GENELLEŞTİRİLMİŞ CS-MODÜLLER

VE

GENİŞLEME ÖZELLİKLERİ ÜZERİNE

ARAŞTIRMALAR

Figen TAKIL

Doktora Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Mayıs - 2008

JÜRİ ve ENSTİTÜ ONAYI

Figen Takıl'ın **"Genelleştirilmiş CS-Modüller ve Genişleme Özellikleri Üzerine Araştırmalar"** başlıklı **Matematik** Anabilim Dalındaki, Doktora tezi .... tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

		Adı-Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	:	**Prof. Dr. ADNAN TERCAN**	....
Üye	:	**Prof. Dr. ZEKERİYA ARVASİ**	....
Üye	:	**Yard. Doç. Dr. NÜLİFER ÖZDEMİR**	....
Üye	:	**Yard. Doç. Dr. FATİH KARABACAK**	....
Üye	:	**Yard. Doç. Dr. HAKAN CEBECİ**	....

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Altuğ İFTAR
Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

GENELLEŞTİRİLMİŞ CS-MODÜLLER VE GENİŞLEME ÖZELLİKLERİ ÜZERİNE ARAŞTIRMALAR

Figen TAKIL

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Adnan TERCAN

2008, 85 sayfa

CS-modüllerin bir genelleştirilmiş modül sınıfı olarak C_{12} koşulunu sağlayan modüller yani her alt modülün bir dik toplanana essential olarak gömülebildiği modül sınıfı ayrıntılı olarak araştırılmıştır.

CS modüllerin literatürde diğer genelleştirmeleri ile C_{12} koşulunu sağlayan modüller arasındaki gerektirmeler ve gerekli ters örnekler verilmiştir. C_{12} koşulunu sağlayan modüllerin sınıfının, dik toplamlar altında ve üstelik bu sınıftaki herhangi bir modül essential genişlemesi ile göreceli injektif olduğunda, essential genişlemeler altında da kapalı olduğu gösterilmiştir. Kısaltılabilir socle'a sahip ve essential alt modülleri üzerinde artan zincir (azalan zincir) koşulunu sağlayan bir M modülü C_{12}^{+}-modül ise M' nin, bir semisimple ve bir Noether (Artin) alt modülün dik toplamı olduğu ispatlanmıştır. Üstelik, kısaltılabilir socle'a sahip bir C_{12}-modülün, socle'ı essential olan bir modül ile socle'ı sıfır olan bir modülün dik toplamı olduğu gösterilmiştir. Bunun tersinin genel olarak doğru olmayacağını gösteren ters örnek kurulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Komplement Alt Modül, Sonlu Uniform Boyut, C_{12}-modül, CS-modül, C_{11}-modül

ABSTRACT

PhD. Dissertation

RESEARCH ON GENERALIZATION OF CS-MODULES AND THE EXTENSION PROPERTY OF CS-MODULES

Figen TAKIL

Anadolu University
Graduate School of Sciences
Mathematics Program
Supervisor: Prof. Dr. Adnan TERCAN
2008, 85 pages

As a generalized class of CS modules, modules which satisfy C_{12} condition that is every submodule are essentially embedded in some direct summands are investigated in details.

Implications between C_{12} condition and the other generalizations of CS modules in the literature as well as the counter examples which needed in the sequel are provided. It is shown that the class of modules satisfying the C_{12} condition is closed under direct sums and also essential extensions whenever any module in the class is relative injective with respect to its essential extensions. It is proved that if M is a C_{12}^{+}-module with cancellable socle and satisfies ascending chain (descending chain) condition on essential submodules then M is a direct sum of a semisimple and a Noetherian (Artinian) submodules. Moreover, a C_{12}-module with cancellable socle is shown to be a direct sum of a module with essential socle and a module with zero socle. A counter example is constructed which shows that the converse of the above decompositions results do not hold in general.

Keywords: Complement Submodule, Finite Uniform Dimension,
C_{12}-module, CS-module, C_{11}-module

TEŞEKKÜR

Tez danışmanım Prof. Dr. Adnan TERCAN'a, tez konusunun belirlenmesi ve bu çalışmanın gerçekleştirilmesi sırasında bana ayırdığı zaman, verdiği emek ve destek için,

Bütün eğitim hayatım boyunca bana her türlü maddi-manevi desteği sağlayan, bana güvenen sevgilerinden güç aldığım annem Ersevim TAKIL ve kardeşim Engin TAKIL'a teşekkürlerimi sunarım.

Figen TAKIL
Haziran 2008

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\leq_e$	:	essential alt modül
$\leq_d$	:	dik toplanan alt modül
$\leq_c$	:	komplement alt modül
$\lhd$	:	fully invariant alt modül
$E(M)$	:	M nin injektif hull'ı
$Hom_R(M,N)$	:	M den N ye R-homomorfizmaların kümesi
$End_R(M)$	:	M nin R-homomorfizmalar halkası
ACC	:	Artan Zincir Koşulu
DCC	:	Azalan Zincir Koşulu
$udimM$	:	M modülünün uniform boyutu
$S_l(R)$	:	R halkasının sol merkezil idempotentlerinin kümesi
$S \ltimes M$	:	M nin S ile trivial extensionu (aşikar genişlemesi)

1 GİRİŞ

Bu çalışma boyunca, tüm halkalar birimli ve birleşmelidir ve R, bir halkayı gösterecektir. Aksi belirtilmedikçe tüm modüller unital sağ R-modüllerdir. Çalışmaya başlangıç oluşturan CS modül kavramının literatürdeki gelişimini kısaca vurgulayarak başlayalım.

CS (ya da extending) modül kavramının orijini 1930'lu yıllarda John Von Neumann'ın çalışmalarına uzanır. Von Neumann'ın Kuantum Mekaniği'ndeki çalışmaları onu "Sürekli Geometri" yi tanımlama ve geliştirmeye yönlendirmiştir. Günümüzde bu üst ve alt sürekli tam modüler **Latis** olarak adlandırılır. $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ bir tam modüler latis olsun. $a \in L$ ve $\{b_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, L nin bir tam sıralı alt kümesi olmak üzere

$$a \wedge \bigvee_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda = \bigvee_{\lambda \in \Lambda} (a \wedge b_\lambda)$$

oluyorsa, $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ latisine **üst sürekli (upper continuous)** denir.

R bir halka ve M de bir sağ R-modül olsun. Bu durumda M nin alt modüllerinin oluşturduğu latis üst sürekli tam modüler bir latistir (genel olarak alt sürekli olması gerekmez).

Von Neumann, [1, 2, 3] çalışmalarında sürekli geometrilerin teorisini geliştirdi ve özellikle bunları, Von Neumann, (regüler) halkanın sol temel ideallerinin oluşturduğu latisde inceledi. "Regüler halkalarda, eğer temel sol ideallerin latisi üst ve alt sürekli ise bu halka süreklidir" dedi. Bu çalışmalara Utumi [4] devam etti. Bu kavramlar, Jeremy [5] tarafından modüllere taşındı. Chatters ve Hajarnavis, "CS" kısaltmasını "**C**omplements are **S**ummands" için kullandılar ([6]). Bir çok araştırmacı CS yerine extending veya C_1 gösterimlerini kullanarak araştırmalara devam etmektedir.

İlk olarak, bir modüle, her alt modülü bir dik toplanan da essential olarak kapsanıyorsa, *CS-modül* veya *extending* veya C_1 koşulunu sağlar denildiğini hatırlayalım. Bir modüle, her alt modülü dik toplanan olan bir komplemente sahip ise, C_{11} koşulunu sağlar ya da C_{11}-modül denir ([7]). Açıktır ki her CS-modül bir C_{11}-modüldür. C_{11}-modüller ve halkalar üzerine yapılan son çalışmalar için [8]'e bakabilirsiniz. [7]'de, yazarlar C_{11} (ve böylece üstelik C_1) koşulunun zayıf bir formu olan: "Her $N \leq M$ alt modülü için bir $K \leq_d M$ ve bir $\alpha : N \longrightarrow K$ monomorfizması vardır öyle ki $\alpha(N) \leq_e K$ dır." koşulunu araştırmışlardır. Bu zayıf C_1 koşuluna C_{12} koşulu denir.

Bu çalışma da C_{12}-modülleri çalışmaya devam ettik.

Bölüm 2'de, çalışmamız boyunca kullandığımız bazı temel tanım ve sonuçlar ispatları ile birlikte verilmiştir.

Bölüm 3'de, CS modüllerin kimi gerekli temel sonuçları ispatlanmış ve literatürdeki mevcut genelleştirmelerinden olan C_{11} ve FI-extending modüller incelenmiştir.

Bölüm 4'te, C_{12}-modüllerin dik toplamları ve dik toplananları üzerinde durduk. Gösterdik ki C_{12}-modüllerin sınıfı dik toplamlar altında kapalıdır. Bununla beraber, C_{12} özelliğinin dik toplananlara taşınmadığını gösteren bir örnek verdik. Bir C_{12}-modülün dik toplananının da C_{12}-modül olduğunu garanti eden bir koşul verdik. Üstelik, T_R, bir C_{12}-modül olan M_R nin essential genişlemesi ve $M, T-injektif$ ise T_R nin de C_{12} koşulunu sağladığını gösterdik.

Bölüm 5'te, cancellable Socle'a sahip C_{12}^{+}-modüllerin (yani, her dik toplananı C_{12} koşulunu sağlayan modüller) ayrışımlarını çalıştık. Bunun sonucunda ispatladık ki, eğer M, C_{12}^{+} koşulunu sağlayan bir modül, $M/Soc(M)$ sonlu uniform (Goldie) boyuta sahip ve $Soc(M)$ cancellable ise $M = M_1 \oplus M_2$ olarak yazılır öyle ki M_1, semisimple ve M_2, sonlu uniform boyuta sahiptir. Bundan yola çıkarak, eğer M, C_{12}^{+} koşulunu ve essential alt modülleri üzerinde artan zincir (azalan zincir) koşulunu sağlayan bir modül ve $Soc(M)$ cancellable ise M_1, semisimple bir alt modül ve M_2, Noether (Artin) alt modül olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2$ olarak yazıldığını ispatladık. Üstelik, cancellable Socle'a sahip bir modülün, essential Socle'a sahip bir modül ile sıfır Socle'a sahip bir modülün dik toplamı olarak yazıldığını elde ettik.

Son bölümde, 5. bölümde C_{12} modüllere ilişkin olarak elde edilen ayrışım teoreminin genel durumda doğru olmayacağını gösteren bir ters örnek kurulmuştur.

2 ÖN BİLGİLER

Bu bölümde çalışmamızda kullandığımız temel tanım ve sonuçlar verilecektir. Özellikle, sonraki bölümlerdeki sonuçların kanıtlarının bütünlüğü açısından, essential alt modüller, komplement alt modüller ve injektif modüllere ilişkin sonuçların kanıtları eksiksiz verilmiştir. Bu bölüm ve çalışmamızın temel aldığı modül sınıfları hakkında daha geniş bilgi için [9], [10] ve [11] önerilir.

Modüler Kuralı: M bir $R-$modül, $A \leq M$ ve $C \leq B \leq M$ olsun. Bu durumda

$$B \cap (A + C) = C + (A \cap B)$$

dir.

Kanıt. $(A \cap B) \leq A$ ve $(A \cap B) \leq B$ olduğundan

$$C + (A \cap B) \leq B \cap (A + C) \tag{1}$$

dir. Tersine $b \in B \cap (A + C)$ alalım. Bu durumda $b = a + c$ olacak biçimde $a \in A$ ve $c \in C$ vardır.

$$\begin{aligned} b = a + c \quad &\Longrightarrow \quad a = b - c \in A \cap B \\ &\Longrightarrow \quad b = a + c \in C + (A \cap B) \end{aligned}$$

olduğundan

$$B \cap (A + C) \leq C + (A \cap B) \tag{2}$$

dir. (1) ve (2) den $B \cap (A + C) = C + (A \cap B)$ olduğu görülür. ■

Toplamların Evrensel Özelliği: $k \in K$ için M_k ve A, R-modüller olmak üzere $\{ f_k : M_k \longrightarrow A \mid k \in K\}$ bir homomorfizmalar topluluğu olsun. Bu durumda her $k \in K$ için $f_k = f \circ i_k$ olacak biçimde tek bir $f : \bigoplus_{k \in K} M_k \longrightarrow A$

homomorfizması vardır. Diğer bir deyişle, her $k \in K$ için

$$\begin{tikzcd} M_k \arrow[r, "i_k"] \arrow[d, "f_k"'] & \bigoplus\limits_{k\in K} M_k \arrow[dl, dotted, "f"] \\ A & \end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapan tek bir f homomorfizması vardır.

Kanıt. $f : \bigoplus\limits_{k\in K} M_k \longrightarrow A$ fonksiyonunu $f[(m_k)] = \Sigma\{f_k(m_k) \mid k \in K\}$ olarak tanımlayalım. f bir homomorfizmadır. Her $k \in K$ ve her $m \in \bigoplus\limits_{k\in K} M_k$ için $i_k(m)$ elemanının sadece k'ıncı bileşeni sıfırdan farklı olduğundan;

$$(f \circ i_k)(m) = f(i_k(m)) = f_k(m)$$

olup $f \circ i_k = f_k$ dır. Bu özelliğe sahip diğer bir homomorfizma g olsun. Yani, her $k \in K$ için $f_k = g \circ i_k$ ise keyfi bir $(m_k) \in \bigoplus\limits_{k\in K} M_k$ için

$$g[(m_k)] = g(\Sigma\ i_k(m_k)) = \Sigma g(i_k(m_k)) = \Sigma f_k(m_k) = f[(m_k)]$$

olup $g = f$ bulunur. ∎

2.1 Essential (Büyük) Alt Modüller

Tanım 2.1.1 *M bir $R-$modül ve $N \leq M$ olsun. Her $0 \neq K \leq M$ için $N \cap K \neq 0$ ise N ye M de essential (büyük) alt modül, M ye N nin essential genişlemesi denir ve $N \leq_e M$ ile gösterilir.*

Örneğin; $A_R = \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ için sıfırdan farklı her alt modül A_R de essential olarak kapsanır.

Önerme 2.1.2 *M bir $R-$modül olsun. Aşağıdakidaki özellikler sağlanır:*

(i) $N \leq_e M \Longleftrightarrow 0 \neq m \in M$ için $N \cap mR \neq 0$

(ii) $K \leq N \leq M$ için $K \leq_e M$ dir $\Longleftrightarrow K \leq_e N$ ve $N \leq_e M$ dir.

(iii) $N \leq_e M$ ve $K \leq M \Longrightarrow N \cap K \leq_e K$ dır.

(iv) $N_i \leq_e K_i$ $(1 \leq i \leq t) \Longrightarrow (N_1 \cap ... \cap N_t) \leq_e (K_1 \cap ... \cap K_t)$ dir.

(v) Boş kümeden farklı bir Λ indis kümesi için

$$N_\lambda \leq_e M_\lambda (\lambda \in \Lambda) \Longleftrightarrow \bigoplus_\Lambda N_\lambda \leq_e \bigoplus_\Lambda M_\lambda$$

dır.

(vi) $f : M \to N$ bir homomorfizma ve $B \leq_e N$ ise $f^{-1}(B) \leq_e M$ dir.

Kanıt. (i) $N \leq_e M$ ve $0 \neq m \in M$ ise $N \cap mR \neq 0$ dır.

Tersine, $0 \neq m \in L \leq M$ olsun. Bu durumda bir $r \in R$ vardır ki $0 \neq mr \in N \cap L$ dir. O halde $N \leq_e M$ dir.

(ii) $K \leq_e M$ ve $0 \neq X \leq N$ olsun. Bu durumda $0 \neq X \leq M$ olur. $K \leq_e M$ olduğundan $K \cap X \neq 0$ dır. Her $0 \neq X \leq N$ için $K \cap X \neq 0$ olduğundan $K \leq_e N$ dir. Şimdi $0 \neq T \leq M$ olsun. Bu durumda $0 \neq K \cap T \leq N \cap T$ dir. Her $0 \neq T \leq M$ için $N \cap T \neq 0$ olduğundan $N \leq_e M$ dir.

Tersine, $K \leq_e N$ ve $N \leq_e M$ olsun. $0 \neq Z \leq M$ için $0 \neq N \cap Z \leq N$ dir. $K \leq_e N$ olduğundan $0 \neq K \cap (N \cap Z) = K \cap Z$ dir. Her $0 \neq Z \leq M$ için $K \cap Z \neq 0$ olduğundan $K \leq_e M$ dir.

(iii) $N \leq_e M$, $K \leq M$ ve $0 \neq S \leq K$ olsun. $(N \cap K) \cap S = N \cap S \neq 0$ dır. Her $0 \neq S \leq K$ için $(N \cap K) \cap S \neq 0$ olduğundan $(N \cap K) \leq_e K$ dır.

(iv) $t = 2$ için $N_1 \leq_e K_1$ ve $N_2 \leq_e K_2 \Longrightarrow (N_1 \cap N_2) \leq_e (K_1 \cap K_2)$ olduğunu görelim. $X \leq K_1 \cap K_2$ olsun. Kabul edelim ki $(N_1 \cap N_2) \cap X = 0$ olsun. Bu durumda

$$(N_1 \cap N_2) \cap X = N_1 \cap (N_2 \cap X) = 0 \Longrightarrow N_2 \cap X = 0 \Longrightarrow X = 0$$

bulunur. O halde $(N_1 \cap N_2) \leq_e (K_1 \cap K_2)$ dir. İndüksiyon yöntemi ile genel durum elde edilir.

Bu özellik sonlu olmayan bir index kümesi için doğru değildir. Örneğin; $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ modülünü gözönüne alalım. $\forall\ n \in \mathbb{Z}$ için $n\mathbb{Z} \leq_e \mathbb{Z}$ dir. Fakat

$$\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} n\mathbb{Z} = 0 \nleq_e \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$$

dir.

(v) Keyfi $0 \neq m \in \underset{\Lambda}{\oplus} M_\lambda$ alalım. $m = m_{\lambda_1} + m_{\lambda_2} + ... + m_{\lambda_n}$; $m_{\lambda_i} \in M_{\lambda_i}$ biçiminde yazabiliriz. n ye göre tümevarımla; $0 \neq mr \in \underset{\Lambda}{\oplus} N_\lambda$ olacak biçimde $r \in R$ olduğunu gösterelim.
$n = 1$ için açıktır. $n = i$ için $N_\lambda \leq_e M_\lambda$ $(1 \leq \lambda \leq i) \Longrightarrow \underset{\Lambda}{\oplus} N_\lambda \leq_e \underset{\Lambda}{\oplus} M_\lambda$ doğru olduğunu varsayarak $n = i + 1$ için doğruluğunu görelim;
$m' = m_{\lambda_1} + m_{\lambda_2} + ... + m_{\lambda_i}$ için

$$0 \neq m's \in N_{\lambda_1} \oplus ... \oplus N_{\lambda_i} \leq \underset{\Lambda}{\oplus} N_\lambda$$

olacak biçimde $s \in R$ vardır. Eğer $m_{\lambda_{i+1}} s \in N_{\lambda_{i+1}}$ ise

$$ms \in \underset{\Lambda}{\oplus} N_\lambda \quad \text{ve} \quad N_{\lambda_{i+1}} \cap (N_{\lambda_1} \oplus ... \oplus N_{\lambda_i}) = 0$$

olduğundan $ms \neq 0$ dır. Eğer $m_{\lambda_{i+1}} s \notin N_{\lambda_{i+1}}$ ise $N_{\lambda_{i+1}} \leq_e M_{\lambda_{i+1}}$ olduğundan $0 \neq (m_{\lambda_{i+1}} s)t \in N_{\lambda_{i+1}}$ olacak şekilde bir $t \in R$ vardır. O halde $r = st \in R$ için $mr \in \underset{\Lambda}{\oplus} N_\lambda$ ve $\underset{\Lambda}{\oplus} N_\lambda$ dik toplam olduğundan $mr \neq 0$ dır. Sonuç olarak $\underset{\Lambda}{\oplus} N_\lambda \leq_e \underset{\Lambda}{\oplus} M_\lambda$ dır.

(vi) $f : M \to N$ bir homomorfizma ve $B \leq_e N$ olsun. $f^{-1}(B) \cap U = 0$ olacak şekilde bir $U \leq M$ alalım. $x \in B \cap f(U)$ için $x = f(u)$ olacak biçimde $u \in U$ vardır. $x = f(u) \in B$ olduğundan $u \in U \cap f^{-1}(B) = 0$ dır. Bu durumda $x = f(u) = f(0) = 0$ dır. Yani $B \cap f(U) = 0$ dır. $B \leq_e N$ olduğundan $f(U) = 0$ dır. O halde

$$U \leq Kerf = f^{-1}(0) \leq f^{-1}(B)$$

olduğundan $U = f^{-1}(B) \cap U = 0$ dır. ■

2.2 Komplement Alt Modüller

Tanım 2.2.1 *M bir $R-$modül ve $K \leq M$ olsun. K nın öz essential genişlemesi yoksa (yani $K \leq_e N \leq M \Longrightarrow K = N$) K ya M de kapalı (closed) alt modül denir.*

Tanım 2.2.2 *M bir $R-$modül ve $A \leq M$ olsun. $A \cap B = 0$ özelliğine göre maksimal olan bir B alt modülüne A nın M deki komplementi denir.*

Önerme 2.2.3 *$A, B \leq M$ olmak üzere $A \cap B = 0$ olsun. Bu durumda A nın bir C komplementi vardır öyle ki $B \leq C$ dir. Dolayısıyla C nin de A yı içeren bir A' komplementi vardır (bakınız, [9]).*

Önerme 2.2.3'den bir M modülünde her alt modülün M de bir komplementi vardır.

Örnek 2.2.4 *F bir cisim olmak üzere $M_R = (F \oplus F)_F$ olsun. $B = (0,1)F = \{(0,a) \mid a \in F\} \leq M_R$ alalım. $C = (1,x)F$, $(x \in F)$ olmak üzere, C, B alt modülünün M_R deki bir komplementidir.*

Önerme 2.2.5 *M bir $R-$modül ve $A \leq M$ olsun. $B \leq M$, A nın bir komplementi ise $A \oplus B \leq_e M$ dir.*

Kanıt. $A \cap B = 0$ olduğundan $A + B = A \oplus B \leq M$ dir. $C \leq M$ ve $(A \oplus B) \cap C = 0$ olsun. Bu durumda $(A \oplus B) + C = (A \oplus B) \oplus C$ dir. Böylece $A \cap (B \oplus C) = 0$ olur. B, A ile arakesiti sıfır olan maksimal alt modül olduğundan $B \oplus C = B$ olmalıdır. $B \cap C = 0$ olduğundan $C = 0$ bulunur. O halde $A \oplus B \leq_e M$ dir. ■

Teorem 2.2.6 *M bir R-modül, $A, B \leq M$ ve $A \cap B = 0$ olsun. B nin M de A nın komplementi olması için gerek ve yeter koşul*

$$\frac{A+B}{B} \leq_e \frac{M}{B}$$

olmasıdır.

Kanıt. B, M de A nın komplementi olsun. $\frac{A+B}{B} \cap \frac{U}{B} = 0$ olacak biçimde bir $B \leq U \leq M$ alalım. Böylece $(A+B) \cap U = B$ dir. Modüler Kuralından, $(A \cap U) + B = B$ dir. Buradan $A \cap U \leq B$ bulunur. Böylece $A \cap U \leq A \cap B = 0$ elde edilir. B, M de A ile arakesiti maksimal olan alt modül olduğundan $U = B$ olup $\frac{A+B}{B} \leq_e \frac{M}{B}$ bulunur.

Tersine, $\frac{A+B}{B} \leq_e \frac{M}{B}$ olsun. $A \cap U = 0$ ve $B \leq U \leq M$ olmak üzere keyfi bir U ve $x \in (A+B) \cap U$ alalım. Bu durumda $x = a + b$ olacak biçimde $a \in A$ ve $b \in B$ vardır. $a = x - b \in A \cap U = 0$ olup $a = 0$ bulunur. Böylece $x = b \in B$ olup $(A+B) \cap U = B$ elde edilir. Dolayısıyla $\frac{A+B}{B} \cap \frac{U}{B} = 0$ olup, varsayımdan $\frac{U}{B} = 0$ yani $U = B$ olur. Böylece B, M de A nın komplementidir. ■

Tanım 2.2.7 *M bir $R-$modül ve $K \leq M$ olsun. K nın M de komplementi olduğu bir $L \leq M$ var ise K ya M de bir komplement alt modül denir ve $K \leq_c M$ ile gösterilir.*

Açıktır ki $0, M \leq_c M$ dir. Ayrıca M nin her dik toplananı M nin bir komplement alt modülüdür. Gerçekten;

$M = A \oplus B$, $A \leq N \leq M$ ve $N \cap B = 0$ olsun. Modüler Kuralından

$$N = N \cap M = N \cap (A \oplus B) = A \oplus (N \cap B) = A$$

dır. Fakat bir modülün bir komplement alt modülü bir dik toplanan olmak zorunda değildir. Örneğin; F bir cisim ve V de F üzerinde boyutu 2 olan bir vektör uzayı olsun. $V = v_1F \oplus v_2F$ alalım. Bu durumda

$$R = \{ \left[\begin{smallmatrix} f & v \\ 0 & f \end{smallmatrix}\right] \mid f \in F, v \in V \}$$

matris işlemleri ile birimli, değişmeli ve indecomposable bir halkadır.

$$I = \{ \left[\begin{smallmatrix} 0 & v_1f \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] \mid f \in F \} \leq R_R$$

alalım.

$$J = \{\left[\begin{smallmatrix} 0 & v_2 f \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] \mid f \in F\} \leq R_R$$

olmak üzere I, J nin komplementidir. Yani $I \leq_c R_R$ dir. Ancak $I \nleq_d R_R$ dir.

Önerme 2.2.8 *M bir $R-$modül ve $N \leq M$ olsun. Bu durumda bir $K \leq M$ vardır öyle ki $N \leq_e K \leq_c M$ dir. K ya N nin M deki closure (kapanışı) denir.*

Kanıt. $N^{'}$, N nin M deki bir komplementi olsun. Bu durumda $N^{'}$ nün M de $N \leq K$ olacak şekilde bir K komplementi vardır. $0 \neq L \leq K$ olsun. $N^{'} \subseteq L + N^{'}$ dür. Böylece

$$(L + N^{'}) \cap N \neq 0$$

dır (çünkü $N^{'}$, N nin komplementi). O halde bir $x \in L$, $n^{'} \in N^{'}$ ve $0 \neq n \in N$ vardır ki $n = x + n^{'}$ dür.

$$n^{'} = n - x \in N^{'} \cap K = 0$$

olduğundan $0 \neq n = x \in L \cap N$ dir. Böylece $N \leq_e K \leq_c M$ dir. ■

Şimdi ispatlayacağımız Önerme, bir alt modülün kapalı ve komplement olmasının denkliğini verecektir.

