HOPF DEMETLERİ ÜZERİNDE KONNEKSİYON ve EĞRİLİK FORMLARI

Mehmet ERGEN

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Ağustos – 2008

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Mehmet Ergen'nin **"Hopf Demetleri Üzerinde Konneksiyon ve Eğrilik Formları"** başlıklı Matematik Anabilim Dalındaki, Yüksek Lisans Tezi 11 Temmuz 2008 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

		Adı Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	:	**Doç. Dr. NEDİM DEĞİRMENCİ**	....
Üye	:	**Prof. Dr. ŞAHİN KOÇAK**	....
Üye	:	**Doç. Dr. MURAT TANIŞLI**	....

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

HOPF DEMETLERİ ÜZERİNDE
KONNEKSİYON VE EĞRİLİK FORMLARI

Mehmet ERGEN

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: **Doç. Dr. Nedim Değirmenci**
2008, 90 sayfa

Bu çalışmada öncelikle kompleks ve kuaterniyonik projektif uzaylara ve onların bazı temel özelliklerine değinilerek $\mathbb{RP}^1 \cong S^1$, $\mathbb{CP}^1 \cong S^2$ ve $\mathbb{HP}^1 \cong S^4$ difeomorfizmleri açıkça verilmiştir. Birer asli lif demeti olan kompleks ve kuaterniyonik Hopf demetleri tanımlanıp bunlar üzerinde bazı açık formüller elde edilmiştir. $\mathbb{CP}^1$ ve $\mathbb{HP}^1$ üzerindeki doğal konneksiyonlar incelenmiş ve sonra da yüksek boyutlardaki kompleks ve kuaterniyonik Hopf demetleri üzerinde konneksiyon örnekleri verilmiştir. $\mathbb{HP}^1$ üzerindeki doğal konneksiyon kullanılarak yine $\mathbb{HP}^1$ üzerinde sonsuz sayıda konneksiyon üretilmiştir. Ayrıca, $\mathbb{CP}^1$ ve $\mathbb{HP}^1$ üzerinde (doğal konneksiyonlar kullanılmadan) sonsuz sayıda konneksiyon üreten örnekler verilmiştir. Konneksiyonun geometrik tanımı yapılıp oradaki ayrışıma bir örnek olarak $T_p(S^7)$ nin yatay ve düşey altuzaylarını geren vektörler elde edilmiştir. $\mathbb{HP}^1$ üzerindeki doğal konneksiyona karşılık gelen gauge (ayar) alanı elde edilmiş ve tersine dual olduğu gösterilmiştir. $\mathbb{CP}^2$ üzerinde elde edilmiş olan konneksiyonun da gauge alanı hesaplanmş ve bunun herhangi bir kendine-tersine dual özelliğine sahip olmadığı gösterilmiştir. Son olarak $\mathbb{CP}^3$ ve $\mathbb{HP}^2$ üzerinde elde edilmiş olan konneksiyonların gauge alanları hesaplanmş ve bunların da $\mathbb{R}^6$ ve $\mathbb{R}^8$ de [1] manasında kendine-tersine dual özellikleri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler : Hopf demetleri, konneksiyon, ayar potansiyeli, gauge field, eğrilik, kendine-tersine dual.

ABSTRACT

Master of Science Thesis

CONNECTION AND CURVATURE FORMS ON HOPF BUNDLES

Mehmet ERGEN

Anadolu University
Graduate School of Sciences
Mathematics Program

Supervisor: **Assoc. Prof. Dr. Nedim DEĞİRMENCİ**
2008, 90 pages

In this work firstly complex and quaternionic projective spaces and their some fundamental properties are discussed and the diffeomorphisms $\mathbb{RP}^1 \cong S^1$, $\mathbb{CP}^1 \cong S^2$ and $\mathbb{HP}^1 \cong S^4$ are written out. Complex and quaternionic Hopf bundles that are principal bundles are defined and some explicite formulas on them are obtained. The natural connection 1-forms on $\mathbb{CP}^1$ and $\mathbb{HP}^1$ are investigated, then some examples of connection 1-forms on higher dimensional complex and quaternionic Hopf bundle are given. Infinite number of connection 1-forms are produced by using the natural connection 1-form on $\mathbb{HP}^1$. In addition, infinite number of connection 1-forms are given directly on $\mathbb{CP}^1$ and $\mathbb{HP}^1$. The connection 1-form defined geometrically and vectors that span horizontal and vertical subspaces of $T_p(S^7)$ are obtained explicitly. The gauge field which is associated to the natural connection 1-form on $\mathbb{HP}^1$ is obtained and it is shown that it is an anti-self dual gaguge field. The gauge field of the connection 1-form which is obtained on $\mathbb{CP}^2$ is calculated and it is shown that it has no any self-duality property. Lastly the gauge fields of the connection 1-forms on $\mathbb{CP}^3$and $\mathbb{HP}^2$ are calculated and their self duality properties in the sense of [1] on $\mathbb{R}^6$ and $\mathbb{R}^8$ are investigated.

Keywords : Hopf Bundles, connection, gauge potential, gauge field, curvature, self dual, anti-self dual.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISLTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar
$\mathbb{C}$	:	Kompleks sayılar
$\mathbb{H}$	:	Kuaterniyonlar
$\mathbb{Z}$	:	Tamsayılar
$\mathbb{RP}^{n-1}$	:	$n-1$ boyutlu reel projektif uzay
$\mathbb{CP}^{n-1}$	:	$n-1$ boyutlu kompleks projektif uzay
$\mathbb{HP}^{n-1}$	:	$n-1$ boyutlu kuaterniyonik projektif uzay
$\mathcal{P}$	:	İzdüşüm (projection) dönüşümü
$\mathcal{Q}$	:	Bölüm dönüşümü
$\mathcal{X}(X)$	:	X üzerindeki diferansiyellenebilir vektör alanları kümesi
$\mathcal{G}$	:	G Lie grubunun Lie cebiri
$\mathbf{v}$	:	Tanjant vektörü
$\mathcal{V}$	:	Vektör uzayı
$\mathbb{F}$	:	$\mathbb{R}, \mathbb{C}$ veya $\mathbb{H}$
S^n	:	n- küre
$[\xi]$	:	ξ nin denklik sınıfı
G	:	Topolojik grup ya da Lie grubu
σ	:	Bir topolojik grubun bir topolojik uzay üzerine etkisi
$\mathcal{SP}(1)$	:	$Sp(1)$ in Lie cebiri
$\boldsymbol{\omega}$	:	Konneksiyon
$\boldsymbol{\eta}$	:	Konneksiyon
$\mathcal{A}$	:	Ayar (Gauge) Potensiyeli
$\mathcal{F}$	:	Field strength

1 GİRİŞ

Hopf demetleri ilk olarak 1931 de Heinz Hopf tarafından keşfedilmiştir. (bkz. [2]). Hopf demetleri reel bölüm cebirleri yardımıyla tanımlanmaktadır. Reel, kompleks, kuaterniyonik ve oktonyonik olmak üzere dört tip Hopf demeti vardır. Bunlar genel olarak aşağıdaki şekilde gösterilirler:

$$\begin{aligned} S^0 &\hookrightarrow S^1 \to S^1 \\ S^1 &\hookrightarrow S^3 \to S^2 \\ S^3 &\hookrightarrow S^7 \to S^4 \\ S^7 &\hookrightarrow S^{15} \to S^8. \end{aligned}$$

Hopf demetlerinin matematikte ve fizikte pek çok uygulaması vardır. (bkz. [3-7]).

Bu çalışmada kompleks ve kuaterniyonik Hopf demetleri ve onların $S^1 \hookrightarrow S^{2n-1} \to \mathbb{CP}^{n-1}$, $S^1 \hookrightarrow S^{4n-1} \to \mathbb{HP}^{n-1}$ ile gösterilen yüksek boyutlara genelleştirilmeleri gözönüne alınmıştır. Asli lif demetleri aşikar durumlar dışında matematikteki oldukça karmaşık yapılardan biridir. Mesela bir diferensiyellenebilir manifoldun çatı demedi bir asli lif demedidir. Benzer şekilde bir Riemann manifoldunun ortonormal çatı demedi bir asli lif demedidir. Her iki durumda ilgili yapının inşası oldukça zordur. Hopf demetleri en estetik asli lif demeti örnekleridir. Bir asli lif demeti üzerindeki konneksiyon 1-formu da oldukça sofistike bir kavramdır. Ancak Hopf demetleri üzerinde konneksiyon 1-formlarının doğal örneklerini vermek mümkündür.

2 BÖLÜM TOPOLOJİLERİ ve PROJEKTİF UZAYLAR

Bir X topolojik uzayı, bir Y kümesi ve X i Y nin tamamına resmeden bir $\mathcal{Q} : X \longrightarrow Y$ dönüşümü verilsin. $\mathcal{Q}^{-1}(U)$ nun X'de açık olduğu Y nin tüm U altkümelerinden oluşan aile Y üzerinde bir topolojidir. Açıkça, $\mathcal{Q}^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ ve $\mathcal{Q}$ örten olduğundan $\mathcal{Q}^{-1}(Y) = X$, öyleyse $\emptyset$ ve Y bu kümeler ailesindedir. Ayrıca, $\mathcal{Q}^{-1}(\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathcal{Q}^{-1}(U_\alpha)$ ve $\mathcal{Q}^{-1}(U_1 \cap \cdots \cap U_k) = \mathcal{Q}^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap \mathcal{Q}^{-1}(U_k)$, bu ailenin keyfi birleşim ve sonlu kesişim altında kapalı olduğu anlamına gelir. Diğer bir deyişle,

$$\mathcal{T}_{\mathcal{Q}} = \left\{ U \subseteq Y \ : \ \mathcal{Q}^{-1}(U) \ X \text{ de açık} \right\}$$

Y üzerinde bir topolojidir ve $\mathcal{Q} : X \longrightarrow Y$ **(örten) dönüşümü tarafından belirlenen Y üzerindeki bölüm topolojisi** olarak adlandırılır. Dikkat edilirse, $\mathcal{Q}^{-1}(Y - U) = X - \mathcal{Q}^{-1}(U)$ olduğundan Y nin bir altkümesinin bu topolojide kapalı olması için gerekli ve yeterli koşul o altkümenin $\mathcal{Q}$ altındaki ters resminin X'de kapalı olmasıdır. Ayrıca, $\mathcal{Q} : X \longrightarrow Y$ dönüşümüne **bölüm dönüşümü** denir ve eğer Y, $\mathcal{T}_{\mathcal{Q}}$ topolojisine sahip ise açıkça süreklidir. Hatta daha fazlası da söylenebilir.

Lemma 2.1 *X bir topolojik uzay, $\mathcal{Q} : X \longrightarrow Y$ örten dönüşüm ve Y, $\mathcal{Q}$ dönüşümünün belirlediği bölüm topolojisine sahip olsun. Bu durumda, herhangi bir Z topolojik uzayı için, bir $g : Y \longrightarrow Z$ dönüşümünün sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul $g \circ \mathcal{Q} : X \longrightarrow Z$ dönüşümünün sürekli olmasıdır.*

İspat. Eğer g sürekli ise açıkça $g \circ \mathcal{Q}$ da süreklidir. Tersine, $g \circ \mathcal{Q}$ sürekli olsun ve V, Z'de herhangi bir açık küme olsun. Bu durumda $(g \circ \mathcal{Q})^{-1}(V) = \mathcal{Q}^{-1}(g^{-1}(V))$, X'de açıktır. $\mathcal{T}_{\mathcal{Q}}$ nun tanımından $g^{-1}(V)$, Y'de açıktır öyleyse g süreklidir. ■

Eğer Y, bir $\mathcal{Q} : X \longrightarrow Y$ örten dönüşümü tarafından belirlenen bölüm topolojisine sahip ise Y'ye ($\mathcal{Q}$ **tarafından**) X**'in bir bölüm uzayı** denir. O halde, bir bölüm uzayı üzerinde tanımlı bir dönüşümün sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul onun bölüm dönüşümü ile bileşkesinin sürekli olmasıdır.

$\mathcal{Q} : X \longrightarrow Y$ bir bölüm dönüşümü ise, herhangi bir $y \in Y$ için $\mathcal{Q}^{-1}(y) = \{x \in X \ : \ \mathcal{Q}(x) = y\}$ altkümesine $\mathcal{Q}$**'nun** y **üzerindeki lifi** denir. $\mathcal{Q}$'nun her bir lifi üzerinde sabit olan X üzerinde tanımlı herhangi bir sürekli dönüşüm Y üzerinde sürekli bir dönüşüm " indirger ".

Lemma 2.2 *$\mathcal{Q} : X \longrightarrow Y$ bir bölüm dönüşümü, Z bir topolojik uzay ve $f : X \longrightarrow Z$, her bir $y \in Y$ için $f|\mathcal{Q}^{-1}(y)$ nin sabit bir dönüşüm olduğu, sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda, $\bar{f} \circ \mathcal{Q} = f$ olacak şekilde tek türlü belirli sürekli bir $\bar{f} : Y \longrightarrow Z$ dönüşümü vardır.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathcal{Q}"'] & Z \\ Y \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

İspat. Her bir $y \in Y$ ve $\mathcal{Q}^{-1}(y)$ deki herhangi bir x noktası için $\bar{f}(y)$, $\bar{f}(y) = f(x)$ şeklinde tanımlansın. f, $\mathcal{Q}$ nun lifleri üzerine sabit olduğundan $\bar{f}$ iyi tanımlıdır. Ayrıca, X deki her x için $(\bar{f} \circ \mathcal{Q})(x) = \bar{f}(\mathcal{Q}(x)) = f(x)$ öyleyse, $\bar{f} \circ \mathcal{Q} = f$. $\bar{f}$ nin sürekliliği için V Z de bir açık küme olmak üzere $\bar{f}^{-1}(V)$ nin Y de açık olduğu gösterilmelidir. Y üzerindeki bölüm topolojisinin tanımından gösterilmesi gereken yalnızca $\mathcal{Q}^{-1}(\bar{f}^{-1}(V))$ nin X de açık olduğudur. Ancak, $\mathcal{Q}^{-1}(\bar{f}^{-1}(V)) = (\bar{f} \circ \mathcal{Q})^{-1}(V) = f^{-1}(V)$ ve bu küme X de açıktır çünkü f süreklidir. Son olarak, tekliği ispatlamak için $\bar{f}' : Y \longrightarrow Z$ dönüşümü de $\bar{f}' \circ \mathcal{Q} = f$ koşulunu sağlasın. Bu durumda, her $x \in X$ için, $\bar{f}'(\mathcal{Q}(x)) = \bar{f}(\mathcal{Q}(x))$. $\mathcal{Q}$ örten oluğundan her $y \in Y$ bir $x \in X$ için $\mathcal{Q}(x)$'e eşittir dolayısıyla her $y \in Y$ için $\bar{f}'(y) = \bar{f}(y)$ $\blacksquare$

Bölüm uzayları en sık şu şekilde ortaya çıkarlar: X, üzerinde bir $\sim$ denklik bağıntısının tanımlı olduğu bir topolojik uzay olsun. Her bir $x \in X$ için x noktasını içeren denklik sınıfı $[x]$ ile gösterilir ve tüm denklik sınıfları kümesi $X/\sim$ şeklinde gösterilir.Doğal izdüşüm dönüşümü

$\mathcal{Q} : X \longrightarrow X/\sim$ her bir $x \in X$ noktasına x'i içeren denklik sınıfını karşılık getirir: $\mathcal{Q}(x) = [x]$. $X/\sim$ yı $\mathcal{Q}$ tarafında belirlenen bölüm topolojisi ile donatmak her bir denklik sınıfının tek bir nokta ile temsil edildiği bir bölüm uzayı verir ($\mathcal{Q}$, $\sim$ nın denklik sınıfları ile noktaları "bir tutar"). O halde, $X/\sim$ deki denklik sınıflarının (X'in altkümeleri olarak düşünüldüğünde) bir ailesindeki tüm denklik sınıflarının birleşimi X'de açık ise bu aile açıktır.

Projektif uzaylar denen yapılarla genel olarak üç türde karşılaşılır; reel, kompleks ve kuaterniyonik projektif uzaylar, fakat tüm yapıların hepsini bir seferde kurmak mümkündür. $\mathbb{F}$; $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ veya $\mathbb{H}$'yi göstersin ve $n \geq 2$ olan bir tamsayı olsun. $\mathbb{F}^n$ deki $(0, \ldots, 0)$ sıfır elemanı 0 ile gösterilsin. $\mathbb{F}^n$ nin $\mathbb{F}^n - \{0\}$ topolojik altuzayı üzerinde bir $\sim$ bağıntısı şu şekilde tanımlansın:

$$\zeta \sim \xi \Longleftrightarrow \text{ sıfırdan farklı en az bir } a \in \mathbb{F} \text{ vardır öyle ki } \zeta = \xi a.$$

$\sim$ bağıntısı açıkça $\mathbb{F}^n - \{0\}$ üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

$\mathbb{F}^n - \{0\}$'da bir ξ elemanının denklik sınıfı

$$\begin{aligned} [\xi] &= [\xi^1, \ldots, \xi^n] = \{\xi a : a \in \mathbb{F} - \{0\}\} \\ &= \left\{(\xi^1 a, \ldots, \xi^n a) : a \in \mathbb{F} - \{0\}\right\}. \end{aligned}$$

şeklindedir. Dikkat edilirse, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ durumunda bunlar aslında $\mathbb{R}^n$'de orjinden geçen ve sonra orjinin çıkarıldığı doğrulardır. Eğer $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ veya $\mathbb{H}$ ise bu denklik sınıfları sırasıyla $\mathbb{C}^n$ veya $\mathbb{H}^n$'**de orjinden geçen kompleks veya kuaterniyonik doğrular** (sonra orjinin çıkarıldığı) olarak adlandırılır. $(\mathbb{F}^n - \{0\})/\sim$ bölüm uzayı $\mathbb{FP}^{n-1}$ ile gösterilir, yani,

$$\mathbb{FP}^{n-1} = \{[\xi] : \xi \in \mathbb{F}^n - \{0\}\}$$

ve bu bölüm uzayı $\mathcal{Q} : \mathbb{F}^n - \{0\} \longrightarrow \mathbb{FP}^{n-1}$, $\mathcal{Q}(\xi) = [\xi]$ izdüşümü tarafından belirlenen bölüm topolojisine sahiptir. $\mathbb{RP}^{n-1}, \mathbb{CP}^{n-1}$ ve $\mathbb{HP}^{n-1}$'e sırasıyla, $n-1$ **boyutlu reel,kompleks ve kuaterniyonik projektif uzay** denir.

$\mathbb{F}^n - \{0\}$ ın $S = \{\xi \in \mathbb{F}^n \ : <\xi, \xi>= 1\}$ altuzayı kullanılarak bu projektif uzaylara oldukça önemli olacak olan bir başka açıdan da bakılabilir, burada $<,>: \mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}$ bilineer formu $<\xi, \zeta>=<(\xi^1, \ldots, \xi^n), (\zeta^1, \ldots, \zeta^n)>= \overline{\xi^1}\zeta^1 + \cdots + \overline{\xi^n}\zeta^n$ şeklinde tanımlıdır. $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ veya $\mathbb{H}$ olmasına bağlı olarak S altuzayı sırasıyla S^{n-1}, S^{2n-1} ve S^{4n-1} küresine homeomorftur. $\mathcal{P} = \mathcal{Q}|S$, $\mathcal{Q}$ nun S ye kısıtlanmışı olsun. Bu durumda, $\mathcal{P} : S \longrightarrow \mathbb{FP}^{n-1}$ süreklidir. İddia: $\mathcal{P}$ ayrıca örtendir. $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n) \in \mathbb{F}^n - \{0\}$ için $<\xi, \xi>= \overline{\xi^1}\xi^1 + \cdots + \overline{\xi^n}\xi^n = |\xi^1|^2 + \cdots + |\xi^n|^2$ pozitif bir reel sayıdır, öyleyse $\zeta = \xi(<\xi, \xi>)^{-1/2}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda, $<\zeta, \zeta>= 1$, yani ζ, S nin bir elemanıdır. Ayrıca, $\zeta \sim \xi$ ve buradan $\mathcal{Q}(\zeta) = \mathcal{Q}(\xi)$ yani $\mathcal{P}(\zeta) = \mathcal{Q}(\xi)$ elde edilir. Aşağıda sürekli dönüşümlerin bir diağramı verilmiştir :

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[dr, "\mathcal{P}"'] & \mathbb{F}^n - \{0\} \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\mathcal{Q}"] & S \arrow[dl, "\mathcal{P}"] \\
& \mathbb{FP}^{n-1} &
\end{tikzcd}$$

Burada $\mathbb{F}^n - \{0\} \xrightarrow{\eta} S$ dönüşümü $\mathbb{F}^n - \{0\}$'ın elemanlarını normalleştirir, yani ξ'yi $\xi(<\xi, \xi>)^{-1/2}$'ye resmeder. η dönüşümünün sürekli olduğu, onu Öklidyen koordinatlarda açıkça yazarak kolayca görülür. Bu diağramın değişmeli olduğu az önce gösterilmişti, yani $\mathcal{Q} \circ \iota = \mathcal{P}$ ve $\mathcal{P} \circ \eta = \mathcal{Q}$. Öyleyse buradan şöyle bir sonuç çıkarılabilir : $\mathbb{FP}^{n-1}$ in bir U altkümesinin açık olması için gerekli ve yeterli koşul $\mathcal{P}^{-1}(U)$ nun S içinde de açık olmasıdır, yani $\mathbb{FP}^{n-1}$ ayrıca $\mathcal{P} : S \longrightarrow \mathbb{FP}^{n-1}$ tarafından belirlenen bölüm topolojisine sahiptir.

$\mathbb{FP}^{n-1}$'in bu ikinci tasviri, yani ayrıca S nin bir bölüm uzayı olması, $\mathbb{FP}^{n-1}$ in bazı özelliklerinin araştırılması açısından daha uygun olacaktır. Bu durumda bir $[\xi] \in \mathbb{FP}^{n-1}$ üzerindeki $\mathcal{P}^{-1}([\xi])$ lifi S ile $\{\xi a \ : \ a \in \mathbb{F} - \{0\}\}$ kümesinin arakesitidir.

Eğer $\xi \in S$ ise $< \xi a, \xi a >= \bar{a} < \xi\xi > a = \bar{a}a = |a|^2$ öyleyse ξa'nın S de olması için gerekli ve yeterli koşul $|a|^2 = 1$ olmasıdır. Böylece her $\xi \in S$ için

$$\mathcal{P}^{-1}([\xi]) = \{\xi a \ : \ a \in \mathbb{F} \quad \text{ve} \quad |a| = 1\}.$$

O halde herhangi bir $\xi \in S$ noktasını içeren lif, ξ yi $\mathbb{F}$ nin tüm birim elemanları ile çarparak elde edilebilir. Örneğin $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ise $S \cong S^{n-1}$ dir ve bir $a \in \mathbb{R}$ için $|a| = 1 \Leftrightarrow a = \pm 1$. O halde herhangi bir $x = (x^1, \ldots, x^n) \in S^{n-1}$ için $\mathcal{P}^{-1}([x]) = \{x, -x\}$, yani S^{n-1} üzerinde bir antipodal nokta çiftidir. Bu sebeple $\mathbb{RP}^{n-1}$, "antipodal noktaların bir tutulduğu" S^{n-1} $(n-1)-$küre olarak düşünülebilir.

Şimdi de $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ olsun. Bir $a \in \mathbb{C}$ elemanı için, $|a| = 1 \iff a, S^1 \subseteq \mathbb{C}$ çemberi üzerindedir. Öyleyse, herhangi bir $\xi_0 = (z_0^1, \ldots, z_0^n) \in S \subseteq \mathbb{C}^n$ için, $\mathcal{P}^{-1}([\xi_0]) = \left\{\xi_0 a \ : \ a \in S^1\right\} = \left\{(z_0^1 a, \ldots, z_0^n a) \ : \ a \in S^1\right\}$. Eğer ξ_0 sabitlenirse S nin bu altuzayı S^1'e homeomoftur. Bu şu şekilde ispatlanabilir: $\xi_0 \in S$ olduğundan en az bir z_0^j sıfırdan farklıdır. Öyleyse $\mathbb{C}^n$ den $\mathbb{C}$ ye $(z^1, \ldots, z^n)$ noktasını $(z_0^j)^{-1} z^j$ ye resmeden dönüşümün, $\mathbb{C}^n$ ile $\mathbb{R}^{2n}$ ve $\mathbb{C}$ ile $\mathbb{R}^2$ bir tutularak sürekli olduğu gösterilebilir. $z^1 = x^1 + y^1\mathrm{i}, \ldots, z^n = x^n + y^n\mathrm{i}$ ve $z_0^j = \alpha + \beta\mathrm{i}$ şeklinde yazılırsa, bu dönüşüm aşağıdaki sürekli dönüşümlerin bileşkesi şeklindedir:

$$(x^1, y^1, x^2, y^2, \ldots, x^n, y^n) \longrightarrow (x^j, y^j) \longrightarrow \left(\frac{\alpha x^j + \beta y^j}{\alpha^2 + \beta^2}, \frac{\alpha y^j - \beta x^j}{\alpha^2 + \beta^2}\right)$$

O halde, bu dönüşümün $\mathcal{P}^{-1}([\xi_0])$'a kısıtlanmışı $(z_0^1 a, \ldots, z_0^n a)$ noktasını a ya resmeder ve süreklidir. Bu kısıtlanmış dönüşüm açıkça bire-birdir ve $\mathcal{P}^{-1}([\xi_0])$ ı S^1 in tamamına resmeder. Tersi, $a \longrightarrow (z_0^1 a, \ldots, z_0^n a)$ dönüşümü de süreklidir, çünkü $a = s + t\mathrm{i}$ şeklinde yazılırsa $\mathcal{P}([\xi_0]) \longrightarrow S^1$ dönüşümünün tersi aslında

$$(s, t) \longrightarrow (x_0^1 s - y_0^1 t, x_0^1 t + y_0^1 s, \ldots, x_0^n s - y_0^n t, x_0^n t + y_0^n s)$$

şeklindedir ve bu dönüşüm $\mathbb{R}^2$ den $\mathbb{R}^{2n}$ ye sürekli bir dönüşümdür. O halde, $(z_0^1 a, \ldots, z_0^n a) \longrightarrow a$ dönüşümü $\mathcal{P}^{-1}([\xi_0])$ ı S^1 in tamamına resmeden bir homeomorfizmdir. $S \cong S^{2n-1}$ olduğundan $\mathbb{CP}^{n-1}$ projektif uzayı S^{2n-1} in S^1 çemberlerinin ayrık bir birleşimi şeklinde ayrıştığı ve her bir S^1 in bir noktaya yığıldığı bir uzay olarak göz önüne alınabilir.

Son olarak $\mathbb{F} = \mathbb{H}$ olsun. $|a| = 1$ olan bir $a \in \mathbb{H}$ bir birim kuaterniyondur ve $\mathbb{H}$ deki birim kuaterniyonların kümesi S^3 e homeomorftur. $\mathbb{CP}^{n-1}$ için yapılanlardaki yol tamamen izlenerek $\mathcal{P} : S^{4n-1} \longrightarrow \mathbb{HP}^{n-1}$ nin her bir lifinin S^3 e homeomorf olduğu elde edilir.

Tüm $\mathbb{FP}^{n-1}$ projektif uzayları Hausdorffdur. Bunun için öncelikle S nin bir ξ_0 elemanı seçilip sabitlensin ve bir $\rho : \mathbb{FP}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü $\rho([\zeta]) = 1 - | < \zeta, \xi_0 > |^2$ şeklinde tanımlansın. Burada $\mathbb{FP}^{n-1}$, S nin bir bölüm uzayı olarak göz önüne alındığından, $\zeta \in S$ dir. ρ dönüşümü iyi tanımlıdır, çünkü $[\zeta'] = [\zeta]$ olması $|a| = 1$ olan bir $a \in \mathbb{F}$ için $\zeta' = \zeta a$ olmasını gerektirir, öyleyse $| < \zeta', \xi_0 > |^2 = | < \zeta a, \xi_0 > |^2 = |\bar{a} < \zeta, \xi_0 > |^2 = |\bar{a}|^2 | < \zeta, \xi_0 > |^2 = | < \zeta, \xi_0 > |^2$. Ayrıca dikkat edilirse $\rho([\xi_0]) = 0$. Bu durumda iddia: eğer $[\zeta] \neq [\xi_0]$ ise $\rho([\zeta]) \neq 0$ dır. Bunu görmek aksine $\rho([\zeta]) = 0$ olsun. Böylece $| < \zeta, \xi_0 > |^2 = 1$, yani $| < \zeta, \xi_0 > | = 1$. $< \xi_0 - \zeta < \zeta, \xi_0 >, \xi_0 - \zeta < \zeta, \xi_0 >> = 0$ olduğu göz önüne alınırsa, $|\xi_0 - \zeta < \zeta, \xi_0 > |^2 = 0$, öyleyse $\xi_0 = \zeta < \zeta, \xi_0 >$ ve bu sebeple $\xi_0 \sim \zeta$, yani $[\xi_0] = [\zeta]$. Sonuç olarak $[\xi_0] \neq [\zeta]$ olması $\rho([\xi_0]) \neq \rho([\zeta])$ olmasını gerektirir. Son olarak, ρ dönüşümü süreklidir. Gerçekten, S'den (yani bir küreden) $\mathbb{R}$'ye $\zeta = (\zeta^1, \ldots, \zeta^n)$ yı $1 - | < \zeta, \xi_0 > |^2$ ye resmeden dönüşümün sürekli olduğu onu Öklidyen koordinatlarda açıkça yazarak görülebilir ve bu dönüşüm aslında $\rho \circ \mathcal{P}$ bileşkesidir, öyleyse ρ nun sürekliliği Lemma 1.1 den elde edilir. Artık $\mathbb{FP}^{n-1}$ in Hausdorff oluğunu göstermek oldukça kolaydır. $[\xi_0]$ ve $[\zeta]$, $\mathbb{FP}^{n-1}$ de herhangi iki farklı nokta olsunlar. ξ_0 kullanılarak yukarıdaki gibi ρ dönüşümü tanımlansın. Bu durumda $\rho([\xi_0])$ ve $\rho([\zeta])$ farklı reel sayılardır ve böylece $\mathbb{R}$'de sırasıyla $\rho([\xi_0])$'ı ve $\rho([\zeta])$ 'yı içeren ayrık açık I_{ξ_0} ve I_ζ aralıkları bulunabilir. ρ sürekli olduğundan, $U_{\xi_0} = \rho^{-1}(I_{\xi_0})$ ve $U_\zeta = \rho^{-1}(I_\zeta)$, $\mathbb{FP}^{n-1}$'de açık kümelerdir, açıkça ayrıktır ve sırasıyla $[\xi_0]$ ve $[\zeta]$'yı içerirler.

Her bir $\mathbb{FP}^{n-1}$ yerel Öklidyendir. Bunun ispatı için şöyle bir yol izlenebilir: eğer $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n) \in S$ ise $\xi^k \neq 0 \Leftrightarrow |a| = 1$ olan her $a \in \mathbb{F}$ için $\xi^k a \neq 0$. O halde bir $[\xi] \in \mathbb{FP}^{n-1}$ elemanının $\xi^k \neq 0$ a sahip olduğu söylenebilir. Her bir $k = 1, \ldots, n$ için

$$V_k = \Big\{[\xi] \in \mathbb{FP}^{n-1} \ : \ \xi^k \neq 0\Big\} \tag{2.1}$$

olsun. Bu durumda $\mathcal{P}^{-1}(V_k) = \big\{\xi \in S \ : \ \xi^k \neq 0\big\}$ ve bu küme S'de açıktır. Bölüm topolojisinin tanımından V_k, $\mathbb{FP}^{n-1}$'de açıktır. $k = 1, \ldots, n$ için
$\varphi_k : V_k \longrightarrow \mathbb{F}^{n-1}$ dönüşümü

$$\begin{aligned} \varphi_k([\xi]) &= \varphi_k([\xi^1, \ldots, \xi^n]) \\ &= ((\xi^1(\xi^k)^{-1}), \ldots, \hat{1}, \ldots, \xi^n(\xi^k)^{-1}) \end{aligned} \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlansın, burada $\hat{}$ işareti k. girdideki 1 in silindiğini göstermektedir. φ_k iyi tanımlıdır çünkü, $\xi^k \neq 0$ olmak üzere $[\zeta] = [\xi]$ olması $\zeta^k \neq 0$ olmasını gerektirir ve $\zeta = \xi a$ olması $\zeta^k = \xi^k a$ olmasını gerektirir, öyleyse $(\zeta^k)^{-1} = a^{-1}(\xi^k)^{-1}$ ve bu sebeple her bir $k = 1, \ldots, n$ için $\zeta^i(\zeta^k)^{-1} = (\xi^i a)(a^{-1}(\xi^k)^{-1}) = \xi^i(\xi^k)^{-1}$.
$\varphi_k : V_k \longrightarrow \mathbb{F}^{n-1}$ bir homeomorfizmdir, yani bire-bir, örten, sürekli ve tersi sürekli olan bir dönüşümdür.
φ_k nın bire-bir olduğunu göstermek için $[\xi], [\zeta] \in V_k$ ve $\varphi_k([\xi]) = \varphi_k([\zeta])$ olsun. Bu durumda
$(\xi^1(\xi^k)^{-1}, \ldots, \hat{1}, \ldots, \xi^n(\xi^k)^{-1}) = (\zeta^1(\zeta^k)^{-1}, \ldots, \hat{1}, \ldots, \zeta^n(\zeta^k)^{-1})$, böylece $i \neq k$ için $\xi^i(\xi^k)^{-1} = \zeta^i(\zeta^k)^{-1}$,yani $\zeta^i = \xi^i((\xi^k)^{-1}\zeta^k)$. Ancak $\zeta^k = \xi^k((\xi^k)^{-1}\zeta^k)$ olduğu aşikardır, öyleyse $\zeta = \xi((\xi^k)^{-1}\zeta^k)$. Buradan $\zeta \sim \xi$ sonucu çıkar, yani $[\zeta] = [\xi]$.
φ_k nın örten olduğunu göstermek için $1, \ldots, n$ arasından bir k seçip sabitlensin ve herhangi bir $y = (y^1, \ldots, y^{k-1}, y^{k+1}, \ldots, y^n) \in \mathbb{F}^{n-1}$ elemanı için $i \neq k$ iken
$\xi^i = y^i(1+ < (y^1, \ldots, y^{k-1}, y^{k+1}, \ldots, y^n), (y^1, \ldots, y^{k-1}, y^{k+1}, \ldots, y^n) >)^{-1/2}$ ve $\xi^k = (1+ < (y^1, \ldots, y^{k-1}, y^{k+1}, \ldots, y^n), (y^1, \ldots, y^{k-1}, y^{k+1}, \ldots, y^n) >)^{-1/2}$ şeklinde tanımlansın.

Bu durumda

$$\begin{aligned}
<\xi,\xi> &= <(\xi^1,\ldots,\xi^k,\ldots,\xi^n),(\xi^1,\ldots,\xi^k,\ldots,\xi^n)> \\
&= |\xi^1|^2+\cdots+|\xi^k|^2+\cdots+|\xi^n|^2 \\
&= |y^1(1+<y,y>)^{-1/2}|^2+\cdots+|(1+<y,y>)^{-1/2}|^2+\cdots+|y^n(1+<y,y>)^{-1/2})|^2 \\
&= (1+<y,y>)^{-1}(1+|y^1|^2+\cdots+|y^n|^2) \\
&= (1+<y,y>)^{-1}(1+<y,y>)=1
\end{aligned}$$

yani ξ, S nin elemanıdır. $\mathcal{P}(\xi)=[\xi]=[\xi^1,\ldots,\xi^{k-1},\xi^k,\xi^{k+1},\ldots,\xi^n]$ ve $\xi^k \neq 0$ olduğundan $[\xi]\in V_k$ ve $\varphi_k([\xi])=(y^1,\ldots,y^{k-1},\hat{1},y^{k+1},\ldots,y^n)=y$, sonuç olarak φ_k örtendir.

φ_k nın sürekliliği, Lemma 1.1 ve $\varphi_k\circ\mathcal{P}:\mathcal{P}^{-1}(V_k)\longrightarrow \mathbb{FP}^{n-1}$ dönüşümünün sürekliliğinden elde edilir (V_k üzerindeki altuzay topolojisi, $\mathcal{P}:\mathcal{P}^{-1}(V_k)\longrightarrow V_k$ tarafından belirlenen bölüm topolojisi ile çakışır). $(\varphi_k\circ\mathcal{P})(\xi^1,\ldots,\xi^k,\ldots,\xi^n)=(\xi^1(\xi^k)^{-1},\ldots,\hat{1},\ldots,\xi^n(\xi^k)^{-1})$ ve bu dönüşüm bir Öklidyen uzaydan diğerine şeklinde yazıldığında $\varphi_k\circ\mathcal{P}$ nin açıkça sürekli olduğu görülür.

φ_k nın tersi $\varphi_k^{-1}:\mathbb{F}^{n-1}\longrightarrow V_k$

$$\varphi_k^{-1}(y^1,\ldots,y^{k-1},y^{k+1},\ldots,y^n)=[y^1,\ldots,y^{k-1},1,y^{k+1},\ldots,y^n] \tag{2.3}$$

şeklindedir, burada 1, k. yerdedir. Dikkat edilirse bu dönüşüm aşağıdaki dönüşümlerin bileşkesi şeklindedir:

$(y^1,\ldots,y^n)\longrightarrow(y^1,\ldots,1,\ldots,y^n)\longrightarrow[y^1,\ldots,1,\ldots,y^n]$.

