesi açısından yararlıdır.

Teorem 5.20 *$(X, \|.\|_X)$ ve $(Y, \|.\|_Y)$ reel normlu uzaylar $C \subset Y$ konveks, kapalı bir koni, $F : X \rightrightarrows Y$ küme değerli bir dönüşüm ve $(\bar{x}, \bar{y}) \in graph\,(F)$, herbir $x \in dom\,(G)$ ve $w \in Y$ için $C-$alt kesit $G_w\,(x)$ boş kümeden farklı ve kompakt olsun. O zaman her $x \in dom\,(G)$ için $D_{gr}F\,(\bar{x}, \bar{y})\,(x)$ vardır. Üstelik $int\,(C) \neq \emptyset$ ise $D_{wr}F\,(\bar{x}, \bar{y})\,(x)$ de vardır.*

Kanıt. $G\,(x)$ kümesi boştan farklı, kompakt bir bölüme sahip olduğundan (Teorem 5.22)' den $Min\,(G\,(x)\,, C)$ boş kümeden farklıdır. O zaman genelleştirilmiş radyal epitürev $D_{gr}F\,(\bar{x}, \bar{y})\,(x)$ ve dolayısıyla da zayıf radyal epitürev $D_{wr}F\,(\bar{x}, \bar{y})\,(x)$ vardır. ■

Aşağıdaki teorem sonlu boyutlu durumda genelleştirilmiş radyal epitürevlerin varlık koşullarının belirlenmesi açısından önemlidir.

Teorem 5.21 *$(X, \|.\|_X)$ bir reel normlu uzay $C \subset \mathbb{R}^n$ bir kapalı, konveks ve pointed koni, $F : X \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ bir küme değerli dönüşüm ve $(\bar{x}, \bar{y}) \in graph\,(F)$ olsun. Her $x \in dom\,(G)$ için (5.52) ile tanımlanan $G\,(x)$ kümesi konveks, herbir $x \in dom\,(G)$ ve $w \in Y$ için $C-$alt kesit $G_w\,(x)$ boş kümeden farklı ve kompakt olsun. O zaman her $x \in dom\,(G)$ için $D_{wr}F\,(\bar{x}, \bar{y})\,(x)$, $D_{gr}F\,(\bar{x}, \bar{y})\,(x)$ ve $D_{pr}F\,(\bar{x}, \bar{y})\,(x)$ vardır. Üstelik (5.55) ve (5.56) geçerlidir.*

Kanıt. $D_{gr}F(\bar{x},\bar{y})(x)$ ve $D_{wr}F(\bar{x},\bar{y})(x)$' in varlığı bir önceki teoremden ve $D_{pr}F(\bar{x},\bar{y})(x)$' in varlığı Luc' un(, [24 Sonuç 3.16])' den görülür. $\mathbb{R}^n$ de her kapalı konveks ve pointed koni kompakt bir tabana sahip olduğundan [19 Yardımcı Teorem 5.3 b)] den $G(x)$ kümesinin kapalılık varsayımı ile birlikte baskınlık özelliğini sağladığı görülür. İspatın kalanı Teorem 5. 21' inkine benzerdir. ■

Sonuç 5.1 *Teorem 5.21 veya Teorem 5.23' ün varsayımları altında*

$$epi\left(D_{wr}F(\bar{x},\bar{y})\right) = epi\left(D_{gr}F(\bar{x},\bar{y})\right)$$

dir.

Kanıt. (5.55) ve (5.56) den görülür.

Sonuç 5.2 *Teorem 5.21 veya Teorem 5.23' ün varsayımları altında*

$$\begin{aligned} epi\left(D_{wr}F(\bar{x},\bar{y})\right) &\subset R(dom(F),\bar{x}) \times Y, \\ epi\left(D_{gr}F(\bar{x},\bar{y})\right) &\subset R(dom(F),\bar{x}) \times Y \end{aligned}$$

dir.