Önerme 2.2.9 *M bir $R-$modül ve $K \leq M$ olsun.*

$$K \leq_c M \Longleftrightarrow K \leq_e L \leq M \text{ ise } K = L \text{ dir.}$$

Kanıt. $K \leq_c M$ ve $K \leq_e L \leq M$ olsun. Bu durumda bir $X \leq M$ vardır ki K, X in komplementidir. Yani K, $K \cap X = 0$ özelliğine göre maksimal alt modüldür.

$$0 = K \cap X \leq_e L \cap X \Longrightarrow L \cap X = 0$$

olduğundan $K = L$ dir.

Tersine, $K \leq M$ olduğundan Önerme 2.2.8'den bir $L \leq M$ vardır ve $K \leq_e L \leq_c M$ dir. Varsayımdan $K = L$ dir. Yani $K \leq_c M$ dir. ■

Teorem 2.2.10 *M bir $R-$modül olsun. B, A nın M de komplementi, A' de $A \leq A'$ olmak üzere B nin M de komplementi ise*

$$A \leq_e A'$$

ve A', M nin A yı essential alt modül olarak içeren alt modüller kümesinde maksimal elemandır (yani $A \leq_e K$ ve $A' \leq K \leq M \Longrightarrow A' = K$ dır).

Kanıt. $A \cap U = 0$ olmak üzere keyfi $U \leq A'$ alalım. $a \in A \cap (B + U)$ için $a = b + u$ olacak biçimde $b \in B$ ve $u \in U$ vardır. $b = a - u \in B \cap A'$ =0 olduğundan $a = u \in A \cap U = 0$ dır. Buradan $A \cap (B + U) = 0$ bulunur. B, A ile kesişimi sıfır olan maksimal alt modül olduğundan $B = B + U$ dur. O halde $U \leq B$ dir. Ayrıca $U \leq A'$ olduğundan $U \leq A' \cap B = 0$ dan $U = 0$ bulunur. O halde $A \leq_e A'$ dür.

Şimdi A' nün A yı essential olarak kapsayan maksimal alt modül olduğunu görmek için $A \leq_e K$ ve $A' \leq K$ olan bir $K \leq M$ alalım. $A \leq_e K$ olduğundan

$$(K \cap B) \cap A = 0 \Longrightarrow (K \cap B) = 0$$

olur. A', B ile kesişimi sıfır olan maksimal alt modül olduğundan $K = A'$ dür.

■

Önerme 2.2.11 *M bir $R-$modül olsun.*

$$K \leq_c N \text{ ve } N \leq_c M \Longrightarrow K \leq_c M$$

dir.

Kanıt. $K \leq_c N$ ve $N \leq_c M$ olduğundan bir $K' \leq N$ ve $N' \leq M$ vardır ki K, K' nün bir komplementi ve N de N' nün bir komplementidir. Ayrıca

$$K \cap (K' + N') = 0$$

ve $K' + N' \leq M$ dir. Gerçekten; bir $k \in K \cap (K' + N')$ alırsak $k = k' + n'$ olacak biçimde $k' \in K'$ ve $n' \in N'$ vardır. $k - k' = n' \in N \cap N' = 0$ olduğundan

$k = k' \in K \cap K' = 0$ dır. O halde $k = k' = n' = 0$ bulunur.

Şimdi farzedelim ki $K \leq_e L \leq M$ olacak şekilde bir $L \leq M$ olsun. Bu durumda

$$K \cap (K' + N') \leq_e L \cap (K' + N')$$

olduğundan $L \cap (K' + N') = 0$ dır. Böylece

$$[N \cap (L + N')] \cap K' = [(N \cap K') \cap (L + N')] = K' \cap (L + N') = 0$$

olur. $K \leq N \cap (L + N') \leq (L + N')$ ve K K' ile arakesiti sıfır olan maksimal alt modül olduğundan

$$K = [N \cap (L + N')]$$

dır. $K = [N \cap (L + N')] \leq_e L$ olduğundan

$$0 = [N \cap (L + N')] \cap N' \leq_e L \cap N'$$

yani $L \cap N' = 0$ dır. Böylece

$$(N + L) \cap N' = L \cap N' = 0$$

dır. $N \leq N + L$ ve N N' nün komplementi olduğundan $N + L = N$ dir. O halde $L \leq N$ dir. Sonuç olarak $K \leq_e L \leq N$ ve $K \leq_c N$ olduğundan Önerme 2.2.9'dan $K = L$ dir. Buradan $K \leq_c M$ olduğu görülür. ■

Yardımcı Teorem 2.2.12 *$N \leq M$ ve $K \leq_d M$ olsun. Bu durumda, K nın N nin komplementi olması için gerek ve yeter şart $K \cap N = 0$ ve $K \oplus N \leq_e M$ olmasıdır.*

Kanıt. Farzedelim ki K, N nin komplementi olsun. Buradan $K \cap N = 0$ dır. $0 \neq x \in M$ alalım. Eğer $x \in K$ ise $0 \neq xR = xR \cap K \subseteq xR \cap (K \oplus N)$ dir. Eğer $x \notin K$ ise $N \cap (xR + K) \neq 0$ ve böylece $xR \cap (K \oplus N) \neq 0$ dır. Her iki durumda da her $0 \neq x \in M$ için $xR \cap (K \oplus N) \neq 0$ dır. Böylece $K \oplus N \leq_e M$ dir.

Tersine, $K \cap N = 0$ ve $K \oplus N \leq_e M$ olsun. $K \leq_d M$ olduğundan bir

$K' \leq M$ vardır öyle ki $M = K \oplus K'$ dür. Kabul edelim ki $K \subseteq K_1$ ve $K_1 \cap N = 0$ koşulunu sağlayan bir $K_1 \leq M$ olsun. Bu durumda

$$K_1 = K_1 \cap M = K_1 \cap (K \oplus K') = K \oplus (K_1 \cap K')$$

dür. $0 \neq y \in (K_1 \cap K')$ alalım. Bu durumda bazı $n \in N,\ k \in K$ ve $r \in R$ için $0 \neq yr = n + k$ dır (çünkü $N \oplus K \leq_e M$). Buradan $yr - k = n \in K_1 \cap N = 0$ dır. Böylece $yr = k \in K' \cap K = 0$ dır ki bu da $yr \neq 0$ olmasıyla çelişir. O halde $K_1 \cap K' = 0$ ve $K = K_1$ dir. Yani, K, N nin komplementidir. ■

2.3 Uniform (Düzgün) Modüller ve Uniform Boyut

Tanım 2.3.1 *M sıfırdan farklı $R-$modül olsun. Eğer her $0 \neq U \leq M$ için $U \leq_e M$ oluyorsa M ye uniform (düzgün) modül denir. Örneğin, $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ uniform bir modüldür.*

Önerme 2.3.2 *U, M nin uniform alt modülü olsun. Bu durumda*

$$U \leq_c M \Leftrightarrow U, M \textit{ nin maksimal uniform alt modülüdür.}$$

Kanıt. $U \leq_c M, U \leq N \leq M$ ve N uniform alt modül olsun. Bu durumda $U \leq_e N$ dir ve $U \leq_c M$ olduğundan Önerme 2.2.9'dan $U = N$ elde edilir. O halde U maksimal uniform alt modüldür.

Tersine, U, M nin maksimal uniform alt modülü olsun. Önerme 2.2.8'den $U \leq_e K \leq_c M$ olacak biçimde bir $K \leq M$ vardır. Şimdi K nın uniform alt modül olduğunu görelim. $S \leq K$ alalım. $T \leq K$ için $S \cap T = 0$ olsun. Bu durumda $(U \cap S) \cap (U \cap T) = 0$ dır. U uniform olduğundan $U \cap T = 0$ ve $U \leq_e K$ olduğundan $T = 0$ bulunur. Yani K uniform alt modüldür. Varsayımımız olan U nun M de maksimal uniform alt modül olmasından dolayı $U = K$ elde edilir. Sonuç olarak $U \leq_c M$ dir. ■

Tanım 2.3.3 *M bir R-modül olsun. Eğer M modülü sıfırdan farklı alt modüllerin sonsuz bir dik toplamını kapsamıyorsa M'ye sonlu uniform (Goldie) boyutlu denir. Örneğin, $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ modülü sonlu Goldie boyutludur.*

Yardımcı Teorem 2.3.4 *$0 \neq A_R$ sonlu uniform boyutlu bir modül olsun. Bu durumda A_R, bir uniform alt modül kapsar.*

Kanıt. A_R uniform ise ispat biter. A_R uniform olmasın. Bu durumda $A_R \supseteq A_1 \oplus A_2^{'}$ olacak biçimde $0 \neq A_1, A_2^{'}$ alt modülleri vardır. Aynı tartışmadan

$$A_1^{'} \oplus A_2^{'} \oplus A_3^{'} \oplus ...$$

sonsuz bir dik toplam elde edilir ki bu A_R nin sonlu uniform boyuta sahip olması ile çelişir. O halde en az bir uniform A_i alt modülü vardır öyle ki $A_i \subseteq A$ dır. ■

Teorem 2.3.5 *A_R sonlu Goldie boyutlu bir modül olsun. Bu durumda A_R, sonlu tane uniform alt modülün bir dik toplamını essential olarak kapsar.*

Kanıt. $i = 1, 2, ..., n$ için $U_i \leq A$ uniform alt modüller olmak üzere $A^{'} = \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} U_i$ diyelim. Farzedelim ki $A^{'} \nleq_e A_R$ olsun. Bu durumda en az bir $0 \neq X \leq A_R$ vardır öyle ki $A^{'} \cap X = 0$ dır. Yardımcı Teorem 2.3.4'ten X bir U_{n+1} uniform alt modülü kapsar. Böylece

$$A_R \supseteq A^{'} \oplus U_{n+1} = \overset{n+1}{\underset{i=1}{\oplus}} U_i$$

elde edilir. Bu şekilde işlemlere devam edilirse sonsuz bir dik toplam bulunur ki bu da A_R nin sonlu uniform boyutlu olması ile çelişir. O halde $A^{'} \leq_e A_R$ olmalıdır. ■

Teorem 2.3.6 *M_R bir modül ve $i = 1, 2, ..., n$ için $U_i \leq M$ uniform alt modüller olmak üzere $U_1 \oplus U_2 \oplus U_3 \oplus ... \oplus U_n \leq_e M$ olsun. Bu durumda*

(1) *M nin sıfırdan farklı alt modüllerinin herhangi bir dik toplamı en fazla n tane dik toplam kapsar.*

(2) *$V_i \leq M$ uniform alt modüller olmak üzere, $V_1 \oplus V_2 \oplus ... \oplus V_k \leq_e M$ ise $n = k$ dır.*

Kanıt. **(1)** Her $i \in I$ için $0 \neq K_i \leq M$ olmak üzere $K_1 \oplus K_2 \oplus ... \oplus K_{n+1} \subseteq M$ olsun. $K_1 \cap (K_2 \oplus ... \oplus K_{n+1}) = 0$ olduğundan $K_2 \oplus ... \oplus K_{n+1} \nleq_e M$ dir. O halde en az bir $i \leq n$ için $U_i \cap (K_2 \oplus ... \oplus K_{n+1}) = 0$ dır. Genelliği bozmadan $i = 1$ alırsak $U_1 \oplus K_2 \oplus ... \oplus K_{n+1} \leq M$ olur. Ayrıca $K_2 \neq 0$ ve $K_2 \cap (U_1 \oplus K_3 \oplus ... \oplus K_{n+1}) = 0$ dır. Böylece $U_1 \oplus K_3 \oplus ... \oplus K_{n+1} \nleq_e M$ olduğundan en az bir $1 < i \leq n$ için $U_i \cap (U_1 \oplus K_3 \oplus ... \oplus K_{n+1}) = 0$ dır. Bu seçim için genelliği bozmadan $i = 2$ alırsak $U_1 \oplus U_2 \oplus K_3 \oplus ... \oplus K_{n+1} \leq M$ olur. Bir önceki adımdaki gibi işlemlere devam edilirse

$$U_1 \oplus U_2 \oplus U_3 \oplus ... \oplus U_n \oplus K_{n+1} \leq M$$

elde edilir. Ancak $U_1 \oplus U_2 \oplus U_3 \oplus ... \oplus U_n \leq_e M$ olduğundan

$$K_{n+1} \cap (U_1 \oplus U_2 \oplus U_3 \oplus ... \oplus U_n) \neq 0$$

olur ki bu da dik toplam tanımı ile çelişir.
(2) (1) den açıktır. ■

Tanım 2.3.7 *Teorem* 2.3.6*'daki n doğal sayısı modüller için bir değişmezdir ki M nin Goldie boyutu, Goldie rankı veya Uniform boyutu olarak bilinir ve $udimM$ ile gösterilir.*

Tanım 2.3.8 *M bir R-modül olsun. M nin bütün sıfır olmayan simple alt modüllerinin toplamına M nin Socle 'ı denir ve $Soc(M)$ ile gösterilir. Örneğin, $Soc(\mathbb{Z}_\mathbb{Z}) = 0$, $Soc(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) = 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ dir.*

Önerme 2.3.9 *M ve N sağ R-modüller ve $f : M \longrightarrow N$ bir R-modül homomorfizması ise $f(Soc(M)) \subseteq Soc(N)$ dir.*

Kanıt. $S \leq M$ simple bir alt modül olsun. Bu durumda $f(S) = 0$ ya da $f(S)$, simple alt modül olur. Her iki durumda da $f(S) \leq Soc(N)$ dir. Dolayısıyla $f(Soc(M)) \subseteq Soc(N)$ dir. ■

Önerme 2.3.10 *([14]) M bir R-modül ve $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ ise $Soc(M) = \bigoplus_{i \in I} Soc(M_i)$ dir.*

Önerme 2.3.11 *M bir R-modül ve $N \leq M$ olsun. Bu durumda*

$$Soc(N) = N \cap Soc(M)$$

dir. Özellikle, $Soc(Soc(M)) = Soc(M)$ dir.

Kanıt. $Soc(N) \leq N$ ve $Soc(N) \leq Soc(M)$ olduğundan $Soc(N) \leq N \cap Soc(M)$ dir. Şimdi, $S \leq M$ simple bir alt modül ve $S \leq N$ olsun. Bu durumda $S \leq Soc(N)$ olduğundan $N \cap Soc(M) \leq Soc(N)$ bulunur. Böylece $Soc(N) = N \cap Soc(M)$ elde edilir. Özellikle;

$$Soc(Soc(M)) = Soc(M) \cap Soc(M) = Soc(M)$$

olur. ■

Sonuç 2.3.12 *M ve N sağ R-modüller, $\varphi : M \longrightarrow N$ bir R-modül homomorfizması ve $Im(\varphi) \leq_e N$ olsun. Bu durumda $\varphi(Soc(M)) = Soc(N)$ dir.*

Kanıt. $E \leq N$ simple bir alt modül olsun. $Im(\varphi) \leq_e N$ olduğundan $E \leq Im(\varphi)$ dir. Böylece $\varphi^{-1}(E) \leq Soc(M)$ olup $\varphi(\varphi^{-1}(E)) \leq \varphi(Soc(M))$ olur. Buradan $Soc(N) \subseteq \varphi(Soc(M))$ elde edilir. Ayrıca Önerme 2.3.9'dan $\varphi(Soc(M)) \subseteq Soc(N)$ olduğundan $\varphi(Soc(M)) = Soc(N)$ bulunur. ■

Tanım 2.3.13 *Bir M_R modülü için $Soc(M) = M$ oluyorsa M modülüne Semisimple denir. Örneğin, $Soc(2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) = 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ olduğundan $(2Z/4\mathbb{Z})$ $\mathbb{Z}$-modülü semisimpledir.*

Teorem 2.3.14 *Bir A_R modülünün semisimple olması için gerek ve yeter şart her alt modülünün bir dik toplanan olmasıdır.*

Kanıt. A_R semisimple modül olsun. $B \leq A$ alalım.

$$S = \{\ X \leq A \mid B \cap X = 0\}$$

kümesini tanımlayalım. $0 \in S$ olduğundan $S \neq \emptyset$ dir. $(S, \leq)$ bir kısmen sıralı kümedir. Ayrıca S den alınan her zincirin bir üst sınırı olduğundan Zorn Lemma'dan S de bir maksimal C elemanı vardır. Böylece $B \cap C = 0$ dır. Eğer $B \oplus C \lneqq A$ ise $Soc(B \oplus C) \neq A = Soc(A)$ dır. Bu durumda en az bir $N \leq A$ simple alt modülü vardır öyle ki $N \nleq B \oplus C$ dir. O halde $N \cap (B \oplus C) \neq N$ olduğundan $N \cap (B \oplus C) = 0$ dır. Böylece $\{N, B, C\}$ bağımsız bir ailedir. Buradan, $B \cap (C \oplus N) = 0$ bulunur ki bu da C nin maksimalliği ile çelişir. O halde $A = B \oplus C$ olur.

Tersine, A nın her alt modülü bir dik toplanan olsun. Özellikle; bir $B \leq A$ için $A = Soc(A) \oplus B$ dir. Eğer $B \neq 0$ ise bir $0 \neq c \in B$ vardır öyle ki $cR = C \leq B$ dir. $S = \{\ X \leq C \mid c \notin X\}$ kümesini tanımlayalım. $0 \in S$ olduğundan $S \neq \emptyset$ dir. Zorn Lemma'dan S nin bir maksimal T elemanı vardır. O halde $c \notin T \lneqq C$ dir. Şimdi; $A = T \oplus N$ olacak biçimde bir $N \leq A$ olduğundan

$$C = C \cap A = C \cap (T \oplus N) = T \oplus (C \cap N)$$

dir. C/T simple ve $C/T \cong C \cap N$ olduğundan $C \cap N \leq A$ simple alt modüldür. Böylece $C \cap N \leq Soc(A)$ dır. Diğer yandan $C \cap N \leq B$ olduğundan

$$C \cap N \leq Soc(A) \cap B = 0$$

olur. Buradan $C \cap N = 0$ olup $C = T$ bulunur ki bu da $c \notin T$ olmasıyla çelişir. Sonuç olarak $B = 0$ yani $A = Soc(A)$ olmalıdır. ∎

Önerme 2.3.15 *M_R bir modül olsun. Bu durumda* $Soc(M) = \bigcap \{\ N \mid N \leq_e M\}$ *dir.*

Kanıt. $U \leq M$ ve U simple olsun. $N \leq_e M$ alalım. Bu durumda $U \cap N \neq 0$ dır. U simple olduğundan $U \cap N = U$ olur. Buradan $U \leq N$ dir. Böylece her

$N \leq_e M$ için $U \leq N$ olur. O halde

$$SocM \subseteq \bigcap \{ \ N \mid N \leq_e M\}$$

dir.

Şimdi, $X = \bigcap \{ \ N \mid N \leq_e M\}$ diyelim. $Y \leq X$ alalım. Bu durumda en az bir $Z \leq M$ vardır öyle ki $Y \cap Z = 0$ ve $Y \oplus Z \leq_e M$ dir. O halde $X \leq Y \oplus Z$ dir. Bundan dolayı, her $x \in X$ için $x = y + z$ olacak biçimde $y \in Y$ ve $z \in Z$ vardır. $x - y = z \in X \cap Z$ olduğundan $x \in Y \oplus (X \cap Z)$ dir. Böylece $X \subseteq Y \oplus (X \cap Z) \leq X$ olup $X = Y \oplus (X \cap Z)$ dir. Teorem 2.3.14'ten X_R semisimpledir. O halde $X = SocX \leq SocM$ bulunur. ■

Tanım 2.3.16 *Bir R-modülün alt modülleri üzerinde artan zincir koşulunun (ACC) sağlanması için gerek ve yeter koşul, alt modüllerin her*

$$L_1 \subseteq L_2 \subseteq L_3 \subseteq ...$$

zinciri için $L_{n+i} = L_n (i = 1, 2, 3, ...)$ *olacak biçimde en az bir* $n \in \mathbb{N}$ *olmasıdır.*

Tanım 2.3.17 *Bir R-modülün alt modülleri üzerinde azalan zincir koşulunun (DCC) sağlanması için gerek ve yeter koşul, alt modüllerin her*

$$L_1 \supseteq L_2 \supseteq L_3 \supseteq ...$$

zinciri için $L_{n+i} = L_n (i = 1, 2, 3, ...)$ *olacak biçimde en az bir* $n \in \mathbb{N}$ *olmasıdır.*

Tanım 2.3.18 *Bir M R-modülünün alt modüllerinin boştan farklı her alt kümesinin kapsama sıralamasına göre bir maksimal elemanı varsa ya da denk olarak tüm alt modüllerinin kümesi artan zincir koşulunu (ACC) sağlarsa M modülüne Noether denir. Bir R halkasına, sağ R-modül olarak Noether ise sağ Noether Halka denir. Örneğin,* $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ *modülü Noetherdir. Fakat, K bir cisim ve sonsuz* *değişken $x_1, x_2, x_3, ...$ için $K[x_1, x_2, x_3, ...]$ polinomlar halkası Noether değildir. Çünkü*

$$< x_1 > \subset < x_1, x_2 > \subset < x_1, x_2, x_3 > \subset ...$$

dizisi sonlu adımda durmaz.

Teorem 2.3.19 *Bir A R-modülünün Noether olması için gerek ve yeter şart A nın her alt modülünün sonlu üretilmiş olmasıdır.*

Kanıt. A_R Noether olsun. $B \leq A$ ve S, B nin içerdiği A nın tüm sonlu üretilmiş alt modüllerinin kümesi, yani

$$S = \{\ X \leq A \mid X \subseteq B,\ X \text{ sonlu üretilmiş}\}$$

olsun. $(0) \in S$ olduğundan $S \neq \emptyset$ dir. A Noether olduğundan S nin bir B' maksimal elemanı vardır ve $B' =< a_1, a_2, ..., a_k >$ dır.

İddia: $B = B'$

Tanımdan $B' \subseteq B$ dir. Farzedelim ki $B' \neq B$ olsun. O zaman en az bir $a_{k+1} \in B$ vardır öyle ki $a_{k+1} \notin B'$ dür. $B'' =< a_1, a_2, ..., a_k, a_{k+1} >$ diyelim. $B'' \subseteq B$ ve böylece $B'' \in S$ dir. Fakat $B' \subset B''$ olup bu B' nün S içindeki maksimalliği ile çelişir. O halde $B' = B$ olmalıdır. Böylece B sonlu üretilmiş alt modül olur.

Tersine, A_R nin her alt modülü sonlu üretilmiş olsun. Alt modüllerin sonsuz artan

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq ...$$

zincirini göz önüne alalım. U, tüm A_i lerin birleşimleri kümesi olsun. U, A nın alt modülüdür. Hipotezden, sonlu $a_1, a_2, ..., a_k \in U$ elemanları için $U =< a_1, a_2, ..., a_k >$ dır. Şimdi, en az bir $i_r \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $a_r \in A_{i_r}$ (i=1,2,...,k) dır. $n = max\{i_1, i_2, ..., i_k\}$ dersek $a_1, a_2, ..., a_k \in A_n$ ve böylece $U \subseteq A_n$ dir. Böylece her $i \in \mathbb{N}$ için $U \subseteq A_n \subseteq A_{n+i} \subseteq U$ ve buradan $A_n = A_{n+i}$ dir. Bundan dolayı A_R Noetherdir. ■

Teorem 2.3.20 *M bir R-modül ve $N \leq M$ olsun. Bu durumda*

$$M,\ \textit{Noether'dir} \Longleftrightarrow N \ \textit{ve}\ M/N,\ \textit{Noether'dir}$$

Teorem 2.3.21 *(Hilbert Taban Teoremi)[12] R bir sağ Noether halka olsun. Bu durumda $R[x_1, ..., x_n]$ polinomlar halkası da sağ Noether'dir.*

Tanım 2.3.22 *Bir M R-modülünün alt modüllerinin boştan farklı her alt kümesinin kapsama sıralamasına göre bir minimal elemanı varsa ya da denk olarak tüm alt modüllerinin kümesi azalan zincir koşulunu (DCC) sağlarsa M modülüne Artin denir. Bir R halkasına, sağ R-modül olarak Artin ise sağ Artin Halka denir. Örneğin,*

$$\mathbb{Z}(p^{\infty}) = \left\{ \frac{a}{p^n} + \mathbb{Z} \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, p\ asal \right\} \leq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

alt modülünü göz önüne alalım. $\mathbb{Z}(p^{\infty})$ nin tüm alt modülleri $H_n =< \frac{1}{p^n} + \mathbb{Z} >$ biçimindedir.