Birinci dönüşüm $\mathbb{F}^{n-1}$ den $\mathbb{F}^n-\{0\}$'a açıkça süreklidir ve ikincisi sürekli olan $\mathcal{Q}$ dönüşümüdür. O halde φ_k^{-1} süreklidir. Sonuç olarak $\varphi_k:V_k\longrightarrow\mathbb{F}^{n-1}$ bir homeomorfizmdir ve böylece, $\mathbb{F}^{n-1}$ bir Öklidyen uzaya homeomorf olduğundan ve $\mathbb{FP}^{n-1}$ in her bir noktası bir V_k tarafından içerildiğinden $\mathbb{FP}^{n-1}$ yerel Öklidyendir.

(V_k, φ_k), $k = 1, \ldots, n$ kartları için örtüşme fonksiyonları şu şekilde elde edilir: $1, \ldots, n$ arasından bir k ve j seçilip sabitlensin. Bu durumda

$$\varphi_k \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(V_k \cap V_j) \longrightarrow \varphi_k(V_k \cap V_j).$$

Genel durumu tamamen yazmak biraz zahmetlidir, ancak aşağıdaki örnekten genel durum kolayca anlaşılabilir:

$$\begin{aligned} \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(y^2, y^3, \ldots, y^n) &= \varphi_2([1, y^2, y^3, \ldots, y^n]) \\ &= ((y^2)^{-1}, y^3(y^2)^{-1}, \ldots, y^n(y^2)^{-1}) \end{aligned} \tag{2.4}$$

$n = 2$ için bu örtüşme fonksiyonları özel bir öneme sahiptir. $n = 2$ durumunda $\mathbb{FP}^1$ üzerinde yalnızca (V_1, φ_1) ve (V_2, φ_2) kartı mevcuttur.
$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(V_2 \cap V_1) \longrightarrow \varphi_2(V_2 \cap V_1)$, $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(y) = \varphi_2([1, y]) = y^{-1}$ şeklindedir ve benzer şekilde $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(y) = y^{-1}$. O halde, $\varphi_1(V_2 \cap V_1) = \varphi_2(V_2 \cap V_1) = \mathbb{F} - \{0\}$ ve

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(y) = y^{-1} = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(y), \quad y \in \mathbb{F} - \{0\} \tag{2.5}$$

S^n n-küreyi yerel olarak bir Öklidyen uzaya homeomorf yapan ve ileride oldukça işe yarayacak olan iki dönüşüm şu şekildedir:

$$S^n = \left\{(x^1, \ldots, x^n, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ (x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2 + (x^{n+1})^2 = 1\right\}$$

$N = (0, \ldots, 0, 1)$, $S = (0, \ldots, 0, -1)$, $U_S = S^n - \{N\}$, $U_N = S^n - \{S\}$ olmak üzere

$$\varphi_S : U_S \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{ve} \quad \varphi_N : U_N \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

dönüşümleri

$$\begin{aligned} \varphi_S(x^1, \ldots, x^n, x^{n+1}) &= \left(\frac{x^1}{1 - x^{n+1}}, \ldots, \frac{x^n}{1 - x^{n+1}}\right) \\ \varphi_N(x^1, \ldots, x^n, x^{n+1}) &= \left(\frac{x^1}{1 + x^{n+1}}, \ldots, \frac{x^n}{1 + x^{n+1}}\right) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. φ_S ve φ_N dönüşümlerinin sürekli olduğu açıktır. Bu dönüşümlerin tersleri $\varphi_S^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow U_S$ ve $\varphi_N^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow U_N$,

$y = (y^1, \ldots, y^n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$\begin{aligned} \varphi_S^{-1}(y) &= (1 + |y|^2)^{-1}(2y^1, \ldots, 2y^n, |y|^2 - 1) \\ \varphi_N^{-1}(y) &= (1 + |y|^2)^{-1}(2y^1, \ldots, 2y^n, 1 - |y|^2) \end{aligned}$$

şeklindedir ve açıkça ters dönüşümler de süreklidir. Yani φ_S ve φ_N birer homeomorfizmdir. Bu homeomorfizmlere sırasıyla N ve S den **stereografik izdüşüm** denir. (U_S, φ_S) ve (U_N, φ_N), S^n üzerinde birer n-boyutlu kartdır. Bu kartların örtüşme fonksiyonları her bir $y \in \mathbb{R}^n - \{(0, \ldots, 0)\}$ için

$$\varphi_S \circ \varphi_N^{-1}(y) = \frac{1}{|y|^2} y = \varphi_N \circ \varphi_S^{-1}(y)$$

şeklindedir. $n = 2$ durumunda projektif uzayın, yani $\mathbb{FP}^1$ in örtüşme fonksiyonunun neden özel bir öneme sahip olduğuna cevap olarak sırasıyla S^1, S^2 ve S^4 küreleri için örtüşme fonksiyonları verilebilir.

S^1 in stereografik izdüşüm dönüşümleri ve onların tersleri şu şekildedir:

$\varphi_S : U_S \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi_S(x^1, x^2) = \frac{x^1}{1-x^2}, \quad \varphi_S^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow U_S, \quad \varphi_S^{-1}(y) = \left(\frac{2y}{y^2+1}, \frac{y^2-1}{y^2+1}\right)$

$\varphi_N : U_N \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi_N(x^1, x^2) = \frac{x^1}{1+x^2}, \quad \varphi_N^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow U_N, \quad \varphi_N^{-1}(y) = \left(\frac{2y}{y^2+1}, \frac{1-y^2}{y^2+1}\right)$

Bu durumda $\varphi_S \circ \varphi_N^{-1}, \varphi_N \circ \varphi_S^{-1} : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\}$

$$\varphi_S \circ \varphi_N^{-1}(y) = y^{-1} = \varphi_N \circ \varphi_S^{-1} \tag{2.6}$$

Benzer şekilde S^2 nin stereografik izdüşüm dönşümleri ve onların tersleri ise şu şekildedir:

$\varphi_S : U_S \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi_S(x^1, x^2, x^3) = (\frac{x^1}{1-x^3}, \frac{x^2}{1-x^3}), \quad \varphi_S^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow U_S,$

$\varphi_S^{-1}(y) = \varphi_S^{-1}(y^1, y^2) = (1 + |y|^2)^{-1}\big(2y^1, 2y^2, |y|^2 - 1\big)$

$\varphi_N : U_N \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi_N(x^1, x^2, x^3) = (\frac{x^1}{1+x^3}, \frac{x^2}{1+x^3}), \quad \varphi_N^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow U_N,$

$\varphi_N^{-1}(y) = \varphi_N^{-1}(y^1, y^2) = (1 + |y|^2)^{-1}\big(2y^1, 2y^2, 1 - |y|^2\big)$

$\mathbb{R}^2$ ile $\mathbb{C}$ ve y ile de $y^1 + y^2$i kompleks sayısı bir tutularak

$\varphi_S \circ \varphi_N^{-1}, \varphi_N \circ \varphi_S^{-1} : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ örtüşme fonksiyonları

$$\varphi_S \circ \varphi_N^{-1}(y) = \bar{y}^{-1} = \varphi_N \circ \varphi_S^{-1}(y) \tag{2.7}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Son olarak S^4 ün örtüşme fonksiyonları için yukarıdaki gibi $\mathbb{R}^4$ ile $\mathbb{H}$ ve $y \in \mathbb{R}^4 - \{(0,0,0,0)\}$ ile sıfırdan faklı bir kuaterniyon bir tutularak

$$\varphi_S \circ \varphi_N^{-1}(y) = \bar{y}^{-1} = \varphi_N \circ \varphi_S^{-1}(y) \tag{2.8}$$

elde edilir.

Dikkat edilirse $\mathbb{FP}^1$ in örtüşme fonksiyonları yani (2.5), S^1, S^2 ve S^4 ün örtüşme fonksiyonları olan $(2.6), (2.7)$ ve (2.8) e benzemektedir, tek farkları (2.7) ve (2.8) de eşlenik bulunmaktadır. $\mathbb{FP}^1$ üzerindeki bir kartda küçük bir düzenleme yaparak bu uyuşmazlığı ortadan kaldırmak mümkündür. $\bar{\varphi}_1 : V_1 \longrightarrow \mathbb{F}$ dönüşümü $\bar{\varphi}_1([\xi]) = \overline{\varphi_1([\xi])}$ şeklinde tanımlansın ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ise $\bar{y} = y$). Bu durumda $(V_1, \bar{\varphi}_1)$ ikilisi de $\mathbb{FP}^1$ üzerinde açıkça bir kartdır ve böylece

$$\varphi_2 \circ \bar{\varphi}_1(y) = \bar{y}^{-1} = \bar{\varphi}_1 \circ \varphi_2^{-1}(y), \quad y \in \mathbb{F} - \{0\} \tag{2.9}$$

Bu ve çok önemli bir araç (Yapıştırma Lemma) birlikte kullanılarak S^1, S^2 ve S^4'ün örtüşme fonksiyonları ile $\mathbb{RP}^1, \mathbb{CP}^1$ ve $\mathbb{HP}^1$ in örtüşme fonksiyonları arasındaki benzerliğin tesadüf olmadığı gösterilecektir. Ama öncelikle kullanılacak bazı kavramların ne anlama geldiğinden kısaca söz etmek yerinde olacaktır.

Hausdorff, yerel Öklidyen ve ikinci sayılabilir olan bir X uzayına **topolojik manifold** denir. Projektif uzayların Hausdorff ve yerel Öklidyen olduğu gösterilmişti, ikinci sayılabilir oldukları da şöyle söylenebilir: $\mathbb{FP}^{n-1}$ üzerinde n tane (V_1, φ_1) $, \ldots, (V_n, \varphi_n)$ kartı vardır ve $\mathbb{FP}^{n-1}$ in her bir noktası $V_i, i = 1, \ldots, n$ açık kümelerinin birisi tarafından içerilir ve her bir V_i bir Öklidyen uzaydaki bir açık kümeye homeomorftur. Öklidyen uzaylar ikinci sayılabilir olduğundan ve ikinci sayılabilirlik bir topolojik özellik olduğundan projektif uzayların da ikinci sayılabilir olduğu sonucu elde edilir. O halde tüm $\mathbb{FP}^{n-1}$ -ler birer topolojik manifolddur. Aynı sonucun S^n n-küreler için de doğru olduğu S^n üzerindeki $(U_S, \varphi_S), (U_N, \varphi_N)$ kartları ve projektif uzaylar için yapılan yorumdan söylenebilir.

X bir topolojik manifold, (V_1, φ_1) ve (V_2, φ_2), X üzerinde iki kart olsun. $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ya da $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ iken her iki örtüşme fonksiyonu $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : \varphi_2(V_2 \cap V_1) \longrightarrow \varphi_1(V_2 \cap V_1)$ ve $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(V_1 \cap V_2) \longrightarrow \varphi_1(V_2 \cap V_2)$, C^∞ ise bu kartlara **$\mathbf{C^\infty}$-ilgili** (C^∞-related) denir. Bu durum, S^n üzerindeki (U_S, φ_S) ve (U_N, φ_N) stereografik izdşüm kartları ve ayrıca $\mathbb{RP}^{n-1}, \mathbb{CP}^{n-1}$ ve $\mathbb{HP}^{n-1}$ projektif uzayları üzerindeki (V_k, φ_k), $k = 1, \ldots, n$ standart kartların herhangi ikisi için geçerlidir. X üzerinde **n-boyutlu bir atlas**, herhangi ikisinin C^∞-ilgili olduğu ve $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha = X$ olacak şekilde X üzerindeki n-boyutlu kartların bir $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ ailesidir. O halde $\{(U_S, \varphi_S), (U_N, \varphi_N)\}$, S^n üzerinde n-boyutlu bir atlasdır ve (V_k, φ_k), $k = 1, \ldots, n$ standart kartları ile $\{(V_1, \varphi_1), \ldots, (V_n, \varphi_n)\}$, $\mathbb{FP}^{n-1}$ için bir atlasdır. Bu atlas $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ise $n-1$ boyutludur, $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ise $2n-2$ boyutludur ve $\mathbb{F} = \mathbb{H}$ ise $4n-4$ boyutludur. Tek kartdan oluşan $\{(\mathbb{R}^n, id)\}$, $\mathbb{R}^n$ için bir atlasdır ve bu atlasa **$\mathbb{R}^n$'nin standart atlası** denir. Bir X topolojik manifoldu üzerindeki bir (U, φ) kartı $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ atlasındaki her bir $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ile C^∞-ilgili ise (U, φ) ikilisine bu atlas ile **uyumlu** (admissible) denir. X in bir $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ atlası kendisiyle uyumlu olan X üzerindeki her kartı içeriyorsa $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ atlasına **maksimal** denir.

Teorem 2.3 *X bir topolojik manifold olsun. Bu durumda X in her atlası X in bir tek maksimal atlası tarafından içerilir.*

Bir X topolojik manifoldunun n-boyutlu bir maksimal atlasına X üzerinde bir **diferansiyellenebilir yapı** denir ve bir diferansiyellenebilir yapı ile birlikte bir topolojik manifolda **diferansiyellenebilir** (veya $\mathbf{C^\infty}$) **manifold** denir. Diferansiyellenebilir yapı anlaşıldığında kısaca X in kendisine diferansiyellenebilir manifold denecektir. X in diferansiyellenebilir yapısındaki her bir kartın boyutu olan n, manifoldun **boyutu** olarak adlandırılır ve $\dim X$ şeklinde yazılır. Teorem 1.3 den her atlas bir tek diferansiyellenebilir yapı (**üretir**) belirler. Öyleyse, Öklidyen uzaylar, küreler ve projektif uzaylar diferansiyellenebilir manifoldlardır.

Sırası gelmişken, ileride kullanılacak olması açısından çarpım manifoldlarından da söz etmek yerinde olacaktır. X ve Y sırasıyla n ve m boyutlu diferansiyellenebilir manifold olsun. $X \times Y$ çarpım topolojisi ile donatılsın. (U, φ) ve (V, ψ) sırasıyla X ve Y üzerinde $\mathcal{P}^i \circ \varphi = x^i,\ i = 1, \ldots, n$ ve $\mathcal{P}^j \circ \psi = y^j, j = 1, \ldots, m$ olan kartlar olsun. Bu durumda $\varphi(U) \times \psi(V),\ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^{n+m}$ de açıktır. $\varphi \times \psi : U \times V \longrightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ dönüşümü $(\varphi \times \psi)(p, q) = (x^1(p), \ldots, x^n(p), y^1(q), \ldots, y^m(q))$ şeklinde tanımlanarak $U \times V$ yi $\varphi(U) \times \psi(V)$ nin tamamına resmeden bir $\varphi \times \psi$ homeomorfizmi elde edilir. Bu sebeple $(U \times V, \varphi \times \psi)$ ikilisi $X \times Y$ üzerinde bir kartdır. Böyle herhangi iki kart C^∞-ilgilidir, böylece bu kartların ailesi $X \times Y$ için bir atlas teşkil eder. Bu atlas $X \times Y$ üzerinde bir diferansiyellenebilir yapı üretir ve bu yapıyla $X \times Y$ ye X ve Y nin **çarpım manifoldu** denir. Bu çarpım manifoldu $n + m$ boyutludur. Yöntem açıkça tümevarım ile daha fazla sayıda (sonlu) çarpıma genişletilebilir.

X ve Y sırasıyla n ve m boyutlu iki diferansiyellenebilir manifold ve $F : X \longrightarrow Y$ sürekli bir dönüşüm olsun. $(U, \varphi),\ X$ üzerinde ve $(V, \psi),\ Y$ üzerinde $U \cap F^{-1}(V) \neq \emptyset$ olan birer kart olsun. F nin (U, φ) ve (V, ψ) kartlarına göre **koordinat ifadesi** her $p \in \varphi(U \cap F^{-1}(V))$ için $\tilde{F}(p) = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}(p)$ şeklinde tanımlı $\tilde{F} : \varphi(U \cap F^{-1}(V)) \longrightarrow \mathbb{R}^m$ dönüşümüdür. Eğer $x^i = \mathcal{P}^i \circ \varphi,\ i = 1, \ldots, n$ ve $y^j = \mathcal{P}^j \circ \psi,\ j = 1, \ldots, m$ ise ve ayrıca x^i ve y^j-ler sırasıyla $\mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{R}^m$ deki standart koordinatlar olarak göz önüne alınırsa $\tilde{F}$ aslında $\mathbb{R}^n$ deki bir açık kümeden $\mathbb{R}^m$ ye bir dönüşümdür:
$(y^1, \ldots, y^m) = \tilde{F}(x^1, \ldots, x^n) = (\tilde{F}^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, \tilde{F}^m(x^1, \ldots, x^n)).$
Eğer bu koordinat ifadeleri X ve Y nin diferansiyellenebilir yapılarındaki $U \cap F^{-1}(V) \neq \emptyset$ olan her (U, φ) ve (V, ψ) kartı için C^∞ ise F ye $\mathbf{C}^\infty$ (veya **diferansiyellenebilir**) denir. Bir manifoldun diferansiyellenebilir yapısı yani maksimal atlası genel olarak çok geniştir. Bu sebeple yukarıdaki gibi bir F dönüşümünün C^∞ olup olmadığının

araştırılmasında büyük kolaylık sağlayan yukarıdaki tanıma denk bir ifade şu şekilde verilir: $F : X \longrightarrow Y$ dönüşümünün C^∞ olması için gerekli ve yeterli koşul X ve Y nin diferansiyellenebilir yapılarını üreten bazı atlaslarındaki her kart için F nin koordinat ifadelerinin C^∞ olmasıdır.

Bire-bir örten bir $F : X \longrightarrow Y$ dönüşümü için hem F hem de $F^{-1} : Y \longrightarrow X$, C^∞ dönüşümler ise F ye bir **difeomorfizm** denir ve böyle bir F var ise X ve Y ye **difeomorf** denir.

$\mathbb{RP}^1, \mathbb{CP}^1$ ve $\mathbb{HP}^1$ sırasıyla S^1, S^2 ve S^4 e difeomorftur ve buradan itibaren bunun ispatı anlatılmıştır.

Lemma 2.4 ***(Yapıştırma Lemma)***

X ve Y topolojik uzaylar olsun ve A_1 ve A_2, $X = A_1 \cup A_2$ olacak şekilde X de açık (veya kapalı) kümeler olsun. $f_1 : A_1 \longrightarrow Y$ ve $f_2 : A_2 \longrightarrow Y$ sürekli dönüşümler ve $f_1|A_1 \cap A_2 = f_2|A_1 \cap A_2$ olsun. Bu durumda $f : X \longrightarrow Y$

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in A_1 \\ f_2(x), & x \in A_2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlı dönüşüm süreklidir.

İspat. Eğer $A_1 \cap A_2$ boş küme ise sonuç aşikar olduğundan $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ olsun. $x \in A_1 \cap A_2$ olması $f_1(x) = f_2(x)$ olmasını gerektirdiğinden f iyi tanımlıdır. A_1 ve A_2 birer açık küme ve V, Y içinde herhangi bir açık küme olsun. Bu durumda $f^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap X = f^{-1}(V) \cap (A_1 \cup A_2) = [f^{-1}(V) \cap A_1] \cup [f^{-1}(V) \cap A_2] = f_1^{-1}(V) \cup f_2^{-1}(V)$. f_1 sürekli olduğundan $f_1^{-1}(V), A_1$ içinde açık ve A_1, X içinde açık olduğundan $f_1^{-1}(V)$, X içinde açıktır. Benzer şekilde, $f_2^{-1}(V)$, X içinde açıktır, öyleyse $f^{-1}(V) = f_1^{-1}(V) \cup f_2^{-1}(V)$, X içinde açıktır, istenilen elde edilir. Eğer A_1 ve A_2 kapalı ise istenilen sonuç sürekliliğin kapalı kümelerle karakterizasyonundan elde edilir. $\blacksquare$

Artık, $\mathbb{F}$ nin sırasıyla $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ veya $\mathbb{H}$ ye eşit olmasına bağlı olarak $\mathbb{FP}^1$ in sırasıyla S^1, S^2 veya S^4 e difeomorf olduğu ispatlanabilir, yani

$$\mathbb{RP}^1 \cong S^1 \tag{2.10}$$

$$\mathbb{CP}^1 \cong S^2 \tag{2.11}$$

$$\mathbb{HP}^1 \cong S^4 \tag{2.12}$$

Üçü bir seferde şu şekilde ispatlanabilir: (U_S, φ_S) ve (U_N, φ_N); S^1, S^2 veya S^4 üzerindeki sterografik izdüşüm kartları olsunlar, burada φ_S ve φ_N sırasıyla $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ veya $\mathbb{H}$'de değer alan dönüşümler olarak göz önüne alınmaktadır. Bu durumda onların örtüşme fonksiyonları $y \in \mathbb{F} - \{0\}$ için $\varphi_S \circ \varphi_N^{-1}(y) = \bar{y}^{-1} = \varphi_N \circ \varphi_S^{-1}(y)$ şeklinde yazılabilir ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ise $\bar{y} = y$ dir). $(V_1, \bar{\varphi}_1)$ ve (V_2, φ_2), $\mathbb{FP}^1$ üzerinde yukarıda anlatılan kartlar olsunlar. Bu kartların örtüşme fonksiyonları (1.6) ile verilmişti. $\varphi_S^{-1} \circ \varphi_2 : V_2 \longrightarrow U_S$ ve $\varphi_N^{-1} \circ \bar{\varphi}_1 : V_1 \longrightarrow U_N$ homeomorfizmleri $V_1 \cap V_2$ üzerinde aynı değeri alırlar. Gerçekten, $[\xi] \in V_1 \cap V_2$ olması $\varphi_2([\xi]) \in \varphi_2(V_1 \cap V_2) = \mathbb{F} - \{0\}$ olmasını gerektirir. Ancak, $\mathbb{F} - \{0\}$ üzerinde $\bar{\varphi}_1 \circ \varphi_2^{-1} = \varphi_N \circ \varphi_S^{-1}$ öyleyse

$$\begin{aligned}
(\bar{\varphi}_1 \circ \varphi_2^{-1})(\varphi_2([\xi])) &= (\varphi_N \circ \varphi_S^{-1})(\varphi_2([\xi])) \\
\bar{\varphi}_1([\xi]) &= \varphi_N \circ (\varphi_S^{-1} \circ \varphi_2)([\xi]) \\
\varphi_N^{-1} \circ \bar{\varphi}_1([\xi]) &= \varphi_S^{-1} \circ \varphi_2([\xi])
\end{aligned}$$

$V_1 \cup V_2 = \mathbb{FP}^1$ ve $U_N \cup U_S$, kürenin tamamıdır. Lemma 1.3 e göre $\varphi_S^{-1} \circ \varphi_2$ ve $\varphi_N^{-1} \circ \bar{\varphi}_1$ homeomorfizmleri $\mathbb{FP}^1$ den küreye açıkça bire-bir ve örten olan sürekli bir dönüşüm belirler. Bu dönüşümün tersi ise benzer şekilde $(\varphi_S^{-1} \circ \varphi_2)^{-1} = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_S : U_S \longrightarrow V_2$ ve $(\varphi_N^{-1} \circ \bar{\varphi}_1)^{-1} = \bar{\varphi}_1^{-1} \circ \varphi_N : U_N \longrightarrow V_1$ homeomorfizmleri ile belirlidir ve açıkça süreklidir,yani $\mathbb{RP}^1, \mathbb{CP}^1$ ve $\mathbb{HP}^1$ sırasıyla S^1, S^2 ve S^4 e homeomorftur. Bu homeomorfizm açıkça yazılmadan önce $\mathbb{F}$ nin $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ ve $\mathbb{H}$ olmasına bağlı olarak S^1, S^2 ve S^4 küreleri $\mathbb{S}$ ile gösterilsin. Bu durumda $\mathbb{FP}^1 \cong \mathbb{S}$ homeomorfizmi açıkça şu şekildedir:

$$\Phi : \mathbb{FP}^1 \longrightarrow \mathbb{S}$$

$[\xi] = [\xi^1, \xi^2] \in \mathbb{FP}^1$ için

$$\Phi([\xi]) = \begin{cases} \varphi_N^{-1} \circ \bar{\varphi}_1([\xi]), & [\xi] \in V_1 \\ \varphi_S^{-1} \circ \varphi_2([\xi]), & [\xi] \in V_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_N^{-1} \circ \overline{\varphi_1}([\xi^1, \xi^2]) &= \varphi_N^{-1}(\overline{\xi^2(\xi^1)^{-1}}) = \left(\frac{2\overline{\xi^2(\xi^1)^{-1}}}{1 + |\overline{\xi^2(\xi^1)^{-1}}|^2}, \frac{1 - |\overline{\xi^2(\xi^1)^{-1}}|^2}{1 + |\overline{\xi^2(\xi^1)^{-1}}|^2} \right) \\
&= \left(\frac{2\ \overline{(\xi^1)^{-1}}\ \overline{\xi^2}}{1 + |\overline{(\xi^1)^{-1}}\ \overline{\xi^2}|^2}, \frac{1 - |\overline{(\xi^1)^{-1}}\ \overline{\xi^2}|^2}{1 + |\overline{(\xi^1)^{-1}}\ \overline{\xi^2}|^2} \right) \\
&= \left(\frac{2\ \overline{\frac{1}{|\xi^1|^2}\bar{\xi}^1}\bar{\xi}^2}{1 + |(\xi^1)^{-1}|^2|\xi^2|^2}, \frac{1 - |(\xi^1)^{-1}|^2|\xi^2|^2}{1 + |(\xi^1)^{-1}|^2|\xi^2|^2} \right) \\
&= \left(\frac{2\ \frac{1}{|\xi^1|^2}\xi^1\bar{\xi}^2}{1 + \frac{1}{|\xi^1|^4}|\xi^1|^2|\xi^2|^2}, \frac{1 - \frac{1}{|\xi^1|^4}|\xi^1|^2|\xi^2|^2}{1 + \frac{1}{|\xi^1|^4}|\xi^1|^2|\xi^2|^2} \right) \\
&= \left(\frac{2\ \frac{1}{|\xi^1|^2}\xi^1\bar{\xi}^2}{1 + \frac{|\xi^2|^2}{|\xi^1|^2}}, \frac{1 - \frac{|\xi^2|^2}{|\xi^1|^2}}{1 + \frac{|\xi^2|^2}{|\xi^1|^2}} \right) = \left(2\xi^1\bar{\xi}^2, |\xi^1|^2 - |\xi^2|^2\right)
\end{aligned}$$

Benzer şekilde

$\varphi_S^{-1} \circ \varphi_2([\xi^1, \xi^2]) = \left(2\xi^1\bar{\xi}^2, |\xi^1|^2 - |\xi^2|^2\right)$ ve dolayısıyla

$$\Phi([\xi^1, \xi^2]) = \left(2\xi^1\bar{\xi}^2, |\xi^1|^2 - |\xi^2|^2\right) \tag{2.13}$$

Görüldüğü gibi ikinci bileşen reel olduğundan $\mathbb{S}$ küresi $|\zeta|^2 + |t|^2 = 1$ olan $(\zeta, t) \in \mathbb{F} \times \mathbb{R}$ ikililerinin kümesi olarak göz önüne alınabilir. Bu durumda Φ nin tersi

$$\Phi^{-1} : \mathbb{S} \longrightarrow \mathbb{FP}^1$$

$$\Phi^{-1}(\zeta, t) = \begin{cases} \varphi_2^{-1} \circ \varphi_S(\zeta, t), & (\zeta, t) \in U_S \\ \bar{\varphi}_1^{-1} \circ \varphi_N(\zeta, t), & (\zeta, t) \in U_N \end{cases}$$

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_S(\zeta, t) = \varphi_2^{-1}\left(\frac{\zeta}{1-t}\right) = \left[\frac{\zeta}{1-t}, 1\right] = [\zeta, 1-t]$$

$$\bar{\varphi}_1^{-1} \circ \varphi_N(\zeta, t) = \bar{\varphi}_1^{-1}\left(\frac{\zeta}{1+t}\right) = \left[1, \frac{\bar{\zeta}}{1+t}\right] = \left[1+t, \bar{\zeta}\right]$$

şeklindedir.

$\mathbb{S}$ nin $\{(U_S, \varphi_S), (U_N, \varphi_N)\}$ atlasındaki ve $\mathbb{FP}^1$ in $\{(V_1, \varphi_1), (V_2, \varphi_2)\}$ atlasındaki kartlara göre Φ nin koordinat ifadeleri şu şekildedir :

$$\begin{aligned}
\varphi_S \circ \Phi \circ \bar{\varphi}_1^{-1} &= \begin{cases} \varphi_S \circ \varphi_N^{-1} \circ \bar{\varphi}_1 \circ \bar{\varphi}_1^{-1} = \varphi_S \circ \varphi_N^{-1} \\ \varphi_S \circ \varphi_S^{-1} \circ \varphi_2 \circ \bar{\varphi}_1^{-1} = \varphi_2 \circ \bar{\varphi}_1^{-1} \end{cases} \\
\varphi_S \circ \Phi \circ \varphi_2^{-1} &= \begin{cases} \varphi_S \circ \varphi_N^{-1} \circ \bar{\varphi}_1 \circ \varphi_2^{-1} \\ \varphi_S \circ \varphi_S^{-1} \circ \varphi_2 \circ \varphi_2^{-1} = id \end{cases} \\
\varphi_N \circ \Phi \circ \bar{\varphi}_1^{-1} &= \begin{cases} \varphi_N \circ \varphi_N^{-1} \circ \bar{\varphi}_1 \circ \varphi_1^{-1} = id \\ \varphi_N \circ \varphi_S^{-1} \circ \varphi_2 \circ \bar{\varphi}_1^{-1} \end{cases} \\
\varphi_N \circ \Phi \circ \varphi_2^{-1} &= \begin{cases} \varphi_N \circ \varphi_N^{-1} \circ \bar{\varphi}_1 \circ \varphi_2^{-1} = \bar{\varphi}_1 \circ \varphi_2^{-1} \\ \varphi_N \circ \varphi_S^{-1} \circ \varphi_2 \circ \varphi_2^{-1} = \varphi_N \circ \varphi_S^{-1} \end{cases}
\end{aligned}$$

ve bu koordinat ifadelerinin hepsi C^∞ dur. Φ^{-1} in koordinat ifadeleri de yukarıdakilere benzer C^∞ dönüşümlerdir. Sonuç olarak Φ, $\mathbb{FP}^1$ den $\mathbb{S}$ ye bir difeomorfizmdir.

3 ASLİ LİF DEMETLERİ

3.1 Asli Lif Demetleri ve Hopf Demetleri

G bir Hausdorff topolojik uzay ve ayrıca bir grup olsun. G deki çarpma

$$(x, y) \longrightarrow xy : G \times G \longrightarrow G$$

ve tersine götürme

$$x \longrightarrow x^{-1} : G \longrightarrow G$$

işlemleri sürekli ise G ye bir **topolojik grup** denir.

Hausdorff topolojik uzay ve ayrıca bir grup olan G nin bir topolojik grup olması için gerekli ve yeterli koşul $(x, y) \longrightarrow x^{-1}y : G \times G \longrightarrow G$ dönüşümünün sürekli olmasıdır. G bir topolojik grup ve Y bir topolojik uzay olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlayan sürekli bir $\sigma : Y \times G \longrightarrow Y$ dönüşümüne G nin Y **üzerine sağ etkisi** denir:

1. G nin birimi e ve her $y \in Y$ için $\sigma(y, e) = y \cdot e = y$

2. her $y \in Y$ ve her $g_1, g_2 \in G$ için $\sigma(y, g_1g_2) = \sigma(\sigma(y, g_1), g_2)$, yani
   $y \cdot (g_1g_2) = (y \cdot g_1) \cdot g_2$

Örneğin, S^{2n-1}, $\mathbb{C}^n$ de $|z^1|^2 + \cdots + |z^n|^2 = 1$ olan $(z^1, \ldots, z^n)$-lilerin kümesi ile bir tutularak S^1 in S^{2n-1} üzerine bir sağ etkisi $((z^1, \ldots, z^n), g) \to (z^1, \ldots, z^n) \cdot g = (z^1g, \ldots, z^ng)$ şeklinde tanımlıdır. Benzer şekilde S^{4n-1}, $\mathbb{H}^n$ de $|q^1|^2+\cdots+|q^n|^2 = 1$ olan $(q^1, \ldots, q^n)$-lilerin kümesi ile bir tutularak S^3 ün S^{4n-1} üzerine bir sağ etkisi $((q^1, \cdots, q^n), g) \to (q^1, \cdots, q^n) \cdot g = (q^1g, \cdots, q^ng)$ şeklinde tanımlıdır.

X bir Hausdorff topolojik uzay ve G bir topolojik grup olsun. Bu durumda **X üzerinde G grup yapılı bir** C^0 (veya **sürekli) asli lif demeti** (veya basitçe, **X üzerinde bir** C^0 **G-demet**), P bir topolojik uzay, $\mathcal{P} : P \longrightarrow X$ örten sürekli

dönüşüm ve $\sigma : P \times G \to P \quad \sigma(p,g) = p \cdot g$, G nin P üzerine sağ etkisi olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde bir
$\mathcal{B} = (P, \mathcal{P}, \sigma)$ üçlüsüdür:

1. σ $\mathcal{P}$ nin liflerini korur, yani

   her $p \in P$ ve her $g \in G$ için

$$\mathcal{P}(p \cdot g) = \mathcal{P}(p) \tag{3.1}$$

2. (**Lokal Trivallik**) Her bir $x_0 \in X$ için X uzayında x_0 ın bir V açık komşuluğu ve

$$\Psi(p) = (\mathcal{P}(p), \psi(p)) \tag{3.2}$$

şeklinde bir $\Psi : \mathcal{P}^{-1}(V) \longrightarrow V \times G$ homeomorfizmi vardır,
burada her $p \in \mathcal{P}^{-1}(V)$ ve her $G \in G$ için
$\psi : \mathcal{P}^{-1}(V) \longrightarrow G$ aşağıdaki eşitliği sağlar

$$\psi(p \cdot g) = \psi(p)g \tag{3.3}$$

($\psi(p)g, G$ de $\psi(p)$ ve g nin çarpımıdır).

P X üzerinde bir asli G -lif demeti ise şematik olarak $G \longrightarrow P \longrightarrow X$ şeklinde gösterilir.
Eşitlik (3.1), σ nın P demet uzayı üzerinde lif boyunca etki ettiğini belirtir. (3.3) eşitliğinin önemi ise aşağıdaki lemmadan görülmektedir.

Lemma 3.1 *Her bir $p \in P$ için $\mathcal{P}(p)$ üzerindeki lif ile σ altında p nin yörüngesi çakışır, yani*

$$\mathcal{P}^{-1}(\mathcal{P}(p)) = \{p \cdot g \mid g \in G\} = p \cdot G$$

İspat. Denklem (3.1), $\mathcal{P}(p \cdot g) = \mathcal{P}(p)$ den $\{p \cdot g : g \in G\} \subseteq \mathcal{P}^{-1}(\mathcal{P}(p))$ olduğu açık. Ters kapsam için $p' \in \mathcal{P}^{-1}(\mathcal{P}(p))$ olsun. V, $\mathcal{P}(p') = \mathcal{P}(p) = x_0$ noktasının bir açık komşuluğu ve Ψ, (Asli lif demeti tanımının (2) koşulundaki) homeomorfizm olsun . Bu durumda $\psi(p)$ ve $\psi(p')$ G nin elemanlarıdır. Öyleyse $((\psi(p))^{-1}\psi(p'))$ G nin elemanıdır. $(\psi(p))^{-1}\psi(p') = g$ ile gösterilirse, $\psi(p) \cdot g = \psi(p')$, $\psi(p) \cdot g = \psi(p \cdot g)$ olduğundan $\psi(p \cdot g) = \psi(p')$.

$\Psi(p \cdot g) = (\mathcal{P}(p \cdot g), \psi(p \cdot g)) = (\mathcal{P}(p), \psi(p')) = (\mathcal{P}(p'), \psi(p')) = \Psi(p')$

Ψ bir homeomorfizm olduğundan bire-birdir, dolayısıyla $\Psi(p \cdot g) = \Psi(p')$ ise $p \cdot g = p'$. Yani $p' \in \mathcal{P}^{-1}(\mathcal{P}(p))$ için $p' = p \cdot g \in \{p \cdot g : \ g \in G\}$. Sonuç olarak, $\mathcal{P}^{-1}(\mathcal{P}(p)) = \{p \cdot g : \ g \in G\}$. ■

Böylelikle, ψ aracılığıyla bir lif ile G yi özdeşleştirmek, σ nın lifler üzerindeki etkisinin " G nin elemanları ile sağdan çarpma " olduğunu belirtir.