■

Kanıt. İlk kapsam Sonuç 5.1' den direkt olarak görülür. Şimdi ikinci kapsamı ispatlayalım. $(u,v) \in epi\left(D_{gr}F(\bar{x},\bar{y})\right)$ olsun. O zaman
$(u,v) \in R(epi(F),(\bar{x},\bar{y}))$ dir ve bundan dolayı $\exists\lambda_n > 0$ ve
$\exists (u_n,v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset epi(F)$, $(u_n,v_n) \to (u,v)$ öyle ki $\bar{y}+\lambda_n v_n \in F(\bar{x}+\lambda_n u_n)+C$. Sonuç olarak $(\bar{x}+\lambda_n u_n) \in dom(F)$ olur bu da $(u,v) \in R(dom(F),\bar{x}) \times Y$ olması demektir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Sonuç 5.3 $(X,\|.\|_X)$ *ve* $(Y,\|.\|_Y)$ *reel normlu uzaylar* $C \subset Y$ *konveks bir koni,* $F : X \rightrightarrows Y$ *bir küme değerli dönüşüm ve* $(\bar{x},\bar{y}) \in graph(F)$ *olsun. Konveks koni* C *pointed ve* $SMin(G(x),C) \neq \emptyset$ *olsun. O zaman radyal epitürev ve genelleştirilmiş radyal epitürev çakışır.*

Kanıt. : $G(x)$ kümesinin güçlü minimal noktalar kümesi $SMin(G(x), C)$ boştan farlı olduğu için $G(x)$ kümesinin minimal noktalar kümesi $Min(G(x), C)$ ile çakışır. Varsayımla C konveks konisi pointed olduğu için $Min(G(x), C)$ kümesi tek elemanlı bir kümedir. Güçlü minimal noktanın tanımından baskınlık özelliğinin sağlandığı açıktır ve böylece (5.55) geçerlidir. Sonuç olarak $D_{gr}F(\bar{x}, \bar{y})(.)$ (5.55) eşitliğini sağlayan bir tek değerli dönüşümdür. (5.55) aynı zamanda tek olan radyal epitürev $D_rF(\bar{x}, \bar{y})(.)$ ile de sağlanır. Bu da ispatı tamamlar. ■

Önerme 5.7 *$(X, \|.\|_X)$ ve $(Y, \|.\|_Y)$ reel normlu uzaylar $C \subset Y$ konveks bir koni, $F : X \rightrightarrows Y$ bir küme değerli dönüşüm ve $(\bar{x}, \bar{y}) \in graph(F)$ olsun. En az bir $x \in X$ için has radyal epitürev $D_{pr}F(\bar{x}, \bar{y})(x)$ varsa o zaman has radyal epitürev $D_{pr}F(\bar{x}, \bar{y})(x)$ ve genelleştirilmiş radyal epitürev $D_{gr}F(\bar{x}, \bar{y})(x)$ F küme değerli dönüşümünün profil dönüşümü P_F' in radyal türevinin sınırına aittir.*

Kanıt. Varsayalım ki en az bir $x \in X$ için has radyal epitürev var $D_{pr}F(\bar{x}, \bar{y})(x)$ olsun. $D_{pr}F(\bar{x}, \bar{y})(x) \subset D_{gr}F(\bar{x}, \bar{y})(x)$ olduğu için ispatı yalnızca genelleştirilmiş radyal epitürev $D_{gr}F(\bar{x}, \bar{y})(x)$ için ispatlayalım.
$D_RP_F(\bar{x}, \bar{y})$ kapalı olduğundan dolayı

$$D_{gr}F(\bar{x}, \bar{y})(x) \nsubseteq int(D_RP_F(\bar{x}, \bar{y}))$$

olduğunu göstermek yeterlidir. $y \in D_{gr}F(\bar{x}, \bar{y})(x)$ keyfi olsun.
$y \in G(x) = D_RP_F(\bar{x}, \bar{y})(x)$ olduğu açıktır. $y \in int(D_RP_F(\bar{x}, \bar{y})(x))$ olsun. O zaman $\exists \varepsilon > 0 \ni B_\varepsilon(y) \subset D_RP_F(\bar{x}, \bar{y})(x)$ dir ($B_\varepsilon(y) = y + B_\varepsilon(0)$). $B_\varepsilon(0)$ yutan olduğundan her $z \in Y$ için en az bir λ_0 vardır öyle ki
$|\lambda| \leq \lambda_0 \Rightarrow \lambda z \in B_\varepsilon(0)$ dır. Keyfi bir $c \in C \backslash \{0\}$ için $\exists \mu$ öyle ki $\mu c \in B_\varepsilon(0)$ ve $y - \mu c \in D_RP_F(\bar{x}, \bar{y})(x)$ dir. O halde $y \notin D_{gr}F(\bar{x}, \bar{y})(x)$ dir. Bu çelişki ise ispatı tamamlar. ■