Kanıt. *Bir $m \in \mathbb{N}$ için $H_m = \left\{ \frac{a}{p^m} + \mathbb{Z} \mid a \in \mathbb{Z}, (a,p) = 1 \right\}$ tanımlayalım.*

$$H_m = \left\{ a(\frac{1}{p^m} + \mathbb{Z}) \mid a \in \mathbb{Z}, (a,p) = 1 \right\} =< \frac{1}{p^m} + \mathbb{Z} >$$

dir. Şimdi, $\mathbb{Z}(p^{\infty})$ un her öz alt modülü için, en az bir $i \in \mathbb{N}$ olup bu öz alt modülün H_i ye eşit olduğunu görelim:

$0 \neq N \subsetneqq \mathbb{Z}(p^{\infty})$ olsun. Bir $0 \neq \alpha \in N$ alalım. Bu durumda en az bir $a \in \mathbb{Z}$ ve $m \in N$ vardır öyle ki $\alpha = \frac{a}{p^m} + \mathbb{Z}$ dir. Bundan dolayı α'nın çarpanı olan p nin en büyük kuvveti, p^m den küçüktür. p nin ortak kuvvetlerini kısaltırsak;

$$\alpha = \frac{a^{'}}{p^{m^{'}}} + \mathbb{Z}, \quad (m^{'} \in \mathbb{N}, a^{'} \in \mathbb{Z}) \quad (a^{'}, p) = 1$$

dir. Eğer, $0 \neq \alpha_1 \in N$ ve $\alpha_1 = \frac{r_1}{p^{m_1}} + \mathbb{Z}$, $(m_1 \in \mathbb{N}, r_1 \in \mathbb{Z})$, $(r_1, p) = 1$ ise; $(r_1, p^{m_1}) = 1$ dir. Böylece en az bir $a, b \in \mathbb{Z}$ vardır öyle ki $ar_1 + bp^{m_1} = 1$ dir. Buradan $1 - ar_1 = bp^{m_1}$, yani, $1 - ar_1 \in p^{m_1}\mathbb{Z}$ dir. O halde

$$\frac{1}{p^{m_1}} + \mathbb{Z} = \frac{ar_1}{p^{m_1}} + \mathbb{Z} = a\alpha_1 \in N$$

olduğundan $H_{m_1} \subseteq N$ *dir. Ayrıca* $\frac{1}{p^n} + \mathbb{Z} = p(\frac{1}{p^{n+1}} + \mathbb{Z})$ *olduğundan*

$$0 \subset H_1 \subset H_2 \subset ... \subset H_n \subset H_{n+1} \subset ... \subset \mathbb{Z}(p^\infty)$$

dir ve $\mathbb{Z}(p^\infty) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} H_i$ *dir.*

O halde N, $\mathbb{Z}(p^\infty)$ *un bir öz alt modülü olduğundan* $H_i \subseteq N$ *olacak biçimde bir en büyük* $i \in \mathbb{N}$ *vardır. Eğer, böyle bir* $i \in \mathbb{N}$ *olmasaydı,* $\forall j \in \mathbb{N}$ *için en az bir* $n_j \in \mathbb{N}$ *vardır öyle ki* $n_j \geq j$ *ve* $H_{n_j} \subseteq N$ *iken* $H_j \subset N$ *dir. Buradan*

$$\mathbb{Z}(p^\infty) = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} H_j \subseteq N \subset \mathbb{Z}(p^\infty)$$

olup $\mathbb{Z}(p^\infty) = N$ *bulunur ki bu da* N *nin öz alt modül olmasıyla çelişirdi.*

Şimdi m, $H_i \subseteq N$ *olacak şekildeki en büyük tamsayı olsun. Bu durumda* m *nin tanımından* $H_m \subseteq N$ *dir.* $H_m \subsetneq N$ *kabul edelim. O halde en az bir* $\alpha_2 \in N \setminus H_m$ *vardır öyle ki* $\alpha_2 = \frac{a_2}{p^{m_2}} + \mathbb{Z}$, $(a_2 \in \mathbb{Z}, m_2 \in \mathbb{N})$, $(a_2, p) = 1$ *dir.* $\alpha_2 \notin H_m$ *olduğundan* $m_2 > m$ *olup* $H_{m_2} \subseteq N$ *dir. Bu da* m *nin tanımı ile çelişir. O halde* $H_m = N$ *dir. Sonuç olarak,* $\mathbb{Z}(p^\infty)$ *un her öz alt modülü* $H_m =< \frac{1}{p^m} + \mathbb{Z} >$ *biçimdedir.* ■

O halde $H_i \leq \mathbb{Z}(p^\infty)$ $(i \in \mathbb{N})$ *olmak üzere*

$$H_0 = 0 \ \subset \ H_1 \ \subset \ H_2 \ \subset ...$$

olduğundan $\mathbb{Z}(p^\infty)$ *Artin* $\mathbb{Z}$*-modüldür. Fakat,* K *bir cisim ve sonsuz değişken* $x_1, x_2, x_3, ...$ *için* $K[x_1, x_2, x_3, ...]$ *polinomlar halkası Artin değildir. Çünkü*

$$< x_1 > \supset < x_1^2 > \supset < x_1^3 > \supset ...$$

dizisi sonlu adımda durmaz.

2.4 Modüllerin Dizileri

Tanım 2.4.1 *$\{ M_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ modüller topluluğundan ve bunların*

$$f_n : M_n \longrightarrow M_{n-1}$$

homomorfizmalarından oluşan

$$... \ M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \longrightarrow ...$$

dizisinde, her $n \in \mathbb{Z}$ için $Kerf_i = Imf_{i+1}$ oluyor ise bu diziye tam dizi denir.

Tanım 2.4.2 *Bir $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B$ tam dizisine, $p\alpha = 1_A$ olacak biçimde bir $p : B \longrightarrow A$ modül homomorfizması varsa split denir. Benzer şekilde, bir $B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$ tam dizisine, $\beta q = 1_C$ olacak biçimde bir $q : C \longrightarrow B$ modül homomorfizması varsa split denir.*

Tanım 2.4.3 *$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ şeklindeki tam diziye kısa tam dizi denir.*

Teorem 2.4.4 *$0 \longrightarrow A \underset{h}{\overset{f}{\rightleftarrows}} B \underset{k}{\overset{g}{\rightleftarrows}} C \longrightarrow 0$ kısa tam dizisi için aşağıdaki koşullar denktir:*

1) $h \circ f = 1_A$ olacak şekilde bir $h : B \longrightarrow A$ homomorfizması bulunur;

2) Imf alt modülü B nin bir dik toplananıdır;

3) $g \circ k = 1_C$ olacak şekilde bir $k : C \longrightarrow B$ homomorfizması bulunur.

Bu durumda $B \cong A \oplus C$ dir.

Kanıt. 1)$\Longrightarrow$ 2) $B = Imf \oplus Kerh$ olduğunu gösterelim. Her $b \in B$ için

$$h(b - (f \circ h))(b) = h(b) - ((h \circ f) \circ h)(b) = h(b) - h(b) = 0$$

olduğundan $b - (f \circ h)(b) \in Kerh$ dir. O halde

$$b = f(h(b)) + (b - (f \circ h)(b)) \in Imh + Kerh$$

elde ederiz. Diğer taraftan her $f(x) \in Imh \cap Kerh$ için

$$x = (h \circ f)(x) = h(f(x)) = 0$$

olduğundan $Imh \cap Kerh = 0$ dır. Böylece $B = Imf \oplus Kerh$ olduğu görülür ve Imf, B nin bir dik toplananıdır.

2)$\Longrightarrow$ 3) Bir $M \leq B$ için $B = Imf \oplus M$ olsun. $M \cap Kerg = M \cap Imf = 0$ olduğundan $g_{|M}$ bir monomorfizmadır. Ayrıca, g bir epimorfizma olduğundan her $c \in C$ için $g(b) = c$ olacak şekilde bir $b \in B$ elemanı bulunur. $a,\ m \in M$ olmak üzere $b = f(a) + m$ şeklinde yazabiliriz. O halde

$$c = g(b) = g(f(a)) + g(m) = g(m)$$

dir. Dolayısıyla $g_{|M}$ bir epimorfizmadır. Bu izomorfizmanın tersinin değer kümesini genişleterek bir $k : C \longrightarrow B$ monomorfizmasını elde ederiz. Bu k için $g \circ k = 1_C$ olduğu açıktır.

3)$\Longrightarrow$ 1) Her $b \in B$ için $g(b-(k \circ g)(b)) = g(b)-((g \circ k) \circ g)(b) = 0$ olduğundan $b - (k \circ g)(b) \in Kerg = Imf$ dir. O halde

$$b - (k \circ g)(b) = f(a)$$

olacak şekilde bir $a \in A$ bulunur ve f monomorfizma olduğundan böyle a tektir. O halde $h : B \longrightarrow A$ fonksiyonunu $h(b) = a$ ile tanımlayalım. h nin bir monomorfizma olduğunu gösterelim. $h(b) = a,\ h(b^{'}) = a^{'}$ ise

$$b - (k \circ g)(b) = f(a)$$

ve

$$b^{'} - (k \circ g)(b^{'}) = f(a^{'})$$

olur. O halde

$$(b+b^{'})-(k \circ g)(b+b^{'}) = (b-(k \circ g)(b))+(b^{'}-(k \circ g)(b^{'})) = f(a)+f(a^{'}) = f(a+a^{'})$$

ve dolayısıyla $h(b + b^{'}) = a + a^{'} = h(b) + h(b^{'})$ elde ederiz. Diğer taraftan $r \in R$ için $rb - (k \circ g)(rb) = r(b - (k \circ g)(b)) = rf(a) = f(ra)$ olduğundan

$h(rb) = ra = rh(b)$ elde ederiz. Böylece h bir homomorfizmadır. Ayrıca her $a \in A$ için

$$f(a) - (k \circ g)(f(a)) = f(a) - k((g \circ f)(a)) = f(a) - k(0) = f(a)$$

olduğundan $h(f(a)) = a$ dır. Dolayısıyla $h \circ f = 1_A$ olur.

f bir monomorfizma olduğundan $Imf \cong A$ dır. Koşullar sağlandığında, ispattan $B = Imf \oplus M$ ve $M \cong C$ olduğunu görürüz. Böylece, $B \cong A \oplus C$ sağlanır. ■

Tanım 2.4.5 *Teorem 2.4.4'teki koşullardan biri sağlandığında,*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisine parçalanan (split) kısa tam dizi denir.

2.5 Serbest(Free) Modüller

Teorem 2.5.1 *F bir sağ R-modül, $X = \{\ x_k \mid k \in K\}$ de F nin bir alt kümesi olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:*

1) *Her $0 \neq a \in F$ elemanı sadece sonlu sayıda $r_k \in R$ sıfırdan farklı olmak üzere, tek türlü olarak $a = \sum_{k \in K} x_k r_k$ şeklinde yazılır.*

2) *Her $k \in K$ için $f_k(r) = x_k r$ şeklinde tanımlanan $f_k : R \longrightarrow x_k R$ fonksiyonu bir izomorfizma olup $F = \oplus_{k \in K} x_k R \cong \oplus_{k \in K} R_k,\ R_k = R$ dir.*

Kanıt. 1) $\Rightarrow$ 2) f_k fonksiyonunun örten olduğu açıktır. Eğer $r,\ s \in R$ olmak üzere $f_k(r) = f_k(s)$ ise $x_k r = x_k s$ dır. Kabulümüzden $r = s$ olur. O halde f_k bire-bir bir fonksiyondur. Şimdi $k \in K$ olmak üzere f_k nın bir modül homomorfizma olduğunu görelim. $r,\ s \in R$ olmak üzere

$$f_k(r + s) = x_k(r + s) = x_k r + x_k s = f_k(r) + f_k(s)$$

ve

$$f_k(rs) = x_k(rs) = (x_k r)s = f_k(r)s$$

olduğundan f_k bir izomorfizmadır. O halde her $k \in K$ için $R \cong Rx_k$ dır. Ayrıca her bir $a \in F$ elemanı tek türlü olarak Rx_k modüllerinin $r_k x_k$ elemanlarının sonlu toplamı şeklinde yazılabildiğinden $F = \oplus_{k\in K} Rx_k$ dir.

2) $\Rightarrow$ 1) $F = \oplus_{k\in K} Rx_k$ olduğundan her $a \in F$ elemanı, $r_k \in R$ olmak üzere $a = \sum\limits_{k\in K} x_k r_k$ sonlu toplamı şeklinde gösterilebilir ve

$$a = \sum_{k\in K} x_k r_k^{'} = \sum_{k\in K} x_k r_k$$

ise her $k \in K$ için $x_k r_k^{'} = x_k r_k$ dır. f_k bir monomorfizma olduğundan $r_k = r_k^{'}$ olup, yazılış tektir. ∎

Tanım 2.5.2 *Teorem 2.5.1'deki koşullardan birini sağlayan F_R modülüne Serbest Modül denir ve $X = \{\ x_k \mid k \in K\}$ kümesine de F nin Tabanı denir. Örneğin, $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ bir Serbest modüldür fakat $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ bir Serbest modül değildir.*

Kanıt. Farzedelim ki X, $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ nin bir tabanı olsun. Bu durumda bir $x_0/2 \in \mathbb{Q}$ elemanı

$$\frac{x_0}{2} = x_0 z_0 + \sum_{x_i \neq x_0} x_i z_i, \quad x_i \in X, z_i \in \mathbb{Z}$$

olarak yazılabilir. Böylece

$$x_0 = x_0 2 z_0 + \sum_{x_i \neq x_0} x_i 2 z_i \Longrightarrow x_0 n = \sum_{x_i \neq x_0} x_i 2 z_i$$

olur. Burada $n = 1 - 2z_0 \in \mathbb{Z}$ ve $n \neq 0$ dır. Şimdi

$$\frac{x_0}{n} = x_0 z_0^{'} + \sum_{x_j \neq x_0} x_j z_j^{'}, \quad x_j \in X, z_j^{'} \in \mathbb{Z}$$

olsun. Böylece

$$x_0 = x_0 n z_0^{'} + \sum_{x_j \neq x_0} x_j n z_j^{'} = \sum_{x_i \neq x_0} x_i 2 z_i z_0^{'} + \sum_{x_j \neq x_0} x_j n z_j^{'} = \sum_{x_k \neq x_0} x_k z_k^{''}$$

$x_k \in X, z_k^{''} \in \mathbb{Z}$ dir. O halde x_0, $X \setminus \{x_0\}$ ile üretilen alt modüldedir ve X, $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ nin bir tabanı olduğundan $X \setminus \{x_0\}$ de $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ nin bir tabanı olur. Buradan $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ nin sonlu bir tabanı olmadığı görülür. Aksi takdirde, $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$, boş küme tarafından üretilebilirdi ve böylece $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}} = 0$ olurdu. ∎

2.6 İnjektif ve Projektif Modüller

Tanım 2.6.1 *R bir halka ve P bir $R-$modül olsun. Her $f : M \longrightarrow N$ epimorfizması ve $\phi : P \longrightarrow N$ homomorfizması için $f \circ \phi' = \phi$ olacak biçimde bir $\phi' : P \longrightarrow M$ homomorfizması varsa P ye Projektif modül denir. Diğer bir deyişle*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "\phi"] \arrow[dl, dotted, "\phi'"'] \\ M \arrow[r, "f"'] & N \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli (yani $f \circ \phi' = \phi$) olacak şekilde bir ϕ' homomorfizması varsa P ye Projektif modül denir.

Teorem 2.6.2 *$\{ P_k \mid k \in I\}$ bir modüller ailesi olsun.*

$$P = \bigoplus_{k \in I} P_k \text{ Projektif modüldür} \Longleftrightarrow P_k (k \in I) \text{ Projektiftir.}$$

Kanıt. $k \in I$ için P Projektif modül olsun. Keyfi bir $f : A \longrightarrow B$ epimorfizmasını ve $g : P_k \longrightarrow B$ homomorfizmasını alalım. $\pi_k : P \longrightarrow P_k$, k'ıncı izdüşüm ve $i_k : P_k \longrightarrow P$, gömme homomorfizması olmak üzere P Projektif olduğundan, $g \circ \pi_k : P \longrightarrow B$ homomorfizması için $g \circ \pi_k = f \circ h$ olacak biçimde bir $h : P \longrightarrow A$ homomorfizması vardır.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r] & 0 \\ & P_k \arrow[u, "g"'] \arrow[d, shift left, "i_k"] & \\ & P \arrow[u, shift left, "\pi_k"] \arrow[uul, dotted, "h"] & \end{tikzcd}$$

$(h \circ i_k) : P_k \longrightarrow A$ homomorfizmasını göz önüne alalım. Bu durumda

$$f \circ (h \circ i_k) = g \circ \pi_k \circ i_k = g \circ I_{P_k} = g$$

bulunur. O halde P_k, Projektiftir.

Tersine, keyfi $f : A \longrightarrow B$ epimorfizmasını ve $g : P \longrightarrow B$ homomorfizmasını alalım. Her $k \in K$ için P_k modülü Projektif olduğundan, $g \circ i_k = f \circ h_k$

olacak şekilde bir $h_k : P_k \longrightarrow A$ homomorfizması bulunur. Toplamların Evrensel Özelliği'nden, her $k \in K$ için $h_k = h \circ i_k$ olacak şekilde tek bir $h : P \longrightarrow A$ homomorfizması bulunur. Bu durumda, her $k \in K$ için

$$g \circ i_k = f \circ h_k = f \circ h \circ i_k$$

elde edilir.Böylece $g = f \circ h$ bulunur. O halde P, Projektiftir. ■

Teorem 2.6.3 *Her F Serbest Modülü Projektiftir.*

Kanıt. $f : A \longrightarrow B$ bir epimorfizma ve $g : F \longrightarrow B$ homomorfizma olsun. F nin bir $X = \{\ x_k \mid k \in I\}$ tabanını alalım. f bir epimorfizma olduğundan her $k \in I$ için $f(a_k) = g(x_k)$ olacak biçimde bir $a_k \in A$ vardır. Her $k \in I$ için $s(x_k) = a_k$ alarak $s : X \longrightarrow A$ fonksiyonunu tanımlayalım. O halde Toplamların Evrensel Özelliği'nden her $k \in I$ için $h(x_k) = s(x_k) = a_k$ olacak biçimde bir $h : F \longrightarrow A$ homomorfizması bulunur. Buradan, her $c = \sum\limits_{k \in K} r_k x_k \in F$ için

$$\begin{aligned} (f \circ h)(c) &= f(h(\textstyle\sum_{k\in K} r_k x_k)) &&= f(\textstyle\sum_{k\in K} r_k h(x_k)) &&= f(\textstyle\sum_{k\in K} r_k a_k) \\ &= \textstyle\sum_{k\in K} r_k g(x_k) &&= g(\textstyle\sum_{k\in K} r_k x_k) &&= g(c) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $f \circ h = g$ yani F, Projektiftir. ■

Şimdi bir modülün Projektif olmadığını göstermede yararlı olan bir sonuç verelim:

Sonuç 2.6.4 *Her A_R modülü için P_R Projektif olmak üzere bir $f : P \longrightarrow A$ epimorfizması vardır. Örneğin; $Hom(\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}) = 0$ olduğundan $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ projektif modül değildir.*

Önerme 2.6.5 *Bir P sağ R-modülü için aşağıdakiler denktir:*

1) *P projektiftir;*

2) *Her $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ kısa tam dizisi splittir(Yani $B \cong A \oplus P$ dir);*

3) P, bir Serbest sağ R-modülün bir dik toplananına izomorftur.

Kanıt. 1) ⇒ 2)

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "g"] & P \arrow[r] & 0 \\ & P \arrow[u, "1_P"] \arrow[ul, dotted] & \end{tikzcd}$$

tam satırlı diyagramını göz önüne alalım. P Projektif olduğundan bir $h : P \longrightarrow B$ R-modül homomorfizması vardır öyle ki $g \circ h = 1_P$ dir. O halde

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \underset{h}{\overset{g}{\rightleftarrows}} P \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisi splittir. Bu durumda $B \cong A \oplus P$ dir.

2) ⇒ 3) Sonuç 2.6.4'ten, bir Serbest R-modül F ve $f : F \longrightarrow P$ epimorfizması vardır. $K = Kerf$ alınırsa,

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} F \xrightarrow{f} P \longrightarrow 0$$

dizisi tam olur. Varsayımdan bu dizi splittir. O halde $F \cong K \oplus P$ dir.

3) ⇒ 1) $F \cong K \oplus P$ olduğundan bu izomorfizmaya α diyelim.

$$F \underset{\alpha}{\cong} K \oplus P \xrightarrow{\beta} P, \; Ker\beta = K$$

alıp, $\pi := \beta \circ \alpha : F \longrightarrow P$ diyelim. Benzer şekilde, γ gömme dönüşümü olmak üzere $P \xrightarrow{\gamma} K \oplus P \underset{\alpha^{-1}}{\cong} F$ alıp, $i := \alpha^{-1} \circ \gamma : P \longrightarrow F$ diyelim. Tam satırlı

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] & B \arrow[r] & 0 \\ & P \arrow[u, "f"] & \end{tikzcd}$$

diyagramı verilsin. Şimdi,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] & B \arrow[r] & 0 \\ & P \arrow[u, "f"] \arrow[d, shift left, "i"] & \\ & F \arrow[u, shift left, "\pi"] \arrow[uul, dotted, "h_1"] & \end{tikzcd}$$

diyagramını düşünelim. F Serbest olduğundan Projektiftir. O halde bir $h_1 : F \longrightarrow A$ R-homomorfizması vardır öyle ki $g \circ h_1 = f \circ \pi$ dir. Şimdi, $h := h_1 \circ i : P \longrightarrow A$ diyelim. Bu durumda

$$g \circ h = g \circ (h_1 \circ i) = (f \circ \pi) \circ i = f \circ (\pi \circ i) = f \circ 1_P = f$$

olup P Projektiftir. ■

Tanım 2.6.6 *R bir halka ve I bir $R-$modül olsun. Her $f : A \longrightarrow B$ monomorfizması ve $g : A \longrightarrow I$ homomorfizması için $h \circ f = g$ olacak biçimde bir $h : B \longrightarrow I$ homomorfizması varsa I ya İnjektif modül denir. Diğer bir deyişle*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[dl, dotted, "h"] \\ I & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli (yani $h \circ f = g$) olacak şekilde bir h homomorfizması varsa I ya İnjektif modül denir.

Teorem 2.6.7 *$\{I_k \mid k \in J\}$ bir R-modüller ailesi olsun.*

$$I = \prod_{k \in J} I_k \text{ injektif modüldür} \Longleftrightarrow I_k (k \in J) \text{ injektif modüldür.}$$

Kanıt. $(\Longrightarrow)$ $I = \prod_{k \in J} I_k$ injektif modül olsun. $f : A \longrightarrow B$ bir monomorfizma ve $g : A \longrightarrow I_k$ bir homomorfizma olsun. I injektif modül olduğundan, $i_k : I_k \longrightarrow \prod_{k \in J} I_k$ gömme homomorfizması olmak üzere $i_k \circ g : A \longrightarrow I = \prod_{k \in J} I_k$ homomorfizması için $i_k \circ g = h \circ f$ olacak şekilde bir $h : B \longrightarrow I$ homomorfizması bulunur. Yani

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[ddl, dotted, "h"] \\ I_k \arrow[d, shift left, "i_k"] & \\ I \arrow[u, shift left, "\pi_k"] & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir. O halde $\pi_k : I \longrightarrow I_k$ k.ncı izdüşüm dönüşümü olmak üzere $\pi_k \circ h : B \longrightarrow I_k$ homomorfizması için, $a \in A$ olmak üzere

$$((\pi_k \circ h) \circ f)(a) = (\pi_k \circ i_k \circ g)(a) = g(a)$$

dır. O halde $\forall k \in J$ için I_k injektif modüldür.

($\Longleftarrow$) $I_k (k \in J)$ injektif modül, $\psi : A \longrightarrow B$ bir monomorfizma ve $f : A \longrightarrow I$ bir homomorfizma olsun. Her $k \in J$ için I_k injektif modül olduğundan bir $g_k : B \rightarrow I_k$ homomorfizması vardır ki öyle ki aşağıdaki diyagramı değişmeli yapar, yani $g_k \circ \psi = \pi_k \circ f$ dir.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[ddl, dotted, "g_k"] \\ I \arrow[d, "\pi_k"'] & \\ I_k & \end{tikzcd}$$

Şimdi $g : B \rightarrow I$, $g(b) = \{g_k(b)\}_{k \in J}$ $(b \in B)$ fonkiyonunu tanımlayalım. g bir modül homomorfizmasıdır. $b \in B$ için

$$(\pi_k \circ g)(b) = \pi_k(g_k(b)) = g_k(b)$$

olduğundan $(\pi_k \circ g) = g_k$ dır. O halde

$$\pi_k \circ f = g_k \circ \psi = \pi_k \circ g \circ \psi$$

olduğundan $f = g \circ \psi$ dır. Yani I injektif modüldür. ■

Teorem 2.6.8 *([13]) (Baer Kriteri) I bir R−modül olsun. I modülünün injektif olması için gerek ve yeter koşul her U (sağ) ideali için her $k : U \longrightarrow I_R$ modül homomorfizmasının bir $m : R \longrightarrow I_R$ modül homomorfizmasına genişletilebilmesidir (yani $m_{|U} = k$ olmasıdır).*

Teorem 2.6.9 *Bir D $\mathbb{Z}$-modülünün injektif olması için gerek ve yeter şart D nin divisible (yani, her $d \in D$ ve her $n \in \mathbb{Z}$ için $d = na$ olacak biçimde bir $a \in D$ vardır) olmasıdır.*

Kanıt. ($\Longrightarrow$) $D_{\mathbb{Z}}$ injektif olsun. $d \in D$ ve $n > 0$, $n \in \mathbb{Z}$ alalım. Her $m \in \mathbb{Z}$ için $f(m) = nm$ olmak üzere $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ ve her $m \in \mathbb{Z}$ için $g(m) = md$ olmak üzere $g : \mathbb{Z} \longrightarrow D$ fonksiyonlarını tanımlayalım. f nin bir monomorfizma , g nin bir homomorfizma olduğu açıktır. $D_{\mathbb{Z}}$ injektif olduğundan

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & \mathbb{Z} \arrow[dl, dotted, "h"] \\ & D & \end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapacak biçimde bir $h : \mathbb{Z} \longrightarrow D$ homomorfizması vardır. Bu durumda

$$d = g(1) = (h \circ f)(1) = h(f(1)) = h(n) = h(n.1) = nh(1)$$

olup $D_{\mathbb{Z}}$ divisibledir.

($\Longleftarrow$) $D_{\mathbb{Z}}$ divisible olsun. Baer Kriterinden D nin injektif olduğunu gösterelim: $\mathbb{Z}$ nin herhangi bir $0 \neq I$ idealinden D ye keyfi bir $f : I \longrightarrow D$ homomorfizmasını alalım. $n > 0$, $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $I = n\mathbb{Z}$ dir. D divisible olduğundan $f(n) = nd$ olacak biçimde bir $d \in D$ vardır. Her $m \in \mathbb{Z}$ için $g(m) = md$ olmak üzere $g : \mathbb{Z} \longrightarrow D$ fonsiyonunu tanımlayalım. g bir homomorfizmadır. Her $nk \in n\mathbb{Z} = I$ için

$$g(nk) = nkd = knd = kf(n) = f(nk)$$

olduğundan $g_{|I} = f$ olur. Böylece Baer Kriterinden $D_{\mathbb{Z}}$ injektiftir. ■

Teorem 2.6.10 *R bir Noether halka ve $\{I_i \mid i \in \Lambda\}$ keyfi injektif R-modüllerin bir ailesi olsun. Bu durumda $\bigoplus_{i \in \Lambda} I_i$ injektiftir.*

Kanıt. $\bigoplus\limits_{i\in\Lambda} I_i$ nin injektif olduğunu Baer Kriterini kullanarak gösterelim. L, R nin bir sağ ideali ve $h : L \to \bigoplus\limits_{i\in\Lambda} I_i$ bir homomorfizma olsun. R Noether halka olduğundan L sonlu üretilmiştir. Dolayısıyla Imh de sonlu üretilmiştir. Bu durumda I index kümesinin sonlu bir F altkümesi vardır ki Im$h \subseteq \bigoplus\limits_{i\in F} I_i$ dir. $\{I_i \mid i \in F\}$ injektif modüllerin sonlu bir ailesi olduğundan $\bigoplus\limits_{i\in F} I_i$ injektiftir. O halde bir $g : R \to \bigoplus\limits_{i\in F} I_i$ homomorfizması vardır ki aşağıdaki diyagramı değişmeli yapar, yani $g_{|L} = h$ dir.