X üzerinde en basit G-lif demeti $(X \times G, X, \mathcal{P}, G)$ trivial demetdir. Burada $\mathcal{P} : X \times G \longrightarrow X$ birinci çarpan üzerine izdüşüm dönüşümüdür ve G nin $X \times G$ üzerine etkisi $(x, h) \cdot g = (x, hg)$ şeklinde tanımlıdır. Bu durumda asli lif demeti tanımının (2) koşulundaki V, tüm X alınabilir ve Ψ dönüşümü ise $\mathcal{P}^{-1}(V) = X \times G$ üzerinde birim dönüşüm olur. Bu, X üzerinde **trivial G-lif demetdir**. Bununla birlikte, bundan çok daha ilginç bir örnek olarak, $(S^{n-1}, \mathbb{RP}^{n-1}, \mathcal{P}, \mathbb{Z}_2)$ verilebilir, burada $\mathcal{P} : S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{RP}^{n-1}$, antipodal noktaları bir tutan izdüşüm dönüşümüdür. $\mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$ in (ayrık topoloji ile) S^{n-1} üzerine doğal bir etkisini şu şekilde tanımlıdır : her $g \in \mathbb{Z}_2$ ve her $p = (x^1, \ldots, x^n) \in S^{n-1}$ için $p \cdot g = (x^1, \ldots, x^n) \cdot g = (x^1 g, \ldots, x^n g)$. Bu durumda her $p \in S^{n-1}$ için $p \cdot 1 = p$ ve $p \cdot (-1) = -p$, böylece $\mathcal{P}(p \cdot g) = [p \cdot g] = [\pm p] = [p] = \mathcal{P}(p)$ ve bu (3.1) koşuludur. Her bir $k = 1, \ldots, n$ için

$$U_k^+ = \left\{ x = (x^1, \ldots, x^n) \in S^{n-1} \ : \ x^k > 0 \right\}$$

ve

$$U_k^- = \left\{ x = (x^1, \ldots, x^n) \in S^{n-1} \ : \ x^k < 0 \right\}$$

kümeleri S^{n-1} üzerinde açık yarıkürelerdir. Her bir k için $U_k^+ \cap U_k^- = \emptyset$ ve S^{n-1} in her bir noktası böyle bir küme tarafından içerilir. $\mathcal{P}$ nin bu $U_k^\pm$ kümelerinden birine kısıtlanmışı süreklidir ve S^{n-1} de $x \sim y \Leftrightarrow y = \pm x$ olduğundan $\mathcal{P}|U_k^{\pm}$ bire-birdir. $\mathcal{P}|U_k^{\pm}$ bir açık dönüşümdür: eğer U bir $U_k^{\pm}$ içinde açık ise $\mathcal{P}^{-1}((\mathcal{P}|U_k^{\pm})(U)) = \mathcal{P}^{-1}(\mathcal{P}(U)) = U \cup (-U)$, burada $-U = \{-x : x \in U\}$ ve $-U, S^{n-1}$ içinde açık olduğundan $U \cup (-U)$ da açıktır ve bölüm topolojisinin tanımından $(\mathcal{P}|U_k^{\pm})(U)$, $\mathbb{RP}^{n-1}$ içinde açıktır. O halde $\mathcal{P}|U_k^{\pm}$ sürekli, bire-bir,örten ve açık dönüşümdür, yani $U_k^{\pm}$ yi $V_k = \mathcal{P}(U_k^{+}) = \mathcal{P}(U_k^{-})$ ye resmeden bir homeomorfizmdir. O halde $\mathcal{P}^{-1}(V_k) = U_k^{+} \cup U_k^{-}$ olduğu göz önüne alınarak bir $\Psi_k : \mathcal{P}^{-1}(V_k) = U_k^{+} \cup U_k^{-} \longrightarrow V_k \times \mathbb{Z}_2$ dönüşümü $x \in U_k^{+}$ ise $\Psi_k(x) = ([x], 1)$ ve $x \in U_k^{-}$ ise $\Psi_k(x) = ([x], -1)$ şeklinde tanımlasın. $\Psi_k^{-1} : V_k \times \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathcal{P}^{-1}(V_k) = U_k^{+} \cup U_k^{-}$

$$\Psi_k^{-1}([x], 1) = (\mathcal{P}|U_k^{+})^{-1}([x]) \quad \text{ve} \quad \Psi_k^{-1}([x], -1) = (\mathcal{P}|U_k^{-})^{-1}([x])$$

şeklinde tanımlasın.

Bu durumda $x \in U_k^{\pm}$ için

$$\begin{aligned} \Psi_k^{-1} \circ \Psi_k(x) &= \Psi_k^{-1}([x], 1) = x \\ \Psi_k \circ \Psi_k^{-1}([x], \pm 1) &= \Psi_k(\mathcal{P}|U_k^{\pm})^{-1}([x]) = \Psi_k(x) = ([x], \pm 1) \end{aligned}$$

Gerçekten Ψ_k^{-1}, Ψ_k nın tersidir ve bu her iki dönüşüm de süreklidir. $\psi_k : \mathcal{P}^{-1}(V_k) \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ U_k^{+} üzerinde +1, U_k^{-} üzerinde -1 değerini alan bir dönüşüm olmak üzere Ψ_k dönüşümü $\Psi_k(p) = (\mathcal{P}(p), \psi(p))$ şeklindedir. Özel olarak, $\psi_k(p \cdot 1) = \psi_k(p) = \psi_k(p)1$ ve $\psi_k(p \cdot (-1)) = \psi_k(-p) = -\psi_k(p) = \psi_k(p)(-1)$, yani, (3.3) koşulu sağlanır. O halde S^{n-1}, $\mathbb{RP}^{n-1}$ üzerinde bir asli $\mathbb{Z}_2$-lif demetidir.

İkinci örnek olarak $(S^{2n-1}, \mathbb{CP}^{n-1}, \mathcal{P}, S^1)$ verilebilir. Burada $\mathbb{CP}^{n-1}$,S^{2n-1} in bir bölüm uzayı olan kompleks projektif uzaydır ve $\mathcal{P} : S^{2n-1} \longrightarrow \mathbb{CP}^{n-1}$ lifleri S^1 olan izdüşüm dönüşümüdür. S^{2n-1},
$\left\{p = (z^1, \ldots, z^n) \in \mathbb{C}^n \ : < p, p >= \bar{z}^1 z^1 + \cdots + \bar{z}^n z^n = 1\right\}$ kümesi olarak göz önüne alınmaktadır. Böylece bir $p = (z^1, \ldots, z^n) \in S^{2n-1}$ ve $g \in S^1$ için $p \cdot g \sim p$, yani

$\mathcal{P}(p \cdot g) = \mathcal{P}(p)$ olduğundan C^0 asli lif demeti tanımının (1) koşulu sağlanır. Her bir $k = 1, \ldots, n$ için $V_k = \{[p] \in \mathbb{CP}^{n-1} \ : \ z^k \neq 0\}$ şeklinde tanımlanmıştı. $\mathbb{CP}^{n-1}$ in her elemanı böyle bir küme tarafında içerildiğinden bir $\Psi_k : \mathcal{P}^{-1}(V_k) \longrightarrow V_k \times S^1$ dönüşümü

$$\Psi_k(p) = \Psi_k(z^1, \ldots, z^n) = ([p], |z^k|^{-1} z^k) = (\mathcal{P}(p), |z^k|^{-1} z^k)$$

şeklinde tanımlansın. $\Psi_k^{-1} : V_k \times S^1 \longrightarrow \mathcal{P}^{-1}(V_k)$, $\quad [p] \in V_k$, herhangi bir $(z^1, \ldots, z^n) \in \mathcal{P}^{-1}([p])$ ve $g \in S^1$ için

$$\Psi_k^{-1}([p], g) = (z^1 (z^k)^{-1} |z^k| g, \ldots, z^n (z^k)^{-1} |z^k| g)$$

şeklinde tanımlansın. Hatırlanacak olursa, eğer $[p] = [z^1, \ldots, z^n] = [w^1, \ldots, w^n]$ ise $|a| = 1$ olan bir $a \in \mathbb{C}$ için $(w^1, \ldots, w^n) = (z^1 a, \ldots, z^n a)$ dir. Bu durumda $(w^1 (w^k)^{-1} |w^k| g, \ldots, w^n (w^k)^{-1} |w^k| g) = (z^1 a (z^k a)^{-1} |z^k a| g, \ldots, z^n a (z^k a)^{-1} |z^k a| g) = (z^1 (z^k)^{-1} |z^k| g, \ldots, z^n (z^k)^{-1} |z^k| g)$, dolayısıyla Ψ_k^{-1} iyi tanımlıdır.

$$\begin{aligned}
\Psi_k^{-1} \circ \Psi_k(p) &= \Psi_k^{-1}([p], |z^k|^{-1} z^k) \\
&= (z^1 (z^k)^{-1} |z^k| (|z^k|^{-1} z^k), z^n (z^k)^{-1} |z^k| (|z^k|^{-1} z^k)) \\
&= (z^1, \ldots, z^n) \\
&= p \\
\Psi_k \circ \Psi_k^{-1}([p], g) &= \Psi_k(z^1 (z^k)^{-1} |z^k| g, \ldots, z^n (z^k)^{-1} |z^k| g) \\
&= ([z^1 (z^k)^{-1} |z^k| g, \ldots, z^n (z^k)^{-1} |z^k| g], |z^k (z^k)^{-1} |z^k| g|^{-1} z^k (z^k)^{-1} |z^k| g) \\
&= ([z^1, \ldots, z^n], |z^k|^{-1} |z^k| g) \\
&= ([p], g)
\end{aligned}$$

yani Ψ_k^{-1} gerçekten Ψ_k nın tersidir. O halde Ψ_k bire-bir ve örtendir. Ψ_k nın koordinat fonksiyonları olan $p \to [p] = \mathcal{P}(p)$ ve $p \to |z^k|^{-1} z^k$ sürekli olduğundan Ψ_k

süreklidir. Ψ_k^{-1} in görüntü kümesi $\mathcal{P}^{-1}(V_k)$, S^{2n-1} içinde olduğundan ve S^{2n-1}, $\mathbb{C}^n$ nin bir altkümesi ile bir tutulduğundan Ψ_k^{-1}, $\mathbb{C}^n$ de değer alan ve i. koordinat fonksiyonu

$$([p], g) \to z^i (z^k)^{-1} |z^k| g \tag{3.4}$$

olan bir dönüşüm olarak göz önüne alınabilir, burada $(z^1, \dots, z^n) \in S^{2n-1}$ noktası $\mathcal{P}(z^1, \dots, z^n) = [p]$ olan herhangi bir noktadır. $\{(z^1, \dots, z^n) \in \mathbb{C}^n \ : \ z^k \neq 0\} \times S^1 \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (z^1, \dots, z^n, g) \to z^i (z^k)^{-1} |z^k| g$ dönüşümü açıkça süreklidir ve $[w^1, \dots, w^n] = [z^1, \dots, z^n]$ olan her $(w^1, \dots, w^n, g)$ noktasında aynı değeri alır. Böylece her bir $i = 1, \dots, n$ için Lemma 2.2 den (3.4) fonksiyonunun sürekliliği elde edilir. Ψ_k^{-1} in her bir koordinat fonksiyonu sürekli, dolayısıyla Ψ_k^{-1} süreklidir. Sonuç olarak $\Psi_k : \mathcal{P}^{-1}(V_k) \longrightarrow V_k \times S^1$ bir homeomorfizmdir. Yukarıdan da anlaşıldığı üzere her $p = (z^1, \dots, z^n) \in \mathcal{P}^{-1}(V_k)$ ve her $g \in S^1$ için $\psi_k : \mathcal{P}^{-1}(V_k) \longrightarrow S^1, \quad \psi_k(z^1, \dots, z^n) = |z^k|^{-1} z^k$ şeklinde tanımlıdır ve $\psi_k(p \cdot g) = \psi(z^1 g, \dots, z^n g) = |z^k g|^{-1} (z^k g) = (|z^k|^{-1} z^k) g = \psi_k(p) g$ sağlanır ve böylece C^0 asli lif demeti tanımının (2) koşulu da sağlanır. Sonuç olarak S^{2n-1}, $\mathbb{CP}^{n-1}$ üzerinde bir asli S^1-lif demetidir.

C^0 asli lif demetleri için diğer bir örnek $(S^{4n-1}, \mathbb{HP}^{n-1}, \mathcal{P}, S^3)$ dir. Burada da $\mathbb{HP}^{n-1}$, S^{4n-1} in bir bölüm uzayı olan kuaterniyonik projektif uzaydır ve $\mathcal{P} : S^{4n-1} \longrightarrow \mathbb{HP}^{n-1}$, lifleri S^3 olan izdüşüm dönüşümüdür. Kompleks durumda olduğu gibi S^{4n-1} küresi $\{p = (q^1, \dots, q^n) \in \mathbb{H}^n \ : < p, p >= \bar{q}^1 q^1 + \cdots + \bar{q}^n q^n = 1\}$ altkümesi ile bir tutulmaktadır. S^3 ün S^{4n-1} üzerine sağ etkisi yukarıda anlatıldığı gibi alınarak ve kompleks durumda yapılanlar aynen izlenerek, S^{4n-1} in $\mathbb{HP}^{n-1}$ üzerinde bir C^0 asli S^3-lif demeti olduğu elde edilir.

Son iki örnek, yani $(S^{2n-1}, \mathbb{CP}^{n-1}, \mathcal{P}, S^1)$ ve $(S^{4n-1}, \mathbb{HP}^{n-1}, \mathcal{P}, S^3)$, **Hopf demetleri** olarak adlandırılır.

$n = 2$ durumunda Hopf demetleri özel bir öneme sahiptir. (1.0.11) ve (1.0.12) den dolayı, yani sırasıyla $\mathbb{CP}^1 \cong S^2$ ve $\mathbb{HP}^1 \cong S^4$ olduğundan S^3 ün S^2 üzerinde bir asli S^1-lif demeti ve S^7 nin S^4 üzerinde bir asli S^3-lif demeti olduğu elde edilir. Şematik olarak

$$S^1 \longrightarrow S^3 \longrightarrow S^2 \quad \text{ve} \quad S^3 \longrightarrow S^7 \longrightarrow S^4$$

$\mathcal{B}' = (P', \mathcal{P}', \sigma')$, X' üzerinde herhangi bir asli G-lif demeti ve X, X' uzayının topolojik bir altuzayı olsun. $P = (\mathcal{P}')^{-1}(X)$, $\mathcal{P} = \mathcal{P}'|P$ ve $\sigma = \sigma'|P \times G$ olsun. B' nün $V' \cap X \neq \emptyset$ olan her bir (V', Ψ') lokal trivializasyonu için $V = V' \cap X$ ve $\Psi = \Psi'|\mathcal{P}^{-1}(V)$ şeklinde seçilsin. Bu tanımlamalarla P, X üzerinde bir asli G-lif demetidir ve **$\mathcal{B}'$ nün X e kısıtlanmışı** olarak adlandırılır ve $\mathcal{B}'|X$ şeklinde gösterilir.

3.2 Geçiş Fonksiyonları

$\mathcal{P} : P \longrightarrow X,$ X üzerinde bir asli G-lif demeti olsun ve $\{(V_j, \Psi_j)\}_{j\in J},$ X üzerinde $\bigcup_{j\in J} V_j = X$ olan bir yerel trivializasyonlar ailesi olsun. Her bir Ψ_j (3.2) de olduğu gibi $(\mathcal{P}, \psi_j)$ şeklinde gösterilsin. $i, j \in J,$ $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ ve her bir $x \in V_i \cap V_j$ için, ψ_i ve ψ_j nin her ikisi de $\mathcal{P}^{-1}(x)$ i homeomorf olarak G ye resmeder, öyleyse

$$(\psi_j|\mathcal{P}^{-1}(x)) \circ (\psi_i|\mathcal{P}^{-1}(x))^{-1} : G \longrightarrow G \tag{3.5}$$

bir homeomorfizmdir.

$\psi_j(p)(\psi_i(p))^{-1},$ $\mathcal{P}^{-1}(x)$ lifindeki her p için aynı değeri alır, gerçekten herhangi bir $p \cdot g \in \mathcal{P}^{-1}(x)$ için

$\psi_j(p \cdot g)(\psi_i(p \cdot g))^{-1} = (\psi_j(p)g)(\psi_i(p)g)^{-1} = (\psi_j(p)g)(g^{-1}(\psi_i(p))^{-1})$

$= \psi_j(p)(gg^{-1})(\psi_i(p))^{-1} = \psi_j(p)(\psi_i(p))^{-1}.$

O halde şöyle bir dönüşüm tanımlanabilir:

$$g_{ji} : V_i \cap V_j \longrightarrow G$$

$$g_{ji}(x) = \psi_j(p)(\psi_i(p))^{-1}, \tag{3.6}$$

burada $p,$ $\mathcal{P}^{-1}(x)$ in herhangi bir elemanıdır. ψ_j ve ψ_i sürekli olduğundan ve G bir topolojik grup olduğundan g_{ji} süreklidir.

Lemma 3.2 *Her bir $x \in V_i \cap V_j$ ve her $g \in G$ için*

$$(\psi_j|\mathcal{P}^{-1}(x)) \circ (\psi_i|\mathcal{P}^{-1}(x))^{-1}(g) = g_{ji}(x)g \tag{3.7}$$

İspat. $(\psi_i|\mathcal{P}^{-1}(x))^{-1} = p$ olsun. Bu durumda

$g = \psi_i(p)$ ve $(\psi_j|\mathcal{P}^{-1}(x)) \circ (\psi_i|\mathcal{P}^{-1}(x))^{-1}(g) = \psi_j(p).$ Bununla birlikte, $p \in \mathcal{P}^{-1}(x),$ öyleyse $g_{ji}(x)g = \psi_j(p)(\psi_i(p))^{-1}g = \psi_j(p)(\psi_i(p))^{-1}\psi_i(p) = \psi_j(p).$ Yani,

$(\psi_j|\mathcal{P}^{-1}(x)) \circ (\psi_i|\mathcal{P}^{-1}(x))^{-1}(g) = \psi_j(p) = g_{ji}(x)g.$ ∎

Böylece (3.5) homeomorfizmi aslında G de $g_{ji}(x)$ elemanı ile soldan çarpmadır. $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ iken tanımlanan $g_{ji} : V_i \cap V_j \longrightarrow G$ fonksiyonları asli lif demetinin, X in $\{(V_j, \psi_j)\}_{j \in J}$ trivializasyon örtüsü ile ilişkili, **geçiş fonksiyonları** olarak adlandırılır. Örnek olarak Altbölüm 3.1 de anlatılan $\{(V_j, \psi_j)\}_{j \in J}$ trivializasyon örtüsü ile birlikte $(S^{2n-1}, \mathbb{CP}^{n-1}, \mathcal{P}, S^1)$ Hopf demetinin geçiş fonksiyonları şu şekildedir: herhangi bir $p = (z^1, \ldots, z^n) \in \mathcal{P}^{-1}(V_j)$ için $\psi_j : \mathcal{P}^{-1}(V_j) \longrightarrow S^1, \quad \psi_j(p) = |z^j|^{-1} z^j$ şeklinde verilmişti. Bu nedenle, eğer $x \in V_i \cap V_j$ ve $p = (z^1, \ldots, z^n)$, $\mathcal{P}^{-1}(x)$ de herhangi bir nokta ise

$g_{ji}(x) = \psi_j(p)(\psi_i(p))^{-1} = |z^j|^{-1} z^j (|z^i|^{-1} z^i)^{-1} = |z^j|^{-1} z^j (z^i)^{-1} |z^i|$, veya

$$g_{ji}(x) = \frac{z^j / |z^j|}{z^i / |z^i|} .$$

$(S^{4n-1}, \mathbb{HP}^{n-1}, \mathcal{P}, S^3)$ için de hesaplama aynıdır, fakat $\mathbb{H}$ de değişmenin olmayışından, daha az estetik olan

$$g_{ji}(x) = |q^j|^{-1} q^j (q^i)^{-1} |q^i|$$

ifadesine sadık kalmak en iyisidir.

Eğer $V_i \cap V_j \cap V_k \neq \emptyset$ ve $x \in V_i \cap V_j \cap V_k$ ise
$p \in \mathcal{P}^{-1}(x)$ herhangi bir eleman olmak üzere

$$\begin{aligned} g_{kj}(x) g_{ji}(x) &= \psi_k(p)(\psi_j(p))^{-1} \psi_j(p)(\psi_i(p))^{-1} \\ &= \psi_k(p)(\psi_i(p))^{-1} \\ &= g_{ki}(x) \end{aligned}$$

yani

$$g_{kj}(x) g_{ji}(x) = g_{ki}(x). \tag{3.8}$$

Eşitlik (3.8) **cocyle koşulu** olarak adlandırılır. Ayrıca

$$
\begin{aligned}
g_{ii}(x) &= \psi_i(p)(\psi_i(p))^{-1} = e \\
(g_{ji}(x))^{-1} &= (\psi_j(p)(\psi_i(p))^{-1})^{-1} \\
&= \psi_i(p)(\psi_j(p))^{-1} \\
&= g_{ij}(x)
\end{aligned}
$$

3.3 Demet Dönüşümleri ve Denklik

G sabit bir topolojik grup olmak üzere $\mathcal{B}_1(\mathcal{P}_1 : P_1 \longrightarrow X_1)$ ve $\mathcal{B}_2(\mathcal{P}_2 : P_2 \longrightarrow X_2)$ iki asli G-lif demeti olsun, uygunluk açısından G nin P_1 ve P_2 üzerine etkileri aynı nokta $\cdot$ ile gösterilsin. $\mathcal{B}_1$ den $\mathcal{B}_2$ ye bir (**asli**) **demet dönüşümü** her $p \in P_1$ ve $g \in G$ için $\tilde{f} : P_1 \longrightarrow P_2$

$$\tilde{f}(p \cdot g) = \tilde{f}(p) \cdot g \tag{3.9}$$

olacak şekilde sürekli bir dönüşümdür. Lemma 3.1 den P_1 de p yi içeren lif $\{p \cdot g : g \in G\}$ ve P_2 de $\tilde{f}(p)$ yi içeren lif $\{\tilde{f}(p) \cdot g \ : \ g \in G\}$ olduğundan (3.9) $\tilde{f}$ nin lifleri koruduğunu ifade eder, yani $\tilde{f}$, P_1 de p yi içeren lifi P_2 de $\tilde{f}(p)$ yi içeren life resmeder. Dahası $\tilde{f}$, P_1 in her bir lifini P_2 bir lifine homeomorf olarak resmeder. Gerçekten,

$\mathcal{B}_1$ ve $\mathcal{B}_2$ birer asli G-lif demeti olduğundan $\mathcal{P}_1(p) = x$ noktasının X_1 de bir V_1 açık komşuluğu ve $\Psi_1 : \mathcal{P}_1^{-1}(V_1) \longrightarrow V_1 \times G, \quad \Psi_1(p) = (\mathcal{P}_1(p), \psi_1(p))$ formunda bir Ψ_1 homeomorfizmi vardır ve burada $\psi_1 : \mathcal{P}_1^{-1}(V_1) \longrightarrow G, \quad \psi_1(p \cdot g) = \psi_1(p)g$ sağlanır. Benzer şekilde $\mathcal{P}_2(\tilde{f}(p)) = y$ noktasının X_2 de bir V_2 açık komşuluğu ve $\Psi_2 : \mathcal{P}_2^{-1}(V_2) \longrightarrow V_2 \times G, \quad \Psi_2(q) = (\mathcal{P}_2(q), \psi_2(q))$ formunda bir Ψ_2 homeomorfizmi vardır ve $\psi_2 : \mathcal{P}_2^{-1}(V_2) \longrightarrow G, \quad \psi_2(q \cdot g) = \psi_2(q)g$ sağlanır.

$\tilde{f} : P_1 \longrightarrow P_2$ sürekli olduğundan $\tilde{f}|\mathcal{P}_1^{-1}(x) : \mathcal{P}_1^{-1}(x) \longrightarrow \mathcal{P}_2^{-1}(y)$ süreklidir ve açıkca örtendir. $(\tilde{f}|\mathcal{P}_1^{-1}(x))(p \cdot g_1) = (\tilde{f}|\mathcal{P}_1^{-1}(x))(p \cdot g_2)$ olsun. Buradan $(\tilde{f}|\mathcal{P}_1^{-1}(x))(p) \cdot g_1 = (\tilde{f}|\mathcal{P}_1^{-1}(x)(p)) \cdot g_2$, öyleyse,

$\psi_2((\tilde{f}|\mathcal{P}_1^{-1}(x))(p) \cdot g_1) = \psi_2((\tilde{f}|\mathcal{P}_1^{-1}(x)(p)) \cdot g_2)$

$\psi_2((\tilde{f}|\mathcal{P}_1^{-1}(x))(p))g_1 = \psi_2((\tilde{f}|\mathcal{P}_1^{-1}(x)(p)))g_2$

$g_1 = g_2$,

yani $p \cdot g_1 = p \cdot g_2$, dolayısıyla $\tilde{f}|\mathcal{P}_1^{-1}(x)$ bire-birdir.$\tilde{f}|\mathcal{P}_1^{-1}(x)$ dönüşümü bir açık dönüşümdür : $U \subseteq \mathcal{P}_1^{-1}(x)$ herhangi bir açık altküme olsun. Yani, $U \subseteq \{p \cdot g \ :$

$g \in G\}$, öyleyse U altkümesi $U = \{p \cdot h \ : \ h \in H \subseteq G\}$ şeklindedir. $\psi_1|\mathcal{P}_1^{-1}(x)$ bir homeomorfizm olduğundan, $(\psi_1|\mathcal{P}_1^{-1}(x))(U) = \{\psi_1(p \cdot h) \ : \ h \in H\} = \{\psi_1(p)h \ : \ h \in H\} = \psi_1(p)H$ bir açık kümedir. Öyleyse $H \subseteq G$ bir açık kümedir. Diğer taraftan,

$(\tilde{f}|\mathcal{P}_1^{-1}(x))(U) = \{\tilde{f}(p \cdot h) \ : \ p \cdot h \in U\} = \{\tilde{f}(p) \cdot h \ : \ h \in H\}$,

$(\psi_2|\mathcal{P}_2^{-1}(y))((\tilde{f}|\mathcal{P}_1^{-1}(x))(U)) = \{\psi_2(\tilde{f}(p) \cdot h) \ : \ h \in H\} = \{\psi_2(\tilde{f}(p))h \ : \ h \in H\} = \psi_2(\tilde{f}(p))H$. H bir açık küme olduğundan $\psi_2(\tilde{f}(p))H$ bir açık kümedir ve $\psi_2|\mathcal{P}_2^{-1}(y)$ bir homeomorfizm olduğundan $(\tilde{f}|\mathcal{P}_1^{-1}(x))(U)$ bir açık kümedir. Dolayısıyla $\tilde{f}|\mathcal{P}_1^{-1} : \mathcal{P}_1^{-1}(x) \longrightarrow \mathcal{P}_2^{-1}(y)$ bir homeomorfizmdir.

Özel olarak $\tilde{f}$,

$$\mathcal{P}_2 \circ \tilde{f} = f \circ \mathcal{P}_1 \tag{3.10}$$

şeklinde tanımlı bir $f : X_1 \longrightarrow X_2$ fonksiyonu indirger

$$\begin{tikzcd} P_1 \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\mathcal{P}_1"'] & P_2 \arrow[d, "\mathcal{P}_2"] \\ X_1 \arrow[r, "f"'] & X_2 \end{tikzcd}$$

f tanımlanışdan dolayı süreklidir (bir $(P, X, \mathcal{P}, G)$ asli G-lif demetinde $\mathcal{P} : P \to X$ ayrıca bir açık dönüşümdür bu durumda X, $\mathcal{P}$ tarafından belirlenen bölüm topolojisine sahiptir).

Eğer $\tilde{f}$ bir $f : X_1 \longrightarrow X_2$ homeomorfizmi indirgiyorsa $\tilde{f} : P_1 \longrightarrow P_2$ demet dönüşümü de bir homeomorfizmdir ve $\tilde{f}^{-1} : P_2 \longrightarrow P_1$ dönüşümü $\mathcal{B}_2$ den $\mathcal{B}_1$ e bir demet dönüşümüdür.

$\mathcal{B}_1(\mathcal{P}_1 : P_1 \longrightarrow X)$ ve $\mathcal{B}_2(\mathcal{P}_2 : P_2 \longrightarrow X)$ aynı X taban uzayı üzerinde asli G-lif demetleri olsunlar. Bu durumda $\tilde{f} : P_1 \longrightarrow P_2$ demet dönüşümünün indirgediği $f : X \longrightarrow X$ dönüşümü birim dönüşüm id_X ise,$\tilde{f}$ dönüşümüne bir **denklik** (ve $\mathcal{B}_1$

ve $\mathcal{B}_2$ demetleri **denktir**) denir. $\tilde{f}$ dönüşümü bir denklik ise indirgediği dönüşüm, id_X, bir homeomorfizm olduğundan $\tilde{f}$ bir homeomorfizmdir ve tersi $\tilde{f}^{-1} : P_2 \longrightarrow P_1$ de bir denkliktir. Eğer $\mathcal{B}(\mathcal{P} : P \longrightarrow X)$ sabit bir G-lif demeti ise bir $\tilde{f} : P \longrightarrow P$ denkliği demetin bir **otomorfizmi** olarak adlandırılır. X üzerinde bir $\mathcal{B}$ asli G-lif demeti X üzerindeki $\mathcal{P} : X \times G \longrightarrow X$ trivial demete denk ise $\mathcal{B}$ asli G-lif demetine **trivial** denir.

Lemma 3.3 *Bir $\mathcal{B}$ asli G-lif demetinin trivial olması için gerekli ve yeterli koşul* ***global trivializasyona*** *sahip olmasıdır, yani; gerekli ve yeterli koşul asli lif demeti tanımının (2) koşulunda $V = X$ alınabilmesidir.*

İspat. $\mathcal{B}(\mathcal{P} : P \longrightarrow X)$ asli G-lif demeti trivial olsun. Öyleyse $\mathcal{B}$ ve $\mathcal{P}^1 : X \times G \longrightarrow X$ trivial demeti denktir. Yani bir $\tilde{f} : P \longrightarrow X \times G$ denkliği (homeomorfizmi) vardır öyle ki $\tilde{f}$ dönüşümünün indirgediği dönüşüm $id_X : X \longrightarrow X$ birim dönüşümdür. $\mathcal{P}^1 : X \times G \longrightarrow X$ bir trivial demet olduğundan her $x_0 \in X$ noktasının $V = X$ açık komşuluğu ve $id_{X\times G} : (\mathcal{P}^1)^{-1}(V) = X \times G \longrightarrow X \times G$ homeomorfizmi için $id_{X\times G}(p) = id_{X\times G}(x, g) = (x, g) = (\mathcal{P}^1(x, g), \psi'(x, g)) = (\mathcal{P}^1(p), \psi'(p))$ ve burada $\psi' : X \times G \longrightarrow G, \quad \psi'(p \cdot g) = \psi'(p)g$ sağlanır.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\mathcal{P}"'] & X \times G \arrow[d, "\mathcal{P}^1"] \\ X \arrow[r, "id_X"'] & X \end{tikzcd}$$

Öyleyse her $x_0 \in X$ noktası için X, x_0 ın bir açık komşuluğudur ve $\Psi := id_{X\times G} \circ \tilde{f} : P \longrightarrow X \times G$ şeklinde tanımlı Ψ, homeomorfizmlerin bileşkesi olduğundan bir homeomorfizmdir. Ayrıca $\psi := \psi' \circ \tilde{f} : P \longrightarrow G$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $p \in P$ için

$\Psi(p) = id_{X\times G} \circ \tilde{f}(p) = id_{X\times G}(\tilde{f}(p)) = (\mathcal{P}^1(\tilde{f}(p)), \psi'(\tilde{f}(p))) = (\mathcal{P}^1 \circ \tilde{f}(p), \psi' \circ \tilde{f}(p)) = (id_X \circ \mathcal{P}(p), \psi' \circ \tilde{f}(p)) = (\mathcal{P}(p), \psi(p))$ şeklindedir ve $p \in P,\ g \in G$ için

$\psi(p \cdot g) = \psi'(\tilde{f}(p \cdot g)) = \psi'(\tilde{f}(p) \cdot g) = \psi'(\tilde{f}(p))g = \psi(p)g$ sağlanır. O halde $\mathcal{B}$ asli G-lif demeti global trivializayona sahiptir.

Tersine $\mathcal{B}$ global trivializasyona sahip olsun. Yani, her bir $x_0 \in X$ noktasının bir açık komşuluğu olarak X i alabiliriz ve bir $\Psi : \mathcal{P}^{-1}(X) = P \longrightarrow X \times G, \quad \Psi(p) = (\mathcal{P}(p), \psi(p))$ homeomorfizmi vardır ve ψ, $\psi(p \cdot g) = \psi(p)g$ koşulunu sağlar. Ψ, $\mathcal{B}$ ve trivial demet arasında sürekli bir dönüşümdür ve trivial demetde G nin $X \times G$ üzerine etkisi $(x, h) \cdot g = (x, hg)$ şeklinde tanımlı olduğundan
$\Psi(p \cdot g) = (\mathcal{P}(p \cdot g), \psi(p \cdot g)) = (\mathcal{P}(p), \psi(p)g) = (\mathcal{P}(p), \psi(p)) \cdot g = \Psi(p) \cdot g.$
Öyleyse Ψ homeomorfizmi $P \longrightarrow X \times G$ bir demet dönüşümüdür ve Ψ; $f : X \longrightarrow X$, $\mathcal{P}^1 \circ \Psi = f \circ \mathcal{P}$ şeklinde tanımlı bir f dönüşümü indirger.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "\mathcal{P}"'] & X \times G \arrow[d, "\mathcal{P}^1"] \\ X \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

X deki herhangi bir x elemanı ve her $p \in \mathcal{P}^{-1}(x)$ için,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^1 \circ \Psi(p) &= f \circ \mathcal{P}(p) \\ \mathcal{P}^1(\mathcal{P}(p), \psi(p)) &= f(\mathcal{P}(p)) \\ \mathcal{P}^1(x, \psi(p)) &= f(x) \\ x &= f(x) = id_X(x) \end{aligned}$$

O halde $\mathcal{B}(\mathcal{P} : P \longrightarrow X)$ ve $\mathcal{P}^1 : X \times G \longrightarrow X$ trivial demeti denktir, yani $\mathcal{B}$ asli G-lif demeti trivialdir. ■

Verilen bir asli G-lif demetinin trivial olup olmadığına karar vermek genel olarak kolay değildir. Triviallik için yararlı bir test " kesit " ("cross section") kavramına dayanır. Eğer V, bir asli lif demetinin taban uzayı X de açık bir küme ise V üzerinde tanımlı, demetin bir **(yerel) kesit**' i V den demet uzayı P ye $s : V \longrightarrow P$, $\mathcal{P} \circ s = id_V$ olacak şekilde sürekli bir s dönüşümüdür, yani; V üzerinde her bir lifdeki bir elemanın sürekli bir seçimidir.Dikkat edilirse, eğer $\Psi : \mathcal{P}^{-1}(V) \longrightarrow V \times G$ bir asli G-lif demetinin bir trivializasyonu ise $V \times G$ nin " yatay " kesiti $\mathcal{P}^{-1}(V)$ e geri taşınarak V üzerinde bir yerel kesit tanımlanabilir, yani; $s_V : V \longrightarrow P,\ s_V(x) = \Psi^{-1}(x, e)$ şeklinde tanımlanabilir

Bu $s_V,\ \Psi : \mathcal{P}^{-1}(V) \longrightarrow V \times G$ trivializasyonu ile ilişkili **doğal kesit** olarak adlandırılır. $(S^{2n-1}, \mathbb{CP}^{n-1}, \mathcal{P}, S^1)$ Hopf demetinde $(V_k, \Psi_k),\ k = 1, \ldots, n$ standart trivializasyonlara karşılık gelen kesitler her bir k için $s_k = s_{V_k} : V_k \longrightarrow \mathcal{P}^{-1}(V_k)$ herhangi bir $(z^1, \ldots, z^n) \in \mathcal{P}^{-1}(x)$ için $s_k(x) = \Psi^{-1}([z^1, \ldots, z^n], e) = (z^1(z^k)^{-1}|z^k|, \ldots, z^n(z^k)^{-1}|z^k|)$ şeklinde tanımlıdır. Böylece

$$s_k(x) = (\frac{z^1|z^k|}{z^k}, \ldots, |z^k|, \ldots, \frac{z^n|z^k|}{z^k}) \ ,$$

burada $|z^k|,\ k$. koordinatdadır. Örneğin $n = 2$ ise $(S^3, \mathbb{CP}^1, \mathcal{P}, S^1)$ için doğal kesitler

$$s_1(x) = (|z^1|, \frac{z^2|z^1|}{z^1}) \quad ve \quad s_2(x) = (\frac{z^1|z^2|}{z^2}, |z^2|)$$

Hesaplamalar $(S^{4n-1}, \mathbb{HP}^{n-1}, \mathcal{P}, S^3)$ kuaterniyonik lif demeti için de aynıdır, fakat yine $\mathbb{H}$ de değişmenin olmayışından dolayı hataya düşmemek için sonucu

$$s_k(x) = (q^1(q^k)^{-1}|q^k|, \ldots, |q^k|, \ldots, q^n(q^k)^{-1}|q^k|)$$

şeklinde yazmak daha doğru olacaktır.