Tanım 5.55 *$l : X \rightarrow \mathbb{R}$ lineer fonksiyonel olmak üzere*
$l(G(x))^- = \{y \in Y : l(y) \leq l(G(x))\}$ kümesini tanımlayalım.

Teorem 5.22 $(X, \|.\|_X)$ *ve* $(Y, \|.\|_Y)$ *reel normlu uzaylar* $C \subset Y$ *konveks bir koni,* $F : X \rightrightarrows Y$ *bir küme değerli dönüşüm,* $(\bar{x}, \bar{y}) \in graph\,(F)$ *olsun. Varsayalım ki en az bir* $x \in X$ *için has radyal epitürev* $D_{pr}F\,(\bar{x}, \bar{y})\,(x)$ *var olsun. O zaman*

$$\underset{l \in C^{\#}}{\cup} l\,(G\,(x))^{-} \subset D_{pr}F\,(\bar{x}, \bar{y})\,(x)$$

dir. $R\,(epiF, (\bar{x}, \bar{y}))$ *konveks ve* C *konveks konisi kapalı ve pointed ve kompakt bir tabana sahip ise*

$$\underset{l \in C^{\#}}{\cup} l\,(G\,(x))^{-} = D_{pr}F\,(\bar{x}, \bar{y})\,(x)\,.$$

Kanıt. : $\bar{y} \in \underset{l \in C^{\#}}{\cup} l\,(G_l\,(x))^{-}$ olsun. O zaman en az bir $l_0 \in C^{\#}$ vardır öyle ki

$$l_0\,(\bar{y}) \leq l_0\,(y)\,, \forall y \in G\,(x) \tag{5.58}$$

dir. $\bar{y} \notin D_{pr}F\,(\bar{x}, \bar{y})\,(x)$ olsun. O halde $\bar{y} \notin \Pr - Min\,(G\,(x)\,, C)$ dir. Bundan dolayı

$$w \in R\,(G\,(x) + C, \bar{y}) \cap (-C \backslash \{0_Y\})$$

keyfi olsun. $G\,(x) + C = G\,(x)$ olduğundan $w \in R\,(G\,(x)\,, \bar{y})$ elde ederiz. Buradan $\exists \lambda_n > 0$ ve $\exists\,(w_n) \in G\,(x) \ni \lambda_n\,(w_n - \bar{y}) \to w$ olur. (5.58) eşitsizliğinde dolayı $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$l_0\,(\bar{y}) \leq l_0\,(w_n)$$

yazılabilir. Buradan

$$l_0\,(w_n) - l_0\,(\bar{y}) \geq 0$$

olup l_0 lineer bir fonksiyonel olduğundan

$$l_0\,(w_n - \bar{y}) \geq 0$$

dır. $\lambda_n > 0$ olduğundan

$$\lambda_n l_0\,(w_n - \bar{y}) \geq 0$$

olup ve l_0 aynı zamanda sürekli olduğundan dolayı

$$l_0\,(\lambda_n\,(w_n - \bar{y})) \geq 0$$

elde ederiz.

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n \left(l_0 \left(w_n\right) - l_0 \left(\bar{y}\right)\right) \geq 0$$

elde edilir. Sonuç olarak herbir $w \in R\left(G\left(x\right) + C, \bar{y}\right) \cap \left(-C\setminus\left\{0_Y\right\}\right)$ için $l_0\left(w\right) \geq 0$ dır. $l_0 \in C^{\sharp}$ olduğundan güçlü monoton artandır vee diğer yandan $w \in \left(-C\setminus\left\{0_Y\right\}\right)$ olduğundan dolayı $l\left(w\right) < 0$ olur bu ise çelişkidir. O halde $\bar{y} \in D_{pr}F\left(\bar{x}, \bar{y}\right)\left(x\right)$ dir. Böylece