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "i"] \arrow[d, "h"'] & R \arrow[dl, dotted, "g"] \\ \bigoplus\limits_{i\in F} I_i & \end{tikzcd}$$

Böylece $\bigoplus\limits_{i\in\Lambda} I_i$ modülü injektif olur. ■

Teorem 2.6.11 *([13]) Her modül bir injektif modülde alt modül olarak kapsanır.*

Teorem 2.6.12 *A bir $R-$modül olsun. Aşağıdakiler denktir;*

(i) *A injektif modüldür.*

(ii) *A, A yı kapsayan her $R-$modülün bir dik toplananıdır.*

Kanıt. **(i)** $\Longrightarrow$ **(ii)** A injektif bir $R-$modül ve $A \le A'_R$ olsun. O halde

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "1_A"'] & A' \arrow[dl, dotted, "\phi"] \\ A & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde bir $\phi : A' \longrightarrow A$ homomorfizması vardır. Bir $a' \in A'$ alalım.

$$\begin{aligned} \phi(a') \in A &\Longrightarrow \phi(a') = \phi(\phi(a')) \\ &\Longrightarrow \phi(a' - \phi(a')) = 0 \\ &\Longrightarrow a' - \phi(a') \in Ker\phi \\ &\Longrightarrow a' \in Ker\phi + A \\ &\Longrightarrow A' = A + Ker\phi \end{aligned}$$

dır. Şimdi bir $x \in Ker\phi \cap A$ alalım. $x \in A$ ve $\phi(x) = x = 0$ olduğundan $Ker\phi \cap A = 0$ dır. O halde $A' = A \oplus Ker\phi$ dir. Yani $A \leq_d A'$ dür.

(ii) $\Longrightarrow$ **(i)** Teorem 2.6.11'den $A \leq I$ olacak biçimde bir I injektif modülü vardır. Kabulümüzden $I = A \oplus X$ olacak biçimde bir $X \leq I$ vardır. O halde A injektiftir. ■

Önerme 2.6.13 *Bir $0 \neq M_R$ modülünün injektif olması için gerek ve yeter koşul M nin hiç bir essential genişlemesinin olmamasıdır (yani $M \leq_e N$ ise $M = N$ dir).*

Kanıt. ($\Longrightarrow$) M_R injektif bir modül ve V de M nin bir essential genişlemesi olsun. Teorem 2.6.12'den $V = M \oplus T$ olacak şekilde bir $T \leq V$ vardır. $M \cap T = 0$ ve $M \leq_e V$ olduğundan $T = 0$ dır. O halde $V = M$ dir.
($\Longleftarrow$) M nin proper essential genişlemesi olmasın. E de M yi içeren bir injektif modül olsun. M nin E de $M \cap T = 0$ olacak biçimde bir T komplementi vardır. Teorem 2.2.6'dan

$$M \cong \frac{M \oplus T}{T} \leq_e \frac{E}{T}$$

dir. M nin proper essential genişlemesi olmadığından

$$\frac{M \oplus T}{T} = \frac{E}{T} \quad \text{veya} \quad M \oplus T = E$$

dir. Böylece M, E injektif modülünün bir dik toplananı olduğundan Teorem 2.6.12'den injektiftir. ■

Önerme 2.6.14 *A bir $R-$modül, E A yı essential olarak kapsayan bir modül ve N de A yı kapsayan bir injektif modül olsun. Bu durumda $i : A \rightarrow N$ içerme monomorfizması olmak üzere, bir $g : E \rightarrow N$ monomorfizması vardır ki $g_{|A} = i$ dir.*

Kanıt. N injektif modül olduğundan bir $g : E \to N$ homomorfizması vardır ki aşağıdaki diyagramı değişmeli yapar, yani $g_{|A} = i$ dir.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[dl, dotted, "g"] \\ N & \end{tikzcd}$$

Bundan dolayı $A \cap Kerg = 0$ dır. Gerçekten; bir $a \in A \cap Kerg$ alırsak, $a \in A$ ve $g(a) = a = 0$ dır. $A \leq_e E$ ve $Kerg \leq E$ olduğundan

$$Kerg = 0$$

dır. O halde g bir monomorfizmadır. ■

Önerme 2.6.15 *A bir $R-$modül ve N de A yı kapsayan bir injektif modül olsun. Bu durumda N nin bir E alt modülü vardır ki E, A nın maksimal essential genişlemesidir.*

Kanıt. $\Omega = \{N' \mid A \leq_e N' \leq N\}$ olsun. $A \in \Omega$ olduğundan $\Omega \neq \emptyset$ dır. Ω kapsama bağıntısıyla bir kısmen sıralı kümedir. O halde Zorn Lemma'dan Ω nın bir maksimal E elemanı vardır. Şimdi E nin A nın maksimal essential genişlemesi olduğunu gösterelim. Farzedelim ki $E \leq_e E'$ olsun. Bu durumda Önerme 2.6.14'ten, $i : E \to N$ içerme monomorfizması olmak üzere, bir $\theta : E' \to N$ monomorfizması vardır ki aşağıdaki diyagramı değişmeli yapar, yani $\theta_{|E} = i$ dir.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"'] & E' \arrow[dl, dotted, "\theta"] \\ N & \end{tikzcd}$$

Buradan $E = \theta(E) \leq \theta(E') \leq N$ ve $E \leq_e N$ olduğundan $\theta(E') \leq_e N$ dir, yani $\theta(E') \in \Omega$ dır. E, Ω nın maksimal elemanı olduğundan $\theta(E') = E$ dir, yani $E = E'$ dür. ■

Önerme 2.6.16 *A bir $R-$modül ve $A \leq E$ olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir;*

(a) E, A yı kapsayan essential injektif modüldür.

(b) E, A yı kapsayan maksimal essential modüldür.

(c) E, A yı kapsayan minimal injektif modüldür.

Kanıt. (a) ve (b) nin denkliği Önerme 2.6.13'ten açıktır.
$(b) \implies (c)$ Önerme 2.6.13'ten E injektiftir. Farzedelim ki E' injektif olmak üzere $A \leq E' \leq E$ olsun. $A \leq_e E$ olduğundan $E' \leq_e E$ dir. Önerme 2.6.13'ten $E' = E$ olmalıdır. Böylece E, A yı kapsayan minimal injektif modüldür.
$(c) \implies (b)$ Önerme 2.6.15'ten E nin bir E'' alt modülü vardır ki E'', A nın maksimal essential genişlemesidir ve böylece Önerme 2.6.13'ten injektiftir. O halde varsayımdan $E = E''$ dür. Böylece (b) koşulu sağlanır. ■

Teorem 2.6.17 *A bir $R-$modül olsun. Bu durumda bir E $R-$modülü vardır ki aşağıdaki koşullar sağlanır;*

(a) E, A yı kapsayan essential injektif modüldür.

(b) E, A yı kapsayan maksimal essential modüldür.

(c) E, A yı kapsayan minimal injektif modüldür.

Ayrica E_1 ve E_2, A yı essential olarak kapsayan iki injektif modül ise bir $\theta : E_1 \to E_2$ izomorfizması vardır ki aşağıdaki diyagramı değişmeli yapar.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"'] & E_1 \arrow[dl, dotted, "\theta"] \\ E_2 & \end{tikzcd}$$

Kanıt. Teorem 2.6.11, Önerme 2.6.15 ve Önerme 2.6.16'dan bu koşulları sağlayan bir E modülü vardır. Şimdi E_1 ve E_2, A yı essential olarak kapsayan iki injektif modül olsun. Önerme 2.6.14'ten, $i : A \to E_2$ içerme monomorfizması olmak üzere, bir $\theta : E_1 \to E_2$ monomorfizması vardır ki $\theta_{|A} = i$ dir.

O halde $E_1 \cong \theta(E_1)$ dir. E_1 injektif modül olduğundan $\theta(E_1)$ de injektiftir. $A \leq_e E_2$ ve $A = \theta(A) \leq \theta(E_1) \leq E_2$ olduğundan

$$\theta(E_1) \leq_e E_2$$

dir. $\theta(E_1)$ injektif olduğundan Önerme 2.6.13'ten $\theta(E_1) = E_2$ dir. Sonuç olarak θ örten monomorfizma olduğundan izomorfizmadır. ■

Tanım 2.6.18 *A bir $R-$modül olsun. Teorem 2.6.17'deki koşullardan birini sağlayan bir E $R-$modülüne A modülünün injektif hull'ı denir ve $E(A) = E$ ile gösterilir.*

Tanım 2.6.19 *M ve X $R-$modüller ve $N \leq M$ olsun. Her $\phi : N \longrightarrow X$ homomorfizması için $\psi : M \longrightarrow X$, $\psi_{|N} = \phi$ olacak biçimde bir ψ homomorfizması varsa (yani her $\phi : N \rightarrow X$ homomorfizması bir $\psi : M \longrightarrow X$ homomorfizmasına genişlerse) X modülüne M-injektif modül denir.*

X_R injektif bir modül ise X her M_R modülü için M-injektiftir.

X_R modülü $R-$injektif ise X_R injektif modüldür.

Örnek 2.6.20 *$\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ modülü için $E(\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}) = \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ dir. Gerçekten; $\mathbb{Z}$ nin bir $0 \neq I$ idealinden $\mathbb{Q}$ ya keyfi bir $f : I \rightarrow \mathbb{Q}$ homomorfizması alalım. I, $\mathbb{Z}$ nin bir ideali olduğundan $n > 0$ ve $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $I = n\mathbb{Z}$ dir. $\mathbb{Q}$ nun her $\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$ elemanı ve her $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ için*

$$\frac{a}{b} = n.\frac{c}{d}$$

olacak şekilde bir $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ bulunabildiğinden

$$f(n) = n\frac{p}{q}$$

olacak biçimde bir $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ vardır. Her $m \in \mathbb{Z}$ için

$$g(m) = m\frac{p}{q}$$

olmak üzere $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ *fonksiyonunu tanımlayalım.* g *bir homomorfizmadır. Her* $nk \in n\mathbb{Z} = I$ *için*

$$g(nk) = nk\frac{p}{q} = kn\frac{p}{q} = kf(n) = f(nk)$$

olduğundan $g_{|I} = f$ *dir. Yani* $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ *injektiftir.*

Teorem 2.6.21 *([9])* M *bir* $R-$*modül ve* $K \leq M$ *olsun.*

Bir X *modülü* $M-$ *injektiftir* $\Longleftrightarrow$ *Aşağıdaki üç koşul sağlanır;*

1. X *modülü* $K-$*injektiftir.*
2. X *modülü* $\frac{M}{K}-$*injektiftir.*
3. *Herhangi bir* $\phi : K \longrightarrow X$ *homomorfizması* $\varphi : M \longrightarrow X$ *homomorfizmasına genişler.*

Önerme 2.6.22 R *bir halka,* $M = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ $(M_\lambda \leq M)$ *ve* X $R-$*modül olsun.*

X *modülü* $M -$ *injektiftir* $\Longleftrightarrow$ X *modülü* $M_\lambda -$ *injektiftir* $(\lambda \in \Lambda)$.

Kanıt. X modülü $M - injektif$ olsun. Teorem 2.6.21'den her $\lambda \in \Lambda$ için X modülü $M_\lambda - injektiftir$.

Tersine, herbir $\lambda \in \Lambda$ için X modülü $M_\lambda - injektif$ olsun. $N \leq M$ ve $\varphi \in Hom(N, X)$ alalım.

$$S = \{(L, \alpha) \mid N \subseteq L \leq M, \alpha \in Hom(L, X) \text{ ve } \alpha_{|N} = \varphi\}$$

kümesini tanımlayalım. $(N, \varphi) \in S$ olduğundan $S \neq \varnothing$ dir. Şimdi S de aşağıdaki bağıntıyı tanımlayalım;

$$(L, \alpha) \leq (L', \alpha') \Longleftrightarrow L \subseteq L' \text{ ve } \alpha'_{|N} = \alpha$$

S bir kısmen sıralı kümedir. $\{(L_\Omega,\alpha_\Omega) \mid \Omega \in \Lambda\}$, S de bir zincir olsun. $L = \underset{\Omega}{\cup} L_\Omega$ olsun. Bu durumda $L \leq M$ dir ve açıktır ki $N \leq L$ dir. Şimdi

$$\alpha : L \longrightarrow X,\ \alpha(m) = \alpha_\Omega(m) \quad (m \in L_\Omega)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. α bir homomorfizmadır. Bu durumda $(L, \alpha) \in S$ dir. Zorn Lemma'dan S, (K, θ) gibi bir maksimal eleman içerir. Şimdi $K = M$ olduğunu gösterelim. $\lambda \in \Lambda$, $P = M_\lambda \cap K$ ve $\beta = \theta_{|P}$ olsun. Böylece $\beta \in Hom(P, X)$ dir ve X M_λ-injektif olduğundan $\gamma_{|P} = \beta$ olacak biçimde bir $\gamma : M_\lambda \to X$ homomorfizması vardır. Şimdi

$$\theta' : M_\lambda + K \longrightarrow X,\ \theta'(m + k) = \gamma(m) + \theta(k), \quad (m \in M_\lambda, k \in K)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Farzedelim ki $m \in M_\lambda$ ve $k \in K$ için $m + k = 0$ olsun. Bu durumda $m = -k \in M_\lambda \cap K = P$ olur. O halde

$$\gamma(m) = \beta(m) = \theta(m) = \theta(-k) = -\theta(k)$$

dır ve $\theta'(m + k) = 0$ olduğundan θ' iyi tanımlıdır. Üstelik

$$\theta' \in Hom(M_\lambda + K, X) \quad \text{ve} \quad \theta'_{|K} = \theta$$

dır. K nın seçiminden $M_\lambda + K = K$ olmalıdır.Yani $M_\lambda \subseteq K$ dır ve buradan $M \subseteq K$ elde edilir. Sonuç olarak $M = K$ dır. Bu da X modülünün $M - injektif$ olduğunu gösterir. ∎

Önerme 2.6.23 *([11]) R bir halka, $M = \prod_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ ve A $R-$modül olsun.*

$$\prod_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha\ A-\mathit{injektiftir} \Longleftrightarrow \mathit{Her}\ \alpha \in \Lambda\ \mathit{için}\ M_\alpha\ A-\mathit{injektiftir}.$$

Teorem 2.6.24 *R bir halka ve M bir $R-$modül olsun. Bir X $R-$modülünün $M-$injektif olması için gerek ve yeter koşul her $\varphi \in Hom(E(M), E(X))$ için $\varphi(M) \subseteq X$ olmasıdır.*

Kanıt. $E(X)$ injektif olduğundan, $\varphi \in Hom(M, E(X))$ i gözönüne almak yeterlidir.

($\Longleftarrow$) $N \leq M$ ve $\alpha \in Hom(N, X)$ olsun. $E(X)$ injektif olduğundan bir $\varphi \in Hom(M, E(X))$ vardır ki aşağıdaki diyagramı değişmeli yapar, yani $\varphi_{|N} = \alpha$ dır.

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\alpha"'] & M \arrow[ddl, dotted, "\varphi"] \\ X \arrow[d, "i"'] & \\ E(X) & \end{tikzcd}$$

Kabulümüzden, $\varphi(M) \subseteq X$ olduğundan $\varphi : M \longrightarrow X$ dir. Yani $\varphi_{|N} = \alpha$ dır. Böylece X modülü $M-$injektiftir.

($\Longrightarrow$) $N = \{\ m \in M \mid \varphi(m) \in X\}$ olsun. Açıktır ki $N \leq M$ dir. X modülü $M-$injektif olduğundan bir $\theta \in Hom(M, X)$ vardır ki aşağıdaki diyagramı değişmeli yapar, yani $\theta_{|N} = \varphi_{|N}$ dir.

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\varphi_{|N}"'] & M \arrow[dl, dotted, "\theta"] \arrow[ddl, "\varphi"] \\ X \arrow[d, "i"'] & \\ E(X) & \end{tikzcd}$$

Şimdi iddiamız $X \cap (\theta - \varphi)(M) = 0$ olduğudur. Gerçekten; $x \in X$ ve $m \in M$ için $x = (\theta - \varphi)(m)$ olsun. Bu durumda $\varphi(m) = \theta(m) - x \in X$ dir ve sonuç olarak $m \in N$ dir. O halde $x = \theta(m) - \varphi(m) = \varphi(m) - \varphi(m) = 0$ dır. $X \leq_e E(X)$ ve $(\theta - \varphi)(M) \leq E(X)$ olduğundan $(\theta - \varphi)(M) = 0$ dır. Böylece $\theta(M) = \varphi(M) \leq X$ dir. ■

Tanım 2.6.25 *Bir M modülü $M-$injektif ise M ye quasi-injektif modül denir.*

Açıktır ki M modülü injektif ise quasi-injektiftir. Ancak tersi doğru değildir.

Şimdi, quasi-injektif olup injektif olmayan bir modül örneği verelim:

Örnek 2.6.26 *$M_R = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})_{\mathbb{Z}}$ modülü quasi-injektif olmasına karşın injektif değildir.*

Kanıt. $\bar{1} = 4.\bar{b}$ olacak biçimde bir $\bar{b} \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ olmadığından $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})_{\mathbb{Z}}$ modülü divisible değildir. Dolayısıyla injektif değildir.

Şimdi $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})_{\mathbb{Z}}$ modülünün quasi-injektif olduğunu görmek için; $N \leq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ olmak üzere her $f : N \longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ homomorfizması için $h : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $h_{|N} = f$ olacak biçimde bir h homomorfizmasının varlığını göstermeliyiz.
$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})_{\mathbb{Z}}$ nin alt modülleri: 0, kendisi ve $2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ dir.

$$Hom(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) = \left\{ I_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}, f_2, f_3, 0 \mid f_2(\bar{1}) = \bar{2}, f_3(\bar{1}) = \bar{3} \right\}$$

dir. Bu homomorfizmalardan monomorfizma olanlar f_3 ve birim dönüşüm $I_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}$ dır.

1.Durum: $f : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ herhangi bir homomorfizma ise

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \arrow[r, "I"] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \arrow[dl, dotted, "h"] \\ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$

olup $h = f$ homomorfizması diyagramı değişmeli yapar.

2.Durum: Aşağıdaki diyagramı göz önüne alalım:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "I"'] & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \arrow[dl, dotted, "h"] \\ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$

$h(\bar{1}) = \bar{3}$ koşulunu sağlayan h homomorfizması diyagramı değişmeli yapar.

3.Durum: Aşağıdaki diyagramı göz önüne alalım:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "f_2"'] & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \arrow[dl, dotted, "h"] \\ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$

$h(\bar{1}) = \bar{2}$ koşulunu sağlayan h homomorfizması diyagramı değişmeli yapar.

4.Durum: Aşağıdaki diyagramı göz önüne alalım:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "f_3"'] & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \arrow[dl, dotted, "h"] \\ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$

$h = I_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}$ homomorfizması diyagramı değişmeli yapar.

5.Durum: Aşağıdaki diyagramı göz önüne alalım:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "0"'] & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \arrow[dl, dotted, "h"] \\ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$

$h = 0$ homomorfizması diyagramı değişmeli yapar.

4.Durum: $Hom(2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) = \{i(\text{içerme dönüşümü})\}$ dür. O halde aşağıdaki diyagramı göz önüne alırsak:

$$\begin{tikzcd} 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"'] & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \arrow[dl, dotted, "h"] \\ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$

$h = I_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}$ homomorfizması diyagramı değişmeli yapar.

Sonuç olarak $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})_{\mathbb{Z}}$ quasi-injektif modüldür. ■

Sonuç 2.6.27 *Bir M modülünün quasi-injektif olması için gerek ve yeter koşul her $f \in End(E(M))$ için $f(M) \subseteq M$ olmasıdır.*

Önerme 2.6.28 $M = \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha$ *bir $R-$modül olsun. Aşağıdakiler denktir;*

(i) *M modülü quasi-injektiftir.*

(ii) *Her $\alpha \in \Lambda$ için M_α alt modülü quasi-injektif ve $M(\Lambda - \alpha)$ alt modülü $M_\alpha-$injektiftir.*

Kanıt. **(i)** $\Longrightarrow$ **(ii)** M modülü quasi-injektif olsun. Önerme 2.6.22'den her $\alpha \in \Lambda$ için $\underset{\alpha\in\Lambda}{\oplus} M_\alpha$ $M_\alpha-$injektiftir. O halde Önerme 2.6.23'ten her $\alpha \in \Lambda$ için M_α $M_\alpha-$injektif ve $\underset{i\in\Lambda-\alpha}{\oplus} M_i = M(\Lambda - \alpha)$ $M_\alpha-$injektiftir.

(ii) $\Longrightarrow$ **(i)** Her $\alpha \in \Lambda$ için M_α alt modülü quasi-injektif ve $M(\Lambda - \alpha)$ alt modülü $M_\alpha-$injektif olsun. O halde Önerme 2.6.23'ten $\underset{\alpha\in\Lambda}{\oplus} M_\alpha$ $M_\alpha-$injektif olduğundan Önerme 2.6.22'den $\underset{a\in\Lambda}{\oplus} M_\alpha$ quasi-injektiftir. ■

3 CS-MODÜLLER ve BAZI GENELLEŞTİRMELERİ

Bu bölümde, CS (veya extending veya C_1 koşulunu sağlayan) modüller ile genelleştirmeleri olan C_{11}-modüller ve FI-extending modüller incelenmiştir. Bu üç modül sınıfı arasında olan ve olmayan gerektirmeler verilmiştir. Bu modül sınıfları hakkında daha ayrıntılı bilgiler için [7], [11] ve [15] önerilir.

3.1 CS-Modüller

Tanım 3.1.1 *M bir R-modül olsun. Eğer her $N \leq M$ alt modülü için en az bir $K \leq_d M$ var öyle ki $N \leq_e K$ oluyorsa M ye CS-modül (veya C_1 koşulunu sağlayan modül veya Extending modül) denir. Özel olarak, R_R modülü CS ise R halkasına CS halka denir. Yani her I sağ ideali için $I \leq_e eR$ olacak biçimde $e^2 = e \in R$ vardır. Örneğin, semisimple ve uniform modüller CS'tir.*

Önerme 3.1.2 *Bir M modülünün CS-modül olması için gerek ve yeter şart her $K \leq_c M$ alt modülünün $K \leq_d M$ olmasıdır.*

Kanıt. M bir CS-modül ve $K \leq_c M$ olsun. Varsayımdan $K \leq_e M_1 \leq_d M$ olacak biçimde bir $M_1 \leq M$ vardır. $K \leq_c M$ olduğundan Önerme 2.2.9'dan $K = M_1 \leq_d M$ elde edilir.

Tersine, $N \leq M$ olsun. Önerme 2.2.8'den $N \leq_e K \leq_c M$ olacak biçimde bir $K \leq M$ vardır. Varsayımdan $K \leq_d M$ dir. O halde $N \leq_e K \leq_d M$ olup M CS-modüldür. ∎

Önerme 3.1.3 *M bir indecomposable modül olsun. Bu durumda M nin CS-modül olması için gerek yeter şart M nin uniform olmasıdır.*

Önerme 3.1.4 *Herhangi bir (quasi-)injektif M modülü CS-modüldür.*

Kanıt. $N \leq M$, $E_1 = E(N)$ olmak üzere $E(M) = E_1 \oplus E_2$ olsun. M (quasi-)injektif modül olduğundan

$$M = M \cap E(M) = M \cap (E_1 \oplus E_2) = (M \cap E_1) \oplus (M \cap E_2)$$

dir. $N \leq_e E_1$ ve $N \leq M$ olduğundan $N \leq M \cap E_1 \leq E_1$ dir. O halde $N \leq_e M \cap E_1$ dir. ■

Yukarıdaki Önermenin tersi doğru değildir. Örneğin; $\mathbb{Z}$ indecomposable uniform bir modül olduğundan Önerme 3.1.3'ten CS-modüldür. Ancak quasi-injektif (dolayısıyla da injektif) değildir. Çünkü $E(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$ olup, $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$, $f(m) = \frac{1}{2}m$ $(m \in \mathbb{Q})$ modül homomorfizması için $f(\mathbb{Z}) \nsubseteq \mathbb{Z}$ olduğundan Sonuç 2.6.27'den $\mathbb{Z}$ quasi-injektif değildir.

Önerme 3.1.5 *M bir CS-modül ve $M_1 \leq_d M$ olsun. Bu durumda M_1 de CS-modüldür.*

Kanıt. $K \leq_c M_1$ alalım. Bu durumda Önerme 2.2.11'den $K \leq_c M$ dir. M CS-modül olduğundan, Önerme 3.1.2'den $K \leq_d M$ dir. Dolayısıyla $M = K \oplus K^{'}$ olacak biçimde bir $K^{'} \leq M$ vardır. Buradan

$$M_1 = M_1 \cap M = M_1 \cap (K \oplus K^{'}) = K \oplus (M_1 \cap K^{'})$$

olduğundan $K \leq_d M_1$ olup M_1, CS-modüldür. ■

Şimdi CS-modüllerin dik toplamının her zaman CS olmadığını gösteren bir örnek verelim:

Örnek 3.1.6 *p asal bir tamsayı olmak üzere $M_1 = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus 0$, $M_2 = 0 \oplus \mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z}$ ve $M_{\mathbb{Z}} = M_1 \oplus M_2$ olsun. Bu durumda,*

i) $K \leq_c M_{\mathbb{Z}} \Leftrightarrow K = 0,\ M_1,\ M_2,\ M$ ya da $b \in \mathbb{Z}$ için, $b \notin p^3\mathbb{Z}$ olmak üzere $K = (1 + p\mathbb{Z}, b + p^3\mathbb{Z})$ dür.

ii) $M_{\mathbb{Z}}$, CS-modül değildir.

Kanıt. i) $0,\ M_1,\ M_2,\ M \leq_d M$ olduğundan bunlar M nin komplementleridir. Şimdi $b \notin p^3\mathbb{Z}$ için $K = (1 + p\mathbb{Z}, b + p^3\mathbb{Z}) \leq_c M$ olduğunu gösterelim: K devirli bir alt modül ve

$$\begin{aligned} p^3K &= p^3\mathbb{Z}(1 + p\mathbb{Z}, b + p^3\mathbb{Z}) \\ &= \mathbb{Z}(p^3 + p\mathbb{Z}, p^3b + p^3\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}(0 + p\mathbb{Z}, 0 + p^3\mathbb{Z}) = 0 \end{aligned}$$

olup $p^3M = p^3(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z}) = 0$ dır. $M_{\mathbb{Z}}$ nin Goldie boyutu 2 olduğundan K nın Goldie boyutu 0, 1 veya 2 dir. K nın Goldie boyutu, 0 ve 2 olamayacağından 1 olmalıdır. Yani K uniform alt modüldür. $L \leq M$ için $K \leq_e L$ olsun. M sonlu üretilmiş olduğundan L uniformdur ve böylece devirlidir (bakınız, [14]). O halde $L = (c + p\mathbb{Z}, d + p^3\mathbb{Z})\mathbb{Z}$ olan $c, d \in \mathbb{Z}$ vardır. $K \leq_e L$ olduğundan, $(1 + p\mathbb{Z}, b + p^3\mathbb{Z}) = n(c + p\mathbb{Z}, d + p^3\mathbb{Z})$ olacak biçimde $n \in \mathbb{Z}$ vardır. O halde $1 \equiv nc\ (mod p)$ ve $b \equiv nd\ (mod p^3)$ dür. $p \nmid n$ dir. Eğer $p \mid n$ olsaydı $1 \equiv 0 (mod p)$ çelişkisine varılırdı. Öyleyse $1 = nc + sp$ olacak biçimde $s \in \mathbb{Z}$ vardır. Böylece, $(1 - nc)^3 = s^3p^3$ olup $1 - nt = s^3p^3$ olacak biçimde $t \in \mathbb{Z}$ vardır. Buradan

$$\begin{aligned} t(1 + p\mathbb{Z}, b + p^3\mathbb{Z}) = nt(c + p\mathbb{Z}, d + p^3\mathbb{Z}) &= (1 - s^3p^3)(c + p\mathbb{Z}, d + p^3\mathbb{Z}) \\ &= (c + p\mathbb{Z}, d + p^3\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

olur. Yani $K = L$ bulunur. Sonuç olarak, K nın hiçbir essential genişlemesi olmadığından $K \leq_c M$ dir.