Bir asli lif demeti üzerindeki grup etkisi aşağıda anlatıldığı şekilde bu işleyişin tersine çevrilmesine olanak sağlar. Tabandaki bir V açık kümesi üzerinde bir $s : V \longrightarrow \mathcal{P}^{-1}(V),\ \mathcal{P} \circ s = id_V$ yerel kesiti verilmiş olsun.

$$\mathcal{P}^{-1}(V) = \bigcup_{x \in V} \mathcal{P}^{-1}(x) = \bigcup_{x \in V} \{s(x) \cdot g \ : \ g \in G\}$$

olduğundan (çünkü $s(x) \in \mathcal{P}^{-1}(x)$) $\quad \Psi : \mathcal{P}^{-1}(V) \longrightarrow V \times G, \quad \Psi(s(x) \cdot g) = (x, g)$ dönüşümü tanımlanabilir. Bu durumda (V, Ψ), asli lif demetinin bir yerel trivializasyonudur : Ψ açıkça bire-bir ve örtendir ve $\Psi(s(x) \cdot g) = (\mathcal{P}(s(x) \cdot g), \psi(s(x) \cdot g))$, burada $\psi(s(x)\cdot g) = g$. Öyleyse, $\psi((s(x)\cdot g)\cdot g') = \psi(s(x)\cdot(gg')) = gg' = \psi(s(x)\cdot g)g'$, yani her $p \in \mathcal{P}^{-1}(V)$ ve her $g' \in G$ için $\psi(p\cdot g') = \psi(p)g'$. Geriye sadece Ψ ve Ψ^{-1} dönüşümlerinin sürekli olduğunu göstermek kalıyor. $\Psi^{-1}(x,g) = s(x)\cdot g$ dönüşümü $(x,g) \longrightarrow (s(x),g) \longrightarrow s(x)\cdot g$ dönüşümlerinin bileşkesi olduğundan süreklidir. Son olarak, Ψ dönüşümünün sürekliliği $\psi : \mathcal{P}^{-1}(V) \longrightarrow G$ dönüşümünün sürekliliğinin sonucudur. $\mathcal{P}^{-1}(V)$ deki herhangi bir $p = s(x)\cdot g$ için $\psi(p) = \psi(s(x)\cdot g) = g$. (V', Ψ'), $\mathcal{P}(p)$ noktasında $\Psi' = (\mathcal{P}, \psi')$ olan bir trivializasyon olsun. Bu durumda $\psi'(p) = \psi'((s\circ\mathcal{P})(p)\cdot g) = ((\psi'\circ s\circ\mathcal{P})(p))g$. Öyleyse $g = \psi'(p)((\psi'\circ s\circ\mathcal{P})(p))^{-1} = \psi(p)$, bu da ψ nin sürekli olduğunu gösterir ve istenilen sonuç elde edilir. Dikkat edilirse, $\psi^{-1}(x,g) = s(x)\cdot g$ olduğundan, (V,Ψ) trivializasyonu ile ilişkili s_V kanonik kesit s dir.

Böylelikle, bir asli lif demetinin yerel trivializasyonları ile yerel kesitleri arasında bire-bir eşleme kurulmuş olur. Özellikle, Lemma 3.3 ün aşağıda ifade edilen bir sonucu elde edilir.

Teorem 3.4 *Bir $\mathcal{P} : P \longrightarrow X$ asli G-lif demetinin trivial olması için gerekli ve yeterli koşul bir $s : X \longrightarrow P$ global kesite olanak vermesidir.*

$\Psi_i : \mathcal{P}^{-1}(V_i) \longrightarrow V_i \times G$ ve $\Psi_j : \mathcal{P}^{-1}(V) \longrightarrow V_j \times G$ bir asli G-lif demetinin $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ olan iki yerel trivializasyonu olsun. Ayrıca $s_i = s_{V_i}$ ve $s_j = s_{V_j}$ ilgili doğal kesitler olsunlar. $g_{ji} : V_i \cap V_j \longrightarrow G$ geçiş fonksiyonları olmak üzere, her bir $x \in V_i \cap V_j$ için,

$$s_i(x) = s_j(x)\cdot g_{ji}(x) \qquad (3.11)$$

Denklem (3.11) ün ispatı şu şekilde yapılabilir:
$x \in V_i \cap V_j$ için, $\Psi_i^{-1}(x,e) = p_1$ ve $\Psi_j^{-1}(x,e) = p_2$ olsun. $\Psi_i = (\mathcal{P}, \psi_i)$, $\Psi_j = (\mathcal{P}, \psi_j)$ ve $\mathcal{P}(p_1) = \mathcal{P}(p_2) = x$ olduğundan p_1 ve p_2 aynı lif üzerindedir. Bu durumda $p_1 = p\cdot g_1$, $p_2 = p\cdot g_2$ şeklinde gösterilsin. Yani, $\Psi_i^{-1}(x,e) = p\cdot g_1$, $\Psi_j^{-1}(x,e) =$

$p \cdot g_2, \quad g_1, g_2 \in G.$ $\Psi_i(p \cdot g_1) = (\mathcal{P}(p \cdot g_1), \psi_i(p \cdot g_1)) = (x,e), \quad \Psi_j(p \cdot g_2) = (\mathcal{P}(p \cdot g_2), \psi_j(p \cdot g_2)) = (x,e)$. Öyleyse, $\psi_i(p \cdot g_1) = \psi_i(p)g_1 = e$ ve $\psi_j(p \cdot g_2) = \psi_j(p)g_2 = e$. $\psi_j(p)g_2 = e$ ise $\psi_j(p) = g_2^{-1}$, öyleyse, $g_2\psi_j(p) = g_2g_2^{-1} = e$. O halde $\psi_i(p)g_1 = e$ olduğundan $g_1 = (\psi_i(p))^{-1}$ yani $g_1 = g_2\psi_j(p)(\psi_i(p))^{-1}$. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \Psi_i^{-1}(x,e) = p \cdot g_1 &= p \cdot (g_2\psi_j(p)(\psi_i(p))^{-1}) \\ &= p \cdot g_2 \cdot (\psi_j(p)(\psi_i(p))^{-1}) \\ &= p \cdot g_2 \cdot g_{ji}(x) \\ &= \Psi_j^{-1}(x,e) \cdot g_{ji}(x) \end{aligned}$$

$s_i = s_{V_i} = \Psi_i^{-1}(x,e)$ ve $s_j = s_{V_j} = \Psi_j^{-1}(x,e)$ şeklinde tanımlandığından $s_i(x) = s_j(x)g_{ji}(x) =$ elde edilir.

Asli lif demetleri için denklik kavramı geçiş fonksiyonları cinsinden önemli bir formülasyona sahiptir. $\mathcal{B}(\mathcal{P} : P \longrightarrow X)$, X üzerinde bir asli G-lif demeti olsun ve $\{V_j\}_{j\in J}$, $\Psi_j : \mathcal{P}^{-1}(V_j) \longrightarrow V_j \times G$ trivializasyonları ile verilen, trivializasyon komşuluklarından oluşan X in bir örtüsü olsun. Ayrıca $\{V'_k\}_{k\in K}$, X in bir açık örtüsü ve her bir V'_k en az bir V_j tarafından içerilsin ($\{V'_k\}_{k\in K}$, $\{V_j\}_{j\in J}$ örtüsünün inceltilmişi olarak adlandırılır). Her bir $k \in K$ için $V_k^{'} \subseteq V_{j(k)}$ olan bir $j = j(k) \in J$ seçildikten sonra $\Psi'_k = \Psi_j \big| \mathcal{P}^{-1}(V'_k)$ olmak üzere $\Psi'_k : \mathcal{P}^{-1}(V'_k) \longrightarrow V'_k \times G$ dönüşümü tanımlansın. Bu durumda $\{V'_k, \Psi'_k\}_{k\in K}$, V'_k trivializasyon komşulukları ile $\mathcal{B}$ için bir trivializasyonlar ailesidir. Burada vurgulanmak istenen nokta, trivializasyon komşuluklarından oluşan X in bir örtüsü verildiğinde o örtünün bir inceltilmişi de trivializasyon komşuluklarının bir ailesidir.

Aynı taban uzayı X üzerinde iki asli G-lif demeti $\mathcal{B}_1(\mathcal{P}_1 : P_1 \longrightarrow X)$ ve $\mathcal{B}_2(\mathcal{P}_2 : P_2 \longrightarrow X)$ verilmiş olsun. Eğer $\{V^1_{j_1}\}_{j_1\in J_1}$ ve $\{V^2_{j_2}\}_{j_2\in J_2}$ sırasıyla $\mathcal{B}_1$ ve $\mathcal{B}_2$ için trivializasyon komşuluklarından oluşan X in örtüleri ise $\{V^1_{j_1} \cap V^2_{j_2}\}_{j_1\in J_1, j_2\in J_2}$ bu örtülerin her ikisinin de ortak bir inceltilmişidir ve öyleyse $\mathcal{B}_1$ ve $\mathcal{B}_2$ nin her ikisi için trivializasyon komşuluklarından oluşan bir örtüdür. Sonuç olarak, başlangıçta

$\mathcal{B}_1$ ve $\mathcal{B}_2$ nin aynı trivializasyon komşuluklarına sahip olduğu varsayılabilir.

Lemma 3.5 *$\mathcal{B}_1(\mathcal{P}_1 : P_1 \longrightarrow X)$ ve $\mathcal{B}_2(\mathcal{P}_2 : P_2 \longrightarrow X)$ X üzerinde iki asli G-lif demeti olsun ve (genelliği bozmaksızın) $\{V_j\}_{j\in J}$ hem $\mathcal{B}_1$ hem de $\mathcal{B}_2$ için trivializasyon komşuluklarından oluşan X in bir örtüsü olsun. $g^1_{ji}, g^2_{ji} : V_i \cap V_j \longrightarrow G$ sırasıyla $\mathcal{B}_1$ ve $\mathcal{B}_2$ için geçiş fonksiyonları olsunlar. Bu durumda $\mathcal{B}_1$ ve $\mathcal{B}_2$ nin denk olması için gerekli ve yeterli koşul her $x \in V_i \cap V_j$ için*

$$g^2_{ji}(x) = (\lambda_j(x))^{-1} g^1_{ji}(x)\lambda_i(x)$$

olacak şekilde $\lambda_j : V_j \longrightarrow G,\ j \in J$, sürekli fonksiyonların var olmasıdır.

İspat. $\mathcal{B}_1$ ve $\mathcal{B}_2$ denk olsunlar ve $\tilde{f} : P_1 \longrightarrow P_2,\ f = id_X$ dönüşümünü indirgeyen bir demet dönüşümü olsun. Sabit bir $x \in V_i \cap V_j$ elemanı ve herhangi bir $p \in \mathcal{P}_1^{-1}(x)$ için, $\tilde{f}(p) \in \mathcal{P}_2^{-1}(x)$ dir. $\Psi^1_i : \mathcal{P}_1^{-1}(V_i) \longrightarrow V_i \times G$ ve $\Psi^2_i : \mathcal{P}_2^{-1}(V_i) \longrightarrow V_i \times G$ sırasıyla $\mathcal{B}_1$ ve $\mathcal{B}_2$ için V_i üzerindeki trivializasyonlar olsun ve benzer şekilde Ψ^1_j ve Ψ^2_j de V_j üzerindeki trivializasyonlar olsun.

$$\begin{aligned}
\psi^1_i(p\cdot g)(\psi^2_i(\tilde{f}(p\cdot g)))^{-1} &= \psi^1_i(p)g(\psi^2_i(\tilde{f}(p)\cdot g))^{-1}\\
&= \psi^1_i(p)g(\psi^2_i(\tilde{f}(p))g)^{-1}\\
&= \psi^1_i(p)g(g^{-1}\psi^2_i(\tilde{f}(p)))^{-1}\\
&= \psi^1_i(p)(\psi^2_i(\tilde{f}(p)))^{-1}
\end{aligned}$$

olduğundan $\mathcal{P}_1^{-1}(x)$ deki her p için $\psi^1_i(p)(\psi^2_i(\tilde{f}(p)))^{-1},\ G$ de aynı değere sahiptir. Böylece $\mathcal{P}_1^{-1}(x)$ deki herhangi bir p noktası için $\lambda_i : V_i \longrightarrow G$

$$\lambda_i(x) = \psi^1_i(p)(\psi^2_i(\tilde{f}(p)))^{-1}$$

fonksiyonunu tanımlanabilir. Benzer şekilde $\lambda_j : V_j \longrightarrow G$ fonksiyonu da tanımlanabilir. Bu durumda,

$$(\lambda_j(x))^{-1} = \psi^2_j(\tilde{f}(p))(\psi^1_j(p))^{-1}\ .$$

$g_{ji}^1(x) = \psi_j^1(p)(\psi_i^1(p))^{-1}$ ve $g_{ji}^2(x) = \psi_j^2(p)(\psi_i^2(p))^{-1}$ olduğundan

$g_{ji}^1(x) = (\lambda_j(x))^{-1} g_{ji}^1(x)\lambda_i(x)$ elde edilir.

Tersine her $x \in V_i \cap V_j$ için $g_{ji}^2(x) = (\lambda_j(x))^{-1} g_{ji}^1(x)\lambda_i(x)$ olacak şekilde $\lambda_j : V_j \longrightarrow G,\ j \in J$, sürekli fonksiyonları var ise her bir $j \in J$ için $f_j : \mathcal{P}_1^{-1}(V_j) \longrightarrow \mathcal{P}_2^{-1}(V_j), \quad f_j(p) = (\Psi_j^2)^{-1}(x, (\lambda_j(x))^{-1}\psi_j^1(p))$ dönüşümü tanımlanarak $\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$ bir denklik inşa edilebilir. ■

Dikkat edilirse Lemma 3.5 den şöyle bir sonuç çıkarılabilir: aynı trivializasyon komşuluklarına ve aynı geçiş fonksiyonlarına ($g_{ji}^2 = g_{ji}^1$) sahip iki asli G-lif demeti denktir (her i ve j için $\lambda_j(x) = \lambda_i(x) = e$ alınır). Sırada ise, yalnızca $\{V_j\}_{j\in J}$ -ler ve G de değer alıp cocycle koşulunu sağlayan $\{g_{ji}\}_{i,j\in J}$ fonksiyonlar ailesi verildiğinde, trivializasyon komşulukları ve geçiş fonksiyonları bu verilenler olan bir asli lif demetinin inşaa edilebileceğini ifade eden son derece önemli bir teorem ispatlanacaktır.

Teorem 3.6 *X bir Hausdorff uzay,G bir topolojik grup ve $\{V_j\}_{j\in J}$, X in bir açık örtüsü olsun. $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ olan her $i, j \in J$ için bir*

$$g_{ji} : V_i \cap V_j \longrightarrow G$$

sürekli fonksiyonu var olsun ve bu fonksiyonlar $V_i \cap V_j \cap V_k \neq \emptyset$ iken her $x \in V_i \cap V_j \cap V_k$ için

$$g_{kj}(x)g_{ji}(x) = g_{ki}(x) \tag{3.12}$$

koşulunu sağlasın. Bu durumda X üzerinde, trivializasyon komşulukları V_j -ler ve karşılık gelen geçiş fonksiyonları g_{ji} -ler olan bir $\mathcal{B}$ asli G-lif demeti vardır. Dahası, $\mathcal{B}$ denklik bakımından tektir.

İspat. Öncelikle dikkat edilmesi gereken şey, eğer böyle bir demet varsa, denklik bakımından tekliğini Lemma 3.5 in garanti ettiğidir. Yani $\mathcal{B}_1$ ve $\mathcal{B}_2$ teoremin koşullarını sağlayan iki asli G-lif demeti ise $\mathcal{B}_1$ ve $\mathcal{B}_2$ denktir. Çünkü $\mathcal{B}_1$ ve $\mathcal{B}_2$

aynı $\{V_j\}_{j\in J}$ trivializasyon komşuluklarına ve aynı karşılık gelen g_{ji} geçiş fonksiyonlarına sahip olacağından, Lemma 3.5 deki λ_j ve λ_i fonksiyonları her i ve j için $\lambda_j(x) = \lambda_i(x) = e$ olarak alınabilir ve böylece her $x \in V_i \cap V_j$ için

$$g^2_{ji}(x) = (\lambda_j(x))^{-1} g^1_{ji}(x) \lambda_i(x)$$

sağlanır, bu da $\mathcal{B}_1$ ve $\mathcal{B}_2$ nin denk olduğu anlamına gelir. Ayrıca aşağıdakiler (3.12) eşitliğinden hemen elde edilebilecek sonuçlardır:

$$g_{ii}(x) = e, \quad x \in V_i \tag{3.13}$$

$$g_{ij}(x) = (g_{ji})^{-1}, \quad x \in V_i \cap V_j \tag{3.14}$$

Şimdi bir P demet uzayı ve bir $\mathcal{P} : P \longrightarrow X$ izdüşüm fonksiyonu inşaa edilmeye başlanacaktır. Öncelikle ayrık topolojiye sahip J indeks kümesi için $X \times G \times J$ uzayının ($X \times G$ nin kopyalarının ayrık birleşimini, yani, her bir $j \in J$ için $X \times G \times \{j\}$ kopyalarının birleşimini) bir T altuzayı $T = \{(x, g, j) \in X \times G \times J \ : \ x \in V_j\}$ şeklinde tanımlansın ($X \times G \times J$ nin j. seviyesinde yalnızca V_j üzerindekiler seçilerek). T, $V_j \times G \times \{j\}$ açık kümelerin bir ayrık birleşimidir ve bu sebeple $X \times G \times J$ de açıktır. T üzerinde bir $\sim$ bağıntısı şu şekilde tanımlansın:

$$(x, g, j) \sim (x', g', k) \Leftrightarrow x' = x \quad \text{ve} \quad g' = g_{kj}(x)g$$

(öyleyse, özel olarak, $x \in V_j \cap V_k$)

$\sim$ bağıntısı T üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

Her bir $(x, g, j) \in T$ noktasının denklik sınıfı ise

$$[x, g, j] = \{(x, g_{kj}(x)g, k) \ : \ k \in J \text{ ve } x \in V_j \cap V_k\}.$$

P, tüm denklik sınıfları kümesini göstersin. $\mathcal{Q} : T \longrightarrow P$,

$\mathcal{Q}(x, g, j) = [x, g, j]$ bölüm dönüşümü olsun ve P, $\mathcal{Q}$ tarafından belirlenen bölüm topolojisi ile donatılsın.

$\mathcal{P} : P \longrightarrow X$, $\mathcal{P}([x,g,j]) = x$ şeklinde tanımlansın. $[x,g,j] = [x',g',k]$ ise $\mathcal{P}([x,g,j]) = x$ ve $\mathcal{P}([x',g',k]) = x'$, ve $\sim$ bağıntısının tanımından $x' = x$, dolayısıyla $\mathcal{P}$ iyi tanımlıdır ve açıkça örtendir. $\mathcal{P}$ nin sürekli olduğunu göstermek için; W, X de bir açık küme olsun. P, $\mathcal{Q}$ tarafından belirlenen bölüm topolojisine sahip olduğundan, $\mathcal{P}^{-1}(W)$ nin P de açık olması için gerekli ve yeterli koşul $\mathcal{Q}^{-1}(\mathcal{P}^{-1}(W))$ nin T de açık olmasıdır. Bu sebeple

$$\mathcal{Q}^{-1}(\mathcal{P}^{-1}(W)) = (W \times G \times J) \cap T \tag{3.15}$$

olduğunu ispatlamak yeterli olacaktır. Ancak

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}^{-1}(\mathcal{P}^{-1}(W)) &= \{(x,g,j) \in T \ : \ \mathcal{Q}(x,g,j) \in \mathcal{P}^{-1}(W)\} \\
&= \{(x,g,j) \in T \ : \ [x,g,j] \in \mathcal{P}^{-1}(W)\} \\
&= \{(x,g,j) \in T \ : \ \mathcal{P}([x,g,j]) \in W\} \\
&= \{(x,g,j) \in T \ : \ x \in W\} \\
&= (W \times G \times J) \cap T.
\end{aligned}$$

W, X de açık olduğundan $W \times G \times J$, $X \times G \times J$ de açıktır ve T, $X \times G \times J$ de açık olduğundan $(W \times G \times J) \cap T$, $X \times G \times J$ de açıktır. Dolayısıyla $(W \times G \times J) \cap T$, T de açıktır.

Bu noktada bir $\mathcal{P} : P \longrightarrow X$ sürekli ve örten dönüşüm mevcuttur ve üzerinde gerekli demet yapısı tanımlanmalıdır ve bunun için $\mathcal{P}$ nin lifleri belirlenmekle başlanabilir. Bir $x \in X$ elemanı ve $x \in V_j$ olan bir (sabit) $j \in J$ için

$$\mathcal{P}^{-1}(x) = \{[x,g,j] \ : \ g \in G\} \quad (x \in V_j \text{ olmak üzere } j \text{ sabit}). \tag{3.16}$$

(3.16) nın ispatı için aşağıda anlatılan yol izlenebilir. Her $g \in G$ bir $(x,g,j) \in T$ elemanı verir ve bu sebeple bir $[x,g,j]$ denklik sınıfı belirler, dolayısıyla $\{[x,g,j] : g \in G\} \subseteq \mathcal{P}^{-1}(x)$ olduğu açıktır. $\mathcal{P}^{-1}(x)$ in her elemanı $x \in V_k$ olan bazı $k \in J$ ve bazı $g' \in G-$ ler için bir $[x,g',k]$ denklik sınıfıdır. Bazı $g \in G$ ve yukarıda seçildikten sonra sabitlenen j için $[x, g, j]$ denklik sınıfının bu $[x, g', k]$ denklik sınıfına eşit olduğu gösterilmelidir. Ancak,

$g = g_{jk}(x)g'$ olarak alınırsa $g' = (g_{jk}(x))^{-1}g = g_{kj}(x)g$ bu durumda, $(x, g', k) = (x, g_{kj}(x)g, k) \sim (x, g, j)$ öyleyse $[x, g', k] = [x, g, j]$, istenen elde edilir.

Sonuç olarak,

$$\mathcal{P}^{-1}(V_j) = \{[x, g, j] \ : \ x \in V_j, g \in G\}. \tag{3.17}$$

$\Psi_j : \mathcal{P}^{-1}(V_j) \longrightarrow V_j \times G$ ve $\Phi_j : V_j \times G \longrightarrow \mathcal{P}^{-1}(V_j)$ dönüşümleri, $\Psi_j([x, g, j]) = (x, g)$ ve $\Phi_j(x, g) = [x, g, j] = \mathcal{Q}(x, g, j)$ şeklinde tanımlansın. Ψ_j ve Φ_j nin birbirinin tersi dönüşümler olduğu açıktır.

Φ_j dönüşümü,

$$(x, g) \hookrightarrow (x, g, j) \xrightarrow{\mathcal{Q}} [x, g, j]$$

dönüşümlerinin bileşkesi olduğundan açıkça süreklidir. Böylece, Ψ_j ve Φ_j nin birbirinin tersi homeomorfizmler olduğunu göstermek için Φ_j nin bir açık dönüşüm olduğunu ispatlamak yeterli olacaktır. W, $V_j \times G$ de bir açık küme olsun. $\mathcal{Q}^{-1}(\Phi_j(W))$ nin T de açık olduğu gösterilmelidir. $V_k \times G \times \{k\}$ kümeleri T de açık kümelerdir ve T yi örter, öyleyse her bir $k \in J$ için

$$\mathcal{Q}^{-1}(\Phi_j(W)) \cap (V_k \times G \times \{k\}) \tag{3.18}$$

kümesinin $V_k \times G \times \{k\}$ da açık olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Öncelikle dikkat edilirse (3.18) kümesi $V_k \times G \times \{k\}$ kümesinin bir açık altkümesi olan

$$(V_k \cap V_j) \times G \times \{k\} \tag{3.19}$$

tarafından içerilir. (3.18) ve (3.19) $V_k \times G \times \{k\}$ nın birer açık altkümesidir. Gerçekten, (x, g, k) (3.18) kümesinde bir eleman olsun. Bu durumda $x \in V_k$ ve $\mathcal{Q}(x, g, k) \in \Phi_j(W)$, öyleyse $\mathcal{Q}(x, g, k) = [x, g, k] \in \Phi_j(W)$. Buradan, en az bir

$(x', g') \in W \subset V_j \times G$ için, $[x, g, k] = [x', g', j] = \Phi_j(x', g')$. Sonuç olarak $x = x' \in V_j$ böylece $x \in V_k \cap V_j$ ve bu da $(x, g, k) \in (V_k \cap V_j) \times G \times \{k\}$ anlamına gelir. $\mathcal{Q}$ nun $(V_k \cap V_j) \times G \times \{k\}$ kümesine kısıtlanmış fonksiyonu, $r(x, g, k) = (x, g_{jk}(x)g)$ olmak üzere

$$(V_k \cap V_j) \times G \times \{k\} \xrightarrow{r} V_j \times G \xrightarrow{\Phi_j} P$$

bileşkesi olarak yazılabilir, çünkü

$$\begin{aligned} \Phi_j(r(x, g, k)) &= \Phi_j(x, g_{jk}(x)g) = \mathcal{Q}(x, g_{jk}(x)g, j) \\ &= [x, g_{jk}(x)g, j] = [x, g, k] = \mathcal{Q}(x, g, k). \end{aligned}$$

$g_{jk} : V_k \cap V_j \longrightarrow G$ sürekli ve G de sağdan çarpma sürekli olduğundan, r süreklidir. Bu sebeple, $r^{-1}(W)$, $(V_k \cap V_j) \times G \times \{k\}$ da açıktır ve ayrıca $V_k \times G \times \{k\}$ kümesinde de açıktır. Φ_j bire bir ve örten bir fonksiyon olduğundan

$$(\Phi_j \circ r)^{-1}(\Phi_j(W)) = r^{-1}(\Phi_j^{-1}(\Phi_j(W))) = r^{-1}(W)$$

öyleyse $(\Phi_j \circ r)^{-1}(\Phi_j(W))$, $V_k \times G \times \{k\}$ içinde açıktır.

Dahası,

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}^{-1}(\Phi_j(W)) \cap (V_k \times G \times \{k\}) &= \mathcal{Q}^{-1}(\Phi_j(W)) \cap ((V_k \cap V_j) \times G \times \{k\}) \\ &= (\Phi_j \circ r)^{-1}(\Phi_j(W)) \end{aligned}$$

öyleyse (3.18) kümesi $V_k \times G \times \{k\}$ içinde açıktır, bu da istenilendir. Sonuç olarak, Φ_j ve Ψ_j birbirinin tersi homeomorfizmlerdir.

$\sigma : P \times G \longrightarrow P$, P deki her $p = [x, g, j]$ ve her $h \in G$ için $\sigma(p, h) = p \cdot h = [x, g, j] \cdot h = [x, gh, j]$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda σ, G nin P üzerine sağ etkisidir. Böylece $\mathcal{P}(p \cdot h) = \mathcal{P}(p)$ eşitliği sağlanır.

$\Psi_j([x, g, j]) = (x, g) = (\mathcal{P}([x, g, j]), \psi_j([x, g, j]))$, burada $\psi_j([x, g, j]) = g$ ve $\psi_j([x, g, j] \cdot h) = \psi_j([x, gh, j]) = gh = \psi_j([x, g, j])h$ öyleyse (3.3) de sağlanır, böylece

$\mathcal{P} : P \longrightarrow X$ bir asli $G-$ lif demetidir. Dahası $x \in V_i \cap V_j$ ve $p = [x, g, j], \mathcal{P}^{-1}(x)$ de herhangi bir nokta ise

$$\psi_j(p)(\psi_i(p))^{-1} = g(g_{ij}(x)g)^{-1} = (g_{ij}(x))^{-1} = g_{ji}(x)$$

öyleyse $\{(V_j, \Psi_j)\}_{j \in J}$ trivializasyonlarına ilişkin geçiş fonksiyonları tam olarak $g_{ji}-$ lerdir. ■

3.4 C^∞ Asli Lif Demetleri

G diferansiyellenebilir bir manifold ve ayrıca bir grup olsun. G deki çarpma

$$(x, y) \longrightarrow xy : G \times G \longrightarrow G$$

ve tersine götürme

$$x \longrightarrow x^{-1} : G \longrightarrow G$$

işlemleri C^∞ ise G ye bir **Lie grubu** denir (burada $G \times G$, Bölüm 1 de tanımlanan çarpım manifoldu yapısına sahiptir).

Lemma 3.7 *G diferansiyellenebilir bir manifold ve ayrıca bir grup olsun. $G \times G$ den G ye $(x, y) \longrightarrow xy$ (grupdaki) çarpma işlemi C^∞ ise G bir Lie grubudur.*

Bununla birlikte G Lie grubunun P diferansiyellenebilir manifoldu üzerine **diferansiyellenebilir sağ etkisi** şu şekilde tanımlanabilir: diferansiyellenebilir bir sağ etki aşağıdaki koşulları sağlayan C^∞ bir $\sigma : P \times G \longrightarrow P$, $\sigma(p, g) = p{\cdot}g$ dönüşümüdür

1. her $p \in P$ için $p \cdot e = p$

2. her $p \in P$ ve her $g_1, g_2 \in G$ için $p \cdot (g_1 g_2) = (p \cdot g_1) \cdot g_2$

Bu durumda, eğer X bir diferansiyellenebilir manifold ve G bir Lie grubu ise X **üzerinde yapı grubu** G **olan** $\mathbf{C}^\infty$ (**diferansiyellenebilir**) **asli lif demeti** (veya basitçe X üzerinde (**diferansiyellenebilir**) bir G-lif demeti); P bir diferansiyellenebilir manifold, $\mathcal{P} : P :\longrightarrow X$ örten C^∞ dönüşüm ve $\sigma : P \times G \longrightarrow P$, $\sigma(p, g) = p \cdot g$, G nin P üzerine diferansiyellenebilir bir sağ etkisi olmak üzere, aşağıdaki koşulların sağlandığı bir $\mathcal{B} = (P, \mathcal{P}, \sigma)$ üçlüsüdür:

1. σ, $\mathcal{P}$ nin liflerini korur, yani her $p \in P$ ve $g \in G$ için

$$\mathcal{P}(p \cdot g) = \mathcal{P}(p) \tag{3.20}$$

2. (**Yerel Triviallik**) X deki her bir x_0 için X içinde x_0 ı içeren bir V açık kümesi ve

$$\Psi(p) = (\mathcal{P}(p), \psi(p)) \tag{3.21}$$

şeklinde bir $\Psi : \mathcal{P}^{-1}(V) \longrightarrow V \times G$ difeomorfizmi vardır, burada her $p \in \mathcal{P}^{-1}(V)$ ve her $g \in G$ için $\psi : \mathcal{P}^{-1}(V) \longrightarrow G$ aşağıdaki eşitliği sağlar

$$\psi(p \cdot g) = \psi(p)g \tag{3.22}$$

Hopf demetleri, yani $(S^{2n-1}, \mathbb{CP}^{n-1}, \mathcal{P}, S^1)$ ve $(S^{4n-1}, \mathbb{HP}^{n-1}, \mathcal{P}, S^3)$ birer C^∞ asli lif demetidir: $\mathbb{CP}^{n-1}, \mathbb{HP}^{n-1}, S^{2n-1}$ ve S^{4n-1}, Bölüm 1 de tanımlanan atlasları ile birer diferansiyellenebilir manifolddur ve S^1 ve S^3 birer Lie grubudur. Öyleyse bu demetlerin birer C^∞ asli lif demeti olduğunu söyleyebilmek için geriye bu demetler için Altbölüm 3.1 de tanımlanan $\mathcal{P}$ ve σ nın birer C^∞ dönüşüm olduğu ve orada tanımlanan homeomorfizmlerin aynı zamanda birer difeomorfizm olduğunu göstermek kalıyor. Daha önceki bölümlerde olduğu gibi ispat kuaterniyonik duruma kolayca uyarlanacak şekilde yalnızca kompleks durumda yapılacaktır.

$\mathcal{P} : S^{2n-1} \longrightarrow \mathbb{CP}^{n-1}$ dönüşümünün C^∞ olması için gerekli ve yeterli koşul S^{2n-1} ve $\mathbb{CP}^{n-1}$ in atlaslarındaki her karta göre $\mathcal{P}$ nin koordinat ifadesinin C^∞ olmasıdır. $(U_S, \varphi_{_S})$ ve (V_k, φ_k) sırasıyla S^{2n-1} ve $\mathbb{CP}^{n-1}$ in atlaslarında birer kart olsun. Bu kartlara göre $\mathcal{P}$ nin koordinat ifadesi $\tilde{\mathcal{P}} = \varphi_k \circ \mathcal{P} \circ \varphi_{_S}^{-1} : \varphi_{_S}(U_S \cap \mathcal{P}^{-1}(V_k)) \longrightarrow \mathbb{C}^{n-1}$ yani $\mathbb{R}^{2n-1}$ in bir altkümesinden $\mathbb{R}^{2n-2}$ ye bir dönüşümdür. Bu durumda $x = (x^1, \ldots, x^{2n-2}, t) \in \mathbb{R}^{2n-1}$ noktası $(x^1 + x^2\mathrm{i}, \ldots, x^{2n-3} + x^{2n-2}\mathrm{i}, t) = (z^1, \ldots, z^{n-1}, t)$ noktası ile bir tutulursa

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{P}}(x) &= \varphi_k \circ \mathcal{P} \circ \varphi_{S}^{-1}(x) \\
&= \varphi_k \circ \mathcal{P}\left(\frac{2x^1}{1+|x|^2}, \ldots, \frac{2x^{2n-2}}{1+|x|^2}, \frac{2t}{1+|x|^2}, \frac{|x|^2-1}{1+|x|^2}\right) \\
&= \varphi_k \circ \mathcal{P}\left(\frac{2x^1}{1+|x|^2} + \frac{2x^2}{1+|x|^2}\mathrm{i}, \ldots, \frac{2x^{2n-3}}{1+|x|^2} + \frac{2x^{2n-2}}{1+|x|^2}\mathrm{i}, \frac{2t}{1+|x|^2} + \frac{|x|^2-1}{1+|x|^2}\mathrm{i}\right) \\
&= \varphi_k \circ \mathcal{P}\left(\frac{2z^1}{1+|x|^2}, \ldots, \frac{2z^{n-1}}{1+|x|^2}, \frac{2t}{1+|x|^2} + \frac{|x|^2-1}{1+|x|^2}\mathrm{i}\right) \\
&= \varphi_k\left(\left[\frac{2z^1}{1+|x|^2}, \ldots, \frac{2z^{n-1}}{1+|x|^2}, \frac{2t+(|x|^2-1)\mathrm{i})}{1+|x|^2}\right]\right) \\
&= \left(\frac{2z^1}{1+|x|^2}\Big(\frac{2z^k}{1+|x|^2}\Big)^{-1}, \ldots, \hat{1}, \ldots, \frac{2z^{n-1}}{1+|x|^2}\Big(\frac{2z^k}{1+|x|^2}\Big)^{-1}, \frac{2t+(|x|^2-1)\mathrm{i})}{1+|x|^2}\Big(\frac{2z^k}{1+|x|^2}\Big)^{-1}\right) \\
&= (z^1(z^k)^{-1}, \ldots, \hat{1}, \ldots, z^{n-1}(z^k)^{-1}, (2t+(|x|^2-1)\mathrm{i})(2z^k)^{-1})
\end{aligned}
$$

elde edilir ve bu dönüşüm açıkça Öklidyen uzaylar arasında bir C^∞ dönüşümdür. S^{2n-1} ve $\mathbb{CP}^{n-1}$ in diğer kartlarına göre $\mathcal{P}$ nin koordinat ifadeleri de benzer C^∞ dönüşümler olduğundan $\mathcal{P} : S^{2n-1} \longrightarrow \mathbb{CP}^{n-1}$ bir C^∞ dönüşümdür.