$$\bigcup_{l\in C^{\#}} l\left(G_l\left(x\right)\right)^{-} \subseteq D_{pr}F\left(\bar{x}, \bar{y}\right)\left(x\right)$$

dir. Ters kapsamı göstermek için $y^* \in D_{pr}F\left(\bar{x}, \bar{y}\right)\left(x\right)$ olsun. $R\left(epiF, \left(\bar{x}, \bar{y}\right)\right)$ konveks olduğundan her $x \in dom\left(G\right)$ için $G\left(x\right)$ konvekstir ve sonuç olarak $R\left(G\left(x\right) + C, y^*\right)$ konvekstir. $R\left(G\left(x\right) + C, y^*\right) = R\left(G\left(x\right), y^*\right) \supseteq G\left(x\right) - y^*$ elde ederiz. $y^* \in D_{pr}F\left(\bar{x}, \bar{y}\right)\left(x\right)$ olduğundan Önerme nin ispatından dolayı $R\left(G\left(x\right), y^*\right) \cap \left(-C\diagdown\left\{0_Y\right\}\right) = \emptyset$ elde ederiz. Böylece bir koni ayırma teoremi ile $l_0 \in C^{\#}$ vardır öyle ki $l_0 \in \left[R\left(G\left(x\right), y^*\right)\right]^*$ dır. Buradan $l_0\left(G\left(x\right) - y^*\right) \geq 0$ ve $l_0\left(y^*\right) \leq l_0\left(G\left(x\right)\right)$ elde ederiz. Bu da ispatı tamamlar ■

Teorem 5.23 *$\left(X, \|.\|_X\right)$ ve $\left(Y, \|.\|_Y\right)$ reel normlu uzaylar $C \subset Y$ konveks bir koni, $F : X \rightrightarrows Y$ bir küme değerli dönüşüm, $\left(\bar{x}, \bar{y}\right) \in graph\left(F\right)$ olsun. Varsayalım ki en az bir $x \in X$ için zayıf radyal epitürev $D_{wr}F\left(\bar{x}, \bar{y}\right)\left(x\right)$ var olsun. O zaman*

$$\bigcup_{l\in C^*\diagdown\left\{0_Y\right\}} l\left(G_l\left(x\right)\right)^{-} \subseteq D_{wr}F\left(\bar{x}, \bar{y}\right)\left(x\right).$$

Kanıt. : $\tilde{y} \in \bigcup_{l\in C^*\diagdown\left\{0_Y\right\}} l\left(G_l\left(x\right)\right)^{-}$ olsun. O zaman en az bir $l_0 \in C^*\diagdown\left\{0_Y\right\}$ vardır öyle ki

$$l_0\left(\tilde{y}\right) \leq l_0\left(y\right), \forall y \in G\left(x\right).$$

$\tilde{y} \notin D_{wr}F\left(\bar{x}, \bar{y}\right)\left(x\right) = W - Min\left(G\left(x\right), C\right)$ olsun. Diğer yandan $D_{wr}F\left(\bar{x}, \bar{y}\right)\left(x\right) = WMin\left(G\left(x\right), C\right)$ olduğundan $\exists y_1 \in D_{wr}F\left(\bar{x}, \bar{y}\right)\left(x\right)$ için öyle ki $y_1 < \tilde{y}$ dir. Buradan $l_0\left(y_1\right) < l_0\left(\tilde{y}\right)$ olur bu ise çelişkidir. Böylece teorem ispatlanmış olur. ■

Önerme 5.8 *$(X, \|.\|_X)$ ve $(Y, \|.\|_Y)$ reel normlu uzaylar $C \subset Y$ konveks bir koni, $int(C) \neq \emptyset$ ve $F : A \subset X \rightrightarrows Y$ bir küme değerli dönüşüm, $(\bar{x}, \bar{y}) \in graph(F)$, $S = dom(D_{wr}F(\bar{x}, \bar{y}))$ olsun. O zaman*