Şimdi $0 \neq N,\ M_1,\ M_2,\ M \leq_c M$ olsun. O halde Önerme 2.3.2'den N, M de maksimal uniform alt modüldür. Böylece, $(a + p\mathbb{Z}, b + p^3\mathbb{Z}) \in N$ olacak biçimde $a \notin p\mathbb{Z}$ ve $b \notin p^3\mathbb{Z}$ vardır. Genelliği bozmadan $a = 1$ alabiliriz. Böylece $(1+p\mathbb{Z}, b+p^3\mathbb{Z})\mathbb{Z} \subseteq N$ ve $(1+p\mathbb{Z}, b+p^3\mathbb{Z})\mathbb{Z} \leq_e N$ dir. $(1+p\mathbb{Z}, b+p^3\mathbb{Z})\mathbb{Z} \leq_c M$ olduğundan $N = (1 + p\mathbb{Z}, b + p^3\mathbb{Z})\mathbb{Z}$ olur. Böylece istenilen sonuç elde edilir.
ii) Şimdi $N = (1 + p\mathbb{Z}, p + p^3\mathbb{Z})\mathbb{Z} \leq M$ alalım. i) den $N \leq_c M$ dir ve N nin mertebesi p^2 dir. Eğer $N \leq_d M$ olsaydı $M = N \oplus N'$ olacak biçimde p^2 mertebeli $N' \leq M$ olurdu ki bu da $p^2M = p^2(N \oplus N') = 0$ ile çelişirdi. O halde N, M nin dik toplananı değildir. Dolayısıyla M, CS değildir. ■

Önerme 3.1.7 *Bir M_R modülünün CS olması için gerek ve yeter şart $N \cap L = 0$ koşulunu sağlayan her N ve L alt modülleri için bir $K \leq_d M$ vardır öyle ki $L \leq K$ ve $N \cap K = 0$ dır. Üstelik, bu durumda $N \oplus K \leq_e M$ dir.*

Kanıt. $\Rightarrow$) M modülü CS, N ve L de M nin $N \cap L = 0$ koşulunu sağlayan alt modülleri olsunlar. Bu durumda N nin $L \leq K$ olacak biçimde bir komplementi vardır. Hipotezden $K \leq_d M$ olur.

$\Leftarrow$) $L \leq_c M$ olsun. Bu durumda bir $N \leq M$ vardır öyle ki L, N nin komplementidir. Hipotezden bir $K \leq_d M$ vardır öyle ki $L \leq K$ ve $N \cap K = 0$ dır. Böylece $L = K$ elde edilir.

Son kısım Önerme 2.2.5'ten görülür. ■

3.2 C_{11}-Modüller

Tanım 3.2.1 *M bir R-modül olsun. Eğer M nin her alt modülü, M nin bir dik toplananı olan bir komplemente sahipse, yani, her $N \leq M$ için bir $K \leq_d M$ var öyle ki K, N nin M deki komplementi ise M ye C_{11}-modül (veya C_{11} koşulunu sağlar) denir. Eğer bir M modülünün her dik toplananı C_{11} koşulunu sağlıyorsa "M modülü C_{11}^{+} koşulunu sağlar" denir.*

Önerme 3.2.2 *M_R modülü CS-modül ise C_{11}-modüldür.*

Kanıt. $N, K \leq M$ ve $N \cap K = 0$ olsun. Bu durumda N nin $K \leq L$ olacak biçimde bir L komplementi vardır. M, CS-modül olduğundan $L \leq_d M$ dir. O halde M, C_{11}-modüldür. ■

Önerme 3.2.3 *Bir M_R modülü için aşağıdaki koşullar denktir:*

(1) M modülü C_{11} koşulunu sağlar.

(2) M deki herhangi bir L komplement alt modülü için, $K \leq_d M$ olacak biçimde L nin bir K komplementi vardır.

(3) Herhangi bir $N \leq M$ alt modülü için bir $K \leq_d M$ vardır öyle ki $N \cap K = 0$ ve $N \oplus K \leq_e M$ dir.

(4) Herhangi bir $L \leq_c M$ için bir $K \leq_d M$ vardır öyle ki $L \cap K = 0$ ve $L \oplus K \leq_e M$ dir.

Kanıt. **(1)$\Rightarrow$ (2)** , **(3)$\Rightarrow$ (4)** Açıktır.

(1)$\Leftrightarrow$ (3), **(2)$\Leftrightarrow$ (4)** Yardımcı Teorem 2.2.12'den açıktır.

(4)$\Rightarrow$ (1) $A \leq M$ olsun. Bu durumda $A \leq_e B \leq_c M$ olacak biçimde bir $B \leq M$ vardır. Hipotezden, bir $K \leq_d M$ vardır öyle ki $B \cap K = 0$ ve $B \oplus K \leq_e M$ dir. Böylece Yardımcı Teorem 2.2.12'den K, B nin komplementidir. Ayrıca $A \cap K \leq_e B \cap K = 0$ olduğundan $A \cap K = 0$ dır. $K < K' \leq M$ olduğunu farzedelim. Bu durumda $K' \cap B \neq 0$ dır ve böylece $K^{'} \cap B \cap A \neq 0$ dır. Yani $K^{'} \cap A \neq 0$ dır. Sonuç olarak K, A nın komplementidir. ■

Şimdi uniform modüllerin bir dik toplamı olan her modülün C_{11} olduğunu gösterelim. Özellikle, p bir asal tamsayı olmak üzere $M_{\mathbb{Z}} = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z})$ modülü C_{11} koşulunu sağlar. Fakat CS değildir (Örnek 3.1.6).

Teorem 3.2.4 *C_{11}-modüllerin herhangi bir dik toplamı da C_{11}-modüldür.*

Kanıt. Λ bir index kümesi olmak üzere, $\lambda \in \Lambda$ için M_λ lar C_{11}-modüller ve $M = \oplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ olsun. $N \leq M$ olsun. Bu durumda $N \cap M_\lambda \leq M_\lambda$ dır. M_λ C_{11}-modül olduğundan Önerme 3.2.3'ten bir $K_\lambda \leq_d M_\lambda$ vardır öyle ki $(N \cap M_\lambda) \cap K_\lambda = 0$ ve $(N \cap M_\lambda) \oplus K_\lambda \leq_e M_\lambda$ dır. Buradan

$$N \cap (M_\lambda \cap K_\lambda) = N \cap K_\lambda = 0$$

ve

$$(N \cap M_\lambda) \oplus K_\lambda = (N \oplus K_\lambda) \cap M_\lambda \leq_e M_\lambda$$

dır. Şimdi $\Lambda^{'}$
"en az bir $K^{'} \leq_d M^{'} = \oplus_{\lambda \in \Lambda^{'}} M_\lambda$ vardır öyle ki $N \cap K^{'} = 0$ ve $(N \oplus K^{'}) \cap M^{'} \leq_e M^{'}$ dür"
özelliğini sağlayan λ ları içeren Λ nın boştan farklı bir alt kümesi olsun. Farzedelim ki $\Lambda^{'} \neq \Lambda$ olsun. O halde bir $\mu \in \Lambda$ vardır öyle ki $\mu \notin \Lambda^{'}$ dür. $L = (N \oplus K^{'}) \cap M_\mu \leq M_\mu$ olduğundan bir $K_\mu \leq_d M_\mu$ vardır öyle ki $K_\mu \cap L = 0$ ve $K_\mu \oplus L \leq_e M_\mu$ dür. Şimdi $\Lambda^{''} = \Lambda^{'} \cup \{\mu\}$ ve $M^{''} = \oplus_{\lambda \in \Lambda^{''}} M_\lambda = M^{'} \oplus M_\mu$ olsun. Açıktır ki $K^{'} \cap K_\mu = 0$ dır. $K^{''} = K^{'} \oplus K_\mu$ olsun. Böylece $K^{'} \leq_d M^{'}$ ve $K_\mu \leq_d M_\mu$ olduğundan $K^{''} \leq_d M^{''}$ dür. Üstelik

$$K_\mu \cap N \leq K_\mu \cap L = K_\mu \cap (N \oplus K^{'}) \cap M_\mu = K_\mu \cap (N \oplus K^{'}) = 0$$

olup $K_\mu \cap N = 0$ dır. Diğer taraftan $K^{'} \cap N = 0$ olduğundan

$$N \cap (K_\mu \oplus K^{'}) = N \cap K^{''} = 0$$

dır.

Şimdi $N \oplus K^{''}$ alt modülünü göz önüne alalım.

$$(N \oplus K^{'}) \cap M^{'} \leq (N \oplus K^{''}) \cap M^{'}$$

olduğundan $(N \oplus K^{''}) \cap M^{'} \leq_e M^{'}$ dür. Üstelik

$$(N \oplus K^{''}) \cap M_\mu = (N \oplus K^{'} \oplus K_\mu) \cap M_\mu = [(N \oplus K^{'}) \cap M_\mu] \oplus K_\mu = L \oplus K_\mu \leq_e M_\mu$$

dür. Buradan $(N \oplus K^{''}) \cap M^{''} \leq_e M^{''}$ elde edilir. Bu uygulamayı tekrarlayarak, $N \cap K = 0$ ve $N \oplus K \leq_e M$ olacak biçimde bir $K \leq_d M$ bulunur. Böylece M C_{11}-modüldür. ■

Sonuç 3.2.5 *CS-modüllerin herhangi bir dik toplamı C_{11} koşulunu sağlar.*

Sonuç 3.2.6 *Uniform modüllerin herhangi bir dik toplamı C_{11} koşulunu sağlar.*

Yardımcı Teorem 3.2.7 *M bir modül, $N \leq_d M$ ve $K \leq M$ injektif bir alt modül öyle ki $N \cap K = 0$ olsun. Bu durumda $K \oplus N \leq_d M$ dir.*

Kanıt. $N \leq_d M$ olduğundan $M = N \oplus N^{'}$ olacak biçimde bir $N^{'} \leq M$ vardır. $\pi : M \longrightarrow N^{'}$ kanonik projeksiyon dönüşümü olsun. Bu durumda $\frac{K}{K \cap N} = \frac{K}{Ker\pi} \cong \pi(K)$ olup $K \cap N = 0$ olduğundan $K \cong \pi(K)$ dır. K injektif olduğundan $\pi(K)$ injektiftir. $\pi(K) \leq N^{'}$ olduğundan $\pi(K) \leq_d N^{'}$ dür. Ayrıca $N \oplus K = N \oplus \pi(K)$ olduğundan $N \oplus K \leq_d M$ dir. ■

Önerme 3.2.8 *M bir C_{11}-modül, $N \leq_d M$ öyle ki M/N injektif modül olsun. Bu durumda N, C_{11}-modüldür.*

Kanıt. $L \leq N$ olsun. $N \leq_d M$ olduğundan $M = N \oplus N^{'}$ olacak biçimde bir $N^{'} \leq M$ vardır. Ayrıca $M/N \cong N^{'}$ ve M/N injektif olduğundan $N^{'} \leq M$ injektif alt modüldür.

Şimdi $L \oplus N^{'}$ alt modülünü göz önüne alalım. M, C_{11}-modül olduğundan bir $K \leq_d M$ vardır öyle ki $(L \oplus N^{'}) \cap K = 0$ ve $(L \oplus N^{'}) \oplus K \leq_e M$ dir.

Yardımcı Teorem 3.2.7'den $(N^{'} \oplus K) \leq_d M$ dir. $\pi : M \longrightarrow N$ kanonik projeksiyon dönüşümü olmak üzere $\frac{K}{Ker\pi} = \frac{K}{N^{'} \cap K} = K \cong \pi(K)$ olduğundan $N^{'} \oplus K = N^{'} \oplus \pi(K) \leq_d M$ dir. Buradan $\pi(K) \leq_d N$ dir. Diğer yandan, $(L \oplus N^{'}) \oplus K = L \oplus \pi(K) \oplus N^{'} \leq_e M$ dir. Buradan $(L \oplus \pi(K)) \leq N \leq M$ olduğundan) $L \oplus \pi(K) \leq_e N$ dir. Önerme 3.2.3'ten N, C_{11}-modüldür. ■

3.3 FI-Extending Modüller

Tanım 3.3.1 *M bir modül ve $N \leq M$ olsun. Eğer her $\varphi \in End(M_R)$ için $\varphi(N) \subseteq N$ oluyorsa N ye M nin fully invariant (fully değişmez) alt modülü denir ve $N \lhd M$ ile gösterilir. Örneğin, $Soc(M)$, M modülünün semisimple fully invariant alt modülüdür.*

Tanım 3.3.2 *M bir modül olsun. Eğer M deki her fully invariant alt modül bir dik toplanan da essential olarak kapsanıyorsa M ye FI-extending modül denir.*

Yardımcı Teorem 3.3.3 *M bir modül olsun. Aşağıdaki koşullar denktir:*

(i) *M, FI-extending modüldür.*

(ii) *M nin her fully invariant alt modülü, M nin bir dik toplananı olan bir komplemente sahiptir.*

Kanıt. $X \lhd M$ olsun. M modülünün FI-extending olduğunu kabul edelim. Bu durumda bir $e^2 = e \in End(M)$ vardır öyle ki $X \leq_e eM$ dir. Böylece istenen komplement $(1-e)M$ dir.

Tersine, $c^2 = c \in End(M)$ olmak üzere cM, X in bir komplementi olsun. Bu durumda herhangi bir $x \in X$ için $x = cx + (1-c)x$ dir. $X \lhd M$ olduğundan $cx \in X \cap cM = 0$ dır. Bundan dolayı $X \subseteq (1-c)M$ dir. Böylece Teorem 2.2.10'dan $X \leq_e (1-c)M$ dir. ■

Tanım 3.3.4 *R bir domain (yani, sıfır bölensiz halka) olsun. Her $0 \neq x, y \in R$ için $xR \cap yR \neq 0$ ise R ye sağ Ore domain denir. Değişmeli her domain bir Ore domaindir.*

Yardımcı Teorem 3.3.5

(i) *D_D bir domain ise D_D, FI-extending modüldür.*

(ii) *D_D herhangi bir domain olsun. Bu durumda*

$$D_D,\ C_{11} \text{ koşulunu sağlar} \iff D_D \text{ sağ Ore domaindir.}$$

Kanıt. (i) $0 \neq F \lhd D_D$ alalım. D_D bir domain oluğundan indecomposabledir. Bir $d \in D$ için $F \cap dD = 0$ olsun. Şimdi $g(x) = dx$ olarak tanımlanan $g : D \longrightarrow D$ modül homomorfizmasını göz önüne alalım. $F \leq D$ fully invariant alt modül olduğundan $g(F) \subseteq F$ dir. O halde $df \in F \cap dD = 0$ olur. D domain olduğundan $d = 0$ elde edilir. Bu da $F \leq_e D$ olduğunu gösterir. Yani D_D, FI-extending modüldür.

(ii) D_D, C_{11} modül olsun. $N \leq D_D$ alalım. Bu durumda bir $U \leq_d D$ vardır öyle ki $U \cap N = 0$ ve $U \oplus N \leq_e D$ dir. D_D indecomposable olduğundan $U = 0$ elde edilir. Buradan $N \leq_e D$ olup, D nin uniform olduğu görülür. Böylece D_D sağ Ore domaindir.

Tersine, D_D sağ Ore domain olsun. O halde D nin her sağ ideali essentialdir. Böylece D_D uniformdur. Dolayısıyla CS'tir. Yardımcı Teorem 3.2.2'den D_D, C_{11}-modüldür. ■

Yardımcı Teoremden 3.3.3'ten, C_{11} koşulunu sağlayan bir modülün FI-extending olduğu görülür. Ancak bunun tersi doğru değildir. Örneğin; yukarıdaki Yardımcı Teoremden, sağ Ore olmayan herhangi bir domain, kendi üzerinde bir modül olarak, C_{11} koşulunu sağlamamasına rağmen FI-extending modüldür. Diğer bir örnek olarak, $\Pi_1^{\infty}\mathbb{Z}$ Specker Grubu, FI-extending olmasına rağmen ([16, Example 5.1]), C_{11}-modül değildir ([7, Lemma 3.4]).

Yardımcı Teorem 3.3.6 *M bir modül olsun.*

(i) M nin fully invariant alt modüllerinin herhangi bir toplamı veya kesişimi yine bir fully invariant alt modüldür.

(ii) $Y \lhd M$ ve $X \lhd Y$ olmak üzere $X \leq Y \leq M$ ise $X \lhd M$ dir.

(iii) $M = \oplus_{i \in I} X_i$ ve $S \lhd M$ ise, π_i, M nin i. nci projeksiyon homomorfizması olmak üzere $S = \oplus_{i \in I} \pi_i(S) = \oplus_{i \in I}(X_i \cap S)$ dir.

Önerme 3.3.7 *M bir modül ve $X \lhd M$ olsun. Eğer M, FI-extending ise X de FI-extending modüldür.*

Kanıt. Kabul edelim ki M, FI-extending modül ve $S \lhd X$ olsun. Yardımcı Teorem 3.3.6 (ii) den $S \lhd M$ dir. Böylece bir $D \leq_d M$ vardır öyle ki $S \leq_e D$ dir. $\pi : M \longrightarrow D$ projeksiyon endomorfizması olsun. Bu durumda

$$S = \pi(S) \leq \pi(X) \cap D = \pi(X) \cap \pi(M) = \pi(X)$$

dir. $S \leq \pi(X) \leq D$ ve $S \leq_e D$ olduğundan $S \leq_e \pi(X)$dir. Ayrıca $\pi(X) \leq_d X$ dir. ■

Teorem 3.3.8 *$M = \oplus_{i \in I} X_i$ olsun. Eğer her bir X_i FI-extending modül ise M de FI-extending modüldür.*

Kanıt. Farzedelim ki her bir X_i modülü FI-extending ve $S \lhd M$ olsun. $\pi_i(S) \neq 0$ olan her bir i için $\pi_i(S) \lhd X_i$ olduğundan bir $D_i \leq_d X_i$ vardır öyle ki $\pi_i(S) \leq_e D_i$ dir. Yardımcı Teorem 3.3.6 (iii) yi kullanırsak, $S = \bigoplus_{i \in I} \pi_i(S) \leq_e \bigoplus_{i \in I} D_i$ olduğunu elde ederiz. $\bigoplus_{i \in I} D_i \leq_d M$ olduğundan M modülü FI-extending olur. ■

Sonuç 3.3.9 *M modülü, extending (ya da uniform) modüllerin bir dik toplamı ise FI-extending modüldür.*

Sonuç 3.3.10 *M bir $\mathbb{Z}$-modül (yani bir Abelian grup) olsun. Eğer M, aşağıdaki koşullardan herhangi birini sağlarsa, FI-extending $\mathbb{Z}$-modül olur.*

(i) M, sonlu üretilmiştir.

(ii) M sınırlı derecedendir (yani, bazı pozitif n tamsayıları için $nM = 0$ dır).

(iii) M divisibledir (yani, her bir $a \in M$ ve $n \in \mathbb{Z}$ için $a = nb$ olacak biçimde bir $b \in M$ vardır).

Kanıt. (i) Her sonlu üretilmiş Abelian grup, uniform $\mathbb{Z}$-modüllerin bir dik toplamıdır. Dolayısıyla Sonuç 3.3.9'dan M, FI-extending modüldür.
(ii) ([17], p.262) den M, cyclic torsion grupların bir dik toplamıdır. Böylece M, yine uniform $\mathbb{Z}$-modüllerin bir dik toplamıdır.
(iii) M divisible olduğundan extending $\mathbb{Z}$-modüldür. ■

Örnek 3.3.11 *FI-extending olmayan bir M $\mathbb{Z}$-modülü vardır.*
$P = \{\, p \in \mathbb{Z} \mid p$ asal tamsayı$\}$ olmak üzere $M = \prod_{p \in P} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ olsun. M nin torsion alt grubu τM, açıkça M de fully invariant bir alt modüldür. τM, M nin bir dik toplananı değil ve M nin hiçbir dik toplananında essential olarak kapsanmaz ([17], p.244). Böylece M, FI-extending değildir. Bu örnek ayrıca FI-extending modüllerin dik çarpımlarının FI-extending modül olması gerekmediğini de gösterir.

Önerme 3.3.12 *M bir modül olsun. Bu durumda M nin FI-extending olması için gerek ve yeter şart her bir $S \trianglelefteq M$ için bir $e = e^2 \in End_R(E(M))$ vardır öyle ki $S \leq_e e(E(M))$ ve $e(M) \subseteq M$ olmasıdır.*

Kanıt. (⇒) Kabul edelim ki M FI-extending olsun. Bu durumda bir $X \leq_d M$ vardır öyle ki $S \leq_e X$, ve $M = X \oplus Y$ olacak biçimde bir $Y \leq M$ vardır. Böylece $E(X)$ ve $E(Y)$ injektif hull'ları vardır öyle ki

$$E(M) = E(X) \oplus E(Y)$$

dir. $e : E(M) \longrightarrow E(X)$ projeksiyon endomorfizması olsun. Bu durumda $e(M) \leq M$ ve $S \leq_e e(E(M))$ dir.
($\Leftarrow$) Tersine, $S \lhd M$ olsun. Bu durumda

$$e(M) \cap S \leq M \cap S = S \leq e(M) \cap e(E(M)) = e(M)$$

ve $e(M) \cap S \leq_e e(M) \cap e(E(M)) = e(M)$ olduğundan

$$S \leq_e M \cap e(E(M)) = e(M)$$

dir. Ayrıca $e(M) \leq_d M$ olduğundan M FI-extending modüldür. ■

Önerme 3.3.13 *M modülü FI-extending ve I, $E(M)$ nin fully invariant dik toplananı olmak üzere $S = M \cap I$ olsun. Bu durumda S, M nin bir fully invariant dik toplananıdır.*

Kanıt. $f \in End_R(M)$ olsun. Bu durumda bir $\bar{f} \in End_R(E(M))$ vardır öyle ki $\bar{f}_{|M} = f$ dir. $s \in S$ olsun. Buradan $f(s) \in M$ ve

$$\bar{f}(s) \in \bar{f}(M \cap I) \subseteq \bar{f}(M) \cap \bar{f}(I) \subseteq E(M) \cap I = I$$

olduğundan $f(s) = \bar{f}(s) \in I$ dır. Böylece $f(s) \in S$ dir. Dolayısıyla $S \lhd M$ dir. M modülü FI-extending olduğundan bir $X \leq_d M$ vardır öyle ki $S \leq_e X$ dir. Ayrıca $M \leq_e E(M)$ olduğundan $S = M \cap I \leq_e E(M) \cap I = I$ olup $E(S) = I$ ve $E(X) \cong I$ dır. I fully invariant olduğundan $E(X) = I$ dır. Böylece $X \subseteq M \cap E(X) = M \cap I = S$ olur. O halde $S = X$ dir. ■

Tanım 3.3.14 *M bir modül olsun. Eğer M deki her fully invariant alt modül, bir fully invariant dik toplanan da essential olarak kapsanıyorsa M ye strongly FI-extending modül denir.*

Şimdi, strongly FI-extending modül sınıfının, FI-extending modül sınıfı içinde proper olarak kapsandığını gösteren bir örnek verelim:

Örnek 3.3.15 *p bir asal sayı olmak üzere, $M = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_p$ $\mathbb{Z}$-modülünü göz önüne alalım. $\mathbb{Z}$, değişmeli bir halka olduğundan her ideali fully invarianttır, dolayısıyla $\mathbb{Z}$, FI-extending modüldür. $\mathbb{Z}_p$ de, Sonuç 3.3.10'dan FI-extending modüldür. O halde, Teorem 3.3.8'den M, FI-extending $\mathbb{Z}$- modüldür. Ancak M, [16, Theorem 7.1] den strongly FI-extending modül değildir.*

Yardımcı Teorem 3.3.16 *M_R bir modül, $\Lambda = End(M_R)$ ve $e^2 = e \in \Lambda$ olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar sağlanır:*

(i) $e \in S_l(\Lambda) = \{\ e \in \Lambda \mid xe = exe,\ \forall x \in \Lambda\}$ olması için gerek ve yeter koşul $eM \lhd M$ olmasıdır.

(ii) M bir strongly FI-extending modül ve $K \lhd M$ ise K, M nin tek bir (fully invariant) dik toplananında essentialdir.

Kanıt.

(i) $e \in S_l(\Lambda) = \{\ e \in \Lambda \mid xe = exe,\ \forall x \in \Lambda\}$, $h \in \Lambda$ ve $m \in M$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $hem = ehem \in eM$ olur. Böylece $eM \lhd M$ dir.

Tersine, $eM \lhd M$, $h \in \Lambda$ ve $m \in M$ olsun. Buradan $hem = ek$ olacak biçimde bir $k \in M$ vardır. Böylece $ehem = e^2k = ek = hem$ olur. O halde her $m \in M$ için $(ehe)(m) = (he)(m)$ olduğundan $ehe = he$ elde edilir. Yani $e \in S_l(\Lambda)$ dır.