Yine Bölüm 1 de tanımlanan $\sigma : S^{2n-1} \times S^1 \longrightarrow S^{2n-1}$, $\sigma((z^1, \ldots, z^n), g) = (z^1, \ldots, z^n) \cdot g = (z^1 g, \ldots, z^n g)$ sağ etkinin C^∞ olduğu benzer şekilde şu şekilde elde edilir: $S^{2n-1} \times S^1$ çarpım manifoldu yapısına sahiptir ve kartları $(U_S^{2n-1} \times U_S^1, \varphi_{S}^{2n-1} \times \varphi_{S}^{1}), (U_S^{2n-1} \times U_N^1, \varphi_{S}^{2n-1} \times \varphi_{N}^{1}), (U_N^{2n-1} \times U_S^1, \varphi_{N}^{2n-1} \times \varphi_{S}^{1}), (U_N^{2n-1} \times U_N^1, \varphi_{N}^{2n-1} \times \varphi_{N}^{1})$ dir (buradaki üst indisler daha önce küreler için verilen stereografik izdüşüm kartlarının hangi küreye ait olduğunu göstermektedir) . Bu durumda $S^{2n-1} \times S^1$ in yukarıdaki kartlarından birisine, örneğin, $(U_S^{2n-1} \times U_N^1, \varphi_{S}^{2n-1} \times \varphi_{N}^{1})$ kartına ve S^{2n-1} in (U_N, φ_{N}) kartına göre σ nın koordinat ifadesi $\tilde{\sigma} = \varphi_N \circ \sigma \circ (\varphi_{S}^{2n-1} \times \varphi_{N}^{1})^{-1} = \varphi_N \circ \sigma \circ ((\varphi_{S}^{2n-1})^{-1} \times (\varphi_{N}^{1})^{-1})$ dir. Öyleyse, $(x, t) = (x^1, \ldots, x^{2n-1}, t) \in \mathbb{R}^{2n-1} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^{2n}$ için

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}(x,t) &= \varphi_N \circ \sigma \circ ((\varphi_S^{2n-1})^{-1} \times (\varphi_N^{1})^{-1})(x,t) \\
&= \varphi_N \circ \sigma \circ ((\varphi_S^{2n-1})^{-1}(x) \times (\varphi_N^{1})^{-1}(t)) \\
&= \varphi_N \circ \sigma \left(\left(\frac{2x^1}{1+|x|^2}, \ldots, \frac{2x^{2n-1}}{1+|x|^2}, \frac{|x|^2-1}{1+|x|^2} \right), \left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{1-t^2}{t^2+1} \right) \right) \\
&= \varphi_N \circ \sigma \left(\left(\frac{2x^1+2x^2\mathrm{i}}{1+|x|^2}, \ldots, \frac{2x^{2n-1}+(|x|^2-1)\mathrm{i}}{1+|x|^2} \right), \left(\frac{2t+(1-t^2)\mathrm{i}}{t^2+1} \right) \right) \\
&= \varphi_N \left(\frac{2x^1+2x^2\mathrm{i}}{1+|x|^2} \left(\frac{2t+(1-t^2)\mathrm{i}}{t^2+1} \right), \ldots, \frac{2x^{2n-1}+(|x|^2-1)\mathrm{i}}{1+|x|^2} \left(\frac{2t+(1-t^2)\mathrm{i}}{t^2+1} \right) \right)
\end{aligned}$$

bu son eşitlikte $(x^1, \ldots, x^{2n-1}, t) \to \left(\frac{2x^1+2x^2\mathrm{i}}{1+|x|^2} \left(\frac{2t+(1-t^2)\mathrm{i}}{t^2+1} \right), \ldots, \frac{2x^{2n-1}+(|x|^2-1)\mathrm{i}}{1+|x|^2} \left(\frac{2t+(1-t^2)\mathrm{i}}{t^2+1} \right) \right)$ dönüşümü $\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$, C^∞ bir dönüşümdür, dolayısıyla C^∞ bir dönüşüm olan φ_N ile bileşkesi de C^∞ dur.

Son olarak, $\Psi_k : \mathcal{P}^{-1}(V_k) \longrightarrow V_k \times S^1$

$$\Psi_k(p) = \Psi_k(z^1, \ldots, z^n) = ([p], |z^k|^{-1} z^k) = (\mathcal{P}(p), |z^k|^{-1} z^k)$$

ve $\Psi_k^{-1} : V_k \times S^1 \longrightarrow \mathcal{P}^{-1}(V_k)$, $\quad [p] \in V_k$, herhangi bir $(z^1, \ldots, z^n) \in \mathcal{P}^{-1}([p])$ ve $g \in S^1$ için

$$\Psi_k^{-1}([p], g) = (z^1 (z^k)^{-1} |z^k| g, \ldots, z^n (z^k)^{-1} |z^k| g)$$

şeklinde tanımlı Ψ_k ve Ψ_k^{-1} dönüşümleri C^∞ dur. Bu iddiayı ispatlayabilmek için öncelikle $\mathcal{P}^{-1}(V_k)$ nın S^{2n-1} in bir açık altmanifoldu olduğuna ve V_k nın $\mathbb{CP}^{n-1}$ in bir açık altmanifoldu olduğuna dikkat edilmelidir, yani, Ψ_k ve Ψ_k^{-1} in bu açık altmanifold kartlarına göre koordinat ifadelerinin C^∞ olduğu ispatlanmalıdır. Bu durumda $\mathcal{P}^{-1}(V_k)$ nın $(U_S \cap \mathcal{P}^{-1}(V_k), \varphi_S^{2n-1} | U_S \cap \mathcal{P}^{-1}(V_k))$ kartına ve $V_k \times S^1$ in $(V_k \times U_N, \varphi_k \times \varphi_N^1)$ kartına göre Ψ_k nın koordinat ifadesi

$$\tilde{\Psi}_k = \varphi_k \times \varphi_N^1 \circ \Psi_k \circ (\varphi_S^{2n-1} | U_S \cap \mathcal{P}^{-1}(V_k))^{-1}$$

fonksiyonudur ve $x = (x^1, \ldots, x^{2n-1}) \in \mathbb{R}^{2n-1}$ için

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Psi}_k(x) &= \varphi_k \times \varphi^1_{_N} \circ \Psi_k \circ (\varphi^{2n-1}_{_S}|U_S \cap \mathcal{P}^{-1}(V_k))^{-1}(x) \\
&= \varphi_k \times \varphi^1_{_N} \circ \Psi_k \left(\frac{2x^1}{1+|x|^2}, \ldots, \frac{2x^{2n-1}}{1+|x|^2}, \frac{|x|^2-1}{1+|x|^2} \right) \\
&= \varphi_k \times \varphi^1_{_N} \circ \Psi_k \left(\frac{2x^1+2x^2\mathrm{i}}{1+|x|^2}, \ldots, \frac{2x^{2n-1}+(|x|^2-1)\mathrm{i}}{1+|x|^2} \right) \\
&= \varphi_k \times \varphi^1_{_N} \left(\left[\frac{2x^1+2x^2\mathrm{i}}{1+|x|^2}, \ldots, \frac{2x^{2n-1}+(|x|^2-1)\mathrm{i}}{1+|x|^2} \right], \left| \frac{2x^{k-1}+2x^k\mathrm{i}}{1+|x|^2} \right|^{-1} \frac{2x^{k-1}+2x^k\mathrm{i}}{1+|x|^2} \right) \\
&= \left(\varphi_k \left(\left[\frac{2x^1+2x^2\mathrm{i}}{1+|x|^2}, \ldots, \frac{2x^{2n-1}+(|x|^2-1)\mathrm{i}}{1+|x|^2} \right] \right), \varphi^1_{_N} \left(\left| \frac{2x^{k-1}+2x^k\mathrm{i}}{1+|x|^2} \right|^{-1} \frac{2x^{k-1}+2x^k\mathrm{i}}{1+|x|^2} \right) \right) \\
&= \left(\frac{2x^1+2x^2\mathrm{i}}{1+|x|^2} \left(\frac{2x^{k-1}+2x^k\mathrm{i}}{1+|x|^2} \right)^{-1}, \ldots, \hat{1}, \ldots, \frac{2x^{2n-1}+(|x|^2-1)\mathrm{i}}{1+|x|^2} \left(\frac{2x^{k-1}+2x^k\mathrm{i}}{1+|x|^2} \right)^{-1}, \right. \\
&\qquad \left. \varphi^1_{_N} \left(\left| \frac{2x^{k-1}+2x^k\mathrm{i}}{1+|x|^2} \right|^{-1} \frac{2x^{k-1}+2x^k\mathrm{i}}{1+|x|^2} \right) \right)
\end{aligned}
$$

yine bu son eşitlikte

$$
\begin{aligned}
(x^1, \ldots, x^{2n-1}) \to \Big(&(2x^1+2x^2\mathrm{i})(2x^{k-1}+2x^k\mathrm{i})^{-1}, \ldots, \hat{1}, \ldots, \\
&(2x^{2n-1}+(|x|^2-1)\mathrm{i})(2x^{k-1}+2x^k\mathrm{i})^{-1} \Big)
\end{aligned}
$$

ve $(x^1, \ldots, x^{2n-1}) \to \left(\left| \frac{2x^{k-1}+2x^k\mathrm{i}}{1+|x|^2} \right|^{-1} \frac{2x^{k-1}+2x^k\mathrm{i}}{1+|x|^2} \right)$ dönüşümleri sırası ile $\mathbb{R}^{2n-1} \to \mathbb{C}^{n-1} = \mathbb{R}^{2n-2}$ ve $\mathbb{R}^{2n-1} \to \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, C^∞ dönüşümlerdir ve $\varphi^1_{_N}$ C^∞ olduğundan yukarıdaki eşitlik dizisindeki son dönüşüm C^∞, yani Ψ_k C^∞ dur. Ψ_k^{-1} in aynı kartlara göre koordinat ifadesi $\tilde{\Psi}_k^{-1} = (\varphi_k \times \varphi^1_{_N} \circ \Psi_k \circ (\varphi^{2n-1}_{_S}|U_S \cap \mathcal{P}^{-1}(V_k))^{-1})^{-1} = (\varphi^{2n-1}_{_S}|U_S \cap \mathcal{P}^{-1}(V_k)) \circ \Psi_k^{-1} \circ (\varphi_k \times \varphi^1_{_N})^{-1}$ fonksiyonudur ve bu fonksiyon da C^∞ dur, ayrıca Ψ_k ve Ψ_k^{-1} in diğer kartlara göre koordinat ifadeleri de yukarıdaki fonksiyonlara benzer C^∞ fonksiyonlardır. Sonuç olarak $(S^{2n-1}, \mathbb{CP}^{n-1}, \mathcal{P}, S^1)$ ve $(S^{4n-1}, \mathbb{HP}^{n-1}, \mathcal{P}, S^3)$ birer C^∞ asli lif demetidir. Bu demetlerin Altbölüm 3.1 de tanımlanan g_{ji} geçiş fonksiyonları ve $s_k = s_{V_k}$ kesitleri de C^∞ dönüşümlerdir (bkz. [3]).

4 HOPF DEMETLERİ ÜZERİNDE KONNEKSİYONLAR

G bir Lie grubu ve $\mathcal{G}$ onun Lie Cebiri olmak üzere $\mathcal{B} = (P, \mathcal{P}, \sigma)$, X üzerinde C^∞ bir asli G-lif demeti olsun. $\mathcal{B}$ üzerinde (veya P üzerinde) bir **konneksiyon formu** aşağıdaki koşulları sağlayan $\mathcal{G}$-değerli diferansiyellenebilir bir $\boldsymbol{\omega}$ 1-formudur:

1. her $g \in G$ için $(\sigma_g)^*\boldsymbol{\omega} = ad_{g^{-1}} \circ \boldsymbol{\omega}$, yani her $g \in G$, her $p \in P$ ve $\mathbf{v} \in T_{p \cdot g^{-1}}(P)$ için $\boldsymbol{\omega}_p((\sigma_g)_{*p \cdot g^{-1}}(\mathbf{v})) = g^{-1}\boldsymbol{\omega}_{p \cdot g^{-1}}(\mathbf{v})g$

2. her $A \in \mathcal{G}$ için $\boldsymbol{\omega}(A^\#) = A$, yani her $A \in \mathcal{G}$ ve $p \in P$ için $\boldsymbol{\omega}_p(A^\#(p)) = A$.

Örnek 4.1 *S^7 üzerindeki* $\mathrm{Im}\mathbb{H}$*-değerli 1-form* $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{Im}(\bar{q}^1 dq^1 + \bar{q}^2 dq^2)$, $Sp(1) \to S^7 \to S^4$ *kuaterniyonik Hopf demeti üzerinde bir konneksiyon formudur.*

Örnek 4.1 de verilen 1-formun bir konneksiyon formu olduğunun gösterilmesi ve diğer hesaplamalar için tablodaki ihtiyaç duyulan tüm gösterimler şu şekildedir: $S^7 = \{(q^1, q^2) \in \mathbb{H}^2 \,:\, |q^1|^2 + |q^2|^2 = 1\}$ ve $\iota : S^7 \longrightarrow \mathbb{H}^2$ gömme dönüşümüdür. $\sigma((q^1, q^2), g) = (q^1, q^2) \cdot g = (q^1 g, q^2 g)$, $Sp(1)$ in S^7 üzerine bilinen sağ etkisidir. $Sp(1)$ in Lie cebiri $\mathcal{SP}(1)$ ile $\mathrm{Im}\mathbb{H}$ bir tutulacaktır ve $\mathcal{P}(q^1, q^2) = [q^1, q^2] \in \mathbb{HP}^1 \cong S^4$ olmak üzere kuaterniyonik Hopf demeti ile de $Sp(1) \longrightarrow S^7 \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathbb{HP}^1$ bir tutulacaktır. Bu demet için $(V_k, \Psi_k), k = 1, 2$, standart trivializasyonları şu şekildedir: $V_k = \{x = [q^1, q^2] \in \mathbb{HP}^1 \,:\, q^k \neq 0\}$ ve $\Psi_k : \mathcal{P}^{-1}(V_k) \longrightarrow V_k \times Sp(1)$, $\Psi_k(p) = (\mathcal{P}(p), \psi(p))$, burada $\psi_k(p) = \psi_k(q^1, q^2) = |q^k|^{-1}q^k$. Tersleri ise $\Phi_k = \Psi_k^{-1} : V_k \times Sp(1) \longrightarrow \mathcal{P}^{-1}(V_k)$,
$\Phi_1([q^1, q^2], y) = (|q^1|y, q^2(q^1)^{-1}|q^1|y)$ ve $\Phi_2([q^1, q^2], y) = (q^1(q^2)^{-1}|q^2|y, |q^2|y)$ ile verilir, bu durumda geçiş fonksiyonları $g_{12}, g_{21} : V_1 \cap V_2 \longrightarrow Sp(1)$

$$g_{12}(x) = g_{12}([q^1, q^2]) = |q^1|^{-1}q^1(q^2)^{-1}|q^2| \quad \text{ve} \quad g_{21}(x) = (g_{12}(x))^{-1}$$

şeklindedir. Bu trivializasyonlarla ilişkili $s_k : V_k \longrightarrow S^7$ doğal yerel kesitler $s_1(x) = s_1([q^1, q^2]) = (|q^1|, q^2(q^1)^{-1}|q^1|)$ ve $s_2(x) = s_2([q^1, q^2]) = (q^1(q^2)^{-1}|q^2|, |q^2|)$ şeklindedir. Elbette, V_1 ve V_2 ayrıca $\mathbb{HP}^1$ in standart koordinat komşuluklarıdır. Karşılık gelen $\varphi_k : V_k \longrightarrow \mathbb{H} = \mathbb{R}^4$ difeomorfizmleri $\varphi_1([q^1, q^2]) = q^2(q^1)^{-1}$ ve $\varphi_2([q^1, q^2]) = q^1(q^2)^{-1}$ dir. Tersleri ise $\varphi_1^{-1}(q) = [1, q]$ ve $\varphi_2^{-1}(q) = [q, 1]$ dir ve bu durumda örtüşme fonksiyonları her $q \in \mathbb{H} - \{0\}$ için $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(q) = q^{-1} = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(q)$ şeklindedir. Ancak, $(1, q)$ ve $(q, 1)$ genel olarak S^7 de olmadığından, φ_1^{-1} ve φ_2^{-1} in aşağıdaki denk tanımlanışlarını kullanmak buradaki amaç için daha uygun olacaktır :

$$\begin{aligned} \varphi_1^{-1}(q) &= \left[(1+|q|^2)^{-\frac{1}{2}}, q(1+|q|^2)^{-\frac{1}{2}}\right] \\ \varphi_2^{-1}(q) &= \left[q(1+|q|^2)^{-\frac{1}{2}}, (1+|q|^2)^{-\frac{1}{2}}\right] \end{aligned} \tag{4.1}$$

Bu durumda her $q \in \mathbb{H} - \{0\}$ için,

$$\begin{aligned} (s_1 \circ \varphi_1^{-1})(q) &= s_1\left(\left[(1+|q|^2)^{-\frac{1}{2}}, q(1+|q|^2)^{-\frac{1}{2}}\right]\right) \\ &= \left(\left|(1+|q|^2)^{-\frac{1}{2}}\right|, (q(1+|q|^2)^{-\frac{1}{2}})((1+|q|^2)^{-\frac{1}{2}})^{-1}\left|(1+|q|^2)^{-\frac{1}{2}}\right|\right) \\ &= \left((1+|q|^2)^{-\frac{1}{2}}, q(1+|q|^2)^{-\frac{1}{2}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+|q|^2}}(1, q) \end{aligned}$$

benzer şekilde

$$(s_2 \circ \varphi_2^{-1})(q) = \frac{1}{\sqrt{1+|q|^2}}(q, 1).$$

$p = (p^1, p^2) \in S^7 \subseteq \mathbb{H}^2$ ve $\mathbf{v} = (\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2) \in T_p(S^7) \subseteq T_p(\mathbb{H}^2) = T_{p^1}(\mathbb{H}) \times T_{p^2}(\mathbb{H})$ şeklinde yazılarak, $\boldsymbol{\omega}_p(\mathbf{v}) = \mathrm{Im}(\bar{q}^1 dq^1 + \bar{q}^2 dq^2)(p^1, p^2)(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2) = \mathrm{Im}(\bar{p}^1 dq^1(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2) + \bar{p}^2 dq^2(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2))$ elde edilir.

Doğal (canonical) izomorfizm altında $\mathbf{v}^i \in T_{p^i}(\mathbb{H})$ ye karşılık gelen $\mathbb{H}$ nin elemanı v^i olmak üzere ([**?**]], Bölüm 4.4) $dq^i(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2) = v^i$ dir, çünkü
$\mathbf{v} = (\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2) \in T_p(S^7)$ tanjant vektörü $\mathbf{v} = \alpha'(0)$ şeklinde tanımlanabilir, burada $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{H} \times \mathbb{H}, \quad \alpha(t) = p + tv = (p^1, p^2) + t(v^1, v^2) = (p^1 + tv^1, p^2 + tv^2)$ eğrisidir.

O halde $q^i : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}, \quad q^i(p^1, p^2) = p^i$ olmak üzere

$$\begin{aligned} dq^i(\mathbf{v}) &= dq^i(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2) = dq^i(\alpha'(0)) = \alpha'(0)(q^i) \\ &= \frac{d}{dt}((q^i \circ \alpha)(t))\Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(q^i(p^1 + tv^1, p^2 + tv^2))\Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(p^i + tv^i)\Big|_{t=0} = v^i \end{aligned}$$

Bu durumda, bir $\mathbf{v} \in T_p(S^7)$ ile $(v^1, v^2) \in \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ çifti bir tutulabilir, böylece

$$\omega_p(\mathbf{v}) = \omega_{(p^1,p^2)}(v^1, v^2) = \mathrm{Im}(\bar{p}^1 v^1 + \bar{p}^2 v^2) \tag{4.2}$$

elde edilir.

Artık bu 1-formun konneksiyon formu koşullarından birincisini sağladığını, yani her $g \in Sp(1),\ p \in S^7$ ve $\mathbf{v} \in T_{p \cdot g^{-1}}(S^7)$ için,

$$\omega_p((\sigma_g)_{*p\cdot g^{-1}}(\mathbf{v})) = ad_{g^{-1}}(\omega_{p\cdot g^{-1}}(\mathbf{v})) \tag{4.3}$$

olduğunu ispatlamak daha kolaydır. Bunun için her iki tarafın açıkça hesabı şu şekildedir :

$\mathbf{v} = (v^1, v^2) \in T_{p\cdot g^{-1}}(S^7)$ için, $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow S^7,\ \alpha(0) = p \cdot g^{-1},\ \alpha'(0) = \mathbf{v}$ olmak üzere

$$(\sigma_g)_{*p\cdot g^{-1}}(\mathbf{v}) = (\sigma_g)_{*p\cdot g^{-1}}(\alpha'(0)) = (\sigma_g \circ \alpha)'(0) \tag{4.4}$$

$\sigma_g \circ \alpha : \mathbb{R} \longrightarrow S^7, \quad (\sigma_g \circ \alpha)(t) = \sigma_g(\alpha(t)) = \alpha(t) \cdot g = (p \cdot g^{-1} + tv) \cdot g = (p^1 g^{-1} + tv^1, p^2 g^{-1} + tv^2) \cdot g = (p^1 + tv^1 g, p^2 + tv^2 g)$, buradan

$$(\sigma_g \circ \alpha)'(0) = \frac{d}{dt}(p^1 + tv^1 g, p^2 + tv^2 g)\Big|_{t=0} = (v^1 g, v^2 g).$$

Böylece, $\boldsymbol{\omega}_p((\sigma_g)_{*p\cdot g^{-1}}(\mathbf{v})) = \mathrm{Im}(\bar{p}^1 v^1 g + \bar{p}^2 v^2 g)$. Diğer taraftan, $\boldsymbol{\omega}_{p\cdot g^{-1}}(\mathbf{v}) = \mathrm{Im}((\overline{p^1 g^{-1}})v^1 + (\overline{p^2 g^{-1}})v^2) = \mathrm{Im}(\overline{g^{-1}}\bar{p}^1 v^1 + \overline{g^{-1}}\bar{p}^2 v^2) = \mathrm{Im}(g\bar{p}^1 v^1 + g\bar{p}^2 v^2)$, çünkü $g \in Sp(1)$ olması $\overline{g^{-1}} = g$ olmasını gerektirir. O halde,

$$ad_{g^{-1}}(\boldsymbol{\omega}_{p\cdot g^{-1}}(\mathbf{v})) = g^{-1}\boldsymbol{\omega}_{p\cdot g^{-1}}(\mathbf{v})g = g^{-1}\mathrm{Im}(g\bar{p}^1 v^1 + g\bar{p}^2 v^2)g. \tag{4.5}$$

Herhangi bir $g \in Sp(1)$ ve $h \in \mathbb{H}$ için

$$g^{-1}(\mathrm{Im}h)g = g^{-1}\left(\tfrac{h-\bar{h}}{2}\right)g = \tfrac{g^{-1}hg-g^{-1}\bar{h}g}{2} = \tfrac{\bar{g}hg-\bar{g}\bar{h}g}{2} = \tfrac{\bar{g}hg-\overline{\bar{g}hg}}{2} = \mathrm{Im}(\bar{g}hg)$$
$$= \mathrm{Im}(g^{-1}hg) \quad \text{olduğundan}$$

$ad_{g^{-1}}(\boldsymbol{\omega}_{p\cdot g^{-1}}(\mathbf{v})) = \mathrm{Im}(g^{-1}(g\bar{p}^1v^1+g\bar{p}^2v^2)g) = \mathrm{Im}(\bar{p}^1v^1g+\bar{p}^2v^2g) = \omega_p((\sigma_g)_{*p\cdot g^{-1}}(\mathbf{v}))$,

istenilen elde edilir.

İkinci olarak, $\boldsymbol{\omega}$, temel vektör alanları üzerine trivial olarak etki eder. Daha açık olarak, A, $\mathcal{SP}(1) = \mathrm{Im}\mathbb{H}$ nın herhangi bir elemanı olsun ve A (ve $Sp(1)$ in S^7 üzerine standart etkisi σ) nın belirlediği S^7 üzerindeki temel vektör alanı $p \in S^7$ için

$$A^{\#}(p) = \frac{d}{dt}(p \cdot \exp(tA))\Big|_{t=0} \tag{4.6}$$

şeklinde tanımlı $A^{\#}$ olsun. Bu durumda $\boldsymbol{\omega}(A^{\#})$, her bir $p \in S^7$ için $\boldsymbol{\omega}(A^{\#})(p) = \boldsymbol{\omega}_p(A^{\#}(p))$ şeklinde tanımlı S^7 üzerinde $\mathrm{Im}\mathbb{H}-$değerli bir fonksiyondur. İddia: bu fonksiyonunun aslında heryerde A değerini alan sabit bir fonksiyon olduğu, yani, her bir $p \in S^7$ için,

$$\boldsymbol{\omega}_p(A^{\#}(p)) = A \tag{4.7}$$

olduğudur. $A^{\#}(p)$, $\alpha_p(t) = p \cdot \exp(tA) = (p^1\exp(tA), p^2\exp(tA))$ eğrisinin $t = 0$ daki hız vektörüdür ve bu tam olarak (p^1A, p^2A) e eşittir ([3, Lemma 4.7.5 (4)]). O halde, $\boldsymbol{\omega}_p(A^{\#}(p)) = \mathrm{Im}(\bar{p}^1p^1A + \bar{p}^2p^2A) = \mathrm{Im}((|p^1|^2 + |p^2|^2)A) = \mathrm{Im}A = A$, çünkü $p \in S^7$ ve $A \in \mathrm{Im}\mathbb{H}$.

Sonuç olarak, $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{Im}(\bar{q}^1dq^1 + \bar{q}^2dq^2)$ 1-formu

$$\begin{array}{ccc} Sp(1) \longrightarrow S^7 & & S^3 \longrightarrow S^7 \\ \quad\quad\quad\;\; \downarrow & = & \quad\quad\; \downarrow \\ \quad\quad\quad\;\; \mathbb{HP}^1 & & \quad\quad\; S^4 \end{array}$$

Hopf demeti üzerinde bir konneksiyon formudur.

Kuaterniyonik durumda olduğu gibi kompleks Hopf demeti üzerinde bir konneksiyon formu örneği şu şekildedir:

Örnek 4.2 *S^3 üzerindeki* Im$\mathbb{C}$*-değerli* $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{i}\mathrm{Im}(\bar{z}^1 dz^1 + \bar{z}^2 dz^2)$ *1-formu* $U(1) \to S^3 \to S^2$ *kompleks Hopf demeti üzerinde bir konneksiyon formudur.*

Açıkçası kuaterniyonik durumdaki bazı tespitlerden sonra bu 1-formun bir konneksiyon formu olduğunu göstermek kolaydır.

$S^3 = \{(z^1, z^2) \in \mathbb{C}^2 \ : \ |z^1|^2 + |z^2|^2 = 1\}$. $U(1)$ in S^3 üzerinde sağ etkisi $\sigma((z^1, z^2), g) = (z^1, z^2) \cdot g = (z^1 g, z^2 g)$ şeklindedir. $U(1)$ in Lie cebiri $\mathcal{U}(1)$ ile Im$\mathbb{C}$ bir tutulacaktır. $p = (p^1, p^2) \in S^3$ ve $\mathbf{v} = (\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2) \in T_p(S^3) \subseteq T_p(\mathbb{C}^2) = T_{p^1}(\mathbb{C}) \times T_{p^2}(\mathbb{C})$ şeklinde yazılarak $T_{p^i}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$ izomorfizmi ile $\mathbf{v} = (\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2)$ tanjant vektörü bir $(v^1, v^2) \in \mathbb{C}^2$ çiftiyle bir tutulabilir. Bu durumda $dz^i(\mathbf{v}) = v^i$ elde edilir. Yine kuaterniyonik durumda olduğu gibi eğer $g \in U(1)$ ve $\mathbf{v} = (v^1, v^2) \in T_{p \cdot g^{-1}}(S^3)$ ise $(\sigma_g)_{*p \cdot g^{-1}}(\mathbf{v}) = (v^1 g, v^2 g)$ dir. Her bir $A = \alpha \mathbf{i} \in \mathcal{U}(1) = \mathrm{Im}\mathbb{C}$ için S^3 üzerinde A nın belirlediği temel vektör alanı $A^{\#}$ in $p \in S^3$ noktasındaki değeri $A^{\#}(p) = \frac{d}{dt}(p \cdot \exp(tA))\big|_{t=0} = (p^1 A, p^2 A)$ şeklindedir ([3, Lemma 4.7.5(4)]). O halde

1. her $g \in U(1)$, her $p = (p^1, p^2) \in S^3$ ve $\mathbf{v} \in T_{p \cdot g^{-1}}(S^3)$ için
   $\boldsymbol{\eta}_p((\sigma_g)_{*p \cdot g^{-1}}(\mathbf{v})) = \mathbf{i}\mathrm{Im}(\bar{p}^1 v^1 g + \bar{p}^2 v^2 g)$.
   Diğer taraftan $g^{-1} \boldsymbol{\eta}_{p \cdot g^{-1}}(\mathbf{v}) g = \boldsymbol{\eta}_{p \cdot g^{-1}}(\mathbf{v}) = \mathbf{i}\mathrm{Im}((\overline{p^1 g^{-1}}) v^1 + (\overline{p^2 g^{-1}}) v^2) = \mathbf{i}\mathrm{Im}(\bar{p}^1 g v^1 + \bar{p}^2 g v^2) = \mathbf{i}\mathrm{Im}(\bar{p}^1 v^1 g + \bar{p}^2 v^2 g)$, çünkü $g \in U(1)$ ve $\mathbb{C}$ değişmelidir.

2. her $A \in \mathrm{Im}\mathbb{C}$ ve $p \in S^3$ için $\boldsymbol{\eta}_p(A^{\#}(p)) = \mathbf{i}\mathrm{Im}(\bar{p}^1 p^1 A + \bar{p}^2 p^2 A) = \mathbf{i}\mathrm{Im}((|p^1|^2 + |p^2|^2) A) = \mathbf{i}\mathrm{Im}(A) = \mathbf{i}\mathrm{Im}(\alpha \mathbf{i}) = \mathbf{i}\alpha = A$.

Sonuç olarak, $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{i}\mathrm{Im}(\bar{z}^1 dz^1 + \bar{z}^2 dz^2)$ 1-formu

$$\begin{array}{ccc} U(1) \longrightarrow S^3 & & S^1 \longrightarrow S^3 \\ \qquad\qquad\ \downarrow & = & \qquad\quad \downarrow \\ \qquad\qquad\ \mathbb{CP}^1 & & \qquad\quad S^2 \end{array}$$

Hopf demeti üzerinde bir konneksiyon formudur.

$Sp(1) \to S^7 \to \mathbb{HP}^1$ Hopf demeti üzerindeki Im$\mathbb{H}$-değerli $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{Im}(\bar{q}^1 dq^1 + \bar{q}^2 dq^2)$ konneksiyon formu $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{Im}(\bar{q}^1 dq^1 - d\bar{q}^2 q^2)$ şeklinde de ifade edilebilir. Kuaterniyonik Hopf demeti üzerinde $\boldsymbol{\omega}$ doğal konneksiyonu dışında başka bir örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek 4.3 *$n, m > 1$ pozitif tamsayılar olmak üzere*

$$\boldsymbol{\omega} = \mathrm{Im}\left(\frac{|q^1|^n\ \bar{q}^1 dq^1 + |q^2|^m\ \bar{q}^2 dq^2}{|q^1|^{n+2} + |q^2|^{m+2}}\right) \tag{4.8}$$

Gerçekten,

1. her $g \in Sp(1)$, her $p = (p^1, p^2) \in S^7$ ve $\mathbf{v} = (v^1, v^2) \in T_{p\cdot g^{-1}}(S^7)$ için

$$\boldsymbol{\omega}_p((\sigma_g)_{*p\cdot g^{-1}}(\mathbf{v})) = \mathrm{Im}\left(\frac{|p^1|^n\ \bar{p}^1 v^1 g + |p^2|^m\ \bar{p}^2 v^2 g}{|p^1|^{n+2} + |p^2|^{m+2}}\right).$$

   Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
g^{-1}\boldsymbol{\omega}_{p\cdot g^{-1}}(\mathbf{v})g &= g^{-1}\mathrm{Im}\left(\frac{|p^1 g^{-1}|^n\ \overline{p^1 g^{-1}}v^1 + |p^2 g^{-1}|^m\ \overline{p^2 g^{-1}}v^2}{|p^1 g^{-1}|^{n+2} + |p^2 g^{-1}|^{m+2}}\right) g \\
&= g^{-1}\mathrm{Im}\left(\frac{|p^1\bar{g}|^n\ \overline{g^{-1}}\bar{p}^1 v^1 + |p^2\bar{g}|^m\ \overline{g^{-1}}\bar{p}^2 v^2}{|p^1\bar{g}|^{n+2} + |p^2\bar{g}|^{m+2}}\right) g \\
&= g^{-1}\mathrm{Im}\left(\frac{|p^1|^n|\bar{g}|^n\ g\bar{p}^1 v^1 + |p^2|^m|\bar{g}|^m\ g\bar{p}^2 v^2}{|p^1|^{n+2}|\bar{g}|^{n+2} + |p^2|^{m+2}|\bar{g}|^{m+2}}\right) g \\
&= g^{-1}\mathrm{Im}\left(\frac{|p^1|^n g\bar{p}^1 v^1 + |p^2|^m g\bar{p}^2 v^2}{|p^1|^{n+2} + |p^2|^{m+2}}\right) g \\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{|p^1|^n\bar{p}^1 v^1 g + |p^2|^m\bar{p}^2 v^2 g}{|p^1|^{n+2} + |p^2|^{m+2}}\right)
\end{aligned}$$

2. her $A \in \mathrm{Im}\mathbb{H}$ ve $p = (p^1, p^2) \in S^7$ için

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}_p(A^{\#}(p)) &= \mathrm{Im}\left(\frac{|p^1|^n\ \bar{p}^1(p^1 A) + |p^2|^m\ \bar{p}^2(p^2 A)}{|p^1|^{n+2} + |p^2|^{m+2}}\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{|p^1|^n\ |p^1|^2 A + |p^2|^m |p^2|^2 A}{|p^1|^{n+2} + |p^2|^{m+2}}\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{(|p^1|^{n+2} + |p^2|^{m+2})A}{|p^1|^{n+2} + |p^2|^{m+2}}\right) \\
&= \mathrm{Im}(A) = A.
\end{aligned}$$

Benzer şekilde $\mathrm{Im}\mathbb{C}$-değerli $\mathbf{i}\mathrm{Im}\left(\frac{|z^1|^n\ \bar{z}^1 dz^1 + |z^2|^m\ \bar{z}^2 dz^2}{|z^1|^{n+2} + |z^2|^{m+2}}\right)$ 1-formu $U(1) \to S^3 \to \mathbb{CP}^1$ kompleks Hopf demeti üzerinde bir konneksiyon formudur.

Not : $\mathcal{B} = (P, \mathcal{P}, \sigma)$, X üzerinde bir C^∞ asli G-lif demeti ve $\boldsymbol{\omega}$ ve $\boldsymbol{\eta}$ (G nin Lie cebiri $\mathcal{G}$ de değer alan) iki konneksiyon formu ise $\boldsymbol{\omega} \pm \boldsymbol{\eta}$ bir konneksiyon formu olmayabilir.(bkz. [9]) $\boldsymbol{\omega} \pm \boldsymbol{\eta}$, konneksiyon formu koşullarından birincisini sağlamasına rağmen ikincisini sağlamayabilir:

1. her $g \in G,\ p \in P$ ve $\mathbf{v} \in T_{p \cdot g^{-1}}(P)$ için

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\omega} \pm \boldsymbol{\eta})_p((\sigma_g)_{*p\cdot g^{-1}}(\mathbf{v})) &= \boldsymbol{\omega}_p((\sigma_g)_{*p\cdot g^{-1}}(\mathbf{v})) \pm \boldsymbol{\eta}_p((\sigma_g)_{*p\cdot g^{-1}}(\mathbf{v})) \\
&= g^{-1}\boldsymbol{\omega}_{p\cdot g^{-1}}(\mathbf{v})g \pm g^{-1}\boldsymbol{\eta}_{p\cdot g^{-1}}(\mathbf{v})g \\
&= g^{-1}(\boldsymbol{\omega}_{p\cdot g^{-1}}(\mathbf{v}) \pm \boldsymbol{\eta}_{p\cdot g^{-1}}(\mathbf{v}))g \\
&= g^{-1}((\boldsymbol{\omega} \pm \boldsymbol{\eta})_{p\cdot g^{-1}}(\mathbf{v}))g
\end{aligned}$$

2. her $A \in \mathcal{G}$ ve $p \in P$ için,

   $(\boldsymbol{\omega} \pm \boldsymbol{\eta})_p(A^{\#}(p)) = \boldsymbol{\omega}_p(A^{\#}(p)) \pm \boldsymbol{\eta}_p(A^{\#}(p)) = A \pm A = \{0 \text{ veya } 2A\}.$

O halde buradan konneksiyonlar uzayının bir vektör uzayı olamayacağı söylenebilir, fakat konneksiyon formlarının konveks toplamı yine bir konneksiyon formudur:
$\lambda \in \mathbb{R}$ için

1.

$$\begin{aligned}
(\lambda\boldsymbol{\omega} + (1-\lambda)\boldsymbol{\eta})_p((\sigma_g)_{*p\cdot g^{-1}}(\mathbf{v})) &= \lambda\boldsymbol{\omega}_p((\sigma_g)_{*p\cdot g^{-1}}(\mathbf{v})) + (1-\lambda)\boldsymbol{\eta}_p((\sigma_g)_{*p\cdot g^{-1}}(\mathbf{v})) \\
&= \lambda(g^{-1}\boldsymbol{\omega}_{p\cdot g^{-1}}(\mathbf{v})g) + (1-\lambda)(g^{-1}\boldsymbol{\eta}_{p\cdot g^{-1}}(\mathbf{v})g) \\
&= g^{-1}(\lambda\boldsymbol{\omega}_{p\cdot g^{-1}}(\mathbf{v}))g + g^{-1}((1-\lambda)\boldsymbol{\eta}_{p\cdot g^{-1}}(\mathbf{v}))g \\
&= g^{-1}(\lambda\boldsymbol{\omega}_{p\cdot g^{-1}}(\mathbf{v}) + (1-\lambda)\boldsymbol{\eta}_{p\cdot g^{-1}}(\mathbf{v}))g \\
&= g^{-1}((\lambda\boldsymbol{\omega} + (1-\lambda)\boldsymbol{\eta})_{p\cdot g^{-1}}(\mathbf{v}))g
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
(\lambda\boldsymbol{\omega} + (1-\lambda)\eta)_p(A^{\#}(p)) &= \lambda\boldsymbol{\omega}_p(A^{\#}(p)) + (1-\lambda)\boldsymbol{\eta}_p(A^{\#}(p)) \\
&= \lambda A + (1-\lambda)A = A.
\end{aligned}$$

Teorem 4.4 *([3, Teorem 5.1.3])* $\mathcal{P}_1 : P_1 \longrightarrow X$ *ve* $\mathcal{P}_2 : P_2 \longrightarrow X$ *aynı taban manifoldu* X *üzerinde iki* C^∞ *asli* G*-lif demeti olsun,* $f : P_1 \longrightarrow P_2$ *diferansiyellenebilir bir demet dönüşümü ve* $\boldsymbol{\omega}$ P_2 *üzerinde bir konneksiyon formu olsun. Bu durumda* $f^*\boldsymbol{\omega}$, P_1 *üzerinde bir konneksiyon formudur.*

Kuaterniyonik Hopf demeti üzerindeki $\boldsymbol{\omega}$ doğal (BPST) konneksiyonu kullanılarak yine kuaterniyonik Hopf demeti üzerinde yeni konneksiyonlar üretmek için Teorem 4.4 uygulanabilir. Bunun için tabi ki her iki C^∞ asli lif demeti de $Sp(1) \to S^7 \to \mathbb{HP}^1$ olacaktır ve $S^7 \to S^7$ demet dönüşümü de $SL(2,\mathbb{H})$ nın S^7 üzerine bir sol etkisi vasıtasıyla kurulacaktır.

$$\rho : SL(2,\mathbb{H}) \times S^7 \longrightarrow S^7$$

$g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL(2,\mathbb{H})$ ve $\begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \end{pmatrix} \in S^7 \subseteq \mathbb{H}^2$ için

$$\rho(g, \left(\begin{smallmatrix} q^1 \\ q^2 \end{smallmatrix}\right)) = g \cdot \left(\begin{smallmatrix} q^1 \\ q^2 \end{smallmatrix}\right) = (|aq^1 + bq^2|^2 + |cq^1 + dq^2|^2)^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} aq^1+bq^2 \\ cq^1+dq^2 \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

şeklinde tanımlı ρ dönüşümü bir sol etkidir. Sabit bir $g \in SL(2,\mathbb{H})$ için $\rho_g : S^7 \longrightarrow S^7$, $\rho_g(\left(\begin{smallmatrix} q^1 \\ q^2 \end{smallmatrix}\right)) = g \cdot \left(\begin{smallmatrix} q^1 \\ q^2 \end{smallmatrix}\right)$, dönüşümü bir difeomorfizmdir. İddia : bu difeomorfizm $S^7 \to S^7$ bir demet dönüşümüdür. Hatırlanacak olursa $Sp(1)$ in S^7 üzerine sağ etkisi $\sigma : S^7 \times Sp(1) \longrightarrow S^7$, $\sigma((q^1, q^2), h) = (q^1 h, q^2 h)$ şeklinde tanımlanmıştı, buradaki gösterimlere uygun olarak $\sigma(\left(\begin{smallmatrix} q^1 \\ q^2 \end{smallmatrix}\right), h) = \left(\begin{smallmatrix} q^1 h \\ q^2 h \end{smallmatrix}\right)$. Bu durumda

$$\rho_g(\sigma(\left(\begin{smallmatrix} q^1 \\ q^2 \end{smallmatrix}\right), h)) = \rho_g(\left(\begin{smallmatrix} q^1 h \\ q^2 h \end{smallmatrix}\right)) = g \cdot \left(\begin{smallmatrix} q^1 h \\ q^2 h \end{smallmatrix}\right)$$

diğer taraftan

$$\sigma(\rho_g(\left(\begin{smallmatrix} q^1 \\ q^2 \end{smallmatrix}\right)), h) = \sigma(g \cdot \left(\begin{smallmatrix} q^1 \\ q^2 \end{smallmatrix}\right), h) = g \cdot \left(\begin{smallmatrix} q^1 h \\ q^2 h \end{smallmatrix}\right)$$

yani $\rho_g : S^7 \longrightarrow S^7$ bir demet dönüşümüdür, böylece iddia ispatlanmış olur.