$$\bigcup_{x \in S} D_{wr}F(\bar{x}, \bar{y})(x) \subset R(F(A) + C, \bar{y}).$$

Kanıt. : $R(F(A) + C, \bar{y}) \neq X$ olsun. $y \in D_{wr}F(\bar{x}, \bar{y})(S)$ keyfi ve $y \in D_{wr}F(\bar{x}, \bar{y})(x)$ olacak şekilde bir $x \in S$ var olsun. O halde

$$y \in W - Min(G(x), C) \subset G(x)$$

olur. Buradan $(x, y) \in graph(G) = R(epi(F), (\bar{x}, \bar{y}))$ olup radyal koninin tanımı ile $\exists (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+ ve ((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}} \subset X \times Y$, $(x_n, y_n) \to (x, y)$ öyle ki $((\bar{x}, \bar{y}) + \lambda_n(x_n, y_n)) \in epi(F)$ dir. Bu

$$\bar{y} + \lambda_n y_n \in F(\bar{x} + \lambda_n x_n) + C \subset F(A) + C$$

olmasını gerektirir. $\lambda_n > 0$ ve $y_n \to y$ olmasından dolayı $y \in R(epi(F), \bar{y})$ dir. y keyfi seçildiğinden dolayı $D_{wr}F(\bar{x}, \bar{y})(S) \subset R(F(A) + C, \bar{y})$ elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. ■

Aşağıdaki teoremi ispatlamak için tarafından [15] de verilen Önerme 2.3 'ü kullanacağız.

Teorem 5.24 *$(X, \|.\|_X)$ ve $(Y, \|.\|_Y)$ reel normlu uzaylar $C \subset Y$ konveks bir koni, $F : X \rightrightarrows Y$ bir küme değerli dönüşüm ve $(\bar{x}, \bar{y}) \in graph(F)$ olsun. Her $x \in X$ için (5.52) ile verilen $G(x)$ bir alt sınıra sahip olsun ve C konisi regüler olsun. O zaman genelleştirilmiş radyal epitürev $D_{gr}F(\bar{x}, \bar{y})$ ve zayıf radyal epitürev $D_{wr}F(\bar{x}, \bar{y})$ $C-$ alttan yarı süreklidir.*

Kanıt. Genelleştirilmiş radyal epitürevin alltan yarı sürekli olduğunu göstermek için [15] de verilen Önerme 2.3 gereğince $\{x \in X : D_{gr}F(\bar{x}, \bar{y})(x) \cap (y - C) \neq \emptyset\}$ kümesinin kapalılığını göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} & \{x \in X : D_{gr}F(\bar{x}, \bar{y})(x) \cap (y - C) \neq \emptyset\} \times \{y\} \\ = \; & epi(D_{gr}F(\bar{x}, \bar{y})(x)) \cap (X \times \{y\}) \\ = \; & R(epi(F), (\bar{x}, \bar{y})) \cap (X \times \{y\}) \end{aligned}$$

olup, radyal koninin kapalılığından her $y \in Y$ için

$$\{x \in X : D_{gr}F(\bar{x}, \bar{y})(x) \cap (y - C) \neq \emptyset\}$$

kümesi kapalıdır. bu da genelleştirilmiş radyal epitürev $D_{gr}F(\bar{x}, \bar{y})$' in $C-$alttan yarı sürekli olduğunu doğrular. ∎

5.1 Skalerizasyon Yoluyla Benson Has Etkinliğin Karakterizasyonu

Aşağıdaki tanım ve yardımcı teorem Gasimov tarafından verilmiştir [16].

Tanım 5.56 *S kümesi Y reel normlu uzayının boş olmayan bir alt kümesi ve $C \subset Y$ konveks bir koni ve $g : S \to \mathbb{R}$ fonksiyonel olsun. Herbir $s \in S$ için*

$$y \in (\{s\} - C) \cap S \Longrightarrow g(y) \leq g(s)$$

oluyorsa g fonksiyoneline S kümesi üzerinde monoton artandır denir. Herbir $s \in S$ için

$$y \in (\{s\} - C) \cap S,\, y \neq s \Longrightarrow g(y) < g(s)$$

oluyorsa g fonksiyoneline S kümesi üzerinde güçlü monoton artandır denir. $\mathbb{R}_+$ negatif olmayan reel sayıların kümesi olmak üzere

$$U = \left\{(l, \alpha) \in C^{\#} \times \mathbb{R}_+ : \alpha \|y\| - l(y) \leq 0,\, \forall y \in C\right\},$$

$$U^{\#} = \left\{(l, \alpha) \in C^{\#} \times \mathbb{R}_+ : \alpha \|y\| - l(y) < 0,\, \forall y \in C \backslash \{0\}\right\}$$

olsun.