(ii) M strongly FI-extending modül ve $K \lhd M$ olsun. (i) den bir $e \in S_l(\Lambda)$ vardır öyle ki $K \leq_e eM$ dir. Farzedelim ki $c = c^2 \in \Lambda$ ve $K \leq_e cM$ olsun. Bu durumda $(ce)^2 = cece = ce$ dir. Ayrıca $K \lhd M$ olduğundan $ceK \subseteq K$ dır. Şimdi, bir $x \in K$ alalım. $K \leq_e cM$ olduğundan $x = cm$ ve $K \leq_e eM$ olduğundan $x = en$ olacak biçimde $n, m \in M$ vardır. Bu durumda $x = cex \in ceK$ olur ve böylece $K \subseteq ceK$ elde edilir. Dolayısıyla $K = ceK$ olur. Buradan $K \leq ceM \leq cM$ dir. Ayrıca $K \leq_e cM$ olduğundan $ceM \leq_e cM$ olur. $ceM \leq_d M$ olduğundan bir komplement alt modüldür ve böylece $ceM = cM$ olur. Ayrıca $ce\Lambda \leq e\Lambda$ olduğundan [11, Lemma 3.1] den $ceM \leq eM$ olur. Bundan dolayı $cM \leq eM$ olur. Fakat $K \leq_e eM$ olduğundan $cM = eM$ dir. Dolayısıyla K, M nin tek bir (fully invariant) dik toplananında essentialdir. ■

Teorem 3.3.17 *Bir strongly FI-extending modülün her dik toplananı da strongly FI-extendingdir.*

Kanıt. M strongly FI-extending modül, $B \leq_d M$ ve $\Lambda = End(M_R)$ olsun. Bu durumda bir $e^2 = e \in \Lambda$ vardır öyle ki $B = eM$ dir. $X \lhd B$ olsun. Her $f \in \Lambda$ için $f(\Lambda X) \subseteq \Lambda X$ olduğundan $\Lambda X \lhd M$ dir. M strongly FI-extending olduğundan bir $f^2 = f \in S_l(\Lambda)$ vardır öyle ki $\Lambda X \leq_e fM$ dir. Açıkça $X \subseteq \Lambda X \cap eM$ dir. Şimdi bir $k \in \Lambda X \cap eM$ alalım. Bu durumda $k = f(x) = e(m)$ olacak biçimde $f \in \Lambda$ ve $m \in M$ vardır. $X \lhd M$ olduğundan $k = f(x) \in X$ olur. Böylece $\Lambda X \cap eM \subseteq X$ dir. Dolayısıyla $X = \Lambda X \cap eM \leq_e fM \cap eM$ olur. Bundan dolayı $f \in S_l(\Lambda)$, $(ef)^2 = (ef)(ef) = e(fef) = e(ef) = ef$ ve $efM \subseteq eM \cap fM$ olmak üzere $eX \subseteq efM$ olur. Şimdi $x \in eM \cap fM$ alalım. Bu durumda $x = em = fm^{'}$ olacak biçimde $m, m^{'} \in M$ vardır. Böylece

$$ex = em = efm^{'} = fefm^{'} = fe.em = fem = fx$$

olur. Buradan $(ef)^2 = ef \in \Lambda$ olmak üzere $efM = eM \cap fM$ dir. O halde her $x \in X$ için $x = ex$ olduğundan $X = eX \leq_e efM$ ve ayrıca $efM \leq_d M$ olduğundan $efM \leq_d eM$ dir. Şimdi $efM \lhd eM$ olduğunu gösterelim. $End_R(eM) = e\Lambda e$ ve $fM \lhd M$ olduğundan $e\Lambda e.efM \subseteq e(\Lambda e(fM)) \subseteq e(fM)$ dir. Buradan $X \leq_e efM$ ve efM fully invariant dik toplanan olduğundan $B = eM$ strongly FI-extending modüldür. ■

Teorem 3.3.18 *$M = \oplus_{i \in I} M_i$, her $i, j \in I$ için $M_i \cong M_j$ ve M_i strongly FI-extending modül olsun. Bu durumda M strongly FI-extending modüldür.*

Kanıt. $N \lhd M$ olsun. Böylece $N \cap M_i \lhd M_i$ olmak üzere $N = \oplus_{i \in I}(N \cap M_i)$ dir. M_i strongly FI-extending modül olduğundan $e_i \in S_l(End_R(M_i))$ ve $N \cap M_i \leq_e e_i M_i$ olmak üzere $M_i = e_i M_i \oplus (1 - e_i) M_i$ yazabiliriz. Şimdi, $\sigma_{ij} = \{ f \mid f : M_i \longrightarrow M_j \text{ izomorfizma}\}$ olsun. $N \leq_e \oplus_{i \in I} e_i M_i \leq_d M$ olduğundan ispatı tamamlamak için $\oplus_{i \in I} e_i M_i \lhd M$ olduğunu göstermeliyiz. $h \in End_R(M)$ ve $x \in \oplus_{i \in I} e_i M_i$ olsun. Genelliği bozmadan bazı $i \in I$ için $x = e_i m_i$ olduğunu

varsayalım. Buradan bazı $J \subseteq I$, $|J| < \infty$ için $h(x) = h(e_i m_i) = \Sigma_{j \in J} m_j^{'}$ dür. $h(e_i m_i) \in \oplus_{i \in I} e_i M_i$ olduğunu göstermek için genelliği bozmadan $\pi_j h(e_i m_i) = m_j^{'}$ yi göz önüne alalım ve $k \in I$ için $\pi_k : M \longrightarrow M_k$ doğal projeksiyon dönüşümü olmak üzere $m_j^{'} \in e_j M_j$ olduğunu gösterelim:
$\pi_j h(e_i m_i) = \pi_j h \pi_i (e_i m_i)$ olduğundan $\sigma_{ij}^{-1}(\pi_j h \pi_i)(e_i m_i) = \sigma_{ij}^{-1}(m_j^{'})$ dir. Buradan

$$(\sigma_{ij}^{-1} \pi_j h \pi_i)_{|M_i} \in End_R(M_i) \text{ ve } e_i \in S_l(End_R(M_i))$$

dir. Böylece $e_i(\sigma_{ij}^{-1} \pi_j h \pi_i)(e_i m_i) \in e_i M_i$ olmak üzere

$$(e_i \sigma_{ij}^{-1} \pi_j h \pi_i)(e_i m_i) = \sigma_{ij}^{-1}(m_j^{'})$$

dir. O halde $\sigma_{ij}(e_i \sigma_{ij}^{-1} \pi_j h \pi_i)(e_i m_i) = m_j^{'}$ dir. Şimdi, $\sigma_{ij} : M_i \longrightarrow M_j$ bir izomorfizma olduğundan σ_{ij} altında $N \cap M_i \cong N \cap M_j$ ve $e_i M_i$, $N \cap M_i \leq_e e_i M_i$ olan tek dik toplanan olduğundan (Yardımcı Teorem 3.3.16 (ii)) σ_{ij} altında $e_i M_i \cong e_j M_j$ dir. Böylece

$$\sigma_{ij}(e_i \sigma_{ij}^{-1} \pi_j h \pi_i)(e_i m_i) = m_j^{'} \in e_j M_j$$

dir. $e_i \in S_l(End_R(M_i))$ olduğundan

$$(\sigma_{ij} \sigma_{ij}^{-1} \pi_j h \pi_i)(e_i m_i) = (\pi_j h \pi_i)(e_i m_i) = m_j^{'} \in e_j M_j$$

elde edilir. Bu da gösterir ki $\oplus_{i \in I} e_i M_i \lhd M$ dir. ■

Sonuç 3.3.19 *R_R strongly FI-extending modül olsun. Bu durumda her projektif sağ R-modül strongly FI-extending modüldür.*

Kanıt. Teorem 3.3.17 ve Teorem 3.3.18'den sonuç elde edilir. ■

4 ALT MODÜLLERİ DİK TOPLANANLARA GÖMÜLEBİLEN MODÜLLER

Bu bölümde, C_{12}-modüllerin dik toplamları ve dik toplananları üzerinde durulmuştur. C_{12}-modüllerin sınıfının dik toplamlar altında kapalı olduğu gösterilmekle beraber, C_{12} özelliğinin dik toplananlara taşınmadığını gösteren bir örnek verilmiştir. Bir C_{12}-modülün dik toplananının da C_{12}-modül olduğunu garanti eden bir koşul verilmiştir. Üstelik, T_R, bir C_{12}-modül olan M_R nin essential genişlemesi ve M, $T-injektif$ ise T_R nin de C_{12} koşulunu sağladığı gösterilmiştir. Bu sonuçların kapsandığı bir çalışma olarak okuyucuya yakın zamanda yayınlanacak olan [18] önerilir.

Tanım 4.1 *M bir R-modül olsun. Eğer M nin her N alt modülü için, bir $K \leq_d M$ ve $\alpha(N) \leq_e K$ olacak biçimde bir $\alpha : N \to K$ monomorfizma varsa M ye C_{12}-modül ya da "C_{12} koşulunu sağlar" denir. Eğer bir M modülünün her dik toplananı C_{12} koşulunu sağlıyorsa "M modülü C_{12}^{+} koşulunu sağlar" denir.*

Yardımcı Teorem 4.2 *M modülünün C_{12} koşulunu sağlaması için gerek ve yeter şart her $N \leq_c M$ için bir $K \leq_d M$ ve bir $\alpha : N \longrightarrow K$ monomorfizması vardır öyle ki $\alpha(N) \leq_e K$ dir.*

Kanıt. **(⇒)** M, C_{12}-modül olsun. İstenilen şart tanımdan açıktır.
(⇐) $L \leq M$ olsun. Bu durumda Önerme 2.2.8'den $L \leq_e N \leq_c M$ olacak biçimde bir $N \leq M$ vardır. Hipotezden, bir $K \leq_d M$ ve bir $\alpha : N \longrightarrow K$ monomorfizması vardır öyle ki $\alpha(N) \leq_e K$ dir. $\alpha(L) \leq_e \alpha(N) \leq_e K$ olduğundan $\alpha(L) \leq_e K$ dır. Böylece M modülü C_{12} koşulunu sağlar. ■

Önerme 4.3 *M_R modülü C_{11}-modül ise C_{12}-modüldür.*

Kanıt. $N \leq M$ olsun. Bu durumda $K, K' \leq M$ alt modülleri vardır öyle ki $M = K \oplus K'$, $N \cap K' = 0$ ve $N \oplus K' \leq_e M$ dir. $\pi : M \to K$

projeksiyon dönüşümü ve $\alpha = \pi_{|N}$ olsun. $\alpha : N \to K$ bir monomorfizmadır. $0 \neq k \in K$ olsun. Bu durumda bir $r \in R$ vardır öyle ki bazı $x \in N, k^{'} \in K^{'}$ için $x + k^{'} = kr \neq 0$ dır.

$$kr = \pi(kr) = \pi(x + k^{'}) = \pi(x) + \pi(k^{'}) = \pi(x) = \alpha(x)$$

dir. Böylece $kR \cap \alpha(N) \neq 0$ dır. Sonuç olarak her $0 \neq k \in K$ için $kR \cap \alpha(N) \neq 0$ olduğundan Önerme 2.1.2'den $\alpha(N) \leq_e K$ dır. ■

Teorem 4.4 *M ve N, R-modüller olmak üzere $M \cong N$ olsun. M modülü C_{12} koşulunu sağlar ise N modülü de C_{12} koşulunu sağlar.*

Kanıt. $f : M \longrightarrow N$ bir izomorfizma olsun. $L \leq N$ alalım. Bu durumda $f(L^{'}) = L$ olacak biçimde bir $L^{'} \leq M$ vardır. M, C_{12} koşulunu sağladığından bir $K^{'} \leq_d M$ ve bir $\alpha : L^{'} \longrightarrow K^{'}$ monomorfizması vardır öyle ki $\alpha(L^{'}) \leq_e K^{'}$ dür. $K^{'} \leq_d M$ olduğundan $f(K^{'}) \leq_d N$ dir. Şimdi bir

$$\begin{array}{rcl} \beta : L = f(L^{'}) & \longrightarrow & f(K^{'}) \\ f(l^{'}) & \longmapsto & f(\alpha(l^{'})) \end{array}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Açıktır ki β bir monomorfizmadır. Son olarak, $\beta(L) \leq_e f(K^{'})$ olduğunu görelim. $f(N^{'}) \leq f(K^{'})$ olmak üzere $f(\alpha(L^{'})) \cap f(N^{'}) = 0$ olsun. Bu durumda $f(\alpha(L^{'}) \cap N^{'}) = 0$ olup f bire-bir olduğundan $\alpha(L^{'}) \cap N^{'} = 0$ olur. $\alpha(L^{'}) \leq_e K^{'}$ ve $N^{'} \leq K^{'}$ olduğundan $N^{'} = 0$, dolayısıyla da $f(N^{'}) = 0$ bulunur. Böylece $\beta(L) = \beta(f(L^{'})) = f(\alpha(L^{'})) \leq_e f(K^{'})$ elde edilir. Sonuç olarak N modülü C_{12} koşulunu sağlar. ■

Önerme 4.5 *([7, Proposition 3.3]) M herhangi bir modül olsun. Bu durumda M, C_{12} koşulunu sağlayan bir modülün bir dik toplananına izomorftur.*

Kanıt. Herhangi bir X modülü için $E(X)$, X in injektif hull'ını göstersin. $M^{'} = E(E(M) \oplus E(M) \oplus E(M) \oplus ...)$ olsun. $M^{'}$, injektif modüldür. $M^{''} = M \oplus M^{'}$ olsun. Buradan $M \cong M \oplus 0 \leq_d M^{''}$ dür. Şimdi $M^{''}$ nün C_{12}-modül olduğunu gösterelim:

İlk olarak

$$E(M^{''}) = E(M \oplus M^{'}) = E(E(M) \oplus E(M) \oplus E(M) \oplus ...) \cong M^{'}$$

dür ve böylece bir $\beta : M^{''} \longrightarrow M^{'}$ monomorfizması vardır. $N \leq M^{''}$ olsun. Bu durumda $\beta(N) \leq M^{'}$ dür. O halde $\beta(N) \leq_e K \leq_c M^{'}$ olacak biçimde bir $K \leq M^{'}$ vardır. $M^{'}$ injektif olduğundan CS'tir. Dolayısıyla $K \leq_d M^{'}$ dür. Böylece $M^{''}$, C_{12} koşulunu sağlar. ■

Şimdi, C_{12} koşulunu sağlayıp, C_{11} koşulunu sağlamayan bir $\mathbb{Z}$-modül örneği verelim. Bunun için ilk olarak aşağıdaki Yardımcı Teoremi verelim:

Yardımcı Teorem 4.6 *([7, Lemma 3.4]) $\prod_1^\infty \mathbb{Z}$ Specker grubu C_{12} koşulunu sağlamaz.*

Sonuç 4.7 *([7, Corollary 3.5]) C_{12} koşulunu sağlayan bir $\mathbb{Z}$-modülü vardır öyle ki M nin bazı K dik toplananları C_{12} koşulunu sağlamaz.*

Sonuç 4.8 *([7, Proposition 3.6]) C_{12} koşulunu sağlayıp, C_{11} koşulunu sağlamayan bir M $\mathbb{Z}$-modülü vardır.*

Kanıt. Önerme 4.5'teki ispat tekniğini kullanarak, eğer $M = \prod_1^\infty \mathbb{Z}$ Specker Grubu ise, bir $M^{'}$ injektif $\mathbb{Z}$-modülü vardır öyle ki $M^{''} = M \oplus M^{'}$, C_{12} koşulunu sağlar. Diğer yandan, Yardımcı Teorem 4.6'dan M, C_{12} koşulunu sağlamaz. O halde Önerme 4.3'ten M, C_{11} koşulunu sağlamaz. Şimdi, $M^{''}$ modülünün C_{11} koşulunu sağlamadığını gösterelim. Farzedelim ki $M^{''}$, C_{11}-modül olsun. $M^{''}/M \cong M^{'} \leq_d M^{''}$ ve $M^{'}$ injektif olduğundan $M^{''}/M$ injektiftir. O halde Önerme 3.2.8'den M, C_{11}-modüldür. Fakat bu M nin C_{12} koşulunu sağlamaması ile çelişir. Sonuç olarak, $M^{''}$, C_{11} koşulunu sağlamaz. ■

Yardımcı Teorem 4.9 *R bir Noether halka ve M de sıfırdan farklı indecomposable sağ R-modül olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:*

(i) *M, uniformdur.*

(ii) *M, C_{11}-modüldür.*

(iii) *M, C_{12}-modüldür.*

Kanıt. $(i) \Rightarrow (ii)$ M uniform olsun. $\forall N \leq M$ için $N \leq_e M$ olduğundan M, CS-modüldür. Dolayısıyla Önerme 3.2.2'den M, C_{11}-modüldür.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Önerme 4.3'ten görülür.
$(iii) \Rightarrow (i)$ $0 \neq m \in M$ olsun. $r(m) = \{\ s \in R \mid ms = 0\}$ kümesini göz önüne alalım. $r(m)$, R nin bir sağ idealidir ve $R/r(m) \cong mR$ dir. Böylece Teorem 2.3.20'den $R/r(m)$ Noether, dolayısıyla mR Noether'dir. Böylece Yardımcı Teorem 2.3.4'ten M nin bir U uniform alt modülü vardır. Kabulümüzden, bir $K \leq_d M$ ve $\varphi(U) \leq_e K$ olacak biçimde bir $\varphi : U \to K$ monomorfizması vardır. M indecomposable olduğundan $K = M$ dir. Ayrıca $U \cong \varphi(U)$ olduğundan $\varphi(U)$ uniformdur. Böylece $\varphi(U) \leq_e M$ olduğundan M uniform modüldür. ■

Şimdi, C_{12} koşulunun dik toplamlar altında kapalı olduğunu gösteren sonucumuzu verelim:

Teorem 4.10 *C_{12}-modüllerin herhangi bir dik toplamı da C_{12}-modüldür.*

Kanıt. Λ bir index kümesi olmak üzere, $\lambda \in \Lambda$ için M_λ lar C_{12}-modüller ve $M = \oplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ olsun. $N \leq M$ olsun. Bu durumda $N \cap M_\lambda \leq M_\lambda$ dır. M_λ C_{12}-modül olduğundan bir $K_\lambda \leq_d M_\lambda$ ve $\alpha(N \cap M_\lambda) \leq_e K_\lambda$ olacak biçimde bir $\alpha : N \cap M_\lambda \to K_\lambda$ monomofizması vardır. Şimdi Λ'
"bir $K' \leq_d M' = \oplus_{\lambda\in\Lambda'} M_\lambda$ ve $\alpha'(N \cap M') \leq_e K'$ olacak biçimde bir $\alpha' : N \cap M' \to K'$ monomorfizması vardır"
özelliğini sağlayan λ ları içeren Λ nın boştan farklı bir alt kümesi olsun.

Farzedelim ki $\Lambda' \neq \Lambda$ olsun. O halde bir $\mu \in \Lambda$ vardır öyle ki $\mu \notin \Lambda'$ dür. $N \cap M_\mu \leq M_\mu$ olduğundan bir $K_\mu \leq_d M_\mu$ ve $\alpha''(N \cap M_\mu) \leq_e K_\mu$ olacak biçimde bir $\alpha'' : N \cap M_\mu \to K_\mu$ monomorfizması vardır. Şimdi $\Lambda'' = \Lambda' \cup \{\mu\}$ ve $M'' = \oplus_{\lambda \in \Lambda''} M_\lambda = M' \oplus M_\mu$ olsun. Açıktır ki $K' \cap K_\mu = 0$ dır. $K'' = K' \oplus K_\mu$ olsun. Böylece $K'' \leq_d M''$ dür.

$N \cap M'' = N \cap (M' \oplus M_\mu)$ alt modülünü göz önüne alalım.

$$\beta : N \cap M'' \to K' \oplus K_\mu \quad \text{by} \quad \beta(n) = \beta(m_1 + m_2) = \alpha'(m_1) + \alpha''(m_2)$$

($n \in N \cap M''$, $m_1 \in N \cap M'$, $m_2 \in N \cap M_\mu$) tanımlayalım. β nın bir monomorfizma olduğu açıktır. Üstelik

$$\beta(N \cap M'') = \alpha'(N \cap M') \oplus \alpha''(N \cap M_\mu) \leq_e K' \oplus K_\mu$$

dür. Bu uygulamayı tekrarlayarak bir $K \leq_d M$ ve $\gamma(N) \leq_e K$ olacak biçimde bir $\gamma : N \to K$ monomorfizması bulunur. Böylece M, C_{12}-modüldür. ■

Sonuç 4.11 *C_{11}-modüllerin (sırasıyla CS ve uniform modüllerin) herhangi bir dik toplamı C_{12}-modüldür.*

Kanıt. Teorem 4.10'dan görülür. ■

Sonuç 4.12 *R bir Noether halka olmak üzere R_R modülü C_{12} koşulunu sağlasın ve bir C_{12}-modülün her dik toplananı da C_{12}-modül olsun. Bu durumda her indecomposable projektif R-modül uniformdur.*

Kanıt. P bir indecomposable projektif R-modül olsun. Bu durumda Önerme 2.6.5'ten bir Serbest F_R modülü vardır öyle ki bazı K, P' alt modülleri için $F = K \oplus P'$ ve $K \cong P$ dir. R_R modülü C_{12} koşulunu sağladığından Teorem 2.5.1 ve Teorem 4.10'dan F, C_{12}-modüldür. Hipotezden, K bir C_{12}-modüldür. Dolayısıyla Teorem 4.4'ten P bir C_{12}-modüldür. O halde Önerme 4.9'dan P

uniformdur. ■

Şimdi, iki uniform modülün dik toplamı ile ilgili bir sonuç verelim. İlk olarak, hatırlayalım ki p bir asal tamsayı olmak üzere $(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p\oplus\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^3)_{\mathbb{Z}}$ modülü extending olmamasına karşın, $(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p\oplus\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^2)_{\mathbb{Z}}$ modülü extending'dir (bakınız, [7] ve [19]). Bununla beraber bu modüller, Sonuç 4.11'den dolayı, C_{12} koşulunu sağlarlar.

Önerme 4.13 *U ve V uniform modüller olmak üzere $M = U \oplus V$ olsun. Bu durumda M, C_{12}^{+} koşulunu sağlar.*

Kanıt. $0 \neq K \leq_d M$ olsun. Eğer $K = M$ ise Sonuç 4.11'den K, C_{12}-modüldür. Eğer $K \neq M$ ise K uniformdur ve böylece K, C_{12}-modüldür. Sonuç olarak M, C_{12}^{+} koşulunu sağlar. ■

Şimdi $\mathbb{Z}$ halkası üzerinde tanımlı uniform modüllerin dik toplamları için aşağıdaki teoremi verelim:

Teorem 4.14 *M, uniform modüllerin bir dik toplamı olan bir $\mathbb{Z}$-modül olsun. Bu durumda M, C_{12}^{+} koşulunu sağlar.*

Kanıt. $0 \neq N \leq_d M$ olsun. Bu durumda N, uniform modüllerin bir dik toplamıdır [7, Teorem 5.5]. Sonuç 4.11'den N, C_{12}-modüldür. Böylece M, C_{12}^{+} koşulunu sağlar. ■

C_{12} koşulu, modüllerin dik toplamlarına taşınmasına karşın C_{12} koşulunu sağlayan bir modülün dik toplananları C_{12} koşulunu sağlamak zorunda değildir. Şimdi vereceğimiz örnek bu doğrultuda olup daha genel bu türden örnekler ve ayrıntılar için [20] ve [21]'e bakabilirsiniz.

Örnek 4.15 *$\mathbb{R}$ reel sayılar cismi ve S, $\mathbb{R}[x,y,z]$ polinom halkası olsun. Bu durumda $s = x^2+y^2+z^2-1$ olmak üzere $R = S/Ss$ halkası değişmeli Noether domaindir. $M_R = (R\oplus R\oplus R)_R$ modülü C_{12} koşulunu sağlar fakat, C_{12} koşulunu sağlamayan bir K dik toplananı kapsar.*

Kanıt. $\mathbb{R}$ Noether olduğundan Hilbert Taban Teoremi'nden (Teorem 2.3.21) $S = \mathbb{R}[x,y,x]$ de Noetherdir. Teorem 2.3.20'den $R = S/Ss$ halkası da Noetherdir. Ayrıca $x^2+y^2+z^2-1$ polinomu irreducible olduğundan $Ss =< x^2+y^2+z^2-1 >$ asal idealdir. $S = \mathbb{R}[x,y,z]$ birimli ve değişmeli bir halka olduğundan dolayı $R = S/Ss$ bir tamlık bölgesidir. O halde R, her idealini essential olarak kapsar. Bundan dolayı R uniform olup Sonuç 4.11'den M, C_{12}-modüldür. Şimdi

$$\begin{aligned} \phi : M = R\oplus R\oplus R &\longrightarrow R \\ e_1 = (1+Ss, 0+Ss, 0+Ss) &\mapsto x+Ss \\ e_2 = (0+Ss, 1+Ss, 0+Ss) &\mapsto y+Ss \\ e_3 = (0+Ss, 0+Ss, 1+Ss) &\mapsto z+Ss \end{aligned}$$

dönüşümünü tanımlayalım. Bu durumda $(a+Ss, b+Ss, c+Ss) \in R\oplus R\oplus R$ için $\phi(a+Ss, b+Ss, c+Ss) = ax+by+cz+Ss$ dir. Açıktır ki ϕ bir homomorfizmadır. $Ker\phi = K$ diyelim. Ayrıca $R = xR+yR+zR$ olduğundan ϕ örtendir. Dolayısıyla

$$0 \longrightarrow K = Ker\phi \xrightarrow{i} R\oplus R\oplus R \xrightarrow{\phi} R$$

tam dizisi splittir. O halde en az bir $K' \leq M$ vardır öyle ki $M = K\oplus K'$ ve $K' \cong R$ dir. Buradan K nın rankı 2 olup, K uniform değildir. Bredon'un [22, VI.13.3] sonucundan K, 2-küre S^2 nin tanjant bundle'ının regüler sectionunun R-modülüdür ve bu modül indecomposable'dir. O halde Yardımcı Teorem 4.9'dan K, C_{12}-modül değildir. ■

Yukarıda bulunan örnekteki $K = Ker\phi$ nin uniform boyutu 2 dir. Böylece Teorem 2.3.5'ten K, $U_1\oplus U_2 \leq_e K$ olacak biçimde U_1 ve U_2 gibi iki uniform alt modül kapsar. Sonuç 4.11'den $U_1 \oplus U_2$, C_{12} koşulunu sağlar. Böylece C_{12} koşulu genel olarak essential genişlemeler altında kapalı değildir. Şimdi, C_{12} koşulunun essential genişlemeler üzerinde hangi durumda kapalı olduğunu gösteren bir teorem verelim:

Teorem 4.16 *M ve T sağ R-modüller, M_R, C_{12} koşulunu sağlasın ve $M_R \leq_e T_R$ olsun. Eğer M, T-injective ise T_R modülü de C_{12} koşulunu sağlar.*

Kanıt. $X \leq T$ ve $\overline{X} = X \cap M$ olsun. Bu durumda $e^2 = e \in End(M_R)$ olmak üzere bir $\varphi : \overline{X} \to eM$ monomorfizması vardır öyle ki $\varphi(\overline{X}) \leq_e eM$ dir. Kabulümüzden $\theta_{|\overline{X}} = \varphi$ olacak biçimde bir $\theta : X \to T$, homomorfizması vardır. $\pi : T \to eT$, $Ker\pi = (1-e)T$ olan projeksiyon dönüşümü olsun. $\alpha : X \to eT$ yı $\alpha(x) = \pi(\theta(x))$, $x \in X$ olacak biçimde tanımlayalım. α bir monomorfizmadır. Gerçekten, $x \in Ker\alpha$ alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} \alpha(x) = 0 = \pi(\theta(x)) = 0 &\Rightarrow \theta(x) \in (1-e)T \cap \theta(X) \\ &\Rightarrow \theta(x) \in (1-e)T \cap M \\ &\Rightarrow \theta(x) \in (1-e)T \cap T = 0 \\ &\Rightarrow \theta(x) = 0 \end{aligned}$$

olur. Bu durumda $x = 0$ dır. Eğer $x \neq 0$ olsaydı;
$M \leq_e T$ olduğundan en az bir $r \in R$ vardır öyle ki $0 \neq xr \in M$ dir. Aynı zamanda $xr \in X$ olduğundan $0 \neq xr \in X \cap M = \overline{X}$ dir. Böylece $\theta(xr) = \theta(x)r = 0r = 0$ olur. Diğer yandan $\theta(xr) = \varphi(xr)$ ve φ monomorfizma olduğundan $xr = 0$ olmalıdır ki bu da $xr \neq 0$ olmasıyla çelişir. O halde $x = 0$ olmalıdır. Yani α monomorfizmadır.