Bu durumda $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{Im}(\bar{q}^1 dq^1 + \bar{q}^2 dq^2)$ konneksiyon formunun ρ_g ile geri çekilmişi, $(q^1, q^2) \in S^7 \subseteq \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ ve $\mathbf{v} \in T_{(q^1,q^2)}(S^7)$ için

$(\rho_g^*\boldsymbol{\omega})_{(q^1,q^2)}(\mathbf{v}) = \boldsymbol{\omega}_{\rho_g(q^1,q^2)}\big((\rho_g)_{*(q^1,q^2)}(\mathbf{v})\big) =$
$\mathrm{Im}\left(\frac{\overline{aq^1+bq^2}}{\sqrt{|aq^1+bq^2|^2+|cq^1+dq^2|^2}}dq^1\left((\rho_g)_{*(q^1,q^2)}(\mathbf{v})\right) + \frac{\overline{cq^1+dq^2}}{\sqrt{|aq^1+bq^2|^2+|cq^1+dq^2|^2}}dq^2\left((\rho_g)_{*(q^1,q^2)}(\mathbf{v})\right)\right) =$

$\mathrm{Im}\left(\frac{\overline{aq^1+bq^2}}{\sqrt{|aq^1+bq^2|^2+|cq^1+dq^2|^2}}((\rho_g)_{*(q^1,q^2)}(\mathbf{v}))(q^1) + \frac{\overline{cq^1+dq^2}}{\sqrt{|aq^1+bq^2|^2+|cq^1+dq^2|^2}}((\rho_g)_{*(q^1,q^2)}(\mathbf{v}))(q^2)\right) =$

$\mathrm{Im}\left(\frac{\overline{aq^1+bq^2}}{\sqrt{|aq^1+bq^2|^2+|cq^1+dq^2|^2}}(\mathbf{v}(q^1\circ\rho_g)) + \frac{\overline{cq^1+dq^2}}{\sqrt{|aq^1+bq^2|^2+|cq^1+dq^2|^2}}(\mathbf{v}(q^2\circ\rho_g))\right) =$

$\mathrm{Im}\left(\frac{\overline{aq^1+bq^2}}{\sqrt{|aq^1+bq^2|^2+|cq^1+dq^2|^2}}d(q^1\circ\rho_g)(q^1,q^2)(\mathbf{v}) + \frac{\overline{cq^1+dq^2}}{\sqrt{|aq^1+bq^2|^2+|cq^1+dq^2|^2}}d(q^2\circ\rho_g)(q^1,q^2)(\mathbf{v})\right)$

O halde

$$\begin{aligned}\rho_g^*\boldsymbol{\omega} = \mathrm{Im}\Bigg(&\frac{\overline{aq^1+bq^2}}{\sqrt{|aq^1+bq^2|^2+|cq^1+dq^2|^2}}d(q^1\circ\rho_g)+ \\ &\frac{\overline{cq^1+dq^2}}{\sqrt{|aq^1+bq^2|^2+|cq^1+dq^2|^2}}d(q^2\circ\rho_g)\Bigg)\end{aligned} \tag{4.10}$$

$d(q^1\circ\rho_g) = d\left(\frac{aq^1+bq^2}{\sqrt{|aq^1+bq^2|^2+|cq^1+dq^2|^2}}\right) =$
$\frac{1}{\sqrt{|aq^1+bq^2|^2+|cq^1+dq^2|^2}}d(aq^1+bq^2) + (aq^1+bq^2)d\left(\frac{1}{\sqrt{|aq^1+bq^2|^2+|cq^1+dq^2|^2}}\right)$

benzer şekilde

$d(q^2\circ\rho_g) = d\left(\frac{cq^1+dq^2}{\sqrt{|aq^1+bq^2|^2+|cq^1+dq^2|^2}}\right) =$
$\frac{1}{\sqrt{|aq^1+bq^2|^2+|cq^1+dq^2|^2}}d(cq^1+dq^2) + (cq^1+dq^2)d\left(\frac{1}{\sqrt{|aq^1+bq^2|^2+|cq^1+dq^2|^2}}\right).$

Bu durumda (4.10) eşitliği aşağıdaki hali alır:

$$\rho_g^*\boldsymbol{\omega} = \mathrm{Im}\left(\frac{\overline{aq^1+bq^2}}{\sqrt{|aq^1+bq^2|^2+|cq^1+dq^2|^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{|aq^1+bq^2|^2+|cq^1+dq^2|^2}}d(aq^1+bq^2)+\right.\right.$$

$$\left.(aq^1+bq^2)d\left(\frac{1}{\sqrt{|aq^1+bq^2|^2+|cq^1+dq^2|^2}}\right)\right)+\frac{\overline{cq^1+dq^2}}{\sqrt{|aq^1+bq^2|^2+|cq^1+dq^2|^2}}$$

$$\left.\left(\frac{1}{\sqrt{|aq^1+bq^2|^2+|cq^1+dq^2|^2}}d(cq^1+dq^2)+ (cq^1+dq^2)d\left(\frac{1}{\sqrt{|aq^1+bq^2|^2+|cq^1+dq^2|^2}}\right)\right)\right) =$$

$$\mathrm{Im}\left(\frac{(\overline{aq^1+bq^2})d(aq^1+bq^2)}{|aq^1+bq^2|^2+|cq^1+dq^2|^2}+\frac{(\overline{cq^1+dq^2})d(cq^1+dq^2)}{|aq^1+bq^2|^2+|cq^1+dq^2|^2}\right) =$$

$$\frac{1}{|aq^1+bq^2|^2+|cq^1+dq^2|^2}\mathrm{Im}\big((\overline{aq^1+bq^2})d(aq^1+bq^2)+(\overline{cq^1+dq^2})d(cq^1+dq^2)\big)$$

bu hesabı kolaylaştırması açısından şöyle bir özellik kullanılabilir: sabit bir $\alpha = a_1 + a_2\mathrm{i} + a_3\mathrm{j} + a_4\mathrm{k}$ ve $q = x + y\mathrm{i} + u\mathrm{j} + v\mathrm{k} \in \mathbb{H}$ için $d(\alpha q) = \alpha dq$. Bu durumda

$$\rho_g^*\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{|aq^1+bq^2|^2+|cq^1+dq^2|^2}\mathrm{Im}\big((\bar{q}^1\bar{a}+\bar{q}^2\bar{b})(adq^1+bdq^2)+(\bar{q}^1\bar{c}+\bar{q}^2\bar{d})(cdq^1+ddq^2)\big) =$$

$$\frac{1}{|aq^1+bq^2|^2+|cq^1+dq^2|^2}\mathrm{Im}\big(\bar{q}^1\bar{a}adq^1+\bar{q}^1\bar{a}bdq^2+\bar{q}^2\bar{b}adq^1+\bar{q}^2\bar{b}bdq^2+\bar{q}^1\bar{c}cdq^1+\bar{q}^1\bar{c}ddq^2$$
$$+\bar{q}^2\bar{d}cdq^1+\bar{q}^2\bar{d}ddq^2\big) =$$
$$\frac{1}{|aq^1+bq^2|^2+|cq^1+dq^2|^2}\mathrm{Im}(|a|^2\bar{q}^1dq^1+\bar{q}^1\bar{a}bdq^2+\bar{q}^2\bar{b}adq^1+|b|^2\bar{q}^2dq^2+|c|^2\bar{q}^1dq^1+\bar{q}^1\bar{c}ddq^2$$
$$+\bar{q}^2\bar{d}cdq^1+|d|^2\bar{q}^2dq^2)$$

ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\rho_g^*\boldsymbol{\omega} =$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{|aq^1+bq^2|^2+|cq^1+dq^2|^2}\mathrm{Im}\Big(&\big((|a|^2+|c|^2)\bar{q}^1+\bar{q}^2(\bar{b}a+\bar{d}c)\big)dq^1+\\ &\big((|b|^2+|d|^2)\bar{q}^2+\bar{q}^1(\bar{a}b+\bar{c}d)\big)dq^2\Big)\end{aligned} \tag{4.11}$$

elde edilir.

$SL(2,\mathbb{H})$ nin **Iwasawa dekompozisyonu**:

$$SL(2,\mathbb{H}) = NASp(2) \tag{4.12}$$

şeklindedir, burada

$$N = \left\{\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : n \in \mathbb{H}\right\}$$

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\lambda} \end{pmatrix} \ : \ \lambda > 0 \right\}$$

$$Sp(2) = \left\{ A \in GL(2, \mathbb{H}) \ : \ A^{-1} = \bar{A}^T \right\}$$

N, A ve $Sp(2)$, $SL(2, \mathbb{H})$ nin birer altgrubudur. Yukarıdaki ρ_g dönüşümünde $g \in SL(2, \mathbb{H})$ sabit matrisi eğer özel olarak $Sp(2)$ içinde ise, yani

$g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in Sp(2)$ ise $g^{-1} = \bar{g}^T$ ve buradan da $\bar{g}^T g = id$ elde edilir. Öyleyse

$$\bar{g}^T g = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2 + |c|^2 & \bar{a}b + \bar{c}d \\ \bar{b}a + \bar{d}c & |b|^2 + |d|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in Sp(2)$ matrisine karşılık gelen $T : \mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{H}^2$, $\mathbb{H}$-lineer dönüşümü $T(q^1, q^2) = (aq^1 + bq^2, cq^1 + dq^2)$ dir ve bu $\mathbb{H}$-lineer T dönüşümü $\mathbb{H}^2$ üzerindeki $<,>: \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{H}$, $< (\xi^1, \xi^2), (\zeta^1, \zeta^2) >= \bar{\xi}^1 \zeta^1 + \bar{\xi}^2 \zeta^2$ bilineer formu korur, yani $< T(q^1, q^2), T(q^1, q^1) >=< (q^1, q^2), (q^1, q^2) >$ dir. Tüm bu bilgiler ışığında (4.11) de tespit edilen $\rho_g^* \boldsymbol{\omega}$ formuna geri dönülecek olursa,

$g \in Sp(2)$ için $|a|^2 + |c|^2 = |b|^2 + |d|^2 = 1$ ve $\bar{a}b + \bar{c}d = \bar{b}a + \bar{d}c = 0$ ve $(q^1, q^2) \in S^7 \subseteq \mathbb{H}^2$ olduğundan $< T(q^1, q^2), T(q^1, q^2) >=< (aq^1 + bq^2, cq^1 + dq^2), (aq^1 + bq^2, cq^1 + dq^2) >= |aq^1 + bq^2|^2 + |cq^1 + dq^2|^2 =< (q^1, q^2), (q^1, q^2) >= |q^1|^2 + |q^2|^2 = 1$. Özetle

$$g \in Sp(2) \quad \text{ise} \quad \rho_g^* \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \tag{4.13}$$

Genel Hopf Demetleri Üzerinde Konneksiyonlar

$U(1) \to S^3 \to \mathbb{CP}^1$ ve $Sp(1) \to S^7 \to \mathbb{HP}^1$ Hopf demetleri üzerindeki $\mathbf{i}\mathrm{Im}(\bar{z}^1 dz^1 + \bar{z}^2 dz^2)$ ve $\mathrm{Im}(\bar{q}^1 dq^1 + \bar{q}^2 dq^2)$ konneksiyon formlarından hareketle $U(1) \to S^{2n-1} \to \mathbb{CP}^{n-1}$ ve $Sp(1) \to S^{4n-1} \to \mathbb{HP}^{n-1}$ Hopf demetleri üzerinde (genelleştirilmiş) konneksiyon formları yazılabilir. İddia:

$S^{2n-1} = \left\{ (z^1, \ldots, z^n) \in \mathbb{C}^n \ : \ |z^1|^2 + \cdots + |z^n|^2 = 1 \right\}$ ve

$S^{4n-1} = \left\{ (q^1, \ldots, q^n) \in \mathbb{H}^n \ : \ |q^1|^2 + \cdots + |q^n|^2 = 1 \right\}$ olmak üzere

$$\mathbf{i}\mathrm{Im}(\bar{z}^1 dz^1 + \cdots + \bar{z}^n dz^n) \quad \text{ve} \quad \mathrm{Im}(\bar{q}^1 dq^1 + \cdots + \bar{q}^n dq^n)$$

1-formları sırasıyla $U(1) \to S^{2n-1} \to \mathbb{CP}^{n-1}$ ve $Sp(1) \to S^{4n-1} \to \mathbb{HP}^{n-1}$ Hopf demetleri üzerinde birer konneksiyon formudur. Bu iddianın ispatı kompleks duruma kolayca uyarlanacak şekilde yalnızca kuaterniyonik durumda yapılacaktır.

$$\boldsymbol{\omega} = \mathrm{Im}(\bar{q}^1 dq^1 + \cdots + \bar{q}^n dq^n) \tag{4.14}$$

tanımlanışdan dolayı S^{4n-1} üzerinde Im$\mathbb{H}$-değerli yani $Sp(1)$ in Lie cebiri değerli bir 1-formdur. S^7 üzerindeki Im$\mathbb{H}$-değerli $\mathrm{Im}(\bar{q}^1 dq^1 + \bar{q}^2 dq^2)$ konneksiyon formu için yapılanlarda olduğu gibi, $p = (p^1, \ldots, p^n) \in S^{4n-1} \subseteq \mathbb{H}^n$ için $\mathbf{v} = (\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n) \in T_p(S^{4n-1}) \subseteq T_p(\mathbb{H}^n) = T_{p^1}(\mathbb{H}) \times \cdots \times T_{p^n}(\mathbb{H})$ şeklinde yazılarak $T_{p^i}(\mathbb{H}) \cong \mathbb{H}$ izomorfizmi altında $\mathbf{v} = (\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n)$ tanjant vektörü ile bir $(v^1, \ldots, v^n) \in \mathbb{H}^n$ bir tutulabilir. Bu durumda $dq^i(\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n) = v^i$ dir. $Sp(1)$ in S^{4n-1} üzerine sağ etkisi $\sigma : S^{4n-1} \times Sp(1) \longrightarrow S^{4n-1}$, $\sigma((p^1, \ldots, p^n), g) = (p^1, \ldots, p^n) \cdot g = ((p^1 g, \ldots, p^n g))$ olmak üzere her bir $A \in \mathrm{Im}\mathbb{H}$ (ve σ) nın belirlediği S^{4n-1} üzerindeki temel vektör alanı, her bir $p \in S^{4n-1}$ için

$$A^{\#}(p) = \frac{d}{dt}(p \cdot \exp(tA))\Big|_{t=0}$$

şeklinde tanımlıdır. Bu durumda ([3, Lemma 4.7.5(4)]) e göre $A^{\#}(p) = (p^1 A, \ldots, p^n A)$ şeklindedir. Son olarak her bir $g \in Sp(1)$ için $\sigma_g : S^{4n-1} \longrightarrow S^{4n-1}$, $\sigma_g(p) = p \cdot g$ şeklinde tanımlıdır ve eğer $\mathbf{v} = (v^1, \ldots, v^n) \in T_{p \cdot g^{-1}}(S^{4n-1})$ ise $(\sigma_g)_{*p \cdot g^{-1}}(\mathbf{v}) = (v^1 g, \ldots, v^n g)$ dir. Böylece $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{Im}(\bar{q}^1 dq^1 + \cdots + q^n dq^n)$ 1-formunun bir konneksiyon formu olduğu kolayca gösterilebilir:

1. her $g \in Sp(1), p = (p^1, \ldots, p^n) \in S^{4n-1}$ ve $\mathbf{v} \in T_{p \cdot g^{-1}}(S^{4n-1})$ için

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}_p((\sigma_g)_{p \cdot g^{-1}}(\mathbf{v})) &= \mathrm{Im}(\bar{p}^1 v^1 g + \cdots + \bar{p}^n v^n g) \\
g^{-1}\boldsymbol{\omega}_{p \cdot g^{-1}}(\mathbf{v})g &= g^{-1}\mathrm{Im}(\overline{p^1 g^{-1}} v^1 + \cdots + \overline{p^n g^{-1}} v^n)g \\
&= g^{-1}\mathrm{Im}(\overline{g^{-1}}\bar{p}^1 v^1 + \cdots + \overline{g^{-1}}\bar{p}^n v^n)g \\
&= g^{-1}\mathrm{Im}(g\bar{p}^1 v^1 + \cdots + g\bar{p}^n v^n)g \\
&= \mathrm{Im}(\bar{p}^1 v^1 g + \cdots + \bar{p}^n v^n g)
\end{aligned}$$

2. her $A \in \mathrm{Im}\mathbb{H}$ ve $p = (p^1, \ldots, p^n) \in S^{4n-1}$ için

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}_p(A^{\#}(p)) &= \mathrm{Im}(\bar{p}^1(p^1 A) + \cdots + p^n(p^n A)) \\
&= \mathrm{Im}((|p^1|^2 + \cdots + |p^n|^2)A) = A.
\end{aligned}$$

Konneksiyonun Geometrik Tanımı

$\mathcal{B} = (P, \mathcal{P}, \sigma), X$ üzerinde bir C^∞ asli G-lif demeti ve $\boldsymbol{\omega}$, P üzerinde bir konneksiyon formu olsun. Her bir $p \in P$ için $T_p(P)$ nin $\mathrm{Hor}_p(P)$ **yatay altuzayı** ,

$$\mathrm{Hor}_p(P) = \{\mathbf{v} \in T_p(P) \ : \ \boldsymbol{\omega}_p(\mathbf{v}) = 0\}$$

şeklinde tanımlıdır. $\mathcal{P}$ nin $\mathcal{P}^{-1}(x)$ liflerinin hepsi G ye difeomorf olan P nin altmanifoldlarıdır. Bu sebeple, her bir $p \in P$ için $T_p(P)$ tanjant uzayı $T_p(G)$ ye izomorf (ve bu sebeple de $\mathcal{G}$ ye izomorf) olan bir $\mathrm{Vert}_p(P)$ altuzayı içerir. Daha açık olarak

$$\mathrm{Vert}_p(P) = \{\mathbf{v} \in T_p(P) \ : \ \mathcal{P}_{*p}(\mathbf{v}) = 0\}$$

şeklinde tanımlanabilir ([8] Tanım 1.2.1). $\mathrm{Vert}_p(P)$, $T_p(P)$ nin **düşey altuzayı** (vertical subspace) olarak adlandırılır ve elemanlarına da **düşey vektörler** denir. P nin bir p noktasındaki tanjant uzayı bu uzayların dik toplamı şekline yazılabilir ([3], (5.1.2)) , yani

$$T_p(P) = \mathrm{Hor}_p(P) \oplus \mathrm{Vert}_p(P) \tag{4.15}$$

Şimdi bu duruma bir örnek olarak $T_p(S^7)$ nin $\mathrm{Hor}_p(S^7)$ ve $\mathrm{Vert}_p(S^7)$ altuzaylarını geren vektörler verilecektir.

Örnek 4.5

$I, J, K : \mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{H}^2, \qquad \xi = (\xi^1, \xi^2) = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) \in \mathbb{H}^2$ *için*

$$\begin{aligned} I(\xi) = I(\xi^1, \xi^2) &= (\xi^1 \mathrm{i}, \xi^2 \mathrm{i}) = (-x_2, x_1, x_4, -x_3, -x_6, x_5, x_8, -x_7) \\ J(\xi) = J(\xi^1, \xi^2) &= (\xi^1 \mathrm{j}, \xi^2 \mathrm{j}) = (-x_3, -x_4, x_1, x_2, -x_7, -x_8, x_5, x_6) \\ K(\xi) = K(\xi^1, \xi^2) &= (\xi^1 \mathrm{k}, \xi^2 \mathrm{k}) = (-x_4, x_3, -x_2, x_1, -x_8, x_7, -x_6, x_5) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. $p = (p^1, p^2) \in S^7$ *için* $I(p) = V_1(p), J(p) = V_2(p)$ *ve* $K(p) = V_3(p)$ *olmak üzere* $\mathrm{span}\,\{V_1(p), V_2(p), V_3(p)\} = \mathrm{Vert}_p(S^7)$.

$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$ yer vektörünü göstersin,

$$\begin{aligned} < V_1(p), x > &= < (-x_2, x_1, x_4, -x_3, -x_6, x_5, x_8, -x_7), (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) > \\ &= -x_2x_1 + x_1x_2 + x_4x_3 - x_3x_4 - x_6x_5 + x_5x_6 + x_8x_7 - x_7x_8 \\ &= 0 \\ < V_2(p), x > &= < (-x_3, -x_4, x_1, x_2, -x_7, -x_8, x_5, x_6), (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) > \\ &= -x_3x_1 - x_4x_2 + x_1x_3 + x_2x_4 - x_7x_5 - x_8x_6 + x_5x_7 + x_6x_8 \\ &= 0 \\ < V_3(p), x > &= < (-x_4, x_3, -x_2, x_1, -x_8, x_7, -x_6, x_5), (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) > \\ &= -x_4x_1 + x_3x_2 - x_2x_3 + x_1x_4 - x_8x_5 + x_7x_6 - x_6x_7 + x_5x_8 \\ &= 0 \end{aligned}$$

yani V_1, V_2, V_3 vektör alanları her bir $p \in S^7$ noktasında S^7 ye teğettir, dolayısıyla $V_1(p), V_2(p), V_3(p) \in T_p(S^7)$.

Denklem (2.13) de verilen $\mathbb{HP}^1 \cong S^4$ difeomorfizminden, $\mathcal{P} : S^7 \longrightarrow S^4$, $\mathcal{P}([p^1, p^2]) = (2p^1\bar{p}^2, |p^1|^2 - |p^2|^2)$ şeklinde yazılabilir. Bu durumda $\mathcal{P}$ açık olarak

$\mathcal{P}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8) = (2x_1x_5+2x_2x_6+2x_3x_7+2x_4x_8, -2x_1x_6+2x_2x_5-2x_3x_8+2x_4x_7, -2x_1x_7+2x_2x_8+2x_3x_5-2x_4x_6, -2x_1x_8-2x_2x_7+2x_3x_6+2x_4x_5, x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2-x_5^2-x_6^2-x_7^2-x_8^2)$

şeklindedir. $\mathcal{P}_*$ yani $\mathcal{P}$ nin Jacobian matrisi ise

$$\mathcal{P}_{*p} = \begin{pmatrix} 2x_5 & 2x_6 & 2x_7 & 2x_8 & 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 & 2x_4 \\ -2x_6 & 2x_5 & -2x_8 & 2x_7 & 2x_2 & -2x_1 & 2x_4 & -2x_3 \\ -2x_7 & 2x_8 & 2x_5 & -2x_6 & 2x_3 & -2x_4 & -2x_1 & 2x_2 \\ -2x_8 & -2x_7 & 2x_6 & 2x_5 & 2x_4 & 2x_3 & -2x_2 & -2x_1 \\ 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 & 2x_4 & -2x_5 & -2x_6 & -2x_7 & -2x_8 \end{pmatrix}$$

ve $i=1,2,3$ için $\mathcal{P}_{*p}(V_i(p)) = 0$ dır. O halde $V_1(p), V_2(p), V_3(p) \in \mathrm{Vert}_p(S^7)$ dir. Ayrıca $Sp(1) \to S^7 \to \mathbb{HP}^1$ Hopf demeti izerindeki $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{Im}(\bar{q}^1 dq^1 + \bar{q}^2 dq^2)$ doğal konneksiyon formu altında $V_1(p), V_2(p)$ ve $V_3(p)$ nin görüntüleri şu şekildedir:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_p(V_1(p)) &= \boldsymbol{\omega}_p(p^1\mathrm{i}, p^2\mathrm{i}) = \mathrm{Im}(\bar{p}^1p^1\mathrm{i} + \bar{p}^2p^2\mathrm{i}) = \mathrm{Im}((|p^1|^2+|p^2|^2)\mathrm{i}) = \mathrm{i} \\ \boldsymbol{\omega}_p(V_2(p)) &= \mathrm{j} \\ \boldsymbol{\omega}_p(V_3(p)) &= \mathrm{k} \end{aligned}$$

ve görüldüğü gibi $\{\boldsymbol{\omega}_p(V_1(p)), \boldsymbol{\omega}_p(V_2(p)), \boldsymbol{\omega}_p(V_3(p))\}$ kümesi $\mathrm{Im}\mathbb{H} \cong \mathrm{Vert}_p(S^7)$ nin bir tabanıdır.

$\mathrm{Hor}_p(S^7)$ için bir taban yazabilmek için aşağıda verilen vektör alanları kullanalıcaktır:

$$\begin{aligned}
W_1(p) &= (x_3, x_4, -x_1, -x_2, -x_7, -x_8, x_5, x_6)\\
W_2(p) &= (x_5, x_6, x_7, x_8, -x_1, -x_2, -x_3, -x_4)\\
W_3(p) &= (x_8, x_7, -x_6, -x_5, x_4, x_3, -x_2, -x_1)\\
W_4(p) &= (x_7, -x_8, -x_5, x_6, x_3, -x_4, -x_1, x_2)\\
W_5(p) &= (-x_6, x_5, -x_8, x_7, -x_2, x_1, -x_4, x_3)\\
W_6(p) &= (x_4, -x_3, x_2, -x_1, -x_8, x_7, -x_6, x_5)\\
W_7(p) &= (-x_2, x_1, x_4, -x_3, x_6, -x_5, -x_8, x_7)
\end{aligned}$$

olmak üzere $\{W_1(p), \ldots, W_7(p)\}$ kümesi $T_p(S^7)$ için bir tabandır.

$\mathcal{G} = \mathrm{Im}\mathbb{H}$ ve $A_1 = \mathrm{i},\ A_2 = \mathrm{j},\ A_3 = \mathrm{k}, \quad \mathrm{span}\,\{A_1, A_2, A_3\} = \mathrm{Im}\mathbb{H}$

$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^1\mathrm{i} + \boldsymbol{\omega}^2\mathrm{j} + \boldsymbol{\omega}^3\mathrm{k}$ olmak üzere $i = 1, 2, 3, 4$ için $V_i = W_i - \sum_j \boldsymbol{\omega}^j(W_i)A_j^{\#}$ vektörleri $\mathrm{Hor}_p(S^7)$ için bir tabandır. (bkz. [10])

$$\begin{aligned}
A_1^{\#}(p) &= \frac{d}{dt}(p \cdot \exp(t\mathrm{i}))\Big|_{t=0} = p\mathrm{i}\\
A_2^{\#}(p) &= \frac{d}{dt}(p \cdot \exp(t\mathrm{j}))\Big|_{t=0} = p\mathrm{j}\\
A_3^{\#}(p) &= \frac{d}{dt}(p \cdot \exp(t\mathrm{k}))\Big|_{t=0} = p\mathrm{k}
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
V_1(p) &= W_1 - \boldsymbol{\omega}_p^1(W_1(p))A_1^{\#}(p) - \boldsymbol{\omega}_p^2(W_1(p))A_2^{\#}(p) - \boldsymbol{\omega}_p^3(W_1(p))A_3^{\#}(p)\\
&= \Big((x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2)(2x_3, 2x_4, -2x_1, -2x_2),\\
&\qquad (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(-2x_7, -2x_8, 2x_5, 2x_6)\Big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
V_2(p) &= W_2 - \boldsymbol{\omega}_p^1(W_2(p))A_1^{\#}(p) - \boldsymbol{\omega}_p^2(W_2(p))A_2^{\#}(p) - \boldsymbol{\omega}_p^3(W_2(p))A_3^{\#}(p) \\
&= \Big(- x_5(-1 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + x_4^2) + 2x_1(x_2x_6 + x_3x_7 + x_4x_8), \\
&\quad -x_6(-1 + 2x_1^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2) + 2x_2(x_1x_5 + x_3x_7 + x_4x_8), \\
&\quad -x_7(-1 + 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_4^2) + 2x_3(x_1x_5 + x_2x_6 + x_4x_8), \\
&\quad -x_8(-1 + 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2) + 2x_4(x_1x_5 + x_2x_6 + x_3x_7), \\
&\quad x_1(-1 + 2x_6^2 + 2x_7^2 + 2x_8^2) - 2x_5(x_2x_6 + x_3x_7 + x_4x_8), \\
&\quad x_2(-1 + 2x_5^2 + 2x_7^2 + 2x_8^2) - 2x_6(x_1x_5 + x_3x_7 + x_4x_8), \\
&\quad x_3(-1 + 2x_5^2 + 2x_6^2 + 2x_8^2) - 2x_7(x_1x_5 + x_2x_6 + x_4x_8), \\
&\quad x_4(-1 + 2x_5^2 + 2x_6^2 + 2x_7^2) - 2x_8(x_1x_5 + x_2x_6 + x_3x_7)\Big) \\
V_3(p) &= W_3 - \boldsymbol{\omega}_p^1(W_3(p))A_1^{\#}(p) - \boldsymbol{\omega}_p^2(W_3(p))A_2^{\#}(p) - \boldsymbol{\omega}_p^3(W_3(p))A_3^{\#}(p) \\
&= \Big(- x_8(-1 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2) - 2x_1(x_4x_5 + x_3x_6 - x_2x_7), \\
&\quad -x_7(-1 + 2x_1^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2) - 2x_2(x_4x_5 + x_3x_6 - x_1x_8), \\
&\quad x_6(-1 + 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_4^2) + 2x_3(-x_4x_5 + x_2x_7 + x_1x_8), \\
&\quad x_5(-1 + 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2) + 2x_4(-x_3x_6 + x_2x_7 + x_1x_8), \\
&\quad -x_4(-1 + 2x_6^2 + 2x_7^2 + 2x_8^2) - 2x_5(-x_3x_6 + x_2x_7 + x_1x_8), \\
&\quad -x_3(-1 + 2x_5^2 + 2x_7^2 + 2x_8^2) - 2x_6(-x_4x_5 + x_2x_7 + x_1x_8), \\
&\quad x_2(-1 + 2x_5^2 + 2x_6^2 + 2x_8^2) + 2x_7(x_4x_5 + x_3x_6 - x_1x_8), \\
&\quad x_1(-1 + 2x_5^2 + 2x_6^2 + 2x_7^2) + 2x_8(x_4x_5 + x_3x_6 - x_2x_7)\Big) \\
V_4(p) &= W_4 - \boldsymbol{\omega}_p^1(W_4(p))A_1^{\#}(p) - \boldsymbol{\omega}_p^2(W_4(p))A_2^{\#}(p) - \boldsymbol{\omega}_p^3(W_4(p))A_3^{\#}(p) \\
&= \Big(- x_7(-1 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2) - 2x_1(x_3x_5 - x_4x_6 + x_2x_8), \\
&\quad x_8(-1 + 2x_1^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2) + 2x_2(-x_3x_5 + x_4x_6 + x_1x_7), \\
&\quad x_5(-1 + 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_4^2) + 2x_3(x_4x_6 + x_1x_7 - x_2x_8), \\
&\quad -x_6(-1 + 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2) - 2x_4(-x_3x_5 - x_1x_7 + x_2x_8), \\
&\quad -x_3(-1 + 2x_6^2 + 2x_7^2 + 2x_8^2) - 2x_5(x_4x_6 + x_1x_7 - x_2x_8),
\end{aligned}
$$

$$x_4(-1+2x_5^2+2x_7^2+2x_8^2)+2x_6(x_3x_5-x_1x_7+x_2x_8),$$

$$x_1(-1+2x_5^2+2x_6^2+2x_8^2)+2x_7(x_3x_5-x_4x_6+x_2x_8),$$

$$-x_2(-1+2x_5^2+2x_6^2+2x_7^2)-2x_8(-x_3x_5+x_4x_6+x_1x_7)\Big)$$

$$\begin{aligned}
V_5(p) &= W_5-\boldsymbol{\omega}_p^1(W_5(p))A_1^{\#}(p)-\boldsymbol{\omega}_p^2(W_5(p))A_2^{\#}(p)-\boldsymbol{\omega}_p^3(W_5(p))A_3^{\#}(p)\\
&= \Big(x_6(-1+2x_2^2+2x_3^2+2x_4^2)+2x_1(x_2x_5+x_4x_7-x_3x_8),\\
&\quad -x_5(-1+2x_1^2+2x_3^2+2x_4^2)-2x_2(x_1x_6-x_4x_7+x_3x_8),\\
&\quad x_8(-1+2x_1^2+2x_2^2+2x_4^2)+2x_3(-x_1x_6+x_4x_7+x_2x_5),\\
&\quad -x_7(-1+2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2)-2x_4(x_1x_6-x_2x_5+x_3x_8),\\
&\quad x_2(-1+2x_6^2+2x_7^2+2x_8^2)+2x_5(x_1x_6-x_4x_7+x_3x_8),\\
&\quad -x_1(-1+2x_5^2+2x_7^2+2x_8^2)-2x_6(x_2x_5+x_4x_7-x_3x_8),\\
&\quad x_4(-1+2x_5^2+2x_6^2+2x_8^2)+2x_7(-x_2x_5+x_1x_6+x_3x_8),\\
&\quad -x_3(-1+2x_5^2+2x_6^2+2x_7^2)-2x_8(x_2x_5-x_1x_6+x_4x_7)\Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_6(p) &= W_6-\boldsymbol{\omega}_p^1(W_6(p))A_1^{\#}(p)-\boldsymbol{\omega}_p^2(W_6(p))A_2^{\#}(p)-\boldsymbol{\omega}_p^3(W_6(p))A_3^{\#}(p)\\
&= \Big(2(x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_8^2)(x_4,-x_3,x_2,-x_1),2(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)(-x_8,x_7,-x_6,x_5)\Big)\\
V_7(p) &= W_6-\boldsymbol{\omega}_p^1(W_7(p))A_1^{\#}(p)-\boldsymbol{\omega}_p^2(W_7(p))A_2^{\#}(p)-\boldsymbol{\omega}_p^3(W_7(p))A_3^{\#}(p)\\
&= \Big(2(x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_8^2)(-x_2,x_1,x_4,-x_3),2(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)(x_6,-x_5,-x_8,x_7)\Big)
\end{aligned}$$

$\{V_1(p),V_2(p),V_3(p),V_4(p),V_5(p),V_6(p),V_7(p)\}$ vektör kümesindeki herhangi 4 vektör $\mathrm{Hor}_p(S^7)$ için bir tabandır.