Yardımcı Teorem 5.4 $(l, \alpha) \in U$ $\left((l, \alpha) \in U^{\#}\right)$ *için $g(y) = \alpha \|y\| + l(y)$ olarak tanımlanan $g : Y \to \mathbb{R}$ fonksiyonu Y üzerinde monoton artandır (güçlü monoton artandır).*

Kanıt. : $(l,\alpha) \in U^{\#}$ ve $y - \bar{y} = t \in C \setminus \{0\}$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned}
g(\bar{y}) - g(y) &= g(y-t) - g(y) \\
&= \alpha \|y-t\| + l(y-t) - \alpha \|y\| - l(y) \\
&\leq \alpha \|y\| + \alpha \|t\| + l(y) - l(t) - \alpha \|y\| - l(y) \\
&= \alpha \|t\| - l(t) < 0
\end{aligned}$$

olduğundan dolayı g güçlü monoton artandır. ■

$(l,\alpha) \in U^{\#}$ için aşağıdaki kümeleri tanımlayalım.

$$\begin{aligned}
G_{(l,\alpha)}(x) &= \{\alpha \|y\| + l(y) \in \mathbb{R} : y \in G(x)\} \\
&= \left\{ \begin{array}{c} \alpha \|y\| + l(y) \in \mathbb{R} : \exists \lambda_n > 0, \exists (x_n, y_n) \in epi(F) \ni \\ \lambda_n (x_n - \bar{x}, \alpha \|y_n - \bar{y}\| + l(y_n - \bar{y})) \to (x, \alpha \|y\| + l(y)) \end{array} \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
SG_{(l,\alpha)}(x) &= \{\bar{y} \in Y : \alpha \|\bar{y}\| + l(\bar{y}) \leq \alpha \|y\| + l(y), \forall y \in G(x)\} \\
&= \left\{\bar{y} \in Y : \alpha \|\bar{y}\| + l(\bar{y}) \leq z, \forall z \in G_{(l,\alpha)}(x)\right\}.
\end{aligned}$$

Teorem 5.25 *$(X, \|.\|_X)$ ve $(Y, \|.\|_Y)$ reel normlu uzaylar $C \subset Y$ konveks bir koni, $F : X \rightrightarrows Y$ bir küme değerli dönüşüm, $(\bar{x}, \bar{y}) \in graph(F)$ olsun. Varsayalım ki en az bir $x \in X$ için has radyal epitürev $D_{pr}F(\bar{x}, \bar{y})(x)$ var olsun. O zaman*

$$\bigcup_{(l,\alpha) \in U^{\#}} SG_{(l,\alpha)}(x) \subseteq D_{pr}F(\bar{x}, \bar{y})(x).$$

Kanıt. $\bar{y} \in \bigcup_{(l,\alpha) \in U^{\#}} SG_{(l,\alpha)}(x)$ olsun. O zaman en az bir $(l,\alpha) \in U^{\#}$ vardır öyle ki her $y \in G(x)$ için

$$\alpha \|\bar{y}\| + l(\bar{y}) \leq \alpha \|y\| + l(y)$$

dir. Buradan her $y \in G(x)$ için

$$\alpha \|y\| + l(y) - \alpha \|\bar{y}\| - l(\bar{y}) \geq 0$$

ve dolayısıyla her $y \in G(x)$ için

$$\alpha \|y - \bar{y}\| + l(y - \bar{y}) \geq 0 \tag{5.59}$$

elde edilir. Her $t \in cone\left(G\left(x\right)+C-\{\bar{y}\}\right)$ için $y \in G\left(x\right), c \in C$ ve $\lambda \geq 0$ vardır öyle ki $t=\lambda\left(y+c-\bar{y}\right)$ dir. O halde

$$\begin{aligned} \alpha\left\|t\right\|+l\left(t\right) &= \lambda\left[\alpha\left\|y-\bar{y}+c\right\|+l\left(y-\bar{y}+c\right)\right] \\ &\geq \lambda\left[\alpha\left\|y-\bar{y}\right\|+l\left(y-\bar{y}\right)\right] \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

olur. O halde her $t \in \left(G\left(x\right)+C-\{\bar{y}\}\right)$ için $\alpha\left\|t\right\|+l\left(t\right) \geq 0$ olur.