Şimdi $0 \neq et \in eT$ olsun. $M \leq_e T$ olduğundan bir $r \in R$ vardır öyle ki $0 \neq etr \in M$ dir. Böylece $0 \neq etr \in eM$ dir. $\varphi(\overline{X}) \leq_e eM$ olduğundan bir $s \in R$ vardır öyle ki $0 \neq etrs \in \varphi(\overline{X})$ dir. O halde bazı $a \in \overline{X}$ ler için $0 \neq etrs = \varphi(a)$ dır. Bundan dolayı

$$\alpha(a) = \pi(\theta(a)) = \pi(\varphi(a)) = \varphi(a) = etrs.$$

dir. Böylece $\alpha(X) \leq_e eT$ olup T_R, C_{12} koşulunu sağlar. ■

Şimdi C_{12}-modüllerin dik toplananlarının da C_{12}-modül olması için gereken koşulları verelim:

Teorem 4.17 *$M = M_1 \oplus M_2$ olsun. M_1 in C_{12}-modül olması için gerek ve yeter koşul her $N \leq M_1$ için $M_2 \subseteq K$ olacak biçimde bir $K \leq_d M$ ve $\varphi(N) \cap K = 0$ ve $\varphi(N) \oplus K \leq_e M$ olacak biçimde bir $\varphi : N \to M_1$ monomorfizmasının var olmasıdır.*

Kanıt. Kabul edelim ki M_1, C_{12}-modül ve $N \leq M_1$ olsun. Bu durumda bir $L \leq_d M_1$ ve $\varphi(N) \leq_e L$ olacak biçimde bir $\varphi : N \to L$ monomorfizması vardır. $L \leq_d M_1$ olduğundan $M_1 = L \oplus L'$ olacak biçimde bir $L^{'} \leq M$ vardır. Açıktır ki $L^{'} \oplus M_2 \leq_d M$ dir. Ayrıca $(L' \oplus M_2) \cap \varphi(N) = 0$ ve

$$(L' \oplus M_2) \oplus \varphi(N) \leq_e (L^{'} \oplus M_2) \oplus L = M$$

dir.

Tersine, M_1, belirtilen özelliği sağlasın. $H \leq M_1$ olsun. Hipotezden, $M_2 \subseteq K$ olacak biçimde bir $K \leq_d M$ ve $\varphi(H) \cap K = 0$ ve $\varphi(H) \oplus K \leq_e M$ olacak biçimde bir $\varphi : H \to M_1$ monomorfizması vardır. Modüler Kuralından

$$K = K \cap (M_1 \oplus M_2) = (K \cap M_1) \oplus M_2$$

dir. Böylece $K \cap M_1 \leq_d K \leq_d M$ olup $K \cap M_1 \leq_d M$ ve bundan dolayı $K \cap M_1 \leq_d M_1$ dir. O halde $M_1 = (K \cap M_1) \oplus X$ olacak biçimde bir $X \leq M_1$ vardır. $\pi : M \to X$, $Ker\pi = K$ olan projeksiyon dönüşümü olsun. $f : H \to X$, $f(h) = \pi(\varphi(h))$ $(h \in H)$ olarak tanımlayalım. $h \in Kerf$ alalım. Bu durumda $f(h) = \pi(\varphi(h)) = 0$ olup $\varphi(h) \in K$ dır. O halde $\varphi(h) \in K \cap \varphi(H) = 0$ olduğundan $h \in Ker\varphi$ dir. φ monomorfizma olduğundan $h = 0$ yani $Kerf = 0$ dır. Sonuç olarak f bir monomorfizmadır. Şimdi $0 \neq x \in X$ alalım. $\varphi(H) \oplus K \leq_e M$ olduğundan en az bir $r \in R$ vardır öyle ki $0 \neq xr \in \varphi(H) \oplus K$ dır.

Buradan, bazı $h \in H$ ve $k \in K$ için $xr = \varphi(h) + k$ dır. Böylece

$$0 \neq xr = \pi(xr) = \pi(\varphi(h)) + \pi(k) = f(h) \in f(H)$$

olup $f(H) \leq_e X$ dir. Sonuç olarak, M_1, C_{12}-modüldür. ■

Örnek 4.15'teki M_R modülü Serbest olduğundan, Teorem 2.6.3'ten projektiftir. Dolayısıyla Teorem 2.6.2'den $Ker\phi \leq_d M$ de Projektiftir. Ayrıca R bir domain olduğundan Yardımcı Teorem 3.3.5'ten R_R strongly FI-extending modüldür. O halde, Sonuç 3.3.19'dan $Ker\phi$, strongly FI-extending R-modüldür. Dolayısıyla FI-extending modüldür. Ancak $Ker\phi$, C_{12}-modül değildir. Buradan, FI-extending bir modülün C_{12} koşulunu sağlamak zorunda olmadığı görülür. Ancak, bugüne kadar yaptığımız çalışmalarda, C_{12} koşulunu sağlayan bir modülün FI-extending olup olmadığı hala bilinmemektedir.

5 C_{12}-MODÜLLERİN AYRIŞIMLARI

Bu bölümde C_{12}^+ koşulunu sağlayan bir modülün, sonlu uniform boyuta sahip bir modül ile semisimple bir modülün dik toplamı şeklinde yazıldığını gösterdik. CS bir modülün bu türden bir ayrışıma hangi koşullar altında sahip olduğu [23]'de verilmiştir. İlk olarak sonucumuzda kullanacağımız bir tanım verelim:

M bir R-modül olsun. $Soc(M) = A \oplus B \cong A \oplus C$ iken $B \cong C$ ise yani M nin *Socle*'ı bir R-modül olarak kısaltılabilirse $Soc(M)$ ye *cancellable* (kısaltılabilir) diyeceğiz (bakınız, [24]). Örnek 4.15'teki M modülünün Socle'ı sıfırdır ve $M/Soc(M)$ nin uniform boyutu 3'tür ancak M, C_{12}^+ koşulunu sağlamaz. Bir M modülü için, C_{12}^+ koşulu ile $M/Soc(M)$ nin sonlu uniform boyuta sahip olması, $Soc(M)$ nin cancellable olmasını gerektirip gerektirmediği sorusu akla gelebilir. Bir sonraki örnek bu olasılığı ortadan kaldırır.

Örnek 5.1 *p herhangi bir asal sayı olsun. $M = \oplus_i \mathbb{Z}/\mathbb{Z}p$ $\mathbb{Z}$-modül olsun. Bu durumda Teorem 4.14'ten M, C_{12}^+ koşulunu sağlar ve $M/Soc(M)$ sonlu uniform boyuta sahiptir. Açıktır ki M semisimple yani; $Soc(M) = M$ olduğundan cancellable değildir.*

Yardımcı Teorem 5.2 *M, C_{12}^+ koşulunu sağlayan bir modül ve $M/Soc(M)$ sonlu uniform boyuta sahip olsun. Farzedelim ki $Soc(M)$ cancellable ve M nin sonlu üretilmiş bir alt modülünde kapsansın. Bu durumda M, sonlu uniform boyuta sahiptir.*

Kanıt. Farzedelim ki M sonlu uniform boyuta sahip olmasın. Bu durumda $\overset{\infty}{\underset{i=1}{\oplus}} U_i \leq_e M$ olacak biçimde $U_i \leq M$ vardır. Böylece Önerme 2.3.10 ve Sonuç 2.3.12'ten

$$\overset{\infty}{\underset{i=1}{\oplus}} Soc(U_i) = Soc(\overset{\infty}{\underset{i=1}{\oplus}} U_i) = Soc(M)$$

olup, $Soc(M)$ sonlu üretilmiş değildir. Böylece $Soc(M)$ nin S_1 ve S_2 alt modülleri vardır öyle ki S_1 ve S_2 sonlu üretilmiş değildir ve $Soc(M) = S_1 \oplus S_2$

dir. M C_{12}^{+} koşulunu sağladığından bir $K^{'} \leq_d M$ ve $\alpha(S_1) \leq_e K^{'}$ olacak biçimde bir $\alpha : S_1 \to K^{'}$ monomorfizması vardır. Böylece bir $K \leq M$ vardır öyle ki $M = K \oplus K^{'}$ ve $\alpha(S_1) \oplus K \leq_e K^{'} \oplus K = M$ dir. Önerme 2.3.10 ve Sonuç 2.3.12'den

$$Soc(M) = S_1 \oplus S_2 = Soc(\alpha(S_1) \oplus K) = Soc(\alpha(S_1)) \oplus Soc(K)$$

dır. $Soc\,(\alpha(S_1)) \oplus Soc\,(K) \cong \alpha(S_1) \oplus Soc(K)$ ve $Soc(M)$ cancellable olduğundan, $S_2 \cong Soc(K)$ dır. Böylece $Soc(K)$ sonlu üretilmiş değildir. Diğer taraftan,

$$Soc(M) = Soc(K) \oplus Soc(K^{'}) \cong Soc(K) \oplus \alpha(S_1)$$

olduğundan, $S_1 \cong \alpha(S_1) \cong Soc(K^{'})$ olup $Soc(K^{'})$ sonlu üretilmiş değildir.

Hipotezden , sonlu üretilmiş bir $N \leq M$ alt modülü vardır öyle ki $Soc(M) \leq N$ dir. Farzedelim ki $Soc(K) = K$ olsun. Bu durumda $K \leq_d M$ olduğundan $Soc(K) \leq_d M$ dir. O halde $M = Soc(K) \oplus A$ olacak biçimde bir $A \leq M$ vardır. Ayrıca

$$N = N \cap M = N \cap (Soc(K) \oplus A) = Soc(K) \oplus (N \cap A)$$

olup $Soc(K) \leq_d N$ dir. Bu da gösterir ki $Soc(K)$ sonlu üretilmiştir. Bu ise $Soc(K)$ nın sonlu üretilmiş olmamasıyla çelişir. O halde $Soc(K) \neq K$ dır. Benzer biçimde $K^{'} \neq Soc(K^{'})$ olduğu görülür. Bu durumda Önerme 2.3.10'dan

$$M/Soc(M) \cong K/Soc(K) \oplus K^{'}/Soc(K^{'})$$

olduğundan $K/Soc(K)$ ve $K^{'}/Soc(K^{'})$ nın uniform boyutları, $M/Soc(M)$ nin uniform boyutundan küçüktür ve $M/Soc(M)$ nin uniform boyutu üzerinden indüksiyonla, K ve $K^{'}$ nün sonlu uniform boyuta sahip olduğu sonucuna varırız. Bu da $M = K \oplus K^{'}$ nın sonlu uniform boyuta sahip olmamasıyla çelişir. O halde M, sonlu uniform boyuta sahiptir. ■

Teorem 5.3 *M, C_{12}^{+} koşulunu sağlayan bir modül ve $M/Soc(M)$ sonlu uniform boyuta sahip olsun. Farzedelim ki $Soc(M)$ cancellable olsun. Bu durumda*

M, bir semisimple M_1 alt modülü ve sonlu uniform boyuta sahip bir M_2 alt modülü içerir öyle ki $M = M_1 \oplus M_2$ dir.

Kanıt. Eğer $M = Soc(M)$ ise M simple alt modüllerin bir toplamı olduğundan kanıtlanması gereken birşey yoktur. Farzedelim ki $M \neq Soc(M)$ olsun. Bu durumda $m \notin Soc(M)$ olacak biçimde bir $m \in M$ vardır. M, C_{12} koşulunu sağladığından bir $K^{'} \leq_d M$ ve $\alpha(m)R \leq_e K^{'}$ olacak biçimde bir $\alpha : mR \to K^{'}$ monomorfizması vardır. $K^{'} \leq_d M$ olduğundan $M = K^{'} \oplus K$ olacak biçimde bir $K \leq M$ vardır. $\pi^{'} : M \to K^{'}$ projeksiyon dönüşümü olsun. Bu durumda

$$\alpha(m)R \oplus K = \pi^{'}(\alpha(m))R \oplus K$$

dır. Ayrıca $\alpha(m)R \oplus K \leq_e K^{'} \oplus K$ olduğundan $\pi^{'}(\alpha(m))R \leq_e K^{'}$ dür. Böylece $Soc\ K^{'} \leq \pi^{'}(\alpha(m))R$ bulunur. Yardımcı Teorem 5.2'den $K^{'}$ sonlu uniform boyuta sahiptir. $\pi^{'}(\alpha(m))R \cong \alpha(m)R \cong mR$ olduğundan $\pi^{'}(\alpha(m)) \in K^{'}$ ve $\pi^{'}(\alpha(m)) \notin Soc(K^{'})$ dür. Böylece $K^{'} \neq Soc(K^{'})$ dür. Dolayısıyla ($M \neq Soc(M)$ olduğunu kabul ettiğimizden dolayı) $K \neq Soc(K)$ olur. O halde Önerme 2.3.10'dan

$$M/Soc(M) \cong [K/Soc(K)] \oplus [K^{'}/Soc(K^{'})]$$

olup $K/Soc(K)$ nın uniform boyutu, $M/Soc(M)$ nin uniform boyutundan küçüktür. $M/Soc(M)$ nin uniform boyutu üzerinden indüksiyonla, $K_1, K_2 \leq K$ alt modülleri vardır öyle ki $K = K_1 \oplus K_2$, K_1 semisimple ve K_2 sonlu uniform boyuta sahiptir. Böylece M, semisimple bir K_1 alt modülü ile sonlu uniform boyuta sahip $K_2 \oplus K^{'}$ alt modüllerinin bir dik toplamıdır. ■

Sonuç 5.4 *M, C_{12}^{+} ve essential alt modülleri üzerinde ACC (sırasıyla, DCC) koşulunu sağlayan bir modül olsun. Farzedelim ki Soc M cancellable olsun. Bu durumda M_1, bir semisimple alt modül ve M_2, bir Noether (sırasıyla, Artin) alt modül olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2$ dir.*

Kanıt. Kanıtı ACC durumu için yapalım. DCC durumu için kanıt benzerdir. Farzedelim ki M, essential alt modülleri üzerinde ACC koşulunu sağlasın.

[25, Proposition 3.6]'dan $M/Soc(M)$ Noetherdir. Böylece Teorem 5.3'ten, semisimple bir M_1 alt modülü ve sonlu uniform boyuta sahip bir M_2 alt modülü vardır öyle ki $M = M_1 \oplus M_2$ dir. O halde

$$Soc(M) = Soc(M_1) \oplus Soc(M_2) = M_1 \oplus Soc(M_2)$$

olduğundan $M/Soc(M) \cong M_2/Soc(M_2)$ dir. Böylece $M_2/Soc(M_2)$ Noetherdir. Ayrıca M_2, sonlu uniform boyuta sahip olduğundan $Soc(M_2)$ Noetherdir. Böylece Teorem 2.3.20'den M_2, Noetherdir. ■

Bir M modülünün her semisimple alt modülü, aynı zamanda dik toplanan olan bir komplemente sahipse M modülüne $Weak\ C_{11}$-modül (ya da WC_{11} koşulunu sağlar) diyelim (bakınız, [26, 27]). Örnek 4.15'teki K_R modülü WC_{11} koşulunu sağlar (çünkü, R halkası domain olduğundan $Soc(M) = 0$ olup M, semisimple alt modül içermez) fakat C_{12} koşulunu sağlamaz. Şimdi WC_{11} ile C_{12} koşullarının birbirlerinden bağımsız olduklarını gösterelim. İlk olarak, [28]'deki bir önermeyi verelim:

Yardımcı Teorem 5.5 *M bir Weak C_{11}-modül olsun. Eğer $Soc(M) \leq_e M$ ise M, C_{11} koşulunu sağlar.*

Kanıt. $X \leq M$ olsun. Eğer $X = 0$ ise M, C_{11} koşulunu sağlar. Farzedelim ki $X \neq 0$ olsun. $Soc(X)$, M nin bir semisimple alt modülü olduğundan, M nin bir L dik toplananı vardır öyle ki $Soc(X) \cap L = 0$ ve $Soc(X) \oplus L \leq_e M$ dir. $Soc(X) \leq Soc(M) \leq_e M$ olduğundan

$$Soc(X) = Soc(X) \cap Soc(M) \leq_e Soc(X) \cap M = X \cap Soc(M) \leq_e X \cap M = X$$

dir. Böylece $0 = Soc(X) \cap L \leq_e X \cap L$ olduğundan $X \cap L = 0$ dır ve $Soc(X) \oplus L \leq X \oplus L \leq M$ dir. Bu da gösterir ki $X \oplus L \leq_e M$ dir. O halde Önerme 3.2.3'ten, M, C_{11}-modüldür. ■

Önerme 5.6 *R bir sağ Noether halka olsun. R, C_{12} koşulunu sağlamasın ve $Soc(R_R) \leq_e R$ olsun. Bu durumda C_{12} koşulunu sağlayan fakat WC_{11} koşulunu sağlamayan bir sağ R-modül vardır.*

Kanıt. Yardımcı Teorem 4.8'in kanıtından, eğer $M = R$ alırsak, $M' = E(E(R) \oplus E(R) \oplus ...)$ olmak üzere $M'' = M \oplus M'$ modülü C_{12} koşulunu sağlamasına rağmen C_{11} koşulunu sağlamaz. Diğer yandan, R halkası Noether olduğundan Teorem 2.6.10'dan $E(R) \oplus E(R) \oplus ...$ injektif olup

$$E(E(R) \oplus E(R) \oplus ...) = E(R) \oplus E(R) \oplus ...$$

dir. Ayrıca $Soc(R) \leq_e R \leq_e E(R)$ olduğundan Sonuç 2.3.12'ten $Soc(R) = Soc(E(R))$ dir. Böylece Önerme 2.3.10'dan

$$\begin{aligned} Soc(M'') &= Soc(R) \oplus Soc(E(R) \oplus E(R) \oplus ...) \\ &= Soc(R) \oplus (\bigoplus_I^{\infty} Soc(E(R))) \\ &= \bigoplus_I^{\infty} Soc(R) \leq_e \bigoplus_I^{\infty} R \leq_e M'' \end{aligned}$$

olduğundan, Yardımcı Teorem 5.5'ten M'', WC_{11} koşulunu sağlamaz. ■

Şimdi, Önerme 5.6'nın varsayımlarını sağlayan ancak Teorem 5.3 ve Sonuç 5.4'ün her ikisindeki C_{12}^+ koşulunun kaldırılamayacağını gösteren bir örnek verelim:

Örnek 5.7 $R = \left[\begin{smallmatrix} \mathbb{Z}_4 & 2\mathbb{Z}_4 \\ 0 & \mathbb{Z}_4 \end{smallmatrix}\right]$ *olsun. Bu durumda R_R, C_{12}^+ koşulunu sağlamaz.*

Kanıt. R_R nin tüm alt modülleri; $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 2\mathbb{Z}_4 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$, $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{Z}_4 \end{smallmatrix}\right]$, $\left[\begin{smallmatrix} 2\mathbb{Z}_4 & 2\mathbb{Z}_4 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$, $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 2\mathbb{Z}_4 \\ 0 & 2\mathbb{Z}_4 \end{smallmatrix}\right]$, $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 2\mathbb{Z}_4 \\ 0 & \mathbb{Z}_4 \end{smallmatrix}\right]$, $\left[\begin{smallmatrix} 2\mathbb{Z}_4 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$, $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\mathbb{Z}_4 \end{smallmatrix}\right]$, $\left[\begin{smallmatrix} 2\mathbb{Z}_4 & 0 \\ 0 & \mathbb{Z}_4 \end{smallmatrix}\right]$, $\left[\begin{smallmatrix} 2\mathbb{Z}_4 & 0 \\ 0 & 2\mathbb{Z}_4 \end{smallmatrix}\right]$, $\left[\begin{smallmatrix} 2\mathbb{Z}_4 & 2\mathbb{Z}_4 \\ 0 & \mathbb{Z}_4 \end{smallmatrix}\right]$, $\left[\begin{smallmatrix} 2\mathbb{Z}_4 & 2\mathbb{Z}_4 \\ 0 & 2\mathbb{Z}_4 \end{smallmatrix}\right]$, $\left[\begin{smallmatrix} \mathbb{Z}_4 & 2\mathbb{Z}_4 \\ 0 & 2\mathbb{Z}_4 \end{smallmatrix}\right]$, 0 ve kendisidir. Ayrıca

$$Soc(R_R) = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 2\mathbb{Z}_4 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] + \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\mathbb{Z}_4 \end{smallmatrix}\right] + \left[\begin{smallmatrix} 2\mathbb{Z}_4 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 2\mathbb{Z}_4 & 2\mathbb{Z}_4 \\ 0 & 2\mathbb{Z}_4 \end{smallmatrix}\right] \leq_e R_R$$

ve

$$\begin{aligned} Soc(R_R) &= \left[\begin{smallmatrix} 0 & 2\mathbb{Z}_4 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] \oplus \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\mathbb{Z}_4 \end{smallmatrix}\right] \oplus \left[\begin{smallmatrix} 2\mathbb{Z}_4 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] \\ &= \left[\begin{smallmatrix} 0 & 2\mathbb{Z}_4 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] \oplus \left[\begin{smallmatrix} 2\mathbb{Z}_4 & 0 \\ 0 & 2\mathbb{Z}_4 \end{smallmatrix}\right] \\ &= \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\mathbb{Z}_4 \end{smallmatrix}\right] \oplus \left[\begin{smallmatrix} 2\mathbb{Z}_4 & 2\mathbb{Z}_4 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] \\ &= \left[\begin{smallmatrix} 2\mathbb{Z}_4 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] \oplus \left[\begin{smallmatrix} 0 & 2\mathbb{Z}_4 \\ 0 & 2\mathbb{Z}_4 \end{smallmatrix}\right] \end{aligned}$$

olup $Soc(R_R)$ cancellabledir. Şimdi $R/Soc(R)$ nin uniform boyutunu bulalım. Bunun için ilk olarak $R/Soc(R)$ nin uniform alt modüllerini bulalım.

$U/Soc(R) \leq R/Soc(R)$ olsun. Bu durumda $Soc(R) \subseteq U$ dur. O halde U alt modülü, $U_1 := \left[\begin{smallmatrix} 2\mathbb{Z}_4 & 2\mathbb{Z}_4 \\ 0 & \mathbb{Z}_4 \end{smallmatrix}\right]$ veya $U_2 := \left[\begin{smallmatrix} \mathbb{Z}_4 & 2\mathbb{Z}_4 \\ 0 & 2\mathbb{Z}_4 \end{smallmatrix}\right]$ veya $R = \left[\begin{smallmatrix} \mathbb{Z}_4 & 2\mathbb{Z}_4 \\ 0 & \mathbb{Z}_4 \end{smallmatrix}\right]$ veya $Soc(R)$ dir.

- Eğer $U = U_1$ ise

$$U_1/Soc(R) = \left\{ \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y \end{smallmatrix}\right] + \left[\begin{smallmatrix} 2\mathbb{Z}_4 & 2\mathbb{Z}_4 \\ 0 & 2\mathbb{Z}_4 \end{smallmatrix}\right] \mid y \in \{\bar{1}, \bar{3}\} \right\}$$

- Eğer $U = U_2$ ise

$$U_2/Soc(R) = \left\{ \left[\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] + \left[\begin{smallmatrix} 2\mathbb{Z}_4 & 2\mathbb{Z}_4 \\ 0 & 2\mathbb{Z}_4 \end{smallmatrix}\right] \mid x \in \{\bar{1}, \bar{3}\} \right\}$$

- Eğer $U = R$ ise

$$R/Soc(R) = \left\{ \left[\begin{smallmatrix} m & 0 \\ 0 & n \end{smallmatrix}\right] + \left[\begin{smallmatrix} 2\mathbb{Z}_4 & 2\mathbb{Z}_4 \\ 0 & 2\mathbb{Z}_4 \end{smallmatrix}\right] \mid m, n \in \{\bar{1}, \bar{3}\} \right\}$$

dir. Acaba $U_1/Soc(R)$, $R/Soc(R)$ nin uniform alt modülü mü? $A/Soc(R) \leq U_1/Soc(R)$ alalım. $Soc(R) \subseteq A$ ve $A \leq U_1$ olacağından ya $A = U_1$ ya da $A = Soc(R)$ olmalıdır. O halde $U_1/Soc(R)$ simple alt modüldür ve dolayısıyla uniformdur. Benzer şekilde $U_2/Soc(R)$ de uniformdur ve

$$[U_1/Soc(R)] \oplus [U_2/Soc(R)] \leq_e R/Soc(R)$$

olup $udim(R/Soc(R)) = 2$ dir.