Ayar (Gauge) Potansiyelleri

$\mathcal{P} : P \longrightarrow X,\ C^\infty$ asli G-lif demeti, V bir trivializasyon komşuluğu ,

$s : V \longrightarrow \mathcal{P}^{-1}(V)$ lif demetinin bir kesiti ve $\boldsymbol{\omega},\ P$ üzerinde bir konneksiyon formu ise

$\boldsymbol{\omega}$ nın $V \subseteq X$ e geri çekilmişi $\mathcal{A} = s^*\boldsymbol{\omega},\ \ X$ üzerinde bir (**yerel**) **ayar potensiyeli** denir. Aşağıdaki örnekte kuaterniyonik Hopf demeti üzerindeki doğal konneksiyon $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$ e geri çekilecek ve yine $\mathcal{A}$ ile gösterilecektir.

Örnek 4.6 *$Sp(1) \to S^7 \to \mathbb{HP}^1$ Hopf demetinin kesitleri ve $\mathbb{HP}^1$ in standart kartları aracılığıyla, yani $s_1 \circ \varphi_1^{-1}$ ve $s_2 \circ \varphi_2^{-1}$ ile $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{Im}(\bar{q}^1 dq^1 + \bar{q}^2 dq^2)$ nin $\mathbb{H}$ ye geri çekilmişi $(s_1 \circ \varphi_1^{-1})^*\boldsymbol{\omega}$ ve $(s_2 \circ \varphi_2^{-1})^*\boldsymbol{\omega}$ şu şekilde elde dilebilir :*

$s_1 \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{H} \longrightarrow \mathcal{P}^{-1}(V_1), \quad q \in \mathbb{H}$ *ve* $\mathbf{v} \in T_q(H)$ *için*

$$(s_1 \circ \varphi_1^{-1})(q) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+|q|^2}}, \frac{q}{\sqrt{1+|q|^2}} \right)$$

$$\left((s_1 \circ \varphi_1^{-1})^*\boldsymbol{\omega}\right)_q(\mathbf{v}) = \boldsymbol{\omega}_{(s_1 \circ \varphi_1^{-1})(q)}((s_1 \circ \varphi_1^{-1})_{*q}(\mathbf{v})) =$$

$$\mathrm{Im}\left(\left(\overline{\frac{1}{\sqrt{1+|q|^2}}}\right) dq^1((s_1 \circ \varphi_1^{-1})_{*q}(\mathbf{v})) + \left(\overline{\frac{q}{\sqrt{1+|q|^2}}}\right) dq^2((s_1 \circ \varphi_1^{-1})_{*q}(\mathbf{v})) \right) =$$

$$\mathrm{Im}\left(\frac{1}{\sqrt{1+|q|^2}}\, dq^1((s_1 \circ \varphi_1^{-1})_{*q}(\mathbf{v})) + \frac{\bar{q}}{\sqrt{1+|q|^2}}\, dq^2((s_1 \circ \varphi_1^{-1})_{*q}(\mathbf{v})) \right) =$$

$$\mathrm{Im}\left(\frac{1}{\sqrt{1+|q|^2}}\, ((s_1 \circ \varphi_1^{-1})_{*q}(\mathbf{v}))(q^1) + \frac{\bar{q}}{\sqrt{1+|q|^2}}\, ((s_1 \circ \varphi_1^{-1})_{*q}(\mathbf{v}))(q^2) \right) =$$

$$\mathrm{Im}\left(\frac{1}{\sqrt{1+|q|^2}}\, (\mathbf{v})(q^1 \circ (s_1 \circ \varphi_1^{-1})) + \frac{\bar{q}}{\sqrt{1+|q|^2}} (\mathbf{v})(q^2 \circ (s_1 \circ \varphi_1^{-1})) \right) =$$

$$\mathrm{Im}\left(\frac{1}{\sqrt{1+|q|^2}}\, d(q^1 \circ (s_1 \circ \varphi_1^{-1}))(q)(\mathbf{v}) + \frac{\bar{q}}{\sqrt{1+|q|^2}} d(q^2 \circ (s_1 \circ \varphi_1^{-1}))(q)(\mathbf{v}) \right)$$

Bu durumda

$$
\begin{aligned}
\big((s_1\circ\varphi_1^{-1})^*\boldsymbol{\omega}\big)(q)(\mathbf{v}) = \mathrm{Im}\Bigg(&\frac{1}{\sqrt{1+|q|^2}}\, d((q^1\circ(s_1\circ\varphi_1^{-1}))(q)(\mathbf{v}) \\
&+\frac{\bar q}{\sqrt{1+|q|^2}}\, d((q^2\circ(s_1\circ\varphi_1^{-1}))(q)(\mathbf{v})\Bigg)
\end{aligned} \tag{4.16}
$$

$$
(q^1\circ(s_1\circ\varphi_1^{-1}))(q) = \frac{1}{\sqrt{1+|q|^2}} \quad ve \quad (q^2\circ(s_1\circ\varphi_1^{-1}))(q) = \frac{q}{\sqrt{1+|q|^2}}
$$

$$
\begin{aligned}
d((q^2\circ(s_1\circ\varphi_1^{-1}))(q)) &= d\left(\frac{q}{\sqrt{1+|q|^2}}\right) = d\left(\frac{1}{\sqrt{1+|q|^2}}q\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+|q|^2}}dq + qd\left(\frac{1}{\sqrt{1+|q|^2}}\right)
\end{aligned}
$$

ve böylece eşitlik (4.16),

$$
\begin{gathered}
\big((s_1\circ\varphi_1^{-1})^*\boldsymbol{\omega}\big) = \\
\mathrm{Im}\left(\frac{1}{\sqrt{1+|q|^2}}d\left(\frac{1}{\sqrt{1+|q|^2}}\right) + \frac{\bar q}{\sqrt{1+|q|^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+|q|^2}}dq + qd\left(\frac{1}{\sqrt{1+|q|^2}}\right)\right)\right) \\
= \mathrm{Im}\left(\frac{1}{\sqrt{1+|q|^2}}d\left(\frac{1}{\sqrt{1+|q|^2}}\right) + \frac{\bar q}{1+|q|^2}dq + \frac{\bar q q}{\sqrt{1+|q|^2}}d\left(\frac{1}{\sqrt{1+|q|^2}}\right)\right) \\
= \mathrm{Im}\left(\frac{\bar q}{1+|q|^2}dq\right)
\end{gathered}
$$

halini alır. $\boldsymbol{\omega}$ *1-formunun* $s_2\circ\varphi_2^{-1}$ *ile geri çekilmişi ile birlikte son tablo şöyledir:*

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} = \big((s_1\circ\varphi_1^{-1})^*\boldsymbol{\omega}\big) &= \mathrm{Im}\left(\frac{\bar q}{1+|q|^2}dq\right) \\
\big((s_2\circ\varphi_2^{-1})^*\boldsymbol{\omega}\big) &= \mathrm{Im}\left(\frac{\bar q}{1+|q|^2}dq\right)
\end{aligned} \tag{4.17}
$$

Örnek 4.7 $U(1)\to S^3\to\mathbb{CP}^1$ *Hopf demeti üzerindeki*

$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{i}\mathrm{Im}(\bar z^1 dz^1 + \bar z^2 dz^2)$ *konneksiyon formunun* $s_1\circ\varphi_1^{-1}$ *ile* $\mathbb{C}$ *ye geri çekilmişi kuaterniyonik durumdakine benzer şekilde*

$$
(s_1\circ\varphi_1^{-1})^*\boldsymbol{\eta} = \mathcal{A} = \mathbf{i}\mathrm{Im}\left(\frac{\bar z}{1+|z|^2}dz\right) \tag{4.18}
$$

Eğer $g \in Sp(2)$ ise $\rho_g^* \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}$ olduğunda (bkz. (4.13)) $Sp(2)$ nin elemanı olmayan bir $g \in SL(2, \mathbb{H})$ için, yani Iwasawa dekompozisyonundan dolayı

$$\begin{aligned} g \in NA &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\lambda} \end{pmatrix} : n \in \mathbb{H}, \ \lambda > 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & n/\sqrt{\lambda} \\ 0 & 1/\sqrt{\lambda} \end{pmatrix} : n \in \mathbb{H}, \ \lambda > 0 \right\} \end{aligned}$$

için diğer bir ayar potensiyeli örneği şu şekilde verilebilir:

Örnek 4.8

$$(s_2 \circ \varphi_2^{-1})^*(\rho_{g^{-1}}^* \boldsymbol{\omega}) = \mathcal{A}_{\lambda,n}$$

$g \in NA$ ise $g^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\lambda} & -n/\sqrt{\lambda} \\ 0 & \sqrt{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
$\rho_g^* \boldsymbol{\omega}$ için (4.11) de elde edilen formülde g yerine yukarıdaki g^{-1} in girdileri olan a, b, c, d yerleştirilirse

$$\begin{aligned} \rho_{g^{-1}}^* \boldsymbol{\omega} &= \frac{1}{\frac{|q^1 - nq^2|^2}{\lambda} + \lambda |q^2|^2} \mathrm{Im} \left(\frac{\bar{q}^1 - \bar{q}^2 \bar{n}}{\lambda} dq^1 + \left(\frac{|n|^2 + \lambda^2}{\lambda} \bar{q}^2 + \frac{\bar{q}^1 n}{\lambda} \right) dq^2 \right) \\ &= \frac{1}{|q^1 - nq^2|^2 + \lambda^2 |q^2|^2} \mathrm{Im}((\bar{q}^1 - \bar{q}^2 \bar{n}) dq^1 + ((|n|^2 + \lambda^2) \bar{q}^2 - \bar{q}^1 n) dq^2) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda

$$(s_2 \circ \varphi_2^{-1})(q) = \left(\frac{q}{\sqrt{1 + |q|^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + |q|^2}} \right)$$

olmak üzere

$$
\begin{aligned}
(s_2\circ\varphi_2^{-1})^*(\rho_{g^{-1}}^*\boldsymbol{\omega}) &= \frac{1}{\left|\frac{q}{\sqrt{1+|q|^2}}-n\frac{1}{\sqrt{1+|q|^2}}\right|^2+\lambda^2\frac{1}{1+|q|^2}}\mathrm{Im}\Bigg(\frac{\bar q-\bar n}{\sqrt{1+|q|^2}}d\Big(\frac{1}{\sqrt{1+|q|^2}}q\Big)+ \\
&\quad \Big(\frac{|n|^2+\lambda^2-\bar q n}{\sqrt{1+|q|^2}}\Big)d\Big(\frac{1}{\sqrt{1+|q|^2}}\Big)\Bigg) \\
&= \frac{\sqrt{1+|q|^2}}{|q-n|^2+\lambda^2}\mathrm{Im}\Big((\bar q-\bar n)\Big(\frac{1}{\sqrt{1+|q|^2}}dq+qd(\frac{1}{\sqrt{1+|q|^2}})\Big)+ \\
&\quad (|n|^2+\lambda^2)d\Big(\frac{1}{\sqrt{1+|q|^2}}\Big)-\bar q n d\Big(\frac{1}{\sqrt{1+|q|^2}}\Big)\Big) \\
&= \frac{\sqrt{1+|q|^2}}{|q-n|^2+\lambda^2}\mathrm{Im}\Big(\frac{\bar q-\bar n}{\sqrt{1+|q|^2}}dq-\bar n q d\Big(\frac{1}{\sqrt{1+|q|^2}}\Big)- \\
&\quad \bar q n d\Big(\frac{1}{\sqrt{1+|q|^2}}\Big)\Big) \\
&= \frac{\sqrt{1+|q|^2}}{|q-n|^2+\lambda^2}\mathrm{Im}\Big(\frac{\bar q-\bar n}{\sqrt{1+|q|^2}}dq-(\bar n q+\bar q n)d\Big(\frac{1}{\sqrt{1+|q|^2}}\Big)\Big) \\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{\bar q-\bar n}{|q-n|^2+\lambda^2}dq\right).
\end{aligned}
$$

O halde herhangi bir $\lambda > 0$ ve herhangi bir $n\in\mathbb{H}$ için

$$
\mathcal{A}_{\lambda,n}=\mathrm{Im}\left(\frac{\bar q-\bar n}{|q-n|^2+\lambda^2}dq\right). \tag{4.19}
$$

Daha genel Hopf demetleri üzerinde yukarıda tanımlanan konneksiyonlar için birkaç ayar potansiyeli örneği daha verilebilir.

Örnek 4.9

$$
\begin{array}{ccc}
Sp(1) & \longrightarrow & S^{11} \\
 & & \Big\downarrow \mathcal{P} \\
 & & \mathbb{HP}^2
\end{array}
$$

Hopf demeti üzerindeki

$$
\boldsymbol{\omega}=\mathrm{Im}(\bar q^1 dq^1+\bar q^2 dq^2+\bar q^3 dq^3) \tag{4.20}
$$

konneksiyonu için ayar potansiyeli aşağıda hesaplanmıştır.

Bu demet için $(V_k, \Psi_k),\ k = 1,2,3$, standart trivializasyonları

$V_k = \left\{[q^1, q^2, q^3] \in \mathbb{HP}^2\ :\ q^k \neq 0\right\}$ ve $\Psi_k : \mathcal{P}^{-1}(V_k) \longrightarrow V_k \times Sp(1)$,

$\Psi_k(p) = \Psi_k(q^1, q^2, q^3) = (\mathcal{P}(p), \psi_k(p))$ şeklindedir, burada $\psi_k(q^1, q^2, q^3) = |q^k|^{-1} q^k$.

Bu trivializasyonlarla ilişkili doğal kesitler ise :

$$s_{V_1} = s_1 : V_1 \longrightarrow \mathcal{P}^{-1}(V_1), \qquad s_1(x) = (|q^1|, q^2(q^1)^{-1}|q^1|, q^3(q^1)^{-1}|q^1|)$$

$$s_{V_2} = s_2 : V_2 \longrightarrow \mathcal{P}^{-1}(V_2), \qquad s_2(x) = (q^1(q^2)^{-1}|q^2|, |q^2|, q^3(q^2)^{-1}|q^2|)$$

$$s_{V_3} = s_3 : V_3 \longrightarrow \mathcal{P}^{-1}(V_3), \qquad s_3(x) = (q^1(q^3)^{-1}|q^3|, q^2(q^3)^{-1}|q^3|, |q^3|)$$

şeklindedir.

Yukarıda verilen V_1, V_2 ve V_3, $\mathbb{HP}^2$ üzerinde aynı zamanda birer koordinat komşuluğudur ve karşılık gelen difeomorfizmler şu şekildedir :

$$\varphi_1 : V_1 \longrightarrow \mathbb{H}^2, \qquad \varphi_1([q^1, q^2, q^3]) = (q^2(q^1)^{-1}, q^3(q^1)^{-1})$$

$$\varphi_2 : V_2 \longrightarrow \mathbb{H}^2, \qquad \varphi_2([q^1, q^2, q^3]) = (q^1(q^2)^{-1}, q^3(q^2)^{-1})$$

$$\varphi_3 : V_3 \longrightarrow \mathbb{H}^2, \qquad \varphi_3([q^1, q^2, q^3]) = (q^1(q^3)^{-1}, q^2(q^3)^{-1})$$

tersleri ise

$$\varphi_1^{-1} : \mathbb{H}^2 \longrightarrow V_1, \qquad \varphi_1^{-1}(q^1, q^2) = [1, q^1, q^2]$$

$$\varphi_2^{-1} : \mathbb{H}^2 \longrightarrow V_2, \qquad \varphi_2^{-1}(q^1, q^2) = [q^1, 1, q^2]$$

$$\varphi_3^{-1} : \mathbb{H}^2 \longrightarrow V_3, \qquad \varphi_3^{-1}(q^1, q^2) = [q^1, q^2, 1]$$

şeklindedir.

Bu durumda $s_1 \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathcal{P}^{-1}(V_1)$, $(s_1 \circ \varphi_1^{-1})(q^1, q^2) = s_1([1, q^1, q^2]) = (1, q^1, q^2)$ dir fakat $(1, q^1, q^2)$ genel olarak S^{11} in elemanı olmadığından φ_1^{-1} in denk başka bir tanımlanışı olan

$$\varphi_1^{-1} : \mathbb{H}^2 \longrightarrow V_1,\ \varphi_1^{-1}(q^1, q^2) = \left[\frac{1}{\sqrt{1+|q^1|^2+|q^2|^2}}, \frac{q^1}{\sqrt{1+|q^1|^2+|q^2|^2}}, \frac{q^2}{\sqrt{1+|q^1|^2+|q^2|^2}}\right]$$

kullanılacaktır. Bu durumda

$$s_1 \circ \varphi_1^{-1}(q^1, q^2) = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + |q^1|^2 + |q^2|^2}}, \frac{q^1}{\sqrt{1 + |q^1|^2 + |q^2|^2}}, \frac{q^2}{\sqrt{1 + |q^1|^2 + |q^2|^2}} \right).$$

ve (4.20) de verilen $\boldsymbol{\omega}$ konneksiyonunun $s_1 \circ \varphi_1^{-1}$ ile $\mathbb{H}^2 = \mathbb{R}^8$ e geri çekilmişi şu şekildedir:

$$(s_1 \circ \varphi_1^{-1})^* \boldsymbol{\omega} = \mathrm{Im} \left(\frac{1}{\sqrt{1+|q^1|^2+|q^2|^2}} d \left(\frac{1}{\sqrt{1+|q^1|^2+|q^2|^2}} \right) + \frac{\bar{q}^1}{\sqrt{1+|q^1|^2+|q^2|^2}} d \left(\frac{q^1}{\sqrt{1+|q^1|^2+|q^2|^2}} \right) + \frac{\bar{q}^2}{\sqrt{1+|q^1|^2+|q^2|^2}} d \left(\frac{q^2}{\sqrt{1+|q^1|^2+|q^2|^2}} \right) \right) =$$

$$\mathrm{Im} \left(\frac{\bar{q}^1}{\sqrt{1+|q^1|^2+|q^2|^2}} d \left(\frac{q^1}{\sqrt{1+|q^1|^2+|q^2|^2}} \right) + \frac{\bar{q}^2}{\sqrt{1+|q^1|^2+|q^2|^2}} d \left(\frac{q^2}{\sqrt{1+|q^1|^2+|q^2|^2}} \right) \right) =$$

$$\mathrm{Im} \left(\frac{\bar{q}^1}{\sqrt{1+|q^1|^2+|q^2|^2}} \left(\frac{1}{\sqrt{1+|q^1|^2+|q^2|^2}} dq^1 + q^1 d \left(\frac{1}{\sqrt{1+|q^1|^2+|q^2|^2}} \right) \right) + \frac{\bar{q}^2}{\sqrt{1+|q^1|^2+|q^2|^2}} \left(\frac{1}{\sqrt{1+|q^1|^2+|q^2|^2}} dq^2 + q^2 d \left(\frac{1}{\sqrt{1+|q^1|^2+|q^2|^2}} \right) \right) \right) =$$

$$\mathrm{Im} \left(\frac{\bar{q}^1}{1+|q^1|^2+|q^2|^2} dq^1 + \frac{|q^1|^2}{\sqrt{1+|q^1|^2+|q^2|^2}} d \left(\frac{1}{\sqrt{1+|q^1|^2+|q^2|^2}} \right) + \frac{\bar{q}^2}{1+|q^1|^2+|q^2|^2} dq^2 + \frac{|q^2|^2}{\sqrt{1+|q^1|^2+|q^2|^2}} d \left(\frac{1}{\sqrt{1+|q^1|^2+|q^2|^2}} \right) \right)$$

$$= \mathrm{Im} \left(\frac{\bar{q}^1 dq^1 + \bar{q}^2 dq^2}{1+|q^1|^2+|q^2|^2} \right)$$

yani,

$$\mathcal{A} = (s_1 \circ \varphi_1^{-1})^* \boldsymbol{\omega} = \mathrm{Im} \left(\frac{\bar{q}^1 dq^1 + \bar{q}^2 dq^2}{1 + |q^1|^2 + |q^2|^2} \right) \tag{4.21}$$

Benzer şekilde

$$\begin{aligned} (s_2 \circ \varphi_2^{-1})^* \boldsymbol{\omega} &= \mathrm{Im} \left(\frac{\bar{q}^1 dq^1 + \bar{q}^2 dq^2}{1 + |q^1|^2 + |q^2|^2} \right) \\ (s_3 \circ \varphi_3^{-1})^* \boldsymbol{\omega} &= \mathrm{Im} \left(\frac{\bar{q}^1 dq^1 + \bar{q}^2 dq^2}{1 + |q^1|^2 + |q^2|^2} \right) \end{aligned}$$

Örnek 4.10

$$\begin{array}{ccc} U(1) & \longrightarrow & S^5 \\ & & \downarrow \mathcal{P} \\ & & \mathbb{CP}^2 \end{array}$$

Hopf demeti üzerindeki

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{i}\mathrm{Im}(\bar{z}^1 dz^1 + \bar{z}^2 dz^2 + \bar{z}^3 dz^3) \tag{4.22}$$

konneksiyonunun $\mathbb{CP}^2$ *nin* s_i *doğal kesitleri ve* φ_i *kart dönüşümleri kullanılarak* $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ *e geri çekilmişleri sırasıyla*

$$
\begin{aligned}
(s_1 \circ \varphi_1^{-1})^* \boldsymbol{\eta} &= \mathbf{i}\mathrm{Im}\left(\frac{\bar{z}^1 dz^1 + \bar{z}^2 dz^2}{1 + |z^1|^2 + |z^2|^2}\right) && (4.23)\\
(s_2 \circ \varphi_2^{-1})^* \boldsymbol{\eta} &= \mathbf{i}\mathrm{Im}\left(\frac{\bar{z}^1 dz^1 + \bar{z}^2 dz^2}{1 + |z^1|^2 + |z^2|^2}\right) && (4.24)\\
(s_3 \circ \varphi_3^{-1})^* \boldsymbol{\eta} &= \mathbf{i}\mathrm{Im}\left(\frac{\bar{z}^1 dz^1 + \bar{z}^2 dz^2}{1 + |z^1|^2 + |z^2|^2}\right) && (4.25)
\end{aligned}
$$

Son örnek olarak

Örnek 4.11

$$
\begin{tikzcd}
U(1) \arrow[r] & S^7 \arrow[d, "\mathcal{P}"] \\
& \mathbb{CP}^3
\end{tikzcd}
$$

Hopf demeti üzerindeki

$$
\boldsymbol{\eta} = \mathbf{i}\mathrm{Im}(\bar{z}^1 dz^1 + \bar{z}^2 dz^2 + \bar{z}^3 dz^3 + \bar{z}^4 dz^4) \tag{4.26}
$$

konneksiyonunun $\mathbb{C}^3 = \mathbb{R}^6$ *ya geri çekilmişleri olan*

$$
\mathcal{A} \;=\; (s_1 \circ \varphi_1^{-1})^* \boldsymbol{\eta} = \mathbf{i}\mathrm{Im}\left(\frac{\bar{z}^1 dz^1 + \bar{z}^2 dz^2 + \bar{z}^3 dz^3}{1 + |z^1|^2 + |z^2|^2 + |z^3|^2}\right) \tag{4.27}
$$

verilebilir.

5 EĞRİLİK ve GAUGE (AYAR) ALANLARI

$\mathcal{P} : P \longrightarrow X$, bir C^∞ asli G-lif demeti ve $\boldsymbol{\omega}$, P üzerinde bir konneksiyon olsun. Her bir $p \in P$ noktasında $T_p(P) = \mathrm{Hor}_p(P) \oplus \mathrm{Vert}_p(P)$ dekompozisyonu geçerli olduğundan herhangi bir $\mathbf{v} \in T_p(P)$ tanjant vektörü $\mathbf{v} = \mathbf{v}^H + \mathbf{v}^V$ şeklinde tek türlü yazılabilir, burada $\mathbf{v}^H \in \mathrm{Hor}_p(P)$, $\mathbf{v}$ nin **yatay kısmı** ve $\mathbf{v}^V \in \mathrm{Vert}_p(P)$, $\mathbf{v}$ nin **düşey kısmı** dır. $\boldsymbol{\omega}$ konneksiyonu G nin Lie cebiri $\mathcal{G}$-değerli bir 1-formdur ve dış türevi $d\boldsymbol{\omega}$, P üzerinde $\mathcal{G}$-değerli bir 2-formdur. Her bir $p \in P$ ve her $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p(P)$ için

$$\boldsymbol{\Omega}(p)(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \boldsymbol{\Omega}_p(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (d\boldsymbol{\omega})_p(\mathbf{v}^H, \mathbf{w}^H)$$

şeklinde tanımlı P üzerinde $\mathcal{G}$-değerli $\boldsymbol{\Omega}$ 2-formuna $\boldsymbol{\omega}$ nın **eğriliği** denir.

φ ve ψ $\mathcal{G}$-değerli 1-formlar iken onların Lie parantezi $[\varphi, \psi]$, $\mathcal{G}$-değerli bir 2-formdur ve

$$[\varphi, \psi](X, Y) = [\varphi(X), \psi(Y)] - [\varphi(Y), \psi(X)]$$

eşitliği ile tanımlanır, burada X ve Y vektör alanlarıdır.

φ ve ψ $\mathcal{G}$-değerli 1-formlar iken onların wedge çarpımı girdileri 1-formlar olan matrislerinin bilinen manada çarpımı şeklinde tanımlanır ve $\varphi \wedge \psi$ şeklinde gösterilir. Buna göre,

1. $[\varphi, \psi] = \varphi \wedge \psi + \psi \wedge \varphi$
2. $\varphi \wedge \varphi = \frac{1}{2}[\varphi, \varphi]$

özellikleri geçerlidir (bkz. [8]).

Teorem 5.1 ***(Cartan Yapı Denklemi)***

$\mathcal{P} : P \longrightarrow X$ bir C^∞ asli G-lif demeti, $\boldsymbol{\omega}$ bu demet üzerinde bir konneksiyon ve

$\boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{\omega}$ nın eğriliği olsun. Bu durumda

$$\boldsymbol{\Omega} = d\boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}[\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}].$$

Bir $\mathcal{P} : P \longrightarrow X$ asli G-lif demeti üzerindeki bir $\boldsymbol{\omega}$ konneksiyonunun eğriliği $\boldsymbol{\Omega}$ ya (fizik literatüründe) **ayar alanı** denir ve $\boldsymbol{\Omega}$ nın demetin bir yerel kesiti s ile geri çekilmişi $s^*\boldsymbol{\Omega}$ da (yine fizik literatüründe) **local field strength** olarak adlandırılır ve genellikle $\mathcal{F}_s$ ile gösterilir. $\mathcal{A} = s^*\boldsymbol{\omega}$ ayar potensiyeline karşılık gelen local field strength $\mathcal{F} = s^*\boldsymbol{\Omega}$ örnekleri verebilmek için Cartan Yapı Denklemi (nin yerel versiyonu) kullanılabilir, yani

$$s^*\boldsymbol{\Omega} = d(s^*\boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{2}[(s^*\boldsymbol{\omega}), (s^*\boldsymbol{\omega})]. \tag{5.1}$$

(bkz. [3], (5.2.2))

Denklem (5.1), ayar potensiyeli $\mathcal{A} = s^*\boldsymbol{\omega}$ ve field strength $\mathcal{F} = s^*\boldsymbol{\Omega}$ cinsinden tekrar yazılırsa

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \tag{5.2}$$

halini alır.

Örnek 5.2

İlk örnek olarak $Sp(1) \to S^7 \to \mathbb{HP}^1$ Hopf demeti üzerindeki $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{Im}(\bar{q}^1 dq^1 + \bar{q}^2 dq^2)$ konneksiyonu için (4.17) de tespit edilen $\mathcal{A}$ ayar potansiyeline karşılık gelen $\mathcal{F}$ gauge field verilebilir.

$\mathcal{A}$ nın reel koordinatlarda ifadesi $q = x + y\mathrm{i} + u\mathrm{j} + v\mathrm{k}$ olmak üzere şu şekildedir:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \mathcal{A}_1\mathrm{i} + \mathcal{A}_2\mathrm{j} + \mathcal{A}_3\mathrm{k} \\
&= \frac{1}{1 + x^2 + y^2 + u^2 + v^2}\Big((-ydx + xdy + vdu - udv)\mathrm{i} \\
&\quad (-udx - vdy + xdu + ydv)\mathrm{j} + (-vdx + udy - ydu + xdv)\mathrm{k}\Big).
\end{aligned}$$

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A} + \mathcal{A}\wedge\mathcal{A} = d\mathcal{A}_1\mathrm{i} + d\mathcal{A}_2\mathrm{j} + d\mathcal{A}_3\mathrm{k} + \big(2\mathcal{A}_2\wedge\mathcal{A}_3\mathrm{i} - 2\mathcal{A}_1\wedge\mathcal{A}_3\mathrm{j} + 2\mathcal{A}_1\wedge\mathcal{A}_2\mathrm{k}\big)$$

$$= (d\mathcal{A}_1 + 2\mathcal{A}_2\wedge\mathcal{A}_3)\mathrm{i} + (d\mathcal{A}_2 - 2\mathcal{A}_1\wedge\mathcal{A}_3)\mathrm{j} + (d\mathcal{A}_3 + 2\mathcal{A}_1\wedge\mathcal{A}_2)\mathrm{k}$$

$$\mathcal{A}_1 = \frac{1}{1+x^2+y^2+u^2+v^2}\Big(-ydx + xdy + vdu - udv\Big)$$

$$\mathcal{A}_2 = \frac{1}{1+x^2+y^2+u^2+v^2}\Big(-udx - vdy + xdu + ydv\Big)$$

$$\mathcal{A}_3 = \frac{1}{1+x^2+y^2+u^2+v^2}\Big(-vdx + udy - ydu + xdv\Big)$$

$$d\mathcal{A}_1 = \frac{2}{(1+x^2+y^2+u^2+v^2)^2}\Big((1+u^2+v^2)dx\wedge dy - (vx+uy)dx\wedge du$$
$$+ (ux-vy)dx\wedge dv + (ux-vy)dy\wedge du + (vx+uy)dy\wedge dv - (1+x^2+y^2)du\wedge dv\Big)$$

$$d\mathcal{A}_2 = \frac{2}{(1+x^2+y^2+u^2+v^2)^2}\Big((vx-uy)dx\wedge dy + (1+v^2+y^2)dx\wedge du - (uv+$$
$$xy)dx\wedge dv - (uv+xy)dy\wedge du + (1+x^2+u^2)dy\wedge dv + (vx-uy)du\wedge dv\Big)$$

$$d\mathcal{A}_3 = \frac{2}{(1+x^2+y^2+u^2+v^2)^2}\Big(-(ux+vy)dx\wedge dy + (-uv+xy)dx\wedge du + (1+$$
$$y^2+u^2)dx\wedge dv - (1+x^2+v^2)dy\wedge du - (-uv+xy)dy\wedge dv - (ux+vy)du\wedge dv\Big)$$

$$\mathcal{A}_2\wedge\mathcal{A}_3 = \frac{1}{(1+x^2+y^2+u^2+v^2)^2}\Big((-u^2-v^2)dx\wedge dy + (vx+uy)dx\wedge du +$$
$$(-ux+vy)dx\wedge dv + (-ux+vy)dy\wedge du - (vx+uy)dy\wedge dv + (x^2+y^2)du\wedge dv\Big)$$

$$\mathcal{A}_1\wedge\mathcal{A}_3 = \frac{1}{(1+x^2+y^2+u^2+v^2)^2}\Big((vx-uy)dx\wedge dy + (v^2+y^2)dx\wedge du - (uv+$$
$$xy)dx\wedge dv - (uv+xy)dy\wedge du + (u^2+x^2)dy\wedge dv + (vx-uy)du\wedge dv\Big)$$

$$\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 = \frac{1}{(1+x^2+y^2+u^2+v^2)^2}\Big((ux+vy)dx\wedge dy + (uv-xy)dx\wedge du - (u^2+ y^2)dx\wedge dv + (x^2+v^2)dy\wedge du + (-uv+xy)dy\wedge dv + (ux+vy)du\wedge dv\Big).$$

Böylece,

$$\begin{aligned}
d\mathcal{A}_1 + 2\mathcal{A}_2 \wedge \mathcal{A}_3 &= \frac{2}{(1+x^2+y^2+u^2+v^2)^2}(dx\wedge dy - du\wedge dv)\\
d\mathcal{A}_2 - 2\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_3 &= \frac{2}{(1+x^2+y^2+u^2+v^2)^2}(dx\wedge du + dy\wedge dv)\\
d\mathcal{A}_3 + 2\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 &= \frac{2}{(1+x^2+y^2+u^2+v^2)^2}(dx\wedge dv - dy\wedge du)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\mathcal{F} = \frac{2}{(1+x^2+y^2+u^2+v^2)^2}\Big(&(dx\wedge dy - du\wedge dv)\mathrm{i}+\\ &(dx\wedge du + dy\wedge dv)\mathrm{j} + (dx\wedge dv - dy\wedge du)\mathrm{k}\Big)\end{aligned} \tag{5.3}$$

Örnek 5.3

Benzer şekilde (4.19) da tespit edilen $\mathcal{A}_{\lambda,n}$ ayar potansiyeline karşılık gelen gauge field aşağıdaki gibidir

$$\mathcal{F}_{\lambda,n} = \frac{\lambda^2}{(|q-n|^2+\lambda^2)^2} d\bar{q}\wedge dq$$

ve reel koordinatlarda şu şekilde ifade edilebilir :

$$q = x + y\mathrm{i} + u\mathrm{j} + v\mathrm{k}, \quad n = n_1 + n_2\mathrm{i} + n_3\mathrm{j} + n_4\mathrm{k}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\lambda,n} =& \frac{2\lambda^2}{((x-n_1)^2+(y-n_2)^2+(u-n_3)^2+(v-n_4)^2+\lambda^2)^2}\Big((dx\wedge dy - du\wedge dv)\mathrm{i}+\\ &(dx\wedge du + dy\wedge dv)\mathrm{j} + (dx\wedge dv - dy\wedge du)\mathrm{k}\Big).\end{aligned}$$

Örnek 5.4

$Sp(1) \to S^{11} \to \mathbb{HP}^2$ Hopf demeti üzerindeki $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{Im}(\bar{q}^1 dq^1 + \bar{q}^2 dq^2 + \bar{q}^3 dq^3)$ konneksiyonu için

$$\mathcal{A} = \mathrm{Im}\left(\frac{\bar{q}^1 dq^1 + \bar{q}^2 dq^2}{1+|q^1|^2+|q^2|^2}\right)$$

ayar potansiyeline karşılık gelen $\mathcal{F}$ şu şekildedir:

$q^1 = x_1 + x_2\mathrm{i} + x_3\mathrm{j} + x_4\mathrm{k}$ ve $q^2 = x_5 + x_6\mathrm{i} + x_7\mathrm{j} + x_8\mathrm{k}$ olmak üzere aşağıda $\mathcal{A}$ nın reel koordinatlardaki ifadesi verilmiştir

$$\mathcal{A}_1 = \Big(1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2\Big)^{-1}\Bigg(x_1dx_2 - x_2dx_1 - x_3dx_4 + x_4dx_3 + x_5dx_6 - x_6dx_5 - x_7dx_8 + x_8dx_7\Bigg)$$

$$\mathcal{A}_2 = \Big(1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2\Big)^{-1}\Bigg(x_1dx_3 + x_2dx_4 - x_3dx_1 - x_4dx_2 + x_5dx_7 + x_6dx_8 - x_7dx_5 - x_8dx_6\Bigg)$$

$$\mathcal{A}_3 = \Big(1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2\Big)^{-1}\Bigg(x_1dx_4 - x_2dx_3 + x_3dx_2 - x_4dx_1 + x_5dx_8 - x_6dx_7 + x_7dx_6 - x_8dx_5\Bigg)$$

böylece,

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} = (d\mathcal{A}_1 + 2\mathcal{A}_2 \wedge \mathcal{A}_3)\mathrm{i} + (d\mathcal{A}_2 - 2\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_3)\mathrm{j} + (d\mathcal{A}_3 + 2\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2)\mathrm{k}$$

ve

$$\begin{aligned}
d\mathcal{A}_1 + 2\mathcal{A}_2 \wedge \mathcal{A}_3 = \tfrac{2}{(1+x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_8^2)^2}\Bigg(&(1 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2)dx_1 \wedge dx_2 + \\
&(-x_2x_5 + x_1x_6 - x_4x_7 + x_3x_8)dx_1 \wedge dx_5 + (-x_1x_5 - x_2x_6 - x_3x_7 - x_4x_8)dx_1 \wedge dx_6 + \\
&(x_4x_5 + x_3x_6 - x_2x_7 - x_1x_8)dx_1 \wedge dx_7 + (-x_3x_5 + x_4x_6 + x_1x_7 - x_2x_8)dx_1 \wedge dx_8 + \\
&(x_1x_5 + x_2x_6 + x_3x_7 + x_4x_8)dx_2 \wedge dx_5 + (-x_2x_5 + x_1x_6 - x_4x_7 + x_3x_8)dx_2 \wedge dx_6 + \\
&(-x_3x_5 + x_4x_6 + x_1x_7 - x_2x_8)dx_2 \wedge dx_7 + (-x_4x_5 - x_3x_6 + x_2x_7 + x_1x_8)dx_2 \wedge dx_8 + \\
&(-1 - x_5^2 - x_6^2 - x_7^2 - x_8^2)dx_3 \wedge dx_4 + (x_4x_5 + x_3x_6 - x_2x_7 - x_1x_8)dx_3 \wedge dx_5 + \\
&(-x_3x_5 + x_4x_6 + x_1x_7 - x_2x_8)dx_3 \wedge dx_6 + (x_2x_5 - x_1x_6 + x_4x_7 - x_3x_8)dx_3 \wedge dx_7 + \\
&(x_1x_5 + x_2x_6 + x_3x_7 + x_4x_8)dx_3 \wedge dx_8 + (-x_3x_5 + x_4x_6 + x_1x_7 - x_2x_8)dx_4 \wedge dx_5 + \\
&(-x_4x_5 - x_3x_6 + x_2x_7 + x_1x_8)dx_4 \wedge dx_6 + (-x_1x_5 - x_2x_6 - x_3x_7 - x_4x_8)dx_4 \wedge dx_7 + \\
&(x_2x_5 - x_1x_6 + x_4x_7 - x_3x_8)dx_4 \wedge dx_8 + (1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)dx_5 \wedge dx_6 + \\
&(-1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2)dx_7 \wedge dx_8\Bigg)
\end{aligned}$$

$$d\mathcal{A}_2 - 2\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_3 = \frac{2}{(1+x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_8^2)^2}\Big((1+x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_8^2)dx_1 \wedge dx_3 +$$

$$(-x_3x_5 + x_4x_6 + x_1x_7 - x_2x_8)dx_1 \wedge dx_5 + (-x_4x_5 - x_3x_6 + x_2x_7 + x_1x_8)dx_1 \wedge dx_6 +$$

$$(-x_1x_5 - x_2x_6 - x_3x_7 - x_4x_8)dx_1 \wedge dx_7 + (x_2x_5 - x_1x_6 + x_4x_7 - x_3x_8)dx_1 \wedge dx_8 +$$

$$(1 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2)dx_2 \wedge dx_4 + (-x_4x_5 - x_3x_6 + x_2x_7 + x_1x_8)dx_2 \wedge dx_5 +$$

$$(x_3x_5 - x_4x_6 - x_1x_7 + x_2x_8)dx_2 \wedge dx_6 + (-x_2x_5 + x_1x_6 - x_4x_7 + x_3x_8)dx_2 \wedge dx_7 +$$

$$(-x_1x_5 - x_2x_6 - x_3x_7 - x_4x_8)dx_2 \wedge dx_8 + (x_1x_5 + x_2x_6 + x_3x_7 + x_4x_8)dx_3 \wedge dx_5 +$$

$$(-x_2x_5 + x_1x_6 - x_4x_7 + x_3x_8)dx_3 \wedge dx_6 + (-x_3x_5 + x_4x_6 + x_1x_7 - x_2x_8)dx_3 \wedge dx_7 +$$

$$(-x_4x_5 - x_3x_6 + x_2x_7 + x_1x_8)dx_3 \wedge dx_8 + (x_2x_5 - x_1x_6 + x_4x_7 - x_3x_8)dx_4 \wedge dx_5 +$$

$$(x_1x_5 + x_2x_6 + x_3x_7 + x_4x_8)dx_4 \wedge dx_6 + (-x_4x_5 - x_3x_6 + x_2x_7 + x_1x_8)dx_4 \wedge dx_7 +$$

$$(x_3x_5 - x_4x_6 - x_1x_7 + x_2x_8)dx_4 \wedge dx_8 + (1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)dx_5 \wedge dx_7 +$$

$$(1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)dx_6 \wedge dx_8$$

$$d\mathcal{A}_3 + 2\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 = \frac{2}{(1+x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_8^2)^2}\Big((1+x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_8^2)dx_1 \wedge dx_4 +$$

$$(-x_4x_5 - x_3x_6 + x_2x_7 + x_1x_8)dx_1 \wedge dx_5 + (x_3x_5 - x_4x_6 - x_1x_7 + x_2x_8)dx_1 \wedge dx_6 +$$

$$(-x_2x_5 + x_1x_6 - x_4x_7 + x_3x_8)dx_1 \wedge dx_7 + (-x_1x_5 - x_2x_6 - x_3x_7 - x_4x_8)dx_1 \wedge dx_8 +$$

$$(-1 - x_5^2 - x_6^2 - x_7^2 - x_8^2)dx_2 \wedge dx_3 + (x_3x_5 - x_4x_6 - x_1x_7 + x_2x_8)dx_2 \wedge dx_5 +$$

$$(x_4x_5 + x_3x_6 - x_2x_7 - x_1x_8)dx_2 \wedge dx_6 + (x_1x_5 + x_2x_6 + x_3x_7 + x_4x_8)dx_2 \wedge dx_7 +$$

$$(-x_2x_5 + x_1x_6 - x_4x_7 + x_3x_8)dx_2 \wedge dx_8 + (-x_2x_5 + x_1x_6 - x_4x_7 + x_3x_8)dx_3 \wedge dx_5 +$$

$$(-x_1x_5 - x_2x_6 - x_3x_7 - x_4x_8)dx_3 \wedge dx_6 + (x_4x_5 + x_3x_6 - x_2x_7 - x_1x_8)dx_3 \wedge dx_7 +$$

$$(-x_3x_5 + x_4x_6 + x_1x_7 - x_2x_8)dx_3 \wedge dx_8 + (x_1x_5 + x_2x_6 + x_3x_7 + x_4x_8)dx_4 \wedge dx_5 +$$

$$(-x_2x_5 + x_1x_6 - x_4x_7 + x_3x_8)dx_4 \wedge dx_6 + (-x_3x_5 + x_4x_6 + x_1x_7 - x_2x_8)dx_4 \wedge dx_7 +$$

$$(-x_4x_5 - x_3x_6 + x_2x_7 + x_1x_8)dx_4 \wedge dx_8 + (1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)dx_5 \wedge dx_8 +$$

$$(-1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2)dx_6 \wedge dx_7$$

elde edilir. Biraz daha düzenlenmiş şekilde aşağıdaki gibi de ifade edilebilir:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F} \;=\; & \frac{2}{(1+x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_8^2)^2}\Bigg(\bigg((1+x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_8^2)dx_1\wedge dx_2+\\
& (-1-x_5^2-x_6^2-x_7^2-x_8^2)dx_3\wedge dx_4+\\
& (-x_3x_5+x_4x_6+x_1x_7-x_2x_8)(dx_1\wedge dx_8+dx_2\wedge dx_7+dx_3\wedge dx_6+dx_4\wedge dx_5)+\\
& (x_4x_5+x_3x_6-x_2x_7-x_1x_8)(dx_1\wedge dx_7-dx_2\wedge dx_8+dx_3\wedge dx_5-dx_4\wedge dx_6)+\\
& (x_1x_5+x_2x_6+x_3x_7+x_4x_8)(-dx_1\wedge dx_6+dx_2\wedge dx_5+dx_3\wedge dx_8-dx_4\wedge dx_7)+\\
& (-x_2x_5+x_1x_6-x_4x_7+x_3x_8)(dx_1\wedge dx_5+dx_2\wedge dx_6-dx_3\wedge dx_7-dx_4\wedge dx_8)+\\
& (1+x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)dx_5\wedge dx_6+(-1-x_1^2-x_2^2-x_3^2-x_4^2)dx_7\wedge dx_8\bigg)\mathrm{i}+\\
& \bigg((1+x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_8^2)(dx_1\wedge dx_3+dx_2\wedge dx_4)+\\
& (-x_3x_5+x_4x_6+x_1x_7-x_2x_8)(dx_1\wedge dx_5-dx_2\wedge dx_6+dx_3\wedge dx_7-dx_4\wedge dx_8)+\\
& (-x_4x_5-x_3x_6+x_2x_7+x_1x_8)(dx_1\wedge dx_6+dx_2\wedge dx_5+dx_3\wedge dx_8+dx_4\wedge dx_7)+\\
& (-x_1x_5-x_2x_6-x_3x_7-x_4x_8)(dx_1\wedge dx_7+dx_2\wedge dx_8-dx_3\wedge dx_5-dx_4\wedge dx_6)+\\
& (x_2x_5-x_1x_6+x_4x_7-x_3x_8)(dx_1\wedge dx_8-dx_2\wedge dx_7-dx_3\wedge dx_6+dx_4\wedge dx_5)+\\
& (1+x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)(dx_5\wedge dx_7+dx_6\wedge dx_8)\bigg)\mathrm{j}+\\
& \bigg((1+x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_8^2)(dx_1\wedge dx_4-dx_2\wedge dx_3)+\\
& (-x_4x_5-x_3x_6+x_2x_7+x_1x_8)(dx_1\wedge dx_5-dx_2\wedge dx_6-dx_3\wedge dx_7+dx_4\wedge dx_8)+\\
& (x_3x_5-x_4x_6-x_1x_7+x_2x_8)(dx_1\wedge dx_6+dx_2\wedge dx_5-dx_3\wedge dx_8-dx_4\wedge dx_7)+\\
& (-x_2x_5+x_1x_6-x_4x_7+x_3x_8)(dx_1\wedge dx_7+dx_2\wedge dx_8+dx_3\wedge dx_5+dx_4\wedge dx_6)+\\
& (-x_1x_5-x_2x_6-x_3x_7-x_4x_8)(dx_1\wedge dx_8-dx_2\wedge dx_7+dx_3\wedge dx_6-dx_4\wedge dx_5)+\\
& (1+x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)(dx_5\wedge dx_8-dx_6\wedge dx_7)\bigg)\mathrm{k}\Bigg).
\end{aligned}
$$

Örnek 5.5

$U(1)\to S^5\to\mathbb{CP}^2$ Hopf demeti üzerindeki $\boldsymbol{\eta}=\mathbf{i}\mathrm{Im}(\bar{z}^1dz^1+\bar{z}^2dz^2+\bar{z}^3dz^3)$ konneksiyonu için $\mathcal{A}=\mathbf{i}\mathrm{Im}\left(\frac{\bar{z}^1dz^1+\bar{z}^2dz^2}{1+|z^1|^2+|z^2|^2}\right)$ ayar potansiyeline karşılık gelen $\mathcal{F}$ gauge field

şu şekildedir :

$z^1 = x_1 + y_1\mathrm{i}$ ve $z^2 = x_2 + y_2\mathrm{i}$ olmak üzere $\mathcal{A}$ nın reel koordinatlardaki ifadesi

$\mathcal{A} = \frac{1}{1+x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2}(-y_1dx_1 + x_1dy_1 - y_2dx_2 + x_2dy_2)\mathrm{i}$

$$\mathcal{F} = \frac{2}{(1+x_1^2+x_2^2+y_1^2+y_2^2)^2}\Big((-x_2y_1 + x_1y_2)dx_1 \wedge dx_2 + (1 + x_2^2 + y_2^2)dx_1 \wedge dy_1$$
$$(-x_1x_2 - y_1y_2)dx_1 \wedge dy_2 + (-x_1x_2 - y_1y_2)dx_2 \wedge dy_1 + (1 + x_1^2 + y_1^2)dx_2 \wedge dy_2 +$$
$$(-x_2y_1 + x_1y_2)dy_1 \wedge dy_2\Big)\mathrm{i}$$

Örnek 5.6 $U(1) \to S^7 \to \mathbb{CP}^3$ *Hopf demeti üzerindeki* $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{i}\mathrm{Im}(\bar{z}^1dz^1 + \bar{z}^2dz^2 + \bar{z}^3dz^3 + \bar{z}^4dz^4)$ *konneksiyonu için (4.27) de tespit edilen* $\mathcal{A} = \mathbf{i}\mathrm{Im}\left(\frac{\bar{z}^1dz^1+\bar{z}^2dz^2+\bar{z}^3dz^3}{1+|z^1|^2+|z^2|^2+|z^3|^2}\right)$ *ayar potansiyeline karşılık gelen* $\mathcal{F}$ *gauge field şu şekildedir :*

$z^1 = x_1 + y_1\mathrm{i},\ z^2 = x_2 + y_2\mathrm{i},\ z^3 = x_3 + y_3\mathrm{i}$ olmak üzere $\mathcal{A}$ nın reel koordinatlardaki ifadesi

$\mathcal{A} = \frac{1}{1+x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2+x_3^2+y_3^2}\big(-y_1dx_1 - y_2dx_2 - y_3dx_3 + x_1dy_1 + x_2dy_2 + x_3dy_3\big)\mathrm{i}$

$$\mathcal{F} = \frac{2}{(1+x_1^2+x_2^2+x_3^2+y_1^2+y_2^2+y_3^2)^2}\Big((-x_2y_1 + x_1y_2)dx_1 \wedge dx_2 +$$
$$(1 + x_2^2 + x_3^2 + y_2^2 + y_3^2)dx_1 \wedge dy_1 + (-x_1x_2 - y_1y_2)dx_1 \wedge dy_2 +$$
$$(-x_1x_3 - y_1y_3)dx_1 \wedge dy_3 + (-x_3y_2 + x_2y_3)dx_2 \wedge dx_3 +$$
$$(-x_1x_2 - y_1y_2)dx_2 \wedge dy_1 + (1 + x_1^2 + x_3^2 + y_1^2 + y_3^2)dx_2 \wedge dy_2 +$$
$$(-x_2x_3 - y_2y_3)dx_2 \wedge dy_3 + (-x_1x_3 - y_1y_3)dx_3 \wedge dy_1 +$$
$$(-x_2x_3 - y_2y_3)dx_3 \wedge dy_2 + (1 + x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2)dx_3 \wedge dy_3 +$$
$$(-x_2y_1 + x_1y_2)dy_1 \wedge dy_2 + (-x_3y_1 + x_1y_3)dy_1 \wedge dy_3 + (-x_3y_2 + x_2y_3)dy_2 \wedge dy_3\Big)\mathrm{i}$$

Hodge * operatörü

V reel vektör uzayı ve $<,>$ da V üzerinde bir iç çarpım olsun. Λ^kV, V üzerindeki k-formların uzayı olmak üzere, V üzerindeki iç çarpımı yardımıyla Λ^kV üzerinde de bir iç çarpım tanımlanabilir. Bu iç çarpım homojen elemanlar üzerinde

$$< v_1 \wedge v_2 \wedge ... \wedge v_k, w_1 \wedge w_2 \wedge ... \wedge w_k > \quad = \det(< v_i, w_j >)$$

şeklinde tanımlanır ve 2-lineer olarak $\Lambda^k V$ nin tamamına genişletilir. $\{e_1, e_2, ...e_n\}$ kümesi V nin ortanormal bir tabanı ise

$$1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n \quad \text{için} \quad e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge ... \wedge e_{i_n}$$

vektörleri $\Lambda^k V$ nin ortanormal bir tabanı olur.

$\{x_1, x_2, ...x_n\}$ ve $\{y_1, y_2, ...y_n\}$ vektör kümeleri V nin sıralı tabanları olsunlar. $T(x_i) = y_i$ şeklinde tanımlanan $T : V \longrightarrow V$ lineer dönüşümü için $\det(T) > 0$ oluyorsa sözkonusu iki tabana denk tabanlar denir. Bu gerçekten V nin tüm tabanlarının oluşturduğu küme üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Bu bağıntıya göre tabanlar tam olarak iki denklik sınıfına ayrılırlar, bu denklik sınıflarından bir tanesinin seçilmesine V nin bir yönlendirilmesi denir. V üzerinde bir yönlendirme seçilmiş ise, V ye yönlendirilmiş bir vektör uzayı denir. V yönlendirilmiş bir vektör uzayı iken, V nin herhangi bir $\{x_1, x_2, ...x_n\}$ sıralı tabanının denklik sınıfı V nin yönlendirmesine eşit ise $\{x_1, x_2, ...x_n\}$ tabanına pozitif olarak yönlendirilmiş taban denir.

V yönlendirilmiş bir vektör uzayı olsun. Hodge $\star-$operatörü aşağıdaki şekilde tanımlanan lineer dönüşümdür.

$$\star : \Lambda^k V \longrightarrow \Lambda^{n-k} V, \quad \star(\ e_{i_1} \wedge e_{i_2} ... \wedge e_{i_k}) \quad = e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge ... \wedge e_{j_{n-k}}$$

burada $e_{i_1} \wedge e_{i_2} ... \wedge e_{i_k}$ k-formuna karşılık getirilen $e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge ... \wedge e_{j_{n-k}}$ $(n-k)$-formu, $\{e_{i_1}, e_{i_2}, ..., e_{i_k}, e_{j_1}, e_{j_2}, ..., e_{j_{n-k}}\}$ kümesinin teşkil ettiği sıralı tabanın denklik sınıfı V üzerindeki yönlendirmeye eşit olacak şekilde seçilmiştir.

$\star-$dönüşümü lineer olarak tanımlandığı için taban vektörlerinin görüntüleri bilindiğinde tüm vektörlerin görüntüleri bilinmiş olur. Herhangi bir $\omega \in \ \Lambda^k V$, k-formuna karşılık getirilen $\star\omega$, $(n-k)$-formuna ω nın Hodge duali veya kısaca duali denir.

Özel olarak $e_1, e_2, ...e_n$ vektörleri V nin pozitif olarak yönlendirilmiş ortanormal bir tabanı ise;

$$\star(e_1 \wedge e_2 ... \wedge e_n) \ = 1 \quad \text{ve} \quad \star(1) = \ e_1 \wedge e_2 ... \wedge e_n$$

olur. Pozitif taban yerine negatif taban seçilirse;

$$\star(e_1 \wedge e_2 ... \wedge e_n) \ = -1 \quad \text{ve} \quad \star(1) = -e_1 \wedge e_2 ... \wedge e_n$$

olur.

Hodge $\star-$operatörü aşağıdaki özelliklere sahiptir:

1. $\star^2 = \star \circ \star : \ \Lambda^k V \quad \longrightarrow \quad \Lambda^k V \ , \ \star^2 = (-1)^{k(n-k)} Id$ olur.

2. Her $\alpha, \beta \in \ \Lambda^k V$ için $< \alpha, \beta >= \star(\alpha \wedge \star\beta) = \star(\beta \wedge \star\alpha)$ dir.

3. $v_1, v_2, ..., v_n$, V nin pozitif bir tabanı iken $\frac{1}{\sqrt{\det(<v_i, v_j>)}} v_1 \wedge v_2 \wedge ... \wedge v_n = \star(1)$ olur.

$\mathbb{R}^4$ üzerindeki 2-formların kendine ve tersine dualliği

V vektör uzayı olarak $\mathbb{R}^4$ reel vektör uzayını ve iç çarpım olarakda standard iç çarpımı göz önüne alalım ve $\mathbb{R}^4$ üzerinde standart taban vektörlerinin belirlediği yönlendirmeyi seçelim. Bu durumda $\Lambda^2(\mathbb{R}^4)$ uzayına ait herhangi bir ω 2-formunun duali gene bir 2-formdur, eğer ω nın duali olan bu 2-form ω ya eşit ise ω 2-formuna kendine dual denir.

Herhangi bir $\omega \in \Lambda^2(\mathbb{R}^4)$ elamanı

$$\omega = \ \ \omega_{12} e_1 \wedge e_2 + \omega_{13} e_1 \wedge e_3 + \omega_{14} e_1 \wedge e_4 + \omega_{23} e_2 \wedge e_3 + \omega_{24} e_2 \wedge e_4 + \omega_{34} e_3 \wedge e_4$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda $\star\omega$ 2-formu bulunabilir, öncelikle $\star-$operatörün lineer olduğundan

$\star\omega = \omega_{12} \star (e_1 \wedge e_2) + \omega_{13} \star (e_1 \wedge e_3) + \omega_{14} \star (e_1 \wedge e_4) + \omega_{23} \star (e_2 \wedge e_3) + \omega_{24} \star (e_2 \wedge e_4) +$

$\omega_{34}\star(e_3\wedge e_4)$

olur, burada

$$\begin{array}{ll} \star(e_1\wedge e_2)=e_3\wedge e_4 & \star(e_3\wedge e_4)=e_1\wedge e_2 \\ \star(e_1\wedge e_3)=-e_2\wedge e_4 & \star(e_2\wedge e_4)=-e_1\wedge e_3 \\ \star(e_1\wedge e_4)=e_2\wedge e_3 & \star(e_2\wedge e_3)=e_1\wedge e_4 \end{array} \quad \text{eşitlikleri kullanılırsa;}$$

$$\star\omega = \omega_{12}e_3\wedge e_4-\omega_{13}e_2\wedge e_4+\omega_{14}e_2\wedge e_3+\omega_{23}e_1\wedge e_4-\omega_{24}e_1\wedge e_3+\omega_{34}e_1\wedge e_2$$

olarak bulunur, düzenleme yapılırsa

$$\star\omega = \omega_{34}e_1\wedge e_2-\omega_{24}e_1\wedge e_3+\omega_{23}e_1\wedge e_4+\omega_{14}e_2\wedge e_3-\omega_{13}e_2\wedge e_4+\omega_{12}e_3\wedge e_4$$

olur. ω 2-formunun kendine dual olması için $\omega=\star\omega$ eşitliğinden, katsayılar arasında $\omega_{12}=\omega_{34}$, $\omega_{13}=-\omega_{24}$, $\omega_{14}=\omega_{23}$ bağıntısının olması gerekir. O halde ω kendine dual bir 2-form ise

$$\omega = \omega_{12}(e_1\wedge e_2+e_3\wedge e_4)+\omega_{13}(e_1\wedge e_3-e_2\wedge e_4)+\omega_{14}(e_1\wedge e_4+e_2\wedge e_3)$$

olur. Demekki $\mathbb{R}^4$ üzerindeki kendine dual herhangi bir 2-form $\Lambda^2(\mathbb{R}^4)$ uzayındaki, herbiri kendine dual olan

$$f_1^+=e_1\wedge e_2+e_3\wedge e_4,\quad f_2^+=e_1\wedge e_3-e_2\wedge e_4,\quad f_3^+=e_1\wedge e_4+e_2\wedge e_3$$

vektörlerinin lineer toplamı şeklindedir. Bu vektörler lineer bağımsız olduğundan $\mathbb{R}^4$ üzerindeki kendine dual 2-formlar 3-boyutlu bir altuzay oluştururlar.

Diğer taraftan $\star^2=Id_{\Lambda^2(\mathbb{R}^4)}$ olduğundan dolayı $\star$ dönüşümünün özdeğerleri 1 ve -1 dir. Bunu hemen görebiliriz; eğer λ sayısı $\star$ dönüşümünün bir özdeğeri ise $\star(\omega)=\lambda\omega$ olur, bu vektöre tekrar $\star$ dönüşümü uygulanırsa $\star(\star(\omega))=\star(\lambda\omega)=\lambda\star(\omega)=\lambda(\lambda\omega)=\lambda^2\omega$ dir, $\star^2=Id_{\Lambda^2(\mathbb{R}^4)}$ olduğu kullanılırsa

$$\omega=\lambda^2\omega\Longrightarrow\lambda^2\omega-\omega=0\Longrightarrow\quad(\lambda^2-1)\omega=0\quad\Longrightarrow\quad\lambda^2=1\quad\Longrightarrow\quad\lambda=\pm1$$

olur. Bunun sonucu olarak, $\Lambda^2(\mathbb{R}^4)$ uzayının

$$\Lambda^{2,+}(\mathbb{R}^4)=\{\omega\in\Lambda^2(\mathbb{R}^4)|\star(\omega)=\omega\}\quad\text{ve}\quad\Lambda^{2,-}(\mathbb{R}^4)=\{\omega\in\Lambda^2(\mathbb{R}^4)|\star(\omega)=-\omega\}$$

şeklinde iki alt uzayı elde edilir, üstelik

$\Lambda^2(\mathbb{R}^4)=\Lambda^{2,+}(\mathbb{R}^4)\oplus\Lambda^{2,-}(\mathbb{R}^4)$olur. $\Lambda^{2,+}(\mathbb{R}^4)$ altuzayının elemanları kendine dual 2-formlar olarak adlandırılmıştı, $\Lambda^{2,-}(\mathbb{R}^4)$ altuzayının elemanlarına tersine dual 2-

formlar denir. Tersine dual 2-formlar da 3-boyutlu bir altuzay oluştururlar. Kendine dual 2-formlarda olduğu gibi, herhangi bir $\omega \in \Lambda^{2,-}(\mathbb{R}^4)$ 2-formu için katsayıların sağlaması gereken koşullar bulunabilir.

$$\omega = \omega_{12}e_1 \wedge e_2 + \omega_{13}e_1 \wedge e_3 + \omega_{14}e_1 \wedge e_4 + \omega_{23}e_2 \wedge e_3 + \omega_{24}e_2 \wedge e_4 + \omega_{34}e_3 \wedge e_4$$

$2-$formuna $\star$ dönüşümü uygulanırsa;

$$\star\omega = \omega_{34}e_1 \wedge e_2 - \omega_{24}e_1 \wedge e_3 + \omega_{23}e_1 \wedge e_4 + \omega_{14}e_2 \wedge e_3 - \omega_{13}e_2 \wedge e_4 + \omega_{12}e_3 \wedge e_4$$

olur. $\star\omega = -\omega$ eşitliği kullanılırsa $\omega_{12} = -\omega_{34}$, $\omega_{13} = \omega_{24}$, $\omega_{14} = -\omega_{23}$ elde edilir. Buna göre $\omega = \omega_{12}(e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4) + \omega_{13}(e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4) + \omega_{14}(e_1 \wedge e_4 - e_2 \wedge e_3)$ olur. Demekki $\Lambda^{2,-}(\mathbb{R}^4)$ nin bir tabanı

$$f_1^- = e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4, \quad f_2^- = e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4, \quad f_3^- = e_1 \wedge e_4 - e_2 \wedge e_3$$

vektörlerinden oluşmaktadır.

Denklem (5.3) de tespit edilen $\mathbb{R}^4$ üzerindeki $\mathcal{F}$ 2-formun Hodge duali şu şekildedir:

$$\begin{aligned} {}^*\mathcal{F} = \tfrac{2}{(1+x_2+y^2+u^2+v^2)^2}\Big(&(du \wedge dv - dx \wedge dy)\mathrm{i} + (-dy \wedge dv - dx \wedge du)\mathrm{j} + \\ &(dy \wedge du - dx \wedge dv)\mathrm{k}\Big) \\ \tfrac{2}{(1+x_2+y^2+u^2+v^2)^2}\Big(&-(dx \wedge dy - du \wedge dv)\mathrm{i} - (dx \wedge du + dy \wedge dv)\mathrm{j} \\ &-(dx \wedge dv - dy \wedge du)\mathrm{k}\Big) = -\mathcal{F} \end{aligned}$$

yani $\mathcal{F}$ tersine dualdir.

Benzer şekilde ${}^*\mathcal{F}_{\lambda,n} = -\mathcal{F}_{\lambda,n}$ olup tersine dualdir. Ancak Örnek 5.5 de verilen $\mathcal{F}$ gauge alanı kendine ya da tersine dual değildir.

$\mathbb{R}^6$ üzerindeki 2-formların kendine dualliği

Hodge $\star-$operatörü altında $\Lambda^2(\mathbb{R}^6)$ ye ait bir η elemanın görünsü $*\eta$ bir 4-form olup $\Lambda^4(\mathbb{R}^6)$ uzayına aittir, η ile $*\eta$ farklı uzaylarda yaşadıkları için kıyaslanması mümkün değildir. Bu yüzden $\mathbb{R}^6$ üzerinde, $\mathbb{R}^4$ de olduğu gibi doğrudan bir kendine duallik tanımı yoktur. Ancak $\Lambda^2(\mathbb{R}^6)$ uzayınında $\Lambda^2(\mathbb{R}^4) = \Lambda^{2,+}(\mathbb{R}^4) \oplus \Lambda^{2,-}(\mathbb{R}^4)$ dekompozisyonuna benzer bir dekompozisyonu vardır. Bu dekompozisyon aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$e_1, e_2, ..., e_6$, $\mathbb{R}^6$ nın standart vektörleri olsun. $\mathbb{R}^6$ üzerinde $\kappa_0 = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + e_5 \wedge e_6$ 2-formunu (buna standart simplektik form denir) $\Omega_0 = e_1 \wedge e_3 \wedge e_5 - e_1 \wedge e_4 \wedge e_6 - e_2 \wedge e_4 \wedge e_5 - e_2 \wedge e_3 \wedge e_6$ 3-formunu ve de

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

standart kompleks yapısını alalım. Buna göre $\Lambda^2(\mathbb{R}^6)$ uzayı

$$\Lambda^2(\mathbb{R}^6) = \Lambda^2_1(\mathbb{R}^6) \oplus \Lambda^2_6(\mathbb{R}^6) \oplus \Lambda^2_8(\mathbb{R}^6)$$

şeklinde ayrışır, burada;

$\Lambda^2_1(\mathbb{R}^6) = \{r\kappa_0 : r \in \mathbb{R}\}$ 1-boyutlu bir altuzay,

$\Lambda^2_6(\mathbb{R}^6) = \{\varphi \in \Lambda^2(\mathbb{R}^6) : J\varphi = -\varphi\}$ 6-boyutlu altuzay ve

$\Lambda^2_8(\mathbb{R}^6) = \{\varphi \in \Lambda^2(\mathbb{R}^6) : J\varphi = \varphi \text{ ve } \varphi \wedge \kappa \wedge \kappa = 0\}$ 8-boyutlu altuzaydır.

Detaylar için bakınız [11].

Buradaki ayrışım [1] de verilen ayrışımla aynıdır. Mesela bir $F = \sum F_{ij} e_i \wedge e_j \in \Lambda^2(\mathbb{R}^6)$ nin $\Lambda^2_8(\mathbb{R}^6)$ parçasına ait olması için gerek ve yrter koşul F_{ij} katsayılarının

$$\begin{aligned} &F_{12} + F_{14} + F_{56} = 0 \\ &F_{13} - F_{24} = 0 \\ &F_{14} + F_{23} = 0 \\ &F_{15} - F_{26} = 0 \\ &F_{16} + F_{25} = 0 \\ &F_{35} - F_{46} = 0 \\ &F_{36} + F_{45} = 0 \end{aligned}$$

denklemlerini sağlamasıdır.

$\mathbb{R}^6$ üzerinde bir 2-formun kendine dualliği, verilen formun parçalardan birine ait olması şeklinde tanımlanır. Örnek 5.6 daki $\mathcal{F}$ gauge alanı kendine dual değildir.

$\mathbb{R}^8$ üzerindeki 2-formların kendine dualliği

$\mathbb{R}^8$ üzerinde de $\mathbb{R}^6$ da olduğu gibi bir 2-formun doğrudan self-dualliği tanımı yoktur. Çünkü $\Lambda^2(\mathbb{R}^8)$ ye ait bir η elemanın görünsü $*\eta$ bir 6-form olup $\Lambda^6(\mathbb{R}^8)$ uzayına aittir, η ile $*\eta$ farklı uzaylarda yaşadıkları için kıyaslanması mümkün değildir. Ancak $\Lambda^2(\mathbb{R}^8)$ uzayınında $\Lambda^2(\mathbb{R}^4)$ ve $\Lambda^2(\mathbb{R}^6)$ uzaylarının dekompozisyonuna benzer bir dekompozisyonu vardır. Bu dekompozisyon aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$e_1, e_2, ..., e_8$, $\mathbb{R}^8$ in standart vektörleri olsun. $\mathbb{R}^8$ üzerinde

$$\begin{aligned} \Phi &= e_{1234} + e_{1256} + e_{1278} + e_{1357} - e_{1368} - e_{1458} - e_{1467} \\ &+ e_{5678} + e_{3478} + e_{3456} + e_{2468} - e_{2457} - e_{2358} - e_{2367} \end{aligned}$$

temel 4-formu göz önüne alınsın, burada $e_{ijkl} = e_i \wedge e_j \wedge e_k \wedge e_l$ kısaltılmış gösterimi kullanılmıştır. Bu durumda $\Lambda^2(\mathbb{R}^8)$ uzayı

$$\Lambda^2(\mathbb{R}^8) = \wedge_7^2(\mathbb{R}^8) \oplus \wedge_{21}^2(\mathbb{R}^8)$$

şeklinde yazılabilir, burada

$$\begin{aligned} \wedge_7^2(\mathbb{R}^8) &= \left\{\alpha \in \wedge^2(M) : *(\alpha \wedge \Phi) = 3\alpha\right\} \quad \text{7-boyutlu altuzay ve} \\ \wedge_{21}^2(\mathbb{R}^8) &= \left\{\alpha \in \wedge^2(M) : *(\alpha \wedge \Phi) = -\alpha\right\}, \quad \text{21-boyutlu altuzaydır.} \end{aligned}$$

Detaylar için bakınız [12]. Buradaki ayrışım [1] de verilen ayrışımla aynıdır. Mesela bir $\omega = \sum \omega_{ij} e_i \wedge e_j \in \Lambda^2(\mathbb{R}^8)$ nin $\Lambda_7^2(\mathbb{R}^8)$ parçasına ait olması için gerek ve yeter koşul ω_{ij} katsayılarının

$$\omega_{12} = \omega_{34} = \omega_{56} = \omega_{78}$$

$$\omega_{13} = \omega_{42} = \omega_{57} = \omega_{86}$$

$$\omega_{14} = \omega_{23} = \omega_{76} = \omega_{85}$$

$$\omega_{15} = \omega_{62} = \omega_{73} = \omega_{48}$$

$$\omega_{16} = \omega_{25} = \omega_{38} = \omega_{47}$$

$$\omega_{17} = \omega_{82} = \omega_{35} = \omega_{64}$$

$$\omega_{18} = \omega_{27} = \omega_{63} = \omega_{54}$$

denklemlerini sağlamasıdır. $\mathbb{R}^8$ üzerinde bir 2-formun kendine dualliği, verilen formun parçalardan birine ait olması şeklinde tanımlanır.

Örnek 5.4 deki $\mathcal{F}$ gauge alanı kendine dual değildir.

6 SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu çalışmada kompleks ve kuaterniyonik Hopf demetleri üzerinde konneksiyon örnekleri verilmeye çalışılmış ve onların gauge alanlarının kendine-tersine dual olup olmadıkları araştırılmıştır. $\mathbb{HP}^1$ üzerindeki doğal konneksiyona karşılık gelen gauge alanının tersine dual olması, daha yüksek boyutlardaki Hopf demetleri üzerinde elde edilen konneksiyonlara karşılık gelen gauge alanlarının da kendine-tersine dual olup olmadığı sorusunu akla getirmiştir. $\mathbb{CP}^2$ ve $\mathbb{CP}^3$ üzerindeki konneksiyonlara karşılık gelen gauge alanlarının sırasıyla $\mathbb{R}^4$ ve $\mathbb{R}^6$ daki kendine-tersine dual olma koşullarından bir kısmını sağlaması, $\mathbb{HP}^2$ üzerindeki konneksiyona karşılık gelen gauge alanının araştırılmasına yol açmıştır ve bu gauge alanının [1] de verilen ($\mathbb{R}^8$ deki) kendine dual olma koşullarından çoğunu sağlaması oldukça umut vericidir.

KAYNAKLAR

[1] E. Corrigan, C. Devchand ,D.B. Fairlie,J. Nuyts, "First-Order Equations for Gauge Fields in Spaces of Dimension Greater than Four", Nuclear Physics, B214, 452-464,1983.

[2] http://en.wikipedia.org/wiki/Hopf_bundle

[3] Naber,G.L. , Topology, Geometry, And Gauge Fields : Foundations, Springer-Verlag, New York, A.B.D., 1997.

[4] Naber, G. L., Topology, Geometry, and Gauge Fields : Interactions, Springer-Verlag, New York, A.B.D., 2000.

[5] http://www.pages.drexel.edu/˜gln22/FiberBundlesMath&Phys.pdf

[6] Nakahara, M., Geometry, Topology and Physics, Institute of Physics Publishing,Philadelphia, A.B.D., 2003.

[7] Trautman, A., "Solutions of the Maxwell and Yang-Mills Equations Associated with Hopf Fibrings", International Journal Of Theoretical Pyhsics, **16**(8), 561-565, 1977.

[8] Bleecker, D. Gauge Theory and Variational Principles, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, A.B.D., 1981.

[9] Azcarraga, J.A. De ve Izquierdo, J.M., "Connections and characteristic classes", Lie Groups, Lie Algebras, Cohomology and Some Applications in Pyhsics (Ed: Landshoff, P.V.), Chambridge University Press, Great Britain,84-149,1995.

[10] Spivak, M. , "Connections in Principal Bundles ", A Comprehensive Introduction to Differential Geometry:Volume Two ,Third Edition , Publish or Perish, INC. Houston, Texas ,305-349, 1999.

[11] Bedulli, L. ve Vezzoni, L.," The Ricci tensor of $SU(3)$-manifolds", Journal of Geometry and Physics, **57**, 1125-1146, 2007.

[12] Ivanov, S., "Connection with torsion, parallel spinors and geometry of Spin(7) manifolds" , Math. Res. Lett., **11**, 171-186, 2004.