Keyfi sabit $y \in cl\left(cone\left(G\left(x\right)+C-\{\bar{y}\}\right)\right)$ için bir $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \left(G\left(x\right)+C-\{\bar{y}\}\right)$ dizisi vardır öyle ki $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ dir. O halde (5.59) ile $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\alpha\left\|y_n\right\|+l\left(y_n\right) \geq 0$$

dir. $n \to \infty$ iken her $y \in cl\left(cone\left(G\left(x\right)+C-\{\bar{y}\}\right)\right)$ için

$$\alpha\left\|y\right\|+l\left(y\right) \geq 0 \qquad (5.60)$$

elde edilir.

Şimdi varsayalım ki $\bar{y}$ elemanı $G\left(x\right)$ kümesinin has minimal elemanı olmasın. O zaman en az bir $y^* \in cl\left(cone\left(G\left(x\right)+C-\{\bar{y}\}\right)\right) \cap \left(-C\setminus\{0\}\right)$ vardır. O zaman Yardımcı teorem ile güçlü monoton artanlıktan dolayı

$$\alpha\left\|\bar{y}\right\|+l\left(\bar{y}\right) < 0$$

olur ki bu ise (5.58) ile çelisir bu da teoremi ispatlar. ■

6 Sonuç ve Öneriler

Bu tezde ilk defa olarak konveks olmayan küme değerli dönüşümler için verilmiş olan radyal epitürev ve genelleştirilmiş radyal epitürev ve benzer tanımlar kullanılarak etkin çözümler için varlık teoremleri ve de çeşitli özellikleri araştırılmıştır. Bazı sonuçlar reel değerli fonksiyoneller ve bu fonksiyonellerle tanımlı tek amaçlı optimizasyon problemleri için optimallik koşullarının elde edilmesine imkan vermiştir. Daha önce literatürde konveks olmayan küme değerli dönüşümler ve tek değerli optimizasyon problemleri için bu kadar kapsamlı optimallik koşulları araştırılmamıştır. Umuyoruz ki bu durum ilerde daha etkin çalışmalara yol açacaktır. Tezin içerisinde de vurgulandığı gibi radyal epitürevler contingent epitürevlerden daha kapsamlı problem sınıfını araştırmaya imkan vermiştir. Sayfa 60' da tanımlanan $U^{\#}$ kümesinin elemanları kullanarak oluşturulan Yardımcı Teorem 5.4 de tanımlanan $g(y) = \alpha \|y\| + l(y)$ fonksiyonelleri sublineer, konveks, güçlü monoton artan fonksiyonlar olup $C^{\#}$ de tanımlanan lineer güçlü monoton artan fonksiyonların bir genellemesidir. Lineer güçlü monoton artan fonksiyoneller konveks analizde çok önemli bir yere sahip olduğundan çoğu teoremin ispatında kullanılır. Bu nedenle $U^{\#}$ deki gibi g fonksiyonları da kullanılarak nonconvex analizde ispatlar yapmak olacaktır. Tezimizdeki Teorem 5.25' in tersinin ispatlanması günümüz vektör optimizasyon problemleri için açık bir problemdir.

KAYNAKLAR

[1] Aubin J. P., Contingent derivatives of set valued maps and existence of solutions to nonlinear inclusions and differential inclusions. In: Nachbin L (ed.), Mathematical anlysis and applications, part a, Academic Press, New York, 160-229, 1981

[2] Aubin J. P., ve Frankowska H., Set valued analysis. Birkhäuser, Boston, 1984

[3] Azimov, A.Y., ve Gasimov R.N., On weak conjugacy, weak subdifferentials and duality with zero gap in nonconvex optimization, International Journal of Applied Mathematics, **1**, 171-192, 1999.