Şimdi R_R nin C_{12}^{+} koşulunu sağladığını farzedelim. $D = \left[\begin{smallmatrix} \mathbb{Z}_4 & 2\mathbb{Z}_4 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] \leq_d R$ olsun. Bu durumda $N = \left[\begin{smallmatrix} 2\mathbb{Z}_4 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ olmak üzere bir $\varphi : N \to D$ monomorfizması vardır öyle ki $\varphi(N) \leq_e D$ dir. N uniform ve $N \cong \varphi(N)$ olduğundan $\varphi(N)$ uniformdur. $\varphi(N) \leq_e D$ olduğundan D uniform olur ki bu da çelişkidir. Çünkü $N \leq D$ ve $N \cap \left[\begin{smallmatrix} 0 & 2\mathbb{Z}_4 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] = 0$ olup $N \nleq_e D$ dir. Bundan dolayı böyle bir monomorfizma yoktur. Sonuç olarak, R_R, C_{12}^{+} koşulunu sağlamaz. ∎

[21, Proposition 2]'de, bir Weak C_{11}-modülün; Socle'ı essential olan bir modül ile Socle'ı sıfır olan bir modülün dik toplamı şeklinde yazılabildiği ispatlandı. Şimdi, benzer bir sonucu, Socle'ı cancellable olan bir C_{12}-modül için verelim:

Önerme 5.8 *M, C_{12} koşulunu sağlayan bir modül olsun. Eğer $Soc(M)$ cancellable ise $Soc(M_1) \leq_e M_1$ ve $Soc(M_2) = 0$ koşulunu sağlayan $M_1, M_2 \leq M$ alt modülleri için $M = M_1 \oplus M_2$ dir.*

Kanıt. $N = Soc(M)$ olsun. Bu durumda bir $M_1 \leq_d M$ ve bir $\alpha : N \to M_1$ monomorfizması vardır öyle ki $\alpha(N) \leq_e M_1$ dir. $M_1 \leq_d M$ olduğundan $M = M_1 \oplus M_2$ olacak biçimde bir $M_2 \leq M$ vardır. Önerme 2.3.9 ve Önerme 2.3.11'den $\alpha(Soc(N)) = \alpha(Soc(Soc(M))) = \alpha(N) \subseteq Soc(M_1) \subseteq M_1$ dir. $\alpha(N) \leq_e M_1$ olduğundan $\alpha(N) \leq_e Soc(M_1)$ ve $Soc(M_1) \leq_e M_1$ dir. Böylece $\alpha(N) \oplus Soc(M_2) \leq_e Soc(M)$ dir. Bundan dolayı

$$\begin{aligned} Soc(M) = Soc(M_1) \oplus Soc(M_2) &= Soc(\alpha(N)) \oplus Soc(M_2) \\ &\cong Soc(N) \oplus Soc(M_2) \\ &= Soc(M_1) \oplus Soc(M_2) \oplus Soc(M_2) \end{aligned}$$

dir. $Soc(M)$ nin cancellable olduğunu kabul ettiğimizden $Soc(M_2) = 0$ bulunur. Böylece M nin istenilen ayrışımını elde ederiz. ■

6 HER AYRIŞIMIN C_{12} KOŞULUNU GEREKTİRMEDİĞİNE İLİŞKİN BİR ÖRNEK KURULUŞU

Bu bölümde, $Soc(M_1) \leq_e M_1$, $Soc(M_2) = 0$, $0 \neq M_2$ ve ne M_1 ne de M_2, cancellable Socle'a sahip olmayan ve C_{12} koşulunu sağlamayan modüller olmak üzere, değişmeli bir R halkası üzerinde $M = M_1 \oplus M_2$ olan bir modül örneği vereceğiz. Bu ters örnek, aynı zamanda [21, Example 3]'de verilen örneğe açıklık getirir.

Örneği kurmadan önce bir kaç tanım ve kullanışlı bir Yardımcı Teorem ile devam edelim:

Tanım 6.1 *S bir halka ve M de (S,S)-bimodül olsun. Yani M aynı zaman da hem sağ S-modül, hem sol S-modül olsun ve her $s, s' \in S$, $m \in M$ için $(sm)s' = s(ms')$ özelliğini sağlasın. $R = S \oplus M$ yapısını oluşturalım ve R üzerindeki çarpmayı*

$$(s,m)(s',m') = (ss', sm' + ms')$$

olarak tanımlayalım. Bileşensel toplam ve yukarıda tanımlanan çarpma işlemleri ile R nin, birimi $(1,0)$ olan bir halka olduğu açıkça görülür. Ayrıca $S = S \oplus (0)$, R nin bir alt halkası; $I = (0) \oplus M$, $I^2 = 0$ olan bir ideal ve sağ R-modüller olarak $R/M \cong S$ dir. Bu şekilde oluşturulan R halkasına M nin S ile trivial extensionu (aşikar genişlemesi) denir ve $R = S \ltimes M$ ile gösterilir.

Tanım 6.2 *R bir halka olsun. R nin opposite halkası olarak adlandırılan yeni bir R^{op} yapısı inşaa edelim. R^{op} nin toplamsal yapısı, R halkasının ki gibi olsun. R^{op} üzerindeki çarpmayı*

$$(r,s) \longmapsto r * s = sr$$

olarak tanımlayalım. Kolayca görülür ki bu işlemler ile R^{op} bir halkadır. Ayrıca

$$R \text{ değişmeli halka } \Longleftrightarrow R = R^{op}$$

dir.

Şimdi, M bir sol R-modül olsun.

$$\begin{array}{rcl} \star \ : \ M \times R^{op} & \longrightarrow & M \\ (x, r) & \longmapsto & x \star r = rx \end{array}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu işlem altında M, bir sağ R^{op}-modüldür. Özel olarak R halkası değişmeli ise $R = R^{op}$ olduğundan M nin sağ R-modül yapısı ile sol R-modül yapısı aynıdır.

Yardımcı Teorem 6.3 *$M = M_1 \oplus M_2$ olsun. Bu durumda*

$$End(M_R) \cong \begin{bmatrix} End(M_1) & Hom(M_2, M_1) \\ Hom(M_1, M_2) & End(M_2) \end{bmatrix}$$

dir.

Kanıt. $e_1 = \pi_1$, $e_2 = \pi_2 \in End(M_R)$ öyle ki $M_1 = e_1 M$, $M_2 = e_2 M$, $e_1^2 = e_1$, $e_1 + e_2 = i$, $e_1 e_2 = 0 = e_2 e_1$ olsun.

$$\theta : End(M_R) \longrightarrow \begin{bmatrix} End(M_1) & Hom(M_2, M_1) \\ Hom(M_1, M_2) & End(M_2) \end{bmatrix}, \ \theta(h) = \begin{bmatrix} e_1 h e_1 & e_1 h e_2 \\ e_2 h e_1 & e_2 h e_2 \end{bmatrix}$$

dönüşümünü tanımlayalım. θ dönüşümünün iyi tanımlı bir toplamsal homomorfizma olduğu açıktır. Şimdi θ dönüşümünün çarpımsal bir homomorfizma olduğu görelim:

$h, k \in End(M_R)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \theta(h)\theta(k) &= \begin{bmatrix} e_1 h e_1 & e_1 h e_2 \\ e_2 h e_1 & e_2 h e_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 k e_1 & e_1 k e_2 \\ e_2 k e_1 & e_2 k e_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e_1 h e_1 k e_1 + e_1 h e_2 k e_1 & e_1 h e_1 k e_2 + e_1 h e_2 k e_2 \\ e_2 h e_1 k e_1 + e_2 h e_2 k e_1 & e_2 h e_1 k e_2 + e_2 h e_2 k e_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e_1 h (e_1 + e_2) k e_1 & e_1 h (e_1 + e_2) k e_2 \\ e_2 h (e_1 + e_2) k e_1 & e_2 h (e_1 + e_2) k e_2 \end{bmatrix} \\ &= \theta(hk) \end{aligned}$$

olduğundan θ bir halka homomorfizmasıdır. Şimdi θ nın bire-bir olduğunu görelim:

$h \in Ker\theta$ alalım. $\theta(h) = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} 0 &= e_1he_1 + e_1he_2 + e_2he_1 + e_2he_2 \\ &= e_1h(e_1 + e_2) + e_2h(e_1 + e_2) \\ &= e_1h + e_2h \\ &= (e_1 + e_2)h \end{aligned}$$

olup $h = 0$ bulunur. O halde $Ker\theta = 0$ dır. Yani θ bire-birdir. Son olarak θ nın örtenliğini görelim:

$\left[\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right] \in \left[\begin{smallmatrix} End(M_1) & Hom(M_2,M_1) \\ Hom(M_1,M_2) & End(M_2) \end{smallmatrix}\right]$ alalım. $\theta(h) = \left[\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right]$ olacak biçimde bir $h \in End(M_R)$ bulmalıyız. Şimdi

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} : M \longrightarrow M,\ \bar{\alpha}(m) = \bar{\alpha}(e_1m + e_2m) = \alpha(e_1m) \\ \bar{\beta} : M \longrightarrow M,\ \bar{\beta}(m) = \bar{\beta}(e_1m + e_2m) = \beta(e_2m) \\ \bar{\gamma} : M \longrightarrow M,\ \bar{\gamma}(m) = \bar{\gamma}(e_1m + e_2m) = \gamma(e_1m) \\ \bar{\delta} : M \longrightarrow M,\ \bar{\delta}(m) = \bar{\delta}(e_1m + e_2m) = \delta(e_2m) \end{aligned}$$

olarak tanımlayalım. İddiamız $h = \bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma} + \bar{\delta}$ olduğudur. Şimdi bunu görelim:

$$\theta(h)\begin{bmatrix} e_1m \\ e_2m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1he_1 & e_1he_2 \\ e_2he_1 & e_2he_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_1m \\ e_2m \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e_1\bar{\alpha}e_1 + e_1\bar{\beta}e_1 + e_1\bar{\gamma}e_1 + e_1\bar{\delta}e_1 & e_1\bar{\alpha}e_2 + e_1\bar{\beta}e_2 + e_1\bar{\gamma}e_2 + e_1\bar{\delta}e_2 \\ e_2\bar{\alpha}e_1 + e_2\bar{\beta}e_1 + e_2\bar{\gamma}e_1 + e_2\bar{\delta}e_1 & e_2\bar{\alpha}e_2 + e_2\bar{\beta}e_2 + e_2\bar{\gamma}e_2 + e_2\bar{\delta}e_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_1m \\ e_2m \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e_1\bar{\alpha}(e_1m) + e_1\bar{\beta}(e_1m) + e_1\bar{\gamma}(e_1m) + e_1\bar{\delta}(e_1m) + \\ e_1\bar{\alpha}(e_2m) + e_1\bar{\beta}(e_2m) + e_1\bar{\gamma}(e_2m) + e_1\bar{\delta}(e_2m) \\ \\ e_2\bar{\alpha}(e_1m) + e_2\bar{\beta}(e_1m) + e_2\bar{\gamma}(e_1m) + e_2\bar{\delta}(e_1m) + \\ e_2\bar{\alpha}(e_2m) + e_2\bar{\beta}(e_2m) + e_2\bar{\gamma}(e_2m) + e_2\bar{\delta}(e_2m) \end{bmatrix}$$

$$\theta(h)\begin{bmatrix}e_1m\\e_2m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e_1\alpha(e_1m)+e_1\gamma(e_1m)+e_1\beta(e_2m)+e_1\delta(e_2m)\\e_2\alpha(e_1m)+e_2\gamma(e_1m)+e_2\beta(e_2m)+e_2\delta(e_2m)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\alpha(e_1m)+\beta(e_2m)\\\gamma(e_1m)+\delta(e_2m)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\\gamma & \delta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_1m\\e_2m\end{bmatrix}$$

olduğundan θ örtendir. Dolayısıyla bir izomorfizmadır. ■

Örnek 6.4 *([29]) S, cisim olmayan değişmeli bir domain ve Jacobson Radikali*

$$J(S)=\cap\{\ K\trianglerighteq S\mid K\ \textit{maksimal ideal}\}=0$$

olsun. V, faithful semisimple S-modül olsun. Yani V,

$$s\in S\ \textit{için}\ Vs=0\Longrightarrow s=0$$

özelliğini sağlasın. $J(S)=0$ (yani S semiprimitive halka) olduğundan böyle bir V_S modülü vardır. Çünkü, S, primitive halkaların (R bir halka olmak üzere, i)M_R simple ve ii) M_R faithful olacak şekilde bir M, R-modülü var ise R ye primitive halka denir.) bir alt dik çarpımıdır ([30]). Dolayısıyla V, birbirine izomorf olmayan simple S-modüllerin bir sonsuz dik toplamını kapsar bundan dolayı da sonsuz uniform dimensiona sahiptir. Ayrıca bu alt dik çarpım, her bir bileşendeki modüller faithful olduğundan, faithfuldur.

$$R=S\ltimes V=\{\left[\begin{smallmatrix}s&v\\0&s\end{smallmatrix}\right];\ s\in S\ \textit{and}\ v\in V\}$$

S nin V ile aşikar genişlemesini göstersin. S değişmeli halka olduğundan V nin sağ S-modül yapısı ile sol S-modül yapısı aynı olup R değişmeli bir halkadır. R nin

$$I=0\ltimes V=\{\left[\begin{smallmatrix}0&v\\0&0\end{smallmatrix}\right];\ v\in V\}$$

idealini alalım. $Soc(R) = \sum\limits_{L_i} \left(\begin{smallmatrix} 0 & L_i \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $L_i \leq V$ *minimal alt modül ve* V *semisimple olduğundan* $Soc(R) = I$ *dır.* S *bir domain olduğundan her ideali essentialdir ve böylece* $Soc(S) = \bigcap\limits_{I \leq_e S} I = 0$ *olur. Şimdi*

$$\varphi : R \longrightarrow S,\ \varphi(\left[\begin{smallmatrix} s & v \\ 0 & s \end{smallmatrix}\right]) = s$$

dönüşümünü tanımlayalım. Açıktır ki φ *örten bir homomorfizmadır ve* $Ker\varphi = I$ *dır. O halde* $R/I \cong \varphi(R) = S$ *olup* $Soc(R/I) = Soc(S) = 0$ *elde edilir. Ayrıca,* V *faithful olduğundan, her* $0 \neq r \in R$ *için* $0 \neq mr \in I$ *olacak biçimde bir* $m \in R$ *vardır, yani* $I \leq_e R$ *dir.*

Yukarıda oluşturulan R *halkası ve* I *idealinden hareketle* $M = R \oplus R/I$ R*-modülünü oluşturalım.* $Soc(M) = Soc(R) \oplus Soc(R/I) = I \oplus 0$ *olup* $Soc(M)$ *cancellable değildir. Şimdi* M *nin dik toplam ayrışımlarını belirleyelim. Bunun için, öncelikle* $End_R(M)$ *nin idempotentlerini hesaplayalım:*

Yardımcı Teorem 6.5 *Yukarıdaki gösterimler ile:*

(i) $End_R(M) \cong \left[\begin{smallmatrix} R & I \\ R/I & R/I \end{smallmatrix}\right]$ *;*

(ii) $End_R(M)$ *nin trivial olmayan idempotentleri (yani 0 ve 1 den farklı olan idempotentleri)* $y \in I$ *ve* $t = \left[\begin{smallmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{smallmatrix}\right] \in R$ *olmak üzere ya* $\left[\begin{smallmatrix} 1 & y \\ 0 & 1+I \end{smallmatrix}\right]$, *ya* $\left[\begin{smallmatrix} 1 & y \\ t+I & 0+I \end{smallmatrix}\right]$ *ya da* $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ t+I & 1+I \end{smallmatrix}\right]$ *formundadır.*

Kanıt. (i)

$$End_R(M) \cong \begin{bmatrix} End_R(R) & Hom_R(R/I, R) \\ Hom_R(R, R/I) & End_R(R/I) \end{bmatrix},$$

$End_R(R) \cong R$, $End_R(R/I) \cong R/I$ *ve* $Hom_R(R, R/I) \cong R/I$ *olduğunu biliyoruz. Eğer* $f : R/I \to R$ *ise* $f(R/I)I = 0$ *dır. Ayrıca,* $\left[\begin{smallmatrix} s & v_1 \\ 0 & s \end{smallmatrix}\right] \in f(R/I)$ *ve* $\left[\begin{smallmatrix} 0 & v_2 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] \in I$ *alırsak* $f(R/I)I = 0$ *olduğundan* $sv_2 = 0$ *bulunur.* V *faithful bir modül olduğundan (yani,* $\{\ r \in R \mid rv = 0\ (v \in V)\} = 0$*)* $s = 0$ *olmalıdır. O halde* $\left[\begin{smallmatrix} s & v_1 \\ 0 & s \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 0 & v_1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ *olup* $f(R/I) \subseteq I$ *olur. Böylece,* I *bir* R/I*-modül* *olduğundan,* $Hom_R(R/I,R) = Hom_{R/I}(R/I,I) \cong I$ *dır. Bu da ispatı bitirir.*

(ii) *Farzedelim ki* $\left[\begin{smallmatrix} s & v \\ 0 & s \end{smallmatrix}\right]$*, R nin bir idempotenti olsun. Bu durumda*

$$\left[\begin{smallmatrix} s & v \\ 0 & s \end{smallmatrix}\right]^2 = \left[\begin{smallmatrix} s^2 & sv+vs \\ 0 & s^2 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} s & v \\ 0 & s \end{smallmatrix}\right]$$

dir. Böylece s*,* S *nin bir idempotentidir ve* S*, bir domain olduğundan* $s \in \{0,1\}$ *dir. O halde* $sv + vs = v$ *olduğundan* $v = 0$ *dır. Bundan dolayı,* R *nin sadece trivial idempotentleri vardır. Ayrıca* $R/I \cong S$ *olduğundan,* R/I *nın da idempotentleri sadece trivial olanlardır.*

Şimdi (i) yi kullanarak, $End_R(M)$ *nin idempotentlerini hesaplayalım.* $r, t_1, t_2 \in R$ *ve* $y \in I$ *olmak üzere,* $\left[\begin{smallmatrix} r & y \\ t_1+I & t_2+I \end{smallmatrix}\right]$*,* $End_R(M)$ *nin trivial olmayan bir idempotenti olsun.* $I.R/I = R/I.I = 0$ *olduğundan,*

$$\left[\begin{smallmatrix} r & y \\ t_1+I & t_2+I \end{smallmatrix}\right]^2 = \left[\begin{smallmatrix} r^2 & ry \\ t_1r+t_2t_1+I & t_2^2+I \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} r & y \\ t_1+I & t_2+I \end{smallmatrix}\right]$$

dır. r*,* R *nin idempotenti olduğundan ya* 0 *ya da* 1 *olmak zorundadır. Aynı durum* $t_2 + I$ *içinde geçerlidir.* $t_1r + t_2t_1 + I = t_1 + I$ *olduğundan aşağıdaki olasılıklar vardır:*

1. Durum: *Eğer* $t_1 + I = 0$ *ise,* $\left[\begin{smallmatrix} 1 & y \\ 0 & 1+I \end{smallmatrix}\right]$*,* $y \in I$ *olmak üzere* $\left[\begin{smallmatrix} 1 & y \\ 0 & 0+I \end{smallmatrix}\right]$ *ve* $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1+I \end{smallmatrix}\right]$ *idempotentlerini elde ederiz.*

2. Durum: *Eğer* $t_1 + I \neq 0$ *ise ya* $r_1 = 1$ *ve* $t_2 + I = 0 + I$ *ya da* $r_1 = 0$ *ve* $t_2 + I = 1 + I$ *dır. Son durum için* $y = 0$ *olduğuna dikkat edelim. Bu iki durumdan,* $End_R(M)$ *nin idempotentleri,* $y \in I$ *ve* $t + I \in R/I \setminus \{0\}$ *olmak üzere ya* $\left[\begin{smallmatrix} 1 & y \\ t+I & 0+I \end{smallmatrix}\right]$ *ya da* $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ t+I & 1+I \end{smallmatrix}\right]$ *formundadır. Böylece ispat tamamlanmış olur.* ■

Yardımcı Teorem 6.5'in sonucu olarak aşağıdaki Önermeyi verelim:

Yardımcı Teorem 6.6 *Örnek* 6.4*'ün gösterimleriyle,* L*,* M *nin bir dik toplananı olsun. Bu durumda ya* $Soc\ (L) = Soc\ (M)$ *ya da* $Soc\ (L) = 0$ *dır.*

Kanıt. Kanıt için, M nin dik toplananlarının, Yardımcı Teorem 6.5'de bahsedilen M nin idempotent endomorfizmalarının görüntüleri olduğunu kullanalım.

$f : M \to M$, $\left[\begin{smallmatrix} 1 & * \\ * & * \end{smallmatrix}\right]$ formundaki herhangi bir endomorfizma olmak üzere $f(I \oplus 0) = I \oplus 0$ dır. Böylece $Soc(M) = I \oplus 0 \subseteq f(M)$ dir. Eğer f, $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ * & * \end{smallmatrix}\right]$ formunda bir endomorfizma ise $f(M) \subseteq 0 \oplus R/I$ dır ve böylece $Soc\ (f(M)) = 0$ dır. Önerme 6.5'te, $End_R(M)$ nin tüm idempotentlerinin, bu iki endomorfizma sınıfından birinde olduğunu kanıtlandığımızdan ispat biter. ■

Sonuç 6.7 *R halkası ve M sağ R-modülü Örnek* 6.4*'deki gibi olsun. Bu durumda $Soc(M)$ cancellable değildir ve M_R modülü C_{12} koşulunu sağlamaz.*

Kanıt. $Soc(M) = I \oplus 0$ ve Örnek 6.4'ten $Soc(M)$, birbirine izomorf olmayan simple modüllerin bir sonsuz dik toplamını kapsar. Bundan dolayı $Soc(M)$, cancellable değildir.

Şimdi kabul edelim ki M_R modülü C_{12}-özelliğini sağlasın. N, M nin bir simple alt modülü olsun. Bu durumda bir $L \leq_d M$ ve $\alpha : N \to L$ monomorfizması vardır öyle ki $\alpha(N) \leq_e L$ dir. $N \cong \alpha(N)$ ve N simple olduğundan $\alpha(N)$ simple olup

$$Soc\ (L) = Soc\ (\alpha(N)) = \alpha(N)$$

dir. Önerme 6.6'dan ya $\alpha(N) = 0$ ya da $\alpha(N) = Soc(M)$ dir. Her iki durumda da bir çelişki elde ederiz. O halde M modülü C_{12} koşulunu sağlamaz. ■

Sonuç 6.7'den görülür ki, genel olarak, Önerme 5.8'in tersi doğru değildir. Yani $M = M_1 \oplus M_2$, $Soc(M_1) \leq_e M_1$ ve $Soc(M_2) = 0$ iken eğer $Soc(M)$ cancellable değil ise M modülü C_{12} koşulunu sağlamayabilir.

7 TARTIŞMA, SONUÇ ve ÖNERİLER

CS-modüllerin literatürdeki genelleştirmeleri olan C_{11}-modül sınıfları, FI-extending modül sınıfları ve C_{12}-modül sınıfları incelenerek bu modül sınıfları arasında olan ve olmayan gerektirmeler verilmiştir.

Son yıllarda yapılan CS-modüllerin en esaslı genelleştirmesi olan FI-extending modül sınıfı ile C_{12}-modül sınıfı arasındaki ilişkiler incelenerek, FI-extending bir modülün C_{12}-modül olmayacağına dair bir örnek verilmiştir. Ancak bugüne kadar yapılan araştırmalarda bir C_{12}-modülün FI-extending olup olmadığı sorusuna yanıt verilememiştir. Bu soruya yanıt verildiği takdirde FI-extending modül sınıfı ile ilgili olan bir çok açık problem çözüme kavuşacaktır.

KAYNAKLAR

[1] Von Neumann, J., "Continuous geometry", *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **22**, 92-100, 1936.

[2] Von Neumann, J., "Examples of continuous geometries", *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **22**, 101-108, 1936.

[3] Von Neumann, J., "On regular rings", *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **22**, 707-713, 1936.

[4] Utumi, Y., "On continuous rings and self-injective rings", *Trans. Amer. Math. Soc*, **118**, 158-173, 1965.

[5] Jeremy, L., "Sur les modules et anneaux quasi-continus", *C. R. Acad. Sci. Paris*, **273**, 80-83, 1971.

[6] Chatters, A. W. ve Hajarnavis, C. R., "Rings in which every complement right ideal is a direct summand", *Quart. J. Math. Oxford*, **28**, 61-80, 1977.

[7] Smith, P.F. ve Tercan, A., "Generalizations of CS-modules", *Comm. Algebra*, **21**, 1809-1847, 1993.

[8] Birkenmeier, G. F. ve Tercan, A., "When some complement of a submodule is a summand", *Comm. Algebra*, **35**, 597-611, 2007.

[9] Anderson, F.W. ve Fuller, K.R., *Rings and Categories of Modules*, Springer-Verlag, New York, 1974.

[10] Goodearl, K. R., *Ring Theory*, Marker Dekker, 1976.

[11] Mohamed, S.H. ve Muller, B.J., *Continuous and Discrete Modules*, London Math. Soc. Lecture Note Series, **147**,Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.

[12] Kasch, F., *Modules and Rings*, Academic Press, London, 1982.

[13] Sharpe, D. W. ve Vamos, P., *Injective Modules*, Cambridge University Press, 1972.

[14] Fuchs, L., *Infinite Abelian Groups*, Academic Press, London, 1970.

[15] Birkenmeier, G. F., Park, J.K. ve Rizvi, S.T., "Modules with Fully Invariant Submodules Essential in Fully Invariant Summands", *Comm. Algebra*, **30(4)**, 1833-1852, 2002.

[16] Birkenmeier, G. F., Călugăreanu, G., Fuchs, L. ve Goeters, H.P., "The Fully-Invariant-Extending Property for Abelian Groups", *Comm. Algebra*, **29**, 673-685, 2001.

[17] Rotman, J.J., *Introduction to the Theory of Groups (3rd ed.)*, Wm. C. Brown, Dubuque, 1980.

[18] Tercan, A. ve Takıl, F., "Modules Whose Submodules are Essentially Embedded in some Direct Summands essential submodules", *Comm. Algebra*, to appear.

[19] Dung, N.V., Huynh, D.V., Smith, P.F. ve Wisbauer, R., *Extending Modules*, Pitman RN Mathematics 313, Longman, Harlow, 1994.

[20] Smith, P.F. ve Tercan, A., "Direct summands of modules which satisfy (C_{11})", *Algebra Colloq.*, **11(2)**, 231-237, 2004.

[21] Tercan, A., "Weak (C_{11})-modules and algebraic topology type examples", *Rocky Mount. J. Math.*, **34**, 783-792, 2004.

[22] Bredon, G. E., *Topology and Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1993.

[23] Camillo V. ve Yousif M.F., "CS-modules with acc or dcc on essential submodules", *Comm. Algebra*, **19**, 655-662, 1991.

[24] Lam, T. Y., *Lectures on Modules and Rings*, Springer-Verlag, New York, 1999.

[25] Goodearl, K. R., "Singular torsion and the splitting properties", *Amer. Math. Soc. Memoirs*, **124**, 1972.

[26] Tercan, A., "Weak (C_{11}^{+}) modules with ACC or DCC on essential submodules", *Taiwanese J. Math.*, **5(4)**, 731-738, 2001.

[27] Er, N., "Direct sums and summands of weak CS-modules and continuous modules", *Rocky Mount. J. Math.*, **29(2)**, 491-503, 1999.

[28] Tercan, A., Addendum and Corrigendum to "Weak (C_{11}^{+}) modules with ACC or DCC on essential submodules", *Taiwanese J. Math.*, **8(3)**, 557-558, 2004.

[29] Herbera, D., "An Example", *Personel Communication with Tercan, A. and Takıl, F.*, 2007.

[30] Dauns, J., *Modules and Rings*, Cambridge University Press, New York, 1994.