[4] Azimov, A.Y., ve Gasimov R.N., Stability and duality of nonconvex problems via augmented Lagrangian, Cybernetics and Systems Analysis, **38**, 412-421, 2002.

[5] Baier, J. ve Jahn, J., On subdifferentials of set valued maps, J. Optim. Theory Appl., **100**, 233-240, 1999.

[6] Bazan, F. F., Optimality conditions in nonconvex set valued optimization, Mathematical Methods of Operations Research, **53**, 403-417, 2001.

[7] Bazan, F. F., Radial epiderivatives and asymptotic functions in nonconvex vector optimization, SIAM J. Optim., **14**, 284-305, 2003.

[8] Benson H.P., An improved definition of proper efficiency for vector maximizaiton with respect to cones, J. Math. Anl. Appl., **71**, 231-241, 1979.

[9] Benson, H. P., Efficiency and proper efficiency in vector optimization with respect to cones, J. Math. Anal. Appl., **93**, 273-289, 1983.

[10] Borwein, J. M., On the existence of Pareto efficient points, Math. Oper. Res., **9**, 64-73, 1983.

[11] Borwein, J. M., Proper efficient points for maximization with respect to cones, SIAM J. Cont. Optim., **15**, 57-63, 1977.

[12] Chen G-Y., ve Jahn J., Optimality conditions for set valued optimization problems. Math. Meth. Oper. Res., **48** , 187-200, 1998.

[13] Corley, H.W., Optimality conditions for maximization of set valued functions, J. Optim. Theory Appl., **58**, 1-10, 1988.

[14] Dauer, J. P., and Saleh, O. A., A chacterization of proper minimal points as solutions of sublineer optimization problems, J. Math.. Anal. Appl., **178**, 227-246, 1993.

[15] Ferro, F., An optimization result for set valued maps and a stability property in vector problems with constrains, J. Optm. Theory Appl., **90**, 63-77, 1996.

[16] Gasimov R. N., Chacterization of Benson proper efficiency and scalarization in nonconvex optimization with preferences that are not necessarily a pre-order relation, Lecture Notes in Economics Mathematics, **507**, 189-198, 2002.

[17] Gasimov R. N., Radial epiderivatives and set valued optimization, Optimization: accepted

[18] Jahn, J., Introduction to the theory of nonlinear optimization, Springer, Berlin Second Edition, 1996.

[19] Jahn, J., Mathematical vector optimization in partially ordered linear spaces, Peter Lang, Frankfurt, 1986.

[20] Jahn, J. ve Rauh R.,Contingent epiderivatives and set valued optimization. Math. Meth. Oper. Res., **46**, 193-211, 1997.

[21] Jahn, J. ve Khan, A. A., Existence theorems and characterizations of generalized contingent epiderivatives, Journal of Nonlinear and Convex Analysis, **3**, 315-330, 2002.

[22] Jahn, J. ve Khan, A. A., The existence of contingent epiderivatives for set valued maps, Applied Mathematics Letters, **16**, 1179-1185, 2003.

[23] Jahn, J., Vector optimization, Springer, Berlin, 2004.

[24] Luc DT, Theory of vector optimization, Lecture Notes in Economics and Mathematical Sciences, 319, Springer-Verlag, Springer, Berlin, 1989.

[25] Luc DT, Contingent derivatives of set valued maps and applications to vector optimization. Math. Programming, **50**, 99-111, 1991

[26] Jourani, A., Necessary conditions for extremality and seperation theorems with applications to multiobjective optimization, Optimization, **44**, 327-350, 1998.

[27] Marin L. R. ve Sama M., Variational characterization of the contingent epiderivativesJ. Math. Anal. Appl., **327**, 745-762, 2007.

[28] Marin L. R. ve Sama M., About contingent epiderivatives, J. Math. Anal. Appl., **327**, 745-762, 2007.

[29] Németh, A. B., A nonconvex vector minimization problem, Nonlinear Anl. Theory Meth. Appl., **10**, 669-678, 1986.

[30] Rockafellar R.T., Convex Analysis, Princeton, New Jersey, 1970.

[31] Sonntag, Y. ve Zalinescu, C., Comparison of existence result for efficient points, J. Optim. Theory Appl., **105**, 161-188, 2000.